

Linjär Algebra

Föreläsning 1

Erik Sjöström

November 7, 2015

1 Vektorer

Definition 1.1. En geometrisk vektor i planet eller rummet är en matematisk storhet, med riktning och längd.

- Längden av en vektor \vec{v} skrivs $||\vec{v}||$
- En vektor som börjar i en punkt A och slutar i en punkt B skrivs \overrightarrow{AB}
- Om $||\vec{v}|| = 1$, kallas \vec{v} för enhetsvektor.
- \vec{u} och \vec{v} är parallella om de pekar åt samma håll, eller motsatt håll. Skrivs $\vec{u} \parallel \vec{v}$
- \vec{u} och \vec{v} är ortogonala, om de är vinkelräta, ($\vec{u} \perp \vec{v}$)

Definition 1.2. Summan av $\vec{v} + \vec{u}$ är vektorn som fås genom att placera vektor \vec{u} så att dess startpunkt är samma som \vec{v} :s slutpunkt. $\vec{v} + \vec{u}$ är då vektorn från \vec{v} :s startpunkt till \vec{u} :s slutpunkt.

Definition 1.3. Multiplikation med skalär: $k \cdot \vec{v}$ är den vektor vars längd är $|k| \cdot ||\vec{v}||$, och vars riktning är densamma som \vec{v} om $k > 0$, motsatt om $k < 0$.

Låt:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$$

vara n st vektorer, och

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

vara n st tal.

Vektorn:

$$\vec{u} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n$$

kallas för linjärkombination.

För att praktiskt kunna räkna med vektorer införs kordinatsystem:

- Referenspunkt (origo)
- Referensriktningar i planet \mathbb{R}^2 , eller rummet \mathbb{R}^3

Exempel 1.1.

$$\emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt: \vec{e}_x, \vec{e}_y vara en ON-bas i planet. Dvs $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$ och $||\vec{e}_x|| = ||\vec{e}_y|| = 1$.
Välj t.ex.

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Då har vi en ON-bas för \mathbb{R}^2 .

- Alla vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, kan skrivas som en linjärkombination med basvektorerna, $\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_x + u_2 \cdot \vec{e}_y$
- $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
- Om $P = (p_1, p_2)$ och $Q = (q_1, q_2)$ är två punkter i planet. Vektorn \overrightarrow{PQ} positionerad med start i origo ges av:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{bmatrix}$$

Exempel 1.2.

Låt:

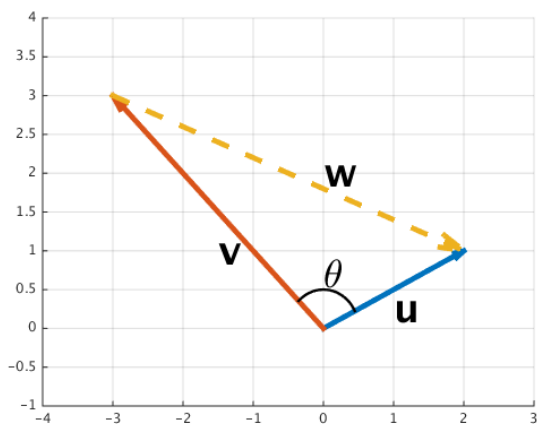
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, ||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, ||\vec{v}|| = \sqrt{18}$$

Låt:

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, ||\vec{w}|| = \sqrt{29}$$



Låt oss nu beräkna vinkeln: Cosinussatsen ger oss:

$$||\vec{w}^2|| = ||\vec{u}^2|| + ||\vec{v}^2|| - 2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos \theta$$

Låt oss bryta ut $\cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{||\vec{w}^2|| - ||\vec{u}^2|| - ||\vec{v}^2||}{-2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{29 - 5 - 18}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{18}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

Vilket ger vinkeln $\theta \approx 108^\circ$