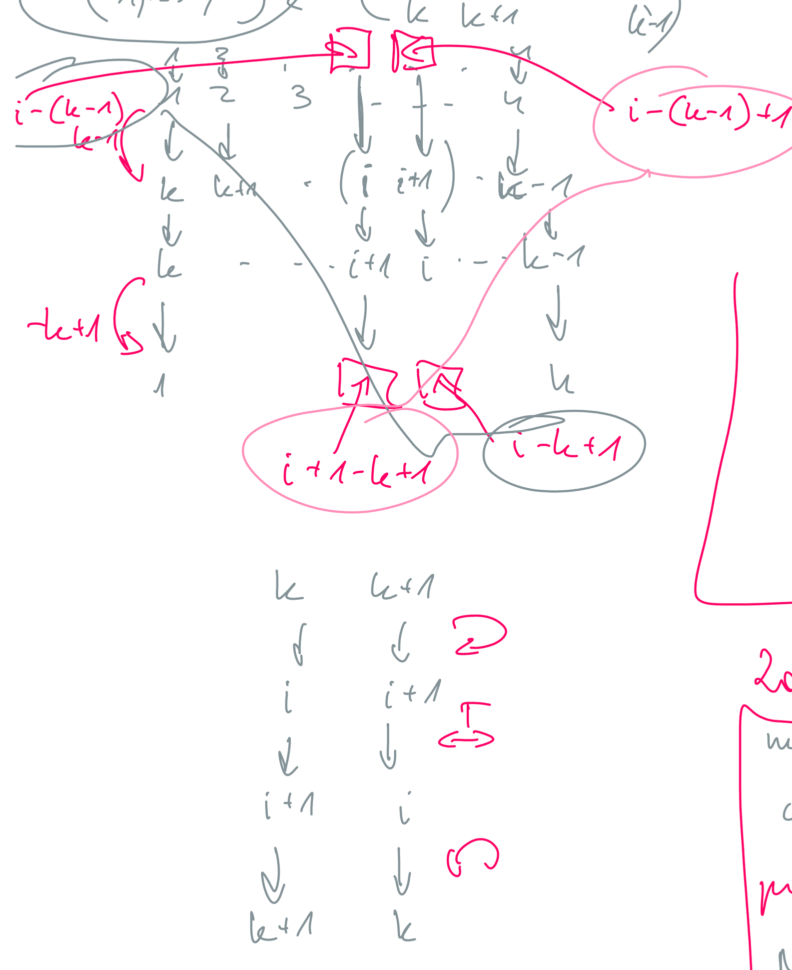
Lista 13 reszta zadań

wtorek, 30 maja 2023 13:28

$(i, i+1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots \\ 1 & 2 & \dots & i+1 & i & \dots \end{pmatrix}$

$(1, \dots, n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$(1, \dots, n)^k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ k & k+1 & \dots \end{pmatrix}$



Zadanie 7.

Niech G - grupa cykliczna i H - podgrupa G. Wiemy, że $\exists g_0 \in G$ takie, że $\forall g \in G \; \exists k \; g = g_0^k$. Niech n takie, że $\forall (m \in \mathbb{N}, m < n) \; g_0^m \notin H$. Pokażmy, że $\forall h \in H \; \exists x \; h = g_0^{xn}$. Weźmy dowolne $h \in H$. $\exists a \; h = g_0^a$ oraz $a \geq n$, bo n wzięliśmy najmniejsze. Wiemy, że są takie p, q, że

$a = pn + q \quad (i \; p \geq 1, \; 0 < q < n)$. Wtedy

$h = g_0^a = \underbrace{(g_0^n)^k}_{\text{należy do } H} + g_0^q$, więc $g_0^q \in H$. Skoro n było

należy do H

$\Rightarrow$ odwrotność $\in H \Rightarrow$ mnożymy przez nią i zostaje g_0^q

najmniejszą potęgą g_0 należącą do H to $q = 0$, zatem każdy element jest postaci $(g_0^n)^k$ □

Zadanie 5.

mamy elementy: e, a_1, a_2, a_3. Rzędy $a_1, a_2, a_3 \leq 4$ (oczywiście, wystarczy przyjrzeć się kolejnym potęgom)

dla 4

Mamy 2 możliwości:

- istnieje element o rzędzie 4:

niech to będzie a_1. Pozostałe elementy nazywamy tak, żeby $a_1^2 = a_2$, $a_1^3 = a_3$, $a_1^4 = e$ (bo rząd 4). Wtedy grupa jest generowana przez ten jeden element. Co do izomorfizmu jest tylko jedna taka grupa (L. 14.28)

- elementy mają rząd co najwyżej 3.

każdy ma rząd 2:

$a_1^2 = e$
$a_2^2 = e$
$a_3^2 = e$
$e^2 = e$

	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	e	$\boxed{a_3}$	$\boxed{a_2}$
a_2	a_2	$\boxed{a_3}$	e	$\boxed{a_1}$
a_3	a_3	$\boxed{a_2}$	$\boxed{a_1}$	e

$\leftarrow a_2, a_3$ bo kolumna

a_2, a_3 bo kolumna

tylko 1 możliwość wychodzi

istnieje o rzędzie 3:

Niech to będzie a_1. Wtedy:

$a_1^2 = a_2$
$a_1^3 = e$

Wtedy $a_1^3 = a_1 \cdot a_2 = e$, zatem $a_2 = (a_1)^{-1}$ i na odwrót. Skoro każdy element ma element odwrotny to $a_3^{-1} = a_3$, czyli $a_3^2 = e$

	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	e	
a_2	a_2	e		
a_3	a_3	$\boxed{}$		e

problem, bo wychodzi, że $a_3 \cdot a_1 = a_3$ ↯

dla 3.

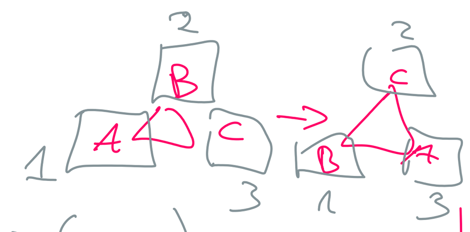
Mamy elementy e, a_1, a_2. Wiemy, że $a_1^{-1} = a_2$ bo odwrotnością nie może być e. Wtedy

	e	a_1	a_2
e	e	a_1	a_2
a_1	a_1	$\boxed{}$	e
a_2	a_2	e	$\boxed{}$

z sudoku wychodzi.

Jak widać bez żadnych założeń mamy tylko jedną możliwą tabelkę (względem zamiany nazw elementów), zatem wszystkie są izomorficzne

Zadanie 8.



$\Leftrightarrow (A, B, C) \to (B, C, A)$

$(1, 2, 3) \to (2, 3, 1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

zmapujmy: $x \; y \; z \to (x, y, z)$

Wtedy: $(x, y, z) \to (z, y, x) \quad (3, 2, 1)$

$\to (x, z, y) \quad (1, 3, 2)$

$\to$

$\to$ i tak dalej

↻120° $\to$

↻240° $\to$

↻360° $\to$

no widać, że to jedno i to samo

~~Zadanie 8.~~

~~$\langle x; y \rangle$ - grupa generowana przez x, y~~

~~$G = \langle (i, i+1); (1, \dots, n) \rangle$~~

~~Zauważmy: $(i, i+1)(1, \dots, n) = (1, 2, \dots, i-1, i+1, i, i+2, \dots, n)$~~

~~$(i, i+1)(i, i+1) = e$~~

mamy: $\forall t \; (1, t)$

$(t, t+1) = (\quad)(\quad$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & t & t+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & t+1 & t & \dots & n \end{pmatrix}$

$t \; t+1$

$t+1 \; t+1 \quad (1, t+1)$

$t+1 \quad t \; 1 \quad (1, t)$

$t+1 \quad 1 \; t \quad (1, t+1)$

$1 \quad t+1 \; t$

$S_n = \boxed{\langle (i, i+1); (1, \dots, n) \rangle}$ G

$e = (i, i+1)(i, i+1)$ więc jest dobrze

potęga ujemna $(-x)$, $|x| < n$ to to samo co $n - x$ co jest dodatnie □

1) $\forall t \; (t, t+1) \in G$

$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ t-i+1 & \dots & t & t+1 & \dots & n+t-i \end{pmatrix} = (1, \dots, n)^{t-i}$

$\to t-i$

z powrotem: $((1, \dots, n)^{t-i})^{-1} = (1, \dots, n)^{i-t}$

$(t, t+1) = (1, \dots, n)^{i-t} (i, i+1)$

$\begin{pmatrix} t \to t+1 \\ t+1 \to t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \to i+1 \\ t+1 \to i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \to i \\ t+1 \to i+1 \end{pmatrix} \quad e$

$\begin{pmatrix} i \to t \\ i+1 \to t+1 \end{pmatrix}$

$(t, t+1) = (1, \dots, n)^{t-i} (i, i+1) (1, \dots, n)^{i-t} e$

2) $(t, t+x)$

$(t+x-1, t+x) \dots (t+1, t+2)(t, t+1) =$

$t+x \to t+x-1$, $t+x-1 \to t+x-2$; $t+2 \to t+1$, $t+1 \to t$, $t \to t+2$; $t \to t+1$, $t+1 \to t$

$t+1 \to t$, $t \to t+x$

i z powrotem

$(t+x-2, t+x-1)$

$\vdots$

$(t+1, t+2)$

$\vdots$

$t+x \to t+x-2$

$t+x-2 \to t+x-3$

$\vdots$

$t+1 \to t$

$t \to t+x$

$t+x \to t+1$

$(t+1, t)$

$\boxed{\begin{matrix} t+x \to t \\ t \to t+x \end{matrix}}$

$t+1 \to t$

$t \to t+x$

Jak mamy dowolną transpozycję to mamy dowolny element z S_n z któregoś lematu

---

$\underbrace{\langle (1, 2), (2, 3, \dots, n) \rangle}_{G} = S_n$

1) $(1, \dots, n) \in G$

$(1, \dots, n) = (1, 2)(2, \dots, n)$

$e \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ \vdots \\ n \to 2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ \vdots \\ n \to 1 \end{matrix}$

2) z punktu ① $G = S_n$