

Linjär Algebra

Föreläsning 2

Erik Sjöström

November 8, 2015

1 Skalarprodukten

Låt \vec{u} , \vec{v} vara två vektorer. Skalarprodukten definieras då som:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \quad (1)$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna.

Exempel 1.1.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$$

Exempel 1.2.

Anta att vi har \vec{u} , $\vec{v} \neq \vec{0}$, och vinkeln mellan dem är θ . Om:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = 0$$

Dvs: $\cos \theta = 0$, vilket betyder att $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, innebär det att \vec{u} och \vec{v} är ortogonala.

Det gäller att:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow$ Vinkeln spetsig
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow$ Vinkeln trubbig

Säg att:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix}$$

Då säger cosinus-satsen att:

$$\begin{aligned}
 \|\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta && \Leftrightarrow \\
 \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta &= \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2) && \Leftrightarrow \\
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}((u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - ((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2)) \\
 &= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 + u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2)) \\
 &= \frac{1}{2}(2u_1v_1 + 2u_2v_2) \\
 &= u_1v_1 + u_2v_2
 \end{aligned}$$

Dvs, om $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ är två vektorer i \mathbb{R}^2 så är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \quad (2)$$

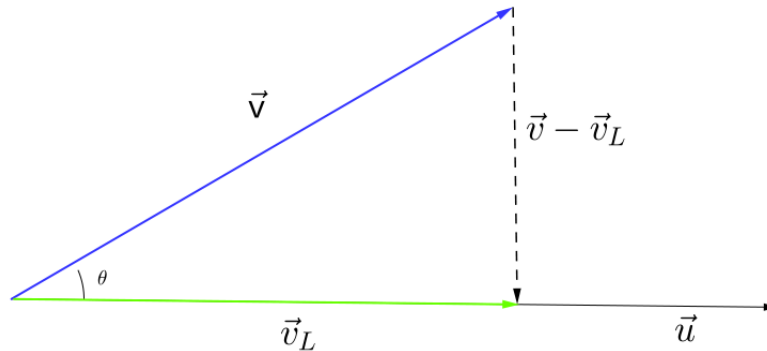
Om $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ är vektorer i \mathbb{R}^3 så är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (3)$$

Detta härleddes på samma sätt som för i \mathbb{R}^2 .

2 Projektion

Definition 2.1. Den ortogonala projektionen av vektor \vec{v} på linjen L (med riktningsvektor \vec{u}) är den vektor som är parallell med \vec{u} och så att $(\vec{v} - \vec{v}_L)$ är ortogonal mot L .



Anmärkning 2.1.

$$\|\vec{v}_L\| = \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

Det gäller att: $\vec{u} \cdot \vec{v}_L = \vec{u} \cdot \vec{v}$, när θ spetsig.

Ty:

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v}_L &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_L\| \cdot \cos 0 \\
 &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_L\| \\
 &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \\
 &= \vec{u} \cdot \vec{v}
 \end{aligned}$$

Analogt gäller det att: $\vec{u} \cdot \vec{v}_L = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$, när θ trubbig.
Ty:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v}_L &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_L\| \cdot \cos \pi \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_L\| \cdot (-1) \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \cdot (-1) \\ &= -(\vec{u} \cdot \vec{v})\end{aligned}$$

Sats 2.1.

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u} \quad (4)$$

Proof. Vi vet att:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}_L$$

Vi får då att:

$$\begin{aligned}0 &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}_L \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot (t \cdot \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - t \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u})\end{aligned}$$

Dvs:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = t \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u})$$

Lös ut t :

$$t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Eftersom $\vec{v}_L = t \cdot \vec{u}$ får vi att:

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

□

Sats 2.2.

$$||\vec{v}_L|| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{||\vec{u}||} \quad (5)$$

Proof. Vi vet att:

$$\vec{v}_L = t \cdot \vec{u}$$

för $t \in \mathbb{R}$, ty \vec{v}_L är parallell med \vec{u} .

Vi får då att:

$$\begin{aligned} ||\vec{v}_L|| &= ||t \cdot \vec{u}|| \\ &= |t| \cdot ||\vec{u}|| \\ &= \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right| \cdot ||\vec{u}|| \\ &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{||\vec{u}||^2} \cdot ||\vec{u}|| \\ &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{||\vec{u}||} \end{aligned}$$

□

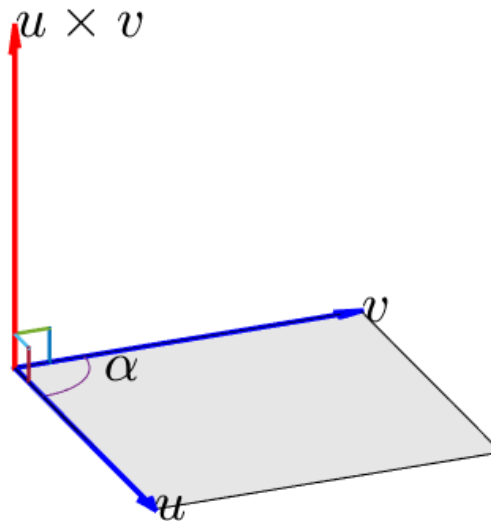
3 Kryssprodukt

Definition 3.1. Givet 2 vektorer:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, i \mathbb{R}^3$$

Kryssprodukten definieras då som:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$



Egenskaper för kryssprodukten:

- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- $(c \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = c \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Exempel 3.1.

Om:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Så är:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Exempel 3.2.

Finn en vektor som är ortogonal mot:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ och } \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lösning:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} (-1)(-2) - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan se att $\vec{u} \times \vec{v}$ är vår lösning ty:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2 - 2 + 0 = 0$$

och:

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$$

Eftersom definitionen av skalärprodukten säger att om skalärprodukten mellan två vektorer är lika med noll, så är de ortogonala mot varandra.