Clase 10 - Tasa interna de retorno

Carolina Rojas G.

Tasas de retorno múltiples

Inversiones mixtas y tasa de retorno compuesta

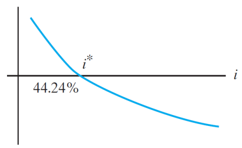
Tasas de retorno múltiples
Cuando se calcula la TIR de un proyecto de inversión se pueden obtener múltiples soluciones.
En el ejemplo anterior:

Si se invierten \$5000 ahora en acciones, de las que se espera produzcan \$100 anualmente durante 10 años y \$7000 al final de estos 10 años, debemos resolver

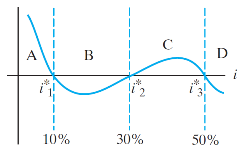
$$0 = -5000 + 100\left[\frac{(1+i^*)^{10}-1}{i^*(1+i^*)^{10}}\right] + \frac{7000}{(1+i^*)^{10}}$$

Esto genera un polinomio de grado 10, el cual puede o no tener múltiples soluciones.
Si existe más de una solución positiva, entonces tenemos más de una tasa de retorno que satisface la condición.

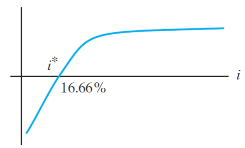
Periodo	Flujo neto		
n	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C
0	-1.000	-1.000	1.000
1	-500	3.900	-450
2	800	-5030	-450
3	1.500	2.145	-450
4	2.000		



(a) Valor presente A



(b) Valor presente B



(c) Valor presente C

Criterio de Nordstrom: Cuando hay sólo un cambio de signo en la serie del flujo de efectivo que empieza negativamente, entonces hay una **única** raíz positiva en la relación polinomial.

Ejemplo:

Año	0	1	2	3
Flujo	-1000	100	50	200

En este caso se obtiene una única TIR (el valor presente es monotónamente decreciente en la tasa de interés).

En el caso en que tenemos un flujo inicial positivo y todos los demás negativos, también obtendremos una única solución. En ese caso se trata de una inversión "típica" desde la perspectiva de un prestamista.

En el siguiente ejemplo no se cumple el criterio de Nordstrom:
Ejemplo:

Año	0	1	2	3
Flujo de efectivo ($1000)	$+2000	-500	-8100	+6800

El primer signo es "+" y se presentan dos cambios de signo. Esto indica que **no hay** una sola i positiva.

Inversiones mixtas e inversiones puras

Definimos flujo acumulado futuro $FA_t(i^*)$ como el valor futuro de los flujos de un proyecto en el período t, empleando la tasa de interés i^*.

- **Inversión pura**: Cuando $FA_t(i^*) \leq 0$ a lo largo de toda la vida del proyecto, y el primer flujo es negativo.
  Las inversiones típicas son siempre inversiones puras.
- **Prestamista puro**: Cuando $FA_t(i^*) \geq 0$ a lo largo de toda la vida del proyecto, y el primer flujo es positivo.
- **Inversión mixta**: Cuando un proyecto inicialmente parte con un flujo negativo y uno o más de los flujos acumulados es positivo, dada la tasa de interés i^* (y viceversa).

- **Inversión pura**: Es una inversión en la que la firma nunca presta dinero que provenga del proyecto (es decir, nunca tiene un flujo acumulado positivo).
- **Inversión mixta**: Es una inversión en la que la firma presta dinero que proviene del proyecto (es decir, en algunos periodos tiene flujo acumulado positivo).

Inversiones mixtas y tasa de retorno compuesta
Cuando obtenemos múltiples i^* no sabemos a prioi si podemos emplear estas tasas de interés como regla para determinar la aceptabilidad de un proyecto.

Una forma de encontrar una tasa de retorno que nos permita determinar la aceptabilidad de un proyecto consiste en el **método del flujo acumulado y el cálculo de la tasa de retorno compuesta**.

Este método asume que la tasa de interés interna del proyecto no es la misma que la tasa de interés a la cual se reinvierten los flujos acumulados positivos del proyecto.

Inversiones mixtas y tasa de retorno compuesta
La tasa de retorno compuesta[1] (TRC), i', es la tasa de retorno única para un proyecto que supone que los flujos de efectivo netos positivos, que representan dinero no requerido inmediatamente por el proyecto, son reinvertidos a la tasa de reinversión $TMAR$.

[1] TRC $\equiv i' \equiv$ retorno sobre el capital invertido (RCI) $\equiv$ tasa externa de retorno (TER).

Tasa de retorno compuesta

Tasa de retorno compuesta: procedimiento del flujo acumulado

El procedimiento para determinar i' consiste en obtener el valor del flujo acumulado (FA_t) del proyecto en el año t a partir de FA_{t-1} utilizando el factor F/P para un año a:

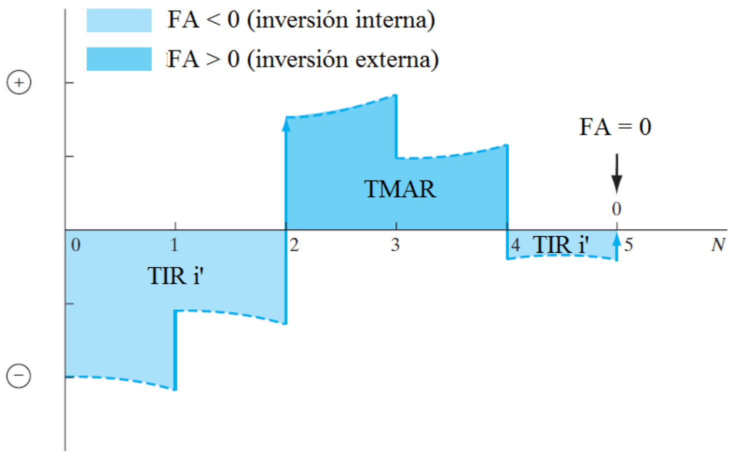
- la tasa de reinversión $TMAR$ si la inversión neta anterior FA_{t-1} **es positiva** (dinero extra generado por el proyecto).
- la tasa TRC i' si FA_{t-1} **es negativa**.

$$\boxed{FA_t = FA_{t-1}(1+i) + F_t} \qquad (1)$$

donde
F_t = flujo de efectivo neto en el año t

$$\begin{cases} i = TMAR \text{ si } FA_{t-1} > 0 \text{ inversión positiva neta} \\ i = i' \text{ si } FA_{t-1} < 0 \text{ inversión negativa neta} \end{cases}$$

El valor de i obtenido es único para una tasa de reinversión dada por $TMAR$.

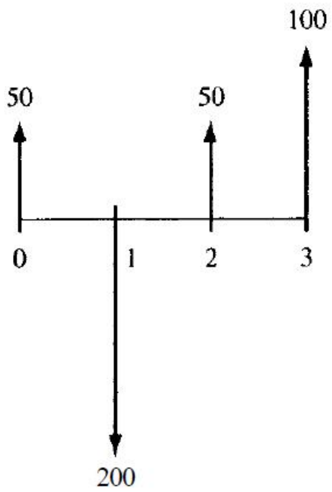


Ejemplo:
Supongamos una tasa de reinversión *TMAR* de 15 %, y el siguiente flujo de efectivo:

Año	Flujo de efectivo, $
0	50
1	-200
2	50
3	100

Calcule la tasa compuesta de retorno.

El diagrama de flujo es el siguiente:



En el año 0 hay un flujo positivo (ingreso) de \$50. Por lo tanto a este flujo se le aplica la tasa de reinversión *TMAR* para llevarlo al año 1.

Luego, aplicando la ecuación (1) FA_1 es igual a:

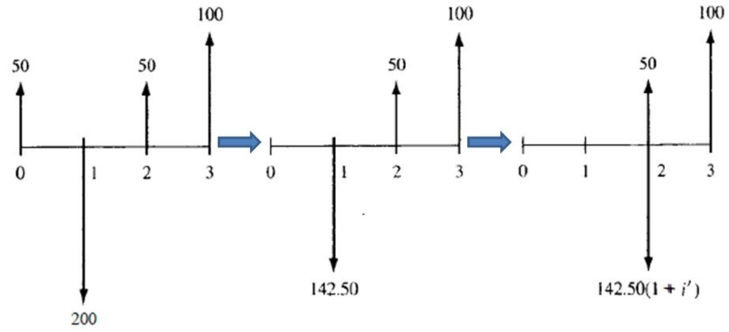
$\text{FA}_1 = 50(1 + 0,15) - 200 = -142,5$

El flujo en el año 1 es negativo, de \$142,5. Por lo tanto, se le aplica la tasa de retorno compuesta i' para llevarlo al año 2:

$FA_2 = -142,5(1+i') + 50$

Dado que $i' > 0$, la expresión anterior siempre es negativa, por lo tanto para llevar el flujo FA_2 al año 3, hay que aplicar nuevamente la tasa de retorno compuesta i':

$FA_3 = [-142,5(1+i') + 50](1+i') + 100 = 0$
$FA_3 = -142,5(1+i')^2 + 50(1+i') + 100 = 0$
$142.5\ i'^2 + 235i' - 7,5 = 0$
i'=3,13 %
i'=-168 %



Ejemplo:

Volvamos a un ejemplo visto anteriormente, donde el flujo de efectivo es el que se muestra a continuación.

Año	0	1	2	3
Flujo de efectivo (\$1000)	\$+2000	-500	-8100	+6800

Calcule la tasa de retorno compuesta considerando una tasa de reinversión de a)7,47 %, b)20 %.

a)

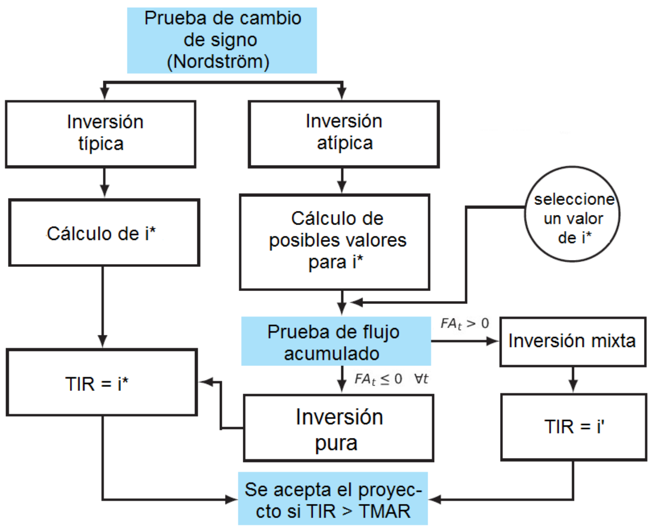
$$\begin{aligned} FA_1 &= 2000(1+0,0747) - 500 = 1649,40 \\ FA_2 &= 1649,40(1+0,0747) - 8100 = -6327,39 \\ FA_3 &= -6327,39(1+i') + 6800 = 0 \\ 1+i' &= \frac{6800}{6327,39} = 1,0747 \\ i' &= 7,47\,\% \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
FA_1 &= 2000(1+0,2) - 500 = 1900 \\
FA_2 &= 1900(1+0,2) - 8100 = -5820 \\
FA_3 &= -5820(1+i') + 6800 = 0 \\
1+i' &= \frac{6800}{5820} = 1,1684 \\
i' &= 16,84\,\%
\end{aligned}
$$

Regla para determinar cuándo $i^* = TIR$

- **Cuando una inversión es típica**, entonces siempre habrá una única i^* y se tendrá además que $TIR = i^*$.
  Es importante recordar que toda inversión típica es pura.
- **Cuando una inversión es atípica**, hay que calcular las tasas i^* para las cuales el VPN=0, y hacer la "**prueba de flujo acumulado FA_t**" para saber si son mixtas o no:
  - Si $FA_t(i^*)$ es siempre negativo para todo t, entonces la inversión es pura y $TIR = i^*$.
  - Si $FA_t(i^*)$ es positivo para algún t, entonces la inversión es mixta y $TIR = i'$ =tasa compuesta de retorno, dada una cierta TMAR.



Ejemplo:

Asuma una TMAR de 12 % y considere los siguientes proyectos de inversión

	Flujos de efectivo		
n	Pr. 1	Pr. 2	Pr. 3
0	-1.600	-5000	-1000
1	10.000	10.000	4.000
2	10.000	30.000	-4.000
3		-40.000	

a) Calcule todas las i^*.
b) Calcule la TIR de cada proyecto. Suponga que para el proyecto 2, el flujo acumulado en el periodo 2 es siempre positivo.
c) ¿Cuáles proyectos son aceptables?

Respuesta:

a) Por ensayo y error se encuentra que $i^*_{pr,1} = 612,7\,\%$, $i^*_{pr,2} = 14,64\,\%$ y 210,28 %, $i^*_{pr,3} = 100\,\%$.

b) El primer proyecto tendrá $TIR_{pr1} = i^* = 612,7\,\%$, ya que es un proyecto típico. En los proyectos 2 y 3, como son mixtos hay que evaluar el flujo acumulado para ver si son o no proyectos que tendrán TIR=i^*.

Proyecto 2: Probamos con $i^*_{pr,2} = 14,64\,\%$

$$\begin{aligned} FA_0 &= -5000 \\ FA_1 &= -5000(1+0,1464) + 10000 = 4268,17 \\ FA_2 &= 4268,17(1+0,1464) + 30000 = 34892,80 \\ FA_3 &= 34892,8(1+0,1464) - 40000 = 0 \end{aligned}$$

Como $FA_1 > 0$ y $FA_2 > 0$ este proyecto no tiene una TIR igual a i^*. Se debe entonces calcular la tasa compuesta de retorno:

$$\begin{aligned} FA_0 &= -5000 \\ FA_1 &= -5000(1+i') + 10000 = 5000(1-i') \end{aligned}$$

Si $5000(1-i') < 0$ entonces la tasa que aplicaremos para el siguiente flujo será i=i'.
Si $5000(1-i') > 0$ entonces la tasa que aplicaremos para el siguiente flujo acumulado será i=TMAR.

Supongamos que $5000(1-i') > 0$:

$$\begin{aligned} FA_2 &= 5000(1-i')(1+TMAR) + 30000 \\ FA_2 &= 5000(1-i')(1,12) + 30000 > 0 \\ FA_3 &= (5600(1-i') + 30000)(1+TMAR) - 40000 = 0 \\ FA_3 &= (5600(1-i') + 30000)(1,12) - 40000 = 0 \\ i' &= -2,04\,\% \end{aligned}$$

Supongamos que $5000(1 - i') < 0$:

$$FA_2 = 5000(1 - i')(1 + i') + 30000 = 5000(1 - i'^2) + 30000$$

Suponemos que $FA_2 = 5000(1 - i'^2) + 30000 > 0$ (ver enunciado)

$$\begin{aligned} FA_3 &= (5000(1 - i'^2) + 30000)(1,12) - 40000 = 0 \\ i'^2 &= -0,1429 \end{aligned}$$

Esta solución no es posible (no existe ningún número real que al cuadrado sea negativo).

Continuando con el proyecto 2, probamos ahora con $i^*_{pr,2} = 210,28\,\%$

$$\begin{aligned} FA_0 &= -5000 \\ FA_1 &= -5000(1 + 0,21028) + 10000 = -5513,88 \\ FA_2 &= -5513,88(1 + 0,21028) + 30000 = 12891,69 \\ FA_3 &= 12891,69(1 + 0,21028) - 40000 = 0 \end{aligned}$$

Como $FA_2 > 0$ este proyecto no tiene una TIR igual a i^*.
Por lo tanto, para el proyecto 2, la TIR es $TIR_{pr2} = -2,04\,\%$.

Proyecto 3: Evaluamos el flujo acumulado usando $i^*_{pr,3} = 100\,\%$

$$\begin{aligned} FA_0 &= -1000 \\ FA_1 &= -1000(1 + 1) + 4000 = 2000 \\ FA_2 &= 2000(1 + 1) - 4000 = 0 \end{aligned}$$

Como $FA_1 > 0$ este proyecto no tiene una TIR igual a i^*. Se debe entonces calcular la tasa compuesta de retorno:

$$\begin{aligned} FA_0 &= -1000 \\ FA_1 &= -1000(1 + i') + 4000 = 3000 - 1000i' \end{aligned}$$

Supongamos que $3000 - 1000i' > 0$. Esto es equivalente a suponer que $i' < 3$:

$$\begin{aligned} FA_2 &= (3000 - 1000i')(1 + TMAR) - 4000 \\ FA_2 &= (3000 - 1000i')(1,12) - 4000 = 0 \\ i' &= -57,3\,\% \end{aligned}$$

Supongamos que $3000 - 1000i' < 0$. Esto es equivalente a suponer que $i' > 3$:

$$\begin{aligned} FA_2 &= (3000 - 1000i')(1 + i') - 4000 \\ FA_2 &= (3000 - 1000i')(1,12) - 4000 = 0 \\ i' &= 100\,\% \end{aligned}$$

Esto se contradice con la suposición anterior. Por lo tanto, no es posible este resultado y $TIR_{pr3} = -57,3\,\%$.

c) El único proyecto aceptable es el proyecto 1 puesto que $TIR_{pr2} < 0$ y $TIR_{pr3} < 0$.