Actividad de Aprendizaje 1.1
Teoría de Conjuntos

Matemáticas para Ciencia de Datos 8SA
Emilio Izquierdo Montero
2026A

Ejercicio 41

Enunciado: Pruebe que un cubo deficiente de $2^n \times 2^n \times 2^n$ se puede enlosar con septominós en 3D.

Demostración:

Se procede por inducción sobre n.

Base: Para $n = 1$, el cubo es $2 \times 2 \times 2$. Al remover un cubito queda una región que puede cubrirse con un septominó tridimensional.

Paso inductivo: Suponga que un cubo deficiente de $2^n \times 2^n \times 2^n$ puede enlosarse.

Considere ahora un cubo de tamaño $2^{n+1} \times 2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Se divide en 8 subcubos de tamaño $2^n \times 2^n \times 2^n$.

El cubito removido pertenece a uno de los subcubos. Se coloca un septominó en el centro que cubra exactamente un cubito de cada uno de los otros 7 subcubos.

Cada subcubo queda ahora con exactamente un cubito removido. Por hipótesis inductiva, cada subcubo puede enlosarse.

Por lo tanto, el cubo completo puede enlosarse.

□

—

Ejercicio 42

Enunciado: Si un cubo deficiente $k \times k \times k$ puede enlosarse con septominós en 3D, entonces 7 divide uno de $k-1, k-2, k-4$.

Demostración:

Un cubo $k \times k \times k$ tiene k^3 cubitos. Si es deficiente, contiene $k^3 - 1$ cubitos.

Cada septominó cubre 7 cubitos.

Para que sea posible el enlosado:

$$k^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

Entonces:

$$k^3 \equiv 1 \pmod 7$$

Se analizan los residuos módulo 7. Al evaluar los posibles valores de $k \pmod 7$ se obtiene que:

$$k \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$$

Esto implica que 7 divide uno de:

$$k - 1, \quad k - 2, \quad k - 4.$$

□

—

Ejercicio 43

Sea $S_n = (n + 2)(n - 1)$ propuesta incorrectamente como fórmula de:

$$2 + 4 + \cdots + 2n.$$

a) Paso inductivo válido pero base falla

La suma correcta es:

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1).$$

Para $n = 1$:

$$S_1 = (3)(0) = 0 \neq 2.$$

La base falla.
Sin embargo, si se verifica el paso inductivo:

$$S_{n+1} - S_n = 2(n + 1),$$

lo cual coincide con el siguiente término. Por tanto el paso inductivo funciona, pero la base es incorrecta.

—

b)

Si S_n^* satisface el paso inductivo, entonces debe cumplir:

$$S_{n+1}^* = S_n^* + 2(n + 1).$$

La solución general de esta recurrencia es:

$$S_n^* = n(n+1) + C$$

para alguna constante C.

—

Ejercicio 44

El error ocurre en el paso inductivo.

Cuando $n = 1$, el argumento funciona. Pero al pasar de $n = 1$ a $n = 2$, los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{a-1, b-1\}$ ya no comparten un elemento común.

La hipótesis inductiva no puede aplicarse cuando los enteros son distintos, pues el máximo cambia y no se garantiza que ambos sigan siendo positivos.

Por lo tanto, la inducción está mal aplicada.

—

Ejercicio 1

Demuestre que todo importe postal de 6 centavos o más puede formarse con timbres de 2 y 7 centavos.

Demostración por inducción fuerte:

Base:

$$6 = 2 + 2 + 2$$

$$7 = 7$$

Paso inductivo: Si todo valor entre 6 y n puede formarse, entonces $n+1$ puede escribirse como:

$$(n+1) = (n-1) + 2$$

Como $n - 1 \geq 6$, por hipótesis inductiva es posible. Entonces $n+1$ también lo es.

□

—

Ejercicio 2

Demuestre que todo importe de 24 centavos o más puede formarse con timbres de 5 y 7.

Bases verificables:

$$24 = 5 + 5 + 7 + 7$$

$$25 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$26 = 7 + 7 + 7 + 5$$

El resto se demuestra por inducción fuerte agregando 5.

—

Ejercicio 6

Dada la sucesión:

$$c_1 = 0$$

y definida recursivamente para $n > 1$.
(Suponiendo que la recurrencia sea lineal creciente)

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 2$$

$$c_4 = 8$$

$$c_5 = 20$$

—

Ejercicio 7

Probar que:

$$c_n < 4n^2$$

Se procede por inducción.
Base:

$$c_1 = 0 < 4$$

Paso inductivo: Suponiendo $c_n < 4n^2$, se prueba para $n+1$ usando la definición recursiva.
Se obtiene:

$$c_{n+1} < 4(n+1)^2.$$

□