▶ 1. La biblioteca de una universidad tiene cinco ejemplares de un cierto texto en reserva. Dos ejemplares (1 y 2) son primeras impresiones y los otros tres (3, 4 y 5) son segundas impresiones. Un estudiante examina estos libros en orden aleatorio, deteniéndose sólo cuando selecciona una segunda impresión.

a) Hacer una lista de todos los resultados posibles.
b) Sea el evento A: sólo un libro es examinado. ¿Cuáles resultados están en A?.
c) Sea el evento B: el libro 5 es seleccionado. ¿Cuáles resultados están en B?.
d) Sea el evento C: el libro 1 no se examina. ¿Cuáles resultados están en C?
e) Expresar $A \cap B$, $A \cup B$ y $\overline{(B \cap C)}$.

Primeras ediciones $\{1,2\}$
segundas ediciones $\{3,4,5\}$

a) $\{(3),(4),(5),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(2,1,3),(2,1,4),(2,1,5)\}$

b) $A = \{(3),(4),(5)\}$

c) $B = \{(5),(1,5),(2,5),(1,2,5),(2,1,5)\}$

d) $C = \{(3)(4)(5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

e) $A \cap B = \{(5)\}$

$A \cup B = \{(3)(4)(5),(1,5),(2,5),(1,2,5),(2,1,5)\}$

▶ 2. Demostrar que si un evento A está contenido en otro B, entonces $P(B-A) = P(B) - P(A)$ y $P(A) \leq P(B)$. En general, dados dos eventos A y B, ¿qué relación existe entre $P(A)$, $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$?.

Suponemos que $A \subseteq B$ por lo tanto todo elemento de A está en B

Veamos que $P(B-A) = P(B) - P(A)$

$B-A$ son los elementos de B que no están en A.

Como $A \subseteq B$, el conjunto B puede dividirse en dos partes no superpuestas

$B = A + (B-A)$

Por la propiedad aditiva de la probabilidad, tenemos que:

$P(B) = P(A) + P(B-A)$

que reordenando

$P(B-A) = P(B) - P(A)$

Ahora veamos $P(A) \leq P(B)$

Como $A \subseteq B$ la probabilidad de A no puede ser mayor a la de B.

$P(B) = P(A) + P(B-A) \geq P(A)$

luego $P(B) \geq P(A)$

► **3.** Una empresa de consultoría de computadoras ha licitado en tres proyectos. Sea A_i ={proyecto i otorgado}, para $i = 1, 2, 3$, y supongamos que $P(A_1) = 0{,}22$, $P(A_2) = 0{,}25$ y $P(A_3) = 0{,}28$, $P(A_1 \cap A_2) = 0{,}11$, $P(A_1 \cap A_3) = 0{,}05$, $P(A_2 \cap A_3) = 0{,}07$ y $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0{,}01$. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

a) $A_1 \cup A_2$
b) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ (*Sugerencia:* $\overline{(A_1 \cup A_2)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$)
c) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
d) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
***e)** $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$
***f)** $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cup A_3$

a) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$0{,}22 + 0{,}25 - 0{,}11 = 0{,}36$

b) $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = P(\Omega) - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$0{,}22 + 0{,}25 + 0{,}28 - 0{,}11 - 0{,}05 - 0{,}07 + 0{,}01 = 0{,}53$

d) $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$

► **4.** Cinco empresas $F_1, F_2, ..., F_5$ hacen propuestas con respecto a tres contratos separados, C_1, C_2 y C_3. Una empresa sólo puede obtener a lo sumo un contrato. Los contratos son diferentes, de tal forma que la asignación de C_1 a F_1 se debe diferenciar de la asignación de C_2 a F_1.

a) ¿Cuántos puntos muestrales hay en total en este experimento que trata de la asignación de los contratos a las empresas? (No hay necesidad de listar todos los puntos).

b) Encuentre la probabilidad de que se conceda un contrato a la empresa F_3, bajo el supuesto de que los puntos muestrales son equiprobables.

a) Tenemos F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 y C_1, C_2, C_3. Cada empresa está limitada a a lo sumo 1 contrato y no se pueden repetir.
Es decir si F_i compiten por C_1 hay 5 candidatos, luego para C_2 hay 4 y para C_3 hay 3.
∴ El total de puntos muestrales es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 = \frac{5!}{2!}$

b) F_3 puede recibir C_1, C_2, C_3 o ninguno.
En caso de que reciba C_1, C_2 y C_3 se distribuiran entre 4 y 3 candidatos
osea $4 \cdot 3 = 12$
y lo mismo pasa para el caso C_2 y C_3

$\Rightarrow$ $4 \cdot 3 = 12$
$4 \cdot 3 = 12$
$4 \cdot 3 = 12$

Sumando los tres casos nos da 36

Ahora $P(F_3 \text{ recibiendo un contrato}) = \frac{36}{60} = 0.6$ (casos totales de puntos muestrales)

5. Al poco tiempo de ser puestos en servicios, algunos colectivos fabricados por cierta compañía presentan grietas en su parte inferior. Una ciudad tiene 25 de estos colectivos y han aparecido grietas en 8 de ellos. Se seleccionan aleatoriamente 5 colectivos para hacer una inspección.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 4 de los 5 colectivos tengan grietas?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 de los seleccionados tengan grietas?.

a) Colectivos con grietas $\frac{8}{25}$

Se seleccionan 5 aleatoriamente suponiendo que no se repiten

=> Para que 4 de los 5 tengan grietas hay una probabilidad de:

Número de formas de seleccionar 4 colectivos con grietas de los 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = \frac{8.7.6.5}{24} = 70 = \frac{8!}{4!(8-4)!}$$

Número de - - - - - — 1 colectivo de los 17 sin grietas

$$\binom{17}{1} = \frac{17}{1} = 17 = \frac{17!}{1!(17-1)!}$$

Número de formas de seleccionar 5 colectivos de 25

$$\binom{25}{5} = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25.24.23.22.21}{5!} = 53130$$

La probabilidad es entonces:

$$P(X=4) = \frac{70.17}{53130} = \frac{1190}{53130} \approx 0{,}0224$$

b)

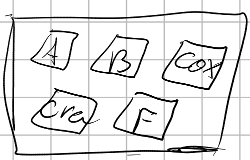
$$\frac{\binom{8}{5}\binom{17}{6}}{\binom{25}{5}} = \frac{56.1}{53130} \approx 0.0011$$

Sumamos las probabilidades

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = 0{,}0224 + 0{,}0011 = 0{,}0235$$

6. Un departamento académico con cinco miembros de la facultad: Anderson, Box, Cox, Cramer y Fisher, debe seleccionar a dos de sus miembros para prestar servicio en una comisión de revisión de personal. Debido a que el trabajo será lento, nadie desea prestar ese servicio, así que deciden que el representante será seleccionado por el método de colocar cinco boletas de papel en una caja, mezclarlas y seleccionar dos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Anderson y Box sean seleccionados?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione por lo menos a uno de los dos miembros cuyos apellidos comienzan con C?.
c) Si los cinco miembros de la facultad han dado clase en la universidad durante 3, 6, 7, 10 y 14 años respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que entre los dos representantes seleccionados tengan por lo menos 15 años de experiencia en la enseñanza?.



a) Cada individuo tiene $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ chances.

Supongamos que voy a sacar la primera boleta. Puedo sacar a Anderson o Box si me es favorable, es decir, tengo $\frac{2}{5}$ chances. Ahora al sacar la segunda boleta tengo $\frac{1}{4}$ chances.

$\therefore \quad \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0.1$

b) Veamos los casos contrarios: $\{(A,B),(A,F),(B,F)\}$

son 3 combinaciones de 10 casos posibles.

$P(C) = 1 - P(C)^c$

$= 1 - 0,3$

$= 0,7$

c) 3, 6, 7, 10 y 14

Veamos los casos negativos.

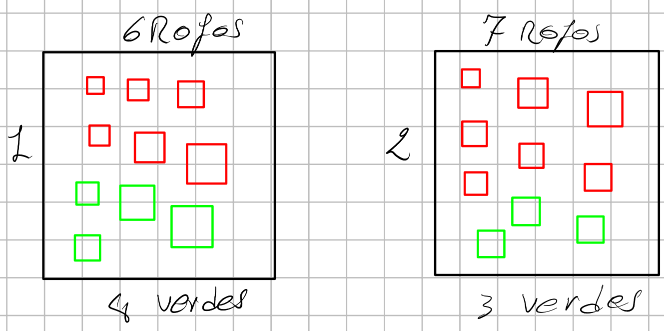
$3 + 6 = 9$
$3 + 7 = 10$
$3 + 10 = 13$
$6 + 7 = 13$

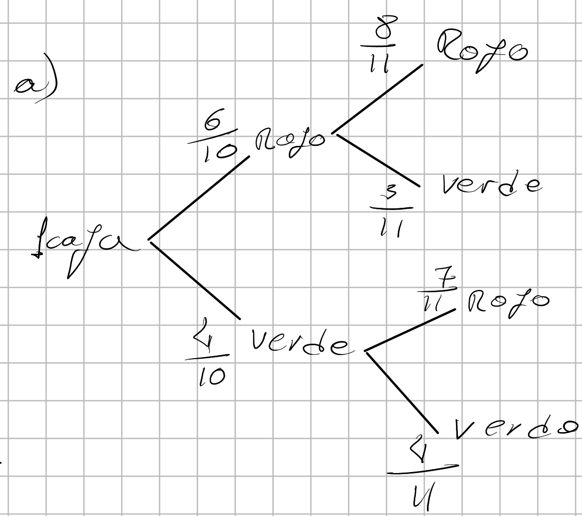
$\therefore \quad P(15) = 1 - P(15)^c$

$= 1 - 0,4 = 0,6$

Probabilidad condicional

▶ **8.** Una caja contiene 6 cubos rojos y 4 verdes y una segunda caja contiene 7 cubos rojos y 3 verdes. Se elige al azar un cubo de la primera caja y se pone en la segunda caja. Luego se selecciona al azar un cubo de la segunda caja y se pone en la primera caja.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione un cubo rojo de la primera caja y un cubo rojo de la segunda caja?.
b) Al finalizar el proceso de selección ¿cuál es la probabilidad de que los números de cubos rojos y verdes de la primera caja sean idénticos a los que habían al comienzo?.





a)
Viendo el grafico las probabilidades son:

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{11}=\frac{48}{110}\approx 0,436$$

b) En ese caso hay que seguir los caminos todos Rojo + todos verde

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{11}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{11}=\frac{48}{110}+\frac{16}{110}=\frac{64}{110}\approx 0,58$$

▶ **9.** Una gran tienda de departamentos vende camisas deportivas en tres talles (pequeño, mediano y grande), en tres modelos (a cuadros, estampados y de franjas) y con dos largos de mangas (corta y larga). Las siguientes tablas presentan las proporciones de camisas vendidas que caben en varias combinaciones de categorías.

Manga corta					
		Modelo			
Talle	Cuadros	Estampada	Franjas		
Pequeño	0,04	0,02	0,05	= 0,11	= 0,56
Mediano	0,08	0,07	0,12	= 0,27	
Grande	0,03	0,07	0,08	= 0,18	
Manga larga					
		Modelo			
Talle	Cuadros	Estampada	Franjas		
Pequeño	0,03	0,02	0,03		
Mediano	0,10	0,05	0,07	= 0,22	
Grande	0,04	0,02	0,08		

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea mediana, de manga larga y estampada?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea mediana y estampada?.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea de manga corta?. ¿Y de manga larga?.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el talle de la camisa que se venda sea mediano?. ¿Y que el modelo sea estampado?.
e) Dado que la camisa que se vendió era a cuadros y de manga corta, ¿cuál es la probabilidad de que su talle sea mediano?.
f) Dado que la camisa que se vendió era a cuadros y mediana, ¿cuál es la probabilidad de que sea de manga corta? ¿Y de manga larga?.

a) $P(M \cap ML \cap E) = 0,05$

b) $P(M \cap E) = 0,05 + 0,07 = 0,12$

c) $P(MC) = 0,56$
$P(ML) = 1 - 0,56 = 0,44$

d) $P(M) = 0,49$
$P(M \cap E) = 0,12$

e) $P(M / C \cap MC) =$