Linjär Algebra
Föreläsning 1

Erik Sjöström

November 8, 2015

1 Vektorer

Definition 1.1. *En geometrisk vektor i planet eller rummet är en matematisk storhet, med riktning och längd.*

- Längden av en vektor $\vec{v}$ skrivs $||\vec{v}||$
- En vektor som börjar i en punkt A och slutar i en punkt B skrivs $\overrightarrow{AB}$
- Om $||\vec{v}|| = 1$, kallas $\vec{v}$ för enhetsvektor.
- $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är parallella om de pekar åt samma håll, eller motsatt håll. Skrivs $\vec{u} \parallel \vec{v}$
- $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala, om de är vinkelräta, ($\vec{u} \perp \vec{v}$)

Definition 1.2. *Summan av $\vec{v} + \vec{u}$ är vektorn som fås genom att placera vektor $\vec{u}$ så att dess startpunkt är samma som $\vec{v}$:s slutpunkt. $\vec{v} + \vec{u}$ är då vektorn från $\vec{v}$:s startpunkt till $\vec{u}$:s slutpunkt.*

Definition 1.3. *Multiplikation med skalär: $k \cdot \vec{v}$ är den vektor vars längd är $|k| \cdot ||\vec{v}||$, och vars riktning är densamma som $\vec{v}$ om $k > 0$, motsatt om $k < 0$.*

Låt:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$$

vara n st vektorer, och

$$a_1, a_2, ..., a_n$$

vara n st tal.
Vektorn:

$$\vec{u} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + a_n \cdot \vec{v}_n$$

kallas för linjärkombination.

För att praktiskt kunna räkna med vektorer införs kordinatsystem:

- Referenspunkt (origo)
- Referensriktningar i planet $\mathbb{R}^2$, eller rummet $\mathbb{R}^3$

Exempel 1.1.

$$\emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt: $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ vara en ON-bas i planet. Dvs $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$ och $||\vec{e}_x|| = ||\vec{e}_y|| = 1$.
Välj t.ex.

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Då har vi en ON-bas för $\mathbb{R}^2$.

- Alla vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, kan skrivas som en linjärkombination med basvektorerna, $\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_x + u_2 \cdot \vec{e}_y$
- $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
- Om $P = (p_1, p_2)$ och $Q = (q_1, q_2)$ är två punkter i planet. Vektorn $\overrightarrow{PQ}$ positionerad med start i origo ges av:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{bmatrix}$$

Exempel 1.2.
Låt:

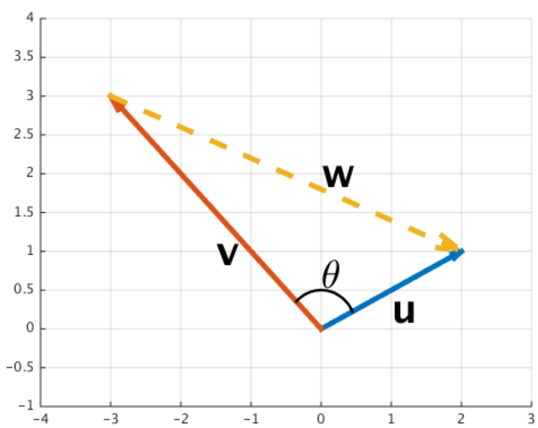
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, ||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, ||\vec{v}|| = \sqrt{18}$$

Låt:

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, ||\vec{w}|| = \sqrt{29}$$



Låt oss nu beräkna vinkeln: Cosinussatsen ger oss:

$$||\vec{w}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta$$

Låt oss bryta ut $\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{||\vec{w}^2|| - ||\vec{u}^2|| - ||\vec{v}^2||}{-2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{29 - 5 - 18}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{18}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

Vilket ger vinkeln $\theta \approx 108^o$