▶ **1.** Un libro está disponible 2 horas para la sala de lectura de la biblioteca de una universidad. Denotemos con X el tiempo de préstamo solicitado por un estudiante seleccionado al azar. Supongamos que X tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular las siguientes probabilidades: $P(X \leq 1)$, $P(0,5 \leq X \leq 1,5)$ y $P(1,5 < X)$

b) Obtener la función de distribución acumulada de X.

c) Calcular $E(X)$, $V(X)$ y σ_X

d) Si a la persona que solicita el libro se le cobra $h(X) = X^2$ cuando la duración del préstamo es X, calcule el cobro esperado $E[h(X)]$.

a) $P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = 0,25$

$P(0,5 \leq X \leq 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{0,5}^{1,5} = \frac{(1,5)^2}{4} - \frac{(0,5)^2}{4} = \frac{2,25}{4} - \frac{0,25}{4} = 0,5625 - 0,0625$
$= 0,5$ ✓

$P(1,5 < X) = \int_{1,5}^{2} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{1,5}^{2} = 0,4375$

b) FDA =

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4}\Big|_0^x = \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

c) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} - 0 = \frac{4}{3} = 1,\overline{3}$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\, dx = \left(\frac{x^4}{8}\right)\begin{matrix} x = 2 \\ x = 0 \end{matrix} = \frac{2^4}{8} = 2$$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
$= 2 - (1,\overline{3})^2 \approx 0,2222$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 0,47140\ldots$

d) Si a la persona que solicita el libro se le cobra $h(X) = X^2$ cuando la duración del préstamo es X, calcule el cobro esperado $E[h(X)]$.

$E(h(X)) = E(X^2) = 2$

▶ 2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular: $P(X < 0{,}2)$, $P(0{,}2 \leq X \leq 0{,}8)$ y $P(X > 0{,}5)$.
b) Hallar la función de densidad de X.

a) $P(X < 0{,}2) = F(0{,}2) = (0{,}2)^3 = 0{,}008$

$P(0{,}2 \leq X \leq 0{,}8) = F(0{,}8) - F(0{,}2) = 0{,}8^3 - 0{,}008 \cong 0{,}504$

$P(X > 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}5^3 = 0{,}875$

b) $$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

▶ 3. Un profesor siempre termina su clase después de que suena el timbre y antes de que hayan transcurrido 2 minutos desde que sonó. Sea X: tiempo (en minutos) que transcurre entre que suena el timbre y el término de la clase. La función de densidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre el valor de k.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la clase termine antes de 1 minuto después de que suena el timbre?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la clase continúe entre 60 y 90 segundos después de que suena el timbre?
d) Obtener la función de distribución acumulada de X.
e) ¿Cuál es el percentil 75 de la distribución?
f) Calcular $E(X)$ y σ_X.
g) ¿Cuál es la probabilidad de que X esté a menos de 1 desviación estándar de su valor medio?

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \int_0^2 kx^2\,dx = 1$

$k\int_0^2 x^2 = k\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = k\left(\frac{2^3}{3} - 0\right) = k \cdot \frac{8}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$

b) $P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2\,dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{\cancel{3}}{8} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

c) $P(1 \leq X \leq 1{,}5) = \frac{3}{8}\int_1^{1{,}5} x^2\,dx = \frac{3}{8}\left(1{,}125 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot 0{,}7916 \approx 0{,}297$

d) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{3}{8} x^2\,dx = \frac{x^3}{8} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

e) $F(x) = 0{,}75 \iff \frac{x^3}{8} = \frac{3}{4} \iff x^3 = \frac{24}{4}$

$$x^3 = 6$$

$$x = \sqrt[3]{6} \approx 1{,}81712$$

F) $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

$$= \int_0^2 x \frac{3}{8} x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right) = \frac{3}{8}\cdot 4$$

$$= \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$E(x^2) = \frac{3}{8}\int_0^2 x^2 x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{32}{5} = 2{,}4$$

$$\sigma_x = \sqrt{2{,}4 - (1{,}5)^2} \approx \sqrt{0{,}15} \approx 0{,}3872983$$

g) $P(E(x) - \sigma_x < X < E(x) + \sigma_x)$

$= P(1{,}5 - 0{,}3873 < X < 1{,}5 + 0{,}3873)$

$= P(1{,}1127 < X < 1{,}8873)$

$= F(1{,}8873) - F(1{,}1127)$

$= \frac{(1{,}8873)^3}{8} - \frac{(1{,}1127)^3}{8} \approx 0{,}8403 - 0{,}1722 \approx 0{,}6681$

▶ **4.** El tiempo X (en minutos) en que un asistente de laboratorio prepara el equipo para un experimento tiene una distribución uniforme en el intervalo $[25\ ,\ 35]$ ($\mathcal{U}[25, 35]$).
a) Dar la función de densidad y la función de distribución acumulada de X.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación exceda 33 minutos?
c) Para cualquier a tal que $25 < a < a+2 < 35$ ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación esté entre a y $a+2$?
d) Calcular $E(X)$ y $V(X)$.
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación se encuentre a menos de 1 DE del tiempo medio de preparación? ¿Y a menos de 2 DE?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{35-25} = \frac{1}{10} & \text{si } 25 \le x \le 35 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 25 \\ \frac{x-25}{10} & \text{si } 25 \le x \le 35 \\ 1 & x > 35 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{25}^{x} \frac{1}{10}\,dt = \frac{1}{10} t \Big|_{25}^{x}$$

$$\frac{x}{10} - \frac{25}{10} = \frac{x-25}{10}$$

b) $P(X \geq 33) = F(35) - F(33)$

$$= \frac{35-25}{10} - \frac{33-25}{10} = \frac{10}{10} - \frac{8}{10} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

c) Sea:

$a \in (25{,}33)$

$$P(a < \mathcal{U}(25{,}35) < a+2)$$
$$= F(a+2) - F(a)$$
$$= \frac{a+2-25}{10} - \frac{a-25}{10}$$
$$= \frac{a}{10} - \frac{23}{10} - \frac{a}{10} + \frac{25}{10}$$
$$= \frac{1}{5} = 0.2$$

Para una distribución uniforme $U(a,b)$, la probabilidad de que X se encuentre entre dos valores a y $a+2$ se calcula como:

$$P(a \leq X \leq a+2) = \frac{\text{Longitud del intervalo}}{\text{Longitud total del intervalo}}$$

Aquí:

- La **longitud del intervalo** es $a + 2 - a = 2$.
- La **longitud total del intervalo** es $35 - 25 = 10$.

Entonces, la probabilidad es:

$$P(a \leq X \leq a+2) = \frac{2}{10} = 0.2$$

d) $E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{25+35}{2} = \frac{60}{2} = 30$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(35-25)^2}{12} = \frac{10^2}{12} = \frac{100}{12} = 8{,}3\overline{3}$$

e) $\sigma_x = \sqrt{8{,}33} \approx 2{,}8867$

$$P(E(X) - \sigma_{(x)} < \mathcal{U} < E(x) + \sigma_x)$$

$$= P\left(30 - \frac{5}{\sqrt{3}} < \mathcal{U}(25{,}35) < 30 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= F\left(30 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) - F\left(30 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{30 + \frac{5}{\sqrt{3}} - 25}{10} - \frac{30 - \frac{5}{\sqrt{3}} - 25}{10}$$
$$= \frac{5 + \frac{5}{\sqrt{3}} - \left(5 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)}{10}$$
$$= \frac{2\frac{5}{\sqrt{3}}}{10}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.57735$$

▶ **5.** Sea X una variable aleatoria con distribución normal con media 80 y varianza 100 ($\mathcal{N}(80, 100)$). Calcular:
a) $P(X \le 100)$ **b)** $P(65 \le X \le 100)$ **c)** $P(70 \le X)$ **d)** $P(85 \le X \le 95)$ **e)** $P(|X - 80| \le 10)$

La densidad normal standard φ está definida como

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

a) $P(X \le 100)$

$Z \le \frac{100-80}{10} = \frac{20}{10} = 2$

$P(Z \le 2) = 0{,}9772$ (Por tabla)

b) $P(65 \le X \le 100)$ $\qquad Z = \frac{65-80}{10} = \frac{-15}{10} = -1{,}5$

$P(-1{,}5 \le Z \le 2)$

$= P(Z \le 2) - P(-1{,}5 \ge Z)$

$0{,}9772 - (1 - P(Z \le 1{,}5))$

$0{,}9772 - (1 - 0{,}9332)$

$0{,}9772 - 0{,}0668 = 0{,}9104$

c) $P(70 \le X)$ $\qquad Z = \frac{70-80}{10} = -1$

$P(-1 \le x) = P(x \le 1) = 0{,}8413$

d) $P(85 \le X \le 95)$ $\qquad Z = \frac{85-80}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

$Z = \frac{95-80}{10} = \frac{15}{10} = 1{,}5$

$P(0{,}5 \le Z \le 1{,}5)$

$= P(1{,}5 \le Z) - P(0{,}5 \le Z)$

$= 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$

e) $P(|X-80| \le 10) = P(-10 \le X-80 \le 10) = P(70 \le X \le 90)$

$\Rightarrow$

$P(-1 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 1))$

$= 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413)$

$= 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$

► **6.** El diámetro de los árboles de determinado tipo, a cierta altura, se distribuye normalmente con $\mu = 8,8$ pulg. y $\sigma = 2,8$ pulg. según sugiere el artículo "Simulating a Harvester-Forwarder Softwood Thinning".
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol, seleccionado al azar, sea a lo sumo 10 pulg.? ¿Y que sea mayor que 10 pulg.?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol, seleccionado al azar, esté entre 5 y 10 pulg.?
c) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8-c\ ;\ 8,8+c)$ incluye el 98 % de todos los valores de diámetro?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 de 5 árboles elegidos al azar tenga diámetro entre 5 y 10 pulg.?

$N(8,8\,,\,\underbrace{7,84}_{\to 2,8^2})$ $\qquad Z = \dfrac{X-8,8}{2,8}$ $\qquad Z = \dfrac{10-8,8}{2,8} \approx 0,4286 \to 0,43$

a) $P(X \leq 10)$
$= P(Z \leq 0,4286)$
$\approx 0,6664$

$P(10 < X)$
$= P(0,4286 < Z)$
$= 1 - P(X < 0,4286)$
$= 1 - 0,6664 = 0,3336$

b) $P(5 \leq X \leq 10)$ $\qquad Z = \dfrac{5-8,8}{2,8} \approx 1,36$
$= P(-1,36 \leq Z \leq 0,43)$
$= P(Z \leq 0,43) - (1 - P(Z \leq 1,36))$
$= 0,6664 - (1 - 0,9115)$
$= 0,6664 - 0,0885 = 0,5779$

c) $P(8,8 - c \leq X \leq 8,8 + c) = 0,98$

$P\left(-\dfrac{c}{2,8} \leq Z \leq \dfrac{c}{2,8}\right) = 0,98$

$P\left(Z \leq \dfrac{c}{2,8}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \dfrac{c}{2,8}\right)\right) = 0,98$

$2P\left(Z \leq \dfrac{c}{2,8}\right) - 1 = 0,98$

$P\left(Z \leq \dfrac{c}{2,8}\right) = \dfrac{1,98}{2} = 0,99$ corresponde a $Z = 2,33$

$\Rightarrow \dfrac{c}{2,8} = 2,33$
$c = 2,33 \cdot 2,8$
$c \approx 6,524$

d) $P(5 \leq X \leq 10) = P(-1,36 \leq Z \leq 0,43) = 0,5779$ $\qquad P(\bar{X}) = 0,4221$
$B(5,1) = \binom{5}{1}$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \binom{5}{0} 0{,}5779^{0} (0{,}4221)^{5}$$

$$= 1 - 0{,}013399 \approx 0{,}9866$$

▶ 7. La distribución de resistencia para resistores de cierto tipo es normal, el 10 % de todos los resistores tienen una resistencia que excede los 10,256 ohms y el 5 % una resistencia menor que 9,671 ohms. ¿Cuáles son los valores de la media y la desviación estándar de la distribución de la resistencia?

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X > 10{,}256) = 0.1 \iff P(X < 10{,}256) = 0.9$$

$$P(X \leq 9{,}671) = 0.05$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{10{,}256 - \mu}{\sigma}\right) = 0.9$$

$$F_Z\left(\frac{10{,}256 - \mu}{\sigma}\right) = 0.9 \Rightarrow \frac{10{,}256 - \mu}{\sigma} \approx 1{,}285$$

$$\boxed{\frac{10{,}256 - \mu}{1{,}285} = \sigma}$$

$$P(X < 9{,}671) = 0.05 \Rightarrow F_Z\left(\frac{9{,}671 - \mu}{\sigma}\right) = 0.05 \Rightarrow -\frac{9{,}671 - \mu}{\sigma} \approx 1{,}635$$

$$P\left(Z < \frac{9{,}671 - \mu}{\sigma}\right) = 0.05 \qquad F_Z\left(-\frac{9{,}671 - \mu}{\sigma}\right) = 0.95 \qquad \frac{\mu - 9{,}671}{1{,}635} = \sigma$$

$$\iff \frac{\mu - 9{,}671}{1{,}635} \approx \frac{10{,}256 - \mu}{1{,}285} \iff \frac{\mu}{1{,}635} + \frac{\mu}{1{,}285} \approx \frac{10{,}256}{1{,}285} + \frac{9{,}671}{1{,}635}$$

$$2\mu \approx 10{,}256 + 9{,}671$$

$$\mu \approx 9{,}9635$$

$$\sigma \approx \frac{9{,}9635 - 9{,}671}{1{,}635} \approx 0{,}1789$$

$$E(X) \approx 9{,}9635$$

$$\sigma_X \approx 0{,}1789$$

▶ 8. **a)** Demuestre que si X tiene una distribución normal con parámetros μ y σ^2, entonces $Y = aX + b$ con $a \neq 0$, también tiene una distribución normal. ¿Cuáles son los parámetros de la distribución de Y (es decir, $E(Y)$ y $V(Y)$)?
b) Si la temperatura medida en °C está normalmente distribuida con media 115 y desviación estándar 2, ¿qué se puede decir acerca de la distribución de la temperatura medida en °F?.

Ayuda: ¿Cómo se transforma de grados Celsius a Fahrenheit?

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad Y = aX + b,\ a \neq 0 \sim N \quad E(Y), V(Y)?$

a) $a\,N(\mu, \sigma^2) + b$

$E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b = a\mu + b$

$V(Y) = V(aX+b) = a^2 V(X) = a^2\sigma^2$

$\therefore$ $Y = aX + b$ también sigue la distribución normal con los sig parámetros

$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

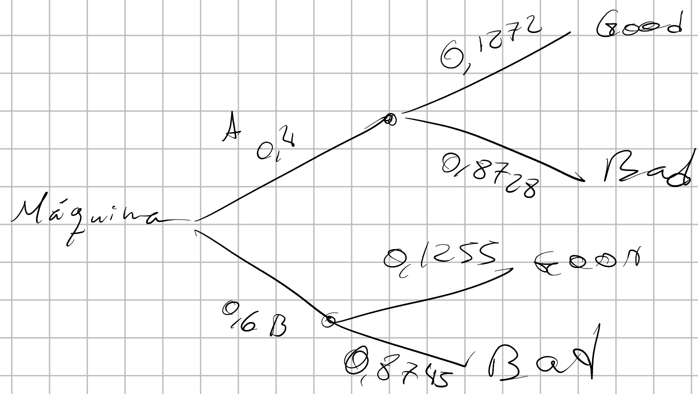
b) $TC \sim N(115, 2^2) \Rightarrow F(c) = \frac{9}{5} \cdot c + 32$

$\Rightarrow TF \sim N\left(\frac{9}{5} \cdot 115 + 32, \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot 2^2\right) = N(239, 12{,}96)$

▶ 9. En una fábrica se fabrican tornillos cuyo diámetro es una variable aleatoria normal. Se pueden usar dos máquinas de distintas marcas para cortarlos. Si se cortan con la máquina A, el diámetro del tornillo (medido en cm) es una variable aleatoria con distribución $N(1\ ;\ 0,4)$. Si se cortan con la máquina B (cuyo costo de mantenimiento es mucho menor) el diámetro (también medido en cm) resulta una variable con distribución $N(1,1\ ;\ 0,4)$. La máquina A se usa el 40 % de las veces y la B el 60 % de las veces. Para que un tornillo se considere aceptable, su diámetro debe estar entre 0,9 y 1,1 cm.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo elegido al azar cumpla el requerimiento deseado?
b) Se ha logrado estabilizar la máquina B para producir tornillos con diámetro medio de 1 cm. Su desvío estándar σ todavía debe ser regulado. ¿Qué valor debería tomar σ para cumplir los requerimientos de calidad con probabilidad mayor o igual que 0,90?

$AX \sim N(1; 0{,}4)$ $\quad BX \sim N(1{,}1; 0{,}4)$ $\quad$ calidad: $0{,}9 \leq i \leq 1{,}1$ cm

A se usa 40% $\quad$ B se usa 60%



$P(0{,}9 \leq AX \leq 1{,}1)$

$P(0{,}9 \leq BX \leq 1{,}1)$

$z = \frac{1{,}1 - 1}{\sqrt{0{,}4}} = 0{,}158$

$z = \frac{0{,}9 - 1}{\sqrt{0{,}4}} = -0{,}158$

$P(0{,}9 \leq AX \leq 1{,}1) = P(-0{,}158 \leq Z \leq 0{,}158)$

$= P(Z \leq 0{,}158) - (1 - P(Z \leq 0{,}158))$

$0{,}5636 - 0{,}4368 = 0{,}1272$

$P(0{,}9 \leq BX \leq 1{,}1)$ $\qquad z = \frac{0{,}9 - 1{,}1}{\sqrt{0{,}4}} = -0{,}316$

$P(-0{,}316 \leq z \leq 0)$

$P(z \leq 0) - (1 - P(z \leq 0{,}316))$ $\qquad z = \frac{1{,}1 - 1{,}1}{\sqrt{0{,}4}} = 0$

$0{,}5 - (1 - 0{,}6255)$

$0{,}5 - 0{,}3745 \simeq 0{,}1255$

$\Rightarrow P(\text{Aceptable}) = P(Ac|A) + P(Ac|B) = 0{,}4 \cdot 0{,}1272 + 0{,}6 \cdot 0{,}1255$

$= 0{,}12618 = 12{,}618\,\%$

b) $BX \sim N(1; \sigma^2)$

$P(0{,}9 \leq BX \leq 1{,}1) \geq 0{,}9$ $\qquad z = \frac{BX - 1}{\sigma}$ *

* $\Rightarrow P\left(\frac{-0{,}1}{\sigma} \leq z \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right)$

$P\left(z \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) - \left(1 - P\left(z \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right)\right) \geq 0{,}9$

$2P\left(z \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) - 1 \geq 0{,}9$

$P\left(z \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) \geq \frac{0{,}9 + 1}{2} = 0{,}95$

$\Rightarrow \frac{0{,}1}{\sigma} = 1{,}65 \Rightarrow \frac{0{,}1}{1{,}65} \simeq \sigma \Rightarrow \sigma = 0{,}06\overline{0}$

▶ 10. La dureza Rockwell de un metal se determina al golpear con un punto acerado la superficie del metal y después medir la profundidad de penetración del punto. Suponga que la dureza Rockwell de cierta aleación está normalmente distribuida con media de 70 y desviación estándar de 3.
a) Un especimen es aceptable si su dureza está entre 67 y 75. ¿Cuál es la probabilidad de que un especimen seleccionado al azar tenga una dureza aceptable?
b) Si la escala aceptable de dureza es $(70 - c, 70 + c)$, ¿para qué valor de c tendría una dureza aceptable el 95 % de todos los especímenes?
c) Si la escala aceptable es como en el inciso a) y la dureza de diez especímenes seleccionados al azar se determina independientemente, ¿cuál es el número esperado de especímenes aceptables entre los diez?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo ocho de diez especímenes seleccionados independientemente tengan una dureza menor de 73,84?

$X \sim N(70, 9)$ $\quad \to 3^2$

a) $P(67 \leq X \leq 75)$ $\qquad z = \frac{67 - 70}{3} = -1 \qquad z = \frac{75 - 70}{3} = 1{,}667$

$$P(-1 \leq z \leq 1{,}667) = P(z \leq 1{,}667) - (1 - P(z \leq 1))$$

$$0{,}9520 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}7933 = 79{,}33\,\%$$

b) $P(70 - c \leq x \leq 70 + c) = 0{,}95$ $\qquad z = \dfrac{70 - c - 70}{3} = -\dfrac{c}{3}$

$$P\left(-\frac{c}{3} \leq z \leq \frac{c}{3}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) - \left(1 - P\left(z \leq \frac{c}{3}\right)\right) = 0{,}95$$

$$2P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}95$$

$$P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) = \frac{0{,}95 + 1}{2}$$

$$P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) = 0{,}975$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{3} = 1{,}96 \quad \Rightarrow \quad c = 1{,}96 \cdot 3 = 5{,}88$$

c) $B(0{,}7933, 10)$ $\qquad E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}7933 = 7{,}933$

d) $N(70, 3^2)$ $\qquad z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{73{,}84 - 70}{3} = \dfrac{3{,}84}{3} = 1{,}28$

$$P(z \leq 1{,}28) \approx 0{,}8997$$

$$\Rightarrow B(10; 0{,}8997)$$

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= 1 - \left(\sum_{j=9}^{10} \binom{10}{j} 0{,}8997^{j}\, 0{,}1003^{10-j}\right)$$

$$\approx 1 - 0{,}7349 \approx 0{,}2651$$

► **11.** Sea X: distancia en metros que un animal recorre desde su lugar de nacimiento hasta el primer territorio vacante que encuentra. El artículo "Competition and Dispersal from Multiple Nests", Ecology 1997, afirma que para los canguros, X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0,01386$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia sea a lo sumo 100m? ¿A lo sumo 200m? ¿Esté entre 100 y 200m?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia sea mayor que la distancia promedio en más de 2 desviaciones estándar?

c) ¿Cuál es el valor de la mediana de la distancia?

$\lambda = 0,01386$

a) $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$P(X \leq 100) = 1 - e^{-0,01386 \cdot 100} \simeq 0,75$

$P(X \leq 200) = 1 - e^{-0,01386 \cdot 200} \simeq 0,937$

$P(100 \leq X \leq 200) = P(X \leq 200) - P(X \leq 100) = 0,937 - 0,75 \simeq 0,187$

b) $\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{1}{0,01386^2}} \simeq 72,15$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 72,15$

$P(X \geq 72,15 + 2 \cdot 72,15) = P(X \geq 216,45) = 1 - P(X \leq 216,45)$

$1 - \left(1 - e^{-0,01386 \cdot 216,45}\right) = 1 - 1 + e^{-0,01386 \cdot 216,45} \simeq 0,0498 = 4,98\%$

c) $P(X \leq m) = 0,5$

$1 - e^{-\lambda m} = 0,5$

$-e^{-\lambda m} = 0,5 - 1$

$e^{-\lambda m} = 0,5$

$-\lambda m = \ln(0,5)$

$m = \frac{\ln(0,5)}{-\lambda} = \frac{\ln(0,5)}{-0,01386} \simeq \frac{-0,693}{-0,01386} \simeq 50,0106$

▶ **12.** Un sistema consta de cinco componentes idénticos conectados en serie como se muestra en la siguiente figura:

Tan pronto como falla un componente, falla todo el sistema. Se supone que cada componente tiene una duración que está distribuida exponencialmente con $\lambda = 0,01$ y que los componentes fallan independientemente unos de otros. Se definen eventos $A_i = \{\text{el } i\text{-ésimo componente dura por lo menos } t \text{ horas}\}$, $i = 1, ..., 5$, por lo que los A_i son eventos independientes. Sea X el tiempo en el que falla el sistema, es decir, la duración más breve entre los cinco componentes

a) El evento $\{X \geq t\}$, ¿a qué evento donde aparece $A_1, ..., A_5$ es equivalente?

b) Usando la independencia de los A_i, calcule $P(X \geq t)$. Obtenga $F(t) = P(X \leq t)$ y la función de densidad de X. ¿Qué tipo de distribución tiene X?

c) Suponga que hay n componentes, cada uno con duración exponencial con parámetro λ. ¿Qué tipo de distribución tiene X?

$\lambda = 0{,}01$

a)

Sea $A_i = \{\text{el } i\text{-ésimo componente dura por lo menos } t \text{ horas}\}$. El evento $\{X \geq t\}$ indica que el sistema funciona hasta al menos t horas. Para que el sistema funcione hasta t horas, **todos** los componentes deben durar al menos t horas.

$$\{X \geq t\} = \{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\}$$

Es decir, $\{X \geq t\}$ ocurre si y solo si cada componente individual A_i dura al menos t horas.

b)

Dado que los componentes fallan de manera independiente y cada uno tiene una duración exponencial con parámetro $\lambda = 0.01$, la probabilidad de que un componente dure al menos t horas es:

$$P(A_i \geq t) = P(T_i \geq t) = e^{-\lambda t} = e^{-0.01t}$$

Dado que los 5 componentes deben durar al menos t horas para que el sistema funcione, y debido a la independencia de los componentes:

$$P(X \geq t) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \prod_{i=1}^{5} P(A_i \geq t) = \left(e^{-0.01t}\right)^5 = e^{-0.05t}$$

Función de distribución acumulada $F(t) = P(X \leq t)$

La función de distribución acumulada es:

$$F(t) = P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t) = 1 - e^{-0.05t}$$

Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de X, que es la derivada de $F(t)$ con respecto a t, es:

$$f_X(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-0.05t}\right) = 0.05e^{-0.05t}$$

Tipo de distribución de X

La función de densidad $f_X(t) = 0.05e^{-0.05t}$ corresponde a una **distribución exponencial** con parámetro $\lambda = 0.05$.

c)

c) Generalización para n componentes

Si el sistema tiene n componentes, cada uno con tiempo de duración exponencial con parámetro λ, la probabilidad de que el sistema dure al menos t horas sigue el mismo razonamiento que en los casos anteriores. La probabilidad de que todos los componentes duren al menos t horas es:

$$P(X \geq t) = \left(e^{-\lambda t}\right)^n = e^{-\lambda n t}$$

Por lo tanto, la función de distribución acumulada para X, el tiempo hasta que falle el sistema con n componentes, es:

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda n t}$$

La función de densidad de X sería:

$$f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = \lambda n e^{-\lambda n t}$$

Esto nos muestra que, en general, el tiempo hasta que falla el sistema sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda_{\text{nuevo}} = \lambda n$.

*** 13.** El tiempo semanal Y (en horas) durante el cual cierta máquina industrial no funciona, tiene aproximadamente una distribución Gamma con $\alpha = 1000$ y $\beta = 20$. La pérdida, en pesos, para la operación industrial debido a esta baja, está dada por $L = 30Y + 2Y^2$. Calcule el valor esperado y la varianza de L.

$Y \sim \Gamma(\alpha = 1000, \beta = 20)$ $\quad E(Y) = \alpha\beta \quad Var(Y) = \alpha\beta^2$

$L = 30Y + 2Y^2$

$E(L) = E(30Y + 2Y^2) = 30E(Y) + 2E(Y^2)$

Calculemos $E(Y^2)$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$\alpha\beta^2 = E(Y^2) - (\alpha\beta)^2$

$\alpha\beta^2 + (\alpha\beta)^2 = E(Y^2)$

$400000 + 400\,000\,000 = E(Y^2)$

$400\,400\,000 = E(Y^2)$

$\Rightarrow E(L) = 30 \cdot 20000 + 2 \cdot 400400000$

$= 600000 + 800800000$

$= 801\,400\,000$ pesos

$$Var(L) = 30^2 \, var(Y) + 2^2 \, var(Y^2)$$
$$= 900 \, \alpha\beta^2 + 4 \, var(Y^2)$$
$$= 18\,000\,000 + 4 \, var(Y^2) \to$$ no sé cómo sacarla.

*** 14.** Sea X: tiempo (en 10^{-1} semanas) desde el envío de un producto defectuoso hasta que el cliente devuelve el producto. Suponga que el tiempo mínimo de devolución es 3,5 y que el exceso sobre el mínimo, $X - 3,5$, tiene una distribución Weibull con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1,5$.
a) ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?
b) Calcule $P(X > 5)$.
c) Calcule $P(5 \leq X \leq 8)$.

$$F_Y(y) = 1 - e^{-(y/\beta)^\alpha}$$

$$X = Y + 3,5$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(Y \leq x - 3,5) = 1 - e^{-((x-3,5)/\beta)^\alpha}, \quad x \geq 3,5$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-((x-3,5)/1,5)^2}, \quad x \geq 3,5$$
es la fda

b) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5)$
$= 1 - (1 - e^{-((5-3,5)/1,5)^2}) = e^{-1} \approx 0,3679$

c) $P(5 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 5) = F_X(8) - F_X(5)$
$\ldots = 1 - e^{-9} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-9} \approx 0,3678$

*** 15.** Un servidor web recibe múltiples solicitudes de usuarios a lo largo del día. El tiempo de respuesta del servidor, definido como el tiempo que tarda en procesar una solicitud y devolver una respuesta al usuario, se mide en milisegundos (ms). Se ha observado que este tiempo de respuesta sigue una distribución log-normal con parámetros $\mu = 3{,}5$ y $\sigma = 0{,}7$.

1. Encuentra la media y la mediana del tiempo de respuesta del servidor.
2. Calcula la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea menor a 100 ms.

$\mu = 3{,}5 \quad \sigma = 0{,}7$

1) Media $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{3{,}5 + \frac{0{,}7^2}{2}} = e^{3{,}5 + 0{,}245} = e^{3{,}745} \approx 42{,}37\,ms$

Mediana$(X) = e^{\mu} = e^{3{,}5} \approx 33{,}12\,ms$

2) $P(X \leq 100\,ms) = P(\ln(X) \leq \ln(100))$

$= P\left(Z < \frac{\ln(100) - \mu}{\sigma}\right) \qquad Z = \frac{\ln(100) - 3{,}5}{0{,}7}$

$\ln(100) \approx 4{,}605 \qquad \Rightarrow \qquad Z = \frac{4{,}605 - 3{,}5}{0{,}7} \approx 1{,}579$

$\therefore P(Z < 1{,}579) \approx 0{,}9429$

*** 16.** El tiempo de ejecución de un algoritmo de búsqueda varía según el dataset y las condiciones de ejecución. La variabilidad en estos tiempos medida en milisegundos [ms], sigue una distribución chi-cuadrado con $k = 7$ grados de libertad.

1. Calcula la media de la variabilidad en el tiempo de ejecución.
2. Determina la probabilidad de que la variabilidad exceda 14 ms.
3. Si una optimización reduce los grados de libertad a $k = 4$, ¿cómo cambia la media?

1) $E(X) = k = 7\,ms$

2) $P(X \geq 14\,ms) = 0{,}05118$ por tabla y app;

3) Sí, $E(X) = k = 4$