Lista 7

czwartek, 6 kwietnia 2023 10:24

Zadanie 1.

1) tak
2) nie $(1,1,\dots,1,-1)+(1,\dots,1,1)=(2,\dots,2,0)$
3) nie $2\cdot(v_1,\dots,v_n)=(2v_1,\dots,2v_n)$, czego ilorazu jest 2^n
4) nie $(1,\dots,1,0)+(1,\dots,0,1)=(2,\dots,2,1,1)$
5) tak
6) tak
7) tak
8) tak

Zadanie 2.

$$\begin{matrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \\ 6x & 12x \\ 6 & 12 \end{matrix}$$

A) tak

B) nie $\begin{cases} A(x^3)+A(x^3)=36x\cdot 2=72x \\ A(2x^3)=144x \end{cases}$

C) tak

D) nie $\begin{cases} D(1,1,1)\cdot 2=(2,4,-2) \\ D(2,2,2)=(4,3,-2) \end{cases}$

E) nie bo (-1) zmienia min na max

F) tak $(-1,1,\dots)\to(-1,-1,\dots)$

G) tak $(1,-1,\dots)\to(1,-1,\dots)$
$(0,0\quad)\quad(0,-2\quad)$

H) nie $\begin{cases} (2a,2b,2c)\to(\dots,1) \\ (a,b,c)\cdot 2\to(\dots,2) \end{cases}$

Zadanie 3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 3 & -6 & 15 \\ 3 & 6 & 2 & -4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1/2 & 2/5 \\ & 1/3 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1/2 & \\ & & & & 1/5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -2/3 & -1/2 & -3/5 \\ & & 1/3 & & \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ & & & -1/2 & \\ & & & & 1/5 \end{bmatrix}$$

baza przekształcenia (pierwsze dwie kolumny); baza jądra (ostatnie trzy kolumny)

???

Zadanie 4.

$A^T=-A \iff a_{ij}=\overset{t_{ij}}{-a_{ji}}$

$\det(A)\cdot\det(A^T)=\det(A\cdot A^T)$?

$A\cdot A^T=B$
$a_{ij}\ t_{ij}$
$b_{ij}=\sum_x a_{ix}\cdot t_{xj}=\sum_x a_{ix}(-a_{jx})=-\sum_x a_{ix}a_{jx}$

5) $M_1=M_{yy} \Rightarrow M_1M_1^{-1}=M_{yy}M_1^{-1} \Rightarrow Id=M_{yy}\cdot M_1^{-1} \Rightarrow M_1^{-1}=M_{yy}^{-1}$
???

$\det(-A)=\det(-v_1,-v_2,\dots,-v_n)=(-1)\det(v_1,-v_2,\dots,-v_n)=\dots=(-1)^n\det(v_1,\dots,v_n)=(-1)^n\det(A)$
$\det(A^T)=\det(A)$
$A^T=-A \Rightarrow \det(A^T)=\det(-A)\Rightarrow(-1)^n\det(A)=\det(A)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (dla n nieparzystych) $\det(A)=0$ ∎

Zadanie 5.

I - indeksy wiersz (wielokrotnych) $\quad \overline{I}$
J - kolumny (wielokrotnych) $\quad \overline{J}$ } dopełnienie

M_{IJ} - M tylko z wierszami z I i kolumnami z J

I
P - macierz permutacji
AP to macierz z zamienionymi kolumnami
PA — wierszami
dobieramy P_1 i P_2 tak, że
$P_1MP_2=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ dla pewnych
A,B odwracalnych

$$\boxed{P_1MP_2=\begin{bmatrix} M_{IJ} & 0 \\ 0 & M_{\overline{I}\overline{J}} \end{bmatrix}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

Wiemy (albo dowiemy się ???)
$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} XA+YC & \vdots \\ \dots & \end{bmatrix}$$
jeśli $Z=Y=C=B=0$ $\begin{bmatrix} XA & 0 \\ 0 & WD \end{bmatrix}$

$$(P_1MP_2)^{-1}=\begin{bmatrix} M_{IJ}^{-1} & 0 \\ 0 & M_{\overline{I}\overline{J}}^{-1} \end{bmatrix}$$
$\Downarrow$
$$(P_1MP_2)^{-1}=P_2^{-1}M^{-1}P_1^{-1}$$
$$M^{-1}=\underbrace{P_2}_{k}(\underbrace{P_1}_{k'}M\underbrace{P_2}_{w'})^{-1}\underbrace{P_1}_{w}$$
$\Downarrow$ jest odwrotna do M

II $\boxed{(M^{-1})_{JI}=(M_{IJ})^{-1}}$ to dowody

Zadanie 6.

Niech $A^T=T$
$t_{ij}=a_{ji}$

a) $tr(A)=\sum_i a_{ii}=\sum_i t_{ii}=tr(A^T)$

b) $tr(AB)=\sum_i\left(\sum_x a_{ix}b_{xi}\right)=\sum_i\left(\sum_x b_{xi}a_{ix}\right)=\sum_x\sum_i b_{xi}a_{ix}=tr(BA)$

c) $A\sim B \iff \exists C\ A=C^{-1}BC$

$tr(A)=tr(C^{-1}\underbrace{(BC)}_{M})=tr(B(CC^{-1}))=tr(B\,Id)=tr(B)$

Zadanie 9.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & & & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & & & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & & & & & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 1/2 & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 1 & & & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & -2 & +1 & -1 & & & \\ & & 1 & & & & & 1/2 & & \\ & & & 1 & 4 & -2 & 1 & & 1 & \\ & & & & -15 & -3 & -2 & & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 4 & -1/3 & & & -1/3 \\ & 1 & & & & 1\frac{2}{5} & -\frac{11}{15} & & 2/5 & -2/15 \\ & & 1 & & & & & 1/2 & & \\ & & & 1 & & -2\frac{4}{5} & 7/15 & & 1/5 & 4/15 \\ & & & & 1 & 1/5 & 2/15 & & 1/5 & -1/15 \end{array}\right]$$

wyszło źle ale chyba umiem

Zadanie 8.

Skoro $\det(A)\cdot\det(B)=\det(AB)$ to
$\det(M^k)=[\det(M)]^k$
Nieodwracalna $\Rightarrow \det(M^k)=0$
$[\det(M)]^k=0$
$\det(M)=\sqrt[k]{0}=0$ ∎

Zadanie 10.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -7 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ } baza $S+T$

$\dim(S+T)=3$
$\dim(S\cap T)=4-\dim(S+T)=1$

Zadanie 11.

a) $\ker(L_M)\subseteq\ker(L_{M^2})$
L_M to $v\to M\vec{v}$
Dowód: jeśli $\vec{v}\in\ker(L_M)\iff M\vec{v}=\vec{0}$.
$\vec{v}'\in\ker(L_{M^2})\iff M^2\vec{v}=\vec{0}$
Skoro $M\vec{v}=\vec{0}$ to $M(M\vec{v})=M(\vec{0})=\vec{0}$ □

b) $rk(M+M^2)\leq rk(M)$
rząd kolumnowy ???
$h=f+g \iff h(x)=g(x)+f(x)$

$f=L_M\quad f^2=L_{M^2}\quad g=f+f^2$
$\ker f\subseteq\ker f^2\Rightarrow\ker f\subseteq\ker g$
$f(v)=0\Rightarrow f^2(v)=0\Rightarrow(f+f^2)(v)=0$
$\begin{cases} rk\, g \leq rk\, f=n-\dim(\ker f) \\ \quad\| \\ n-\dim(\ker g) \end{cases}$
$\Rightarrow rk(g)\leq rk(f)$
$rk(g)=n-\dim(\ker(g))$, $rk(f)=n-\dim(\ker(f))$

Zadanie 7.

$A^0=(A^*)^T$
$\det(A^0)=\det(A^*)$
A^0 to symetria la połowy —, więc jedna daje nie $(-1)^k$ wyznaczniki, ale druga uzupełnia, więc w sumie wyznaczniki pozostaje taki sam

$k=\left[\frac{n}{2}\right]$

$\det(A^0)=\det(A^*)=\det(A)$