▶ **1.** Cierto supermercado tiene una caja rápida y una común. Sea X_1 el numero de clientes que están en espera en la caja común en un momento particular del día, y X_2 el numero de clientes que están en espera en la caja rápida al mismo tiempo. Si la función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 esta dada por:

caja rápida

Caja común

X_1/X_2	0	1	2	3
0	0,08	0,07	0,04	0,00
1	0,06	0,15	0,05	0,04
2	0,05	0,04	0,10	0,06
3	0,00	0,03	0,04	0,07
4	0,00	0,01	0,05	0,06

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada caja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente el mismo número de clientes en las dos líneas de espera?
c) Sea A el evento de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra. ¿Cuál es la probabilidad del evento A?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea exactamente cuatro? ¿Y por lo menos cuatro?
e) Hallar las funciones de probabilidad marginales de X_1 y X_2. ¿Son estas variables independientes? Justifique su respuesta.

$P(X_1=1, X_2=1) = 0,15 = 15\%$

Leí mal.

a) $P(X_1+X_2=1) = P(X_1=0, X_2=1) + P(X_1=1, X_2=0)$

$= \big(P(X_1=0)\cap P(X_2=1)\big) + \big(P(X_1=1)\cap P(X_2=0)\big)$

$= 0,08 + 0,06 = 0,14 = 14\%$

b) $P(X_1-X_2=0) = P(X_1=X_2)$

$= \sum_{i=0}^{3} P(X_1=i, X_2=i)$

$= 0,08 + 0,15 + 0,10 + 0,7 = 0,40 = 40\%$

c) A = "Por lo menos 2 clientes más en una caja que en la otra"

$P(X_1 \geq X_2+2) + P(X_2 \geq X_1+2)$

$P(X_1=0, X_2=2) + P(X_1=1, X_2=3) +$

$P(X_1=2, X_2=0) + P(X_1=3, X_2=1) + P(X_1=4, X_2=2)$

$= 0,07 + 0,04 + 0,05 + 0,03 + 0,05 = 0,24 = 24\%$

d) $P(X_1+X_2=4) = P(X_1=1, X_2=3) + P(X_1=2, X_2=2)$

$+ P(X_1=3, X_2=1) + P(X_1=4, X_2=0)$

$= 0,04 + 0,10 + 0,03 + 0,00 = 0,17 = 17\%$

$P(X_1+X_2 \geq 4) = \underbrace{P(X_1+X_2=4)}_{0,12} + P(X_1+X_2 \geq 5)$

$+ P(X_1=4) - P(X_1=4, X_2=0)$

$+ P(X_2=3) - P(X_1=0, X_2=3) - P(X_1=1, X_2=3)$

$= 0,12 + 0,12 + 0,19 = 0,43 = 43\%$

→ GPT dice 0,47 verificar

e) $P(x_1=0) = 0{,}19$ $\qquad$ $P(x_2=0) = 0{,}19$

$P(x_1=1) = 0{,}30$ $\qquad$ $P(x_2=1) = 0{,}30$

$P(x_1=2) = 0{,}25$ $\qquad$ $P(x_2=2) = 0{,}28$

$P(x_1=3) = 0{,}14$ $\qquad$ $P(x_2=3) = 0{,}23$

$P(x_1=4) = 0{,}12$

no son independientes pues por ejemplo $P(x_1=0).P(x_2=0) = 0{,}19 . 0{,}19 \approx 0{,}361$ que no es igual a $P(x_1=0, x_2=0) = 0{,}08$.

▶ **2.** Dada la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \text{ y } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

con k una constante positiva

a) Determinar el valor de la constante k para que f sea fdpc de (X,Y).

b) Hallar las funciones densidad de probabilidad marginal para X e Y respectivamente.

c) Hallar la esperanza y varianza de X y de Y .

d) ¿Son independientes X e Y ? Justifique su respuesta.

a) $0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad x+y \leq 1 \Rightarrow y \leq 1-x$

se tiene que cumplir que

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} kxy \, dy\, dx = 1$$

$$k \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} y \, dy \right) dx = 1$$

$$k \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right) dx = 1$$

$$k \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} \, dx = 1$$

$$\frac{k}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = 1$$

$$\frac{k}{2} \int_0^1 x \, (1-2x+x^2) \, dx = 1$$

$$\frac{k}{2} \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 \, dx = 1$$

$$\frac{k}{2} \left(\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 2x^2 dx + \int_0^1 x^3 \, dx \right) = 1$$

$$\frac{k}{2} \left(\left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) - 2\left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right) + \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) \right) = 1$$

$$\frac{k}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 1$$

$$\frac{k}{4} - \frac{k}{3} + \frac{k}{8} = 1$$

$$\frac{24k - 32k + 12k}{96} = 1$$

$\downarrow$

$\frac{4k}{96} = 1$

$\frac{k}{24} = 1 \Rightarrow \boxed{k = 24}$

b) Las funciones de densidad de probabilidad marginal se obtienen integrando la función conjunta sobre la otra variable.

La marginal de X, $f_X(x)$ es:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x\int_0^{1-x} y\,dy = 24x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = 24x\frac{(1-x)^2}{2}$$

$$= 12x(1-x)^2$$

La marginal de Y, $f_Y(y)$ es:

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 24xy\,dx = 24y\int_0^{1-y} x\,dx = 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = 24y\frac{(1-y)^2}{2} = 12y(1-y)^2$$

c)

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,12x(1-x)^2 = 12\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx$$

$$= 12\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = 12\int_0^1 (x-x^2)^2\,dx = 12\int_0^1 x^2-2x^3+x^4\,dx$$

$$= 12\left(\int_0^1 x^2\,dx - 2\int_0^1 x^3\,dx + \int_0^1 x^4\right)$$

$$= 12\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{12}{3}-\frac{12}{2}+\frac{12}{5} = \cancel{4}-\cancel{6}+\cancel{2}+\frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

Para Y es todo igual porque es simétrica

Calculemos $E(x^2)$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2\,12x(1-x)^2\,dx = 12\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx$$

$$= 12\int_0^1 x^3(1-2x+x^2)\,dx = 12\int_0^1 x^3-2x^4+x^5\,dx$$

$$\ldots = 12\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right) = 3-\frac{24}{5}+2 = 5-\left(4+\frac{4}{5}\right) = 1-\frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$Var(X) = E(x^2)-[E(x)]^2 = \frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}-\frac{4}{25} = 0{,}04$$

Para Y todo lo mismo.

d) Para chequear si son independientes veamos.

$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$ es decir, si la función densidad conjunta es producto de sus marginales.

$$24xy = \left(12x(1-x)^2\right) \cdot \left(12y(1-y)^2\right)$$

$$24xy = 144xy(1-x)^2(1-y)^2$$

Claramente son distintas, por lo tanto NO son independientes.

▶ **3.** Sean X, Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \text{ y } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Chequear

a) ¿Cuál es el valor de k?

b) Calcular $P(X+Y<5)$

***c)** ¿Cuál es la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre las variables aleatorias sea a lo sumo 2? 0,4?

d) Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y. ¿Son estas variables independientes? Justifique su respuesta.

e) Calcular $Cov(X,Y)$.

a) $$\int_0^{10}\int_0^{10} k(x+y)\,dy\,dx = \int_0^{10} k\left(\int_0^{10} x+y\,dy\right)dx = \int_0^{10} k\left(\int_0^{10} x\,dy + \int_0^{10} y\,dy\right)dx$$

$$\int_0^{10} k\left(xy\Big|_0^{10} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{10}\right)dx = \int_0^{10} k\,(10x+50)\,dx$$

$$= k\int_0^{10} 10x+50\,dx = k\left(5x^2\Big|_0^{10} + 50x\Big|_0^{10}\right) = k(500+500) = k1000 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{1000}}$$

b) $P(X+Y<5)$

$0 \leq x \leq 10 \quad 0 \leq y \leq 10 \quad x+y<5 \Rightarrow x<5-y \Leftrightarrow y<5-x$

$$\int_0^5\int_0^{5-x} \frac{1}{1000}(x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{1000}\int_0^5\left(\int_0^{5-x} x\,dy + \int_0^{5-x} y\,dy\right)dx$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^5\left(xy\Big|_0^{5-x} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{5-x}\right)dx = \frac{1}{1000}\int_0^5\left(x(5-x) + \frac{(5-x)^2}{2}\right)dx$$

$$\frac{1}{1000}\int_0^5 5x - x^2 + \frac{25-10x+x^2}{2}\,dx = \frac{1}{1000}\int_0^5 \cancel{5x} - x^2 + \frac{25}{2} - \cancel{5x} + \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^5 -\frac{x^2}{2} + \frac{25}{2}\,dx = \frac{1}{1000}\left(-\frac{x^3}{6}\Big|_0^5 + \frac{25x}{2}\Big|_0^5\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left(-\frac{25}{6} + \frac{125}{2}\right) = \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{-50+750}{12}\right) = \frac{700}{12000} = \frac{7}{120} \approx 0,058$$

Hay algo mal.

c) $P(|X-Y| \leq 2) = P(-2 \leq X-Y \leq 2)$

$0 \leq y \leq 2 \iff 0 \leq x \leq y+2 \quad \wedge \quad 2 \leq y \leq 10 \iff y-2 \leq x \leq y+2$

$\Rightarrow$

$$P(|X-Y| \leq 2) = \int_0^2 \int_0^{y+2} \frac{x+y}{1000}\,dx\,dy + \int_2^{10} \int_{y-2}^{y+2} \frac{x+y}{1000}\,dx\,dy$$

$$= \frac{2}{125} + \frac{48}{125} = \frac{50}{125} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0,4$$

d) Marginal de X

$$f_X(x) = \int_0^{10} \frac{x+y}{1000}\,dy = \frac{1}{1000}\left(\int_0^{10} x\,dy + \int_0^{10} y\,dy\right) = \frac{1}{1000}\left(xy\Big|_0^{10} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{10}\right)$$

$$= \frac{1}{1000}\left(10x + 50\right) = \frac{10x+50}{1000}$$

$f_Y(y)$ es simétrica

e) Calcular $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Calculemos $E(X)$ que se obtiene con la marginal

$$E(X) = \int_0^{10} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^{10} x(10x+50) \cdot \frac{1}{1000}\,dx = \frac{1}{1000}\int_0^{10} 10x^2 + 50x\,dx$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\frac{10x^3}{3}\Big|_0^{10} + 25x^2\Big|_0^{10}\right) = \frac{1}{1000}\left(\frac{10000}{3} + 2500\right) = \frac{10}{3} + \frac{25}{10} = \frac{100+75}{30}$$

$$= \frac{175}{30} \approx 5,83\overline{3}$$

$E(Y)$ es igual

$$E(XY) = \int_0^{10}\int_0^{10} xy \frac{1}{1000}(x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{1000}\int_0^{10}\int_0^{10} x^2y + xy^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^{10}\left(\int_0^{10} x^2y\,dy + \int_0^{10} xy^2\,dy\right)dx = \frac{1}{1000}\int_0^{10}\left[x^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^{10} + x\frac{y^3}{3}\Big|_0^{10}\right]dx$$

$$= \frac{1}{1000}\int_0^{10} 50x^2 + 1000\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{1000}\left[50\frac{x^3}{3}\Big|_0^{10} + 1000\frac{x^2}{6}\Big|_0^{10}\right]$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\frac{50000}{3} + \frac{100\,000}{6}\right) = \frac{50}{3} + \frac{100}{6} = 33{,}\overline{33}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cov}(XY) = 33{,}\overline{33} - 5{,}8\overline{3}^2 \approx -0{,}70$$

Al ser negativa indica una relación inversa entre X e Y.

▶ **4.** Un profesor entrega un artículo largo a una mecanógrafa y otro más corto a otra. Sea X el número de errores de mecanografía del primer artículo e Y el número de errores de mecanografía del segundo artículo. Suponga que X e Y son variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente.

a) Dar la función de probabilidad de masa conjunta de (X, Y).
b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo se cometa un error entre los dos artículos?
c)* Obtener una expresión general para la probabilidad de que el número total de errores entre ambos artículos sea m, para m cualquier número entero no negativo.

a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ $\quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$

$$P(X=x, Y=y) = \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^x}{x!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^y}{y!} = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^x\lambda_2^y}{x!\,y!}$$

b) $P(X+Y\leq 1) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=0, Y=1)$

$$= e^{-\lambda_1-\lambda_2} + e^{-\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1 + e^{-\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2 = e^{-\lambda_1-\lambda_2}(1+\lambda_1+\lambda_2)$$

c) $$P(X+Y=m) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}$$

▶ **5.** Una persona tiene dos bombillas para una lámpara en particular. Sea X e Y el tiempo de duración, en miles de horas, para la primera y segunda bombilla respectivamente. Suponga que X e Y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1$.

a) Dar la función de densidad de probabilidad conjunta de (X, Y).
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bombillas duren a lo sumo mil horas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total entre las dos bombillas sea a lo sumo 2000 horas?

$\lambda = 1$

a) $\exp(\lambda)$

Dado que X e Y son independientes y ambas siguen una dist exponencial con $\lambda = 1$, la función de densidad de probabilidad conjunta de (X, Y) es el producto de las funciones de densidad marginal

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$f_{x,y}(x,y) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} \overset{\lambda=1}{=} e^{-x} \cdot e^{-y}$

$t = -x - y$

b) $P(X \leq 1, Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x-y}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 -e^{t}\, dt\, dy$

$= \int_0^1 \left(-\int_0^1 e^{t}\, dt\right) dy = \int_0^1 \left(-e^{-x-y}\Big|_0^1\right) dy = \int_0^1 -e^{-1-y} + e^{-y}\, dy$

$= \int_0^1 -e^{-1-y}\, dy + \int_0^1 e^{-y}\, dy = -\int_0^1 -e^{t}\, dt + \int_0^1 -e^{u}\, du$

$= e^{-1-y}\Big|_0^1 - e^{-y}\Big|_0^1 = e^{-2} - e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2} \approx 0{,}399$

c) $P(X + Y \leq 2) = \int_0^2 \int_0^{2-x} e^{-x-y}\, dy\, dx \;\cdots = -\frac{3}{e^2} + 1 \approx 0{,}594$

▶ **6.** Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con $X_i \sim B(n_i, p)$ para $i = 1, 2$, probar que $X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$. Ayuda: Puede utilizar la identidad de Vandermonde

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}.$$

$X_1 \sim B(n_1, p) \quad X_2 \sim B(n_2, p)$

$\Rightarrow$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dado que son independientes, la prob. conjunta $X_1 = k_1$ y $X_2 = k_2$ es el producto de sus funciones de masa individuales.

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = P(X_1 = k_1) \cdot P(X_2 = k_2)$$

Para probar la suma necesitamos encontrar la prob de que $X_1 + X_2 = k$. Esto implica sumar sobre todos los valores posibles k_1 y k_2 que satisfacen $k_1 + k_2 = k$

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{k_1=0}^{k} P(X_1 = k_1) \cdot P(X_2 = k - k_1)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{k} \binom{n_1}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1} \cdot \binom{n_2}{k-k_1} p^{k-k_1} (1-p)^{n_2-(k-k_1)}$$

Id vandermone

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}.$$

Luego con la identidad de Vandermonde:

$$P(X_1 + X_2 = k) = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{(n_1+n_2)-k}$$

$= X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$