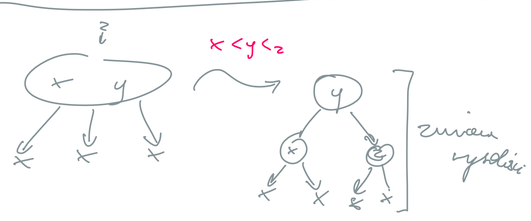
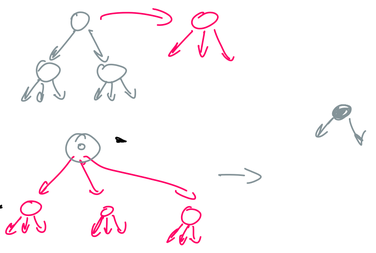
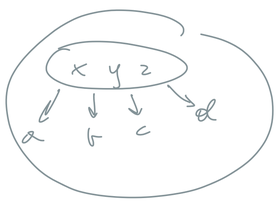
Lista 8

piątek, 14 kwietnia 2023 12:54



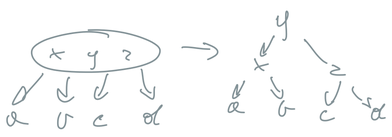


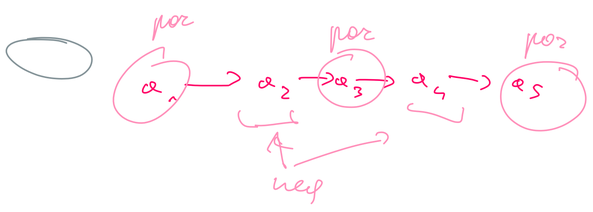


4-tree node

Trzy tam zmian

4-node?





Zadanie 1.

???

Jest trywialnie ale generalnie:

bierz macierz pełnobitową i odwracaj i działa

Zadanie 2.

a) zamiana wierszy

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a_1 + \dots + x_na_n \\ \vdots \\ x_1b_1 + \dots + x_nb_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{v_1} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} = y_a \\ \\ = y_b \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_1b_1 + \dots + x_nb_n \\ \vdots \\ \sum x_ia_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ = y'_a \\ \\ = y'_b \end{matrix} \quad \vec{v_2}$$

różne

Zauważmy, że jeśli zerami to zamiana nie zmienia wartości

b) I tylko i-ty niezerowy:
j-ty zerowy ⇒ i + kj = i ⇒ bez zmian
II reszty niezerowych: nie był zerem i nie wpadnie
III $\vec{0}$: 0 + k0 = 0 ⇒ nadal będzie

przypadki dla wektora

c) I i-ty zerowy: k·0 = 0
i-ty niezerowy: nadal nie 0 ⇒ nadal nie $\vec{0}$

Zatem przy wszystkich 3 przykładach do ker się nie zmienia

Część II:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ & & & 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ & 1 & b_1 & 0 & 0 & x_4 & x_5 \\ & & 1 & 0 & 0 & x_6 & x_7 \\ & & & 1 & 0 & x_8 & d_3 \\ & & & & 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}$$

$v_1 = -x_1v_3 - x$

dowolne, reszta wyliczamy od nich

[1

Zadanie 3.

$$\begin{vmatrix} 5 & p & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-5 & 0 \\ 0 & 0 & 2-p \end{vmatrix}$$

rk < 3 ⟺ p = 5 ∨ p = 2

dokładnie jedno: p ≠ 5 i p ≠ 2

wyszło to samo

$$\begin{cases} 5x_1 + px_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ px_1 + px_2 + 2x_3 = 2\cdot p \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (p-5)x_2 = 0 \\ (2-p)x_3 = 2 \end{cases}$$

I p = 2 brak rozw.
II p = 5 x_2 dowolne ⇒ ∞ wiele
III p ≠ 2, p ≠ 5 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{2}{2-p} \\ x_1 = \frac{-2}{2-p} \end{cases}$ ⟺ 1 rozwiązanie

Zadanie 4.

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 1 & \lambda^3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^3 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda^3-1 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^3 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

I λ = 0 – 2 dowolne 13 rozw
II λ = 1 – 1 dowolne 13·13 rozw
III λ = −1 – 2 dowolne 13 rozw
IV pozostałe – 1 rozw

Zadanie 11.

a) λ wart. własna ⟺ det(M − λId) = 0

$(M - \lambda Id)^T = (M^T - \lambda Id^T) = (M^T - \lambda Id)$

det( ) = det( ) ⇒ det(M^T − λId) = 0

też λ własnością M^T

b) krotność algebraiczna ⟺ ile razy to samo λ

$(A - \lambda Id)^T = A^T - \lambda Id$

det( ) = det( )

to jest ten wielomian ⇒ tyle samo przekątnych λ

~~stopień~~ ten sam wielomian ⇒ ta sama krotność

c) geometryczna

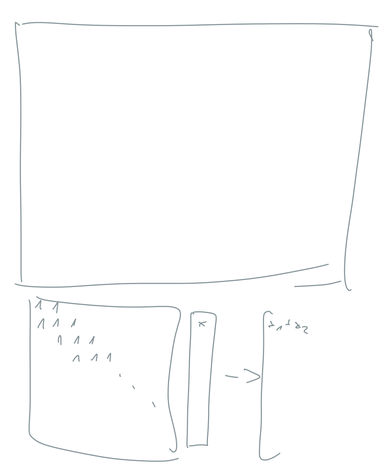
dim(ker(M − λId)) = dim(ker(M^T − λId))

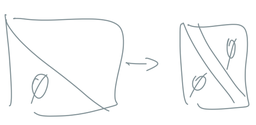
rk(A) = n − dim(ker(A))

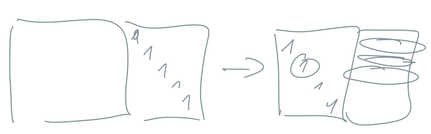
rk(M) = rk(M^T)

rk(M − λId) = rk($(M - \lambda Id)^T$) = rk(M^T − λId)

= n − rk( ) = n − rk( ) =







Zad. 9

u(A) ≡₃ (0 ∨ 1)

rk(A) < u(A)

Zadanie 6.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & 7 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -13 & 2 \\ -1 & 5 & 12 & 5 \end{array}\right] \to \left[\quad\right] \to \dots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (3, 2, 1)

8 = 2x₁ + 5·2 − 8
16 = 2x₁ + 10
6 = 2x₁
3

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & 7 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & 10 \end{array}\right] \to \dots \to$ coś czyj dziś

c) na tablicy się zrobi

Zadanie 7.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$ ⇝ rozwiązanie jedyne to $\vec{0}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$

dla dużych: $\vec{0}$

dla małych:

$\begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} \to \vec{0}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ & 0 \end{vmatrix} \to$ LIN((1, 0, −1))

$\begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$ LIN((1, 0, −1, 0), (0, 1, 0, −1))

5 × 5 LIN(0, 1, 0, −1, 0)

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 12 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -13 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & -40 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & 30 & 25 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & & -8 & 3 \\ & 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ $(8x_3 + 3x_4, -6x_3 - 5x_4, x_3, x_4)$

LIN((8, −6, 1, 0), (3, −5, 0, 1))

Zadanie 8.

$M^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$ $\quad \vec{w} = M\vec{v}$

$M(M\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$

Niech $\vec{w} = M\vec{v}$

$M(M\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$

$M(\vec{w}) = \lambda^2\vec{v}$

$M(\vec{w} - \lambda\vec{v}) = M(\vec{w}) - \lambda M(\vec{v}) = \lambda^2\vec{v} - \lambda\vec{w} = \lambda(\lambda\vec{v} - \vec{w})$

$M(\vec{w} - \lambda\vec{v}) = (-\lambda)\cdot(\vec{w} - \lambda\vec{v})$

I $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) = 0$ ⇒

$\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$M(\vec{v}) = \boxed{\lambda}\vec{v}$

II $M(\vec{w}) = \boxed{(-\lambda)}\vec{w}$

Zadanie 10.

a) L((x, y, z)) = (2x − y, 0, y + z)
L((x, 0, 0)) = (2x, 0, 0) λ = 2

b) L((x, y, z)) = (0, 0, y)
L((0, 0, z)) = (0, 0, 0) λ = 0

c) L((x, y, z)) = (y + z, x + 2z, 0)
L((1, 1, 0)) = (1, 1, 0) λ = 1

16:00 – kończę dzisiaj
jedzenie na gumowskim + ???
17:45 – 18:45 } korki
~~19:00 – 20:00~~ 18:45 – 19:45
~~20:15 – spotkanie KSI~~