1. Probar que todo átomo es irreducible.

Definición

Dado un poset $\mathbf{P}$ con elemento mínimo 0, decimos que a es un *átomo* si cubre a 0. Denotamos con $At(\mathbf{P}) = \{a \in P : a \text{ es átomo de } \mathbf{P}\}$.

Irreducibilidad:
Sea:
$(L, \vee, \wedge)$ un reticulado
$x \in L$

x es $\vee$-irreducible $\Leftrightarrow$ $x \neq 0$ & $(\forall y, z \in L : x = y \vee z \Rightarrow x = y \mid\mid x = z)$
$\mathrm{Irr}(L) = \{y \in L : y \text{ es } \vee\text{-irreducible}\}$

Demostración:

Queremos demostrar que **todo átomo es irreducible**. Para ello, tomamos un átomo a en un reticulado L y probamos que es irreducible.

1. Supongamos que a es un átomo, es decir, $a \neq 0$ y no existe ningún b tal que $0 < b < a$.
2. Para demostrar que a es irreducible, necesitamos probar que si $a = x \vee y$, entonces debe suceder que $a = x$ o $a = y$.
3. Ahora supongamos que $a = x \vee y$ para algún x y y en el reticulado.
4. Dado que a es un átomo, sabemos que no puede haber ningún elemento estrictamente entre 0 y a, lo que significa que x o y no pueden ser estrictamente menores que a sin ser iguales a a.
5. Si x y y fueran ambos estrictamente menores que a, entonces $x \vee y$ también sería estrictamente menor que a, lo cual es imposible porque suponemos que $a = x \vee y$.
6. Por lo tanto, si $a = x \vee y$, al menos uno de los dos elementos x o y debe ser igual a a.
7. Esto demuestra que a no puede descomponerse como la unión de dos elementos estrictamente menores, y por lo tanto, a es irreducible.

2. Sea L un reticulado. Demostrar que si $x \in L$ es irreducible y $x_1, \ldots, x_n \in L$ son todos distintos de x, entonces $x \neq \sup\{x_1, \ldots, x_n\}$.

x es irreducible y $x \neq x_1 \ldots x_n$
probar que $x \neq \sup\{x_1 \ldots x_n\}$

Como x es irreducible, cubre únicamente a un solo elemento. Por lo tanto si x fuese el supremo de los x1...xn debería estar incluído en ellos, pero por hipótesis no lo está. Por lo tanto queda probado.

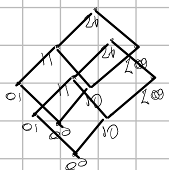
3. Determine si se cumplen las siguientes relaciones de isomorfismo.
   a) $D_{2310} \cong \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\})$.
   b) $D_{90} \cong \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$.

a) $2310 = 1155.2 = 231.2.5 = 77.2.5.3 = 11.7.5.3.2$

D_{2310} tiene los mismos atomos que $P(\{a,b,c,d,e\})$ $\therefore$ son isomorfos

b) D_{90}

$90 = 9.10 = 3^2.2.5$
No son isomorfos pues 90 no se descompone en primos únicos



4. Probar que $\emptyset$ es decreciente y que si D_1 y D_2 son decrecientes entonces $D_1 \cup D_2$ también lo es.

Definiciones clave:

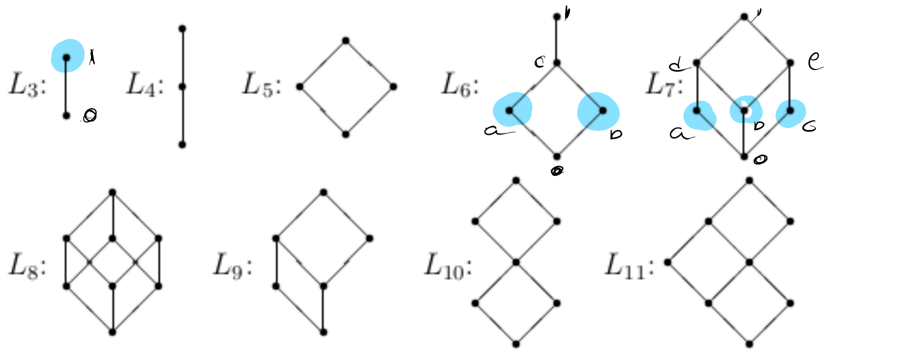
1. **Conjunto decreciente**: Un conjunto D es **decreciente** (o "ordenado hacia abajo") si, para cualquier elemento $d \in D$ y cualquier elemento x tal que $x \leq d$, se cumple que $x \in D$. Es decir, si d pertenece a D, entonces todos los elementos menores o iguales a d también pertenecen a D.

Conclusión: $\emptyset$ es decreciente porque no tiene elementos y, por lo tanto, cumple trivialmente la condición.

Supongamos que D_1 y D_2 son dos conjuntos decrecientes. Debemos demostrar que la unión de estos conjuntos, $D_1 \cup D_2$, es también un conjunto decreciente.

- Sea $d \in D_1 \cup D_2$. Esto significa que $d \in D_1$ o $d \in D_2$.
- Como D_1 y D_2 son decrecientes, entonces si $d \in D_1$ y $x \leq d$, se cumple que $x \in D_1$, porque D_1 es decreciente. Lo mismo ocurre si $d \in D_2$: si $x \leq d$ y $d \in D_2$, entonces $x \in D_2$.
- Por lo tanto, si $d \in D_1 \cup D_2$ y $x \leq d$, entonces $x \in D_1 \cup D_2$, ya que x estará en D_1 o en D_2, dependiendo de dónde esté d.
- **Conclusión**: $D_1 \cup D_2$ es también un conjunto decreciente.

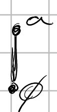
5. Considere los reticulados L_3, L_6 y L_7 dibujados en el Práctico 4.
   a) Halle en cada caso $At(L)$.
   b) Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(At(L))$.
   c) Ahora usando esta información, determine cuáles de ellos eran álgebras de Boole.



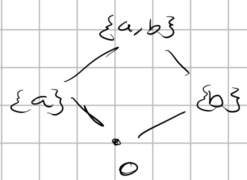
$At(L)$

b) $P(At(L_3))$

No de Boole



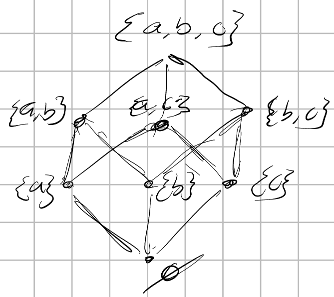
$P(At(L_6))$



Sí AB

$P(At(L_7)) = (\{a,b,c\})$

Sí AB



6. *a*) Defina de manera explícita el mapa F del Teorema de Representación de Álgebras de Boole finitas para el Álgebra de Boole D_{30}.

b) Dé una caracterización de dicho mapa F para los D_n con n un producto de primos distintos.

a) D_{30}

$$\boxed{\begin{aligned} F: D_{30} &\to P(At(D_{30})) \\ x &\mapsto \{a \in At(D_{30}) : a \leq x\} \end{aligned}}$$

$30 = 5 . 3 . 2$

$D_{30} = (\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\})$

2. **Definir el mapa F:**

- El mapa F debe asignar a cada divisor de 30 un subconjunto de X (el conjunto de primos que dividen 30).
- La idea es que, a cada divisor $d \in D_{30}$, le asignaremos el subconjunto de X que contiene los primos que dividen a d. Por ejemplo:
  - 1 es divisible por ningún primo, por lo tanto, le asignamos el conjunto vacío: $F(1) = \emptyset$.
  - 2 es divisible solo por el primo 2, así que le asignamos el conjunto $\{2\}$: $F(2) = \{2\}$.
  - 3 es divisible solo por el primo 3, así que $F(3) = \{3\}$.
  - 5 es divisible solo por el primo 5, por lo que $F(5) = \{5\}$.
  - 6 es divisible por los primos 2 y 3, entonces $F(6) = \{2, 3\}$.
  - 10 es divisible por 2 y 5, así que $F(10) = \{2, 5\}$.
  - 15 es divisible por 3 y 5, entonces $F(15) = \{3, 5\}$.
  - 30 es divisible por todos los primos $2, 3, 5$, así que $F(30) = \{2, 3, 5\}$.

El mapa F preserva estas operaciones:

- Por ejemplo, $\text{MCD}(6, 10) = 2$, y la intersección de los subconjuntos $F(6) = \{2, 3\}$ y $F(10) = \{2, 5\}$ es $\{2\}$, que corresponde a $F(2)$.
- Similarmente, $\text{MCM}(6, 10) = 30$, y la unión de los subconjuntos $\{2, 3\}$ y $\{2, 5\}$ es $\{2, 3, 5\}$, que corresponde a $F(30)$.

Conclusión:

El **mapa** F del Teorema de Representación de Álgebras de Boole para el álgebra D_{30} asigna a cada divisor de 30 un subconjunto de $\{2, 3, 5\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(1) &= \emptyset \\ F(2) &= \{2\} \\ F(3) &= \{3\} \\ F(5) &= \{5\} \\ F(6) &= \{2, 3\} \\ F(10) &= \{2, 5\} \\ F(15) &= \{3, 5\} \\ F(30) &= \{2, 3, 5\} \end{aligned}$$

b)

Pasos para la generalización del mapa F

1. Descomposición en factores primos:

Si n es un producto de **primos distintos**, podemos escribir:

$$n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son **primos distintos**. El conjunto de divisores de n se puede escribir como:

$$D_n = \{d \mid d \text{ divide a } n\}$$

Cada divisor $d \in D_n$ se puede expresar como un producto de algunos de los primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Es decir, cada divisor de n está determinado por un subconjunto de los factores primos de n.

2. Conjunto base:

El conjunto base para el mapa F será el conjunto de los **primos que dividen a** n. Definimos el conjunto:

$$X = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$$

3. Definición del mapa F:

El mapa F asignará a cada divisor $d \in D_n$ un subconjunto de X. El subconjunto que corresponde a d está compuesto por los **primos que dividen a** d.

- Por ejemplo, si $d = p_1 \times p_2$, entonces $F(d) = \{p_1, p_2\}$.
- Si $d = p_3$, entonces $F(d) = \{p_3\}$.
- Para el divisor n, que está compuesto por todos los primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, el mapa asignará el conjunto completo: $F(n) = X$.

En general, para cada divisor d de n, el mapa F se define como:

$$F(d) = \{p_i \mid p_i \text{ divide a } d\}$$

4. Isomorfismo y preservación de operaciones:

El mapa F preserva las operaciones de unión e intersección, y funciona de manera similar a lo que vimos en el caso de D_{30}. En este caso general:

- **Unión de subconjuntos** en el álgebra de Boole corresponde al **máximo común divisor** (MCM) de divisores.
- **Intersección de subconjuntos** corresponde al **mínimo común divisor** (MCD).

7. Para los reticulados L_4, L_6 y L_{10} dibujados en el Práctico 4:

   a) Señale en el diagrama los elementos irreducibles.

   b) En cada caso, dibujar el diagrama de Hasse de los irreducibles con el orden heredado.