Guía 4

▶ 1. Cierto supermercado tiene una caja rápida y una común. Sea X_1 el numero de clientes que están en espera en la caja común en un momento particular del día, y X_2 el numero de clientes que están en espera en la caja rápida al mismo tiempo. Si la función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 esta dada por:

X_1/X_2	0	1	2	3
0	0,08	0,07	0,04	0,00
1	0,06	0,15	0,05	0,04
2	0,05	0,04	0,10	0,06
3	0,00	0,03	0,04	0,07
4	0,00	0,01	0,05	0,06

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada caja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente el mismo número de clientes en las dos líneas de espera?
c) Sea A el evento de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra. ¿Cuál es la probabilidad del evento A?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea exactamente cuatro? ¿Y por lo menos cuatro?
e) Hallar las funciones de probabilidad marginales de X_1 y X_2. ¿Son estas variables independientes? Justifique su respuesta.

X_1 = espera en caja común
X_2 = espera en caja rápida

a) $P(X_1=1, X_2=1) = 0,15 = 15\%$

b) $P(X_1 - X_2 = 0) = P(X_1=0, X_2=0) + \dots + P(X_1=3, X_2=3)$

Veamos los pares: (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)

$\Rightarrow = 0,08 + 0,15 + 0,10 + 0,07 = 0,40 = 40\%$

c) $A = P(X_1 \geq X_2+2) + P(X_2 \geq X_1+2)$

Veamos los pares

$P(X_1 \geq X_2+2) = (2,0),(3,1),(3,0),(4,0),(4,1),(4,2) = 0,05 + 0,03 + 0 + 0 + 0,01 + 0,05 = 0,14$

$P(X_2 \geq X_1+2) = (2,0),(3,0),(3,1) = 0,04 + 0 + 0,04 = 0,08$

$\Rightarrow = 0,22 = 22\%$

d) $P(X_1 + X_2 = 4)$

Veamos los pares $(X_1, X_2) = (4,0), (3,1), (2,2), (1,3)$

$0 + 0,03 + 0,10 + 0,04 = 0,17 = 17\%$

$P(X_1 + X_2 \geq 4) = P(X_1+X_2 = 4) + P(X_1+X_2 > 4)$

$0,17 + 0,29 = 0,46 = 46\%$

Veamos los pares para >: (2,3), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)

$0,06 + 0,04 + 0,07 + 0,01 + 0,05 + 0,06 = 0,29$

e) $P(X_1=0) = 0{,}19$ $\quad P(X_2=0) = 0{,}19$

$P(X_1=1) = 0{,}30$ $\quad P(X_2=1) = 0{,}30$

$P(X_1=2) = 0{,}25$ $\quad P(X_2=2) = 0{,}28$

$P(X_1=3) = 0{,}14$ $\quad P(X_2=3) = 0{,}23$

$P(X_1=4) = 0{,}12$

Para verificar que X1 y X2 sean independientes, se debe cumplir que para todos los valores X1 y X2:

$$P(X_1=i, X_2=j) = P(X_1=i) \cdot P(X_2=j)$$

Veamoslo con el ejemplo de X1 = 1 y X2 = 3

$$P(X_1=1, X_2=3) = 0{,}04$$

$$P(X_1=1) \cdot P(X_2=3) = 0{,}30 \cdot 0{,}23 = 0{,}069$$

Como $0{,}04 \neq 0{,}069$ entonces no son independientes. Es decir, una afecta a la otra.

► 12. Cada uno de 12 refrigeradores de cierto tipo ha sido devuelto a un distribuidor debido a la presencia de un ruido oscilante agudo cuando está funcionando. Supongamos que 4 de esos 12 tienen compresores defectuosos y los otros 8 tienen problemas menos serios. Si se examinan 6 refrigeradores al azar, sea X= número de refrigeradores que tienen el compresor defectuoso entre los 6 examinados.

Guía 2

a) Calcule: i) $P(X=1)$ ii) $P(X \geq 4)$ iii) $P(1 \leq X \leq 3)$

b) ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

Distribución hipergeométrica:

$$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$N=12$

$K=4$

$n=6$

X = numero defectuoso de la muestra.

$$a)\ P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{12-4}{6-1}}{\binom{12}{6}} = \frac{4 \cdot 56}{924} = 0{,}\widehat{24} \approx 24{,}25\%$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} P(X=i)$$

$$= 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$1 - \left(\frac{\binom{4}{0}\binom{8}{6} + 224 + \binom{4}{2}\binom{8}{4} + \binom{4}{3}\binom{8}{3}}{924}\right) = 1 - \left(\frac{28 + 224 + 420 + 224}{924}\right)$$

$$= 1 - 0{,}\widehat{969} = 0{,}\widehat{30} \approx 30{,}3\%$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = 2 \cdot \frac{224}{924} + \frac{420}{924} = 0{,}\widehat{9393}$$

b) $E(x) = \frac{n r_1}{r} = \frac{n \cdot k}{N} = \frac{6 \cdot 4}{12} = 2$

$Var(x) = \frac{r_1 n (r-r_1)(r-n)}{r^2 (r-1)} = \frac{4 \cdot 6 (12-4)(12-6)}{12^2 \cdot 11} = \frac{1152}{1584} = 0,\overline{72}$

b) $E(X) = \sum_{j=0}^{4} j\, P(X=j) = \sum_{j=0}^{4} j \cdot \frac{\binom{4}{j}\binom{8}{6-j}}{924} = 2$

$E(X^2) = \sum_{j=0}^{4} j^2 P(X=j) = \frac{52}{11} = 4,\overline{72}$

$V(X) = 4,\overline{72} - 2^2 = 0,\overline{72}$

*** 16.** Se supone que el número de defectos Y (por cm) de la producción diaria de cierto tipo de soga tiene una distribución de Poisson con una media de 2. Cuando se vende la soga, la ganancia por cm está dada por $X = 50 - 2Y - Y^2$. Dé la ganancia esperada por cm.

Guía 2

$E(Y) = 2 = \lambda = Var(Y)$

$X = 50 - 2Y - Y^2$

$E(Y^2) = Var(Y) + [E(Y)]^2 = 2 + 2^2 = 6$

$E(50 - 2Y - Y^2) = 50 - 2E(Y) - E(Y^2)$

$= 50 - 2 \cdot 2 - E(Y^2)$

$= 50 - 4 - 6 = 40$

► 4. Considere un grupo de cinco personas, A, B, C, D y E, que son potenciales donantes de sangre. Se necesita un donante de sangre tipo $O+$ y, de estas personas, sólo A y B tienen dicho grupo sanguíneo. Un laboratorio tomará una muestra de sangre de cada persona y determinará en orden aleatorio el grupo sanguíneo, hasta encontrar la primera muestra $O+$. Considere la variable aleatoria X, que cuenta el número de determinaciones necesarias.

a) Encuentre la función de probabilidad de masa de X.

b) Usando la función de probabilidad de masa obtenida en el ítem a), calcule la probabilidad de que el grupo sanguíneo $O+$ no sea encontrado en las dos primeras determinaciones.

Guía 2

a) $A, B = O+ \qquad C, D, E \neq O+$

$P_{exito} = \frac{2}{5} \qquad P_{fracaso} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(X=0) = 0 \qquad P(X=1) = P(A_1 \cup B_1) = \frac{2}{5} = 0,4$

$P(X=2) = P(\overline{A_1 \cup B_1}) \cdot P(A_2 \cup B_2 \mid \overline{A_1 \cup B_1}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$

$P(X=3) = P(A_3 \cup B_3) = P(\overline{A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2}) \cdot P(A_3 \cup B_3 \mid \overline{A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2})$

$= (1 - 0,4 - 0,3) \cdot \frac{2}{3} = 0,2$

$P(X=4) = (1 - 0,4 - 0,3 - 0,2) \cdot 1 = 0,1 \qquad P(5) = 0$

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0	0.4	0.3	0.2	0.1	0

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0 + 0,4 + 0,3) = 1 - 0,7 = 0,3$

► **8.** **a)** Demuestre que si X tiene una distribución normal con parámetros μ y σ^2, entonces $Y = aX + b$ con $a \neq 0$, también tiene una distribución normal. ¿Cuáles son los parámetros de la distribución de Y (es decir, $E(Y)$ y $V(Y)$)?

Guía 3

b) Si la temperatura medida en °C está normalmente distribuida con media 115 y desviación estándar 2, ¿qué se puede decir acerca de la distribución de la temperatura medida en °F?.

Ayuda: ¿Cómo se transforma de grados Celsius a Fahrenheit?

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) $E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

$E(Y) = aE(X) + b = a\mu + b$

$Var(Y) = a^2 Var(X) = a^2\sigma^2$

$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

$TC° \sim N(115, 2^2)$

$F(C): C \rightarrow F$

$F(C) = C \cdot 1,8 + 32$

$\Rightarrow TF \sim N(1,8 \cdot 115 + 32, 1,8^2 2^2)$

$N(239; 7,24)$

*** 18.** En una carrera de caballos participan 6 caballos numerados del 1 al 6. Todos los resultados posibles de la carrera son igualmente probables. Hacen podio los tres primeros caballos en terminar la carrera.

Guía 1

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el caballo con el número 2 salga en primer lugar?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el caballo con el número 1 haga podio?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos ítems anteriores?.

d) Una persona hace apuestas sobre el resultado de la carrera. Apuesta que los caballos numerados con 1, 2 y 3 hacen podio. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona gane su apuesta?.

$\frac{1}{6}$

a) $\frac{1}{6} \simeq 0,1667$

b) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$

$2 \cdot 4$

$\frac{8}{120} \to 5!$

c) $P(\{2 \text{ gana}\} \cup \{1 \text{ hace podio}\})$

$= P(\{2 \text{ gana}\}) + P(\{1 \text{ hace podio}\}) - P(\{2 \text{ gana}\} \cap \{1 \text{ hace podio}\})$

$= P(\{2\}) + P(\{1\}) - P(\{1\} | \{2\} \cdot \{2\})$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{5} = 0,6.$

d) Total de formas de que hagan podio $3! = 6$

Número total de comb. para los 3 primeros lugares $\frac{6!}{3!} = 120$

$P(1, 2 \text{ y } 3 \text{ podio}) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 0,05$

▶ 14. Suponga que X= número de tornados observados, en una región particular, durante un período de un año tiene distribución de Poisson con $\lambda = 8$.

Guía 2

a) Calcule: $P(X \leq 5)$, $P(6 \leq X \leq 9)$, $P(10 \leq X)$ y $P(X \geq 1)$.

b) ¿Cuántos tornados se puede esperar que se observen durante un período de un año? ¿Cuál es la desviación estándar de X?

$X \sim \text{Poisson}(8)$

a) $P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^{5} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-8} \sum_{i=0}^{5} \frac{8^i}{i!}$

$= \frac{1}{e^8} \cdot \left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!} + \frac{8^4}{4!} + \frac{8^5}{5!}\right) = \frac{1}{e^8}\left(1 + 8 + 32 + 85,\overline{33} + 170,67 + 273,067\right)$

$\simeq \frac{1}{e^8}\left(570,067\right) \simeq \frac{570,067}{e^8} \simeq \frac{570,067}{2980,95} \simeq 0,19 \simeq 19\%$

$$P(6 \leq X \leq 9) = e^{-8} \sum_{i=6}^{9} \frac{8^i}{i!} \approx e^{-8}(1566{,}16) \approx \frac{1566{,}16}{2980{,}95} \approx 0{,}525$$

$$P(X \geq 10)$$

$$= 1 - P(X < 10) = 1 - \left(P(X \leq 5) + P(6 \leq X \leq 9) \cancel{+ P(X = 10)}\right)$$

$$= 1 - \left(0{,}19 + 0{,}525 \cancel{+ \frac{295{,}89}{2980{,}95}}\right)$$

$$= 1 - \left(0{,}19 + 0{,}525 \cancel{+ 0{,}099}\right)$$

$$\cancel{= 1 - 0{,}814 \approx 0{,}186}$$

$$= 1 - (0{,}19 + 0{,}525) \approx 0{,}285$$

▶ **10.** La dureza Rockwell de un metal se determina al golpear con un punto acerado la superficie del metal y después medir la profundidad de penetración del punto. Suponga que la dureza Rockwell de cierta aleación está normalmente distribuida con media de 70 y desviación estándar de 3.

Guía 3

a) Un especimen es aceptable si su dureza está entre 67 y 75. ¿Cuál es la probabilidad de que un especimen seleccionado al azar tenga una dureza aceptable?
b) Si la escala aceptable de dureza es $(70 - c, 70 + c)$, ¿para qué valor de c tendría una dureza aceptable el 95 % de todos los especímenes?
c) Si la escala aceptable es como en el inciso a) y la dureza de diez especímenes seleccionados al azar se determina independientemente, ¿cuál es el número esperado de especímenes aceptables entre los diez?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo ocho de diez especímenes seleccionados independientemente tengan una dureza menor de 73,84?

$$X \sim \mathcal{N}(70, 3^2)$$

a) $P(67 \leq X \leq 75)$ estandaricemos $Z \geq \frac{67-70}{3} = -1$

$P(-1 \leq Z \leq \quad)$ $Z \leq \frac{75-70}{3} = \frac{5}{3}$

$$= P(Z \leq 1{,}67) - (1 - P(Z \leq 1))$$

$$= 0{,}9525 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}7938 = 79{,}38\,\%$$

b) $P(70 - c \leq X \leq 70 + c)$ $Z \geq \frac{70 - c - 70}{3} = -\frac{c}{3}$

$P\left(-\frac{c}{3} \leq X \leq \frac{c}{3}\right) = 2P\left(\frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}95$ $Z \leq \frac{70 + c - 70}{3} = \frac{c}{3}$

$$= P\left(\frac{c}{3}\right) = \frac{1{,}95}{2} \Rightarrow P\left(\frac{c}{3}\right) = 0{,}975$$

$$\frac{c}{3} = 1{,}96$$

$$c = 1{,}96 \cdot 3$$

$$c = 5{,}88$$

c) $B(10, 79{,}38\%)$

$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}7938 = 7{,}938$

d) $P(X \leq 73{,}84)$ $\qquad Z \leq \frac{73{,}84 - 70}{3} = \frac{3{,}84}{3}$

$P(Z \leq 1{,}28) = 0{,}8997$

$\Rightarrow B(10, 0{,}8997)$

$P(X \leq 8) = 1 - (P(X=9) + P(X=10))$

$= 1 - \left(\binom{10}{9} 0{,}8997^9 (0{,}1003)^1 + \binom{10}{10} 0{,}8997^{10} \right)$

$= 1 - (10 \cdot 0{,}0387 + 0{,}3475) = 1 - 0{,}7345 = 0{,}2655$

▶ **3.** Sean X, Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

Guía 4

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \text{ y } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de k?
b)Calcular $P(X+Y<5)$
***c)** ¿Cuál es la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre las variables aleatorias sea a lo sumo 2?
d) Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y. ¿Son estas variables independientes? Justifique su respuesta.
e) Calcular $Cov(X,Y)$.

a) $F_{xy}(x,y) = \int_0^{10}\int_0^{10} k(x+y)\,dy\,dx = k\int_0^{10}\int_0^{10} x+y \; dy\,dx$

$= k\int_0^{10}\left(\int_0^{10} x\,dy + \int_0^{10} y\,dy\right)dx = k\int_0^{10}\left(xy\Big|_0^{10} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{10}\right)dx$

$= k\int_0^{10}(10x - 0x + 50 - 0)\,dx = k\int_0^{10} 10x + 50\,dx$

$= k\left(5x^2\Big|_0^{10} + 50x\Big|_0^{10}\right) = k(500 - 0 + 500 - 0) = k \cdot 1000 = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{1000}$

b) $P(X+Y<5) = \int_0^5 \int_0^{5-y} \frac{(x+y)}{1000}\, dx\, dy$

$$\int_0^5 \frac{1}{1000} \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_0^{5-y} dy = \int_0^5 \frac{1}{1000} \left[\frac{(5-y)^2}{2} + y(5-y) - \frac{0}{2} - y.0\right] dy$$

$$= \int_0^5 \frac{1}{1000} \left(\frac{(5-y)^2}{2} + 5y - y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{1000} \int_0^5 \frac{(5-y)^2}{2} dy + \int_0^5 5y\, dy - \int_0^5 y^2\, dy$$

$$= \frac{1}{1000} \left(\frac{1}{2} \int_0^5 25 - 10y + y^2\, dy + \int_0^5 5y\, dy - \int_0^5 y^2\, dy\right)$$

$$= \frac{1}{1000} \left(\frac{1}{2} \int_0^5 25\, dy - 10 \int_0^5 y\, dy + \int_0^5 y^2 + \int_0^5 5y\, dy - \int_0^5 y^2\, dy\right)$$

$$= \frac{1}{1000} \left(\frac{1}{2}\left([25y]_0^5 - 10\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^5 + \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^5\right) + 5\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^5 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^5\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(125 - 125 + \frac{125}{3}\right) + \frac{125}{2} - \frac{125}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\left(\frac{125}{2} - \frac{125}{2} + \frac{125}{6}\right) + \frac{125.3 - 125.2}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\frac{125}{6} + \frac{125}{6}\right) = \frac{1}{1000}\left(\frac{250}{6}\right) = \frac{250}{6000} = \boxed{\frac{1}{24} \approx 0{,}04167}$$

c) $P(|X-Y| \le 2) = P(-2 \le X - Y \le 2)$

$Y - 2 \le X \le Y + 2$

$6/25 \qquad 13/25$

$$P(|X-Y| \le 2) = \int_0^2 \int_0^{y+2} f(x,y)\, dx\, dy + \int_2^8 \int_{y-2}^{y+2} f(x,y)\, dx\, dy + \int_8^{10} \int_{y-2}^{10} f(x,y)\, dx\, dy$$

Calculemos la primera integral

$$\frac{1}{1000}\int_0^2\int_0^{y+2} x+y \, dx\, dy = \frac{1}{1000}\int_0^2 \left[\frac{x^3}{2}\Big|_0^{y+2} + yx\Big|_0^{y+2} \right] dy$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^2 \frac{(y+2)^2}{2} + y^2 + 2y \, dy = \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2}\left(\left[4y\Big|_0^2 + 2y^2\Big|_0^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_0^2\right) + \frac{y^3}{3}\Big|_0^2\right.$$

$$\left. + y^2\Big|_0^2 \right) = \frac{1}{1000}\left(4 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{16}{1000} = \frac{2}{125}$$

... hacer las otras integrales

$$\text{———} = 0{,}36 = \frac{2}{125} + \frac{6}{25} + \frac{13}{125} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

d) $f_x(x) = \int_0^{10} \frac{1}{1000}(x+y)\, dy = \frac{1}{1000}\left(\int_0^{10} x \, dy + \int_0^{10} y \, dy \right)$

$$= \frac{1}{1000}\left(xy\Big|_0^{10} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{10} \right) = \frac{1}{1000}\left(10x + 50 \right) = \frac{10x+50}{1000}$$

La de $f_y(y)$ es análoga $= \frac{10y+50}{1000}$

Para ver si son independientes $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

$$\frac{x+y}{1000} = \frac{10x+50+10y+50}{1000} = \frac{10(x+y+10)}{1000} = \frac{x+y+10}{100}$$

claramente no son iguales $\therefore$ no son independientes

e) $Cov(xy) = E(xy) - E(x)E(y)$

$$E(x) = \int_0^{10} x f_x(x)\, dx = \frac{1}{1000}\int_0^{10} x(10x+50)\, dx = \frac{1}{1000}\int_0^{10} 10x^2 + 50x$$

$$= \frac{1}{1000}\left(10\int_0^{10} x^2\, dx + 50\int_0^{10} x \, dx \right) = \frac{1}{1000}\left(10\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} + 50\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} \right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\frac{10000}{3} + \frac{5000}{2} \right) = \frac{10}{3} + \frac{5}{2} = 5{,}8\overline{3}$$

$E(y)$ es análoga.

$$E(XY) = \frac{1}{1000}\int_0^{10}\int_0^{10} xy(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^{10}\int_0^{10} x^2y + xy^2\,dx\,dy =$$

$$\frac{1}{1000}\int_0^{10}\left(\int_0^{10} x^2y\,dx + \int_0^{10} xy^2\,dx\right)dy$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^{10}\left(\left[\frac{x^3y}{3}\right]_0^{10} + \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{10}\right)dy$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^{10}\frac{1000y}{3} + 50y^2\,dy$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\frac{1000}{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{10} + 50\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{10}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{1000}}\left(\frac{1\cancel{000}}{3}\cdot\frac{100}{2} + \frac{50\cdot 10\cancel{00}}{3}\right)$$

$$= \frac{100}{6} + \frac{50}{3} = 33{,}33$$

$$\Rightarrow Cov(XY) = 33{,}33 - 5{,}83^2 = -0{,}6589$$

tienen una relación negativa