Lista 12 repetytorium

czwartek, 18 maja 2023 08:34

Do zadania 1 z listy 11:

Ciekawostka:

Lemat: 11.12 mówi o DOWOLNYM iloczynie skalarnym to znaczy

$$\langle u, v\rangle = [u]_B \cdot [v]_B$$

„nasz" iloczyn skalarny

ten zwykły iloczyn skalarny

$$\|\vec{v}\| = \|[\vec{v}]_B\|$$

„nasza" norma

zwykła norma

M - macierz kwadratowa

M dodatnio określona, gdy F_M spełnia aksjomaty iloczynu skalarnego i:

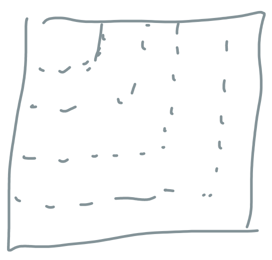
- $F_M : V \times V \to \mathbb{F}$ ← ciało
- $F_M(u, v) = u^T M v$

Tak naprawdę wystarczy, aby:

- $M = M^T$
- $\forall_{v \neq 0} \ v^T M v > 0$

Kryterium Sylwestera:

- M jest symetryczna
- te wyznaczniki są dodatnie:



(Zadania 1,2)

Rozkład macierzy dodatnio określonej na $A^T \cdot A$

$\forall_B$ B - baza

M^B - macierz iloczynu skalarnego w bazie B

$(M^B)_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$

to to samo co macierz Grama

wtedy $\langle u, v\rangle = [u]_B^T M^B [v]_B$ $\forall_B$

Lemat: jak znamy iloczyn skalarny w bazie B to możemy przekształcić na iloczyn skalarny w bazie A tak:

$$M^B = M_{BA}^T M^A M_{BA}$$

bo

$$\underbrace{u_B^T M_{BA}^T} M^A \underbrace{M_{BA} v_B} =$$

$$= (M_{BA} u_B)^T M^A (B_{BA} v_B) =$$

$$= u_A M^A v_A = \langle u, v\rangle$$

B - baza ortonormalna $M^B = Id$

Rozkład macierzy dodatnio określonej na $A^T A$

Przykład:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

ta macierz mówi o iloczynie skalarnym w jakiejś bazie.

E - baza standardowa

$E = \{(1,0), (0,1)\}$

możemy wyjść o tym, że ta macierz zadaje iloczyn skalarny w bazie standardowej E.

Wtedy:

$$\langle (x,y), (x',y')\rangle = [x \ y]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

wtedy:

$$\|(1,0)\|^2 = [1 \ 0]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = [2 \ 1]\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = 2$$

$$\|(0,1)\|^2 = [0 \ 1]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = [1 \ 2]\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = 1$$

Będziemy chcieli więc wzoru:

$$M^B = \underbrace{M_{BA}^T}_{A^T} M^A \underbrace{M_{BA}}_{A}$$

czyli to chcemy, żeby było identycznością, dlatego musimy wziąć bazę ortonormalną względem „naszego" iloczynu skalarnego (definiowanego przez M)

Ta baza:

Bierzemy bazę standardową i ortogonalizujemy.

$v_1 = (1, 0)$

$v_2 = (0, 1)$

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$$[0 \ 1]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix} = [1 \ 2]\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$v_2' = (0,1) - \langle u_1, v_2\rangle u_1 = (0,1) - (\frac{1}{2}, 0) = (-\frac{1}{2}, 1)$

$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{2}{3} v_2' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$[-\tfrac{1}{2} \ 1]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix} = [0 \ \tfrac{3}{2}]\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

·1

Teraz mamy bazę ortonormalną A

Stąd wiemy, że $M^A = Id$, czyli

$$M^B = M_{BA}^T M^A M_{BA} \Leftrightarrow \underbrace{M_{BA}^T}_{A^T} \underbrace{M_{BA}}_{A}$$

Szukane A to M_{BA}, które liczymy tak:

z bazy B na bazę A

$$M_{BA} [v]_B = [v]_A$$

Inne rozwiązanie:

z zadania 3.