Niech A będzie dowolną podprzestrzenią. Załóżmy, że $W \subseteq A$ oraz $W' \subseteq A$. Pokażemy, że $W + W' \subseteq A$.

4

Weźmy dowolne $\vec{w} \in W+W'$. Skoro $\vec{w} \in W+W'$ to $\exists\, w_1, w_2$ takie, że $w_1 \in W$ oraz $w_2 \in W'$ ~~oraz $\exists k$~~ takie, że $\vec{w_1} + \vec{w_2} = \vec{w}$ [redacted] nie jest oczywiste to daj [redacted]). Skoro $\vec{w_1} \in W$ to $\vec{w_1} \in A$ bo $W \subseteq A$. Tak samo $\vec{w_2} \in A$, zatem $\vec{w_1} + \vec{w_2} \in A$ bo A jest podprzestrzenią. Zatem $\vec{w} \in A$, zatem $W+W' \subseteq A$ bo wzięliśmy dowolne $\vec{w} \in W+W'$, i pokazaliśmy, że należy do A, więc każde należy, więc $W+W' \subseteq A$, zatem $W+W'$ jest najmniejszą podprzestrzenią zawierającą W oraz W'.

możliwe, że to nie jest oczywiste, jeszcze się upewnię

Zadanie 6.

* wielokrotność $\overset{df}{\iff}$ istnieje $k \in \mathbb{R}$ takie, że $\vec{v_1} \cdot k = \vec{v_2}$

1) Pokażmy, że te trzy rodzaje zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$.

(*) a) $\{\vec{0}\}$ oczywiście jest podprzestrzenią liniową, ponieważ $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ oraz $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(**) b) wielokrotności ustalonego wektora też są podprzestrzenią liniową, ponieważ:

Niech $\vec{v}$ to wektor którego wielokrotności bierzemy i niech a i b będą takie, że $\vec{v} = (a,b)$. Wtedy

$k\vec{v}$ należy do zbioru, ponieważ tak go zdefiniowaliśmy

jeśli $\vec{v_1}$ oraz $\vec{v_2}$ należą do zbioru to istnieją k_1, k_2 takie, że $\vec{v_1} = k_1\vec{v}$ oraz $\vec{v_2} = k_2\vec{v}$. Wtedy $\vec{v_1} + \vec{v_2} = (k_1 a, k_1 b) + (k_2 a, k_2 b) = ((k_1+k_2)a, (k_1+k_2)b) = (k_1+k_2)\cdot(a,b)$, a skoro k_1 i $k_2 \in \mathbb{R}$ to k_1+k_2 też, zatem $(k_1+k_2)\cdot(a,b)$ jest wielokrotnością (a,b), zatem należy do zbioru, zatem to też jest podprzestrzeń.

(***) c) $\mathbb{R}^2$ jest oczywiście podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$, ponieważ $\mathbb{R}^2$ jest przestrzenią.

2) Pokażemy, że nie istnieje podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$ inna niż każdy z wymienionych wcześniej typów podprzestrzeni.

Weźmy A podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$ taką, że nie jest ona $\{\vec{0}\}$ ani wielokrotnością ustalonego wektora. Zauważmy, że do każdej podprzestrzeni $\mathbb{R}^2$ należy $\{\vec{0}\}$, zatem skoro A jest różne od $\{\vec{0}\}$ to należy tam co najmniej jeden wektor różny od $\vec{0}$. Oznaczmy go $\vec{v_1}$. Skoro A jest podprzestrzenią to wszystkie wielokrotności $\vec{v_1}$ także należą do A. Zatem skoro A jest różne od (**) to do A należy także jakiś wektor $\vec{v_2}$ taki, że $\vec{v_2}$ nie jest wielokrotnością $\vec{v_1}$. Pokażę teraz, że do A należy każdy wektor z $\mathbb{R}^2$, a zatem $A = \mathbb{R}^2$, zatem nie istnieje podprzestrzeń inna niż (*), (**) lub (***).

Weźmy takie a, b, c, d, że $\vec{v_1} = (a,b)$ oraz $\vec{v_2} = (c,d)$. Weźmy dowolny wektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ oraz e, f takie, że $\vec{u} = (e,f)$.

zauważmy, że gdyby $a=0$ oraz $c=0$ to $(a,b) = (0,b)$ oraz $(c,d) = (0,d)$, zatem skoro są różne od $\vec{0}$ to $b \neq 0$ oraz $d \neq 0$, zatem $(0,b) = \frac{b}{d}(0,d)$, zatem są swoją wielokrotnością. Stąd $a \neq 0$ lub $c \neq 0$. Stąd bez utraty ogólności załóżmy, że $c \neq 0$.

Skoro do A należą wielokrotności wektorów z A to do A należy $\boxed{\frac{-a}{c}}\cdot(c,d) = (-a, \frac{-ad}{c})$, skoro należą sumy wektorów, to

bo należy do R bo R jest ciałem i $c \neq 0$

należy też $(a,b) + (-a, \frac{-ad}{c}) = (0, \frac{bc-ad}{c})$. Zauważmy, że $\frac{bc-ad}{c}$ nie może być równe 0, ponieważ skoro (a,b) i (c,d) nie są wielokrotnościami siebie nawzajem to ich suma nie może być wielokrotnością (a,b) a $(0,0)$ to $0\cdot(a,b)$. Zatem $\frac{bc-ad}{c}$ jest różne od 0. Zatem skoro do A należą wielokrotności wektorów z A do A należy $\left(\frac{c}{bc-ad}\right)\cdot\left(0, \frac{bc-ad}{c}\right) = (0,1)$,

należy do R bo to ciało i mianownik $\neq 0$

zatem wektor $(0,1)$ należy do A. Do A należy też $(c,d) + (-d)(0,1) = (c,0)$, zatem należy też $\boxed{\frac{1}{c}}(c,0) = (1,0)$.

Stąd $(0,1)$ oraz $(1,0)$ należą do A, zatem $\vec{u} \in A$, ponieważ $\vec{u} = (e,f) = e\cdot(1,0) + f(0,1)$, co należy do A. Zatem skoro dowolne $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ należy do A to $A \supseteq \mathbb{R}^2$. ~~oraz~~ Skoro A jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$ to $A \subseteq \mathbb{R}^2$, zatem $A = \mathbb{R}^2$, zatem każda podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$ jest (*), (**) lub (***).

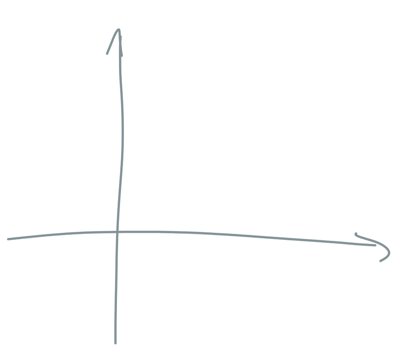
Zadanie 11.

kombinacje wypukłe $\overset{\sim}{=}$ średnia ważona

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i}$$

$$\sum \alpha_i = 1$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1$$



Konsultacje: wtorek 14-16

Zad. dom: będą po 3-4 osoby na zajęcia (zadanie zadeklarowane/było na tablicy)

Omówienia zadań:

1. rozwiązanie podobne do mojego

możemy też: skoro $NWD(a,p) = 1 = ax + qp$ [z algorytmu euklidesa ???] więc w świecie $\mathbb{Z}_p$ mamy $1 = ax + qp = ax$, więc istnieje takie x □

2. nie może być też pusty

$$\left(2, \tfrac{1}{2}\right) + \left(3, \tfrac{1}{3}\right) = \left(5, \tfrac{5}{6}\right) \ \text{↯}$$

fun fact: zazwyczaj jeśli mamy równanie liniowe to rzadziej działa

Zadanie 4.

1) $W + W' = \{w + w' \mid w \in W, w' \in W'\}$

- $v_1, v_2 \in W+W'$ $\quad (v_1) + (v_2) = (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2') = \boxed{w_1 + w_2} + \boxed{w_1' + w_2'} = w_3 + w_3' \in W + W'$ bo same

bo dodawanie w W

bo dodawanie w W'

- mnożenie przez skalar:

$\alpha \in F$

$$\alpha \cdot v = \alpha(w + w') = \underset{W}{\alpha w} + \underset{W'}{\alpha w'} \in (W + W')$$

Zatem to jest przestrzeń

2) zawiera W i W'

$\vec{w} = \vec{w} + \vec{0}$, więc $W \subseteq (W + W')$

analogicznie zawiera W'

3) najmniejsza

Niech Z przestrzenią taką, że $W \subseteq Z$ i $W' \subseteq Z$. Tak jak ja to miałem pokażemy $W + W' \subseteq Z$.

Zadanie 7: tak jak ja miałem

$\boxed{\text{Zadanie 6}}$ ← zadanie domowe

Zadanie 7.

1) z twierdzenia/lematu ze skryptu mamy, że jeśli $A \subseteq LIN(B)$ to $LIN(A) \subseteq LIN(B)$, zatem jeśli $\mathcal{U} \subseteq LIN(\mathcal{U}')$ oraz $\mathcal{U}' \subseteq LIN(\mathcal{U})$ to $LIN(\mathcal{U}) \subseteq LIN(\mathcal{U}')$ oraz $LIN(\mathcal{U}') \subseteq LIN(\mathcal{U})$, zatem $LIN(\mathcal{U}) = LIN(\mathcal{U}')$. Pokażmy, że (*) $\mathcal{U} \subseteq LIN(\mathcal{U}')$ oraz (**) $\mathcal{U}' \subseteq LIN(\mathcal{U})$.

$\mathcal{U} = (v_1, \ldots, v_k)$

$\mathcal{U}' = (\sum \alpha_i v_i, v_2, \ldots, v_k)$

* $\mathcal{U} \subseteq LIN(\mathcal{U}')$

$v_2, \ldots, v_k$ należą do $\mathcal{U}'$, więc do $LIN(\mathcal{U}')$ też

v_1 należy do $LIN(\mathcal{U}')$, ponieważ:

$$v_1 = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i\right]}_{\alpha_1 v_1} \cdot \boxed{\alpha_1^{-1}} =$$

istnieje bo ciało mamy, nad którym są te przestrzenie

$$= \alpha_1^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \alpha_1^{-1} \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i =$$

$$= \alpha_1^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=2}^{k} \underbrace{(\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_i)}_{\text{należy do ciała}} v_i =$$

zatem skoro możemy v_1 przedstawić jako sumę ~~elementów~~ wektorów z $\mathcal{U}'$ pomnożonych przez skalary to $v_1 \in LIN(\mathcal{U}')$.

** $\mathcal{U}' \subseteq LIN(\mathcal{U})$

- $v_2, \ldots, v_k$ trywialne (jak w *)

- $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ należy z definicji (wektory z $\mathcal{U}$ pomnożone przez skalary