

Linjär Algebra

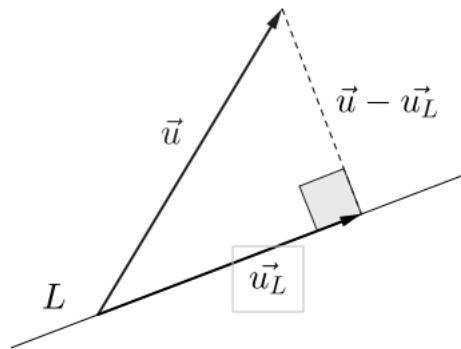
Föreläsning 4

Erik Sjöström

November 10, 2015

1 Projektion

Definition 1.1. Låt \vec{u} vara en vektor, och L en linje med riktningsvektor \vec{v} . Den ortogonala projektionen \vec{u}_L av \vec{u} på L är den vektor som det gäller att $\vec{u}_L \parallel \vec{v}$ och $(\vec{u} - \vec{u}_L) \perp \vec{v}$.



Exempel 1.1.

Låt:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ x \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bestäm den ortogonala projektionen av \vec{u} på linjen L med riktningsvektor \vec{v} .

Lösning: Vi vet att:

$$\vec{u}_L = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

Så nu gäller det bara att stoppa in värden:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + x \cdot 2 = 2x - 6$$

$$\|\vec{v}\|^2 = 3^2 + (-3)^2 + 2^2 = 22$$

$$\vec{u}_L = \frac{2x - 6}{22} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{x - 3}{11} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vad blir $\vec{u} - \vec{u}_L$? (den del av \vec{u} som är ortogonal mot L)

$$\vec{u} - \vec{u}_L = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

Exempel 1.2.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bestäm ortogonala komplementet av \vec{u} på linjen L med riktningsvektor \vec{v}
 Lösning:

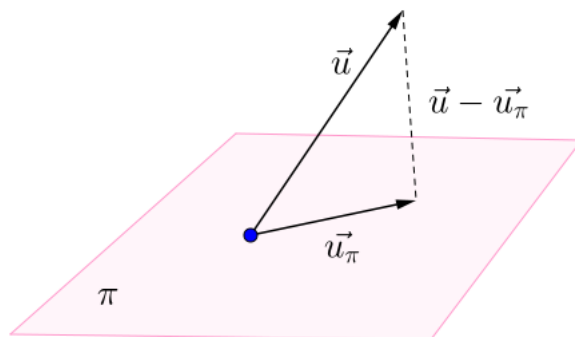
$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{0 - 3}{11} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{11} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{9}{11} \\ 3 - \frac{9}{11} \\ \frac{6}{11} \end{bmatrix} = \frac{2}{11} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Denn vektor är ortogonal mot L .

Helt analogt definieras den ortogonala projektionen av vektorer på plan som:

Definition 1.2. Den ortogonala projektionen \vec{u}_π av vektor \vec{u} på ett plan π definieras som den vektor som ligger i planet och är sådan att $(\vec{u} - \vec{u}_\pi) \perp \pi$



Anmärkning 1.

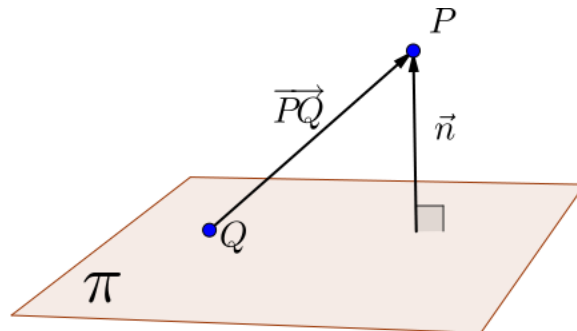
Vektorn $\vec{u} - \vec{u}_\pi$ är parallell med planets normal

2 Avstånd mellan punkt och plan

Givet en punkt $P = (x, y, z)$, och ett plan $\pi : Ax + By + Cz = D$

Anmärkning 2.

Normalvektorn $\vec{n} = [A \ B \ C]$



Vi söker minsta avståndet d mellan P och π

Härledning:

Välj en punkt Q i π och bilda \vec{QP} ges av den ortogonala projektionen av \vec{QP} på normalen \vec{n} till π .

$$d = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|P - Q| \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{|P \cdot \vec{n} - Q \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Vi får att:

$$P \cdot \vec{n} = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = Ax + By + Cz$$

$$Q \cdot \vec{n} : Q \in \pi \text{ om } Q = (x_0, y_0, z_0) \text{ så att } Q \cdot \vec{n} = D$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Vilket då ger oss:

$$\frac{|Ax + By + Cz - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Exempel 2.1.

Bestäm avståndet d från $P = (1, -4, -3)$ till planet $2x - 3y + 6z = -1$

Lösning:

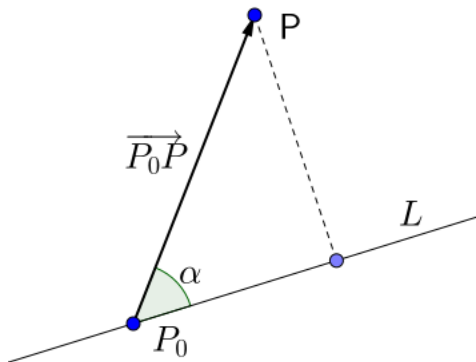
$$d = \frac{|2 \cdot 1 + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

3 Avstånd mellan punkt och linje

Givet en punkt P , en linje $L : x = P_0 + t \cdot \vec{v}$, där \vec{v} är riktningsvektorn till L , P_0 är en punkt på L och $t \in \mathbb{R}$

Söker: Minsta avståndet d mellan P och L

Härledning: Bilda vektor $\overrightarrow{P_0P}$.



Vi ser då at:

$$d = \|\overrightarrow{P_0P}\| \cdot \sin(\alpha) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha)}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Exempel 3.1.

Bestäm avståndet d från punkten $P = (3, -2, 4)$ till linjen

$$L : x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Lösning:

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{25 + 0 + 100} = 5\sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

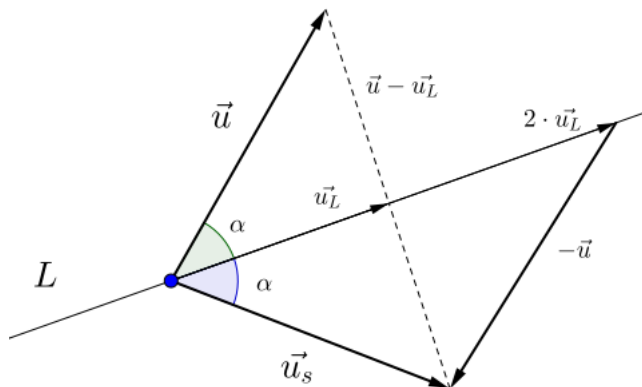
$$\text{Svar: } d = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = 5 \operatorname{sqr}t{\frac{5}{6}}$$

4 Spegling

Definition 4.1. Speglingen \vec{u}_s av \vec{u} i en linje L ges av:

$$\vec{u}_s = 2\vec{u}_L - \vec{u}$$

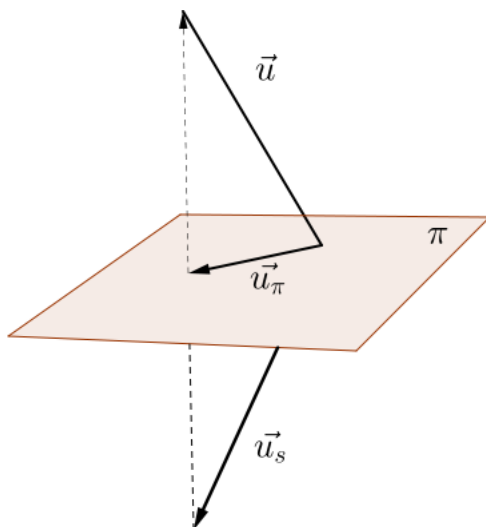
Där \vec{u}_L är den ortogonala projektionen av \vec{u} på L .



Definition 4.2. Speglingen \vec{u}_s av vektorn \vec{u} i planet π ges av:

$$\vec{u}_s = 2\vec{u}_\pi - \vec{u}$$

Där \vec{u}_π är den ortogonala projektionen av \vec{u} op π



5 Matriser

En matris är ett talschema med m rader och n kolumner, betecknas oftast som:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Sägs vara av typen/storleken $m \times n$
- a_{ij} betecknar elementet på rad i , kolumn j

Exempel 5.1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Är av typen 2×3
- $a_{22} = 1$

Ibland skriver man:

$$[A = a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

Vilket är kolumnvektorererna till matrisen A

6 Räkneregler

Matrisadditionen $A + B$ definieras: Elementen i respektive kolumn adderas.

Anmärkning 3.

A och B måste vara av samma typ/storlek

Exempel 6.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär:

$$k \cdot A$$

$$k \in \mathbb{R}$$

Alla elementen i A multipliceras med k .

Exempel 6.2.

$k = 5$, A som innan

$$k \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Följande räkneregler gäller för matrisaddition respektive multiplikation med skalär:

Låt: A, B, C vara $m \times n$ matriser, och $r, s \in \mathbb{R}$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathbb{O} = A$
- $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
- $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$
- $r \cdot (s \cdot A) = (r \cdot s) \cdot A$

Anmärkning 4.

\mathbb{O} är nollmatrisen, dvs den matris där alla element är 0.