Lista 10 repety

środa, 26 kwietnia 2023 18:07

Repetytorium

1. Iloczyn skalarne
   - standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots, x_n)\cdot(y_1, \dots, y_n) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ ← ten iloczyn skalarny jest przemienny

   - ogólny (zdefiniowany aksjomatycznie)

standardowy|pozwala na:

- sprawdzenie prostopadłości (ortogonalności)

v ortogonalne do w $\Leftrightarrow v \cdot w = 0$

kąt = iloczyn skalarny/iloczyn długości wektorów

- norma (długość) v to $\boxed{\sqrt{v \cdot v}}$ ← widać, że w $\mathbb{R}^2$ to tw. Pitagorasa wychodzi

SPRAWDZIĆ!

ta konkretna norma, bo jest dużo różnych

z danym iloczynem skalarnym zawsze wiążemy normę

Zadanie:

Zał. $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ i $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Niech $A = \vec{x} \cdot \vec{y}^T$

a) jaki jest rząd A?

Tw.: rząd iloczynu $\leq$ minimum rzędów

Wtedy: jeśli $\vec{x} \neq \vec{0}$ oraz $\vec{y} \neq \vec{0}$ to $rk(A) = 1$

wpp $rk(A) = 0$

b) jaki jest rząd A^2?

macierz 1×1 i tam jest iloczyn skalarny $\Rightarrow$ skoro $\vec{x} \perp \vec{y}$ to 0 wychodzi

$A^2 = (\vec{x}\vec{y}^T)(\vec{x}\vec{y}^T) = \vec{x}\cdot(\vec{y}^T\vec{x})\vec{y}^T = \vec{x}\cdot[0]\cdot\vec{y}^T = \vec{0}\cdot\vec{y}^T \Rightarrow rk(A) = 0$

c) jakie są wartości własne A?

Twierdzenie: Jeśli λ jest wartością własną A to λ^2 jest wartością własną A^2

Skoro A^2 jest macierzą zerową, to jedyną λ macierzy A^2 jest $\lambda = 0$, zatem A może mieć tylko wartość własną $\lambda = 0$.

Zobaczmy, czy A ma $\lambda = 0$:

$\det(A - 0\,Id) = \det(A) = 0$ ← bo rząd $A \leq 1$ a A ma wymiary 4×4

Zatem A ma wartość własną 0.

Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni W przestrzeni V

$W^\perp = \{\vec{s} \mid \forall \vec{w} \in W \ \vec{s} \perp \vec{w}\}$

chyba: $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$

Przykład:

$V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Szukamy (a, b) takich, że $\forall x$:

$(a,b)\cdot(x, 2x) = 0$

$ax + b2x = 0$

$x(a + 2b) = 0$

$\Downarrow$ skoro $\forall x$

$a + 2b = 0$

$\boxed{W^\perp = \{(-2b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}}$

Przykład II:

$V = \mathbb{R}^4, \quad W = \{(x, y, x+y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Chcemy: $(a, b, c, d)(x, y, x+y, 0) = 0$

Weźmy bazę W: $W = LIN((1,0,1,0), (0,1,1,0))$

jeśli a, b, c, d będą działać dla bazy to dla wszystkiego będą

$(a, b, c, d)(1, 0, 1, 0) = a + c \Rightarrow a + c = 0$

$(a, b, c, d)(0, 1, 1, 0) = b + c \Rightarrow b + c = 0$

$\Downarrow$

$a = -c$

$b = -c$

c, d - dowolne

$(-c, -c, c, d)$

Czemu tak można?

Fakt: $W^\perp = \{\vec{v} \in V \mid \forall \vec{b} \in B \ \vec{v} \perp \vec{b}\}$ ← baza W

Dowód: Załóżmy, że $\forall \vec{b} \in B \ \vec{v} \perp \vec{b}$, pokażmy, że $\forall \vec{w} \in W \ \vec{v} \perp \vec{w}$.

$\vec{w} = \alpha_1\vec{b}_1 + \dots + \alpha_n\vec{b}_n$. Iloczyn skalarny jest "liniowy"

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{v}(\alpha_1\vec{b}_1 + \dots + \alpha_n\vec{b}_n) = \alpha_1\vec{v}\vec{b}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}\vec{b}_n = \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0$

dla $\mathbb{R}^n$ oczywiste (przemienność mnożenia i dodawania), dla innych też działa

---

Co się dzieje, gdy mamy skończone ciało?

$V = (\mathbb{Z}_2)^3$

$W = LIN((1,0,1)) = \{(1,0,1), (0,0,0)\}$

$W^\perp$: $(a,b,c)(1,0,1) = 0$

$a + c = 0$

$a = -c$

$W^\perp = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$ ← w $\mathbb{Z}_2$ to a

$W^\perp = \{(1,0,1), (1,1,1), (0,1,0), (0,0,0)\}$

czyli, że $W \subseteq W^\perp$, czyli wektory są prostopadłe same do siebie

Zadanie działa dla:

- $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{Q}^n$
- $\mathbb{C}^n$

Jak są skończone to się czasem psuje

Zadanie 6.

$V = \mathbb{F}^n$

$V_1 \leq V_2 \Rightarrow V_1^\perp \geq V_2^\perp$ jakoś wychodzi

Zadanie 8.

! NOWY ILOCZYN SKALARNY !

$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ← oznaczenie iloczynu skalarnego (zazwyczaj) innego niż zwykłego.

Funkcja $V \cdot V \to F$ jest iloczynem skalarnym, gdy:

a) liniowość:
$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$
$\langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

b) $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ ← dla $\mathbb{R}$

dla $\mathbb{C}$: $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}$ ← sprzężenie

c) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$
$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Bo mamy normę (długość) $|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

Fakt: Niech $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ - wektory ortogonalne parami.

Wtedy $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne.

Dowód: Weźmy takie $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, że

$\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$

Dla $i = 1, \dots, n$ rozważmy: $\langle \vec{0}, v_i \rangle$ to jest równe $\vec{0}$ bo:

$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$
$\langle \vec{0}, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{0} + \vec{0}, \vec{v}_i \rangle =$
$= \langle \vec{0}, \vec{v}_i \rangle + \langle \vec{0}, \vec{v}_i \rangle =$
$= 2 \cdot \langle 0, \vec{v}_i \rangle \Rightarrow$
$\langle \vec{0}, \vec{v}_i \rangle = 0$

$\langle \vec{0}, \vec{v}_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \overbrace{\langle v_1, v_i \rangle}^{\text{zero}} + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots +$

$+ \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{\text{zero}} = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$

nie może być $= 0$ bo wtedy v_i nie jest liniowo niezależne z pozostałymi

Stąd $0 = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$, zatem $\alpha_i = 0$, zatem

(skoro to było dla dowolnego i) to wszystkie α są zerami $\square$

Fakt: dla każdej podprzestrzeni W (od V) z iloczynem skalarnym mamy bazy ortonormalne, tj. bazy $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ takie, że $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ oraz $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 1$

Twierdzenie: $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$

Dowód: Weźmy bazę $W = e_1, \dots, e_k$ oraz bazę $W^\perp = f_1, \dots, f_l$.

Załóżmy, że obie bazy są ortonormalne. Pokażmy, że $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l$ jest bazą V.

1) ortogonalne do siebie ← z definicji
2) liniowo niezależne ← z tego, że są ortogonalne (już pokazaliśmy)
3) $\forall \vec{v} \in V \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \ \vec{v} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n f_l$

Załóżmy nie wprost, że nie:

Weźmy $\vec{v}$ takie, że $\vec{v} \notin LIN(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l)$

Rozważmy $\vec{w} = \vec{v} - (\overbrace{\langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle}^{\text{skalar}} \underbrace{\vec{e}_1}_{\text{wektor}} + \dots + \overbrace{\langle \vec{v}, \vec{f}_l \rangle}^{\text{skalar}} \underbrace{\vec{f}_l}_{\text{wektor}})$

$\langle \vec{w}, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle - \langle (\quad) \vec{e}_i \rangle =$ ← poza $\vec{e}_i$ wszystko się wyzeruje przy mnożeniu

$= \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle - (\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle) =$

$= \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle - (\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \cdot 1) =$

$= \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle - \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle = 0$

Zatem $\langle \vec{w}, \vec{e}_i \rangle = 0$, czyli $\vec{w} \perp \vec{e}_i$, a zatem $\vec{w} \in W^\perp$, zatem $\exists \beta_1, \dots, \beta_l \ \vec{w} = \sum_{i=1}^{l} \beta_i f_i$.

Niech $\alpha_i = \langle \vec{v}, \vec{g}_i \rangle$, gdzie $\vec{g}_i = \begin{cases} e_i & i < n \\ f_{i-k} \end{cases}$

$\vec{v} = \vec{w} + \sum \alpha_i \vec{g}_i$, czyli

$\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{g}_i + \sum \beta_i f_i = \sum \gamma_i \vec{g}_i$