Álgebra de Boole

OdC 2024

Álgebra booleana

El álgebra booleana es una estructura algebraica definida por un conjunto de elementos: ‘0’ y ‘1’, junto con dos operadores binarios: + y *. El álgebra booleana no tiene inversos aditivos ni multiplicativos; por tanto, no hay operaciones de resta ni de división. Pero si tiene el operador complemento.

Tablas de verdad:

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

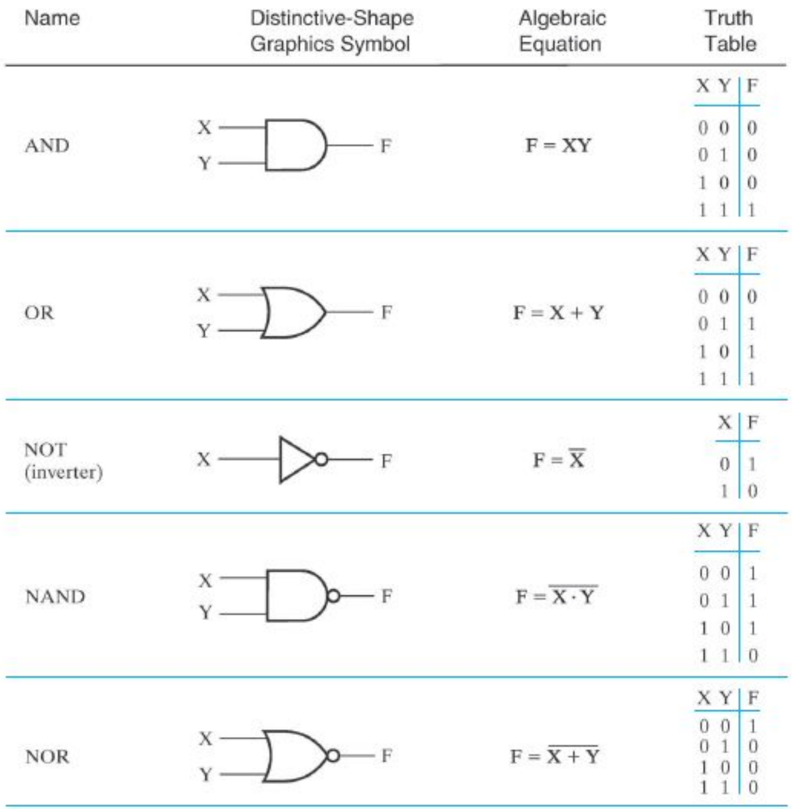
x	x'
0	1
1	0

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Compuertas lógicas

Las compuertas lógicas son circuitos electrónicos que operan con una o más señales de entrada para producir una señal de salida. En los sistemas digitales, en circuitos operados por voltaje responden a dos niveles de voltaje distintos que representan una variable binaria cuyo valor es ‘1’ lógico o ‘0’ lógico.



Name	Distinctive-Shape Graphics Symbol	Algebraic Equation	Truth Table
AND	X, Y → F	$F = XY$	X Y | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR	X, Y → F	$F = X + Y$	X Y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
NOT (inverter)	X → F	$F = \overline{X}$	X | F 0 | 1 1 | 0
NAND	X, Y → F	$F = \overline{X \cdot Y}$	X Y | F 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR	X, Y → F	$F = \overline{X + Y}$	X Y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0

Ejercicio 1

Simplificar las siguientes funciones booleanas a un número mínimo de literales.

a) $x.y + x.y'$ (p4)

$= x.(y + y')$ (p5)

$= x.1$ (p2)

$= x$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 1

Simplificar las siguientes funciones booleanas a un número mínimo de literales.

b) $(x + y).(x + y')$ (p4)

$= x + (y.y')$ (p5)

$= x + 0$ (p2)

$= x$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 1

Simplificar las siguientes funciones booleanas a un número mínimo de literales.

e) $(A + B)'.(A' + B')'$ (t5 en 2 términos)

$= A'.B' \,.\, A''.B''$ (T3)

$= A'.B' \,.\, A.B$ (P3 Y T4)

$= (A'.A) \,.\, (B'.B)$ (P5 en 2 términos)

$= 0.0$ (t2)

$= 0$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

Reducir a un número mínimo de literales las siguientes funciones booleanas:

b) B’.D + A’.B.C’ + A.C.D + A’.B.C

a. Graficar las expresiones encontradas en “b” y “d” mediante cualquier tipo de compuertas del número de entradas necesarias.
b. Encontrar expresiones equivalentes a las funciones “b” y “d”, pero utilizando sólo compuertas NAND del número de entradas necesarias.
c. Graficar las expresiones encontradas en el punto anterior.

Ejercicio 2 - función b)

$B'D + A'BC' + ACD + A'BC$	(p3)
$= B'D + A'BC' + A'BC + ACD$	(t4)
$= B'D + A'B(C'+C) + ACD$	(p5, p2)
$= B'D + A'B + ACD$	(t6 2 términos)
$= B'D + B'DA'C + A'B + A'BCD + ACD$	(p2, p5)
$= B'D + B'DA'C + A'B + A'BCD + ACD(B + B')$	(p4)
$= B'D + B'DA'C + A'B + A'BCD + ACDB + ACDB'$	(p3, t4)
$= B'D + A'B + (A'BCD + ACDB) + (ACDB' + B'DA'C)$	(p3)
$= B'D + A'B + (A'BCD + ABCD) + (AB'CD + A'B'CD)$	(p4)
$= B'D + A'B + BCD\,(A' + A) + B'CD\,(A' + A)$	(p5, p2, t4)
$= B'D + A'B + (BCD + B'CD)$	(p4)
$= B'D + A'B + CD\,(B + B')$	(p5, p2)
$= B'D + A'B + CD$	

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

Llevando la expresión a su forma canónica:

B’D + A’BC’ + ACD + A’BC (p2, p5)

= B’D(A+A’)+A’BC’(D+D’)+A’BC(D+D’)+ACD(B+B’) (p4, p2, p5)

= B’DA(C+C’)+B’DA’(C+C’)+A’BC’D+A’BC’D’+A’BCD+A’BCD’+ACDB+ACDB’ (p4,p3)

=AB’CD+AB’C’D+A’B’CD+A’B’C’D+A’BC’D+A’BC’D’+A’BCD+A’BCD’+ABCD+AB’CD (t1)

=AB’CD+AB’C’D+A’B’CD+A’B’C’D+A’BC’D+A’BC’D’+A’BCD+A’BCD’+ABCD+AB’CD (t4)

= (A’BC’D+A’BC’D’+A’BCD+A’BCD’)+(AB’CD+A’B’CD+ABCD)+(AB’C’D+A’B’C’D+AB’CD) (t1)

= (A’BC’D+A’BC’D’+A’BCD+A’BCD’)+(AB’CD+A’B’CD+ABCD)+(AB’C’D+A’B’C’D+AB’CD) +A’B’CD+A’BCD (p3, t4)

= (A’BC’D+A’BC’D’+A’BCD+A’BCD’)+(AB’CD+A’B’CD+ABCD+A’BCD)+(AB’C’D+A’B’C’D+AB’CD+A’B’CD) (p4)

= A’B(C’D+C’D’+CD+CD’) + CD(AB’+A’B’+AB+A’B) + B’D(AC’+A’C’+AC+A’C)

Resolviendo para uno de los paréntesis: (C’D+C’D’+CD+CD’) = C’(D+D’) + C(D+D’) = C’+C =1

= A’B(1) + CD(1) + B’D(1) (p2)

= A’B + CD + B’D

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

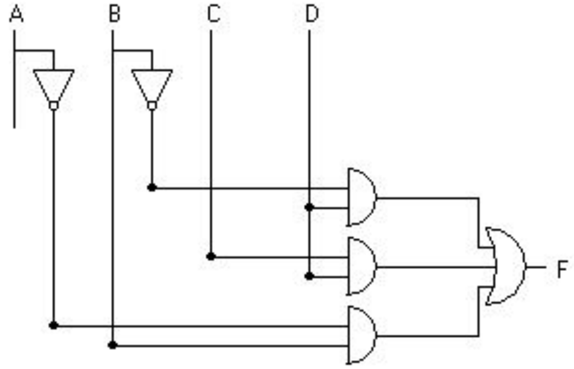
a. Graficar las expresiones encontradas en “b” y “d” mediante cualquier tipo de compuertas del número de entradas necesarias.

   b) $F = A'B + CD + B'D$

Ejercicio 2 - función b)

a. Graficar las expresiones encontradas en “b” y “d” mediante cualquier tipo de compuertas del número de entradas necesarias.

b) F = A’B + CD + B’D



Ejercicio 2 - función b)

b. Encontrar expresiones equivalentes a las funciones “b” y “d”, pero utilizando sólo compuertas NAND del número de entradas necesarias.

b) F = A’B + CD + B’D

F = F’’ = (A’B + CD + B’D)’’ = ((A’.B)’ . (C.D)’ . (B’.D)’)’

NAND = (x.y)’

Postulados y teoremas del álgebra booleana

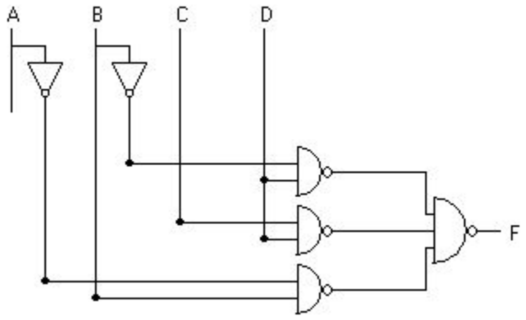
Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

b. Encontrar expresiones equivalentes a las funciones “b” y “d”, pero utilizando sólo compuertas NAND del número de entradas necesarias.

c. Graficar las expresiones encontradas en el punto anterior.

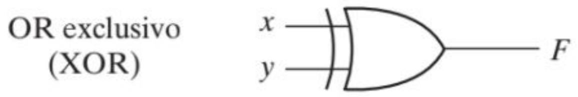
b) F = A’B + CD + B’D = ((A’B)’ * (CD)’ * (B’D)’)’



Ejercicio 3

La función OR-exclusiva, denotada por “^” tiene dos entradas y una salida. Si **a** y **b** son las entradas y **c** es la salida, entonces **c** es ‘1’ sólo cuando exactamente una de las entradas vale ‘1’. En el resto de los casos es ‘0’.

a. Hacer una tabla de verdad de la función OR-exclusiva.



x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio 3

La función OR-exclusiva, denotada por “^” tiene dos entradas y una salida. Si **a** y **b** son las entradas y **c** es la salida, entonces **c** es ‘1’ sólo cuando exactamente una de las entradas vale ‘1’. En el resto de los casos es ‘0’.

b. Encontrar la expresión equivalente a la función OR-exclusiva utilizando sólo suma de productos y graficar con compuertas.

$F = x'y + xy'$

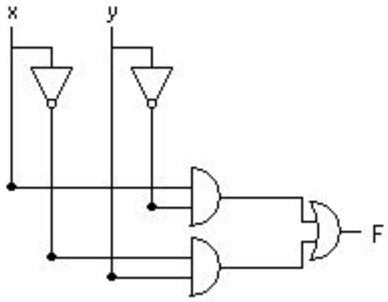
x	**y**	**F**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio 3

La función OR-exclusiva, denotada por “^” tiene dos entradas y una salida. Si **a** y **b** son las entradas y **c** es la salida, entonces **c** es ‘1’ sólo cuando exactamente una de las entradas vale ‘1’. En el resto de los casos es ‘0’.

b. Encontrar la expresión equivalente a la función OR-exclusiva utilizando sólo suma de productos y graficar con compuertas.

   F = x’y + xy’

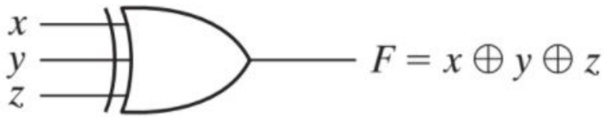


x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio 3

c. Implementar una OR-exclusiva de 3 entradas usando OR-exclusivas de 2 entradas.

Tabla de verdad de una OR-exclusiva de 3 entradas:

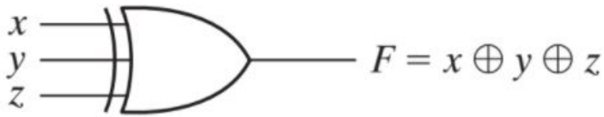


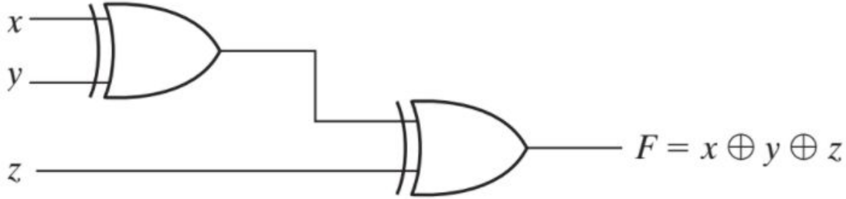
x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ejercicio 3

c. Implementar una OR-exclusiva de 3 entradas usando OR-exclusivas de 2 entradas.

Tabla de verdad de una OR-exclusiva de 3 entradas:

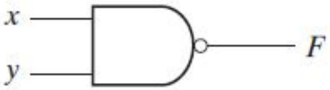




x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ejercicio 4

NAND



$F = (xy)'$

x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Mostrar que la función NAND (Not AND) es universal en el sentido de que las funciones NOT, AND, OR y NOR se pueden expresar como productos negados. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, AND, OR y NOR con compuertas NAND.

NOT: $F = x'$ (T1)

$= (x.x)'$

AND: $F = x.y$ (T3)

$= (x.y)'' = ((x.y)')'$

OR: $F = x+y$ (T3)

$=(x+y)''$ (T5) $= (x'.y')'$

NOR: $F = (x+y)'$ (T3)

$= (x+y)'''$ (T5) $= ((x'.y')')'$

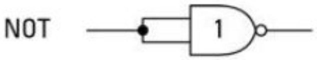
Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

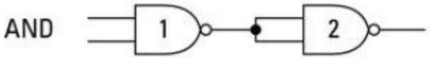
Ejercicio 4

Mostrar que la función NAND (Not AND) es universal en el sentido de que las funciones NOT, AND, OR y NOR se pueden expresar como productos negados. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, AND, OR y NOR con compuertas NAND.

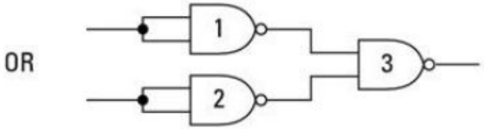
NOT: $F = x' = (x.x)'$



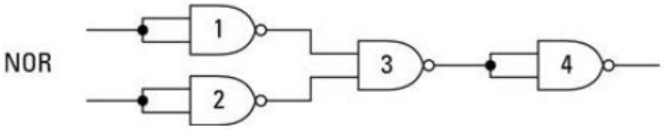
AND: $F = x.y = ((x.y)')'$



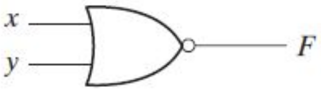
OR: $F = x+y = (x'.y')'$



NOR: $F = (x+y)' = ((x'.y')')'$



Ejercicio 5

NOR 

$F = (x + y)'$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Mostrar que la función NOR (Not OR) es universal en el sentido de que las funciones NOT, OR, AND y NAND se pueden expresar como sumas negadas. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, OR, AND y NAND con compuertas NOR.

NOT: F = x’ (T1)

=(x+x)’

OR: F = x+y (t3)

= ((x+y)’)’

AND: F = x.y (t3)

= (x.y)’’ (t5) = (x’+y’)’

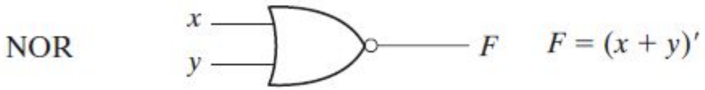
NAND: F = (x.y)’ (t3)

= (x.y)’’’ (t5) = (x’+y’)’’

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

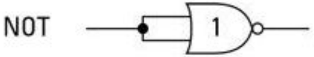
Ejercicio 5



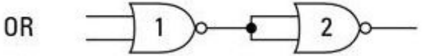
x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Mostrar que la función NOR (Not OR) es universal en el sentido de que las funciones NOT, OR, AND y NAND se pueden expresar como sumas negadas. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, OR, AND y NAND con compuertas NOR.

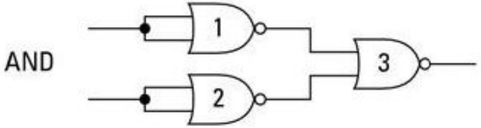
NOT: F = x’ = (x+x)’



OR: F = x+y = ((x+y)’)’



AND: F = x.y = (x’+y’)’



NAND: F = (x.y)’ = ((x’+y’)’)’