Algebra abstrakcyjna

czwartek, 18 maja 2023 09:34

Przede wszystkim teoria grup

Grupa: zbiór z działaniem $(G, \cdot)$ takie, że:

a) $\cdot$ ma jeden element neutralny e $\forall g \in G \;\; g \cdot e = e \cdot g = g$

b) $\forall g \in G$ istnieje element odwrotny g^{-1} taki, że $g^{-1} \cdot g = g^{-1} \cdot g = e$

c) $\cdot$ jest łączne

Przykłady:

$(\mathbb{R}, +)$ jest grupą

$(\mathbb{R}, \cdot)$ nie jest grupą, bo nie ma 0 elementu odwrotnego

$(\mathbb{R}/\{0\}, \cdot)$ jest grupą

Generalnie:

$(\mathbb{F}, +_F)$ i $(\mathbb{F}/\{\text{el. neutr. } +_F\}, \cdot)$ są grupami

$(\mathbb{F}, \cdot)$ nie jest grupą

Kolejne przykłady:

$(\mathbb{Z}, +)$ grupa

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ nie jest grupą

$(\mathbb{Z}_m, +_m)$ grupa $(\forall m)$

$(\mathbb{Z}_m/\{0\}, \cdot_m)$ grupa tylko dla m pierwszych

Tabelka iloczynów: $(\mathbb{Z}_5/\{0\}, \cdot_5)$

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

każdy ma element odwrotny

a widzimy, że 1 jest elementem neutralnym

DZIAŁANIE GRUPOWE NIE MUSI BYĆ PRZEMIENNE

Fun fact: zawsze w każdym rzędzie i każdej kolumnie jest permutacja elementów grupy

Dlaczego?:

1) każdy występuje

Weźmy dowolne b: chcielibyśmy mieć x takie, że $a \cdot x = b$. Takie x istnieje, bo $x = a^{-1} \cdot b$, wtedy $a \cdot x = a \cdot a^{-1} \cdot b = b$

Dla grup skończonych wystarcza

2) Każdy element najwyżej raz występuje:

Załóżmy, że $a \cdot x_1 = b$ oraz $a \cdot x_2 = b$. Wtedy

$a x_1 = a x_2 \Rightarrow a^{-1} \cdot a \cdot x_1 = a^{-1} \cdot a \cdot x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ □

TROCHĘ O IZOMORFIZMACH (zadanie 10)

homomorfizm – przekształcenie zachowujące działanie

Niech $(G, \cdot_1)$ i $(H, \cdot_2)$ grupami.

Wtedy jeśli $f: G \to H$ jest homomorfizmem to $f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b)$

izomorfizm: homomorfizm, który jest bijekcją

Grupa $(\mathbb{Z}_4, +_4)$

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2

Okazuje się, że $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{Z}_5/\{0\}, \cdot_5)$

Fakty:

- jeśli F izomorfizmem to elementy neutralne przechodzą na siebie

też dla homomorfizmu (tylko tam raczej w jedną stronę)

- (chyba) $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$
- $a \cdot a = e_h \Rightarrow f(a) \cdot f(a) = e_H$

Budujemy izomorfizm $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5/\{0\}$

1) $F(0) \to 1$ bo elementy neutralne przechodzą na siebie

2) $F(2) \to 4$

3) pozostałe dwa dowolnie (można to sprawdzić)

$F_1 = \{(0,1), (1,3), (2,4), (3,2)\}$

$F_2 = \{(0,1), (1,2), (2,4), (3,3)\}$