Notatki do Listy 13

piątek, 26 maja 2023 18:36

Rząd elementu - najmniejsze $n>0$ takie, że $a^n = e$, jeśli nie istnieje to **rząd nieskończony**

F 14.15 - w grupie skończonej każdy element ma rząd skończony

Podgrupa ($\leqslant$) - $H \leqslant G \iff (H \subseteq G$ oraz H jest grupą$)$

L 14.19

a) W grupie skończonej G zbiór H jest podgrupą gdy jest zamknięty na działanie

b) Jeśli każdy element ma skończony rząd to H jest podgrupą gdy jest zamknięty na działanie

Dlaczego? k - rząd a, wtedy $a \cdot a^{k-1} = a^k = e$, więc $a^{k-1} = a^{-1}$

$\langle A \rangle$ - najmniejsza podgrupa G zawierająca A, wtedy A to zbiór generatorów tej podgrupy

Postać zredukowana: $a_i \in G$, $a_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{l_k}$ jest w postaci zredukowanej jeśli $\forall i \; (l_i \neq 0$ oraz $a_i \in \{a_{i+1}^{-1}, a_{i+1}\})$

co to oznacza? gdy wykonamy (niezależnie od kolejności)

- jeśli $a_i = a_{i+1}$ to $a_i^{l_i} \cdot a_{i+1}^{l_{i+1}} \to a_i^{l_i + l_{i+1}}$
- podobnie dla $a_i = a_{i+1}^{-1}$
- $a_i^0 \to e$ (albo „nic" jeśli coś jeszcze jest)

Wtedy mamy ciąg w postaci zredukowanej o tym samym wynik (i „nowe" a to podciąg „starych")

$\langle x \rangle$ jest zawsze postaci $\{x_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{z_k}\}$

Grupa cykliczna - $G = \langle \{a\} \rangle$, czyli generowana przez jeden element (czyli tak naprawdę „wszystkie" potęgi jakiegoś a)

1. Każda grupa cykliczna jest przemienna $(a^k a^l = a^l a^k)$
2. $\forall n < \infty$ wszystkie grupy cykliczne rzędu n są izomorficzne

---

Grupa wolna - NIE ROZUMIEM ?!

T. 14.31 - każda podgrupa grupy wolnej jest grupą wolną

Grupa permutacji - zbiór permutacji z $\cdot$ jako złożenie funkcji

T 15.3 - dla każdej grupy o n elementach istnieje podgrupa S_n izomorficzna z tą grupą

Cykl - permutacja działająca na ciągu elementów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ taka, że

$$b_i \to \begin{cases} a_{i+1} & \text{jeśli } \exists_i \, a_i = b_i \\ b_i & \end{cases}$$

rozłączne - nie mają wspólnych elementów, wtedy przestawienie przez nie nie zależy od kolejności a rząd to NWW rzędów cykli (czyli ilości ich elementów)

transpozycja: $a_1 \to a_2$, $a_2 \to a_1$, $a_i \to a_i$

każdy cykl długości k to $k-1$ transpozycji
