Lista 12

czwartek, 18 maja 2023 17:09

Zadanie 1.

a) Odwrócenie jednego wymiernika: $O(n^3)$
- eliminacja Gaussa do górnotrójkątnej: $O(n^3)$
  - dla n wyrażeń $O(n^3)$
    - odejmij n wektorów z danym składnikiem $O(n^2)$
  - pomnożenie n liczb z pełnością $O(n)$

b) Inwersja Sylwestra: $O(n^3)$
- eliminacja Gaussa całej macierzy $O(n^3)$
- dla każdej z n tych odpowiednich macierzy: $O(n^2)$
  - podzielenie iloczynu 6n liczb z pełnością $O(n)$
  - sprowadzenie my iloczyn dodatni $O(1)$

Zadanie 2.

a) $\det\begin{bmatrix}1&2&0\\-2&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1&2\\-2&-2\end{bmatrix} = 2-(-4)>0$

$\det\begin{bmatrix}1&2\\-2&-2\end{bmatrix}>0$ NIE bo nie jest symetryczna

$\det[2]>0$

b) $\det\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}=0 \times 0$ NIE

c) $\det\begin{bmatrix}6&2&4\\2&1&1\\4&1&5\end{bmatrix} = 30+\cancel{8}+\cancel{8}-\cancel{16}-6-20 = 30-26=4>0$

$\det\begin{bmatrix}6&2\\2&1\end{bmatrix} = 6-4=2>0$ TAK

$\det[6]=6>0$

d) $\det[6]=6>0$

$\det\begin{bmatrix}6&7\\7&15\end{bmatrix} = 6\cdot 15-7\cdot 7 = 6\cdot 15-77>0$

$\det\begin{bmatrix}6&7&3\\7&15&3\\3&7&11\end{bmatrix} = 66\cdot 15+\cancel{7\cdot 3}+\cancel{7\cdot 3}-15\cdot 3-\cancel{7\cdot 7}-\cancel{6\cdot 7}\cdot 11 = 57\cdot 15-48\cdot 11>0$

$\det\begin{bmatrix}6&7&3&3\\7&15&3&3\\3&3&1&1\\3&3&1&2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&8&4&0\\0&4&0&-1\\3&3&1&2\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&8&0\\0&4&-1\\3&3&2\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}1&8&0\\0&4&40\\3&3&1\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}1&8&0\\0&4&40\\3&3&1\end{bmatrix} =$

$= -(20-12+1)+(8-24+3)+(4+240-48-30) =$ TAK

$= -3-13+166>0$

Zadanie 3.

A - górnotrójkątna $\Rightarrow a_{ix}\neq 0$ dla $i\leq x$

A^T - dolnotrójkątna $\Rightarrow t_{ix}\neq 0$ dla $i\geq x$

$b_{ij} = \sum_x t_{ix}a_{xj} = \sum_{x=i}^{\min(i,j)} t_{ix}a_{xj} = \sum_{x=i}^{\min(i,j)} a_{xi}a_{xj}$

$t_{ix}a_{xj}\neq 0$ dla $x\leq i$, $x\leq j$

- $b_{11} = a_{11}\cdot a_{11} = a_{11}^2 \Rightarrow a_{11} = \sqrt{b_{11}}$
- $b_{12} = a_{11}\cdot a_{12} \Rightarrow$ znamy a_{12}
- $b_{13} = a_{13}\cdot a_{11} \Rightarrow$ znamy a_{13}

M symetryczna, więc znamy także cały b_{kk}

- $b_{22} = a_{12}\cdot a_{12}+a_{22}\cdot a_{22} \Rightarrow$ znamy a_{22}
- $b_{23} = a_{23}\cdot a_{12}+a_{22}\cdot a_{23} \Rightarrow$ znamy a_{23}
- $b_{2k} = a_{12}\cdot a_{1k}+a_{22}\cdot a_{2k} \Rightarrow$ znamy a_{2k}

$i\leq k$

- $b_{ik} = \sum_x^{\min(i,k)} a_{xi}a_{xk} = \sum_x^{i} a_{xi}a_{xk} + \underbrace{\sum_{x=i+1}^{k} a_{xi}a_{xk}}_{\text{znane wcześniej}} + a_{ii}\cdot a_{ik} \Rightarrow$ znamy a_{ik}

jest znany lub wcześniej gdy $i<x$

Algorytm: $O(n^2)$
- dla każdego b_{ij} $O(n^2\cdot n)$
  - liczę sumę z n iloczynów $O(n)$
  - odejmuję i wstawiam w miejsce a_{ij}

nie zależy od kolejności, więc nie dbam o kolejność z wcześniej policzonych

Zadanie 4.

a) $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&9\end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix}\overline{12} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \overline{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \overline{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{12} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \overline{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \overline{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{12} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \overline{44} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \overline{44}\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}\overline{12} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \overline{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \overline{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{12} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \overline{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \overline{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{12} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \overline{44} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \overline{44}\end{bmatrix}$

Zadanie 5.

$M = A^T A$

$M^{-1} = (A^T A)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}\cdot(A^{-1})^T = ((A^{-1})^T)^T(A^{-1})^T$

lista 3 lista 4

Niech $B = (A^{-1})^T$

$M^{-1} = B^T B \Rightarrow M^{-1}$ jest dodatnio określona

Zadanie 6.

$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} m_{ii}$

Niech A górnotrójkątna taka, że $M = A^T A$

$|\det(M)| = |\det(A)|^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^2$

Wiemy (zad. 3), że $m_{ii} = \sum_x^{i} a_{xi}a_{xi} = \underbrace{\sum_{x=1}^{i} a_{xi}^2}_{\text{wszystkie bo tamte większe}} + a_{ii}^2 \geq a_{ii}^2$

$\prod_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} m_{ii}$ □

Zadanie 7.

M - symetryczna $(m_{ij} = m_{ji})$, macierz liczb rzeczywistych

λ - wartość własna $\Rightarrow M\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$\vec{v}^T M\vec{v} = \vec{v}^T\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v}^T\vec{v} = \lambda\sum v_i^2$

$\lambda\leq 0 \Leftrightarrow \vec{v}^T M\vec{v}\leq 0 \Leftrightarrow$ dodatnio określona

Zadanie 8

Grupa: - działanie łączne
- element neutralny (jedyny) bliżej c c^{-1} niż inny
- istnieje element odwrotny

a) a jest neutralny

$a\cdot a = a$ ✓

NIE

$b\cdot b = a$ ✓

$c\cdot b = a$ ale $b\cdot c\neq a$ więc nie ma c^{-1}

b) nie ma elementu neutralnego:
- a ani c nie bo $a\cdot a\neq a$, $c\cdot c\neq c$
- b nie bo $a\cdot b\neq a$

NIE

c) a - neutralny

d nie ma odwrotności

NIE

d) a - neutralny

d nie ma odwrotności

NIE

Zadanie 9.

S_4: $\begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array} \to \begin{array}{cc} b & a\\ d & c\end{array}$

S_1: podobnie

S_3: podobnie

S_2: podobnie

O_0: $\begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array} \to \begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array}$ element neutralny

O_{90}: $\begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array} \to \begin{array}{cc} b & d\\ a & c\end{array}$

O_{180}: $\begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array} \to \begin{array}{cc} d & c\\ b & a\end{array}$

O_{270}: $\begin{array}{cc} a & b\\ c & d\end{array} \to \begin{array}{cc} c & a\\ d & b\end{array}$

na tej podstawie tabelka jak w 10.

Zadanie 10.

obroty wzgl. środka

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	5	6	4
3	3	1	2	6	4	5
4	4	6	5	1	3	2
5	5	4	6	2	1	3
6	6	5	4	3	2	1

mnożymy

nie będzie rozwiązania z dodawaniem bodo to nie jest pierścień w tym też, jest tylko obroty wzgl. środka

obroty wzgl. wierzchołka

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	5	6	1	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	1	2	3	4
6	6	1	2	3	4	5

(60°)

+ mod. 6

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

wiersze: 84 (60°) kierunek ruchu

Zadanie 11.

$(\mathbb{N},+)$
- 0 neutralne
- + łączne
- nie ma odwrotnych

NIE

$(\mathbb{Z},\cdot)$
- 1 neutralne
- · łączne
- nie ma odwrotnych

NIE

$(\{\frac{1}{2}k \mid k\in\mathbb{Z}\},\cdot)$
- 1 neutralne
- · łączne
- nie ma odwrotnych

NIE

$(\mathbb{Q},\cdot)$
- 0 neutralne
- · łączne
- każda pozostała element odwrotnym

TAK

$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$
- 1 neutralne
- · łączne
- $\frac{p}{q}$ odwrotne do $\frac{q}{p}$

TAK

1)

u^3

u $u^3+u=3$

$u^3+u\cdot u = (u^3)$

Zadanie 7.

λ dodatnie $\Leftrightarrow M$ dodatnio określona

1) M dodatnio określona $\Rightarrow \lambda$ dodatnie

niech mam wszędzie

2) λ dodatnie $\Rightarrow M$ dodatnio określona

Jeśli M symetryczna, zawsze istnieje baza to u_1 zatem mamy takie $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (niekoniecznie różne) oraz takie $v_1,\dots,v_n$ liniowo niezależne ($\neq$), że $Mv_i = \lambda_i v_i$.

Wtedy v_i są bazą, więc wystarczy wektory są postaci $\sum \alpha_i v_i$

$\langle v_i, v_j\rangle = 0$ dla tej samej bazy bo prop. wst. ren

$\langle v_i, v_j\rangle = v_i M v_j = v_i\lambda_j v_j = \lambda_j v_i v_j$

Niedokończone !