Zadanie 9

czwartek, 8 czerwca 2023 09:51

Zadanie 9. Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i,i+1);(1,2,3,\ldots,n)\rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1,\ldots,n-1$;
- $\langle (1,2);(2,3,\ldots,n)\rangle = S_n$.

a) Niech $G = \langle (i,i+1);(1,2,3,\ldots,n)\rangle$. Pokażemy, że $G = S_n$

Zauważmy, że dla dowolnego k całkowitego dodatniego
$(1,2,\ldots,n)^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k & k+1 & \ldots & k-1 \end{pmatrix}$, zatem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k & k+1 & \ldots & k-1 \end{pmatrix} \in G$

Weźmy dowolne t, pokażemy, że $(t,t+1) \in G$

$$(t,t+1) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & i+1 & \ldots & n \\ t-i+1 & \ldots & t & t+1 & & n+t-i \end{pmatrix}(i,i+1)\begin{pmatrix} 1 & \ldots & t & t+1 & \ldots & n \\ 1-t+i & \ldots & i & i+1 & \ldots & n-t+i \end{pmatrix} =$$

$$= (1,2,\ldots,n)^{t-i}\,(i,i+1)(1,2,3,\ldots,n)^{i-t}$$

Wiemy, że $(1,2,\ldots,n)^n = (1,2,3,\ldots,n)^0 = e$, zatem

$$(t,t+1) = (1,2,\ldots,n)^{n+t-i}\underbrace{(i,i+1)}_{\in G}(1,2,3,\ldots,n)^{i-t}$$, zatem $(t,t+1) \in G$

nieujemne, więc te permutacje należą do G

Pokażemy indukcyjnie, że $(t,t+x) \in G$.

1. Baza indukcji:
   Już pokazaliśmy, że $(t,t+1) \in G$
2. Krok indukcyjny (założenie, że $(t,t+(x-1)) \in G$, pokażę $(t,t+x) \in G$

$$(t,t+x) = \underbrace{(t,t+x-1)}_{\in G}\overbrace{(t+x,t+x-1)}^{\in G \text{ bo to kolejne liczby całkowite}}(t,t+x-1)$$

$\in G$ z założenia indukcyjnego

Zatem $(t,t+x) \in G$

Z lematu $\boxed{\quad\quad}$ wiemy, że każdą permutację można przedstawić w postaci złożenia transpozycji, więc skoro wszystkie transpozycje $\in G$ to $S_n \subseteq G$. Skoro G jest generowane przez dwie permutacje $\in S_n$ to $G \subseteq S_n$, zatem $G = S_n$ □

a S_n zawiera wszystkie możliwe permutacje

b) Niech $H = \langle (1,2);(2,3,4,\ldots,n)\rangle$.
Jeśli pokażemy, że $(1,2,\ldots,n) \in H$ to wtedy z a) mamy, że $H \supseteq S_n$, a skoro H jest generowane przez permutacje z S_n to $H \subseteq S_n$

Zauważmy, że $(1,2)(2,3,\ldots,n) = (1,2,3,\ldots,n)$, zatem $(1,2,3,\ldots,n) \in H$ zatem (z tego co pokazaliśmy wcześniej) $H \supseteq S_n$ oraz $H \subseteq S_n$, zatem $H = S_n$