# Linjär Algebra
# Föreläsning 2

Erik Sjöström

November 8, 2015

## 1 Skalärprodukten

Låt $\vec{u}$, $\vec{v}$ vara två vektorer. Skalärprodukten definieras då som:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta \tag{1}$$

där $\theta$ är vinkeln mellan vektorerna.

**Exempel 1.1.**

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{u}|| \cdot \cos\theta = ||\vec{u}||^2$$

**Exempel 1.2.**
*Anta att vi har $\vec{u}$, $\vec{v} \neq \emptyset$, och vinkeln mellan dem är $\theta$. Om:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta = 0$$

*Dvs: $\cos\theta = 0$, vilket betyder att $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^o$.*
*Om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, innebär det att $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala.*

Det gäller att:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow$ Vinkeln spetsig
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow$ Vinkeln trubbig

Säg att:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix}$$

Då säger cosinus-satsen att:

$$\begin{aligned}
||\vec{w}||^2 &= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta && \Leftrightarrow \\
||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta &= \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{w}||^2) && \Leftrightarrow \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}((u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - ((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2)) \\
&= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 + u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2)) \\
&= \frac{1}{2}(2u_1v_1 + 2u_2v_2) \\
&= u_1v_1 + u_2v_2
\end{aligned}$$

Dvs, om $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^2$ så är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \tag{2}$$

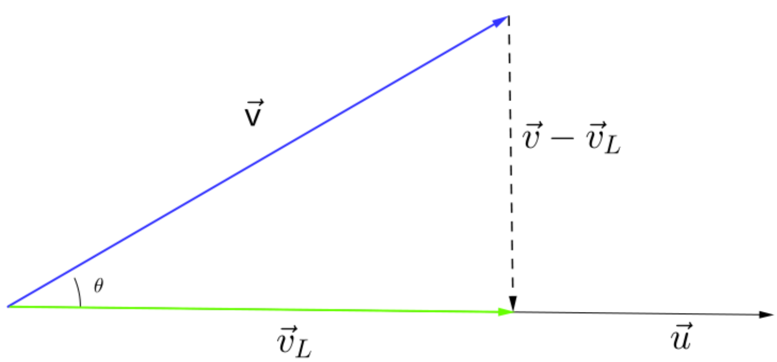
Om $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3}$$

Detta härleds på samma sätt som för i $\mathbb{R}^2$.

# 2 Projektion

**Definition 2.1.** *Den ortogonala projektionen av vektor $\vec{v}$ på linjen $L$ (med riktningsvektor $\vec{u}$) är den vektor som är parallell med $\vec{u}$ och så att ($\vec{v}$ - $\vec{v}_L$) är ortogonal mot $L$.*




**Anmärkning 2.1.**
$||\vec{v}_L|| = ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta$

Det gäller att: $\vec{u} \cdot \vec{v}_L = \vec{u} \cdot \vec{v}$, när $\theta$ spetsig.
Ty:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v}_L &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}_L|| \cdot \cos 0 \\
&= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}_L|| \\
&= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta \\
&= \vec{u} \cdot \vec{v}
\end{aligned}$$

Analogt gäller det att: $\vec{u} \cdot \vec{v}_L = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$, när $\theta$ trubbig.
Ty:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v}_L &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}_L|| \cdot \cos \pi \\ &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}_L|| \cdot (-1) \\ &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos \theta \cdot (-1) \\ &= -(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

**Sats 2.1.**

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u} \tag{4}$$

*Proof.* Vi vet att:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}_L$$

Vi får då att:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}_L \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot (t \cdot \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - t \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u}) \end{aligned}$$

Dvs:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = t \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u})$$

Lös ut $t$:

$$t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Eftersom $\vec{v}_L = t \cdot \vec{u}$ får vi att:

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

□

**Sats 2.2.**

$$||\vec{v}_L|| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||} \tag{5}$$

*Proof.* Vi vet att:

$$\vec{v}_L = t\cdot\vec{u}$$

för $t \in \mathbb{R}$, ty $\vec{v}_L$ är parallell med $\vec{u}$.
Vi får då att:

$$\begin{aligned} ||\vec{v}_L|| &= ||t\cdot\vec{u}|| \\ &= |t|\cdot||\vec{u}|| \\ &= |\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}|\cdot||\vec{u}|| \\ &= \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||^2}\cdot||\vec{u}|| \\ &= \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||} \end{aligned}$$

□

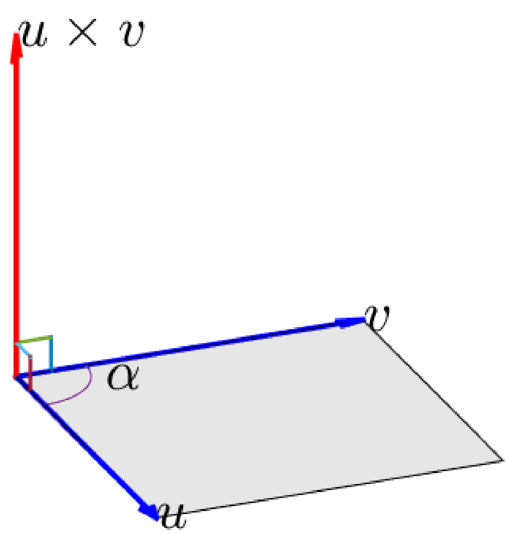
# 3 Kryssprodukt

**Definition 3.1.** *Givet 2 vektorer:*

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},\ i\ \mathbb{R}^3$$

*Kryssprodukten definieras då som:*

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix} u_2\cdot v_3 - u_3\cdot v_2 \\ u_3\cdot v_1 - u_1\cdot v_3 \\ u_1\cdot v_2 - u_2\cdot v_1 \end{bmatrix} \tag{6}$$



Egenskaper för kryssprodukten:

- $\vec{u} \times \vec{u} = \emptyset$
- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- $(c \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = c \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

**Exempel 3.1.**
*Om:*

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

*Så är:*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

**Exempel 3.2.**
*Finn en vektor som är ortogonal mot:*

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ och } \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

*Lösning:*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} (-1)(-2) - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Vi kan se att $\vec{u} \times \vec{v}$ är vår lösning ty:*

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2 - 2 + 0 = 0$$

*och:*

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$$

*Eftersom definitionen av skalärprodukten säger att om skalärprodukten mellan två vektorer är lika med noll, så är de ortogonala mot varandra.*