Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 2 de octubre de 2024

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso

2. Deducción natural
   - Reglas de inferencia
   - Cancelación de hipótesis: introducción de $\rightarrow$
   - Ejemplos con cancelación
   - Reducción al absurdo y de eliminación de $\vee$
   - Ejemplos con RAA y $\vee E$

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0,1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_f : PROP \to \{0,1\}$.
  - La verdad de una proposición se determina localmente: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_f : PROP \to \{0, 1\}$.
  - La verdad de una proposición se determina localmente: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0,1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_f : PROP \to \{0,1\}$.
  - La verdad de una proposición se determina localmente: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**. Ahora

El cálculo en primer año

Este cáculo involucra ciertos axiomas

El cálculo en primer año

Este cáculo involucra ciertos axiomas

$$p \vee q \equiv q \vee p,$$
$$p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$$
$$\vdots$$

El cálculo en primer año

Este cáculo involucra ciertos axiomas

$$p \vee q \equiv q \vee p,$$
$$p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$$
$$\vdots$$

y ciertas reglas

Este cáculo involucra ciertos axiomas

$$p \vee q \equiv q \vee p,$$
$$p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$$
$$\vdots$$

y ciertas reglas

Regla de Leibniz

Transitividad de la equivalencia

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & p \vee \underline{q \vee p} \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & p \vee p \vee q \equiv q \vee p
\end{array}
$$

El cálculo en primer año

Este cáculo involucra ciertos axiomas

$$p \vee q \equiv q \vee p,$$
$$p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$$
$$\vdots$$

y ciertas reglas

Regla de Leibniz
Transitividad de la equivalencia

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & p \vee \underline{q \vee p} \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & p \vee p \vee q \equiv q \vee p
\end{array}
$$

Deducción natural

Deducción natural: un cálculo más parecido a los razonamientos “intuitivos”.

Deducción natural

Deducción natural: un cálculo más parecido a los razonamientos "intuitivos". Sólo involucra reglas.

Deducción natural

Deducción natural: un cálculo más parecido a los razonamientos “intuitivos”. Sólo involucra reglas.

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \boldsymbol{I}$$

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E$$

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

Ejemplo

De $\{\varphi, \varphi \vee \psi \to \chi\}$ se deduce χ.

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge\boldsymbol{I}$$

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge \boldsymbol{I}$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

$$\frac{\color{red}{\varphi} \qquad \color{red}{\psi}}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge I$$

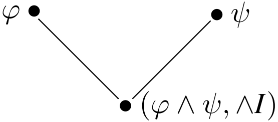
Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.

$$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)}\ \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión ($Concl$): $(\varphi \wedge \psi)$

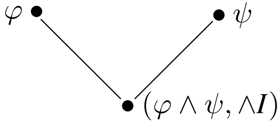


$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión ($Concl$): $(\varphi \wedge \psi)$

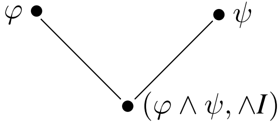
"De $\{\varphi, \psi\}$ **deduce** $(\varphi \wedge \psi)$"



$$\frac{\color{red}{\varphi} \qquad \color{red}{\psi}}{\color{blue}{(\varphi \wedge \psi)}} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión ($Concl$): $(\varphi \wedge \psi)$



"De $\{\varphi, \psi\}$ **deduce** $(\varphi \wedge \psi)$"

$\{\color{red}{\varphi, \psi}\} \vdash \color{blue}{(\varphi \wedge \psi)}$.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de “(n es múltiplo de 4) implica (n es par)”

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de “(n es múltiplo de 4) implica (n es par)”

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.
- Luego, $n = 2 \cdot k'$ para cierto k'.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.
- Luego, $n = 2 \cdot k'$ para cierto k'.
- Luego, n es par.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.
- Luego, $n = 2 \cdot k'$ para cierto k'.
- Luego, n es par.

Luego, (n es múltiplo de 4) implica (n es par).

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Introducción de la implicación

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1 \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: φ.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{\psi \wedge \chi}{\psi}\,\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi}\,\to I$$

Introducción de la implicación

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi}\to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \dfrac{\dfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \to \psi$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi} \wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \to \psi$.

"$\psi \wedge \chi \to \psi$ es un **teorema** ".

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \rightarrow \psi} \rightarrow I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \rightarrow \psi$.

"$\psi \wedge \chi \rightarrow \psi$ es un **teorema** ". $\vdash \psi \wedge \chi \rightarrow \psi$.

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1$$

2. De $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ se deduce $\neg\varphi$.

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

2. De $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ se deduce $\neg\varphi$.

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\to E \qquad \neg\psi}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_1$$

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\, RAA$$

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\,RAA \qquad\qquad \dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\,\vee E.$$

Ejemplo usando *RAA*

De $\{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi\}$ se deduce ψ.

Ejemplo usando *RAA*

De $\{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi\}$ se deduce ψ.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{[\neg\psi]_1 \qquad \neg\psi \to \neg\varphi}{\neg\varphi}\to E}{\bot}\to E}{\psi}\,RAA_1$$

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con $\perp$ como protagonista:

$$\frac{\perp}{\varphi}\perp$$

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con $\perp$ como protagonista:

$$\frac{\perp}{\varphi}\perp$$

Veamos ahora que de $\neg\varphi \vee \psi$ se deduce $\varphi \to \psi$.

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con $\bot$ como protagonista:

$$\frac{\bot}{\varphi}\,\bot$$

Veamos ahora que de $\neg\varphi \vee \psi$ se deduce $\varphi \to \psi$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad [\neg\varphi]_2}{\bot}\to E}{\psi}\,\bot \qquad [\psi]_2}{\psi}\,\vee E_2}{\varphi \to \psi}\to I_1$$