Linjär Algebra
Föreläsning 3

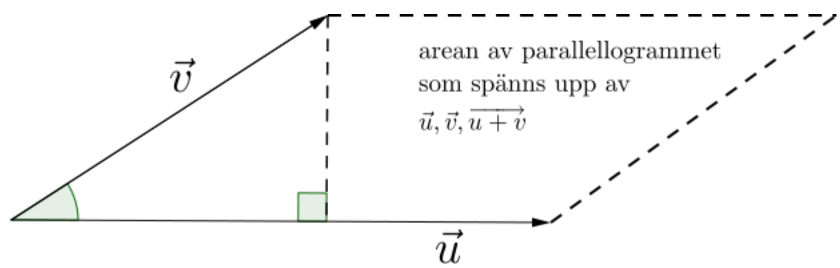
Erik Sjöström

November 7, 2015

1 Mer om kryssprodukten

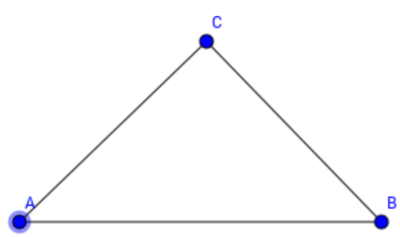
Det gäller också att:

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin\alpha \tag{1}$$



Exempel 1.1. *Beräkna arean av triangeln med hörn i:*

$$A = (1,1,0),\ B = (3,0,2),\ C = (0,-1,1)$$



Lösning:

$$\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}|| \begin{bmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ 2-0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0-1 \\ -1-1 \\ 1-0 \end{bmatrix} || = \frac{1}{2}|| \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} || = \frac{1}{2}\sqrt{9+16+25} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

2 Linjer och plan

För att beskriva en linje i $\mathbb{R}^2$ behövs en skärning med y-axeln (m) och lutningen (k).

$$y = k \cdot x + m \qquad \text{Linjens ekvation} \tag{2}$$

För att beskriva ett plan i $\mathbb{R}^3$ behövs en punkt $p_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}$ i planet och en vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}$, ortogonal mot planet.
Varje annan punkt $Q = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ ligger i planet om vektorn $\overrightarrow{P_0Q} \perp \vec{n}$. Dvs att:

$$\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{n} = 0$$

Eftersom:

$$\overrightarrow{P_0Q} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

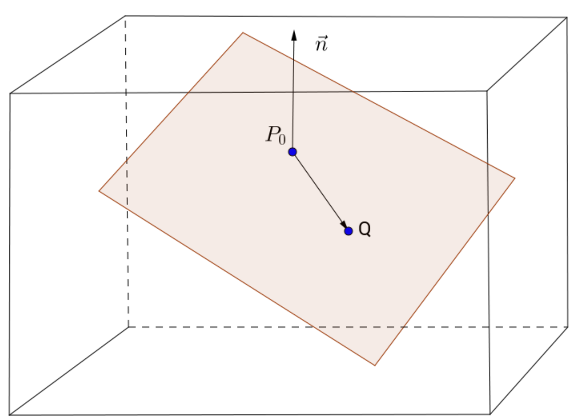
får vi att:

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{n} &= \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\ &= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \\ &= Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0 \end{aligned}$$

Vi ersätter $(Ax_0 - By_0 - Cz_0)$ med en konstant D, och får då:

$$Ax + By + Cz = D$$

Vilket är planets ekvation på normalform. Med normalvektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$



Exempel 2.1. *Bestäm planet på normalform, givet:*

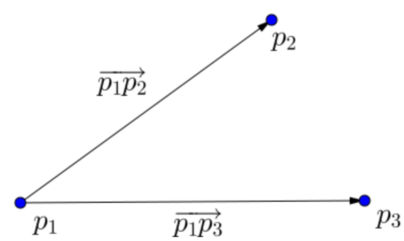
$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \ \ \textit{och}\ \vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Lösning: Vi får:

$$\begin{aligned} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) &= 4(x-3)+2(y+1)-5(z-7) \\ &= 4x+2y-5z+25=0 \end{aligned}$$

Exempel 2.2. *Bestäm planets ekvation på normalform för planet mellan punkterna:*

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Lösning: Eftersom p_1, p_2, p_3 *ligger i planet är:*

$$\overrightarrow{p_1p_2} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \overrightarrow{p_1p_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

parallella med planet.
Och:

$$\vec{n} = \overrightarrow{p_1p_2} \times \overrightarrow{p_1p_3} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

är ortogonal mot planet. Och alltså en normalvektor.
Dvs: Vi får

$$9(x-1)+y-5z-16=0$$

Ett plan kan också ges av en punkt P_0 och två vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 v_2 v_3 \end{bmatrix}$ i planet. Planet består av alla punkter P så att:

$$P = P_0 + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \qquad\qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Exempel 2.3.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

eller på parameterform:

$$\begin{cases} x = 1 - s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 3 + 2s + 5t \end{cases}$$

Byt representation till normalform genom att bestämma $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$:

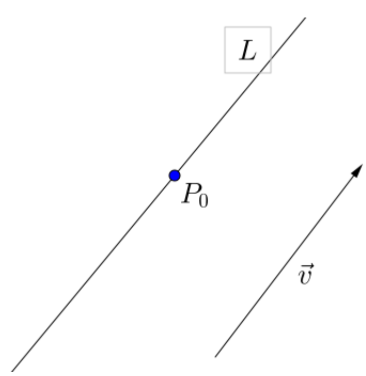
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Och planet:

$$8(x-1) + 9(y-2) - 5(z-3) = 8x + 9y - 5z = 11$$

3 Linjer i $\mathbb{R}^3$

Antag att att Linjen L är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ och går igenom punkten $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}$



L består av alla punkter P = $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ sådana att $\overrightarrow{P_0P}$ är parallell med $\vec{v}$.

Dvs:

$$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{v} \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

Eller:

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 tv_3 \end{cases}$$

Exempel 3.1. *Linjen genom punkten* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ *parallell med* $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ *kan parameterframställas som:*

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = -3 - 7t \end{cases} \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

Lös ut t:

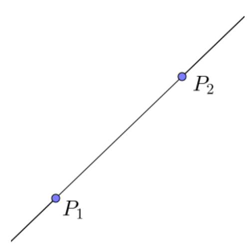
$$t = \frac{x-1}{4}, \qquad t = \frac{y-2}{5}, \qquad t = \frac{z+3}{-7}$$

Vi får:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{-7}$$

Exempel 3.2. *(a)*
Bestäm en ekvation för linjen L som går genom punkterna:

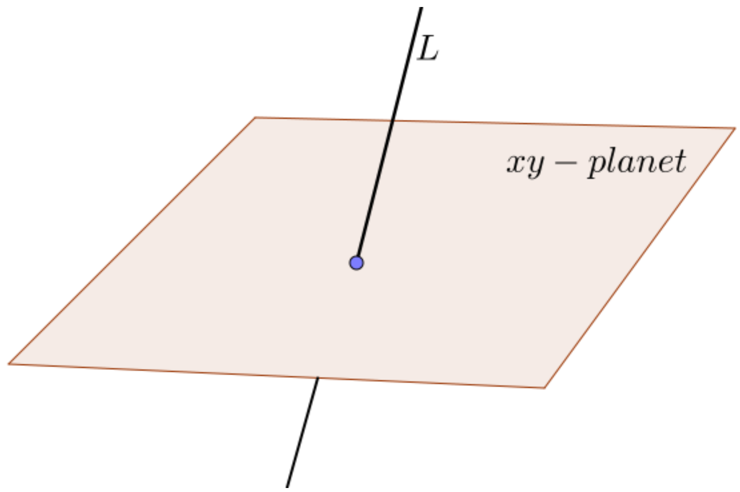
$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$



Lösning: Eftersom $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ *är parallell med L, och P_1 ligger på L ges linjen av:*

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

Exempel 3.3. *(b)*
I vilken punkt skär linjen från exemplet ovan xy-planet?



Sätt $z = 0$:

$$0 = -1 + 8t \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}$$

Vi får:

$$x = 2 + 3\frac{1}{8} = \frac{19}{8} \qquad\qquad y = 4 - 4\frac{1}{8} = \frac{7}{2}$$

Svar: Den skär i punkten:

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{8} & \frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix}$$