Lista 13 cz 1

środa, 24 maja 2023 14:19

izomorfizm

$$\boxed{\begin{aligned} f(a)f(b) &= f(ab) \\ f^{-1}(a)f^{-1}(b) &= f^{-1}(ab) \end{aligned}}$$

$f(x) = x\cdot 60^\circ$ (obrót o)

$f^{-1}(\text{obrót o } y) = \frac{y}{60^\circ}$

$f(a) + f(b) = f(a+b)$

$a\cdot 60^\circ + b\cdot 60^\circ = (a+b)60^\circ$

$f: k \to k\cdot 60^\circ$

$$\boxed{f(a)\cdot f(b) = f(a\cdot b)}$$

$f^{-1}(a) f^{-1}(b) = f^{-1}(ab)$

Zadanie 1.

$\varphi_g(x) = gxg^{-1}$

a) $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$

$ab(ab)^{-1} = e$
$ab(b^{-1}a^{-1}) = e \Rightarrow ab^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$\varphi_{ab}(x)\ (ab)x(ab)^{-1} = abx(ab)^{-1} =$

$= abxb^{-1}a^{-1} = \varphi_a(bxb^{-1}) = \varphi_a\varphi_b(x)$

b) φ_a izomorfizmem

Zauważmy:

$x = a^{-1}axa^{-1}a = \varphi_a \varphi_{a^{-1}}(x) =$

$(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$

Wtedy:

$\varphi_a(x)\varphi_a(y) = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = axya^{-1} = \varphi_a(xy)$

$\varphi_{a^{-1}}(x)\varphi_{a^{-1}}(y)$ tak samo

c) jeśli $H \leq G$ to $\varphi_a(H) \leq G$ (podgrupa sprzężona)

? ? ?

Zadanie 4.

$a = a^{-1}$

$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$

$ab\boxed{(ab)^{-1}} \Leftarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
$ab\boxed{b^{-1}a^{-1}}$

Zadanie 3.

obroty: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$
neutralny

$\langle \mathbb{Z}_4, +\rangle$: $0, 1, 2, 3$

Zauważmy: $180^\circ + 180^\circ = 0^\circ$, inne nie dają 0°

$2+2 = 0$, inne nie dają 0°

Stąd: $f(0^\circ) = 0$
$f(180^\circ) = 2$

1) na pewno $f(90^\circ) = 1$ i $f(270^\circ) = 3$ działa

2) czy działa $f(270^\circ) = 1$ i $f(90^\circ) = 3$?

$f(90^\circ) + f(270^\circ)$ ~~zawsze 0~~ działa bez zmian

$f(\ ) + f(0^\circ)$ działa

$1 = 3+2 = f(90^\circ) + f(180^\circ) = f(270^\circ) = 1$

$f(270^\circ) + f(180^\circ)$ też działa

Zadanie 5.

a) Weźmy dowolną grupę trzy-elementową.
Wiemy, że ma ona element neutralny. Niech
tą grupą to a_n, a_1, a_2. Wiemy, że:

	a_n	a_1	a_2
a_n	a_n	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	a_n
a_2	a_2	a_n	a_1

Wiemy, że $a_1 a_2 \neq a_1 a_n = a_1$

$a_1 a_2 \neq a_n a_2 = a_2$, zatem

$a_1 a_2 = a_n$, tak samo $a_2 a_1 = a_n$.

Stąd skoro $a_1 a_n = a_1$, $a_1 a_2 = a_n$ to $a_1 a_1 = a_2$, tak podobnie

$a_2 a_2 = a_1$.

Stąd mamy tylko jedną możliwą grupę, z dokładnością do izomorfizmu.

b) COŚ NIE IDZIE

Zadanie 1. c)

Ud. $H \leq G$ to $\varphi_a(H) \leq G$

$\forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 h_2 \in H$

$\forall h_1 \in H \exists h_1^{-1} \in H \quad h_1 h_1^{-1} = e = h_1^{-1}h_1$

$ghg^{-1} \in G$ oczywiste

$ghg^{-1} \cdot gh^{-1}g^{-1} = ghh^{-1}g^{-1} = gg^{-1} = \varphi_a(e)$

więc każdy ma element odwrotny

Łączność dalej działa

! upewnić się, czy jest dobrze !

Zadanie 6.

a) G ← grupa dodawania modulo 6 $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$H_1 \leftarrow 0,2,4$

$H_2 \leftarrow 0,3$

$H_1 \cup H_2 = \{0,2,3,4\}$ – nie jest grupą

b) Przez sprzeczność:

$H_1 \cup H_2$ – grupa

$\exists h_1 \in H_1 \quad h_1 \notin H_2$

$h_2 \in H_2 \quad h_2 \notin H_1$

bo to grupa, więc suma elementów należy do grupy

mam na myśli działanie grupy

Wiemy: $h_1 + h_2 \in H_1 \cup H_2$ zatem bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $h_1 + h_2 \in H_1$. Bo

Skoro H_1 jest grupą to h_1 (odwrotny) należy do H_1. Zatem

$-h_1 + h_1 + h_2$ też, zatem $h_2 \in H_1$ ↯

c) przemienne $\Leftrightarrow$ + przemienne

Wiemy: $\forall h_1 \in H_1 \quad h_1 \in \langle H_1 \cup H_2 \rangle$

$\forall h_2 \in H_2 \quad h_2 \in \langle H_1 \cup H_2 \rangle$

$\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$ $\begin{cases} h_1 h_2 \in \langle H_1 \cup H_2 \rangle \text{ bo to grupa} \\ h_2 h_1 \in \langle H_1 \cup H_2 \rangle \text{ tak samo} \end{cases}$

Skoro przemienne to $h_1 h_2 = h_2 h_1$, zatem

$\langle H_1 \cup H_2 \rangle \supseteq \{h_1 h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\} = X$

ten zbiór jest grupą, ponieważ

$\forall x \in X \ \exists h_1, h_2 \quad x = h_1 h_2$, więc

H₁ i H₂ grupami

$\forall x, y \in X \quad xy = h_{1x}h_{2x}h_{1y}h_{2y} \overset{\text{przemienność}}{=} h_{1x}h_{1y}h_{2x}h_{2y} = h_1' h_2' \in X$ def. X □

bo to najmniejsze (dodaliśmy tylko potrzebne elementy) i grupa

Zadanie 8.

mamy:

$$: \begin{matrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{matrix} \to \begin{matrix} & 3 & \\ 2 & & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$: \begin{matrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{matrix} \to \begin{matrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$: \begin{matrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{matrix} \to \begin{matrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

możliwe permutacje zbioru 3-elem. (do izomorfizmu)

- nic nie zamieniamy (trywialna)
- jednego zamienić nie mogę
- 2 zamieniamy
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- 3 zamieniamy
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

NO NIE WYCHODZI

Zadanie 10.

a) permutacje odwrotne:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 8 & 10 & 1 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

- cykle σ: $(1,7,3), (2,4), (5,9,10,6,8)$ — rząd $5\cdot 2\cdot 3 = 30$
- cykle σ^{-1}: $(1,3,7), (2,4), (5,8,6,10,9)$

NWW

b) odwrotna: nie będę liczyć

cykle σ: $(1,12,3,7), (2,5,6), (4,14,8,10,9), (11,13)$ — rząd $= 3\cdot 5\cdot 4 = 60$

cykle σ^{-1}: $(7,3,12,1), (6,5,2), (9,10,8,14,4), (13,11)$

c) odwrotna: nie piszę

cykle: σ: $(1,7,9,4), (2,3,10,12), (5,13,11), (6,14,8)$, rząd $= 3\cdot 4 = 12$

cykle σ^{-1}: odpowiednio

Zadanie 2.

$(x_1^{z_1}x_2^{z_2}\ldots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{z_k})^{-1}\cdot(x_1^{z_1}\ldots x_{k-1}^{z_{k-1}})^{-1} \overset{\text{ind}}{=} (x_k^{z_k})^{-1}\cdot\ldots\cdot(x_1^{z_1})^{-1}$

$(x_k^{z_k})^{-1} = x_k^{-1}\cdot x_k^{z_k-1} \overset{\text{ind}}{=} \ldots = \underbrace{x_k^{-1}\cdot\ldots\cdot x_k^{-1}}_{z_k} = (x_k^{-1})^{z_k}$ □

$(x_k)^{-z_k}(x_k)^{z_k} = \varepsilon \Rightarrow (x_k)^{-z_k} = (x_k^{z_k})^{-1}$ □

Zadanie 11.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ rząd: 5

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rząd: $2\cdot 3 = 6$

b) $(1,3,8,5,11), (2,7,6), (4,10,9), (12)$ rząd: $5\cdot 3 = 15$

RESZTA ???