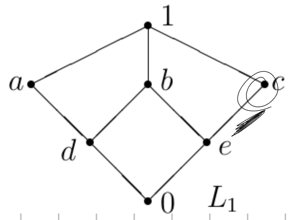
1. Considere el reticulado L_1.



a) Dé todos los complementos, si es que hay, de los siguientes elementos: a, b, d, 0.
b) ¿Es L_1 un reticulado complementado?
c) ¿Es L_1 un reticulado distributivo?

Complementos a:

a: e, c   d: c

b: ninguno   0: 1

b) No, pues b no tiene complemento.

c) Chequemos.

Para ver que sea distributivo tiene que cumplir con la propiedad distributiva.
Es decir, para cualquier $a, b, c \in L$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$\text{y} \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

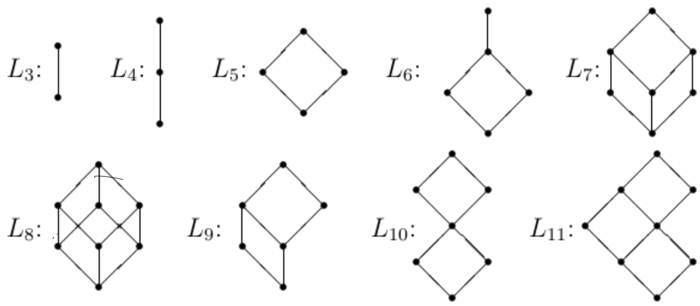
Tomamos el caso particular de L_1:

$$c \vee (a \wedge e) = c \vee 0 = c$$

$$(c \vee a) \wedge (c \vee e) = 1 \wedge c = c$$

Como no son iguales entonces no es un reticulado distributivo.

2. Considere los siguientes diagramas.

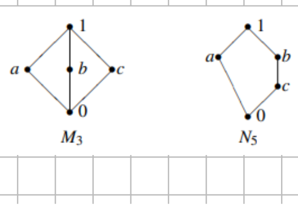


a) Decidir si L_9 ó L_{10} se incrustan en L_{11}.
b) ¿De cuántas maneras distintas puede incrustarse L_5 en L_{10}?
c) ¿Se incrusta N_5 en L_8? ¿Se incrusta M_3 en L_{10}?
d) Determine cuáles son isomorfos a algún D_n.
e) Determine cuáles se incrustan en $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto X.
f) Determine cuáles son reticulados distributivos.
g) Determine cuáles admiten estructura de álgebra de Boole.

a) L_9 sí se incrusta y L_{10} también.

b) De 2 maneras.

c)



N_5 en L_8 no.

M_3 en L_{10} no

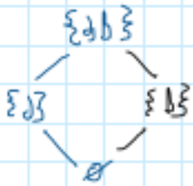
a, e, f, g)

L_3: 

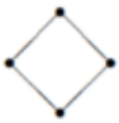
Es iso a D_2, D_3, D_5 .... D_p donde p es un primo
Es un subretículo de $P(\{a\})$
Es distributivo pues es sólo 0, 1

L_4:

$P\{a, b\}$

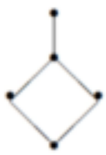


Es isomorfo a D_{p^2} con p primo
Es un subreticulo de $\mathcal{P}\{a, b\}$
Es distributivo ya que es orden total

L_5: 

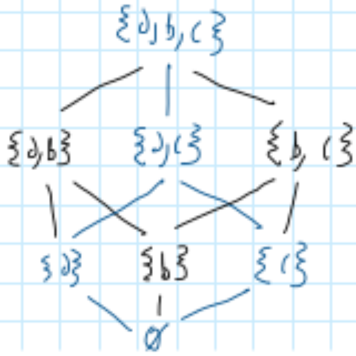
Es isomorfo a D_{pq} con p y q primos distintos
Es un subreticulo de $\mathcal{P}\{a, b\}$
Es distributivo ya que es isomorfo a $\mathcal{P}\{a, b\}$

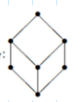
$P\{a, b\}$

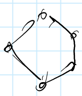
L_6: 

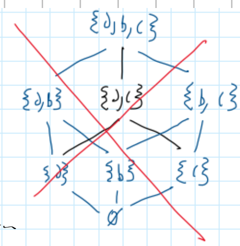
No es isomorfo a ningún D_n
Es un subreticulo de $\mathcal{P}\{a, b, c\}$
Es distributivo ya que M_3 y N_5 no se le incrustan

$P\{a, b, c\}$



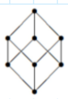
L_7: 



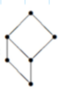


No es isomorfo a ningún D_n
No es subreticulo de $\mathcal{P}\{a, b, c\}$ ya que $\{a\} \vee \{c\} = \{a, c\}$
No es distributivo ya que N_5 se le incrusta

↳ not rlly sure...

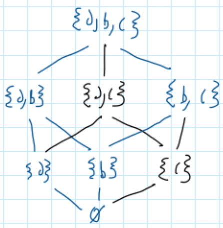
L_8: 

Es isomorfo a D_{pqr} con p, q, r primos disitntos
Es $\mathcal{P}\{a, b, c\}$
Es distributivo porque es $\mathcal{P}\{a, b, c\}$

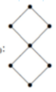
L_9: 

Es isomorfo a D_{pq^2} con p, q primos disitntos
Es un subreticulo de $\mathcal{P}\{a, b, c\}$
Es distributivo

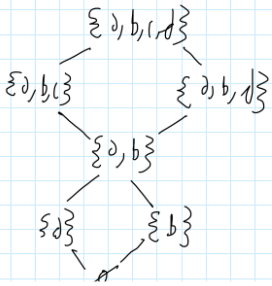
$P\{a, b, c\}$



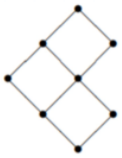
∅

L_{10}: 

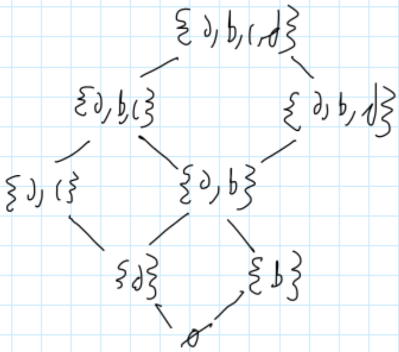
P{a, b, c, d}



No es isomorfo a ningún D_n
Es un subreticulo de $\mathcal{P}(a, b, c, d)$
Es distributivo ya que M_3 y N_5 no se le incrustan

L_{11}: 

P{a, b, c, d}



No es isomorfo a ningún D_n
Es un subreticulo de $\mathcal{P}(a, b, c, d)$
Es distributivo ya que es un subreticulo de $\mathcal{P}(a, b, c, d)$

3. Sea S un reticulado.
   a) Demuestre que si $x \leq y$, entonces para todo z en S, $x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y$.
   b) Compruebe que si S es distributivo vale la igualdad.

a) $x \leq y$ $\quad \forall z \in S$ se cumple: $x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y$

$x \vee (z \wedge y)$
$\leq$ {Desigualdad distributiva}
$(x \vee z) \wedge (x \vee y)$
$=$ {$x \leq y \Rightarrow x \vee y = y$}
$(x \vee z) \wedge y$

b)
Sea:
$(S, \leq)$ un reticulado distributivo
$x, y, z \in S$

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y$$

Demostración suponiendo el antecedente:

$x \vee (z \wedge y)$
= {Distributividad}
$(x \vee z) \wedge (x \vee y)$
= {$x \leq y \Rightarrow x \vee y = y$}
$(x \vee z) \wedge y$

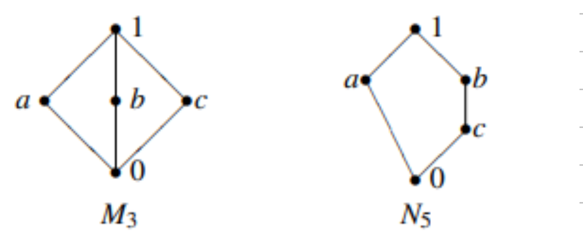
4. Demostrar que M_3 y N_5 no satisfacen la propiedad cancelativa.

No recuerdo dónde está la propiedad cancelativa.

Un reticulado L satisface la **propiedad cancelativa** si, para cualquier $x, y, z \in L$, se cumple que:

$$x \vee z = y \vee z \quad \text{y} \quad x \wedge z = y \wedge z \quad \text{implican que} \quad x = y.$$

Es decir, si x y y tienen el mismo supremo e ínfimo con respecto a z, entonces x y y deben ser iguales.



N_5: $a \vee c = a \vee b^{=1}$ pero $c \neq b$
$a \wedge c = a \wedge b^{=0}$ " "

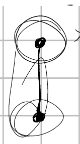
M_3: $a \vee b = a \vee c^{=1}$ " "
$a \wedge b = a \wedge c^{=0}$ " "

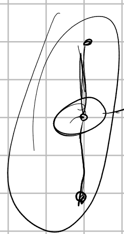
5. Demostrar que si un reticulado satisface la propiedad cancelativa, entonces es distributivo. (Ayuda: usar el Teorema M_3-N_5).

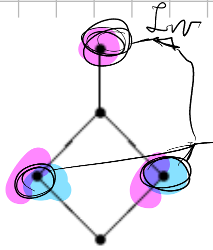
TEOREMA 5.3. *Un reticulado es distributivo si y sólo si no contiene subreticulados isomorfos a M_3 y N_5 del Ejemplo 5.1.*

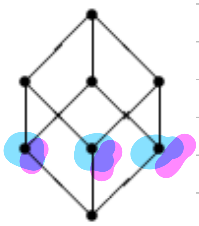
Sabemos que un reticulado es distributivo si cumple con el teorema. Como M_3-N_5 no satisfacen la propiedad cancelativa, entonces si un reticulado satisface la propiedad no tiene incrustado a M_3 y N_5 ∴ es distributivo.

6. Determine los átomos y los irreducibles de los posets L_3, L_4, L_6, L_8 y L_{11}.

L_3  Átomo Irr

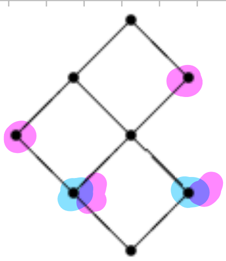
L_4  Irreducible Átomo

L_6: 

L_8: 

Átomos

Irreducibles

L_{11}: 

7. Demuestre las siguientes propiedades de las álgebras de Boole.

a) $\neg(\neg x) = x$;

b) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.

a) $\neg(\neg x) = x$

Por definición: $a \vee \neg a = 1$, $a \wedge \neg a = 0$

donde si existiera un b tal que $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0 \Rightarrow b = \neg a$

Ahora $\neg(\neg x)$ es aquel que hace $\neg x \vee \neg(\neg x) = 1$ y $\dots = 0$

pero x cumple la misma propiedad, entonces por unicidad $\neg(\neg x) = x$

b) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

Veamos que se cumpla

$(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) = 1$ $\qquad$ $(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) = 0$

8. Sea B un álgebra de Boole y $\leq$ el orden asociado a B. Demuestre los siguientes.

a) $x \leq y$ si y sólo si $\neg y \leq \neg x$;

b) $y \leq z$ si y sólo si $y \wedge \neg z = 0$;

c) si $x \leq y$ e $y \wedge z = 0$ entonces $z \leq \neg x$ (vea lo que hizo antes).

a) $x \leq y$ sii $\neg y \leq \neg x$

$x \leq y$

$\equiv$

$x \wedge y = x$

$\equiv$

$\neg(x \wedge y) = \neg x$

$\equiv$

$\neg x \vee \neg y = \neg x$

$\equiv$

$\neg y \leq \neg x$

Propiedades.

$\neg(\neg x) = x$	ⓐ
$x = y \Leftrightarrow \neg x = \neg y$	Ⓘ
$x \leq y \Leftrightarrow \neg y \leq \neg x$	ⓑ
$y \wedge z = 0 \Leftrightarrow y \leq \neg z$	ⓒ
$x \leq y$ & $y \wedge z = 0 \Rightarrow z \leq \neg x$	ⓓ
$x < y \Leftrightarrow \neg y < \neg x$	②

b) $y \leq z$ sii $y \wedge \neg z = 0$

$\Rightarrow)$ $y \leq z$

$y \wedge z \leq \neg z \wedge z$

$y \wedge z \leq 0$

$(\Leftarrow)$

3. Parte Recíproca: $y \wedge \neg z = 0 \implies y \leq z$

- Ahora suponemos que $y \wedge \neg z = 0$. Esto significa que y no tiene ninguna parte en común con el complemento de z, o dicho de otra manera, todo y está contenido dentro de z.
- Para demostrar que $y \leq z$, debemos probar que $y \vee z = z$.
- Dado que $y \wedge \neg z = 0$, no hay elementos en y que estén fuera de z. Esto implica que y debe estar completamente contenido en z.
- Por lo tanto, se cumple que $y \leq z$.

2. Parte Directa: $y \leq z \implies y \wedge \neg z = 0$

- Supongamos que $y \leq z$, lo que en una álgebra de Boole significa que y está **"contenido"** en z, o que z es un "supremo" para y.
- Sabemos que en un álgebra de Boole, $\neg z$ es el complemento de z, es decir, $z \wedge \neg z = 0$ y $z \vee \neg z = 1$.
- Si $y \leq z$, entonces $y \wedge z = y$ (porque y está contenido en z), y ahora necesitamos verificar qué sucede con $y \wedge \neg z$.
- Dado que $\neg z$ es el complemento de z, no puede haber ningún elemento que esté simultáneamente en y (que está contenido en z) y en $\neg z$, ya que z y $\neg z$ son mutuamente excluyentes.
- Por lo tanto, $y \wedge \neg z = 0$, porque no hay intersección posible entre y y $\neg z$ si $y \leq z$.

c) si $x \leq y$ e $y \wedge z = 0 \Rightarrow z \leq \neg x$

$x \leq y$ e $y \wedge z = 0$

$x \leq y$ e $y \leq \neg z$

$\equiv$ Transitividad

$x \leq \neg z$

$z \leq \neg x$