Ejercicio 5. Un comercio desea tener una idea de cuál es la verdadera proporción de clientes a favor de la ampliación del horario de atención al público (p). Se seleccionó una muestra aleatoria de 360 clientes, de los cuales 290 estaban a favor de la ampliación del horario de atención.

a) Obtenga un intervalo de confianza del 95% para p.

b) ¿Cuál es el tamaño de muestra necesario para que el intervalo de confianza para p encontrado en el item (a), tenga longitud a lo sumo 0.05, independientemente del valor de $\hat{p}$?

c) Si el comerciante resuelve ampliar el horario de atención si p es superior a 0.75, ¿existe evidencia suficiente para decidir la ampliación del horario de atención? Para responder a la pregunta plantee las hipótesis pertinentes, dé el estadístico de prueba y la región de rechazo al 5% y concluya en el contexto del problema.

$n = 366$ 290 a favor $\hat{p} = \frac{290}{360} \simeq 0{,}805$

a) Fórmula del intervalo de confianza

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$\alpha = 0{,}05$ $\alpha/2 = 0{,}025$

$\Rightarrow Z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$0{,}805 \pm 1{,}645 \sqrt{\frac{0{,}805 \cdot 0{,}195}{360}}$$

$= 0{,}805 \pm 1{,}645 \sqrt{0{,}000436}$

$= 0{,}805 \pm 1{,}645 \cdot 0{,}02088$

$= 0{,}805 \pm 0{,}0343476$

$= \begin{cases} 0{,}7706524 \\ 0{,}8393476 \end{cases}$

$\Rightarrow IC\ (0{,}7706524 ; 0{,}8393476)$

b) Queremos encontrar el tamaño de muestra n necesario para que el IC tenga una longitud máxima de 0,5, sin importar el valor de $\hat{p}$

Condición para la longitud del intervalo.

$$2 \cdot Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}05$$

Para ser conservadores, tomamos $p = 0{,}5$ (la máxima varianza) para obtener el tamaño de muestra más grande posible.

Ahora despejamos n.

$$2 \cdot Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}05$$

$$Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}025$$

$$Z_{\alpha/2}^2 \frac{p(1-p)}{n} = 0{,}025^2$$

$$Z_{\alpha/2}^2 \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}025^2} = n$$

$$Z_{\alpha/2}^2 \frac{0{,}25}{0{,}000625} = n$$

$Z_{0{,}025}$

$1{,}96^2 \cdot 400 = n$

$3{,}8416 \cdot 400 = n$

$1536{,}64 = n$

Digamos $n = 1537$ para redondear.

c) $H_0: p \leq 0{,}75$ $H_A: p > 0{,}75$

Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

donde $\hat{p} = 0{,}805$ $p_0 = 0{,}75$

$$Z = \frac{0{,}805 - 0{,}75}{\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{360}}} = \frac{0{,}055}{0{,}02282} \approx 2{,}4102$$

Región de rechazo: 0,05 en cola derecha

$P(Z \geq ?) = 0{,}05$

$P(Z \leq ?) = 0{,}95$

$\hookrightarrow = 1{,}645$

Conclusión:

Como el estadístico $Z = 2{,}4102$ es mayor que el valor crítico 1,645, esto nos lleva a rechazar la H_0

Interpretación:

Con un nivel de significancia del 5%, tenemos suficiente evidencia para concluir que la proporción de clientes a favor de la ampliación del horario es mayor al 75%, por lo tanto, el comerciante debería considerar la ampliación del horario de atención.