▶ **0.** Imagine que desea generar listas de longitud 5, donde cada elemento es un número entero entre 1 y 100. Un ejemplo de una lista podría ser:

$$(87, 1, 39, 100, 56).$$

El espacio muestral Ω está compuesto por todas las posibles listas de 5 elementos que se pueden formar con números enteros en el rango de 1 a 100. Es decir: $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : 1 \leq a_i \leq 100, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Supongamos que cada elemento de la lista tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. Escriba la función de probabilidad P asociada a este experimento. Es decir, determine la probabilidad de generar una lista específica en Ω.

b) Defina una variable aleatoria X cualquiera relacionada con este experimento.

a) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

Como tienen la misma prob de ser seleccionados $\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow$

$P(\text{gen}) = \frac{1}{100^5} = 0{,}0000000001$

b) Sea X una v.a. tq X = "listas formadas por números primos"

$$X(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \text{ es primo} \\ 0 & \text{si } a_i \text{ no es primo.} \end{cases}$$

▶ **1.** Sea X = número de neumáticos de un automóvil, seleccionado al azar, que tenga baja la presión.
a) ¿Cuál de las siguientes tres funciones $p(.)$ es una función de probabilidad de masa para X? Justifique.

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$p(x)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$p(x)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

b) Con la función de probabilidad de masa obtenida en (a), calcule: $P(2 \leq X \leq 4)$, $P(X \leq 2)$ y $P(X \neq 0)$.
c) Obtenga la función de distribución acumulada de X.
d) Si $p(x) = k\ (5 - x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$, ¿cuál debe ser el valor de la constante k para que p sea una función de probabilidad de masa?.

a)

x	0	1	2	3	4	
$p(x)$	0.3 +	0.2 +	0.1 +	0.05 +	0.05	$= 0{,}7 \neq 1$ ✗
$p(x)$	0.4 +	0.1 +	0.1 +	0.1 +	0.3	$= 1 = 1$ ✓
$p(x)$	0.4 +	0.1 +	0.2 +	0.1 +	0.3	$= 1{,}1 \neq 1$ ✗

b) $P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}5$

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$

$P(X \neq 0) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$

c) $F(x) = P[X \leq x] = \sum_{u \leq x} f(u)$

- $F(0) = P(X \leq 0) = p(0) = 0.4$
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = 0.4 + 0.1 = 0.5$
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.4 + 0.1 + 0.1 = 0.6$
- $F(3) = P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 0.4 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.7$
- $F(4) = P(X \leq 4) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0.4 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.3 = 1.0$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.6 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.7 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1.0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

d) $P(0) = k(5-0) = k5$
$P(1) = k(5-1) = k4$
$P(2) = k(5-2) = k3$
$P(3) = k(5-3) = k2$
$P(4) = k(5-4) = k1$

$\Rightarrow k5 + k4 + k3 + k2 + k1 = k(5+4+3+2+1) = k15$

$\Rightarrow k = \frac{1}{15}$ para que la suma de 1 ✓

▶ **2.** Un negocio de computadoras que atiende pedidos por correo tiene seis líneas telefónicas. Denotemos por X el número de líneas en uso en un momento específico. Supongamos que la función de probabilidad de masa de X está dada en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
a) A = A lo sumo tres líneas están en uso.
b) B = Menos de tres líneas están en uso.
c) C = Por lo menos tres líneas están en uso.
d) D = Entre 2 y 5 líneas están en uso.
***e)** E = Entre 2 y 4 líneas no están en uso.
***f)** F = Por lo menos 4 líneas no están en uso.
g) Obtenga la función de distribución acumulada de X.

a) $P(X \leq 3) = 0,1 + 0,15 + 0,20 + 0,25 = 0,70$.

b) $P(X < 3) = P(X \leq 3) - P(X = 3) = 0,70 - 0,25 = 0,45$.

c) $P(X \geq 3) = 0,25 + 0,20 + 0,06 + 0,04 = 0,55$

d) $P(2 \leq X \leq 5) = 0,20 + 0,25 + 0,20 + 0,06 = 0,71$

e) si 2 no se usan $\Rightarrow$ hay 4
" 3 " $\Rightarrow$ hay 3
" 4 " $\Rightarrow$ hay 2

$P(E) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0,20 + 0,25 + 0,20 = 0,65$

f) $P(F)$

Si por lo menos 4 líneas no están en uso, entonces:

- 4 líneas no están en uso $\Rightarrow X = 2$
- 5 líneas no están en uso $\Rightarrow X = 1$
- 6 líneas no están en uso $\Rightarrow X = 0$

Por lo tanto, la probabilidad es:

$$P(F) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.10 + 0.15 + 0.20 = 0.45$$

g)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.10 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.25 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.45 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.70 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0.90 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0.96 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1.00 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p(k)$$

▶ **3.** Una compañía de seguros ofrece a sus tenedores de pólizas varias opciones diferentes para el pago de primas. Para un tenedor seleccionado al azar, sea X = número de meses entre pagos sucesivos. La función de distribución acumulada de X es como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0{,}30 & 1 \le x < 3 \\ 0{,}40 & 3 \le x < 4 \\ 0{,}45 & 4 \le x < 6 \\ 0{,}60 & 6 \le x < 12 \\ 1 & 12 \le x \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la función de probabilidad de masa de X?
b) Sólo con el uso de la función de distribución acumulada, calcule $P(3 \le X \le 6)$ y $P(4 \le X)$.

$F(x^-)$ es el valor de $F(x)$ justo antes de x.

a) $P(X=1) = F(1) - F(1^-) = 0{,}30 - 0 = 0{,}30$

$P(X=3) = F(3) - F(3^-) = 0{,}40 - 0{,}30 = 0{,}10$

$P(X=4) = F(4) - F(4^-) = 0{,}45 - 0{,}40 = 0{,}05$

$P(X=6) = F(6) - F(6^-) = 0{,}60 - 0{,}45 = 0{,}15$

$P(X=12) = F(12) - F(12^-) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$

$$p(x) \begin{cases} 0{,}30 & x = 1 \\ 0{,}10 & x = 3 \\ 0{,}05 & x = 4 \\ 0{,}15 & x = 6 \\ 0{,}40 & x = 12 \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

b) $P(3 \le X \le 6) = 0{,}10 + 0{,}05 + 0 + 0{,}15 = 0{,}30$

$= F(6) - F(3^-) = 0{,}60 - 0{,}30 = 0{,}30$

$P(4 \le X) = 1 - F(4^-) = 0{,}60 = 1 - 0{,}40$.

▶ **4.** Considere un grupo de cinco personas, A, B, C, D y E, que son potenciales donantes de sangre. Se necesita un donante de sangre tipo $O+$ y, de estas personas, sólo A y B tienen dicho grupo sanguíneo. Un laboratorio tomará una muestra de sangre de cada persona y determinará en orden aleatorio el grupo sanguíneo, hasta encontrar la primera muestra $O+$. Considere la variable aleatoria X, que cuenta el número de determinaciones necesarias.
a) Encuentre la función de probabilidad de masa de X.
b) Usando la función de probabilidad de masa obtenida en el ítem a), calcule la probabilidad de que el grupo sanguíneo $O+$ no sea encontrado en las dos primeras determinaciones.

$A, B = O+$

$C, D, E \neq O+$

Sea:

S los posibles resultados de ir haciendo muestras

$p : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ la función de prob de los eventos de S

$X : S \to \mathbb{R}$

$X(s)$ = cantidad de personas muestreadas en s

P la función de probabilidad de masa de X

A_n = se selecciona la persona A en el número n (para otras pers. que no son A también)

a) $P(0) = 0$

$$P(1) = p(A_1 \cup B_1) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$P(2) = p(A_2 \cup B_2) = \{A_1 \cup B_1 \text{ y } A_2 \cup B_2 \text{ son disjuntos}\}$$

$$p(\overline{A_1 \cup B_1}) * p(A_2 \cup B_2 \mid \overline{A_1 \cup B_1})$$

$$= \left(1 - \frac{2}{5}\right) * \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$P(3) = p(A_3 \cup B_3) = p(\overline{A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2}) * p(A_3 \cup B_3 \mid \overline{A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2})$$

$$= (1 - p(A_1 \cup B_1) - p(A_2 \cup B_2)) * p(A_3 \cup B_3 \mid \overline{A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2})$$

$$= (1 - 0,4 - 0,3) * \frac{2}{3}$$

$$= 0,2$$

$$P(4) = (1 - p(A_1 \cup B_1) - p(A_2 \cup B_2) - p(A_3 \cup B_3)) * p(A_3 \cup B_3 \mid \overline{A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_3})$$

$$= (1 - 0.4 - 0.3 - 0.2) * \frac{2}{2} = 0,1$$

$P(5) = 0$

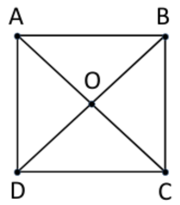
x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0	0.4	0.3	0.2	0.1	0

b)

$p(3 \leq X) = 0.2 + 0.1 = 0.3$

▶ **5.** Silvina vive en el punto O del siguiente diagrama y decide salir a correr. En su recorrido, tiene cuatro posibles destinos que son A, B, C y D. Para decidir a cuál de estos lugares ir primero, lanza dos veces una moneda, y de acuerdo con el resultado, elige uno de los cuatro destinos. Una vez que Silvina llega a un lugar, puede decidir entre regresar a su casa, continuar hacia uno de los dos destinos adyacentes. Cada una de estas opciones tiene una probabilidad de $1/3$. Silvina continúa corriendo entre los destinos hasta que finalmente decide regresar a su casa.

a) Sea X = número de destinos que recorre. Obtenga la función de probabilidad de masa de X.
b) Obtenga la función de distribución acumulada de X.
c) Sea Y = número de segmentos que transita Silvina. Obtenga la función de probabilidad de masa de Y.



Sea:
S el conjunto de los resultados posibles
$P : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ la función de probabilidad de S
$X : S \to \mathbb{R}$
$X(s)$ = el número de visitas que se raliza en s
p la función de probabilidad de masa de X

O_n el evento de que ya volvio a s su casa después de n visitas

a)
$$P(\overline{O_1}) = \frac{2}{3}$$

$$P(\overline{O_{n+1}}) = P(\overline{O_n}) * P(\overline{O_{n+1}} \mid \overline{O_n}) = P(\overline{O_n})\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{O_n}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P(X \leq n) = P(O_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P(X = n) = P(X \leq N) - P(X \leq n-1)$$
$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$= -\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(-\frac{2}{3} + 1\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = P(n)$$

b) Sea F la función de distribución acumulada.

$$F(n) = P(X \leq n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

c) $Y(s) = 1 + X(s)$

$$P(Y=n) = P(X+1=n)$$
$$= P(X = n-1)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

▶ **6.** Sea X= resultado cuando un dado honesto se hace rodar una vez.
a) Calcule la esperanza de X y de $1/X$.
b) Si antes de arrojar el dado se ofrece al tirador retirarse con $\frac{1}{3,5}$ dólares o jugar obteniendo $h(X) = \frac{1}{X}$ dólares, ¿le conviene retirarse o jugar? Justifique.

a) $$E(X) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} i\right) = \frac{1}{6}(21) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{49}{120} \simeq 0{,}40833$$

b) Si no juega gana $\frac{1}{3.5} \simeq 0.2857$ dólares, si sí juega gana $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{49}{120} \simeq 0.40833$ dólares, por lo cuál le combiene si jugar

▶ **7.** Un distribuidor de aparatos electrodomésticos vende tres modelos de diferentes congeladores verticales con capacidad de 13.5, 15.9 y 19.1 pies cúbicos de espacio de almacenaje, respectivamente. Sea X la cantidad de espacio de almacenaje comprado por un cliente que va a comprar un congelador. Supongamos que X tiene la siguiente función de probabilidad de masa:

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

a) Calcule $E(X)$, $E(X^2)$ y $V(X)$.
b) Si el precio de un congelador que tiene una capacidad de X pies cúbicos es de $25X - 8{,}5$, ¿cuál es la esperanza y varianza del precio pagado por un cliente que va a comprar un congelador?
c) Suponga que mientras la capacidad nominal de un congelador es X, la capacidad real es $h(X) = X - 0{,}01X^2$. ¿Cuál es la capacidad real esperada del congelador comprado por un cliente?

a) $$E(X) = 0{,}2 * 13{,}5 + 0{,}5 \cdot 15{,}9 + 0{,}3 \cdot 19{,}1 = 2{,}7 + 7{,}95 + 5{,}73$$
$$= 16{,}38$$

$$E(X^2) = 0{,}2 * 13{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 15{,}9^2 + 0{,}3 \cdot 19{,}1^2 = 36{,}45 + 126{,}405 + 109{,}443$$
$$= 272{,}298$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$272{,}298 - (16{,}38)^2 = 272{,}298 - 268{,}3044 = 3{,}9936$$

b) $E(25X - 8{,}5) = 25\,E(X) - 8{,}5 = 25 \cdot 16{,}38 - 8{,}5 = 401$

$V(25X - 8{,}5) = 25^2\, V(X) = 25^2 \cdot 3{,}9936 = 2496$

c) $h(x) = x - 0{,}01x^2$

$h(13{,}5) = 13{,}5 - 0{,}01 \cdot 13{,}5^2 = 11{,}6775$

$h(15{,}9) = 15{,}9 - 0{,}01 \cdot 15{,}9^2 = 13{,}3719$

$h(19{,}1) = 19{,}1 - 0{,}01 \cdot 19{,}1^2 = 15{,}4519$

$E(h(X)) = 0{,}2 \cdot 11{,}6775 + 0{,}5 \cdot 13{,}3719 + 0{,}3 \cdot 15{,}4519 = 13{,}65702$

8. Considere la variable aleatoria X del ejercicio 4.
a) Encuentre la esperanza y la desviación estándar de X.
b) Si la determinación del grupo sanguíneo de cada muestra le cuesta al laboratorio \$200, ¿cuál es el costo esperado para realizar las determinaciones necesarias hasta encontrar el donante?. ¿Y la varianza del costo?.

a)

x	~~0~~	1	2	3	4	~~5~~
$P(x)$	~~0~~	0.4	0.3	0.2	0.1	~~0~~

$E(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2$

$E(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}1 = 5$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5 - 2^2 = 1$

b) $\text{Costo} = \$200\, X(x)$

$E(\text{costo}) = \$200\, E(X) = \$400$

$V(\text{costo}) = \$200^2\, V(X) = \$40000 \cdot 1 = \$40000$

9. Suponga que sólo el 20 % de los automovilistas se detienen por completo en un cruce donde hay un semáforo con luz roja intermitente en todas las direcciones, cuando no haya otros automóviles visibles.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 automovilistas, seleccionados al azar, que lleguen al cruce en estas condiciones:
i) a lo sumo 5 se detengan por completo?
ii) exactamente 5 se detengan por completo?
iii) por lo menos 5 se detengan por completo?
b) ¿Cuántos, de los siguientes 20 automovilistas, espera el lector que se detengan por completo?

Distribución binomial (20,0.2)
Sea:
X la variable aleatoría de cuantos autos de detienen

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

a) i) $P(X=3) = \binom{20}{3} 0{,}2^3 (1-0{,}2)^{20-3} = \frac{20!}{3!\,17!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{17}$

Esto no va [illegible]

$\simeq 1140 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}0225$

$\simeq 0{,}20536 \ldots$

i) $P(X \leq 5) = \sum_{j=0}^{5} \binom{20}{j} 0.2^{j} (1-0.2)^{20-j} \simeq 0,804208$

ii) $P(X=5) = \binom{20}{5} 0.2^{5} (1-0,2)^{20-5} = \frac{20}{5!\,15!} \cdot 0,2^{5} \cdot 0,8^{15} =$

$15504 \cdot 0,2^{5} \cdot 0,8^{15} \simeq 0,174559$

iii) $P(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{20} \binom{20}{j} 0.2^{j} (1-0,2)^{20-j} = 1 - P(X \leq 4)$

$\simeq 1 - 0,629648 = 0,370352.$

b) $E(X) = 20 \cdot 0,2 = 4$

*** 10.** Un tipo particular de raqueta de tenis se fabrica en tamaños mediano y extragrande. El 60 % de todos los clientes, de cierta tienda, buscan el tamaño extragrande.

a) Entre 10 clientes seleccionados al azar que desean ese tipo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 6 busquen el tamaño extragrande?.

b) Entre 10 clientes seleccionados al azar que desean ese tipo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que el número de clientes que buscan el tamaño extragrande esté dentro de una desviación estándar del valor medio?.

c) La tienda tiene actualmente 6 raquetas de cada modelo. ¿Cuál es la probabilidad de que los siguientes diez clientes que buscan esta raqueta puedan comprar el modelo que buscan, de entre la existencia actual?.

0,6 Buscan XL

a) $P(X \geq 6) = \sum_{j=6}^{10} \binom{10}{j} 0.6^{j} (1-0,6)^{10-j} \simeq 0,63310$

$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

b) $E(X) = 10 \cdot 0,6 = 6$

$V(X) = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,4 \qquad \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,4} \simeq 1,54919$

$P(E(X) - \sqrt{V(X)} \leq X \leq E(X) + \sqrt{V(X)})$

$P(6 - \sqrt{2,4} \leq X \leq 6 + \sqrt{2,4})$

$6 \cdot P(-\sqrt{2,4} \leq X \leq \sqrt{2,4})$

$P(4,45 \leq X \leq 7,549) = \sum_{j=5}^{7} \binom{10}{j} 0,6^{j} (1-0,6)^{10-j} \simeq 0,66647.$

c) $P(X \leq 6) = \sum_{j=0}^{6} \binom{10}{j} 0.6^{j} (1-0.2)^{10-j} \simeq 0,6177$

11. De todas las reparaciones hechas en aparatos de TV en cierta tienda, el 80 % se hace en aparatos que ya no tienen garantía.

a) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es el número esperado de aparatos que ya no tengan garantía?

b) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es el número esperado de aparatos que tienen garantía?

c) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos el 75 % ya no tengan garantía?

d) Suponga que hay 12 aparatos ahora en la tienda, de los cuales 4 tienen garantía. Si 5 de los 12 son llevados a reparación en orden aleatorio y se reparan en el mismo orden, ¿cuál es la la función de distribución de probabilidad de X= número de aparatos con garantía entre los 5 reparados? ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

$x = 80$

$y = 20$

a) $E(x) = 20 \cdot 0{,}8 = 16$

b) $E(Y) = 20 \cdot 0{,}2 = 4$

$1-P(X \geq 16) = 1 - \sum_{j=16}^{20} \binom{20}{j} 0.8^j (1-0.8)^{20-j} \simeq$

$\simeq 1 - 0{,}629648 \simeq 0{,}37352$

c) $P(X \geq 15) = \sum_{j=15}^{20} \binom{20}{j} 0{,}8^j (1-0{,}8)^{20-j} \approx 0{,}804208$

d) Formas de elegir los 5 aparatos

$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,7!} = 792$ $\quad P(X=x)$ $\quad N=12 \quad K=4 \quad n=5$

Parámetros de la distribución hipergeométrica:

- **N**: Tamaño de la población total (en este caso, 12 aparatos).
- **K**: Número de elementos de éxito en la población (en este caso, 4 aparatos con garantía).
- **n**: Tamaño de la muestra (en este caso, 5 aparatos seleccionados).
- **X**: Número de éxitos en la muestra (en este caso, el número de aparatos con garantía entre los 5 seleccionados).

$P(X=k)\ \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

N = Numero total de la Poblacion
K = Numero de exitos de la Poblacion
n = Numero de la muestra
X = Numero de Exitos de la muestra

FUNCION DE PROBABILIDAD

$P(X) = \dfrac{\binom{K}{X}\binom{N-K}{n-X}}{\binom{N}{n}}$

$P(X=0) = \dfrac{\binom{4}{0}\binom{12-4}{5-0}}{\binom{12}{5}} = \dfrac{1 \cdot 56}{792} \approx 0{,}0707$

$P(X=5) = \dfrac{\binom{4}{5}\binom{8}{5-5}}{792} \simeq$ Indef.

$P(X=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{12-4}{5-1}}{792} = \dfrac{4 \cdot 70}{792} \simeq 0{,}3535$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{8}{5-2}}{792} = \dfrac{6 \cdot 56}{792} = 0{,}4242$

$P(X=3) = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{5-3}}{792} \approx \dfrac{4 \cdot 28}{792} \simeq 0{,}1414$

$P(X=4) = \dfrac{\binom{4}{4}\binom{8}{5-4}}{792} \simeq 0{,}01010$

$= \dfrac{\binom{r_1}{x}\binom{r-r_1}{n-x}}{\binom{r}{n}}$

$f(x)$	0	1	2	3	4
	0,07	0,35	0,42	0,14	0,01

$$E(X) = \frac{nr_1}{r} \qquad Var(X) = \frac{r_1 n(r-r_1)(r-n)}{r^2(r-1)}$$

$$E(X) = \frac{nr_1}{r} \qquad Var(X) = \frac{r_1 n(r-r_1)(r-n)}{r^2(r-1)}$$

$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{4}{12} \simeq 1{,}66 \qquad p = K/N$

$V(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 1.66(1-0{,}33)(0{,}72) \simeq 0{,}8088$

$V(X) = \dfrac{4 \cdot 5(12-4)(12-5)}{12^2(12-1)} = \dfrac{1120}{1584} = 0{,}7070$

▶ **12.** Cada uno de 12 refrigeradores de cierto tipo ha sido devuelto a un distribuidor debido a la presencia de un ruido oscilante agudo cuando está funcionando. Supongamos que 4 de esos 12 tienen compresores defectuosos y los otros 8 tienen problemas menos serios. Si se examinan 6 refrigeradores al azar, sea $X=$ número de refrigeradores que tienen el compresor defectuoso entre los 6 examinados.
a) Calcule: i) $P(X=1)$ ii) $P(X \geq 4)$ iii) $P(1 \leq X \leq 3)$
b) ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

a) $P(X=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{12-4}{6-1}}{\binom{12}{6}} = \dfrac{4 \cdot 56}{924} = 0,2424$

$P(X \geq 4) = P(X=4)$ Pues 4 es el máximo

$= \dfrac{\binom{4}{4}\binom{12-4}{6-4}}{924} = 0,03030$

$P(1 \leq X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$0,\overline{24} + \dfrac{\binom{4}{2}\binom{8}{4}}{924} + \dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{3}}{924}$

$0,\overline{24} + 0,\overline{45} + 0,\overline{2424} \approx 0,9393$

b) $E(X) = \sum_{j=0}^{4} j\, P(X=j) = \sum_{j=0}^{4} j \cdot \dfrac{\binom{4}{j}\binom{8}{6-j}}{924} = 2$

$E(X^2) = \sum_{j=0}^{4} j^2 P(X=j) = \dfrac{52}{11} = 4,\overline{72}$

$V(X) = 4,\overline{72} - 2^2 = 0,\overline{72}$

▶ **13.** Boca y River hacen una serie de partidos en los que si hay empate se define por penales. Suponga que $p = P(\text{gana Boca}) = 0{,}5$. Jugarán hasta que Boca gane dos partidos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que River gane x partidos?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se jueguen 4 partidos?.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se jueguen a lo sumo 4 partidos?.
d) ¿Cuántos partidos se esperaría que gane River?. ¿Cuántos partidos se esperaría que se jueguen?.

X = gana boca
$P = 0,5$

$$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

a) Bin negativa $BN(2, 0{,}5) \rightarrow (x+2)-1$

$P(\text{River gana } x \text{ Partidos}) = \binom{x+1}{1} p^2 (1-p)^x = \binom{x+1}{1} 0{,}5^2 (1-0{,}5)^x = \binom{x+1}{1} 0{,}25 \cdot 0{,}5^x$

$\rightarrow 2-1$

$= (1+x)\, 0{,}25 \cdot 0{,}5^x$

b) $P(\text{Partidos River gana} = 4-2) = (1+2)\, 0{,}25 \cdot 0{,}5^2 = \frac{3}{16} = 0{,}1875$

c) $P(PRG + 2 \leq 4) = P(BN(2, 0{,}5) \leq 2)$

$= P(\text{BinNeg}(2, 0.5) = 0) + P(\text{BinNeg}(2, 0.5) = 1) + P(\text{BinNeg}(2, 0.5) = 2)$
$= \binom{2+0-1}{2-1} 0.5^2 (1-0.5)^0 + \binom{2+1-1}{2-1} 0.5^2 (1-0.5)^1 + \binom{2+2-1}{2-1} 0.5^2 (1-0.5)^2$
$= \binom{1}{1} 0.25 + \binom{2}{1} 0.125 + \binom{3}{1} 0.0625$
$= 0.25 + 2 * 0.125 + 3 * 0.0625$
$= 0.6875$

$$E(X) = \frac{r}{p} \qquad Var(X) = r\left(\frac{1-p}{p^2}\right)$$

d) $E(PRG) = E(BN(2, 0.5))$

$= \dfrac{2 \cdot (1-0{,}5)}{0{,}5} = 2$

$E(\text{Partidos jugados}) = 2 + E(PRG) = 4$

▶ 14. Suponga que X= número de tornados observados, en una región particular, durante un período de un año tiene distribución de Poisson con $\lambda = 8$.
a) Calcule: $P(X \leq 5)$, $P(6 \leq X \leq 9)$, $P(10 \leq X)$ y $P(X \geq 1)$.
b) ¿Cuántos tornados se puede esperar que se observen durante un período de un año? ¿Cuál es la desviación estándar de X?

$\lambda = 8$ $\quad X$ = números de tornados observados en 1 año $\quad \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k \geq 0$

$$p_Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k \geq 0$$

$$E(Y) = \lambda \qquad Var(Y) = \lambda$$

a) $P(X \leq 5) = \sum_{j=0}^{5} \dfrac{e^{-8}8^j}{j!} = e^{-8}\sum_{j=0}^{5}\dfrac{8^j}{j!}$

$\approx e^{-8} \cdot 570{,}0\overline{6} \approx \dfrac{1}{e^8} \cdot 570{,}0\overline{6} \approx \dfrac{570{,}0\overline{6}}{2980{,}96} \approx 0{,}1912$

$P(6 \leq X \leq 9) = e^{-8}\sum_{j=6}^{9}\dfrac{8^j}{j!} \approx \dfrac{1566{,}16}{2980{,}96} \approx 0{,}5253$

$P(10 \leq X) = 1 - P(X < 10) \approx 1 - \dfrac{1}{2980{,}96} \cdot \sum_{j=0}^{9} \approx 1 - \dfrac{2136{,}23}{2980{,}96} \approx 1 - 0{,}716$

$\approx 0{,}2833$

b) $E(X) = \lambda = 8$ $\quad Var(X) = \lambda$. $\quad \sqrt{Var(X)} = \sqrt{8} \approx 2{,}82843$.

▶ 15. Un estacionamiento tiene dos entradas. Los coches llegan por hora a la entrada I de acuerdo con una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 3$ y a la entrada II de acuerdo con una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 4$. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 coches lleguen al estacionamiento durante una hora dada? (Se supone que los números de coches que llegan a los dos entradas son independientes).

I $\lambda = 3$ $\quad$ II $\lambda = 4$

$P(I + II = 3) = \sum_{j=0}^{3} P(\{I = j \wedge II = 3-j\})$

$= \sum_{j=0}^{3} P(Pois(3) = j)\, P(Pois(4) = 3-j)$

$= \sum_{j=0}^{3} \dfrac{e^{-3}3^j}{j!} \cdot \dfrac{e^{-4}4^{3-j}}{(3-j)!} = e^{-7}4^3 \sum_{j=0}^{3}\dfrac{3^j \cdot 4^{-j}}{j!(3-j)!} = e^{-7}\dfrac{343}{6} \approx 0{,}05213$

// Para $\lambda = 7$

$P(k=3) = \dfrac{e^{-7} \cdot 7^3}{3!} \approx \dfrac{1 \cdot 343}{1096{,}63 \cdot 6} \approx 0{,}0521$

*** 16.** Se supone que el número de defectos Y (por cm) de la producción diaria de cierto tipo de soga tiene una distribución de Poisson con una media de 2. Cuando se vende la soga, la ganancia por cm está dada por $X = 50 - 2Y - Y^2$. Dé la ganancia esperada por cm.

$\lambda = 2 \qquad X = 50 - 2Y - Y^2$

$E(50 - 2Y - Y^2) = 50 - 2 \cdot E(Y) - E(Y^2)$

$= 50 - 2 \cdot 2 - 6$

$= 40$

$E(Y^2) = Var(Y) + [E(Y)]^2$

$= 2 + 2^2$

$= 6$

▶ 17. **a)** Halle la esperanza y varianza para una variable aleatoria con distribución Hipergeométrica.
b) Halle la esperanza y varianza para una variable aleatoria con distribución Binomial Negativa.

a) Esperanza y varianza de una distribución Hipergeométrica

Una variable aleatoria X sigue una distribución Hipergeométrica cuando describe el número de éxitos en una muestra sin reemplazo extraída de una población finita. Los parámetros de la distribución son:

- N: tamaño de la población.
- K: número de éxitos en la población.
- n: tamaño de la muestra.

La fórmula para la esperanza $E(X)$ y la varianza $\mathrm{Var}(X)$ de una variable aleatoria Hipergeométrica son:

$$E(X) = \frac{nK}{N}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{nK}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

b) Esperanza y varianza de una distribución Binomial Negativa

Una variable aleatoria X sigue una distribución Binomial Negativa cuando describe el número de fracasos antes de obtener un número fijo de éxitos en una serie de ensayos de Bernoulli independientes. Los parámetros de la distribución son:

- r: número de éxitos deseados.
- p: probabilidad de éxito en cada ensayo.

La fórmula para la esperanza $E(X)$ y la varianza $\mathrm{Var}(X)$ de una variable aleatoria Binomial Negativa son:

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$