Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 4 de octubre de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Deducción natural
   - Definición inductiva de $\mathcal{D}$
   - Inducción y recursión en derivaciones
   - Relación de deducción y teoremas
2. Corrección y completitud de la lógica proposicional
   - Relación entre verdad y demostrabilidad
   - Teorema de corrección

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

$\mathcal{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida que satisface que:

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

$\mathcal{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida que satisface que:

- Los árboles de un sólo nodo φ, con $\varphi \in PROP$, pertenecen a $\mathcal{D}$.

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

$\mathcal{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida que satisface que:

- Los árboles de un sólo nodo φ, con $\varphi \in PROP$, pertenecen a $\mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots \, D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots \, D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

$\mathcal{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida que satisface que:

- Los árboles de un sólo nodo φ, con $\varphi \in PROP$, pertenecen a $\mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D := \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots D_1 & \vdots D_2 \\ \varphi & \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \in \mathcal{D}$.

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

$\mathcal{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida que satisface que:

- Los árboles de un sólo nodo φ, con $\varphi \in PROP$, pertenecen a $\mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D := \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 \\ \varphi & \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \in \mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

$\mathcal{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida que satisface que:

- Los árboles de un sólo nodo φ, con $\varphi \in PROP$, pertenecen a $\mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D := \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 \\ \varphi & \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I \in \mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D_1 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi}\wedge E \in \mathcal{D}$ y

$$D_2 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'}\wedge E \in \mathcal{D}.$$

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \psi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D' := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$.

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{matrix} \vdots\, D \\ \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}$ entonces $D' := \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$.

- Si $\begin{matrix} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{matrix} \in \mathcal{D}$ y $\begin{matrix} \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}$ entonces

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \psi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D' := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$.

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

$$D_1 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}\vee I \in \mathcal{D} \quad \text{y} \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi'\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}\vee I \in \mathcal{D}.$$

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

$$D_1 := \cfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I \in \mathcal{D} \quad \text{y} \qquad D_2 := \cfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I \in \mathcal{D}.$$

- Si $\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, $\begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \chi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots D_3 \\ \chi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

$$D_1 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I \in \mathcal{D} \quad \text{y} \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I \in \mathcal{D}.$$

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \chi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_3 \\ \chi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

$$D_4 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \chi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D_3 \\ \chi \end{array}}{\chi} \vee E \in \mathcal{D}$$

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D' := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\, RAA \in \mathcal{D}$.

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D' := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\, RAA \in \mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $\dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\, \bot \in \mathcal{D}$.

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer inducción y recursión en $\mathcal{D}$.

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer inducción y recursión en $\mathcal{D}$.

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D.

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer inducción y recursión en $\mathcal{D}$.

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D.

$\boxed{PROP}$ Si $\varphi \in PROP$, $Hip(\varphi) := \{\varphi\}$.

Recursión en derivaciones: Hip

$\boxed{\wedge I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots D & \vdots D' \\ \varphi & \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I\right) := Hip(D) \cup Hip(D').$$

Recursión en derivaciones: Hip

$\boxed{\wedge I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi'\end{array}}{\varphi\wedge\varphi'}\wedge I\right) := Hip(D)\cup Hip(D').$$

$\boxed{\wedge E}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\wedge\varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E\right) = Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\wedge\varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E\right) := Hip(D).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\to I}$

$$Hip\left(\cfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to I\right) := Hip(D)\setminus\{\varphi\}.$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\to I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I\right) := Hip(D) \setminus \{\varphi\}.$$

$\boxed{\to E}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E\right) := Hip(D_1) \cup Hip(D_2)$$

Recursión en derivaciones: Hip

$\boxed{\vee I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}}{\varphi\wedge\varphi'}\vee I\right) = Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi'\end{array}}{\varphi\wedge\varphi'}\vee I\right) := Hip(D).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\vee I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'}\,\vee I\right) = Hip\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D\\ \varphi'\end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'}\,\vee I\right) := Hip(D).$$

$\boxed{\vee E}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D_1\\ \varphi \vee \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\, D_2\\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\, D_3\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\,\vee E\right) :=$$

$$Hip(D_1) \cup \big(Hip(D_2) \setminus \{\varphi\}\big) \cup \big(Hip(D_3) \setminus \{\psi\}\big).$$

Recursión en derivaciones: Hip

$\boxed{RAA}$

$$Hip\left(\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \bot \\ \hline \varphi \end{array}\, RAA\right) := Hip(D) \setminus \{\neg\varphi\}.$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{RAA}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,RAA\right) := Hip(D) \setminus \{\neg\varphi\}.$$

$\boxed{\bot}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,\bot\right) := Hip(D).$$

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

- $\vdash \varphi \vee \neg\varphi \iff \exists D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi \vee \neg\varphi$.

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
  - $\{\psi, \neg\varphi \to \neg\psi\} \vdash \varphi$ (en video de 2021).

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
  - $\{\psi, \neg\varphi \to \neg\psi\} \vdash \varphi$ (en video de 2021).
- Principio de no contradicción: $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La implicación $(\Rightarrow)$ es la **Completitud** y $(\Leftarrow)$ es la **Corrección**.

Teorema de corrección

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash \varphi$*, entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

Teorema de corrección

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash \varphi$*, entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

Demostración.

Probamos por inducción en $D \in \mathcal{D}$:

“Para todo Γ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models Concl(D)$”.

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma "$\forall\Gamma : \ldots$":
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma “$\forall\Gamma : \ldots$”:
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

$\boxed{\mathit{PROP}}$ $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq \mathit{PROP}$.

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma "$\forall \Gamma : \ldots$":
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

$\boxed{\mathit{PROP}}$ $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq \mathit{PROP}$.

$$\mathit{Hip}(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma$$

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma "$\forall\Gamma : \ldots$":
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

$\boxed{\mathit{PROP}}$ $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq \mathit{PROP}$.

$$\mathit{Hip}(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \varphi \in \Gamma$$

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma “$\forall\Gamma : \ldots$”:
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

$\boxed{\mathit{PROP}}$ $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq \mathit{PROP}$.

$$\mathit{Hip}(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \varphi \in \Gamma \implies \Gamma \models \varphi = \mathit{Concl}(D).$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots D_1\\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots D_2\\ \varphi_2\end{array}$,

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi_1 \end{array}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi_2 \end{array}$,

1. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}\left(\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\begin{array}{c} \| \\ \mathit{Hip}(D_1) \cup \mathit{Hip}(D_2) \end{array}$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi_1 \end{array}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi_2 \end{array}$,

1. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}\left(\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\|$$

$$\mathit{Hip}(D_1) \cup \mathit{Hip}(D_2) \supseteq \mathit{Hip}(D_1), \mathit{Hip}(D_2).$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$||$$

$$Hip(D_1) \cup Hip(D_2) \supseteq Hip(D_1), Hip(D_2).$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots\, D_1 \\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D_2 \\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1 \\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D_2 \\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\| $$

$$Hip(D_1) \cup Hip(D_2) \supseteq Hip(D_1), Hip(D_2).$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $Hip\left(\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\, D_1 & \vdots\, D_2\\ \varphi_1 & \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\| $$

$$Hip(D_1) \cup Hip(D_2) \supseteq Hip(D_1), Hip(D_2).$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots D_1\\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots D_2\\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D_1\\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots D_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Sea f una asignación que valide $\Gamma \implies [\![\varphi_1]\!]_f = 1$ y $[\![\varphi_2]\!]_f = 1$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots D_1 \\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots D_2 \\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D_1 \\ \varphi_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots D_2 \\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Sea f una asignación que valide $\Gamma \implies [\![\varphi_1]\!]_f = 1$ y $[\![\varphi_2]\!]_f = 1$.
Luego $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_f = \text{mín}\{[\![\varphi_1]\!]_f, [\![\varphi_2]\!]_f\} = 1$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo $\Gamma,\ \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ , $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \psi$, y

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\;Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}\left(\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots\, D \\ \psi \end{array}$,

- para todo Γ', $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $Hip(D) \smallsetminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $Hip(D) \smallsetminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$ entonces f valida $\Gamma \cup \{\varphi\}$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$ entonces f valida $\Gamma \cup \{\varphi\}$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{matrix}\varphi \\ \vdots D \\ \psi\end{matrix}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$ entonces f valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies [\![\psi]\!]_f = 1$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$ entonces f valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies [\![\psi]\!]_f = 1$
$\implies [\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$ entonces f valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies [\![\psi]\!]_f = 1$
$\implies [\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$.
2. $[\![\varphi]\!]_f = 0$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$ entonces f valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies [\![\psi]\!]_f = 1$
$\implies [\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$.
2. $[\![\varphi]\!]_f = 0 \implies [\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$.