Lecture 2015-11-05

05 November 2015

Det gäller också att
$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| * ||\mathbf{v}|| * sin(\alpha)$ (där α minsa vinken mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$)

Det vill säga arean av parallellogrammen som spänns upp $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$

Exempel Beräkna arean av en triangel med hörn i $A = (1, 1, 0), B = (3, 0, 2), C = (0, -1, 1)$

Lösning $\frac{1}{2} * ||\vec{AB} \times \vec{AC}|| = \frac{1}{2} * ||\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]|| = \frac{1}{2} * \sqrt{9 + 16 + 25} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

(punkt) För att beskriva en linje i R^2 behövs en skärning med y-axeln (m) och lutning (k).
$y = k * x + m$ (linjens ekvation)

(punkt) För att beskriva ett plan i R^3 behövs en punkt $P_0 = \left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right]$ i planet och en vektor $n = \left[\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right]$[1] ortogonal mot planet.
Varje annan punkt $Q = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$ ligger i planet om $\vec{P_0Q}(perpendicular)n$ det vill säga $\vec{P_0Q} * n = 0$
Eftersom $\vec{P_0Q} = \left[\begin{smallmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{smallmatrix}\right]$ får vi
$0 = \left[\begin{smallmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{smallmatrix}\right] * \left[\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right] = A(x - x_0) + V(y - y_0) + C(z - z_0) <=> Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$[2]
$Ax + By + Cz = D$ ¡- planets ekvation på normalform med normalen $n = \left[\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right]$

Exempel $P_0 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$ och $n = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]$ bestäm planet på normalform

Lösning Vi får $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 4(x-3)+2(y-(-1))+(-5)(z-7) = 4x+2y-5z+25 = 0$

Exempel Bestäm planets ekvation (normalform) för planet genom punkterna $P_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] P_2 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] P_3 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$

Lösning Eftersom P_1, P_2, P_3 i planet är $\vec{P_1P_2} = \left[\begin{smallmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1-(-1) \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ och $\vec{P_1P_3} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ parallella med planet.
Och $n = \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \left[\begin{smallmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]$ är oktagonal mot planet och alltså en normalvektor.
Det vill säga $9(x - 1) + 1(y - 2) - 5(z + 1) = 0 <=> 9x + y - 5z - 16 = 0$

Ett plan kan också ges av en punkt P_0 och två vektorer $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right]$ och $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right]$ i planet.
Planet består av alla punkter $P = P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ där $s, t \in R$

Exempel $P_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right], \mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$
$P = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] + s\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] + t\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ där $s, t \in R$
eller $\left\{ \begin{smallmatrix} x=1-s+2t \\ y=2+2s+t \\ z=3+2s+5t \end{smallmatrix} \right.$[3]

Byt representation till normalform genom att bestämma $n = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]$ och planet: $8(x - 1) + 9(y - 2) + (-5)(z - 3) = 0$
Vi får $8x + 9g - 5z = 11$

[1] Normalvektor
[2] D (konstant) $= Ax_0 - By_0 - Cz_0$
[3] Parameterform

Linje i R^3

Antag linje L parallell med vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_e? \\ v_s? \end{bmatrix}$ och går igenom en punkt $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

L består av alla punkter $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Så att $\vec{P_0 P}$ är parallell med $\mathbf{v}$ det vill säga $\vec{P_0 P} = t * \mathbf{v}$ där $t \in R$

Eller $\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix} = t * \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x=x_0+tv_1 \\ y=y_0+tv_2 \\ z=z_0+tv_3 \end{cases}$

<u>Exempel</u> Linjen genom punkt $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ parallell med $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

har parameterframställningen $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+5t \\ z=-3-7t \end{cases}, t \in R$

Kan lösa ut t

$t = \frac{x-1}{4}, t = \frac{-z-3}{7}, t = \frac{y-2}{5}$

(i parameterform av linjen lös ut t. Vi får:

$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$

<u>Exempel</u> (a) Bestäm ekvationen för linjen L som går genom punkterna $P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

<u>Lösning</u> Eftersom $\vec{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ är parallell med L och $P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ ligger på L ges linjen av

$\begin{cases} x=2+3t \\ y=4-4t \\ z=-1+8t \end{cases}$ där $t \in R$

(b) I vilken punkt skär linjen xy-planet?

$z = 0$ i xy-planet, det vill säga $0 = -1 + 8t <=> t = \frac{1}{8}$

Vi får $x = 2 + 3 * \frac{1}{8} = \frac{19}{8}$

$y = 4 - 4 * \frac{1}{8} = \frac{7}{2}, z = 0$

Svar: i punkt $\begin{bmatrix} 19/8 \\ 7/2 \\ 0 \end{bmatrix}$