Lista 3

sobota, 11 marca 2023 12:38

$\vec{u}+W = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \vec{u}+\vec{w} \ ; \ \vec{w} \in W\}$

Zadanie 1.

$\dim(W+W') = 1 + \dim(W \cap W')$

W bazie $W+W'$ jest jeden wektor więcej niż w bazie $W \cap W'$

Skoro bazy nierolnicze itp to

$\text{baza}(W \cap W') + \vec{v} = \text{baza}(W+W')$

gdyby $\vec{v} \in W+W'$ i $\vec{v} \notin W \cap W' \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\vec{w} + \alpha\vec{w}' = \vec{v}$

$\vec{w}' \notin W \quad \vec{w} \in W$

$\vec{w} \notin W' \quad \vec{w}' \in W'$

$\vec{w} \notin (W \cap W')$ w i w' są nierolnicze względem siebie

$\vec{w}' \notin (W \cap W')$ bo gdyby nie to $\vec{v} \in W$ lub W'

$\vec{w} \in W+W'$

$\vec{w}' \in W+W'$ więc nierolnicze z $W \cap W'$, bo byłyby obu, więc w obu $\vec{v}$

wtedy $\dim(W+W') = \dim(W \cap W') + 2$ lub więcej

$\Rightarrow$ wektory w $W+W'$ należą do jednego z nich

$w \in W+W' \quad w \in W \quad w' \notin W'$

$w' \in W+W' \quad w' \in W' \quad w \notin W'$

nie potrzebne podobno nie

ten sam powód co wyżej

Zadanie 2.

$\dim(\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T))$

$\dim(\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T))$

1) $S = \{(1,2,0,1), (1,1,1,0)\}$

$T = \{(1,0,1,0), (1,3,0,1)\}$

$\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T) = \{\vec{v} \mid \vec{v}_S + \vec{v}_T = \vec{v}\} =$

$= \{\vec{v} \mid \vec{v} = \alpha(1,2,0,1) + \dots\}$

$$\begin{vmatrix} 1&2&0&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&1&0 \\ 1&3&0&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&2&0&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&2&0&1 \\ 1&0&1&1 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&2&-1&0 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&2&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&+1&0 \\ 0&0&0&0 \end{vmatrix}$$

$+(-2c)$

baza

$\dim(S+T) = 3$

$\dim(S \cap T) = 2+2-3 = \boxed{1}$

2) $S = \{(2,-1,0,-2)$

$(3,-2,1,0)$

$(1,-1,1,-1)\}$

$$\begin{vmatrix} 2&-1&0&-2 \\ 3&-2&1&0 \\ 1&-1&1&-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&1&-2&0 \\ 0&1&-2&3 \\ 1&-1&1&-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&-1&1&-1 \\ 0&1&-2&0 \\ 0&0&0&3 \end{vmatrix}$$ nierolnicze

$T = \{(3,-1,-1,0)$

$(0,-1,2,3)$

$(5,-2,-1,0)\}$

$$\begin{vmatrix} 3&-1&-1&0 \\ 0&-1&2&3 \\ 5&-2&-1&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3&-1&-1&0 \\ 2&1&0&0 \\ 0&-1&2&3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&1&0&0 \\ 1&-2&-1&0 \\ 0&-1&2&3 \end{vmatrix}$$ = nierolnicze

$$\begin{vmatrix} 2&-1&0&-2 \\ 3&-2&1&0 \\ 1&-1&1&-1 \\ 3&-1&-1&0 \\ 0&-1&2&3 \\ 5&-2&-1&0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0&1&-2&0 \\ 0&1&-2&0 \\ 1&-1&1&-1 \\ 0&2&-4&3 \\ 0&-1&2&3 \\ 2&-1&0&0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&-2&0 \\ 1&-1&1&-1 \\ 0&0&0&3 \\ 0&1&-2&2 \\ 0&1&-2&2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&-1&1&-1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&-2&0 \\ 1&-1&1&-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&-2 \\ 0&1&-2&0 \\ 1&-1&1&-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&-2&0 \\ 1&-1&1&-1 \\ 0&0&0&0 \end{vmatrix}$$

baza = 3

$\dim(S+T) = 3$

$\dim(S \cap T) = 3+3-3 = \boxed{3}$

$S \cap T$?

Zadanie 3.

$\text{LIN}(S \cup T) \qquad \dim(\text{LIN}(S \cup T)) = 3$

$$\begin{vmatrix} 3&-1&1&1&5 \\ 0&5&-2&4&-1 \\ 1&-5&3&-3&3 \\ -1&-3&3&-2&0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0&14&-8&10&-4 \\ 0&5&-2&4&-1 \\ 1&-5&3&-3&3 \\ 0&-8&6&-5&3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1&-5&3&-3&3 \\ 0&7&-4&5&-2 \\ 0&5&-2&4&-1 \\ 0&8&-6&5&-3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1&-5&3&-3&3 \\ 0&2&-1&1&-1 \\ 0&5&-2&4&-1 \\ 0&3&-4&1&-2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1&-5&3&-3&3 \\ 0&2&-1&1&-1 \\ 0&2&2&3&1 \\ 0&1&-2&0&-1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1&-5&3&-3&3 \\ 0&1&-2&0&-1 \\ 0&0&2&1&1 \\ 0&0&6&3&3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1&-5&3&-3&3 \\ 0&1&-2&0&-1 \\ 0&0&2&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{vmatrix}$$ baza

$\text{LIN}(S) \cup \text{LIN}(T)$

$\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T)$

$\vec{v}_S = \alpha(2,1,1,1,5) + \beta(0,5,-2,4,-1)$

$\vec{v}_S = (3\alpha, 5\beta - \alpha, \alpha - 2\beta, 4\beta + \alpha, 5\alpha - \beta)$

$\vec{v}_T = (\gamma - \pi, 5\gamma - 3\pi, 3\gamma + 3\pi, -3\gamma - 2\pi, 3\gamma)$

możliwe:

-2

-1

0 tylko 0 należy do obu

$\text{LIN}(S \cup T) = \text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$

$\text{LIN}(S) = S'$

$\text{LIN}(T) = T'$

$\dim(S'+T') = \dim(S') + \dim(T') - \dim(S' \cap T')$

$\dim(S' \cap T') = \dim(S') + \dim(T') - \dim(S'+T') =$

$= 2+2 - \dim(\text{LIN}(S \cup T)) = 2+2-3 = \boxed{1}$

$S = (1,0)$

$T = (2,0)$

$S \cap T = \emptyset$

$\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T) = \text{LIN}((2,0))$

$\dim(\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)) = \dim(\text{LIN}(S)) + \dim(\text{LIN}(T)) - \dim(\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T))$

$\boxed{\text{LIN}(S \cup T) = \text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)}$

$\vec{v} \in \text{LIN}(S \cup T)$

$\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{v}_i = \sum \alpha_{s_i} \vec{v}_{s_i} + \sum \alpha_{t_i} \vec{v}_{t_i} =$

$= \vec{v}_s + \vec{v}_t \in \text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$

$\vec{v}_s \in \text{LIN}(S) \quad \vec{v}_t \in \text{LIN}(T)$

$\vec{v}_i \in S \cup T$

$\text{LIN}(S \cup T) = \text{LIN}(S+T)$

1) $\text{LIN}(S \cup T) \subseteq \text{LIN}(S+T)$

$\vec{v} \in S \cup T \Leftrightarrow \vec{v} \in S \vee \vec{v} \in T \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} \in S+T \vee \vec{v} \in S+T \Leftrightarrow \vec{v} \in S+T$

$(S+T) \supseteq S \cup T$

$\text{LIN}(S+T) \supseteq \text{LIN}(S \cup T)$

2) $\text{LIN}(S \cup T) \supseteq \text{LIN}(S+T) \Leftrightarrow \forall_{\vec{v}} (\vec{v} \in \text{LIN}(S+T) \Rightarrow \vec{v} \in \text{LIN}(S \cup T))$

$S' = (\{1, \dots, 3\}, \{\dots\})$

$S = \text{LIN}(S')$

$T' = (\{1 \quad 3\}, \{1 \quad 3\})$

$T = \text{LIN}(T')$

$\dim(S+T) = \dim(\text{LIN}(S') + \text{LIN}(T'))$

$\dim(S) = \dim(\text{LIN}(S'))$

$\dim(T) = \dim(\text{LIN}(T'))$

$\dim(S \cap T) = \dim(\text{LIN}(S') \cap \text{LIN}(T'))$

Zadanie 4.

$\mathcal{U} \subseteq V$

to nie podane $W \in V$

1) $\mathcal{U} = \vec{u} + W$ $\quad \vec{u} \in \mathcal{U}$

2) $\mathcal{U} = \vec{u} + W$ $\quad$ trivi

3) $\forall_{u \in \mathcal{U}} \ \mathcal{U} = \vec{u} + W$

3 → 2 → 1 trivi

1 → 2

$\mathcal{U} = \vec{u} + W$

$1 \Rightarrow \vec{0} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \in \mathcal{U} \Rightarrow \vec{u} \in \mathcal{U} \Rightarrow 2$

2 → 3

2) $\exists_{u \in \mathcal{U}} \ \mathcal{U} = \vec{u} + W$

3) $\forall_{u \in \mathcal{U}} \ \mathcal{U} = \vec{u} + W$

$\exists_{u \in \mathcal{U}} \ \mathcal{U} = \vec{u} + W$

Niech $\vec{u}'$ dowolny

$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{w}$

$\vec{u} = \vec{u}' - \vec{w} = \vec{u}' + (-\vec{w})$ $\in W$

$\forall_{\vec{v} \in \mathcal{U}} \ \exists_{\vec{w}} \ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} = \vec{u}' + (\vec{w} - \vec{w})$ $\in W$

$\vec{u} + W = \vec{u}' + W$

II część 2 → 1

$\exists_{u \in \mathcal{U}}$

$\mathcal{U} - \vec{u} = W$

$\vec{u} + \vec{0} \in \mathcal{U} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} \in \mathcal{U}$

wykładnik tak samo

Zadanie 5.

wy $\vec{v} \in \mathcal{U}$

$\mathcal{U} = (1,3,2) + \text{LIN}((2,1,5), (2,0,1))$?

$$\begin{vmatrix} 2&1&5 \\ 2&0&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&1&4 \\ 2&0&1 \end{vmatrix}$$

$3,6,15 = (1,3,2) + (2,3,13)$

$(2,0,1)$

$+3(0,1,4)$ ✓

$\mathcal{U} = (1,3,2) + \text{LIN}((2,1,5), (2,0,1))$

$3,6,16 = (1,3,2) + (2,3,16)$

$$\begin{vmatrix} 2&3&16 \\ 2&0&1 \\ 2&1&5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&3&15 \\ 2&0&1 \\ 0&1&4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&0&1 \\ 0&3&15 \\ 0&1&4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&0&1 \\ 0&3&15 \\ 0&3&12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&0&1 \\ 0&3&15 \\ 0&0&-3 \end{vmatrix}$$ = nierolnicze

$\mathcal{U} = (1,0,1) + \text{LIN}((1,1,1), (3,-1,2))$

$(-4,7,11) = (1,0,1) + (-5,7,10)$

$$\begin{vmatrix} -5&7&10 \\ 3&-1&2 \\ 1&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1 \\ 0&-4&-1 \\ 0&12&15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1 \\ 0&-12&-3 \\ 0&12&15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1 \\ 0&12&15 \\ 0&0&12 \end{vmatrix}$$ = nierolnicze

$\mathcal{U} = (1,0,1) + \text{LIN}((1,1,1), (3,-1,2))$

$(-8,14,22) = (1,0,1) + (-9,14,21)$

$$\begin{vmatrix} -9&14&21 \\ 3&-1&2 \\ 1&0&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&1 \\ 0&14&30 \\ 0&-1&-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 0&14&30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&16 \end{vmatrix}$$ = nierolnicze

Zadanie 6.

$\dim(W+W') = 1 + \dim(W \cap W')$

$\dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$

$2\dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') + 1$

$\dim(W) \leq \dim(W+W')$

$\dim(W') \leq \dim(W+W')$

zatem dokładnie jedna równa równe bazy

$\dim(W) = \dim(W+W')$

$1 + \dim(W') = \dim(W+W')$

$\vec{v}_{W'}$ $\vec{0}$

$W \cap W' \quad W'$

$\alpha_W = \alpha_{W'} + \vec{v}$

$\vec{v} = \vec{w}$

$F(\vec{v}) = F(\vec{w})$

$F(\vec{0}) = \vec{0}$

80% · p. zał

20% · zał. dom.

$F(\vec{v}) + F(\vec{0}) = F(\vec{v} + \vec{0}) = F(\vec{v}) =$

$20\% = x \cdot 80\%$

$20 = 80x$

$x = \frac{1}{4}$

$\boxed{x = 25\%}$

$\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

Zadanie 7.

$\exists \vec{v} \ F(\vec{v}) \neq 0$

$\boxed{F: U \to F}$

$\sum \alpha_i x_i \qquad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

$\exists_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} F((x_1, \dots, x_n)) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}$

$\alpha_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$\alpha_i = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0)$ 1 - te miejsce

$F((x_1, \dots, x_n)) = F((x_1, 0, 0 \dots, 0)) + F((0, x_2, \dots, 0)) + \dots + F((0, 0, \dots, 0, x_n)) =$

$= x_1 \underbrace{F(1, 0 \dots, 0)}_{\alpha_1} + \dots + x_n \underbrace{F(0, \dots, 0, 1)}_{\alpha_n} = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$

Zadanie 8.

$(x,y) \to (2x-y, x+3y-1, 5x+2y)$

$F(\alpha(x,y)) \to F((\alpha x, \alpha y)) = (2\alpha x - \alpha y, \alpha x + 3\alpha y - \alpha, 5\alpha x + 2\alpha y)$

$\alpha(F(x,y)) \to (2\alpha x - \alpha y, \alpha x + 3\alpha y - \alpha)$

NIE

W 3 wyjdzie α^2

$(x,y,z) \to (3x+5y-2z, 2x-y)$

$F(\alpha(x,y)) \to$

$\alpha \cdot F(x,y)$

} wiadać że zadziała

$F((x,y,z) + (a,b,c)) \to F((a+x), (b+y), (c+z))$

$F((x,y,z)) + F(a,b,c) \to (3(x+a) + 5(y+b) - 2(z+c), 2(x+a) - (y+b))$

} też widać że działa

$\alpha \cdot (F(x,y,z)) = (\alpha x y + \alpha z, \dots)$

$F(\alpha(x,y,z)) = (\alpha^2 x y +$

Zadanie 9.

„na" $\Rightarrow \forall_{\vec{v} \in W} \ \exists_{\vec{v} \in V} \ F(\vec{v}) = \vec{w}$

$\boxed{W \subseteq \text{LIN}(F(\dots) \dots F())}$

$\text{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = V \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall_{\vec{v} \in V} \ \exists_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \ \vec{v}_1\alpha_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{v}$

Weźmy dowolny $\vec{w} \in W$ bo „na"

Niech $\vec{v}$ takie, że $F(\vec{v}) = \vec{w}$

$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n$

$\vec{w} = F(\vec{v}) = F(\quad) =$

$= F(\alpha_1\vec{v}_1) + \dots + F(\alpha_n\vec{v}_n) =$

$= \alpha_1 F(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_n F(\vec{v}_n)$

$\vec{w} = \boxed{\alpha_1 F(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_n F(\vec{v}_n)}$

Zadanie 10.

$\neg P \Rightarrow \neg L$

$\exists_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \ \underbrace{\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n}_{S} = \vec{0}$ $\quad \exists \alpha_i \neq 0$

$\boxed{F(\vec{0}) = \vec{0}}$

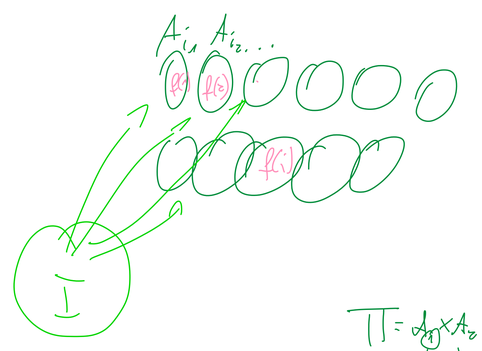
$\boxed{F(\vec{v} + \vec{0}) = F(\vec{v}) + F(\vec{0}) \Rightarrow F(\vec{0}) = \vec{0}}$

~~$F(S) = F(\vec{0}) = \vec{0}$~~

$\alpha_1 F(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_n F(\vec{v}_n) = \boxed{\vec{0}}$

$F(\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + v_n\alpha_n) = F(\vec{0})$

$\alpha_1 F(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_n F(\vec{v}_n) = F(\vec{0})$



$\Pi = A_1 \times A_2 \dots \times A_n$

$(\ , \ , \dots , \ )$

~~zerowy~~ niepustym

iloczyn

kartezjański

F

$\boxed{A_i} \in F$

$B \supseteq A \in F$

$\{A \subseteq X \mid x \in A\}$

$x \in A \ / \ x \notin A$

$A \in F \vee X \setminus A \in F$

$X \in F \quad A \setminus X \in F$