Lista 13 ładnie

piątek, 26 maja 2023 19:30

Zadanie 1.

$\varphi_g(x) = g x g^{-1}$

a) $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$

Weźmy dowolne x, wtedy

$\varphi_{ab}(x) = ab \times (ab)^{-1} =$

$= \underline{ab \times b^{-1} a^{-1}}$

$\varphi_a \varphi_b(x) = \varphi_a(b \times b^{-1}) =$

$= \underline{ab \times b^{-1} a^{-1}}$ to samo □

b) φ_a jest izomorfizmem

- homomorfizm ⇔

⇔ $\varphi_a(xy) = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$

D: $\varphi_a(xy) = a x y a^{-1} = a x e y e^{-1} =$

$= a x a^{-1} a y a^{-1} = \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$

- φ_a^{-1} homomorfizmem

Niech $\varphi_a^{-1}(x) = a^{-1} x a$. Wtedy $\varphi_a \varphi_a^{-1}(x) = a a^{-1} x a a^{-1} = x$ oraz $\varphi_a^{-1}\varphi_a(x) = a^{-1} a x a^{-1} a = x$, więc φ_a^{-1} jest odwrotnością φ_a. φ_a^{-1} możemy zauważyć, że jest tym samym co $\varphi_{a^{-1}}$, co jest homomorfizmem, ponieważ w punkcie poprzednim dowodziliśmy dla dowolnego $a \in G$, a $a^{-1} \in G$. Możnaby też po prostu powtórzyć tamten dowód, też zadziała.

Stąd φ_a jest izomorfizmem

c) jeśli $H \leqslant G$ (jest podgrupą) to $\varphi_a(H) \leqslant G$

co znaczy $\varphi_a(H)$? to zbiór $\{\varphi_a(h) \mid h \in H\}$

warunki podgrupy:

a) $\forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 \cdot h_2 \in H$

b) $\forall h \in H \; \exists h' \in H \quad h \cdot h' = h' \cdot h = e$

Niech $H' = \varphi_a(H)$.

a) dowody dla h_1', h_2', H'

$h_1' \in H' \Rightarrow \exists h_1 \quad h_1' = \varphi_a(h_1)$

$h_2' \in H' \Rightarrow \exists h_2 \quad h_2' = \varphi_a(h_2)$

Skoro $h_1, h_2 \in H$ to $h_1 \cdot h_2 \in H$, więc $\varphi_a(h_1 \cdot h_2) \in H'$, więc (podpunkt 2 zadania) $\varphi_a(h_1) \cdot \varphi_a(h_2) \in H'$, więc $h_1' \cdot h_2' \in H'$ □

b) $h_1' \in H' \Rightarrow \exists h_1 \in H \quad h_1' = \varphi_a(h_1)$

Niech $h_2 = \varphi_a(h_1^{-1})$. Wtedy $h_2 \in H'$ oraz

L.14.13

$h_2 \cdot h_1' = \varphi_a(h_2) \cdot \varphi_a(h_1^{-1}) = \varphi_a(h_1 \cdot h_1^{-1}) = \varphi_a(e) = e$

$h_1' \cdot h_2$ identycznie □

Lemat 1 (mój):

$$(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1}$$

Dowód:

1. Baza indukcji

$x_1^{-1} = x_1^{-1}$

$(x_1 x_2)^{-1} = ?$

Zauważmy, że $(x_1 x_2) \cdot (x_2^{-1} \cdot x_1^{-1}) = x_1(x_2 x_2^{-1}) x_1^{-1} =$ $= x_1 e x_1^{-1} = x_1 x_1^{-1} = e$. Skoro każdy element ma dokładnie jeden element odwrotny (L.14.4) to skoro $(x_1 x_2)(x_2^{-1} x_1^{-1}) = e$ (i podobnie $(x_2^{-1} x_1^{-1})(x_1 x_2) = e$) to $(x_2^{-1} x_1^{-1}) = (x_1 x_2)^{-1}$, co chcieliśmy pokazać

$D_{16} = 13_{10} = 1101_2$

bo $ab \in G$ więc jest to jakiś element grupy G, więc ma dokładnie jeden element odwrotny

2. Krok indukcyjny

Założdom $(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = (x_n^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1})$, dowodzę dla $n+1$:

$$(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1})^{-1} = (\underbrace{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)}_{\text{element grupy}} \cdot (x_{n+1}))^{-1} \overset{\text{baza indukcji}}{=} (x_{n+1})^{-1}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} \overset{\text{zał. ind. + łączność}}{=} x_{n+1}^{-1} \cdot x_n^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1} \; □$$

Zadanie 2.

Udowodnij: $(x_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{z_k})^{-1} \overset{1}{=} (x_k^{-1})^{z_k} \cdot \ldots \cdot (x_1^{-1})^{z_1} \overset{2}{=} x_k^{-z_k} \cdot \ldots \cdot x_1^{-z_1}$

1. Skorzystamy z lematu 1. L - lewa strona równości, P - prawa

$$L = (\underbrace{x_1 \cdot \ldots \cdot x_1}_{z_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{x_k \cdot \ldots \cdot x_k}_{z_k})^{-1} \overset{L1}{=} \underbrace{x_k^{-1} \cdot \ldots \cdot x_k^{-1}}_{z_k} \cdot \ldots \cdot \underbrace{x_1^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1}}_{z_1} = P$$

2. Z D.14.14 wiemy, że jeśli $n < 0$ to $a^n = (a^{-1})^{|n|}$, zatem gdy $z > 0$ to weźmy $n = -z$, wtedy $x^{-z} = x^n = (x^{-1})^{|n|} = (x^{-1})^z$. Gdy $z = 0$ to $(x^{-1})^z = e = x^{-z}$. Gdy $z < 0$ to $x^{-z} = (x^{-1})^{-z}$, zatem $(x^{-1})^z = ((x^{-1})^{-1})^{-z}$, a skoro $(x^{-1})^{-1} = x$ (oczywiste?) to $(x^{-1})^z = (x)^{-z}$ □

Zadanie 3.

Grupa obrotów kwadratu: $0°, 90°, 180°, 360°$, „dodawanie" obrotów to dodawanie kątów obrotów.

Niech f to będzie nasz izomorfizm.

Skoro elementy neutralne przechodzą na siebie to $f(0°) = f(0)$. Zauważmy, że $180° + 180° = 0°$ oraz $2+2=0$, a żaden pozostały element poza neutralnym nie ma takiej własności. Stąd skoro $f(180° + 180°) = f(180°) + f(180°)$, czyli $0 = f(180°) + f(180°)$ to $f(180°) = 2$ (bo $1+1 \neq 0$; $3+3 \neq 0$). Zostają nam teraz 2 możliwości:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0°	0	0
90°	1	3
180°	2	2
270°	3	1

Pierwsza jest oczywiste, że jest izomorfizmem, pokażmy, że druga jest: pokazujemy dla każdej pary obrotów, że $f_2(o_1 o_2) = f_2(o_1) + f_2(o_2)$ □

(16 przypadków, wielkość trywialna)

Zadanie 4.

Weźmy dowolne $a, b \in G$. Pokażemy, że $a \cdot b = b \cdot a$.

tylko bazy używamy

$ab = (ab)^{-1} \overset{L1}{=} b^{-1} a^{-1} = b \cdot a^{-1} = b \cdot a$

bo $ab \in G$

$b = b^{-1}$

Zadanie 6.

a) G - dodawanie modulo 6. widać, że to grupy

H_1 - parzyste $(0, 2, 4)$

H_2 - podzielne przez 3 $(0, 3)$

$H_1 \cup H_2$ zawiera 2 i 3, ale $2+3=5$ nie

b) Skoro jest grupą to $\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$ mamy $h_1 \cdot h_2 \in H_1 \cup H_2$. Gdyby $H_1 \not\leqslant H_2$ oraz $H_2 \not\leqslant H_1$ to istnieją takie h_1, h_2, że $h_1 \in H_1, h_1 \notin H_2, h_2 \in H_2, h_2 \notin H_1$. Skoro $h_1 \cdot h_2 \in H_1 \cup H_2$ to $h_1 \cdot h_2 \in H_1$ lub $h_1 \cdot h_2 \in H_2$. Bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że $h_1 \cdot h_2 \in H_1$. Skoro $h_1 \in H_1$, to $h_1^{-1} \in H_1$, zatem skoro $h_1 \cdot h_2$ i $h_1^{-1} \in H_1$ to $h_1^{-1} \cdot h_1 \cdot h_2 = h_2 \in H_1$ co jest sprzeczne z założeniem □

c) Jak już zauważyliśmy wcześniej $\underline{\{h_1 \cdot h_2, h_2 \cdot h_1 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}}_A \subseteq \langle H_1 \cup H_2 \rangle$, bo to jest grupa. Skoro operacja jest przemienna to A jest równe $\{h_1 \cdot h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$. Pokażmy, że A jest grupą.

a) iloczyn elementów z A należy do A

Weźmy dowolne $a, a' \in A$. Wiemy, że istnieją h_1, h_2, h_1', h_2' takie, że $a = h_1 h_2$, $a' = h_1' h_2'$. Stąd

$$a \cdot a' = h_1 h_2 \cdot h_1' h_2' \overset{\text{przemienność}}{=} \underbrace{h_1 h_1'}_{\in H_1} \cdot \underbrace{h_2 h_2'}_{\in H_2}, \text{ więc } a \cdot a' \in A.$$

b) istnieje element odwrotny:

$a = h_1 h_2$

$$a^{-1} = (h_1 h_2)^{-1} = h_2^{-1} h_1^{-1} \overset{\text{przemienność}}{=} \underbrace{h_1^{-1}}_{\in H_1} \underbrace{h_2^{-1}}_{\in H_2} \in A \; □$$

$X \to Y : x \mapsto a^{-1} x a$

Zadanie 10.

a) - permutacja odwrotna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 8 & 10 & 1 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

- cykle σ: $(1,7,3), (2,4), (5,9,10,6,8)$

- cykle σ^{-1}: $(1,3,7), (2,4), (5,8,6,10,9)$

rząd $= NWW(3,2,5) = 30$

b) odwrotna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 6 & 12 & 9 & 2 & 5 & 3 & 14 & 10 & 8 & 13 & 1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

cykle σ: $(1,12,3,7), (2,5,6), (4,14,8,10,9), (11,13)$

cykle σ^{-1}: $(7,3,12,1), (6,5,2), (9,10,8,14,4), (13,11)$

rząd $= NWW(2,3,4,5) = 60$

c) odwrotna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 12 & 2 & 9 & 11 & 8 & 1 & 14 & 7 & 3 & 13 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

cykle σ: $(1,7,9,4), (2,3,10,12), (5,13,11), (6,14,8)$

cykle σ^{-1}: $(4,9,7,1), (12,10,3,2), (11,13,5), (8,14,6)$

rząd $= NWW(3,3,4,4) = 12$

Zadanie 11.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ rząd 5 i $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $(1,4),(\text{reszta}) \Rightarrow$ rząd $= NWW(2,3) = 6$

b) $(1,3,8,5,11), (2,7,6), (4,10,9), (12)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (4,5)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (4,5)(3,4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$

$= (4,5)(3,4)(2,3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (4,5)(3,4)(2,3)(2,1)$ (identyczność)

rząd 5

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1,6)(2,3)(4,5)$

rząd $= NWW(2,2,2) = 2$

widać już jak to działa