Lista 14

niedziela, 4 czerwca 2023 19:52

Zadanie 1.

Sposób: rozkładamy na cykle i sprawdzamy parzystość liczby cykli o parzystej długości

a) $(1,7,3), (2,4), (5,9,10,6,8) \Rightarrow$ nieparzysta

b) $(1,12,3,7), (2,5,6), (4,14,8,10,9), (11,13) \Rightarrow$ parzysta

c) $(1,7,9,4), (2,3,10,12), (5,13,11), (6,14,8) \Rightarrow$ parzysta

Zadanie 2.

I zamkniętość:

Łączność: oczywista

element odwrotny: zamknięta + skończona

mamy dwie możliwości: (co do normy)

$(a,b)(c,d)(a,b)(c,d) \to e$

$(a,b)(c,d)(a,c)(b,d) \to$

$\begin{matrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} = (a,d)(b,c) \leftarrow$ co należy do zbioru □

II Rozpatrzmy wszystkie permutacje z S_4

Każda z nich składa się z 0, 1, 2 lub 3 transpozycji (zakładamy, że różne). Składające się z 0 to e a z 2 to zbiór z zadania (1 części) bez e oraz cykli 3-elementowych (dlaczego dokładnie to? jak mamy dwie transpozycje to albo nie mają wspólnego, jak te z zadania, albo mają wspólny i powstaje cykl). Skoro są to wszystkie parzyste permutacje z S_4, które jest grupą oraz składanie permutacji parzystych jest permutacją parzystą mamy zamkniętość tej podgrupy □

Zadanie 4.

S_c - stabilizator c

Łączność mamy z definicji + e oczywiście jest

Wiemy: $S_c = \{g \mid g(c) = c\}$

Skoro $(g \circ f)(c) = g(f(x))$ to jeśli $g_1, g_2 \in S_c$ to $g_1(g_2(c)) = g_1(c) = c$, zatem $(g_1 \circ g_2)(c) = c$, zatem $g_1 \circ g_2 \in S_c$. } zamknięta na działanie

Skoro $\forall g \in S_c\ \exists g^{-1} \in G$ taki, że $\forall_x (g \circ g^{-1})(x) = x$ to $c = (g^{-1} \circ g)(c) = g^{-1}(c)$, zatem $g^{-1}(c) = c$, zatem $g^{-1} \in S_c$ □ } element odwrotny

Zadanie 5.

1. Ile tego jest?

Wiemy: $|S_x| \cdot |O_x| = |G|$

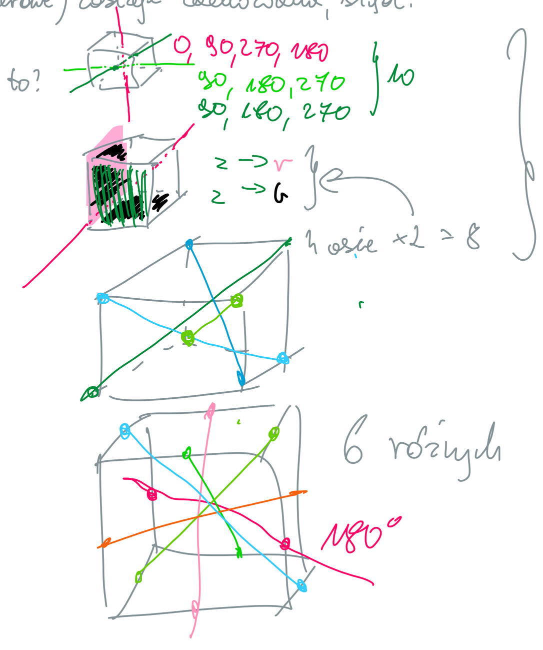
Niech x to ściana. Możemy obrotem obrócić na każdą inną. Przy obrocie o 0° oraz przy obrotach po „jej" osi (3 nie-zerowe) zostaje zachowana, stąd:

$|S_x| = 6$

$|O_x| = 4$

$|G| = 24$

jakie to?



2. Obroty i symetrie: ???

?

Zadanie 6.

1. Czworościan foremny

ściana może: przejść na 4 różne
3 obroty (w tym e) zachowują)

$|G| = |S_c| \cdot |O_c| = 4 \cdot 3 = 12$

2. Sześcian foremny - było, 24

3. Ośmiościan:

NIE ROBIE

Zadanie 7.

Dobra to tak:

sposób 1

1. Ile może być max?

$\forall a,b$ jeśli były obok siebie to nadal mają być. Zatem zauważmy, że możliwych przekształceń jest nie więcej niż $n \cdot 2$ (możliwe położenia elementu pierwszego × możliwe położenia elementu drugiego, gdy pierwszy jest już ustawiony). Dlaczego? Można zauważyć, że położenie dwóch kolejnych zawsze determinuje położenie reszty.

2. Hm, to zastanówmy się, jakie to mogą być:

a) Mamy możliwe n obrotów

b) Mamy jeszcze odbicia względem osi:

- dla parzystych: $\frac{n}{2}$ osi przez 2 wierzchołki, $\frac{n}{2}$ osi przez środki boków

- dla nieparzystych: n osi wierzchołek–środek boku (przeciwległego).

WoW! Wyszło nam dokładnie 2n! Ale czy na pewno nie policzyliśmy czegoś więcej niż raz?

1. Dwa obroty oczywiście że są różne

2. Dwa odbicia tak samo, bo:

- w-w i w-b istnieje wierzchołek, który zostaje na swoim miejscu tylko w tym odbiciu

- b-b dokładnie 2 pary sąsiednich wierzchołków „przechodzą dokładnie o 1", no widać, że to różne

3. obrót a symetria: zauważmy, że dla kolejnych a, b takich, że b jest po prawej od a symetria powoduje, że a jest po prawej od b, a obrót nie □

sposób 2.

Zauważmy, że:

a) $|O_v| = n$, bo może przejść na każdy inny wierzchołek

b) $|S_v| = 2$ bo jest zachowany jedynie przez obrót o 0° oraz symetrię przechodzącą przez niego

Zadanie 9.

1. $(1,5,4,9)(2,8)(3)(6,10,7)$

Orbita: wszystkie z jego cyklu

Stabilizator: bo |O| permutacje jest "u siebie", czyli

$[(2,8)(3)(6,10,7)]^{4k} = (2,8)^{4k}(3)^{4k}(6,10,7)^{4k} \Rightarrow (6,10,7)^{4k}$,

czyli 3 możliwe, w tym e

2. $(1,7,2,4)(3,6)(5,8,9)(10)$

Orbita: wszystkie z cyklu (np. dla 4: $\{1,7,2,4\}$)

Stabilizator: co |długość cyklu| potęga permutacji

3. $(1,6,9)(2,10)(3,4,5,7,8) = \mu$

Orbita: j.w. np. $O_2 = \{2, 10\}$

Stabilizator: jw., np. $S_2 = \{\mu^0, \mu^2, \mu^4, \dots, \mu^{2n}\}$

Zadanie 11.

Mamy 4: $(4,1)(S_3)$

$(4,2)(S_3)$

$(4,3)(S_3)$

max - 140 pkt ← max z list

x - twoje pkt z list

$\underbrace{\underbrace{\frac{130 \text{ pkt}}{140 \text{ pkt}} \cdot 80\%}_{77\%} + \overbrace{\left(\frac{\text{zad 1 dom}}{10 \text{ pkt}}\right)}^{8\%} \cdot 10\%}_{80\%} + \left(\frac{\text{zad 2 dom}}{10 \text{ pkt}}\right) \cdot 10\%$

0%

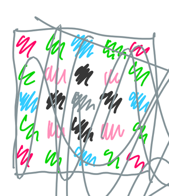
85%

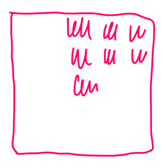
$\frac{x}{140 \text{ pkt}} \cdot 80\% = 77\%$

$\frac{x}{140} = \frac{77}{80}$

$x = \frac{140 \cdot 77}{80}$

135 $\boxed{+5 \text{ pkt}}$





C - wszystkie pkwsze

Bez zamiany kryżyki/kółka:

sym. i obroty kwadratu

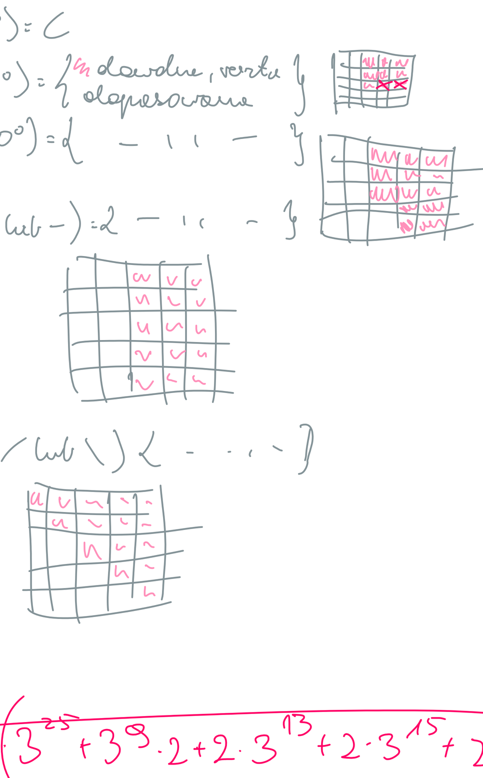
3^{25} fix(0°) = C

$2 \cdot 3^{7}$ fix(±90°) = { dowolne, reszta dopasowane }

3^{13} fix(180°) = { – '' – }

$2 \cdot 3^{15}$ fix(| lub –) = { – '' – }

$2 \cdot 3^{15}$ fix(/ lub \\) { – '' – }



TO NIE MUSI BYĆ DOBRZE

Różne:

$\frac{1}{8}\left(3^{25} + 3^{9} \cdot 2 + 2 \cdot 3^{13} + 2 \cdot 3^{15} + 2 \cdot 3^{15}\right) =$

$= 3^{23} + 2 \cdot 3^{7} + 2 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 3^{12}$

Zadanie 10.

Mówimy o obrotach i symetriach 6-kąta.

Pytanie jest raczej o rozróżnialne, bo nierozróżnialne to zależy o jakim mówimy.

Korzystamy z:

1) rozróżnialne naszyjniki ⇔ różne orbity

2) $|G| = 2 \cdot n = 12$

3) Liczba różnych orbit $= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |fix(g)|$ ← elementy (naszyjniki) zachowane przez przekształcenie

Jakie są fix(g)?

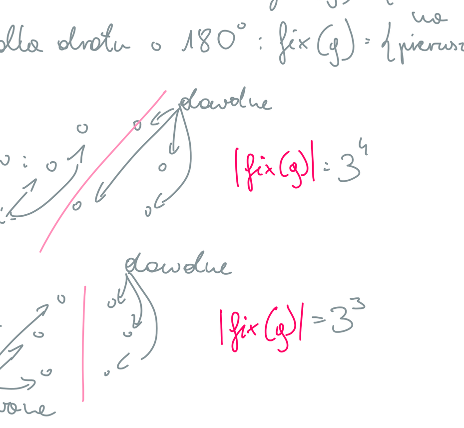
1) dla obrotu o 0°: fix(g) = {wszystkie naszyjniki} $|fix(g)| = 3^6$

2) dla obrotu o ±60°: fix(g) = {jednokolorowe} $|fix(g)| = 3$

dla obrotu o ±120°: fix(g) = {dwa kolory powtarzające się na zmianę lub jeden kolor} $|fix(g)| = 9$

dla obrotu o 180°: fix(g) = {pierwsze trzy takie same jak kolejne} $|fix(g)| = 3^3$

3) symetrie:



a) w-w: $|fix(g)| = 3^4$

b) b-b: $|fix(g)| = 3^3$

$\sum_g |fix(g)| = 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3^3 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 3^6 =$

$= 3^4 + 3^5 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3^6 =$

$= 81 + 243 + 27 + 18 + 6 + 729 = 1104$

$\# O = \frac{1}{|G|} \cdot \sum \ldots = \frac{1}{12} \cdot 1104 = \boxed{92}$

Zadanie 11.

Niech $\sigma \in S_4$, jak wygląda jej warstwa S_3?

1. lewostronna: $\sigma \cdot S_3$

Zauważmy, że w S_3 $4 \to 4$ zawsze, zatem

$W_{\sigma L} = \{\sigma' \mid \sigma'(4) = \sigma(4)\}$ a reszta elementów dowolnie bo S_3 ma wszystkie permutacje

2. prawostronna: $S_3 \cdot \sigma$

Teraz dla x t. że $\sigma(x) = 4$ to $s(\sigma(x)) = s(4) = 4$,

więc warstwa to

$W_{\sigma P} = \{\sigma'' \mid \forall_x\ \sigma''(x) = 4 \Leftrightarrow \sigma(x) = 4\}$

Co dla dowolnych?

$W_{\sigma L} = \{\sigma' \mid \sigma'(n) = \sigma(n)\}$

$W_{\sigma P} = \{\sigma'' \mid \forall_x\ \sigma''(x) = n \Leftrightarrow \sigma(x) = n\}$