Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 28 de agosto de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Posets (Conjuntos parcialmente ordenados)
   - Diagrama de Hasse
   - Ordenes totales
   - máximo, mínimo, maximal y minimal
   - supremo e ínfimo
   - Posets reticulados

Relaciones de Orden

Recordemos la definición de relación de orden parcial.

Definición

Un relación R sobre A es una *relación de orden parcial sobre A* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Relaciones de Orden

Recordemos la definición de relación de orden parcial.

Definición

Un relación R sobre A es una *relación de orden parcial sobre A* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición

Un *conjunto parcialmente ordenado (poset)* es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es una relación de orden parcial sobre A.

Recordemos la definición de relación de orden parcial.

Definición

Un relación R sobre A es una *relación de orden parcial sobre A* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición

Un *conjunto parcialmente ordenado (poset)* es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es una relación de orden parcial sobre A.

Nota: Diremos que $(A, \leq)$ es un *poset finito* si A es finito.

Ejemplo (de posets)

$(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$. $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathbb{Z}, |)$. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

Diagrama de Hasse

Definición

Dados un poset $(A, \leq)$ y $a, b \in A$ decimos que b *cubre* a ($a \prec b$) sii

$$\underbrace{a \neq b, a \leq b}_{\text{“}a < b\text{”}} \text{ y, para cualquier } c \in A, \text{ si } a \leq c \leq b \text{ entonces } c = a \text{ o } c = b.$$

Diagrama de Hasse

Dado un poset **finito** $(A, \leq)$, un *diagrama de Hasse* del mismo es un gráfico en el que se representa la relación de “cubre” asociada, de forma que si b cubre a a hay una línea ascendente de a a b.

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.

Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.
Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Definición

Dado un orden parcial $(A, \leq)$ y $B \subseteq A$ decimos que el poset $(B, \leq |_B)$ es un *subposet* de $(A, \leq)$. (Muchas veces escribiremos $(B, \leq)$ directamente).

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.
Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Definición

Dado un orden parcial $(A, \leq)$ y $B \subseteq A$ decimos que el poset $(B, \leq|_B)$ es un *subposet* de $(A, \leq)$. (Muchas veces escribiremos $(B, \leq)$ directamente).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

Para cualquier n, llamamos

$$D_n = \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}.$$

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.

Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Definición

Dado un orden parcial $(A, \leq)$ y $B \subseteq A$ decimos que el poset $(B, \leq |_B)$ es un *subposet* de $(A, \leq)$. (Muchas veces escribiremos $(B, \leq)$ directamente).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

Para cualquier n, llamamos

$$D_n = \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}.$$

$\mathbf{D_6} = (D_6, |)$, $\mathbf{D_{15}} = (D_{15}, |)$, $\mathbf{D_{28}} = (D_{28}, |)$ son subposets de $(\mathbb{N}, |)$.

Ordenes totales

V o F

Sean $(A, \leq)$ un poset y $a, b \in A$. Si $a \nleq b$ entonces $b \leq a$.

Ordenes totales

V o F

Sean $(A, \leq)$ un poset y $a, b \in A$. Si $a \not\leq b$ entonces $b \leq a$. $\}$ Falso

Ordenes totales

V o F

Sean $(A, \leq)$ un poset y $a, b \in A$. Si $a \not\leq b$ entonces $b \leq a$. $\}$ Falso

Definición

Dada un relación R sobre A decimos que R es un *orden total* sobre A sii R es un orden parcial sobre A y además satisface que, para todo $a, b \in A$

$$a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Una *cadena* es un poset $(A, \leq)$ en el que $\leq$ es un orden total sobre A.

Ejemplo

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ son cadenas.
- el orden lexicográfico es un orden total.

V o F

- $(\mathbb{N}, |)$ es una cadena.
- $(D_8, |)$ es una cadena.
- Si $\leq$ es un orden total entonces no es un orden parcial.
- Si $\leq$ es un orden parcial entonces no es un orden total.

máximo, mínimo, maximal y minimal

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset y $m \in P$. Decimos que

- m es máximo de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, $a \leq m$.
- m es mínimo de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, $m \leq a$.
- m es maximal de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, si $m \leq a$ entonces $a = m$.
- m es minimal de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, si $a \leq m$ entonces $a = m$.

Ejercicio

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo, mínimo, maximales y/o minimales?

1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $([0, 1), \leq)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$

Teorema

Todo poset finito tiene al menos un elemento maximal (minimal).

Demostración.

Lo Probaremos por inducción sobre la cantidad de elementos del poset.

Si el poset tiene un único elemento es fácil ver que es maximal.

HI: Para todo poset finito $\mathbf{P} = (P, \leq)$, si $|P| = n$ entonces $\mathbf{P}$ tiene un maximal.

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset tal que $|P| = n + 1$ y sea $a \in P$. Si a es maximal queda probado.

Consideremos entonces el caso en que a no es maximal. Sea $Q = P \setminus \{a\}$ y $\mathbf{Q} = (Q, \leq)$. Como $|Q| = n$, por HI, $\mathbf{Q}$ tiene un elemento maximal m.

Queremos probar que m es maximal en $\mathbf{P}$. Es decir, queremos ver que para todo $x \in P$

$$m \leq x \to m = x. \quad (*)$$

Demostración.

Sea $x \in P$. Si $x \neq a$, $x \in Q$, por lo que $(*)$ se sigue trivialmente.

Nos queda ver el caso $x = a$.

Para mayor claridad, vamos a utilizar la notación "$x < y$" para expresar la relación "$x \leq y$ y $x \neq y$".

Supongamos que $m \leq a$. Recordemos que supusimos que a no es maximal, por ende, existe $y \in P$ tal que $a < y$ (convencerse de que esto se sigue de la definición de maximal).

De lo anterior se deduce que $m < y$. Pero $y \in Q$ y m es maximal de $\mathbf{Q}$, lo que nos conduce a un absurdo.

El absurdo provino de suponer $m \leq a$, por lo que esto es falso y concluímos que la implicación $(*)$ es verdadera para el caso $x = a$.

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset, $c \in P$ y $S \subseteq P$. Decimos que

- c es cota superior de S sii para todo $a \in S$, $a \leq c$.
- c es cota inferior de S sii para todo $a \in S$, $c \leq a$.

supremo e ínfimo

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset, $c \in P$ y $S \subseteq P$. Decimos que

- c es cota superior de S sii para todo $a \in S$, $a \leq c$.
- c es cota inferior de S sii para todo $a \in S$, $c \leq a$.

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset, $s, i \in P$ y $S \subseteq P$. Decimos que

- s es el supremo de S sii s es la menor de las cotas superiores de S. Escribimos $s = \sup(S)$.
- i es el ínfimo de S sii s es la mayor de las cotas inferiores de S. Escribimos $i = \inf(S)$.

Universidad Nacional de Córdoba UNC 1613 - 2013 400 AÑOS

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Notación: En los posets reticulados escribimos $a \vee b \doteq \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b \doteq \inf\{a, b\}$.

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Notación: En los posets reticulados escribimos $a \vee b \doteq \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b \doteq \inf\{a, b\}$.

Ejemplo

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ son posets reticulados.

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Notación: En los posets reticulados escribimos $a \vee b \doteq \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b \doteq \inf\{a, b\}$.

Ejemplo

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ son posets reticulados.
- $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$ no es un poset reticulado.

Posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

Posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?

Posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?

- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de partes, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$)

Posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de partes, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?

Posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de partes, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?