Lista 14 repety

czwartek, 1 czerwca 2023 08:28

Parzystość permutacji = parzystość rozkładu na transpozycje (ale też parzystość ilości inwersji)

cykl długości parzystej jest permutacją nieparzystą

$\Downarrow$

parzystość $\longleftrightarrow$ ilość cykli parzystych mod. 2

! Rozkład na transpozycje robimy tak:
- rozkład na cykle
- każdy cykl na transpozycje, np.

$(1,2,3,5) = (1,5)(1,3)(1,2)$!

Działanie grupy na zbiorze:

to jest $f: G \times C \to C$

g to pewna permutacja C

czyli bijekcja?

taka, że:

- $\forall g_1, g_2 \in G \quad c \in C \quad f(g_1 \cdot g_2, c) = f(g_1, f(g_2, c))$ (działanie grupy)

czyli te wszystkie g są pewnymi funkcjami z $C \to C$

- $f(e, c) = c$

Dla $x \in C$

O_x - orbita x (możliwe elementy na które x może przejść)

S_x - stabilizator $= \{g \mid f(g, x) = x\}$

Twierdzenie:

$\forall x \in C \quad |O_x| \cdot |S_x| = |G|$

Twierdzenie: Orbity tworzą podział zbioru (jeśli mamy permutacje to na cykle)

Przykład:

$G = \langle (1,2,3)(4,5)(6,7,8,9) \rangle \in S_{10}$

$C = \{1, \dots, 10\}$

$f(g, c)$ zwraca to, na co przechodzi c w permutacji g, czyli $g(c)$

Czym jest G?

Skoro grupa skończona i jeden generator to jego potęgi. Skoro rząd permutacji to 12 to tylko pierwsze 12 tych potęg wystarczy.

$G = \{(\text{ta permutacja})^k \mid 0 \le k < 12\}$

$|G| = 12$

Rozpatrzmy różne elementy:

$O_1 = \{1, 2, 3\} \Rightarrow |O_1| = 3$

$O_2 = O_3 = O_1$

$O_4 = \{4, 5\}$

$O_{10} = \{10\}$

$S_{10} = G$

$S_1 = \{\sigma^3, \sigma^6, \sigma^9, \sigma^0\}$

Fakt: Stabilizator jest podgrupą G

G - grupa symetrii kwadratu

$G = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, ⋮, ⋰, ⋱, \cdots\}$

! skoro mamy twierdzenie, że każdą grupę można traktować jako permutację to to wszystko działa tak samo !

Lemat Burnside'a:

$\mathrm{fix}(g) = \{c \in C \mid g(c) = c\}$

$\text{liczba orbit} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|$

Grupa obrotów

Pamiętamy: $|O_x| \cdot |S_x| = |G|$

Niech C - ściany

Wtedy:

$\left.\begin{array}{l} |O_c| = 6 \\ |S_c| = 4 \end{array}\right\}$ zatem $|G| = 24$

! sprawdzić w internecie jakie to są !

Warstwy:

H - podgrupa G

Mamy warstwy lewo- i prawostronne

Warstwy lewostronne: $a \cdot H = \{a \cdot h \mid h \in H\}$ dla jakiegoś $a \in G$

sprawdzić, czy w dobrej kolejności

Warstwa prawostronna a': $H \cdot a' = \{h \cdot a' \mid h \in H\}$

Warstwy prawostronne tworzą podział grupy (lewostronne) (mają po tyle samo elementów, czyli $|H|$)

Przykład: G - permutacje $\{1, \dots, 6\}$

H - permutacje takie, że $\sigma(1) = 1$

$|H| = 5! = 120$

Ile jest warstw lewostronnych?

$\frac{|G|}{|H|} = \frac{6!}{5!} = \boxed{6}$

Jak wyglądają te warstwy?

$W_1 = \{\sigma \mid \sigma(1) = 1\}$

$\vdots$

$W_6 = \{\sigma \mid \sigma(1) = 6\}$

Zadanie „liczenie naszyjników"

Ile jest rozróżnialnych (*) naszyjników zbudowanych z 8 koralików z koralików w 4 kolorach

* rozróżnialny:
- obrócone naszyjniki to te same
- odbicie lustrzane to ten sam

} grupa symetrii obrotu 8-kąta

II wariant: bez odbicia

To co teraz:

C - naszyjniki wszystkie

$|C| = 4^8$

G - grupa, którą działamy - symetrie 8-kąta foremnego.

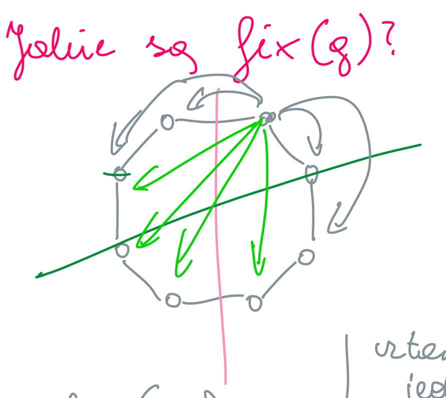
$|G| = 16$

rozróżnialne naszyjniki $\Leftrightarrow$ z różnych orbit

Czyli pytamy o liczbę orbit (#O)

$\#O = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|$

Jakie są fix(g)?



$\mathrm{fix}(\text{dowolnej}) = \left\{\begin{array}{l} \text{te po prawej jednoznacznie wyznaczone przez te po lewej} \end{array}\right\} = 4^4$

$\mathrm{fix}(\bullet) = \left\{\begin{array}{l} \text{„wierzchołki" dowolne, w pozostałych 3 kopie pozostałych trzech} \end{array}\right\} = 4^5$

$\mathrm{fix}(0^\circ) = 4^8$

$\mathrm{fix}(\pm 45^\circ) = \{\text{jednokolorowe}\} = 4$

$\mathrm{fix}(\pm 90^\circ) = \left\{\begin{array}{l} \text{dwukolorowe, kolory na zmianę} \end{array}\right\} = 4 \cdot 3$

resztę dokończyć samodzielnie