1. Complete las siguientes derivaciones agregando las ramas que faltan (indicadas por puntos suspensivos ⋮), las reglas utilizadas en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas. En ambas derivaciones se deben cancelar todas las hipótesis.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{\varphi \qquad \dfrac{\neg\varphi\wedge\neg\psi}{\neg\varphi}}{\bot} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}{\dfrac{\bot}{\neg(\varphi\vee\psi)}}}{(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\to(\neg(\varphi\vee\psi))}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi}{\varphi\vee\neg\varphi} \qquad \neg(\varphi\vee\neg\varphi)}{\bot}}{\varphi} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot}}{\varphi\vee\neg\varphi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_1}{\varphi\vee\neg\varphi}{\scriptstyle \vee I} \qquad [\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]_2}{\bot}{\scriptstyle 2\to E}}{\varphi}{\scriptstyle RAA_1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\varphi]_3}{\varphi\vee\neg\varphi} \qquad [\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]_2}{\bot}\\ \vdots\end{array}}{\neg\varphi}{\scriptstyle RAA_3}}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{\varphi\vee\neg\varphi}{\scriptstyle RAA_2}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi\vee\psi]_1 \qquad \dfrac{[\varphi]_3 \qquad \dfrac{[\neg\varphi\wedge\neg\psi]_2}{\neg\varphi}{\scriptstyle E\wedge}}{\bot}{\scriptstyle \to E} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{[\psi]_3 \qquad \dfrac{[\neg\varphi\wedge\neg\psi]_2}{\neg\psi}}{\bot}{\scriptstyle \to E}\end{array}}{\bot}{\scriptstyle \vee E_3}}{\neg(\varphi\vee\psi)}{\scriptstyle \to I_1}}{(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\to(\neg(\varphi\vee\psi))}{\scriptstyle \to I_2}$$

2. Encuentre derivaciones para:
   a) $\{\neg\varphi\vee\psi\}\vdash\varphi\to\psi$. (Usando eliminación de $\vee$).
   b) $\{\neg\varphi\vee\neg\psi\}\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)$.
   c) $\{\varphi\to\psi\}\vdash\neg\varphi\vee\psi$. (Sugerencia: la última regla aplicada es RAA, no intente con $\vee I$. Está desarrollado en el apunte).
   d) $\{\neg(\varphi\wedge\psi)\}\vdash\neg\varphi\vee\neg\psi$. (Misma idea de la derivación anterior).

a) $\{\neg\varphi\vee\psi\}\vdash\varphi\to\psi$ (usando eliminación de $\vee$)

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad [\neg\varphi]_2}{\bot}}{\psi} \qquad [\psi]_2}{\psi}{\scriptstyle \vee E_2}}{\varphi\to\psi}{\scriptstyle \to I_1}$$

b) $\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$ $\qquad\qquad$ $\varphi \wedge \psi$ hip

$$\dfrac{\neg\varphi \vee \neg\psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\,E\wedge \qquad [\neg\varphi]_2}{\bot}\to E \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\,\wedge E \qquad [\neg\psi]_2}{\bot}\to E}{\dfrac{\bot}{\neg(\varphi \wedge \psi)}\to I_1}\vee E_2$$

c) $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$. (Sugerencia: la última regla aplicada es RAA, no intente con $\vee I$. Está desarrollado en el apunte).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]_2}{\psi}\to E}{\neg\varphi \vee \psi}\vee I \qquad [\neg(\neg\varphi \vee \psi)]_1}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_2}{\neg\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \neg(\neg\varphi \vee \psi)}{\bot}\to E}{\neg\varphi \vee \psi}RAA_1$$

$\neg(\neg\varphi \vee \psi)$ hip

Dudo mucho de esta resolución

d) $\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$. (Misma idea de la derivación anterior).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_2 \quad [\psi]_3}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad \neg(\varphi \wedge \psi)}{\bot}\to E}{\neg\psi}\to I_3}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\vee I \qquad [\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)]_1}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_2}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\vee I \qquad [\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)]_1}{\bot}\to E}{\neg\varphi \vee \neg\psi}RAA_1$$

$[\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)]_1$
$[\varphi]_2$
$[\psi]_3$

3. Utilizando RAA encontrar derivaciones para:

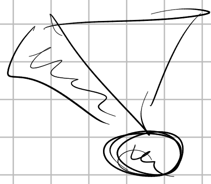
  a) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$
  b) (*) $\quad \vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \psi$

a)

$\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad [\varphi \to \bot]_2}{\bot}\to E}{(\varphi \to \bot) \to \bot}\to I_2}{\varphi \to ((\varphi \to \bot) \to \bot)}\to I_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \to \bot) \to \bot]_4 \quad [\varphi \to \bot]^3}{\bot}\to E}{\varphi}RAA_3}{((\varphi \to \bot) \to \bot) \to \varphi}\to I_4}{(\varphi \to ((\varphi \to \bot) \to \bot)) \wedge (((\varphi \to \bot) \to \bot) \to \varphi)}\wedge I$$

b) $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \psi$



Para pensar !!

$$(\varphi \to \psi) \to \varphi$$
$$\varphi \to \psi$$
$$\psi \to \bot$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\qquad\qquad}{\bot}\,RAA}{\psi}\,\to I_1}{((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \psi}$$

5. Sean $\Delta, \Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$. Demostrar las siguientes afirmaciones.
   a) Si $\Delta \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma$ entonces $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$.
   b) Comprobar que si no se une $\{\varphi\}$ en el ítem anterior, la afirmación no es cierta.
   c) Si $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\Delta \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

a) Asumamos que $\psi \in \Delta$

Caso 1: $\psi = \varphi \Rightarrow \psi \in \{\varphi\} \Rightarrow \psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$

Caso 2: $\psi \neq \varphi \Rightarrow \psi \in \Delta \setminus \{\varphi\}$ pero sabemos que $\Delta \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow \psi \in \Gamma \quad \therefore \psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$

b) La afirmación no es cierta pues no se cumple el caso 1

c) $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\Delta \vdash \varphi$, Γ es un superset de Δ. Entonces, por monotonidad si φ se deriva de Δ, entonces también se deriva de Γ.

6. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) $\vdash \varphi$ implica $\vdash \psi \to \varphi$.

b) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\neg\varphi \vdash \psi$ entonces $\vdash \psi$.

c) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$.

d) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$.

a) $\vdash \varphi$ implica $\vdash \psi \to \varphi$

$\vdash \varphi$

{Definición} $\iff$

$\exists D \in \mathcal{D} : Hip(D) = \emptyset \wedge cond(D) = \varphi$

$\Rightarrow$ {sea {

$$D' = \dfrac{\overset{\vdots D}{\varphi}}{\psi \to \varphi} \to I$$

$$Hip(D') = \left(\dfrac{\overset{\vdots D}{\varphi}}{\psi \to \varphi} \to I \right) = Hip\left(\overset{\vdots}{\varphi} D \right) - \{\psi\} = \emptyset$$

$Hip(D') = \emptyset \wedge cond(D') = \psi \to \varphi$

$\iff$

$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \psi \to \varphi$

b) $\varphi \vdash \psi$ y $\neg\varphi \to \psi \Rightarrow \vdash \psi$

Demo:

$\{\varphi\} \vdash \psi$ & $\{\neg\varphi\} \vdash \psi \Rightarrow \vdash \psi$

$\iff$ {Def}

$\langle \exists D_0 \in \mathcal{D} : Hip(D_0) \subseteq \{\varphi\}$ & $cond(D_0) = \psi \rangle$
& $\langle \exists D_1 \in \mathcal{D} : Hip(D_1) \subseteq \{\neg\varphi\}$ & $cond(D_1) = \psi \rangle$

$\Rightarrow$ {sea:

$$D = \dfrac{\overset{\vdots}{\varphi \vee \neg\varphi} \quad \overset{\vdots D_0}{\psi} \quad \overset{\vdots D_1}{\psi}}{\psi} \vee E$$

$$Hip(D) = Hip\left(\overset{\vdots}{\varphi \vee \neg\varphi}\right) \cup Hip\left(\overset{\vdots D_0}{\psi}\right) - \{\varphi\} \cup Hip\left(\overset{\vdots D_1}{\psi}\right) - \{\neg\varphi\}$$

$$= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset$$

$$= \emptyset$$

}

$\langle \exists D \in \mathcal{D} : Hip(D) = \emptyset$ & $cond(D) = \psi \rangle$

$\iff$ {Def}

$\vdash \psi$

5c)
$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Rightarrow \Gamma - \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$

Demostración suponiendo el antecedente:
Por antecedente, existe D_0 tal que:
$Hip(D_0) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$
$Concl(D_0) = \psi$

Sea:

$$D = \cfrac{\cfrac{[\varphi]_1}{\varphi \to \varphi} \to I_1 \quad \cfrac{\overset{\vdots}{\psi}^{D_0}}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)} \wedge I$$

Voy a probar que D es la derivación que atestigua $\Gamma - \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$:

$Hip(D)$

$=$

$Hip\left(\dfrac{[\varphi]_1}{\varphi \to \varphi} \to I_1\right) \cup Hip\left(\dfrac{\overset{\vdots}{\psi}^{D_0}}{\varphi \to \psi} \to I_2\right)$

$=$

$(Hip(\varphi) - \{\varphi\}) \cup \left(Hip\left(\overset{\vdots}{\psi}D_0\right) - \{\varphi\}\right)$

$\subseteq \{Hip(D_0) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}\}$

$\emptyset \cup ((\Gamma \cup \{\varphi\}) - \{\varphi\})$

$=$

$\Gamma - \{\varphi\}$

$Concl(D) = (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$ es por definición

Con eso queda probado $\Gamma - \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$

5d)
$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$

Desmotración suponiendo el antecedente:
Por antecedente existe D_0 tal que:

$D_0 \in \mathcal{D}$ tal que:
$Hip(D_0) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$
$Concl(D_0) = \psi$

Sea:

$$D = \cfrac{\cfrac{\overset{\vdots}{\psi}^{D_0}}{\psi \vee \neg\varphi} \vee I}{\varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)} \to I$$

Voy a probar que D es la derivación que atestigua $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$:

$Hip(D)$

$=$

$Hip\left(\dfrac{\overset{\vdots}{\psi}^{D_0}}{\psi \vee \neg\varphi} \vee I\right) - \{\varphi\}$

$=$

$Hip\left(\overset{\vdots}{\psi}D_0\right) - \{\varphi\}$

$\subseteq \{Hip(D_0) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}\}$

$(\Gamma \cup \{\varphi\}) - \{\varphi\}$

$=$

$\Gamma - \{\varphi\}$

$\subseteq$

Γ

$Concl(D) = \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$ es por definición

7. Demuestre los casos inductivos $(\vee I)$ y $(\vee E)$ de la prueba del Teorema de Corrección.

Sea $D \in \mathcal{D}$

$$\langle \forall \Gamma \in \mathcal{P}(PROP) : Hip(D) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \models cond(D) \rangle$$

Demostración por inducción:

PROP:

$D = \varphi$ $\quad \langle \forall \Gamma \in \mathcal{P}(PROP) : Hip(\varphi) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \models cond(\varphi) \rangle$

Trabajo sin el $\forall$:

$Hip(\varphi) \subseteq \Gamma$

$\Leftrightarrow \{Def\ Hip\}$

$\{\varphi\} \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow$

$\Gamma \models \varphi$

$\Leftrightarrow$

$\Gamma \models cond(\varphi)$

$\boxed{\vee I}$

$$D = \frac{\overset{\vdots\ D_0}{\varphi}}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

Suponiendo que vale para D_0

$$\left\langle \forall \Gamma \in \mathcal{P}(PROP) : Hip\left(\frac{\overset{\vdots\ D_0}{\varphi}}{\varphi \vee \psi} \vee I\right) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \models cond\left(\frac{\overset{\vdots\ D_0}{\varphi}}{\varphi \vee \psi} \vee I\right)\right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \forall \Gamma \in \mathcal{P}(PROP) : Hip\left(\overset{\vdots\ D_0}{\varphi}\right) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \models \varphi \vee \psi \rangle$$

Trabajo sin el $\forall$ y suponiendo el antecedente:

$Hip\left(\overset{\vdots\ D_0}{\varphi}\right) \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow \{HI\}$

$\Gamma \models cond\left(\overset{\vdots\ D_0}{\varphi}\right)$

$\Leftrightarrow \{Def\}$

$\Gamma \models \varphi$

$\Leftrightarrow \{Def\}$

$\langle \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 1 \rangle$

$\Rightarrow \langle \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1 \ \& \ [\![\varphi \vee \psi]\!]_v = 1 \rangle$

$\Leftrightarrow \{ Def \}$

$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$

$\boxed{\vee E}$

$$D = \cfrac{\overset{\vdots}{\varphi \vee \psi}^{D_0} \quad \overset{\vdots}{\chi}^{D_1} \quad \overset{\vdots}{\chi}^{D_2}}{\chi} \vee E$$

Suponiendo que vale para D_0, D_1, D_2

$$\left\langle \forall \Gamma \in \mathcal{P}(Prop) : Hip\left(\cfrac{\overset{\vdots}{\varphi \vee \psi}^{D_0} \quad \overset{\vdots}{\chi}^{D_1} \quad \overset{\vdots}{\chi}^{D_2}}{\chi} \vee E\right) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \vDash Concl\left(\cfrac{\overset{\vdots}{\varphi \vee \psi}^{D_0} \quad \overset{\vdots}{\chi}^{D_1} \quad \overset{\vdots}{\chi}^{D_2}}{\chi} \vee E\right) \right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\langle \forall \Gamma \in \mathcal{P}(Prop) : Hip\left(\overset{\vdots}{\varphi \vee \psi}^{D_0}\right) \cup \left(Hip\begin{pmatrix}\varphi \\ \vdots D_1 \\ \chi\end{pmatrix} - \{\varphi\}\right) \cup \left(Hip\begin{pmatrix}\psi \\ \vdots D_2 \\ \chi\end{pmatrix} - \{\psi\}\right) \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \vDash \chi \right\rangle$$

Trabajo sin el $\forall$:

$$Hip\left(\overset{\vdots}{\varphi \vee \psi}^{D_0}\right) \cup \left(Hip\begin{pmatrix}\varphi \\ \vdots D_1 \\ \chi\end{pmatrix} - \{\varphi\}\right) \cup \left(Hip\begin{pmatrix}\psi \\ \vdots D_2 \\ \chi\end{pmatrix} - \{\psi\}\right) \subseteq \Gamma$$

$\Rightarrow$

$$Hip\left(\overset{\vdots}{\varphi \vee \psi}^{D_0}\right) \subseteq \Gamma \ \& \ Hip\begin{pmatrix}\varphi \\ \vdots D_1 \\ \chi\end{pmatrix} - \{\varphi\} \subseteq \Gamma \ \& \ Hip\begin{pmatrix}\psi \\ \vdots D_2 \\ \chi\end{pmatrix} - \{\psi\} \subseteq \Gamma$$

$\Rightarrow$ {Hipótesis inductiva}

$$\Gamma \vDash Concl\left(\overset{\vdots}{\varphi \vee \psi}^{D_0}\right) \& \ \Gamma \cup \{\varphi\} \vDash Concl\begin{pmatrix}\varphi \\ \vdots D_1 \\ \chi\end{pmatrix} \ \& \ \Gamma \cup \{\psi\} \vDash Concl\begin{pmatrix}\psi \\ \vdots D_2 \\ \chi\end{pmatrix}$$