Ejercicio 6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $U[0;\theta]$; con $\theta > 0$.

a) Encontrar el estimador por el método de los momentos $(\hat{\theta}_1)$ para θ.

b) Determinar si es insesgado el estimador $\hat{\theta}_1$ y calcular su varianza.

c) Sea $\hat{\theta}_2 = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$, el estimador de máxima verosimilitud para θ, cuya función densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} n\frac{x^{n-1}}{\theta^n} & , \quad \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & , \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Probar que este estimador no es insesgado para θ.

Ayuda: Si X se distribuye $U[a;b]$, entonces $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribución uniforme.

a) $E(\bar{x}) = \dfrac{\theta}{2}$

se puede explicar mejor

$\Rightarrow E(\hat{\theta}) = \theta$

$\therefore \hat{\theta} = 2\bar{X}$ ✓

$E(2\bar{X}) = 2 \cdot E(\bar{X}) = 2 \cdot \dfrac{\theta}{2} = \theta$

b) confirma que es insesgado

$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}(2\bar{X}) = 2^2 \, \mathrm{var}(\bar{x})$

calculemos $\mathrm{var}(\bar{x})$

$\mathrm{var}(\bar{x}) = \dfrac{\mathrm{var}(x)}{n} = \dfrac{\theta^2/12}{n} = \dfrac{\theta^2}{12n}$

$\Rightarrow 4 \cdot \mathrm{var}(\bar{x}) = 4 \cdot \dfrac{\theta^2}{12n} = \dfrac{\theta^2}{3n}$

$\therefore \mathrm{var}(\hat{\theta}) = \dfrac{\theta^2}{3n}$

c) Función verosimilitud para θ

• La función densidad para cada X_i es

$f(x;\theta) = n \dfrac{x^{n-1}}{\theta^n}$

Calculemos la esperanza

$$E(\hat{\theta}_2) = \int_0^\theta x \, n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} \, dx = \int_0^\theta n \frac{x^n}{\theta^n} \, dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n \, dx = \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^\theta$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{\theta^{n+1}}{n+1} - 0 \right] = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$$

$\therefore E(\hat{\theta}_2) = \dfrac{n}{n+1} \theta \neq \theta$

$\Rightarrow$ es sesgado, pero para valores muy grandes de n se aproxima a θ

es decir:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \theta = \theta$$

Por lo que se podría decir que en casos en los que la muestra sea muy grande se interpreta como estimador insesgado.