Lista 5

środa, 22 marca 2023 17:47

Zadanie 1.

$$\vec{v} \begin{bmatrix} 1&0&3&2&0\\ 2&1&-3&-3&1\\ 3&-2&-1&0&1\\ 0&3&1&-1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&3&2&0\\ 0&3&1&-1&0\\ 0&1&-9&-7&1\\ 0&-2&-10&-6&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(1x_1 + 0x_2 + 1x_3, \boxed{}, \boxed{}) =$$

$F(1,0,0) = (2, \cancel{3, 5, -2})$

$F(0,1,0) = (\quad)$

$F(0,1,0) = (\quad)$

gauss $\Rightarrow$ czy są liniowo niezależne $\Rightarrow$ baza

$\vec{v} \longrightarrow (1x_1 + 3x_3 + 2x_4, \quad , \quad , \quad , \quad)$

$\boxed{3}$

wybrana baza $(1,0,1), (4,3,1), (3,4,1)$

$\begin{bmatrix} 1&0&1\\ 4&3&1\\ 3&4&1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$F(a,b,c,d,e) = (1a + 0b + 3c + 2d + 0e, \; 2a + 1b)$

$F(1,0,0,0,0) = (1,2,3,0)$

F

$$\begin{bmatrix} 1&2&3&0&0\\ 0&1&-2&3&0\\ 3&-3&-1&1&1\\ 2&-3&0&-1&1\\ 0&1&1&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&3&0\\ 0&0&-3&3\\ 0&-3&-10&1\\ 0&-7&-6&-1\\ 0&1&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&3&0\\ 0&3&10&-1\\ 0&3&6&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&3&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&3&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

baza obrazu

baza jądra to jeden wektor

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \vec{v} = 0$$

$\in \mathrm{LIN}(\mathrm{ker}(f))$

$$\begin{pmatrix} 3x_5 - 7x_5 \\ 2x_4 + x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1\\ -3&0&1&0&0\\ -2&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 3&0&-1&0&0\\ 2&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&-\frac{1}{3}&0&0&\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 3&0&-1&0&-3\\ 2&0&0&-1&-7\\ 0&0&0&0&1\\ 0&-\frac{1}{3}&0&0&\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 3&0&-1&0&-3\\ \boxed{2\;\; -\frac{1}{3}\;\; 0\;\; -1\;\; -\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \leftarrow \text{baza jądra}$$

$$\begin{bmatrix} 5&0&-1&-1&-16\\ 2&-\frac{1}{3}&0&-1&-\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5&0&1&1&16\\ 6&-1&0&-3&20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5&0&1&1&16\\ 1&-1&1&-2&-4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.

Rząd: rzędów LIN (kolumny)

$$\begin{bmatrix} 5&p&5&p\\ 1&1&1&1\\ p&p&2&2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5&1&p\\ p&1&p\\ 5&1&2\\ p&1&2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5&1&p\\ p&1&p\\ 0&0&2-p\\ 0&0&2-p \end{bmatrix}$$

$p=2$: $\begin{bmatrix} 5&1&p\\ p&1&p\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5&1&p\\ 5p&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix} = (p+5) \cdot \begin{bmatrix} 5&1&p\\ 1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ } rząd = 2

$p \neq 2$: $\begin{bmatrix} 5&1&p\\ p&1&p\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5&1&0\\ 5p&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$

$p=5$: $\begin{bmatrix} 5&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ } rząd = 2

$p \neq 5$: $\begin{bmatrix} 5&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ } rząd = 3

Zadanie 4.

✓1) $(AB)^{-1} \Rightarrow A^{-1}, B^{-1}$

✓2) $A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1}, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

✓3) $A^{-1} \Rightarrow (A^T)^{-1}, \; (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

?4) $A^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^{-1}, \; (A^{-1})^{-1} = A$

} wszystkie dowody udowodnić

1) $AB \cdot (AB)^{-1} = \mathrm{Id} \;\wedge\; (AB)^{-1}AB = \mathrm{Id}$

$A(B \cdot (AB)^{-1}) = \mathrm{Id} \Rightarrow B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1}$

$(AB)^{-1}AB = \mathrm{Id} \Rightarrow$

$\Rightarrow ((AB)^{-1}A)B = \mathrm{Id} \Rightarrow$

$\Rightarrow ((AB^{-1})A) = B^{-1}$

2) Wiemy: $AA^{-1} = \mathrm{Id}$

$B^{-1}B = \mathrm{Id}$

$\mathrm{Id} \cdot \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$

$A \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}$

$A \cdot \mathrm{Id} \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}$

$A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}$

$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = \mathrm{Id}$

$AB^{-1} = (B^{-1} \cdot A^{-1})$

4) $A \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}$

$(A^{-1}) \cdot A = \mathrm{Id}$

więc $A = (A^{-1})^{-1}$

bo $(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = \mathrm{Id}$

3)

$$\sum a_{ix}(a^{-1})_{xj} = \mathrm{id}_{ij}$$

Po transpozycji:

$b_{ij} = a_{ji}$ niech $b'_{ij} = (a^{-1})_{ji}$ (nie różnicujemy $b' = (b)^{-1}$)

$$\sum a_{ix}(a^{-1})_{xj} = \sum b_{xi} \cdot b'_{jx} = \sum b'_{jx} b_{xi}$$

$$\mathrm{id}_{ij} = \sum b'_{jx} b_{xi}$$

zauważmy: $\mathrm{id}_{ij} = \mathrm{id}_{ji}$

$$\sum b'_{jx} b_{xi} = \mathrm{id}_{ji} \Rightarrow$$

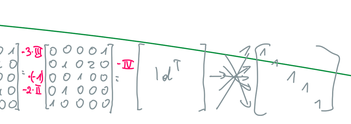
$\Rightarrow B'B = \mathrm{Id} \Rightarrow$

$\Rightarrow B' = B^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^T)^{-1}$ istnieje i jest równe $(A^{-1})^T$ □

Zadanie 6.

$$\begin{bmatrix} -3&0&-3&0&1\\ 0&1&0&2&0\\ 2&0&-1&0&0\\ -4&3&-3&4&1\\ 4&0&3&0&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3&0&3&0&1\\ 0&1&0&2&0\\ 2&0&-1&0&0\\ 1&3&0&4&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot V \cdot 3 \\ \\ -2V \\ +V \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0&0&-3&0&1\\ 0&1&0&2&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&3&0&4&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3\cdot III \\ \\ +I \\ -2\cdot II \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&2&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -III \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}^T \end{bmatrix}$$



teraz tworzymy odwrotną:

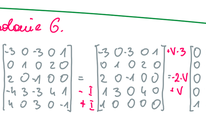
$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ -1&0&0&1&0\\ -1&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&0\\ -2&0&1&0&-2\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40&0&-3&0&12\\ 0&1&0&0&0\\ 2&0&-1&0&2\\ 0&-2&0&1&1\\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40&2&-3&-11&11\\ 0&1&0&0&0\\ 2&0&-1&0&2\\ 0&-2&0&1&1\\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzić

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\ 0&-2&0&1&1\\ 2&0&-1&0&2\\ 0&1&0&0&0\\ 40&2&-3&-11&11 \end{bmatrix} \text{ dobre}$$

Zadanie 7.

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 0 & i > j \\ ? & \text{wpp} \end{cases}$$



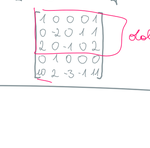
Załóżmy, że w b_{ij} są takie, że $b_{ij} \neq 0$ i $i \geq j$. Weźmy takie $b_{ij} \neq 0$, że $\forall_{x>i}\; b_{xj} = 0$ lub nie istnieje.

Zauważmy, że $c_{ij} = \sum a_{ix} b_{xj} = \sum_{x<i} \boxed{a_{ix}}^{=0} b_{xj} + \sum_{x \geq i} a_{ix} b_{xj} =$ ($a_{31} = 0$, $a_{13} \neq 0$)

c_{ij} jest zdecydowanie, więc $c_{ii} = 1$ a $c_{ij} = 0$

$$= \sum_{x \geq i} a_{ix} b_{xj} = a_{ii} b_{ij} + \sum_{x>i} a_{ix} \underbrace{b_{xj}}_{0 \text{ z założenia}} = \cancel{a_{ii} b_{ij}}$$

$\Rightarrow$ założenie b bzdury



Skoro $c_{ij} = 0$ to $\boxed{a_{ii} = 0}$ lub $\boxed{b_{ij} = 0}$ ← sprzeczność

wychodzi, że to musi być 0,

???

Zadanie 8.

$$\begin{bmatrix} 1&\alpha\\ \alpha&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&\alpha\\ 0&1-\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0\\ \alpha&1 \end{bmatrix}$$

Dla $\alpha^2 = 1$ ($\alpha^2 = 1$) nie istnieje

Dla $\alpha \neq 1$:

$$\begin{bmatrix} 1&\alpha\\ 0&1-\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&\alpha\\ 0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0\\ 0&\frac{1}{1-\alpha^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} & \frac{-\alpha}{1-\alpha^2} \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha^2} & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&2&2 \\ 2&1&-2 \\ 2&-2&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&2 \\ 0&3&-3 \\ 0&-6&-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&-1 \\ 0&2&1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1&2&2 \\ 0&3&-3 \\ 0&0&-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&-1 \\ 0&2&2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&2 \\ 0&1&-1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3} \\ 0&\frac{2}{9}&\frac{2}{9} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{wiersze} \\ \text{wiersze} \\ \text{wiersze} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&2&2 \\ 2&1&-2 \\ 2&-2&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&2&2 \\ 2&1&-2 \\ 2&-2&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9&0&0 \\ 0&9&0 \\ 0&0&9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9&0&0 \\ 0&9&0 \\ 0&0&9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9}&0&0 \\ 0&\frac{1}{9}&0 \\ 0&0&\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

nie dla $\alpha = 1$, bo

$r_a = \mathrm{rząd}(A)$

$r_b = \mathrm{rząd}(B)$

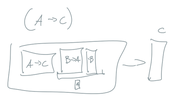
$r_{ab} = \mathrm{rząd}(AB)$

$r_{ab} = \min(r_a, r_b) = \min(3,3) = 3$ □

(sprawdzone w kalkulatorze)

$(B \to A) \quad B \to C : [A \to C] \cdot [B \to A]$

$(A \to C)$



Zadanie 1.

$$\begin{bmatrix} 1&0&3&2&0\\ 2&1&-3&-3&1\\ 3&-2&-1&0&1\\ 0&3&1&-1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&3&2&0\\ 0&1&-9&-7&1\\ 0&-3&-1&1&0\\ 0&3&1&-1&0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&3&2&0\\ 0&1&-9&-7&1\\ 0&0&-26&-20&-1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&3&2&0\\ 0&1&-9&-7&1\\ 0&0&26&20&1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

rząd, więc w ker (5-3=2) wektory

kiedy przechodzi na 0.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 9x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \\ -26x_3 - 20x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 9x_3 + 7x_4 - x_5 \\ x_3 = \frac{20}{26}x_4 + \frac{3}{26}x_5 \end{cases}$$

zatem wektory są postaci

$(a, b, c, 1, 0)$ lub $(a, b, c, 0, 1)$

w bazie $(a, b, c$ odpowiednie$)$

pierwszy: $x_3 = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$, $x_2 = \frac{90}{13} + 7$, $x_1 = \frac{-30}{13} - \frac{20}{13} = -14 = -\frac{210}{13} = -24\frac{10}{13}$

$(-24\frac{10}{13}, 7\frac{10}{13}, \frac{10}{13}, 1, 0)$

drugi: $x_3 = \frac{3}{26}$, $x_2 = \frac{27}{26} - 1 = \frac{1}{26}$, $x_1 = \frac{-9}{26} - \frac{2}{26} = -\frac{11}{26}$

$(-\frac{11}{26}, \frac{1}{26}, \frac{3}{26}, 0, 1) = (-11, 1, 3, 0, 26)$

Zadanie 2.

$$\begin{bmatrix} 5&p&5&p \\ 1&1&1&1 \\ p&p&2&2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&p-5&0&p-5 \\ 0&0&2-p&2-p \end{bmatrix}$$

możliwe 0: $p-5=0$ lub $2-p=0$,

zatem:

$p=2 \Rightarrow$ rząd $=2$

$p=5 \Rightarrow$ rząd $=2$

$p \neq 2 \wedge p \neq 5 \Rightarrow$ rząd $=3$

Zadanie 3.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq (j-1) \\ i & i = (j-1) \end{cases} \quad (\text{numerujemy } 1, \dots, n)$$

$M \cdot M = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq l \leq n} a_{il} \cdot a_{lj} = \begin{cases} \text{stała} & (i+1 = j-1) \Leftrightarrow (i = j-2) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

skoro $a_{il} \neq 0 \Leftrightarrow l = i+1$, $a_{lj} \neq 0 \Leftrightarrow l = j-1$

zał. $M^k = \begin{cases} \neq 0 & i = j-k \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$

$$M^{k+1} = \sum_{l} \underbrace{k_{il}}_{\neq 0 \Leftrightarrow} a_{lj} = \begin{cases} \neq 0 & (j-1 = i+k) \Leftrightarrow (i = j-(k+1)) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow l = i+k$

$\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = j-1$

$\Rightarrow$ indukcja działa $\Rightarrow$ wynik to $(n-k)$

~~Zadanie 5.~~

Zadanie 6.

$a \to a+4$

$b \to b$

całe wersje $\neq 0$

$$\begin{bmatrix} -3&0&-3&0&1 \\ 0&1&0&2&0 \\ 2&0&-1&0&0 \\ -4&3&-3&4&1 \\ 4&0&3&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&-4&0&1 \\ 0&1&0&2&0 \\ 0&0&-9&0&-2 \\ 0&3&0&4&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&-4&0&1 \\ 0&1&0&2&0 \\ 0&0&-9&0&-2 \\ 0&0&-22&4&1 \\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix} =$$

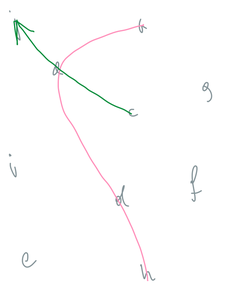
$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 2&0&3&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 2&0&1&0&-2 \\ 0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3} \\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&-4&0&1 \\ 0&1&0&2&0 \\ 0&0&-1&0&-4 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

wynik

$$\begin{bmatrix} 2&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 2&0&1&0&-2 \\ 0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3} \\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&-2&0&1&1 \\ 2&0&-1&0&2 \\ 0&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3} \\ 10&0&-3&0&11 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.



$(a, b, c) \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x+2)(x-2)} =$$

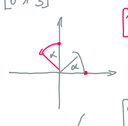
$$= \int \frac{(x^2+2x+2) - (x^2-4) - (-2x-5)}{(\quad)(\quad)(\quad)} =$$

$$= \int \left[\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+2x+2} \right] \int \frac{2x+5}{(\quad)(\quad)(\quad)}$$

$$\int \frac{2x+5}{(x+2)(x-2)(x^2+2x+2)} =$$

Zadanie 9.

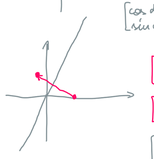
1) $\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 1&2&0 \\ 0&1&3 \end{bmatrix}$

2) 

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\;]$

3) 

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 10.

są trzy dany

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

mamy wiemy, że to bazy

macierz przejścia:

$A = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$B = (x^0, x^0 + x^1, \dots)$

$\begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$?

wektory z A w B:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ -1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&0&-1&1 \end{bmatrix}$$

wektory z B w A:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

przeniesienie:

$B \to A$

$B \to A$

w B

w A

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^0 + x^1$

$A \to B$

w A

w B

$$\begin{bmatrix} 1&-1&0&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (-1 \cdot x^0 + x^0 + x^1)$$

x^1

$$\begin{bmatrix} 0&1&4&6 \\ 0&0&2&12 \\ 0&0&0&3 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 4 + 2x \checkmark$$

x^0 x^1 x^2 x^3

x^2

$A \to F(A)$

na co

co przechodzi

$$\begin{cases} (x^0)' \to 0 & 2(x^0)'' \to 0 & (x^0)''' \to 0 \\ (x^1)' \to 1x^0 & 2(x_1)'' \to 0 & (x_1)''' \to 0 \\ (x^2)' \to 2x^1 & 2(x_2)'' \to 4x^0 & (x_2)''' \to 0 \\ (x^3)'' \to 3x^2 & 2(x_3)'' \to 12x^1 & (x_3)''' \to 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^0 \to 0 \\ x^1 \to 1x^0 \\ x^2 \to 2x^1 + 4x^0 \\ x^3 \to 3x^2 + 12x^1 + 6 \end{matrix}$$

$B \to F(B) \Leftrightarrow B \to A \to F(A) \to F(B)$?

$$\begin{cases} x^0 \to 0 \\ x^1 + x^0 \to 1x^0 \\ x^2 + x^1 + x^0 \to 2x^1 + 5x^0 = 2(x^1 + x^0) + 3x^0 \\ x^3 + x^2 + x + x^0 \to 3x^2 + 14x + 11x^0 = 3(x^2 + x^1 + x^0) + 11(x + x^0) - 3x^0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0&1&3&-3 \\ 0&0&2&11 \\ 0&0&0&3 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad B \to F(B)$$

Zadanie 11.

A: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

B: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$

C: $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$

$B \to A$ $\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$

$C \to A$ $\begin{bmatrix} 1&1&-1 \\ 1&-1&1 \\ -1&1&1 \end{bmatrix}$

$B \to C$ $\begin{bmatrix} 1&1&\frac{1}{2} \\ 1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \\ 1&\frac{1}{2}&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x+y$

odwrotna

odwrotna

$A \to B$ $\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&-1 \\ 1&-1&0 \end{bmatrix}$

$A \to C$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0 \\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2} \\ 0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

? $B \to C \Leftrightarrow [A \to C] \times [B \to A]$

$C \to B = [A \to B] \times [C \to A]$

$A \to B$

$$\begin{bmatrix} 1&-1&0&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x^1 + x^0 \\ \leftarrow x^2 + x^1 + x^0 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

x^2

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

1) nierozkładalne ← trzy

2) ~~zwykle~~ kiedy da się stworzyć

$$\boxed{ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3} =$$

$$= \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d \end{bmatrix}$$

x^0	x^1	x^2	x^3
d	d	d	d
$c-d$	$c-d$	$c-d$	
$b-c$	$b-c$		
$a-b$			

$$= d(x^3 + x^2 + x^1 + x^0) + (c-d)(x^2 + x^1 + x^0) + (b-c)(x^1 + x^0) + (a-b)x^0$$