Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 30 de agosto de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Posets reticulados
   - Isomorfismo de posets

2. Retículos
   - Subreticulados
   - Isomorfismos
   - Incrustaciones
   - Reticulados acotados y complementados

caracterización de supremos e ínfimos

Lema

Sea $(P, \leq)$ un poset reticulado y sean $x, y, z \in P$. Se satisfacen las siguientes equivalencias:

- $x \vee y \leq z$ sii $x \leq z$ y $y \leq z$,
- $z \leq x \vee y$ sii $z \leq x$ y $z \leq y$.

Aplicaciones

- Leyes de compatibilidad o monotonía:

  $x \leq y$ y $z \leq w$ implica $x \vee z \leq y \vee w$ (y $x \wedge z \leq y \wedge w$)

- Desigualdades distributivas:

  $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Isomorfismo de posets

Definición

Sean $\mathbf{P} = (P, \leq)$ y $\mathbf{Q} = (Q, \leq')$ dos posets. Dada una función $f : P \to Q$, decimos que f es un *isomoforfismo* entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ sii

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$,

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y).$$

Cuando **existe** uno de tales isomorfismos decimos que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son *isomorfos* y escribimos $\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}$.

Ejemplo

- $\mathbf{D_{12}}$ y $\mathbf{D_{18}}$ son isomorfos.
- $\mathbf{D_2}$ y $(\mathcal{P}(\{a\}), \subseteq)$ son isomorfos.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Isomorfismos preservan la estructura

Proposición

Sea f *un isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(Q, \leq')$ *y sean* $u \in P$ *y* $S \subseteq P$*. Entonces*

u *es cota superior de* S *sii* $f(u)$ *es cota superior de* $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$*.*

Isomorfismos preservan la estructura

Proposición

Sea f un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(Q, \leq')$ y sean $u \in P$ y $S \subseteq P$. Entonces

u es cota superior de S sii $f(u)$ es cota superior de $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$.

Lema

Sea f un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(Q, \leq')$ y sea $S \subseteq P$. Entonces

- *Existe el supremo de S sii existe el supremo de $f(S)$. En tal caso se da además que*
$$f(\sup(S)) = \sup(f(S)).$$
- *Existe el ínfimo de S sii existe el ínfimo de $f(S)$. En tal caso se da además que*
$$f(\inf(S)) = \inf(f(S)).$$

Propiedades de supremos en ínfimos

1. Leyes de idempotencia:
   $x \vee x = x \wedge x = x$

2. Leyes conmutativas:
   $x \vee y = y \vee x$
   $x \wedge y = y \wedge x$

3. Leyes de absorción:
   $x \vee (x \wedge y) = x$
   $x \wedge (x \vee y) = x$

4. Leyes asociativas:
   $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
   $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

Retículos

Un retículo es una terna $(L, \oslash, \otimes)$, donde L es un conjunto y $\oslash$ y $\otimes$ son dos operaciones (binarias) que cumplen:

1. Idempotencia:
   $x \oslash x = x \otimes x = x$.

2. Conmutatividad:
   $x \oslash y = y \oslash x$,
   $x \otimes y = y \otimes x$.

3. Absorción:
   $x \oslash (x \otimes y) = x$,
   $x \otimes (x \oslash y) = x$.

4. Asociatividad:
   $(x \oslash y) \oslash z = x \oslash (y \oslash z)$,
   $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.

Observación

Como vimos anteriormente, dado un poset reticulado $(L, \leq)$, las operaciones de supremo e ínfimo asociadas satisfacen todas estas propiedades por lo que $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo.

Observación

Como vimos anteriormente, dado un poset reticulado $(L, \leq)$, las operaciones de supremo e ínfimo asociadas satisfacen todas estas propiedades por lo que $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo.

Teorema

Sea $(L, \ovee, \owedge)$ *un retículo y sea* $\ll$ *la relación sobre* L *definida por* $x \ll y \iff x \ovee y = y$. *Tenemos que* $(L, \ll)$ *es un poset reticulado y además* $\sup\{x, y\} = x \ovee y$ *y* $\inf\{x, y\} = x \owedge y$.

Observación

Como vimos anteriormente, dado un poset reticulado $(L, \leq)$, las operaciones de supremo e ínfimo asociadas satisfacen todas estas propiedades por lo que $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo.

Teorema

Sea $(L, \ovee, \owedge)$ *un retículo y sea* $\ll$ *la relación sobre* L *definida por* $x \ll y \iff x \ovee y = y$*. Tenemos que* $(L, \ll)$ *es un poset reticulado y además* $\sup\{x, y\} = x \ovee y$ *y* $\inf\{x, y\} = x \owedge y$*.*

De ahora en más, la palabra reticulado (a secas) se referirá tanto a un poset reticulado como al retículo asociado. Usaremos los términos específicos si queremos dar énfasis a alguno de los aspectos (relacional o algebraico, respectivamente).

Subreticulados

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo y sea $S \subseteq L$. Diremos que S es un *subuniverso* de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
En tal caso, decimos que $(S, \vee|_S, \wedge|_S)$ (de aquí en más también obviaremos la notación de restricción) es un *subreticulado* o *subretículo* de $(L, \vee, \wedge)$.

Subreticulados

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo y sea $S \subseteq L$. Diremos que S es un *subuniverso* de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
En tal caso, decimos que $(S, \vee|_S, \wedge|_S)$ (de aquí en más también obviaremos la notación de restricción) es un *subreticulado* o *subretículo* de $(L, \vee, \wedge)$.

También escribimos usualmente "$(S, \leq)$ es subreticulado de $(L, \leq)$" pero nos estaremos refirendo siempre a la noción algebraica definida anteriormente.

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo y sea $S \subseteq L$. Diremos que S es un *subuniverso* de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
En tal caso, decimos que $(S, \vee|_S, \wedge|_S)$ (de aquí en más también obviaremos la notación de restricción) es un *subreticulado* o *subretículo* de $(L, \vee, \wedge)$.

También escribimos usualmente "$(S, \leq)$ es subreticulado de $(L, \leq)$" pero nos estaremos refirendo siempre a la noción algebraica definida anteriormente.

No debemos confundir *subreticulado* de con *subposet*. Todo subconjunto de L dará lugar a un subposet, pero no todo subconjunto de L será un subuniverso.

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo y sea $S \subseteq L$. Diremos que S es un *subuniverso* de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
En tal caso, decimos que $(S, \vee|_S, \wedge|_S)$ (de aquí en más también obviaremos la notación de restricción) es un *subreticulado* o *subretículo* de $(L, \vee, \wedge)$.

También escribimos usualmente "$(S, \leq)$ es subreticulado de $(L, \leq)$" pero nos estaremos refirendo siempre a la noción algebraica definida anteriormente.

No debemos confundir *subreticulado* de con *subposet*. Todo subconjunto de L dará lugar a un subposet, pero no todo subconjunto de L será un subuniverso.

Ejemplo

$(\{1, 2, 3, 12\}, |)$ es un suposet de $\mathbf{D_{12}}$ y es reticulado pero no es un subreticulado de $\mathbf{D_{12}}$.

Ejemplo

- $(D_n, |)$ es subreticulado de $(\mathbb{N}, |)$.
- ¿Es $([0,1) \cup [2,3), \leq)$ subreticulado de $(\mathbb{R}, \leq)$?

Isomorfismo de Retículos

Definición

Sean $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$ dos retículos y $f : L \to L'$ una función. Decimos que f es un ismomorfismo de $\mathbf{L}$ en $\mathbf{L}'$ sii f es biyectiva y para todo $x, y \in L$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \quad \text{y} \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

Isomorfismo de Retículos

Definición

Sean $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$ dos retículos y $f : L \to L'$ una función. Decimos que f es un ismomorfismo de $\mathbf{L}$ en $\mathbf{L}'$ sii f es biyectiva y para todo $x, y \in L$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \quad \text{y} \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

Teorema

Dados dos retículos $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$, sean $(L, \leq)$ y $(L, \leq')$ los posets reticulados asociados, respectivamente. Para toda función $f : L \to L'$ se tiene que

$$f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge') \text{ es un iso } \iff f : (L, \leq) \to (L, \leq') \text{ es un iso.}$$

Incrustaciones

Definición

Dados dos retículos $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$ decimos que $\mathbf{L}$ se incrusta en $\mathbf{L}'$ sii existe un subreticulado $\mathbf{S}$ de $\mathbf{L}'$ isomorfo $\mathbf{L}$.

Ejemplo

- D_4 se incrusta en $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Reticulados acotados y complementados

Definición

- Decimos que un reticulado $\mathbf{L}$ es *acotado* sii tiene primer elemento, que llamamos $0^{\mathbf{L}}$ y último elemento $1^{\mathbf{L}}$.
- Para un reticulado acotado $\mathbf{L}$ con primer elemento 0 y último elemento 1, dados elementos $a, b \in L$, decimos que b es un *complemento* de a sii
$$a \vee b = 1 \text{ y } a \wedge b = 0.$$
- Decimos que un reticulado acotado $\mathbf{L}$ es *complementado* sii todos sus elementos tienen complemento.