1. La calibración de una balanza debe ser revisada después de pesar 25 veces un espécimen de prueba de 10 kg. Se supone que los resultados de diferentes pesos son independientes entre sí y que el peso en cada intento está normalmente distribuido con $\sigma = 0{,}200$ kg. Se representa con μ el verdadero promedio de lectura de peso de la balanza.

a) ¿Qué hipótesis probaría?

b) Se supone que la balanza debe ser revisada si $\bar{x} \leq 9{,}8968$ o $\bar{x} \geq 10{,}1032$ ¿Cuál es la probabilidad que la revisión se realice cuando no sea necesaria?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la revisión se considere innecesaria cuando $\mu = 10{,}1$? ¿Y cuando $\mu = 9{,}8$?

d) Sea $x = \frac{\bar{x}-10}{\sigma/\sqrt{n}}$. ¿Para qué valor de c es la región de rechazo de la parte b) equivalente a la región bilateral $z \geq c$ o $z \leq -c$?

a) $n = 25$ $\quad$ $c = 10\,kg$

$N(\mu, 0{,}2\,kg)$

$H_0 \; \mu = 10\,kg$

$H_1 \; \mu \neq 10\,kg$

Es una prueba bilateral pues se puede desviar para ambos lados.

b) La revisión se realiza si: $\bar{x} \leq 9{,}8968\,kg$ o $\bar{x} \geq 10{,}1032\,kg$

Definimos estadístico de prueba.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

donde: $\mu = 10$ (bajo Ho)
$\sigma = 0{,}2$
$n = 25$

Convirtamos los límites a z

$$\left(\frac{9{,}8968 - 10}{\frac{0{,}2}{\sqrt{25}}}, \frac{10{,}1032 - 10}{\frac{0{,}2}{\sqrt{25}}} \right) = \left(\frac{-0{,}1032}{0{,}04}, \frac{0{,}1032}{0{,}04} \right) = (-2{,}58, 2{,}58)$$

$P(Z \leq -2{,}58) + P(z \geq 2{,}58)$

$1 - P(z \leq 2{,}58) + 1 - P(z \leq 2{,}58)$

$1 - 0{,}9951 + 1 - 0{,}9951$

$2 - 1{,}9902 = 0{,}0098$

La Probabilidad de que sea revisada cuando no haya falta es del 0,98 % $\approx$ 1%

c) Rehagamos los cálculos para $\mu = 10{,}1$ y $\mu = 9{,}8$

Convirtamos los límites a z $\quad$ $\mu = 10{,}1$

$$\left(\frac{9{,}8968 - 10{,}1}{\frac{0{,}2}{\sqrt{25}}}, \frac{10{,}1032 - 10{,}1}{\frac{0{,}2}{\sqrt{25}}} \right) = \left(\frac{-0{,}2032}{0{,}04}, \frac{0{,}0032}{0{,}04} \right) = (-5{,}08, 0{,}08)$$

Para $\mu = 9,8$

$$\left(\frac{9,8968-9,8}{\frac{0,2}{\sqrt{2}}};\ \frac{10,1032-9,8}{\frac{0,2}{2}}\right) = \left(\frac{0,0968}{0,08};\ \frac{0,3032}{0,04}\right) = (2,42;\ 7,48)$$

10,1

$$P(-5,08 \le Z \le 0,08) = 1 - P(5,08 \le Z) + P(Z \le 0,08) = 1 - 1 + 0,5319 = 0,5319 = \boxed{53,19\%}$$

9,8

$$P(2,42 \le Z \le 7,48) = P(Z \le 7,48) - P(Z \le 2,42) = 1 - 0,9922 = 0,0078 = \boxed{0,78\%}$$

d)

Para el inciso **(d)** del ejercicio 1, necesitamos encontrar el valor crítico c que hace que la región de rechazo bilateral en términos de Z sea equivalente a la región especificada en la parte **(b)**, que es:

$$\bar{x} \le 9.8968 \quad \text{o} \quad \bar{x} \ge 10.1032$$

En otras palabras, queremos que esta región de rechazo sea equivalente a una región bilateral en Z de la forma:

$$|Z| \ge c \quad (\text{o también: } Z \ge c \text{ o } Z \le -c)$$

Paso a Paso

1. **Calcular los Valores Críticos de Z en la Parte (b)**: Ya calculamos en la parte **(b)** que los valores críticos de Z para los límites de 9.8968 y 10.1032 son:

$$Z = \pm 2.58$$

2. **Interpretación de c**: Para que la región de rechazo bilateral $|Z| \ge c$ sea equivalente a la región dada en la parte (b), el valor de c debe coincidir con los valores críticos encontrados, es decir:

$$c = 2.58$$

$\Leftrightarrow$ $\bar{X} \notin (9.8968, 10.1032) \equiv Z \notin (-c, c)$

$\Leftrightarrow$ $9.8968 \le \bar{X} \le 10.1032 \equiv -c \le \frac{\bar{X} - 10}{0.04} \le c$

$\Leftrightarrow$ $9.8968 \le \bar{X} \le 10.1032 \equiv -0.04c + 10 \le \bar{X} \le 0.04c + 10$

$\Leftrightarrow$ $-0.04c + 10 = 9.8968 \wedge 0.04c + 10 = 10.1032$

$\Leftrightarrow$ $-c = -2.58 \wedge c = 2.58$

$c = 2.58$

2. Considere que el estadístico de prueba Z tiene distribución normal estándar cuando $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera y sea z el valor observado de Z. Proporcionar el nivel de significación para cada una de las siguientes situaciones:
a) $H_a : \mu > \mu_0$ región de rechazo $z \ge 1{,}88$
b) $H_a : \mu < \mu_0$ región de rechazo $z \le -2{,}75$
c) $H_a : \mu \ne \mu_0$ región de rechazo $z \ge 2{,}88$ o $z \le -2{,}88$

a) $P(Z \ge 1,88) = 1 - P(Z \le 1,88) = 1 - 0,9699 = \boxed{0,0301}$

b) $P(Z \le -2,75) = 1 - P(Z \le 2,75) = 1 - 0,9970 = \boxed{0,003}$

c) $P(-2,88 \le Z \le 2,88) = 2P(Z \le 2,88) - 1 = 2 \cdot 0,9979 - 1 = 0,9958$

Ahora hacemos el complemento $= 1 - 0,9958 = \boxed{0,0042}$

3. Se ha determinado el punto de fusión de cada una de las 16 muestras de cierta marca de aceite vegetal hidrogenado, con resultado $\bar{x} = 94{,}32$. Suponga que la distribución del punto de fusión es normal con $\sigma = 1{,}20$. Considere $H_0 : \mu = 95$ contra $H_a : \mu \ne 95$
a) Lleve a cabo la prueba de hipótesis a nivel 0,01
b) Si se utiliza una prueba de nivel 0,01, ¿cuál es $\beta(94)$, la probabilidad de error de tipo II cuando $\mu = 94$?

a) Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$Z = \frac{94,32 - 95}{\frac{1,20}{\sqrt{16}}} = \frac{-0,68}{0,3} \approx -2,2667$$

Dado que estamos realizando una **prueba bilateral** con un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$, dividimos α entre 2 para obtener los valores críticos para cada cola:

$$\alpha/2 = 0.01/2 = 0.005$$

Usando este valor, buscamos el valor crítico correspondiente en la tabla de la distribución normal estándar:

$$Z_{\text{crítico}} = \pm 2.58$$

$\hookrightarrow$ $P(2{,}58 \leq Z) = 0{,}9951$

$1 = 0{,}9951 + 0{,}0049$

$-2{,}58$ por simetría

Veamos que $-2{,}58 < -2{,}27 < 2{,}58$

$\therefore$ no cae en la región de rechazo, no rechazamos la hip nula

Dado que $Z = -2.27$ **no cae en la región de rechazo, no rechazamos la hipótesis nula** al nivel de significancia de $\alpha = 0.01$. Esto significa que no tenemos suficiente evidencia para concluir que el promedio del punto de fusión es diferente de 95 grados.

b)

1. **Definición de Error de Tipo II**:
   - El Error de Tipo II (β) es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu = 95$ cuando, en realidad, el valor verdadero de la media es diferente, en este caso, $\mu = 94$.
2. **Región de No Rechazo en Términos de $\bar{x}$**:
   - En la parte (a), encontramos que los **valores críticos de** Z para una prueba bilateral al nivel de significancia de 0.01 son $Z = \pm 2.58$.
   - Esto significa que la región de no rechazo en términos de Z es:

$$-2.58 < Z < 2.58$$

3. **Convertir los Valores Críticos a** $\bar{x}$ cuando $\mu = 95$:
   - Usamos la fórmula de Z en términos de $\bar{x}$:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

   - Para $Z = -2.58$ y $Z = 2.58$, resolvemos para $\bar{x}$ usando $\mu_0 = 95$, $\sigma = 1.20$, y $n = 16$.

$$-2{,}58 = \frac{\bar{x} - 95}{0{,}3}$$

$$2{,}58 \cdot 0{,}3 + 95 = \bar{x} = 95{,}774$$

$$-2{,}58 \cdot 0{,}3 + 95 = \bar{x} = 94{,}226$$

Esto significa que, si el promedio muestral $\bar{x}$ cae entre 94.226 y 95.774, no rechazaremos la hipótesis nula.

Ahora, queremos encontrar la probabilidad de que el promedio $\bar{x}$ caiga en la región de no rechazo **si el verdadero valor de la media es 94**. Para esto, recalcularemos los valores de Z usando $\mu = 94$ y determinaremos la probabilidad de que Z esté dentro de los límites correspondientes.

$$Z = \frac{94{,}226 - 94}{\frac{1{,}20}{\sqrt{16}}} = \frac{0{,}226}{0{,}3} = 0{,}7533$$

$$Z = \frac{95{,}774 - 94}{\frac{1{,}20}{\sqrt{16}}} = \frac{1{,}774}{0{,}3} = 5{,}9133$$

$P(0{,}7533 \leq Z \leq 5{,}9133) = P(Z \leq 5{,}9133) - P(Z \leq 0{,}7533)$

$= 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

Este valor de β significa que, si el verdadero valor promedio es 94, hay una probabilidad del **22.66% de no rechazar la hipótesis nula** (que afirma que el promedio es 95). Esto representa la probabilidad de cometer un **Error de Tipo II** en esta situación.

▶ **4.** Considerar el ejercicio 5 de la guía 6. Llevar a cabo una prueba de hipótesis de nivel de significación 0,05 para determinar si las mediciones del laboratorio son aceptables y compare con las conclusiones obtenidas a partir del intervalo de confianza.

Guía 6

Ejercicio 5:
Se quiere analizar si las determinaciones del contenido de un ácido que realiza un laboratorio son aceptables. Se tomó una muestra de alimento conteniendo 78 mg/kg de este ácido y se analizaron las siguientes determinaciones independientes obtenidas por el laboratorio:

80 81 77 80 77 74 77 79 81 79

Suponga que el contenido del ácido tiene distribución normal.
a) Determine un intervalo de 95 % de confianza para el contenido medio del ácido según el laboratorio y a partir del mismo concluya si las mediciones del laboratorio son aceptables.
b) ¿Cuál sería su conclusión en el inciso a) si el contenido real del ácido en la muestra de alimento fuera de 82 mg/kg?

$\mu_0 = 78$

Estadístico: $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_X}\sqrt{n}$

$\alpha = 0.05$

Por teorema el RR es:

$RR = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq t_{\frac{0.05}{2},10-1}\right\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq t_{0.025,9}\right\}$

$\simeq \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2.262\}$

Para los datos:

$\bar{x} = 78.5$

$S_x = \frac{\sqrt{178}}{6} \simeq 2.22361$?? $= \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{44{,}5}{9}}$

$\frac{\bar{x}-\mu_0}{S_x}\sqrt{n} = \frac{78.5-78}{\frac{\sqrt{178}}{6}}\sqrt{10} = \frac{3\sqrt{445}}{89} \simeq 0.71107$

$\notin RR$

Por ende, se debe aceptar $H_0: \mu = 78$

▸ **5.** Se realizaron $n = 26$ observaciones del tiempo de escape (en segundos) para trabajadores petroleros, en un ejercicio simulado, a partir de las cuales se calcularon el promedio y la desviación estándar muestrales, que fueron 370,69 y 24,26 respectivamente. Los investigadores suponen que el tiempo real promedio de escape es de 6 minutos a lo sumo. ¿Contradicen los datos esta suposición? Asumiendo distribución normal para el tiempo de escape, probar las hipótesis apropiadas con un nivel de significación de 0,05. Concluya en el contexto del problema.

$n = 26$ 6m = 360 s nivel de significación = 0,05

$\bar{x} = 370{,}69$

$S_{n-1} = 24{,}26$

$H_0: \mu \leq 360$ Estadístico $= \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ $\alpha = 0{,}05$

$H_1: \mu > 360$ $gl = 26-1 = 25$

porque tienen que escapar antes de los 6 minutos

Calculemos el estadístico

$$t = \frac{376{,}69 - 360}{\frac{24{,}26}{\sqrt{26}}} = \frac{10{,}69}{4{,}75778} \approx 2{,}2468$$

Valor crítico t student gl 25 α 0,05 = 1,7081

vemos que $2{,}2468 > 1{,}7081$

$\therefore$ Rechazamos la H_0 al nivel de significancia 0,05

Los datos si contradicen la supocición de que el tiempo del promedio de escape es de 6 minutos o menos. Esto sugiere, en el contexto del problema, que el tiempo promedio de escape podría ser mayor al límite asumido de 6 minutos.

6. La prueba de impacto Charpy de muesca V es la base para estudiar muchos criterios de resistencia de materiales. Se aplicó esta prueba a una muestra de 42 materiales de una aleación especial a 110^0F. El promedio muestral de expansión lateral transversal se calculó en 73,1 milésimas de pulgada y la desviación estándar muestral fue $s_{n-1} = 5{,}9$ milésimas de pulgada. El verdadero promedio de cantidad de expansión debe ser menor de 75 milésimas de pulgada para ser adecuada en cierta aplicación. La aleación no se utilizará a menos que la muestra proporcione fuerte evidencia de que este criterio se ha satisfecho.
a) Probar las hipótesis pertinentes empleando $\alpha = 0{,}01$ para determinar si la aleación es adecuada.
b) Si se sabe que $\sigma = 5{,}9$, ¿cuál es la probabilidad de cometer Error de tipo II, $\beta(\mu')$, para la prueba de nivel 0,01 para la alternativa $\mu' = 70$?

$H_0: \mu \geq 75$ $\qquad$ $H_1: \mu < 75$

a) $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ $\qquad$ $\bar{x} = 73{,}1$ $\quad$ $\mu = 75$

$s = 5{,}9$ $\quad$ $n = 42$

$$t = \frac{73{,}1 - 75}{5{,}9/\sqrt{42}} \approx -2{,}087$$

Por teorema para prueba unilateral:
$$RR = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -z_\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -z_{0.01}\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -F_Z^{-1}(0.99)\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2.33\}$$

veamos valor crítico con $\alpha = 0{,}01$

$0{,}01 = 1 - 0{,}99$

$P(Z \leq ?) = 0{,}99$

$2{,}33 \geq z \quad -2{,}33$

$-2{,}33 < -2{,}087$ $\therefore$ No se rechaza la hipótesis.

b)

1. **Definición de Error de Tipo II:**
   - El error de Tipo II ocurre cuando no rechazamos la hipótesis nula H_0 cuando en realidad es falsa, en este caso cuando $\mu = 70$.
   - Calculamos la probabilidad de no rechazar H_0 bajo esta media alternativa $\mu' = 70$.
2. **Determinar el Límite de No Rechazo bajo H_0:**
   - Sabemos que la hipótesis nula H_0 establece $\mu \geq 75$.
   - En el inciso a, vimos que no rechazamos H_0 si el estadístico de prueba t no cae en la región crítica.
   - Esto implica que no rechazamos H_0 cuando el valor de la media muestral $\bar{x}$ es mayor que el valor que corresponde a $t_{\text{crítico}} = -2.42$.
3. **Cálculo de $\bar{x}_{\text{no rechazo}}$ bajo $\mu = 75$:**
   - Utilizamos la desigualdad inversa para encontrar el límite de la media muestral donde no rechazamos H_0.

$$\bar{x}_{\text{no rechazo}} = \mu + t_{\text{crítico}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

4. **Calcular $\beta(70)$ bajo $\mu = 70$:**
   - Finalmente, calcularemos la probabilidad de que $\bar{x} \geq \bar{x}_{\text{no rechazo}}$ suponiendo que $\mu = 70$ es la verdadera media.

Los resultados para el cálculo del Error de Tipo II bajo la media alternativa $\mu = 70$ son los siguientes:

- **Límite de no rechazo de $\bar{x}$:** 72.80
- **Valor z para $\bar{x}_{\text{no rechazo}}$ bajo $\mu = 70$:** 3.07
- **Probabilidad de cometer Error de Tipo II,** $\beta(70)$: 0.0011

Interpretación

La probabilidad de cometer un Error de Tipo II cuando el verdadero promedio es 70 es aproximadamente **0.0011**. Esto significa que hay una probabilidad muy baja (0.11%) de no rechazar la hipótesis nula cuando en realidad la media es 70.

$\mu_0 = 75$
$\sigma = 5.9$

Estadístico: $\frac{\bar{X}-75}{\frac{\sigma}{\sqrt{42}}} = \frac{\bar{X}-75}{\frac{5.9}{\sqrt{42}}}$

$\alpha = 0.01$

$H_0: \mu = 75$
$H_a: \mu < 75$

Por teorema:

$$RR = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -z_\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2.33\}$$

$$\begin{aligned}
&\beta(70) \\
\simeq &\{\text{Por teorema (usando TCL porque } n \text{ es grande)}\} \\
&1 - F_Z\left(-z_{0.01} + \frac{75-70}{\frac{5.9}{\sqrt{42}}}\right) \\
= \\
&1 - F_Z\left(-F_Z^{-1}(0.99) + \frac{50\sqrt{42}}{59}\right) \\
\simeq \\
&1 - F_Z\left(-2.33 + \frac{50\sqrt{42}}{59}\right) \\
\simeq \\
&1 - F_Z(3.16) \\
\simeq \\
&1 - 0.9992 \\
= \\
&0.0008
\end{aligned}$$

8. Se determinó la cantidad de desgaste de un eje, después de un recorrido fijo de millas, para cada uno de los $n = 8$ motores de combustión interna, que llevan cobre y plomo como material antifricción, resultando $\bar{x} = 3$ y $s_{n-1} = 1{,}25$.

a) Se supone que la distribución de desgaste del eje es normal con media μ. Utilizar una prueba de hipótesis de nivel 0,05 para probar $H_0 : \mu = 3{,}50$ contra $H_a : \mu > 3{,}50$

b) En las condiciones de a) y $\sigma = 1,25$, ¿cuál es la probabilidad de cometer Error de tipo II, $\beta(\mu')$, de la prueba para la alternativa $\mu' = 4{,}00$?

$n = 8$

$\bar{x} = 3$

$S_{n-1} = 1{,}25$

a) $\mu = \mu$ $\qquad \alpha = 0{,}05$

Probar $H_0 : \mu = 3{,}50$ contra $H_a : \mu > 3{,}50$

$t = \dfrac{3 - 3{,}50}{1{,}25/\sqrt{8}} \approx -1{,}13$

valor crítico $\alpha = 0{,}05$
$gl = 7$
$= 1{,}8946$

$-1{,}13 < 1{,}8946$ $\therefore$ no rechazamos H_0

b) $\beta(4)$

$=$ Teorema

$F_Z\left(Z_{0,05} + \dfrac{3{,}5 - 4}{\frac{1{,}25}{\sqrt{8}}}\right) = F_Z\left(F_Z^{-1}(0{,}95) - \dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right) = F_Z\left(1{,}645 - \dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right)$

$\approx F_Z(0{,}51) = 0{,}695 = 69{,}5\,\%$

Resolución Manual para $\beta(4.00)$

1. **Cálculo del límite de no rechazo $\bar{x}_{\text{no rechazo}}$:**
   - Usamos:
   $$\bar{x}_{\text{no rechazo}} = 3.5 + 1.895 \cdot \frac{1.25}{\sqrt{8}}$$
   - Calculamos:
   $$\bar{x}_{\text{no rechazo}} \approx 3.5 + 1.895 \cdot 0.441 \approx 3.5 + 0.836 \approx 4.336$$
2. **Convertir a z-score bajo $\mu = 4.00$:**
   - Calculamos el valor z bajo la suposición de $\mu = 4.00$:
   $$z = \frac{4.336 - 4.0}{1.25/\sqrt{8}} \approx \frac{0.336}{0.441} \approx 0.76$$
3. **Probabilidad de no rechazo (Error de Tipo II) β:**
   - Usamos la tabla de la normal estándar para $z = 0.76$, que nos da $P(Z \leq 0.76) \approx 0.7764$.
   - Finalmente, $\beta(4.00) \approx 0.7764$, es decir, hay una probabilidad de 77.64% de cometer el Error de Tipo II cuando la media real es 4.00.

9. Según el Código Alimentario Argentino (CAA) un alimento es considerado bajo en sodio si el mismo posee a lo sumo 120 mg de sodio por cada 100 g de producto. Se tomaron 16 muestras aleatoriamente elegidas de galletas rotuladas como bajas en sodio de cierta marca, con el fin de determinar el cumplimiento de las normas alimentarias del CAA. Los contenidos de sodio (mg) por cada 100 g de muestra de galletas fueron:

125,02	121,45	122,25	119,37	120,80	124,78	121,35	124,97
119,98	117,50	121,13	123,09	124,40	126,97	118,89	121,72

Suponga que el contenido de sodio tiene distribución normal. ¿Esta información sugiere que esta marca de galletas no está cumpliendo las normas alimentarias del CAA? Plantear las hipótesis de interés y concluir, en el contexto del problema, usando un nivel de significancia de 0,05.

Planteamiento de hipótesis:

$H_0: \mu \leq 120 \text{ mg}$ $\quad H_1: \mu > 120 \text{ mg}$

$\bar{x} = 122,104$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \approx 2,78$$

$$t = \frac{122,104 - 120}{2,78/\sqrt{16}} \approx 3,027$$

Valor crítico para t con α=0.05 y 15 grados de libertad: 1,7531

$3,027 > 1,7531$ rechazamos H_0

10. Para chequear las lecturas de detectores de radón de cierto tipo, se seleccionó una muestra de 12 detectores y cada uno se expuso a 100 pCi/L de radón. Las lecturas obtenidas fueron las siguientes:

105,6	90,0	91,2	96,9	96,5	91,3
100,1	105,0	99,6	107,7	103,3	92,4

a) ¿Estos datos indican que la lectura de radón media difiere del valor al que fueron expuestos los detectores? Plantee las hipótesis de interés, indique cuál es el valor observado del estadístico de prueba y concluya utilizando un nivel de significancia de 0,02 en el contexto del problema.
b) Obtenga un intervalo de 98 % de confianza para la lectura media de radón de los detectores de este tipo y concluya respecto a las hipótesis de interés. Compare con lo obtenido en a).
c)¿Qué supuestos se necesitan para que las conclusiones obtenidas en a) y b) sean válidas?

$$\bar{x} = \frac{1179,5}{12} = 98,3$$

$\alpha = 0,02$

$gl = 11$

$\mu = 100$

$H_0: \mu = 100$ $\quad H_1: \mu \neq 100$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \approx 5,98 \qquad \alpha/2 = 0,01$$

$$t = \frac{98,3 - 100}{5,98/\sqrt{12}} \approx -0,9984 \qquad t_{(0,01,11)} = 2,7181 \pm$$

Como $t = -0,9984$ no está en la región de rechazo, no rechazamos la H_0.

No hay suficiente evidencia para afirmar que la media de las lecturas difiere de 100 pCi/L con un nivel de significancia de 0.02.

- El intervalo de confianza se calcula como:

$$\bar{x} \pm t_{\text{crítico}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$98,3 \pm 2,7181 \cdot \frac{5,98}{\sqrt{12}} \approx 98,3 \pm 4,66$$

$$(93,64 ; 102,96)$$

- Dado que 100 está dentro del intervalo de confianza, esta conclusión **apoya la decisión de no rechazar la hipótesis nula** en el inciso a.

c)

Para que las conclusiones en los incisos a y b sean válidas, necesitamos asumir que:

- La muestra proviene de una **distribución normal** del contenido de radón.
- Las observaciones son **independientes** entre sí.

Estas suposiciones son necesarias para que la prueba t y el intervalo de confianza sean apropiados.

Estadístico de prueba para proporciones

11. Dos empresas distintas desean establecerse en cierta región y brindar servicios de televisión por cable. Se denota por p a la proporción de suscriptores potenciales que prefieren la primera empresa sobre la segunda.

Se toma una muestra aleatoria de tamaño 16 para probar $H_0 : p = 0,5$ contra $H_a : p \neq 0,5$. Se representa con X el número de suscriptores en la muestra que están a favor de la primera empresa y con x el valor observado de X.

a) ¿Cuál de las siguientes regiones de rechazo es la más adecuada?
$R_1 = \{x : x \leq 3 \text{ o } x \geq 13\}$ $\quad R_2 = \{x : x \leq 4\}$ $\quad R_3 = \{x : c \geq 12\}$

b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad del estadístico de prueba X cuando H_0 es verdadera? Utilícela para calcular la probabilidad de cometer Error de tipo I.

c) Calcular la probabilidad de cometer Error de tipo II para la región seleccionada cuando $p = 0,2$. Repetir lo mismo para $p = 0,4$, $p = 0,6$, $p = 0,8$.

d) Mediante la región seleccionada, ¿qué concluye si 5 de los 16 individuos favorecienron a la primera empresa?

$n = 16 \qquad H_0: p = 0,5 \qquad H_a: p \neq 0,5$

X: El número de suscriptores en la muestra que estan a favor de la primera empresa.

x: el valor observado de X

a) Como es una prueba bilateral, la opción más adecuada es:

$$R_1 = \{x : x \leq 3 \text{ o } x \geq 13\}$$

b) $X \sim B(16; 0,5)$

$P(x \in R_1) = P(B(16;0,5) \leq 3) + P(B(16;0,5) \geq 13)$

$= \sum_{i=0}^{3} \binom{16}{i} 0,5^i (1-0,5)^{16-i} + \sum_{i=13}^{16} \binom{16}{i} 0,5^i (1-0,5)^{16-i}$

$=$ { simetría del binomio }

$= 2 \cdot 0,5^{16} \sum_{i=0}^{3} \binom{16}{i} = \ldots \approx 0,02127$

c) $\beta(0,2)$

$= P(B(16; 0,2) \notin R_1)$

$= 1 - P(B(\,) \leq 3) - P(B(\,) \geq 13)$

$= 1 - \Sigma \ldots - \Sigma \ldots$

$= 0,401867$

— • —

$\beta(0,4)$

$= P(B(16; 0,4) \notin R_1)$

$= 1 - \Sigma \ldots - \Sigma \ldots$ mismos cálculos

$= 0,938607$

— • —

$\beta(0,6)$

$=$ simetría de β

$= 0,938607$

— • —

$\beta(0,8)$

$=$ simetría de β

$= 0,401867$

d) Para R_1, $x=5$ no cae en la región de rechazo, por lo que no se rechaza H_0. Lo cual indicaría que no hay suficiente evidencia para afirmar una preferencia significativa hacia una de las empresas.

12. Una muestra aleatoria de 150 donaciones en un banco de sangre revela que 92 eran de sangre tipo A.
a) ¿Sugiere esto que el porcentaje real de donadores tipo A difiere del porcentaje de la población con sangre tipo A, que se considera del 40 %? Haga una prueba de las hipótesis adecuadas, con un nivel de significación de 0,01. ¿Sería distinta su conclusión si se usara un nivel de significación de 0,05?
b) Construir un intervalo del 90 % de confianza para la proporción real de donadores de sangre tipo A.

$n = 150$

tipoA $= 92$

a) $H_0: p = 0,4 \qquad H_A: p \neq 0,4$

Proporción muestral:

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{92}{150} = 0,6133$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{150}} = 0,04$$

Estadístico:

$$Z = \frac{\hat{p} - 0,4}{0,04} = \frac{0,6133 - 0,4}{0,04} = 5,3325$$

Comparamos con valor crítico para $\alpha = 0,01$

$\alpha/2 = 0,005$

$$RR = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq z_{0,005}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq F_Z^{-1}(0,995)\}$$
$$\simeq \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2,575\}$$

vemos que $5.3325 \in RR$ ∴ se Rechaza H_0

usando $\alpha = 0,5$

$$RR = \{x \in \mathbb{R} : |x| \gtrsim z_{0,05/2}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| \gtrsim F_Z^{-1}(0,975)\}$$
$$\simeq \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1,96\}$$

Pasa lo mismo que

$5,33\ldots \in RR$, se rechaza H_0

b) Por teorema, un intervalo de 0,9 confianza es:

$$\bar{x} \pm z_{0,1/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$$

$$= \bar{X} \pm F_Z^{-1}(0,95)\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$$

$$= 0,6133 \pm 1,645\sqrt{\frac{0,6133 \cdot 0,3867}{150}}$$

$$= 0,6133 \pm 1,645\sqrt{0,00158}$$

$$= 0,6133 \pm 1,645 \cdot 0,03975$$

$$= 0,6133 \pm 0,06539$$

$$\therefore IC = (0,54791 ; 0,67869)$$

13. Algunos científicos piensan que los robots jugarán un papel esencial en las fábricas, en los próximos 20 años. Supongamos que en un experimento para determinar si es factible el uso de robots para trenzar cables de computadora, se empleó un robot para ensamblar 500 cables. Se examinaron los cables y encontraron 5 defectuosos. Si los ensambladores humanos tienen una tasa de 0,03 (3 %), ¿apoya esta información la hipótesis de que la proporción de partes defectuosas es menor para robots que para humanos? Obtener el p-valor y concluya a un nivel de significación de 0,01 en el contexto del problema.

500 cables — Humanos tasa 3% = 0,03

5 defectuosos.

$H_0: \kappa = 0{,}03$

$H_A: \kappa < 0{,}03$

$$\hat{p} = \frac{5}{500} = 0{,}01$$

Estadístico de prueba:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0{,}01 - 0{,}03}{\sqrt{\frac{0{,}03(1-0{,}03)}{500}}} = \frac{-0{,}02}{0{,}0076} = -2{,}63158$$

Por t, aprox con la normal:

$$\begin{aligned} P\text{-valor} &\simeq F_Z(z_{obs}) \\ &= F_Z\left(-\frac{20\sqrt{1455}}{291}\right) \\ &= 1 - F_Z\left(\frac{20\sqrt{1455}}{291}\right) \\ &\simeq 1 - F_Z(2{,}62) \\ &\simeq 1 - 0{,}9956 = 0{,}0044 \end{aligned}$$

$\alpha = 0{,}01$

$\alpha < P\text{-valor} \Rightarrow$ Se debe rechazar Ho

Paso 4: Calcular el Valor p

El **valor** p representa la probabilidad de obtener un estadístico tan extremo o más bajo que $z = -2.62$ si la hipótesis nula es verdadera. Consultando una tabla de distribución normal o usando una calculadora, encontramos:

$$\text{valor } p = P(Z \leq -2.62) \approx 0.0044$$

Paso 5: Comparar el Valor p con el Nivel de Significancia α

Dado que nuestro nivel de significancia es $\alpha = 0.01$:

- Si $p < \alpha$, rechazamos la hipótesis nula H_0.
- En este caso, $p = 0.0044$ es menor que $\alpha = 0.01$, así que **rechazamos** H_0.

14. Se proporcionan pares de p-valores y niveles de significancia α. Para cada par expresar si el valor observado p llevaría al rechazo de H_0 al nivel de significancia dado

a) valor $p = 0{,}084$, $\geq$ $\alpha = 0{,}05$ A
b) valor $p = 0{,}003$, $<$ $\alpha = 0{,}01$ R
c) valor $p = 0{,}498$, $\geq$ $\alpha = 0{,}05$ A
d) valor $p = 0{,}084$, $<$ $\alpha = 0{,}10$ R
e) valor $p = 0{,}039$, $\geq$ $\alpha = 0{,}01$ A
f) valor $p = 0{,}218$, $\geq$ $\alpha = 0{,}10$ A

$\alpha < p\text{-valor} \Rightarrow$ se acepta H_0
$\alpha \geq p\text{-valor} \Rightarrow$ se rechaza H_0

A de aceptado
R de rechazado

15. Calcular el valor p para una prueba basada en un estadístico Z en cada una de las siguientes situaciones y dar una conclusión a un nivel de significación de $\alpha = 0{,}05$.

a) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu > 5$
. **i)** $z_{obs} = 1{,}42$ **ii)** $z_{obs} = 2{,}48$
b) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu < 5$
. **i)** $z_{obs} = -1{,}96$ **ii)** $z_{obs} = -0{,}11$
c) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu \neq 5$
. **i)** $z_{obs} = 2{,}10$ **ii)** $z_{obs} = -1{,}75$

Si $p \leq 0.05$: Rechazamos la hipótesis nula H_0.

Si $p > 0.05$: No rechazamos la hipótesis nula H_0.

a)
i) $z_{obs} = 1{,}42 \Rightarrow P(z \geq z_{obs}) = 1 - P(z \leq 1{,}42) = 1 - 0{,}9222 = 0{,}0778$

$\alpha = 0{,}05 < 0{,}0778 \Rightarrow$ se acepta

ii) $P(z \geq 2{,}48) = 1 - P(z \leq 2{,}48) = 1 - 0{,}9934 = 0{,}0066 < 0{,}05$
$\Rightarrow$ se rechaza

b) $H_0 : \mu = 5$ $H_A : \mu < 5$

i) $z_{obs} = -1{,}96$
$P(z \leq -1{,}96) = 1 - P(z \leq 1{,}96) = 1 - 0{,}9750 = 0{,}025 < 0{,}05 \Rightarrow$ se rechaza

ii) $z_{obs} = -0{,}11$
$P(z \leq -0{,}11) = 1 - P(z \leq 0{,}11) = 1 - 0{,}5438 = 0{,}4562 > 0{,}05 \Rightarrow$ se acepta

c) $H_0 : \mu = 5$ $H_A : \mu \neq 5$

i) $z_{obs} = 2{,}10$

$p\text{-valor} = 2 \cdot (1 - F_z(|z_{obs}|))$
$= 2 \cdot (1 - F_z(2{,}1)) = 2(1 - 0{,}9821) = 0{,}0358 < 0{,}05 \Rightarrow$ se rechaza

16. En un experimento para probar los efectos de hormonas en el crecimiento de ganado para carne, se implantaron 200 mg de progesterona y 20 mg de benzoato de estradiol en el oído externo de 16 terneros seleccionados al azar, cada uno con un peso aproximado de 500 lb. Se encontró que el promedio muestral de peso ganado por día durante cierto número de días fue de $\overline{x} = 2,72$ lb y la desviación estándar muestral de $s_{n-1} = 0,41$ lb por día. ¿Sugiere esta información que la media verdadera diaria de ganancia de peso para terneros tratados con el implante de hormonas excede 2,5 lb? Acotar el p-valor y concluir a un nivel de significación de 0,05 en el contexto del problema.

$n = 16$ $\qquad \bar{x} = 2,72$ lb $\qquad S_{n-1} = 0,41$ lb

$H_0: \mu = 2,5$ lb $\qquad H_1: \mu > 2,5$ lb

Estadístico:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} = \frac{2,72 - 2,5}{\frac{0,41}{\sqrt{16}}} = \frac{0,22}{0,1025} = 2,186341 = t_{obs}$$

$\alpha = 0,05$

Por teorema

$$p\text{-valor} = P\left(T(n-1) > t_{obs}\right) = P\left(T(15) > 2,186\right) = 1 - F_{T(15)}(2,186) \approx 0,025$$

$0,025 < 0,05 \Rightarrow$ Rechazamos H_0. Esto sugiere que la ganancia de peso diaria para los terneros tratados con el implante de hormona probablemente exede 2,5 lb

17. Acotar el valor p para una prueba basada en un estadístico T en cada una de las siguientes situaciones y dar una conclusión a un nivel de significación de $\alpha = 0{,}02$.

a) Prueba de cola superior, grados de libertad $= 8$, $t_{obs} = 2$

b) Prueba de cola inferior, grados de libertad $= 11$, $t_{obs} = -2{,}4$

c) Prueba bilateral, grados de libertad $= 15$, $t_{obs} = -1{,}6$

Si $p \leq 0.02$, rechazamos H_0.

Si $p > 0.02$, no rechazamos H_0.

a) $p\text{-valor} = P(T \geq 2)_8$

$p\text{-valor} \in (0,05, 0,025)$

como p está entre 0,05 y 0,025, y $p > 0,02$, no rechazamos H_0

b) $p\text{-valor} = P_{11}(Z \leq -2,4) = 1 - P_{11}(Z \leq 2,4) \in (0,025, 0,01)$

como p está entre 0,025 y 0,01, y $p < 0,02$, rechazamos H_0

c) $p\text{-valor} = P_{15}(Z \leq |-1,6|) = P_{15}(Z \leq 1,6) \in (0,1; 0,05)$ pero bien cercano a 0,06

$\Rightarrow 2 \cdot 0,06 = 0,12$

como $p = 0,12$, y $p > 0,02$, no rechazamos H_0