Parcial 2023 TA

Ejercicio 2. Supongamos que las condiciones económicas de un determinado año se pueden clasificar en buenas y malas. Supongamos que, si un año es bueno, el siguiente será también bueno con probabilidad 0.7. De igual forma, si un año es malo, la probabilidad de que el siguiente sea bueno es 0.4. La probabilidad de que este año sea bueno es 0.6. Encuentre las probabilidades de que las sentencias siguientes sean ciertas.

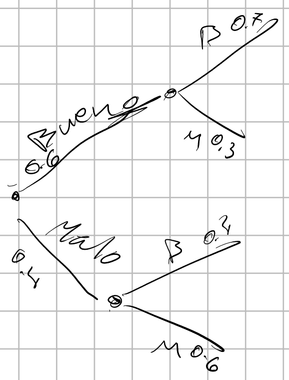
a) Las condiciones económicas serán buenas tanto este año como el siguiente.

b) Las condiciones económicas serán buenas este año y serán malas el siguiente.

c) Las condiciones económicas serán malas los dos años.

d) Las condiciones económicas serán buenas el año próximo.

e) Si las condiciones económicas son buenas el año próximo, ¿cuál es la probabilidad condicionada de que las condiciones económicas sean buenas este año?



a) $0,6 \cdot 0,7 = 0,42 = 42\%$

b) $0,6 \cdot 0,3 = 0,18 = 18\%$

c) $0,4 \cdot 0,6 = 0,24 = 24\%$

d) $0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,58 = 58\%$

e) $P(B_1 | B_2) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{0,42}{0,58} \approx 0,724 = 72,4\%$

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad de masa dada por:

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}2, & \text{si } x = -1 \\ a, & \text{si } x = 0 \\ c, & \text{si } x = 2 \\ 0{,}4, & \text{si } x = 3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

donde a y c son contantes.

a) Determinar los valores de las constantes a y c tal que la esperanza de X sea 1.6. Justifique sus respuestas.

b) Calcular la varianza de X.

c) Calcular la esperanza de $Z = 3X^2 - 1$.

a)

	-1	0	2	3
$P(x)$	0.2	a	c	0.4

$\Rightarrow 0,2 + a + c + 0,4 = 1$

$a + c + 0,6 = 1$

$a + c = 0,4$

$E(x) = \sum_x x \cdot P(x) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot a + 2c + 3 \cdot 0,4 = -0,2 + 2c + 1,2 = 2c + 1$

$\Rightarrow 2c + 1 = 1,6$

$2c = 0.6$

$c = 0,3$

$\Rightarrow a + 0,3 = 0,4$

$a = 0,1$

$\therefore a = 0,1 \wedge b = 0,3$

b) $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 5 - 1,6^2 = 2,44$

$E(x^2) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,4 = 0,2 + 1,2 + 3,6 = 5$

c) $E(3X^2-1) = 3E(X^2)-1 = 3\cdot 5-1 = 14$

Ejercicio 4. Las velocidades de los autos que circulan por la Ruta Nacional Nro 9, a la altura de Las Talitas (Tucumán), se distribuyen según una normal con media 98 km por hora y desviación estándar de 8 km por hora.

a) Si la policía de ese pueblo sigue la política de multar solamente al 5 % de los conductores que circulan a mayor velocidad, ¿a partir de qué umbral de velocidad se comenzará a multar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad de una auto elegido al azar que pase por la ruta en Las Talitas esté entre 95 y 110 kilómetros por hora?.

$N(98, 8^2) = N(98, 64)$ X= velocidad de los autos en RN 9, en Las Talitas

a) $P(X \le c) = 0{,}95$ $\qquad Z = \frac{c-98}{8}$

$P\left(Z \le \frac{c-98}{8}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow \frac{c-98}{8} = 1{,}65$

$c - 98 = 13{,}2$

$c = 111{,}2$

b) $P(95 \le X \le 110) = P(-0{,}375 \le Z \le 1{,}5)$ $\qquad Z \ge \frac{95-98}{8} = -0{,}375$

$= P(Z \le 1{,}5) - (1 - P(Z \le 0{,}375))$ $\qquad Z \le \frac{110-98}{8} = 1{,}5$

$= 0{,}9332 - (1 - 0{,}64615)$

$= 0{,}9332 - 0{,}35385 = 0{,}57935 = 57{,}935\,\%$

Parcial 2022 TB

Ejercicio 1.

a) Una urna contiene dos monedas. La moneda I tiene dos caras y la modeda II es honesta. Una moneda es elegida de la urna y es lanzada.

i) ¿Cuál es la probabilidad que salga cara en el lanzamiento?

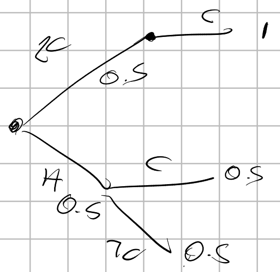
ii) Suponiendo que salió cara ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida haya sido la II?

b) Una planta de producción tiene 20 empleados en el turno mañana y 15 en el turno tarde. Se deben seleccionar 6 empleados al azar y suponiendo que cualquier selección es igualmente probable calcular la probabilidad de que:

i) los 6 pertenezcan al mismo turno.

ii) haya igual número de empleados de cada uno de los turnos.

a)



i) $0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}75 = 75\,\%$

ii) $P(2C|C) = \frac{P(H \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = 0{,}\overline{33} \simeq 33{,}3\cancel{7}\,\%$

b) 35 Total   20 mañana   15 tarde

i $P(M) = \frac{20}{35} \simeq 0,57$ $P(T) = \frac{15}{35} \simeq 0,43$

$\binom{35}{6} = 1623160$ formas de elegir.

$\binom{20}{6} = 38760$ formas de elegir M

$\binom{15}{6} = 5005$ formas de elegir T

$P(x=6)$

$\Rightarrow \frac{\binom{20}{6}}{\binom{35}{6}} + \frac{\binom{15}{6}}{\binom{35}{6}} \approx 0,027 = 2,7\%$

ii) $\binom{20}{3} = 1140$ $\binom{15}{3} = 455$

$P(x=3)$

$\Rightarrow \frac{\binom{20}{3}\binom{15}{3}}{\binom{30}{6}} \approx 0,319 = 31,9\%$

Ejercicio 3. Una máquina expendedora de gaseosas está regulada para servir en media 200 ml por vaso. Si la cantidad de bebida cargada por la máquina se distribuye normalmente, con una desviación estándar de 10 mililitros.

a) ¿Cuál es la probabilidad que la máquina sirva entre 190 y 225 ml por vaso?

b) Si el vaso tiene una capacidad de 230 ml,

  i) ¿Cuál es la probabilidad que la máquina sirva una cantidad que exceda la capacidad del vaso?

  ii) Si la máquina carga siete vasos independientemente uno de otro, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina exceda su capacidad en por lo menos seis de los siete vasos? Justifique su respuesta.

c) Hallar el percentil 75 para la variable cantidad de bebida cargada por la máquina.

$E(X) = 200$ ml $N(200, 10^2)$

$\sigma = 10$ ml

$Z \geq \frac{190-200}{10} = -1$ $Z \leq \frac{225-200}{10} = 2,5$

a) $P(190 \leq X \leq 225)$

$= P(-1 \leq Z \leq 2,5)$

$= P(Z \leq 2,5) - (1 - P(Z \leq 1))$

$= 0,9938 - (1 - 0,8413)$

$= 0,9938 - 0,1587 = 0,8351 = 83,51\%$

b) i) $P(X \geq 230 \text{ml})$ $Z = \frac{230-200}{10} = 3$

$P(Z \geq 3) = 1 - P(Z \leq 3)$

$= 1 - 0,9987 = 0,0013 = 0,13\%$

ii) $B\ (6;\ 0{,}13\%)$

$$P(X \geq 6) = \sum_{j=6}^{7} \binom{7}{j} 0{,}0013^{j} \cdot 0{,}9987^{7-j}$$

$$= \binom{7}{6} 0{,}0013^{6} \cdot 0{,}9987^{1} + \binom{7}{7} 0{,}0013^{7} \cdot 0{,}9987^{0}$$

$$7 \cdot 0 \cdot 0{,}9987 + 1 \cdot 0 \cdot 1 \approx 0$$

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ a(x-1)^2, & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ c, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

donde a y c son constantes.

5 a) Determinar los valores de las constantes a y c. Justifique sus respuestas.

8 b) Calcular la esperanza y varianza de X.

5 c) Calcular la esperanza de $Z = 2X^2 - 2$.

a) como es FDA $c = 1$

Ahora: $F(x) = a(x-1)^2 = \cancel{\int_1^4 f(x) = F(4) - F(1)} = a(4-1)^2 \cancel{- a(1-1)^2}$ $\to 0$

$= 9a$

Como es continua, $\lim_{x \to 4} F(x) = c = 1$

$\Rightarrow\ 9a = 1$

$a = \frac{1}{9}$

b) Obtengamos $f(x)$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{9}(x-1)^2 = \frac{2(x-1)}{9}$$

$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2(x-1)}{9} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$E(x) = \int_1^4 x \frac{2(x-1)}{9}\, dx = \frac{2}{9} \int_1^4 x^2 - x\, dx = \frac{2}{9} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 \right) = \frac{2}{9} \left(\left(\frac{64}{3} - \frac{16}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{2}{9} (13{,}\overline{33}) + (0{,}1\overline{66})$$

$$\approx 3{,}008$$

$$E(x^2) = \int_1^4 x^2 \frac{2(x-1)}{9}\, dx = \frac{2}{9} \int_1^4 x^3 - x^2\, dx = \frac{2}{9} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 \right)$$

$$= \frac{2}{9} \left((64 - 21{,}\overline{3}) - (0{,}25 - 0{,}\overline{3}) \right) = \frac{2}{9} (42{,}78\overline{6}) \approx 9{,}508$$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \approx 9{,}508 - 9{,}048 \approx 0{,}4599$

c) $E(z) = E(2x^2 - 2) = 2E(x^2) - 2 \approx 2 \cdot 9{,}508 - 2 \approx 17{,}016$