1. Pruebe que $\models \varphi \to \psi$ si y sólo si $\{\varphi\} \models \psi$.

1) $\Rightarrow$ $\models \varphi \to \psi$ significa que es una tautología, es decir, la expresión vale 1

$\varphi = 0, 1$ pero en este ejercicio asumimos que vale 1

$\Rightarrow \{\varphi\} \models \psi$ ✓

$\Leftarrow)$ $\{\varphi\} \models \psi$ dado $\varphi = 1$ entonces ψ es consecuencia lógica de φ

$\therefore \psi = 1$ pero esto es $\models \varphi \to \psi$ ✓

3. Complete las siguientes derivaciones agregando la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. En la primera derivación se deben cancelar todas las hipótesis. En las segunda sólo debe quedar φ sin cancelar.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\psi \qquad \dfrac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}}{\bot}}{\neg\varphi}}{\neg\psi \to \neg\varphi}}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi}{\psi \to \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}}{\psi}}{\neg\varphi \to \psi}}{(\psi \to \varphi) \wedge (\neg\varphi \to \psi)}$$

Recuerde: $\neg\varphi$ es una abreviatura de $\varphi \to \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]_2 \qquad \dfrac{[\varphi]_1 \qquad [\varphi \to \psi]_3}{\psi}\;{\to}E}{\bot}\;{\to}E}{\neg\varphi}\;{\to}I_1}{\neg\psi \to \neg\varphi}\;{\to}I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)}\;{\to}I_3$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi}{\psi \to \varphi}\;{\to}I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad [\neg\varphi]_1}{\bot}\;{\to}E}{\psi}\;RAA_2}{\neg\varphi \to \psi}\;{\to}I_1}{(\psi \to \varphi) \wedge (\neg\varphi \to \psi)}\;\wedge I$$

4. Encuentre derivaciones para:

a) $\{\varphi \wedge \gamma,\ \varphi \to (\psi \wedge \gamma)\} \vdash \psi$

b) $\{\varphi \to (\psi \to \gamma), \varphi\} \vdash \psi \to (\varphi \to \gamma)$

c) $\{\varphi\} \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

d) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\varphi \to \gamma))$

a) $\{\varphi \wedge \gamma, \varphi \to (\psi \wedge \gamma)\} \vdash \psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \gamma}{\varphi}\,\wedge E \qquad \varphi \to (\psi \wedge \gamma)}{\psi \wedge \gamma}\,\to E}{\psi}\,\wedge E$$

b) $\{\varphi \to (\psi \to \gamma), \varphi\} \vdash \psi \to (\varphi \to \gamma)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]_2 \qquad \dfrac{[\varphi]_1 \quad \varphi \to (\psi \to \gamma)}{\psi \to \gamma}\,\to E}{\gamma}\,\to E}{\varphi \to \gamma}\,\to I_1}{\psi \to (\varphi \to \gamma)}\,\to I_2$$

- ψ
- $\varphi \to (\psi \to \gamma)$
- φ

c) $\{\varphi\} \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]_1}{\neg\varphi}\,\wedge E}{\perp}\,RAA}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}\,\to I_1$$

d) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\varphi \to \gamma))$

H: φ
$\varphi \to \psi$
$\varphi \to (\psi \to \gamma)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad [\varphi \to (\psi \to \gamma)]_2}{\psi \to \gamma}\to E \qquad \dfrac{[\varphi]_1 \quad [\varphi \to \psi]_3}{\psi}\to E}{\gamma}\to E}{\varphi \to \gamma}\to I_1}{(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\varphi \to \gamma)}\to I_2}{(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\varphi \to \gamma))}\to I_3$$

5. Lo siguiente ya fue demostrado en esta guía. ¿En qué ejercicio?.

$$\{(\neg(p_2 \to p_5))\} \vdash \neg(\neg(\neg(p_2 \to p_5)) \wedge \neg(p_3 \to ((\neg p_2) \wedge p_5)))$$

$\{\neg(\varphi \to \psi)\} \vdash \neg(\neg(\neg(\varphi \to \psi)) \wedge \neg(\gamma \to (\neg\varphi \wedge \psi)))$

¿? ¿?

6. Determine cuáles son válidas. Para las que lo son, encuentre derivaciones que tengan como hipótesis el cunjunto de la izquierda, y como conclusión la proposición de la derecha.
   a) $\{\neg\varphi,\ \psi \to \varphi\} \models \gamma \to (\psi \to \bot)$ válida
   b) $\{\neg\varphi\} \models \psi \to (\varphi \wedge \neg\psi)$ No válida
   c) $\{\neg\varphi\} \models \psi \to (\varphi \to \neg\psi)$ válida.

a) $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \vdash \gamma \to (\psi \to \bot)$

Hextra: γ
ψ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\gamma]_2 \quad \varphi \to \bot \qquad \dfrac{\psi \to \varphi \quad [\psi]_1}{\varphi}\to E}{\bot}\to E}{\psi \to \bot}\to I_1}{\gamma \to (\psi \to \bot)}\to I_2$$

c) $\{\varphi \to \bot\} \vdash \psi \to (\varphi \to (\psi \to \bot))$

Hextra: ψ

φ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]_{1,3} \quad \varphi \to \bot \quad [\varphi]_2}{\bot}\to E}{\psi \to \bot}\to I_1}{\varphi \to (\psi \to \bot)}\to I_2}{\psi \to (\varphi \to (\psi \to \bot))}\to I_3$$

7. Complete las siguiente derivación agregando la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. Sólo debe quedar $\neg Q \to \neg\varphi$ sin cancelar.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]_1 \quad \dfrac{[\neg Q]_2 \quad \neg Q \to \neg P}{\neg P}\to E}{\bot}\to E}{Q}\ RAA}{(P \to Q)}\to I_1$$
$$\dfrac{(P \to Q)}{\neg Q \to (P \to Q)}\to I_2$$