1. Para las siguientes cadenas determinar cuáles están en Σ^*, cuáles en $PROP$, y cuáles en ninguno de los dos.
   a) $p_0 \to p_1$. NO, Faltan "( )"
   b) $((p \wedge p) \to p)$. NO, p no pertenece a Σ^*
   c) $(\varphi \vee \psi)$. NO, son conjuntos
   d) $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2)$. Sí

a) $p_0 \to p_1 \in \Sigma^*$
$\notin PROP$

b) $((p \wedge p) \to p) \notin \Sigma^*$
$\notin PROP$

c) $(\varphi \vee \psi) \notin \Sigma^*$
$\notin PROP$

d) $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2) \in \Sigma^*$
$\in PROP$

2. Demuestre que toda $\varphi \in PROP$ tiene tantos "(" como ")". Además, vea que la cantidad de paréntesis ("abre" y "cierra", todos juntos) es igual a doble de la cantidad de conectivos distintos de $\perp$ que ocurren.

Teorema 2 (inducción en subfórmulas). *Sea A un predicado sobre PROP. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:*

$\boxed{\varphi \in At}$ *Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ *Si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \odot \psi))$.*

Veamoslo con inducción

$\varphi \in PROP$ derecho izquierdo

Probar que $fd(\varphi) = fi(\varphi)$

Caso base

$fd(\perp) = 0 = fi(\perp)$

$fd(\odot) = 0 = fi(\odot)$

Caso Inductivo.

HI: Sean ψ, Ω tq $fd(\psi) = fi(\psi)$ y $fd(\Omega) = fi(\Omega)$

$fd(\psi \odot \Omega)$
$\equiv$ {Por def recursiva}
$1 + fd(\psi) + fd(\Omega)$
$\equiv$ {HI}
$1 + fi(\psi) + fi(\Omega)$
$\equiv$ {Por def}
$fi(\psi \odot \Omega)$

Falta probar $\perp$

3. Defina recursivamente una función $ocur(k, \varphi)$, que devuelva la cantidad de ocurrencias de p_k que posee φ, para cada $\varphi \in PROP$. (Note que para cada k fijo se está definiendo una función de $PROP$ en los naturales).

$ocur(k, \varphi)$

$ocur : \mathbb{N}_0 \to PROP \to \mathbb{N}_0$

$ocur(k, \bot) = 0$

$$ocur(k)(P_i) = \begin{cases} 1 & si\ k = i \\ 0 & else \end{cases}$$

$ocur(k)(\varphi \odot \psi) = ocur(k)(\varphi) + ocur(k)(\psi)$

4. Defina recursivamente la función "longitud" que devuelve la cantidad de símbolos de una proposición (incluyendo paréntesis).

$longitud(\varphi)$

$longitud(P_n) = 1$

$longitud(\bot) = 1$

2 Parentesis + 1 $\odot$

$longitud((\varphi \odot \psi)) = 3 + longitud(\varphi) + longitud(\psi)$

5. Defina recursivamente una función $S : PROP \to \mathcal{P}(PROP)$ de tal manera que $S(\varphi)$ sea el conjunto de subfórmulas de φ. Por ejemplo,

$$S(\bot) = \{\bot\}, \qquad S((p_0 \wedge p_1)) = \{p_0, p_1, (p_0 \wedge p_1)\}.$$

$S(\bot) = \{\bot\}$

$S(P_n) = \{P_n\}$

$S(\varphi \odot \psi) = \{\varphi \odot \psi\} \cup S(\varphi) \cup S(\psi)$

6. Sea $G : PROP \times PROP \times \mathcal{V} \to PROP$ la función que para cada $\varphi \in PROP$, $\psi \in PROP$ y $p_i \in \mathcal{V}$ devuelve el resultado de sustituir en φ cada ocurrencia de la variable p_i por la proposición ψ. Denotamos $G(\varphi, \psi, p_i) \doteq \varphi[\psi/p_i]$.

   a) Determine $\varphi[((\neg p_7) \to p_3)/p_7]$ para

      1) $\varphi = ((p_1 \wedge p_7) \to (p_7 \to p_3))$

      2) $\varphi = ((p_3 \leftrightarrow p_7) \vee (p_2 \to (\neg(p_7))))$.

   b) (*) Defina recursivamente la función G.

a) $\varphi[((\neg p_7) \to p_3)/p_7]$

1) $\varphi = ((p_1 \wedge p_7) \to (p_7 \to p_3))$

$\Rightarrow \varphi = ((p_1 \wedge ((\neg p_7) \to p_3)) \to (((\neg p_7) \to p_3) \to p_3))$

2) $\varphi = ((p_3 \leftrightarrow p_7) \vee (p_2 \to (\neg(p_7))))$

$\Rightarrow \varphi = ((p_3 \leftrightarrow ((\neg p_7) \to p_3)) \vee (p_2 \to (\neg(((\neg p_7) \to p_3)))))$

b) $G(p_n, \psi, p_i) = \begin{cases} p_n & \text{si } n \neq i \\ \psi & \text{si } n = i \end{cases}$

$G(\bot, \psi, p_i) = \bot$

$G(\varphi \circ \varphi', \psi, p_i) = G(\varphi, \psi, p_i) \circ G(\varphi', \psi, p_i)$

~~no~~ estoy seguro de esta.