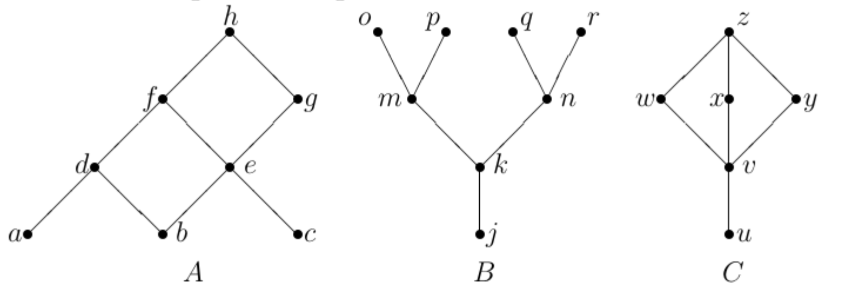
1. Considere los siguientes diagramas de Hasse.

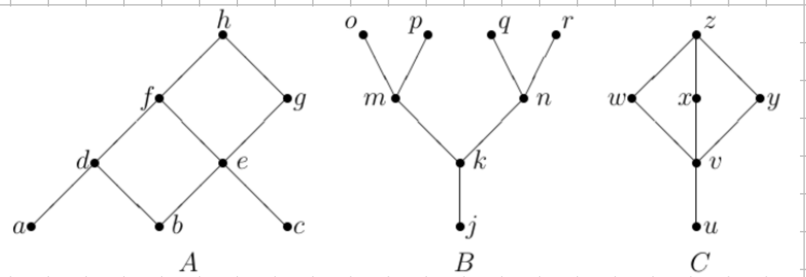


a) ¿Cuáles son los elementos maximales y minimales de estos conjuntos?
b) ¿Cuáles de estos conjuntos tienen mínimo, cuáles máximo?
c) En el diagrama A, ¿qué elementos cubren a e?
d) Para cada uno de los siguientes conjuntos determine el conjunto de cotas superiores y, de existir, determine el supremo.

$$\{d, c\} \qquad \{w, y, v\} \qquad \{p, m\} \qquad \{m, n\} \qquad \{z\}$$

e) Para cada uno de los siguientes conjuntos determine el conjunto de cotas inferiores y, de existir, determine el ínfimo.

$$\{a, g\} \qquad \{g, a, f\} \qquad \{z\}$$



a) A:
Minimales: a, b, c
Maximales: h

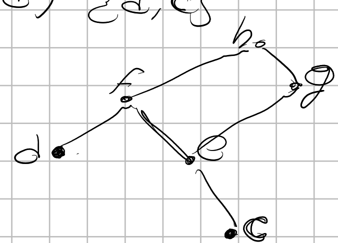
B:
Minimales: j
Maximales: o, p, q, r

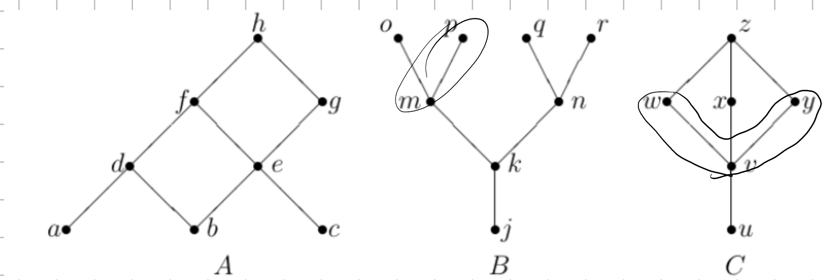
C:
Minimales: u
Maximales: z

b) A tiene h máximo
B tiene j mínimo
C tiene u mínimo y z máximo

c) A "e" lo cubren: f y g

d) {d, c}





Cotas superiores son: f, g, h
Sup: f

{w, y, v} cotas sup z   supremo: z

{P, m} cota sup P y supremo P

{m, n} cotas sup Ninguna

{Z} es su propia cota y supremo.

d)

{a, g} Ninguna

{g, a, F} Ninguna

{z} cotas inf {w, x, y, v, u} y no hay ínfimo

2. Determine y justifique si son V o F las siguientes afirmaciones para un poset $(P, \leq)$:
   a) Si P tiene elemento máximo x, entonces x es el único elemento maximal. V
   b) Si P es finito y tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo. V
   c) (*) Si P tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo. F

a) es la definición de máximo.

b)

Análisis: Si P es finito y tiene un único elemento maximal x, entonces no puede haber ningún otro elemento que sea comparable con x de tal manera que x no sea mayor que ese elemento. Por lo tanto, x tiene que ser el mayor elemento de P, lo que significa que x es el máximo.

- **Conclusión**: Esta afirmación es **verdadera**. En un conjunto finito, si x es el único maximal, no hay otros elementos que puedan ser mayores que él, por lo que x debe ser el máximo.

c)

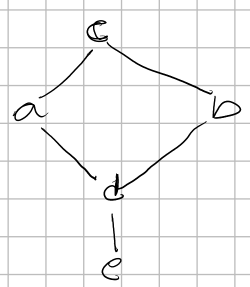
Análisis: En esta afirmación no se menciona que P es finito, lo cual es importante. En un conjunto **infinito**, puede haber más de un elemento maximal que no sea comparable con otros elementos. Por ejemplo, en el conjunto de los números reales restringido al intervalo abierto $(0,1) \cup (2,3)$, los elementos 1 y 2 son maximales, pero no hay un máximo porque el conjunto no tiene un elemento que sea mayor que todos los demás.

Así que el hecho de que haya un único elemento maximal no garantiza que este sea el máximo, ya que en conjuntos infinitos pueden existir otros elementos que no son comparables con el maximal.

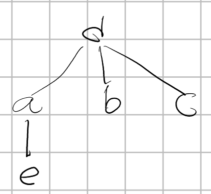
- **Conclusión**: Esta afirmación es **falsa**. La existencia de un único maximal no implica necesariamente que sea un máximo, especialmente en conjuntos infinitos.

3. Sea $P = \{a, b, c, d, e\}$. Para cada item dé un diagrama de Hasse que satisfaga las condiciones.
   a) El supremo de $\{a, b\}$ es c, y el ínfimo es d. Además el ínfimo de P es e.
   b) El supremo de $\{a, b\}$, el supremo de $\{a, c\}$ y el supremo de $\{b, c\}$ coinciden, y son todos el elemento d.
   c) P no tiene supremo ni ínfimo.
   d) El supremo de $\{a, b\}$ no existe puesto que $\{a, b\}$ no tienen cotas superiores.
   e) Aunque $\{a, b\}$ tiene cotas superiores, el supremo de $\{a, b\}$ no existe.

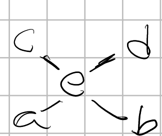
a)



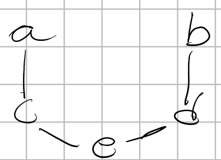
b)



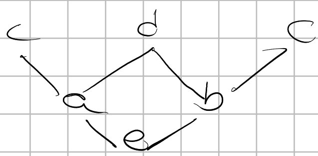
c)



d)



e)



4. Sea $P := [0,1) \cup [2,3)$ el subconjunto de $\mathbb{R}$ con el orden heredado. Decidir y justificar si son V o F las siguientes afirmaciones:
   a) Para todo $a, b \in P$, existe $\sup\{a,b\}$. V
   b) Existe $\sup [2,3)$. F
   c) $\sup [0,1) = 1$. F

a) Como es subC de un orden total, también lo es, ∴ es reticulada y vale la afirmación

b) Como 3 no existe en el conjunto, no hay dos elementos para que sea reticulado y exista supremo.

c) El supremo de este poset es 2

5. Sea $(P, \leq)$ un poset reticulado. Pruebe que $\sup(S)$ y $\text{ínf}(S)$ existen para cualquier $S \subseteq P$ finito y no vacío.

Definición

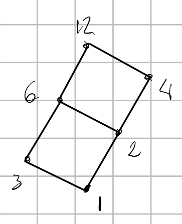
Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

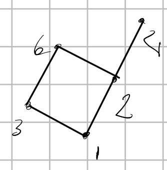
Sabemos que es finito y no vacío.

Consideremos un conjunto finito $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
cualquier x_n es su propio sup ó inf, y por def de poset reticulado para cualquier par x_i, x_j existe sup e inf.
Podríamos navegar todo el poset haciendo sup/inf $((x_i, x_j), x_k)$ y por definición valdría. Por lo tanto es cierto siempre que la hipótesis sea correcta.

6. a) Dibuje los diagramas de Hasse de $A = (\{1,2,3,4,6,12\}, |)$ y $B = (\{1,2,3,4,6\}, |)$.
   b) ¿Cuáles de esos posets son reticulados?
   c) Calcular $4 \wedge (2 \vee 3)$ en ambos posets.
   d) Determinar un subconjunto de $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ cuyo diagrama de Hasse sea B.

a) $A = (\{1,2,3,4,6,12\}, |)$ $\qquad$ $B = (\{1,2,3,4,6\}, |)$





b) A es reticulado

B no lo es, por ejemplo para $\{2,6\}$ no existe el supremo.

c) $4 \wedge (2 \vee 3) = (4 \wedge 2) \vee (4 \vee 3)$

A: $\sup\{2,3\} = 6$
$\text{Inf}\{4,6\} = 2$
∴ 2

B: $\sup\{2,3\} = 6$
$\text{Inf}\{4,6\} = 2$
∴ 2

d) Determinar un subconjunto de $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ cuyo diagrama de Hasse sea B.