PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1	2	3	$TotalA$	4	5	6	$TotalB$	$Total$

Apellido y Nombre: **Carrera:**

Justifique claramente todas sus respuestas.

PARTE A

Ejercicio 1.

I) Un grupo de 13 ratones fue sometido a un determinado estímulo. Después de cierto período de tiempo bajo estas condiciones, se les midió el peso de la glándula suprarrenal. Los datos obtenidos se presentan a continuación:

8,3 3,8 6,8 8,9 3,6 3,9 4,5 3,9 5,9 6,7 5,9 5,8 9,5

a) Calcular el promedio muestral, mediana muestral, el percentil muestral 25 %, la varianza muestral y el rango intercuartil para estos datos y clasificarlos como medida de posición o medida variabilidad.

b) ¿Hay datos atípicos o anómalos para estos datos?

II) En la fabricación de un artículo se puede presentar solamente dos tipos de defectos (A y B), el defecto tipo A ocurre con una probabilidad de 0.05 y el defecto tipo B con probabilidad de 0.08. Si se supone la independencia entre los dos tipos de defectos y se selecciona aleatoriamente un artículo, producido en esta fábrica:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que éste no sea defectuoso?

b) Suponiendo que el artículo sea defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el defecto A?.

Ejercicio 2. Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y & , \quad \text{si } 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le y \le 2 \\ 0 & , \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) Calcular $P(Y - X > 0)$.

b) Obtener las funciones marginales de X y de Y.

c) ¿Las variables X e Y son independientes? Justificar claramente su respuesta.

d) Dar el valor de la covarianza entre X e Y.

Ejercicio 3. Sean X e Y variables aleatorias que miden la resistencia a la tensión para varillas de alambre producidas por las fábricas A y B, respectivamente. Considere que X e Y tienen distribuciones normales con valores medios y desvíos estándar dados por 107,6 y 1,3 para la fábrica A, y de 109,6 y 2,0 para la fábrica B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia a la tensión para varillas de alambre producidas por la fábrica A se encuentre comprendida entre 103,5 y 108,8?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia a la tensión para varillas de alambre producidas por la fábrica A sea menor que la resistencia a la tensión para varillas de alambre producidas por la fábrica B?

c) Se tomaron muestras aleatorias de 10 varillas producidas por la fábrica A y 10 varillas producidas por la fábrica B.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 9 de las 10 varillas producidas por la fábrica A tengan una resistencia a la tensión comprendida entre 103,5 y 108,8? Justifique claramente su respuesta.

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de las resistencias a la tensión para varillas de alambre producidas por la fábrica A sea menor que el promedio de las resistencias a la tensión para varillas de alambre producidas por la fábrica B?

PARTE B

Ejercicio 4. Un fabricante de utensilios está considerando la conveniencia de adquirir una nueva máquina para grabar las piezas de lámina metálica. Para tomar una decisión, puso la nueva máquina a prueba: tomó una muestra de 25 utensilios y midió el tiempo que llevaba grabar cada una de las piezas con la nueva máquina. Los resultados fueron, en segundos, $\bar{x} = 21{,}2$ y $s_n = 0{,}5$. Asumiendo que el tiempo que se mide es una variable con distribución normal, responda:

a) Hallar un intervalo de confianza del 95 % para la varianza del tiempo que lleva grabar una pieza con la nueva máquina.

b) El tiempo medio que demora la vieja máquina en grabar una pieza es de 20 segundos. El fabricante comprará la nueva máquina si resulta que el tiempo medio que demora la nueva máquina es menor que el tiempo medio que demora la vieja máquina.

   i) Plantear las hipótesis de interés, dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula.

   ii) Con un nivel de significancia de 0.01, dar la región de rechazo para el test planteado en el item (i), calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema. ¿Que decisión debería tomar el fabricante?.

   iii) Calcule el p-valor de esta prueba y concluya usando un $\alpha = 0{,}01$.

Ejercicio 5. Un comercio desea tener una idea de cuál es la verdadera proporción de clientes a favor de la ampliación del horario de atención al público (p). Se seleccionó una muestra aleatoria de 360 clientes, de los cuales 290 estaban a favor de la ampliación del horario de atención.

a) Obtenga un intervalo de confianza del 95 % para p.

b) ¿Cuál es el tamaño de muestra necesario para que el intervalo de confianza para p encontrado en el item (a), tenga longitud a lo sumo 0.05, independientemente del valor de $\hat{p}$?

c) Si el comerciante resuelve ampliar el horario de atención si p es superior a 0.75, ¿existe evidencia suficiente para decidir la ampliación del horario de atención? Para responder a la pregunta plantee las hipótesis pertinentes, dé el estadístico de prueba y la región de rechazo al 5 % y concluya en el contexto del problema.

Ejercicio 6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $U[0;\theta]$; con $\theta > 0$.

a) Encontrar el estimador por el método de los momentos ($\hat{\theta}_1$) para θ.

b) Determinar si es insesgado el estimador $\hat{\theta}_1$ y calcular su varianza.

c) Sea $\hat{\theta}_2 = \text{máx}_{i=1,\ldots,n} X_i$, el estimador de máxima verosimilitud para θ, cuya función densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} n\frac{x^{n-1}}{\theta^n} & , \quad \text{si } x \in [0,\theta] \\ 0 & , \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Probar que este estimador no es insesgado para θ.

Ayuda: Si X se distribuye $U[a;b]$, entonces $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$