(1) Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces el determinante de A, denotado $\det(A)$ ó $|A|$, se define como

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$
2. Si $n > 1$,

$$\det A = a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1),$$

o

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1).}$$

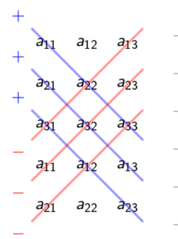
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1)$$

$$(-1)^2\, 4 \cdot 3 + (-1)^3\, 7 \cdot 5 = 4 \cdot 3 - 7 \cdot 5 = 12 - 35 = -23$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det B = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{1+i} b_{i1} \det B(i|1)$$



$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \cancel{-3.(-1).0} + 1.4.4 + (-1).2.2 - ((-1).(-1).4) - ((-3).4.2) - \cancel{(1.2.0)}$$

$$= 16 - 4 - 4 + 24 = 32$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\det C = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{1+i} c_{i1} \cdot \det C(i|1)$$

$$= 2 . \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \cancel{0 \det C(2|1)} + \cancel{0 . \det C(3|1)} - 1 . \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2.1.5 + 5.2.3 + 1.(-1).1 - (1.1.3) - (2.2.1) - (5.(-1).5)$$

$$10 + 30 - 1 - 3 - 4 + 25 = 57$$

$$3.(-1).1 + 2.1.1 + 5.1.3 - (5.(-1).1) - (3.1.3) - (2.1.1)$$

$$-3 + 2 + 15 + 5 - 9 - 2 = 22 - 14 = 8$$

$$\Rightarrow \det C = 2.57 - 8 = 114 - 8 = 106$$

(2) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

a) $\det(AB)$.
b) $\det(BA)$.
c) $\det(A^{-1})$.
d) $\det(A^4)$.
e) $\det(A+B)$.
f) $\det(A+tB)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Primero hay que calcular los determinantes de A y B.

$\det A = 1.0.1 + 3.1.2 + 1.3.2 - (1.0.2) - (1.1.2) - (3.3.1) = 0+6+6-0-2-9 = \boxed{1}$

$\det B = (1.1.3) + 1.(-1).2 + (-1)(-1).1 - ((-1).1.2) - (1.(-1).1) - (1.(-1).3) =$
$3 - \cancel{2} + 1 + \cancel{2} + 1 + 3 = \boxed{8}$

a) $\det(AB) = 1.8 = 8$ b) $\det(BA) = 8.1 = 8$

c) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1/1 = 1$ d) $\det(A^4) = 1^4 = 1$

F) *f)* El ejercicio *e)* es un caso especial de *f)* para $t = 1$. Así que haremos este inciso primero. Para ello, antes que nada, calculemos la matriz $A + tB$:

$$A + tB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t & 3-t & 2+2t \\ 3+t & t & 2+t \\ 1-t & 1-t & 1+3t \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{vmatrix} 1+t & 3-t & 2+2t \\ 3+t & t & 2+t \\ 1-t & 1-t & 1+3t \end{vmatrix} = \quad = (1+t)\cdot\begin{vmatrix} t & 2+t \\ 1-t & 1+3t \end{vmatrix} - (3+t)\cdot\begin{vmatrix} 3-t & 2+2t \\ 1-t & 1+3t \end{vmatrix} + (1-t)\cdot\begin{vmatrix} 3-t & 2+2t \\ t & 2+t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+t)\cdot(t(1+3t) - (2+t)(1-t)) - \\
&\quad -(3+t)\cdot((3-t)(1+3t) - (2+2t)(1-t)) + \\
&\quad +(1-t)\cdot((3-t)(2+t) - (2+2t)t) \\
&= (1+t)\cdot(4t^2+2t-2) + \\
&\quad -(3+t)\cdot(-t^2+8t+1) + \\
&\quad +(1-t)\cdot(-3t^2-t+6) \\
&= (4t^3+6t^2-2) + (t^3-5t^2-25t-3) + (3t^3-2t^2-7t+6) \\
&= 8t^3 - t^2 - 32t + 1
\end{aligned}$$

$\therefore$ e) $\det(A+B) = \det(A+1B)$ $t=1$
$= 8 - 1 - 32 + 1 = -24$

(3) Calcular el determinante de las siguientes matrices haciendo la reducción a matrices triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

si $a=0 \Rightarrow \det(A) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-F_2 \\ F_4-F_2}]{F_1-aF_2} \begin{bmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4-(1+a)F_2]{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4+F_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 \end{bmatrix}$$

Como hicimos dos permutaciones de filas, el determinante de A es igual al determinante de la última matriz, es decir

$\therefore \det A = (1-a)(a-1)(3-2a-a^2) = a^4 - 6a^2 + 8a - 3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1 \\ F_5-F_1}]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4-2F_1 \\ F_5-2F_1}]{F_3-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_5-2F_1]{F_4-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_5-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \therefore \det(B) = 1.2.2.2.2 = 2^4 = 16$$

(4) Sean A, B y C matrices $n \times n$, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular:

a) $\det(PQR)$, donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1+2F_2} P, \quad B \xrightarrow{3F_3} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} R.$$

Es decir,

- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por 3.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

b) $\det(A^2BC^tB^{-1})$ y $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^t)$.

a) $\det(P) = -1 \quad \det(Q) = 6 \quad \det(C) = -3 \quad \Rightarrow \det(PQR) = 18$

b) $\det(A^2BC^tB^{-1}) = \det(A^2)\det(B)\det(C^t)\det(B^{-1})$

$= 1 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 3$

$\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^t) = 4 \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cancel{3} = 2$

Nota: $\det(A^t) = \det(A)$

(5) Sea

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabiendo que $\det(A) = 5$, calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}.$$

$B = E_2.E_1.A \Rightarrow \det B = \det(A).\cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}} = \det A = 5$

$E_1 = F_2 \cdot \frac{1}{2}$

$E_2 = F_1 \cdot 2$

$C = E_2 E C \Rightarrow \det C = \det A = 5$

$E = F_3 + F_1$

$E_2 = F_2 + 3F_1$

(6) Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que las siguientes matrices sean invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

Calcular el determinante y ver para qué valores de c es distinto de 0.

$$\det(A) = 4.2.4 + c.c.3 + 5.c.c - (5.2.3) - (4.c.c) - (c.c.4)$$
$$32 + 3c^2 + 5c^2 - 30 - 4c^2 - 4c^2$$
$$2 + 8c^2 - 8c^2 = \boxed{2}$$

$\therefore$ A es invertible $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\det(B) = 1.1.c + c.1.(-1) + \cancel{0.c.1} - \cancel{(0.1.(-1))} - (1.1.1) - (c.c.c)$$
$$= c - c - 1 - c^3 = -c^3 - 1$$

$-c^3 - 1 = 0 \iff$

$\therefore -c^3 = 1 \Rightarrow c^3 = -1 \Rightarrow c = -1$

Para que B sea invertible, $c \neq -1$

(7) Calcular el determinante de las siguientes matrices, usando operaciones elementales por fila y/o columnas u otras propiedades del determinante. Determinar cuáles de ellas son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{4+i} a_{i4} \cdot \det(A)(i|4) \qquad {}_{,}0 \times 0$$

$$\Rightarrow (-1).(-3) \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -5 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix} + 7 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} = +3.(-49) + 7.84 =$$
$$-147 + 588 = +441$$

... Procedimiento similar para las otras

(8) Sean A y B matrices $n \times n$. Probar que:

a) $\det(AB) = \det(BA)$.

b) Si B es invertible, entonces $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

c) ⓐ $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

a) $\det(AB) = \det(A) . \det(B) = \det(B) . \det(A) = \det(BA)$

b) sabemos que $BB^{-1} = Id \Rightarrow \det B . \det B^{-1} = \det Id = 1$
y $\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}$

$\therefore$ $\det(BAB^{-1}) = \det B . \det A . \det B^{-1} = \det B . \dfrac{1}{\det B} \det A = \det A$

c) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

c) Sea Id es la matriz identidad $n \times n$. Observar que $-A = (-\operatorname{Id})A$. Luego, $\det(-A) = \det((-\operatorname{Id})A) = \det(-\operatorname{Id})\det(A)$. Como $-\operatorname{Id}$ es una matriz diagonal con -1 en la diagonal, entonces $\det(-\operatorname{Id}) = (-1)^n$. Por lo tanto, $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

□

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.

a) Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. F

b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que $\det(AB) \neq 0$. F

c) Sea A una matriz $n \times n$. Si A^n es no invertible, entonces A es no invertible. V

a) A $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $\qquad$ B $\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = -2$

$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 15 - 20 = -5 \neq 1 - 2 = -1$

b)

b) Esta afirmación es falsa y la a continuación haremos una demostración de este hecho. Observar que con un contraejemplo no basta, pues debemos demostrar que dadas A matriz 3×2 y B matriz 2×3, *cualesquiera*, entonces que $\det(AB) = 0$.

Haremos operaciones elementales por fila en la matriz A para transformarla en una matriz triangular superior. Como en el caso 3×3 hacer operaciones elementales por fila es equivalente a multiplicar a izquierda por matrices elementales 3×3.

Por lo tanto si A' es una matriz triangular superior obtenida de A por operaciones elementales por fila, entonces $A' = EA$ para alguna matriz E invertible 3×3 donde E es producto de matrices elementales. Como $\det(EAB) = \det(E)\det(AB)$, entonces $\det(EAB) \neq 0$ si y solo si $\det(AB) \neq 0$.

Ahora bien, A' una matriz 3×2 triangular superior tiene la forma

$$A' = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$A'B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bu & ay+bv & az+bw \\ 0 & cy & cz \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz resultante tiene la última fila con todos los coeficientes iguales a 0 por lo tanto $\det(A'B) = 0$, lo cual implica que $\det(AB) = 0$, como queríamos demostrar.

c) Esta afirmación es verdadera. Si A^n es no invertible, entonces $\det(A^n) = 0$. Como $\det(A^n) = \det(A)^n$, entonces $\det(A)^n = 0$ y por lo tantos $\det(A) = 0$. En consecuencia, A es no invertible.

$\square$