Ejercicio 1. Sea Σ un alfabeto cualquiera, probar que Σ y Σ^* son lenguajes regulares utilizando la definición recursiva de lenguajes regulares.

Definamos a $\Sigma = \{a, b\}$ y a Σ^* como el conjunto de todas las posibles cadenas

Para Σ

1. Para cada símbolo $a \in \Sigma$, $\{a\}$ es un lenguaje regular por definición, ya que cada símbolo en Σ puede considerarse un lenguaje regular en sí mismo (contiene solo ese símbolo).
2. Dado que Σ es el conjunto de todos los símbolos en el alfabeto, podemos escribirlo como la **unión de los lenguajes individuales de cada símbolo**. Por ejemplo, si $\Sigma = \{a, b\}$:

$$\Sigma = \{a\} \cup \{b\}$$

3. Sabemos que $\{a\}$ y $\{b\}$ son lenguajes regulares individuales. La operación de unión entre lenguajes regulares produce otro lenguaje regular, por lo tanto, $\Sigma = \{a\} \cup \{b\}$ es regular.

De este modo, hemos demostrado que Σ es un lenguaje regular.

Para Σ^*

Rehacer de la forma del teórico.

Σ^* es el conjunto de todas las cadenas (incluyendo la cadena vacía ε) que se pueden formar con los símbolos en Σ.

1. Hemos demostrado que Σ es un lenguaje regular. Esto significa que cualquier cadena de un solo símbolo de Σ pertenece a un lenguaje regular.
2. Aplicando el **cierre de Kleene** a Σ, que se denota como Σ^*, obtenemos el conjunto de todas las combinaciones posibles de símbolos en Σ, incluyendo:
   - La cadena vacía ε,
   - Todas las cadenas de longitud 1, como "a" o "b",
   - Todas las cadenas de longitud 2, como "aa", "ab", "ba", "bb",
   - Y así sucesivamente para cualquier longitud.
3. Dado que el cierre de Kleene de un lenguaje regular es también regular, Σ^* es regular.

Ejercicio 2. Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto, probar que los siguientes lenguajes son regulares utilizando la definición recursiva de los lenguajes regulares:

a • $L_1 = \{a, abb, ba\}$

b • $L_2 = \{aab^m : m \geq 0\}$

c • $L_3 = \{a^n b^m : n, m \geq 0\}$

d • $L_4 = \{b^n a b^m : n, m \geq 0\}$

e • $L_5 = \{b\alpha : \alpha \in \Sigma^*\}$

f • $L_6 = \{\alpha ba \beta : \alpha, \beta \in \Sigma^*\}$

g • $L_7 = \{b\alpha a : \alpha \in \Sigma^*\}$

h • $L_8 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha| \; es \; par\}$

i • $L_9 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha|_a \; es \; par\}$

j • $L_{10} = \{\alpha \in \Sigma^* : aa \; no \; ocurre \; en \; \alpha\}$

a) $L_1 = \{a, abb, ba\}$

Veamos que "a", "abb", "ba" cadenas finitas.

Los lenguajes $\{a\}$ $\{abb\}$ $\{ba\}$ son regulares

$\Rightarrow L_1 = \{a\} \cup \{abb\} \cup \{ba\}$ es regular.

b) $L_2 = \{aab^m : m \geq 0\}$

La cadena "aa" es regular por ser finita.

el conjunto $\{b^m : m \geq 0\}$ es similar a b^* (cierre de Kleene) que tmb es regular

Luego $\{aa\} \cdot b^m$ es regular

c) $\{a^n b^m : n, m \geq 0\} = L_3$

$\underbrace{a \ldots a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{b \ldots b}_{m \text{ veces}}$

d) $L_4 = \{b^n a b^m : n, m \geq 0\}$

$\underbrace{b \ldots b}_{n \text{ veces}} \cdot a \cdot \underbrace{b \ldots b}_{m \text{ veces}}$

e) $L_5 = \{b\alpha : \alpha \in \Sigma^*\}$

- La cadena "b" es regular.
- Σ^*, que representa todas las combinaciones posibles de "a" y "b", es regular.
- La concatenación de "b" con Σ^* es regular.

Entonces, $L_5 = \{b\} \cdot \Sigma^*$, lo que implica que L_5 es regular.

F) $L_6 = \{\alpha ba \beta : \alpha, \beta \in \Sigma^*\}$

Este lenguaje contiene todas las cadenas que tienen la secuencia "ba" en cualquier posición, rodeada por cualquier combinación de "a" y "b".

- Σ^* representa cualquier combinación de "a" y "b", que es regular.
- La secuencia "ba" es regular porque es fija.
- La concatenación de Σ^*, "ba" y Σ^* es regular.

Por lo tanto, $L_6 = \Sigma^* \cdot \{ba\} \cdot \Sigma^*$, lo que implica que L_6 es regular.

g) $L_7 = \{b\alpha a : \alpha \in \Sigma^*\}$

"b" y "a" regulares

α tmb es regular

Luego se concatenan...

h) $L_8 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha| \text{ es par}\}$

Este lenguaje contiene todas las cadenas de longitud par.

- Se puede construir como un lenguaje que alterna cualquier símbolo "a" o "b" en pares. Esto se representa como $(aa + ab + ba + bb)^*$, que es regular.

Entonces, L_8 es regular.

i) $L_9 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha|_a \text{ es par}\}$

Este lenguaje contiene todas las cadenas en las que el número de "a" es par.

- Este lenguaje se puede construir mediante un autómata finito que realiza un seguimiento del número de "a" y acepta solo las cadenas con una cantidad par de "a". Es regular por definición.

j) $L_{10} = \{\alpha \in \Sigma^* : \text{"aa" no ocurre en } \alpha\}$

Este lenguaje contiene todas las cadenas donde "aa" no aparece.

- Podemos construir un autómata finito que acepte cualquier cadena siempre que no tenga dos "a" consecutivas.
- Esto es regular ya que puede ser descrito mediante un autómata que rechace cualquier secuencia con "aa".

Estos últimos rehacer pues no utilizan la versión recursiva.

Ejercicio 3. Para cada uno de los lenguajes L_i del ejercicio anterior, dar una expresion regular e_i tal que $L(e_i) = L_i$ y chequear que se verifica dicha igualdad utilizando la definición recursiva del lenguaje denotado por una expresión regular.

Lenguaje $L_1 = \{a, abb, ba\}$

- **Expresión regular**: $e_1 = a \cup abb \cup ba$

  Esta expresión regular representa la unión de las cadenas "a", "abb" y "ba", que son los elementos de L_1.

Lenguaje $L_2 = \{aab^m : m \geq 0\}$

- **Expresión regular**: $e_2 = aab^*$

  Aquí, "aa" es una parte fija, seguida por cualquier cantidad de "b" (incluyendo cero "b"), lo cual está representado por el cierre de Kleene b^*.

Lenguaje $L_3 = \{a^n b^m : n, m \geq 0\}$

- **Expresión regular**: $e_3 = a^* b^*$

  En esta expresión, a^* representa cualquier cantidad de "a" (incluyendo ninguna "a"), y b^* representa cualquier cantidad de "b" (incluyendo ninguna "b"). La concatenación de a^* y b^* captura todas las combinaciones posibles de cadenas en L_3.

Lenguaje $L_4 = \{b^n a b^m : n, m \geq 0\}$

- **Expresión regular**: $e_4 = b^* a b^*$

  Esta expresión representa cualquier cantidad de "b" (usando b^*), seguida de una "a" fija, y luego cualquier cantidad de "b" nuevamente (otra vez b^*).

Lenguaje $L_5 = \{b\alpha : \alpha \in \Sigma^*\}$

- **Expresión regular**: $e_5 = b(a+b)^*$

  Aquí, comenzamos con una "b" fija y luego cualquier combinación de "a" y "b", lo cual es representado por $(a+b)^*$.

Lenguaje $L_6 = \{\alpha b a \beta : \alpha, \beta \in \Sigma^*\}$

- **Expresión regular**: $e_6 = (a+b)^* ba (a+b)^*$

  La expresión tiene "ba" en el medio, rodeada por cualquier combinación de "a" y "b" antes y después, que se representa con $(a+b)^*$.

Lenguaje $L_7 = \{b\alpha a : \alpha \in \Sigma^*\}$

- **Expresión regular**: $e_7 = b(a+b)^*a$

  Esta expresión comienza con "b", luego permite cualquier combinación de "a" y "b" en el medio, y termina con una "a".

Lenguaje $L_8 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha| \text{ es par}\}$

- **Expresión regular**: $e_8 = (aa + ab + ba + bb)^*$

  Aquí, cada par de símbolos (ya sea "aa", "ab", "ba" o "bb") garantiza que la longitud total sea par. El cierre de Kleene de esta agrupación asegura que cualquier longitud par de símbolos se pueda formar.

Lenguaje $L_9 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha|_a \text{ es par}\}$

- **Expresión regular**: $e_9 = (b^*ab^*a)^*b^*$

  Esta expresión asegura que el número de "a" en cualquier cadena sea par. Entre cada "a", puede haber cualquier cantidad de "b", y la secuencia completa puede repetirse cero o más veces. La b^* al final permite terminar la cadena con "b".

Lenguaje $L_{10} = \{\alpha \in \Sigma^* : \text{"aa" no ocurre en } \alpha\}$

- **Expresión regular**: $e_{10} = (b + ab)^*$

  Esta expresión permite cualquier cantidad de "b" y "ab" en cualquier combinación, sin permitir dos "a" consecutivas (lo cual ocurriría en "aa").

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes expresiones regulares obtener el lenguaje regular que denotan:

- $e_1 = b^*ab^*$ $\Rightarrow$ $L_1 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha|_a = 1\}$
- $e_2 = b(a+b)^*$ $\longrightarrow$ $L_2 = \{b, a^*b^*\}$
- $e_3 = (aa+ab+ba+bb)^*$ $\longrightarrow$ $L_3 = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha| \text{ es par}\}$
- $e_4 = c^*(b+ac^*)^*$ $\longrightarrow$ $L_4 = \{c^*, \{\{b\}, \{ac\}^*\}^*\}$
- $e_5 = (\epsilon + a)^*(a+b)^*(ba)^*$ $\longrightarrow$ $L_5 =$ $\{w \in \{a,b\}^* : w$ puede comenzar con cero o más "a", seguido por cualquier combinación de "a" y "b", y terminar con "ba"$\}$
- $e_6 = (a+bb^*a)^*b^*$ $\longrightarrow$ $L_6 = \{w \in \{a,b\}^* :$ w consiste en cero o más repeticiones de "a" o "bb^*a", seguidas de cero o más "b"$\}$