Ejercicio 4. Un fabricante de utensilios está considerando la conveniencia de adquirir una nueva máquina para grabar las piezas de lámina metálica. Para tomar una decisión, puso la nueva máquina a prueba: tomó una muestra de 25 utensilios y midió el tiempo que llevaba grabar cada una de las piezas con la nueva máquina. Los resultados fueron, en segundos, $\bar{x} = 21{,}2$ y $s_n = 0{,}5$. Asumiendo que el tiempo que se mide es una variable con distribución normal, responda:

a) Hallar un intervalo de confianza del 95 % para la varianza del tiempo que lleva grabar una pieza con la nueva máquina.

b) El tiempo medio que demora la vieja máquina en grabar una pieza es de 20 segundos. El fabricante comprará la nueva máquina si resulta que el tiempo medio que demora la nueva máquina es menor que el tiempo medio que demora la vieja máquina.

   i) Plantear las hipótesis de interés, dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula.

   ii) Con un nivel de significancia de 0.01, dar la región de rechazo para el test planteado en el item (i), calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema. ¿Que decisión debería tomar el fabricante?.

   iii) Calcule el p-valor de esta prueba y concluya usando un $\alpha = 0{,}01$.

$n=25$ Distribución normal

$\bar{x} = 21{,}2$

$s_n = 0{,}5$

a) IC del 95%

Para construir el intervalo usaremos la distribución Chi cuadrado.

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} ; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{24 \cdot 0{,}5^2}{39{,}364} ; \frac{24 \cdot 0{,}5^2}{12{,}401}\right)$$

tenemos que $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

$gl = 24$

$Chi_{0{,}025,24} = 39{,}364$

$1 - 0{,}025 = 0{,}975$

$Chi_{0{,}975,24} = 12{,}401$

Resolvemos el intervalo.

$$\left(\frac{6}{39{,}364} ; \frac{6}{12{,}401}\right) \simeq (0{,}1524 ; 0{,}4838)$$

b) $\mu = 20$

i) $H_0: \mu \geq 20$ $H_1: \mu < 20s$

Estadístico de prueba

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} = \frac{21{,}2 - 20}{\frac{0{,}5}{\sqrt{25}}} = \frac{1{,}2}{0{,}1} = 12$$

Bajo Ho tiene una distribución t-student t_{24} de 24 grados de libertad.

ii) $\alpha = 0{,}01$

busquemos el valor crítico t en una cola inferior.

$t_{0{,}01,24} = 2{,}4922$

como es cola izquierda hay que plantearlo con la simetría.

$P(t > 2{,}4922) = 0{,}01$

$P(t < -2{,}4922) = 0{,}01$

esa es la correcta

$12 > -2{,}4922$ entonces t no cae en la región de rechazo, por lo que no se puede rechazar Ho

iii) p-valor:

Dado el estadístico de prueba 12

$\Rightarrow$ P-valor ≈ 1

Dado que 12 es muy grande y es cola izq

$1 > 0{,}01$

Esto significa que no se apoya la H_1.