1. Demuestre las siguientes, justificando mediante derivaciones apropiadas o (en los casos $\nvdash$) aplicando resultados del teórico, que deben ser citados correctamente.
   a) $\Gamma \vdash \neg\bot$.
   b) $\{p_0\} \nvdash p_1$.
   c) $\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.
   d) $\{\neg p_0,\ \neg(p_1 \wedge (\neg p_2))\} \nvdash p_2 \to p_0$.

a) $\Gamma \vdash \neg\bot$

Demo

$$D = \dfrac{[\bot]_1}{\neg\bot} \to I_1$$

$concl(D) = \neg\bot$

$HIP(D) = \emptyset \subseteq \Gamma$

b) $\{P_0\} \nvdash P_1$

Demo:

$\{P_0\} \nvdash P_1$

$\Leftrightarrow$ {T. de compl. y corrección}

$\{P_0\} \not\models P_1$

$\Leftrightarrow$

$(\exists v : [\![P_0]\!]_v = 1 \ \& \ [\![P_1]\!]_v = 0)$

$\Leftrightarrow$

$(\exists v : v(P_0) = 1 \ \& \ v(P_1) = 0)$

$\Leftrightarrow$ {es claro que sí}

True

c) $\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$

$$D = \dfrac{\bot}{\varphi \wedge \neg\varphi} RAA$$

1d)

$\{\neg p_0, \neg(p_1 \wedge \neg p_2)\} \nvdash p_2 \to p_0$

Demostración:

$\{\neg p_0, \neg(p_1 \wedge \neg p_2)\} \nvdash p_2 \to p_0$

$\Leftrightarrow$ {Teorema de correción y completitud}

$\{\neg p_0, \neg(p_1 \wedge \neg p_2)\} \nvDash p_2 \to p_0$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : [\![\{\neg p_0, \neg(p_1 \wedge \neg p_2)\}]\!]_v = 1 \ \& \ [\![p_2 \to p_0]\!]_v = 0\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : [\![\neg p_0]\!]_v = 1 \ \& \ [\![\neg(p_1 \wedge \neg p_2)]\!]_v = 1 \ \& \ \max\{1 - [\![p_2]\!]_v, [\![p_0]\!]_v\} = 0\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : 1 - [\![p_0]\!]_v = 1 \ \& \ 1 - [\![p_1 \wedge \neg p_2]\!]_v = 1 \ \& \ 1 - [\![p_2]\!]_v = 0 \ \& \ [\![p_0]\!]_v = 0\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : v(p_0) = 0 \ \& \ \min\{[\![p_1]\!]_v, 1 - [\![p_2]\!]_v\} = 0 \ \& \ v(p_2) = 1 \ \& \ v(p_0) = 0\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : v(p_0) = 0 \ \& \ ([\![p_1]\!]_v = 0 \ || \ 1 - [\![p_2]\!]_v = 0) \ \& \ v(p_2) = 1\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : v(p_0) = 0 \ \& \ (v(p_1) = 0 \ || \ v(p_2) = 1) \ \& \ v(p_2) = 1\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : v(p_0) = 0 \ \& \ v(p_2) = 1\rangle$

$\Leftrightarrow$ {Es claro que si existe}

True

2. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:
   a) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.
   b) $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \to \neg p_0, p_1 \wedge p_0, \ p_1 \to (\neg p_0 \vee \neg p_2), \ \neg p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.
   c) $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$.
   d) $\{p_0 \to p_1, p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \ldots\}$ ("pares implican impares").
   e) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{3n+1} : n \geq 0\}$.
   f) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{4n+1} : n \geq 0\}$.

a) veamos cada caso

(1) $P_0 \Leftrightarrow \neg P_2$

$P_0 \to \neg P_2$ & $\neg P_2 \to P_0$

$F(P_0) = 1$
$F(\neg P_2) = 1 \iff F(P_2) = 0$

ó $F(P_0) = 0$
$F(\neg P_2) = 0$ v $F(\neg P_2) = 1$
$F(P_2) = 1$ $\quad$ $F(P_2) = 0$

a)

Γ es consistente $\Leftrightarrow \Gamma \nvdash \bot$

$\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0,\ p_1 \to (\neg p_1 \to p_2),\ p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : \Gamma\ [\![\cdot]\!]_v = 1\ \&\ [\![\bot]\!]_v = 0 \rangle$

$\therefore\ [\![\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0]\!] = 1\ \&\ [\![p_1 \to (\neg p_1 \to p_2)]\!] = 1\ \&\ [\![p_0 \leftrightarrow \neg p_2]\!]$

trabajo caso por caso

$[\![\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0]\!] = 1$

$\Leftrightarrow\ \max\{ [\![1 - p_1 \wedge p_2]\!], [\![p_0]\!] \} = 1$

$\Leftrightarrow\ 1 - [\![p_1]\!]_v = 0\ \|\ v(p_2) = 0\ \|\ v(p_0) = 1$

Trabajo por separado cada uno de estos términos:

$[\![\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$\max\{1 - [\![p_1 \wedge p_2]\!], [\![p_0]\!]\} = 1$

$\Leftrightarrow$

$1 - \min\{[\![p_1]\!], [\![p_2]\!]\} = 1\ \|\ [\![p_0]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$1 - [\![p_1]\!] = 0\ \|\ v(p_2) = 0\ \|\ v(p_0) = 1$

$\Leftrightarrow$

$v(p_1) = 1\ \|\ v(p_2) = 0\ \|\ v(p_0) = 1$

$[\![p_1 \to (\neg p_1 \to p_2)]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$[\![p_1]\!] = 0\ \|\ [\![\neg p_1 \to p_2]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$v(p_1) = 0\ \|\ [\![\neg p_1]\!] = 0\ \|\ [\![p_2]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$v(p_1) = 0\ \|\ v(p_1) = 1\ \|\ v(p_2) = 1$

$\Leftrightarrow$

$v(p_2) = 1$

$[\![p_0 \leftrightarrow \neg p_2]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$[\![p_0 \to \neg p_2]\!] = 1\ \&\ [\![\neg p_2 \to p_0]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$([\![p_0]\!] = 0\ \|\ [\![\neg p_2]\!] = 1)\ \&\ ([\![\neg p_2]\!] = 0\ \|\ [\![p_0]\!] = 1)$

$\Leftrightarrow$

$(v(p_0) = 0\ \|\ v(p_2) = 0)\ \&\ (v(p_2) = 1\ \|\ v(p_0) = 1)$

$\Leftrightarrow$

$v(p_0) \neq v(p_2)$

Juntando todo:

$(v(p_1) = 1\ \|\ v(p_2) = 0\ \|\ v(p_0) = 1)\ \&\ v(p_2) = 1\ \&\ v(p_0) \neq v(p_2)$

$\Leftrightarrow$

$(v(p_1) = 1\ \|\ v(p_0) = 1)\ \&\ v(p_2) = 1\ \&\ v(p_0) = 0$

$\Leftrightarrow$

$v(p_1) = 1\ \&\ v(p_2) = 1\ \&\ v(p_0) = 0$

Es claro que exsiste una asignación así

b) $\{\neg P_1 \vee \neg P_2 \to \neg P_0,\ P_1 \wedge P_0,\ P_1 \to (\neg P_0 \vee \neg P_2), \neg P_0 \leftrightarrow \neg P_2\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P_1 \wedge P_0}{P_1}\wedge E \qquad P_1 \to (\neg P_0 \vee \neg P_2)}{\neg P_0 \vee \neg P_2}\to E \qquad \dfrac{\dfrac{P_1 \wedge P_0}{P_0}\wedge E \qquad [\neg P_0]_1}{\bot}\to E \qquad \dfrac{\dfrac{P_1 \wedge P_0}{P_0}\wedge E \qquad \dfrac{[\neg P_2]_1 \qquad \dfrac{\neg P_0 \leftrightarrow \neg P_2}{\neg P_2 \to \neg P_0}\wedge E}{\neg P_0}\to E}{\bot}\to E}{\bot}\vee E$$

∴ Es inconsistente

c) $\{P_0 \to P_1, P_1 \to P_2, P_2 \to P_3, P_3 \to \neg P_0\}$

con $F(P_n)$, $n = 0,1,2,3$

$F(P_n) = 0$
se valida todo

d) $\{P_0 \to P_1, P_0 \wedge P_2 \to P_1 \wedge P_3, P_0 \wedge P_2 \wedge P_4 \to P_1 \wedge P_3 \wedge P_5, \dots\}$

Es consistente

$v(P_i) = 0 \quad i \in \mathbb{N}_0$

e) $\{P_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg P_{3n+1} : n \geq 0\}$

Es inconsistente ya que:

$P_4, \neg P_4$ estan

$$\dfrac{P_4 \qquad \neg P_4}{\bot}\to E$$

f) $\{P_{2n} : n \geq 0\} \cup (\neg P_{4n+1} : n \geq 0)$

valida
$F(P_{2n}) = 1$
$F(P_{4n+1}) = 0$

$v(P_{2n}) = 1 \qquad v(\neg P_{4n+1}) = 1 - 0 = 1$

3. Decidir si son verdaderos o falsos. Justificar.
   - *a*) Si Γ es consistente entonces $\bot \notin \Gamma$. V
   - *b*) Si Γ es consistente entonces $\bot$ no ocurre en ninguna fórmula de Γ. F
   - *c*) Si Γ es inconsistente entonces existe φ tal que $\varphi \in \Gamma$ y $\neg\varphi \in \Gamma$. F

a) Verdadero pues si no $\Gamma \vdash \bot$ lo cual es la definición de inconsistencia.

b) Falso, por ejemplo $[\![\bot \to \bot]\!] = 1$ puede aparecer

c) Falso, si bien Γ sería inconsistente en ese caso no es necesariamente cierto que ambos estén incluidos

4. Demostrar que "$\Gamma \vdash \neg\varphi$" equivale a "$\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente".

Es una equivalencia por lo tanto parto del lado que me convenga

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Sea D_0 tal que

$Hip(D_0) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$
$concl(D_0) = \bot$

Sea

$$D = \dfrac{\overset{\vdots\, D_0}{\bot}}{\neg\varphi} \to I$$

Pruebo que D valida $\Gamma \vdash \neg\varphi$

$Concl(D) = \neg\varphi$

$$Hip\left(\dfrac{\overset{\vdots\, D_0}{\bot}}{\neg\varphi} \to I\right)$$

$= Hip(\bot\ D_0) - \{\varphi\} \subseteq (\Gamma \cup \{\varphi\}) - \{\varphi\}$

$\subseteq \Gamma$

5. Demostrar que $\Gamma^+ := \{\varphi \in PROP : \bot \text{ no ocurre en } \varphi\}$ es consistente (Ayuda: se puede dar una f explícita tal que $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma^+$).

sea:
$P: PROP \to \{0, 1\}$
$P(\bot) = 0$
$P(p_i) = 1$ $\quad i \in \mathbb{N}$
$P(\varphi \circledcirc \psi) = P(\varphi) \,\&\, P(\psi)$

$\Gamma^+ = \{\varphi \in PROP : P(\varphi\}$

Γ^+ es consistente

Demo:
sea $v(p_i) = 1$

Pruebo que v valida Γ^+

$\Gamma^+ [\![\,]\!]_v = 1$
$\iff$
$\langle \forall \varphi \in PROP : P(\varphi) \Rightarrow [\![\varphi]\!] = 1 \rangle$

$\boxed{P_i}$

$P(P_i) \Rightarrow [\![P_i]\!] = 1$

$\Leftrightarrow$

$1 \Rightarrow v(P_i) = 1$

$(\varphi \circledcirc \psi)$

$P(\varphi \vee \psi)$

$P(\varphi) \;\&\; P(\psi)$

$[\varphi] = 1 \;\&\; [\psi] = 1$

$[\varphi \vee \psi] = 1$

$\boxed{\bot}$ no está incluido.

6. Pruebe todo Γ consistente maximal realiza la disyunción:
Para toda φ, ψ, se tiene $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma]$.

Sea Γ consistente maximal

$\varphi, \psi \in PROP$

$\varphi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma \,||\, \psi \in \Gamma$

Ida $\Rightarrow$) suponiendo antecedente por absurdo

$!(\varphi \in \Gamma \,||\, \psi \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma \;\&\; \psi \notin \Gamma$

$\Leftrightarrow \{$Teorema $\neg\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma\}$

$\neg\varphi \in \Gamma \;\&\; \neg\psi \in \Gamma$

$\Rightarrow$ sea:

$$D = \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{[\varphi], \neg\varphi}{\bot}{\scriptstyle \to E} \qquad \dfrac{[\psi], \neg\psi}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{\bot}{\scriptstyle \vee E}$$

D atestigue $\Gamma \vdash \bot$

$cond(D) = \bot$

$Hip(D) = \{\varphi \vee \psi\} \cup Hip\left(\dfrac{[\varphi] \; \neg\varphi}{\bot} \to E\right) \cup Hip\left(\dfrac{[\psi] \; \neg\psi}{\bot} \to E\right)$

$= \{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \subseteq \Gamma$

Falso

Vuelta $(\Leftarrow)$ por casos.

Caso $\varphi \in \Gamma$ suponiendo antecedente:

Sea:

$$D = \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

Pruebo que D atestigua $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$

$Cond(D) = \varphi \vee \psi$ por def

$Hip(D) = \varphi \subseteq \Gamma$

Tengo entonces:

$$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$$

$$\Rightarrow \{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma\}$$

$$\varphi \vee \psi \in \Gamma$$

caso ψ es análogo.

7. Sea Γ consistente maximal y suponga $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$. Decida si las siguientes proposiciones están en Γ. (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).
   a) $\neg p_0$.
   b) $((\neg p_1) \vee p_2)$.
   c) p_3.
   d) $p_2 \to p_5$.
   e) $p_1 \vee p_6$.

a) $\neg P_0 \in \Gamma$

$\Leftrightarrow$ Teorema $\{\neg \varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma\}$

$P_0 \in \Gamma$

$\Rightarrow$

Falso.

b) $\neg P_1 \vee P_2 \notin \Gamma$

$\Rightarrow$

$\Gamma \cup \{\neg P_1 \vee P_2\}$ es inconsistente

$\Leftrightarrow \langle \nexists v : \Gamma \cup \{[\![\neg P_1 \vee P_2]\!]\} = 1 \rangle$

$\Leftarrow \langle \nexists v : \{[\![\neg(P_1 \to P_2), \neg P_1 \vee P_2]\!]\} = 1 \rangle$

$\Leftrightarrow \langle \nexists v : [\![\neg P_1 \vee P_2]\!] = 1 \ \& \ [\![\neg(P_1 \to P_2)]\!] = 1 \rangle$

Trabajo cada caso

$[\![\neg(P_1 \to P_2)]\!]$

$= 1 - [\![P_1 \to P_2]\!]$

$= 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow [\![P_1]\!] = 1$ & $[\![P_2]\!] = 0$

veamoslo en $\neg P_1 \vee P_2$

$1 - [\![P_1]\!] = 1 \Rightarrow [\![P_1]\!] = 0$

$\therefore$ ya es falso.

c.) P_3

$$\dfrac{P_3 \vee P_2 \qquad [P_3]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_2]_1}{P_1 \to P_2}\to I \qquad \neg(P_1 \to P_2)}{\bot}\to E}{P_3}\bot}{P_3}\vee E_1$$

$\Gamma \vdash P_3$

$Concl(D) = P_3$

$Hip(D) = \{P_3 \vee P_2, \neg(P_1 \to P_2)\} \subseteq \Gamma$

7d)

$p_2 \to p_5 \in \Gamma$

Demostración:

Sea:

$$D = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_2]_1}{p_1 \to p_2}\to I \qquad \neg(p_1 \to p_2)}{\bot}\to E}{p_5}\bot}{p_2 \to p_5}\to I_1$$

D atestigua $\Gamma \vdash p_2 \to p_5$ ya que:

$Concl(D) = p_2 \to p_5$

$Hip(D) = \{\neg(p_1 \to p_2)\} \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow$

$p_2 \to p_5 \in \Gamma$

7e)

$$p_1 \vee p_6 \in \Gamma$$

Demostración:
Sea:

$$D = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_1]_2 \quad [\neg p_1]_1}{\bot}}{p_2}\,\bot}{p_1 \to p_2}\,\to I_2 \qquad \neg(p_1 \to p_2)}{\bot}\,\to E}{p_1}\,RAA_1}{p_1 \vee p_6}\,\vee I$$

$[\neg p_1]_1$
$[p_1]_2$

D atestigua $\Gamma \vdash p_1 \vee p_6$ ya que:

$Concl(D) = p_1 \vee p_6$ es por definición

$$Hip(D)$$
$$=$$
$$\{\neg(p_1 \to p_2)\}$$
$$\subseteq$$
$$\Gamma$$

8. Dar al menos dos conjuntos Γ diferentes que sean consistentes maximales y contengan al conjunto $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\}$

Por teorema:

$\{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$ es consistente maximal

sea:

$v(p_0) = 1$	$u(p_0) = 1$
$v(p_1) = 1$	$u(p_1) = 1$
$v(p_2) = 0$	$u(p_2) = 0$
$v(p_3) = 1$	$u(p_3) = 1$
$v(p_i) = 1$	$u(p_i) = 0$

$\Gamma = \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$

$\Gamma' = \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_u = 1\}$

Por teorema ambos son maximales

$v(p_0) = 1$

$$\begin{aligned} v(\neg(p_1 \to p_2)) &= 1 - v(p_1 \to p_2) \\ &= 1 - \max\{1 - v(p_1), v(p_2)\} \\ &= 1 - \max\{1 - 1, 0\} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$v(p_3 \vee p_2) = \max\{v(p_3), v(p_2)\}$
$= \max\{1, 0\}$
$= 1$

Por ende $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$

Para u y v los valores es los p de $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), (p_3 \vee p_2)\}$ son los mismos así que también $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma'$

sin embargo $\Gamma \neq \Gamma'$ ya que $p_4 \in \Gamma$ pero $p_4 \notin \Gamma'$

9. Decidir si los siguientes subconjuntos de $PROP$ son consistentes maximales.
   a) $\{\varphi \in PROP : \{p_0, p_1, p_3, ...\} \vdash \varphi\}$.
   b) Las tautologías.

a) $\Gamma = \{\varphi \in PROP : \{p_0, p_1, p_3, ...\} \vdash \varphi\}$

Demo

Γ es cons. maximal
$\iff$
Γ es consistente & $\langle \forall \Gamma' \supseteq \Gamma : \Gamma'$ es consistente $: \Gamma' = \Gamma \rangle$

Prueb amos terminos del & por separado.

Γ es consistente

$\iff$
$\Gamma \nvdash \bot$

$\iff \langle \exists v : \Gamma [\![\Gamma]\!]_v = 1 \ \& \ [\![\bot]\!] = 0 \rangle$

$\iff \langle \exists v : \Gamma [\![\Gamma]\!]_v = 1 \rangle$

$\iff \langle \exists v : \langle \forall \varphi \in \Gamma : [\![\varphi]\!]_v = 1 \rangle \rangle$

$\iff \langle \exists v : \langle \forall \varphi \in PROP : V \vdash \varphi : [\![\varphi]\!]_v = 1 \rangle \rangle$

$\iff \langle \exists v : \langle \forall \varphi \in PROP : V \models \varphi : [\![\varphi]\!]_v = 1 \rangle \rangle$

$\iff \langle \exists v : \langle \forall \varphi \in PROP : \langle \exists u : V [\![\,]\!]_u = 1$
$\& \ [\![\varphi]\!]_u = 1 \rangle \ [\![\varphi]\!]_v = 1 \rangle \rangle$

$\Leftarrow \{u = v\}$
$\langle \exists v : \langle \forall \varphi \in PROP : V [\![\,]\!]_v = 1 \rangle ...$ *

$\Leftarrow \{u = v\}$

$\langle \exists v : \langle \forall \varphi \in Prop : \llbracket\mathcal{V}\rrbracket = 1 \,\&\, \llbracket\varphi\rrbracket = 1 : \llbracket\varphi\rrbracket = 1\rangle\rangle$

$\Leftarrow$

$\langle \exists v : \llbracket\mathcal{V}\rrbracket = 1 \,\&\, \langle \forall \varphi \in Prop : \llbracket\varphi\rrbracket = 1 : \llbracket\varphi\rrbracket = 1\rangle\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \exists v : \llbracket\mathcal{V}\rrbracket = 1\rangle$

$\Leftrightarrow$ {Existe, en particular:

$v(p_i) = 1$

}

True

$\langle \forall \Gamma' \supseteq \Gamma : \Gamma' \text{ es consistente} : \Gamma' = \Gamma\rangle$

$\Leftrightarrow$

$\langle \forall \varphi \notin \Gamma : \{\varphi \cup \Gamma\} \text{ es inconsistente}\rangle$

$\Leftrightarrow$ {Teorema: $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente $\Leftrightarrow \ \Gamma \vdash \neg\varphi$}

$\langle \forall \varphi \notin \Gamma : \Gamma \vdash \neg\varphi\rangle$

$\Leftrightarrow$ {Teorema: $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \ \varphi \in \Gamma$}

$\langle \forall \varphi \notin \Gamma : \ \neg\varphi \in \Gamma\rangle$

$\Leftrightarrow$ {Teorema: $\neg\varphi \in \Gamma \ \Leftrightarrow \ \varphi \notin \Gamma$}

$\langle \forall \varphi \notin \Gamma : \ \varphi \notin \Gamma\rangle$

$\Leftrightarrow$

True

Teorema:
Sea
$\Gamma \subseteq Prop$
$\varphi \in Prop$

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente $\Leftrightarrow \ \Gamma \vdash \neg\varphi$

Demostración:
$(\Rightarrow)$ en el ejercicio 4

Vuelta $(\Leftarrow)$ suponiendo el antecedente:
Sea:

$$D_1 = \begin{matrix} \vdots \\ \neg\varphi \end{matrix}$$

Tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$

(D_1 existe por antecedente)

$$D = \frac{\varphi \qquad \begin{matrix} \vdots \\ \neg\varphi \end{matrix}{\scriptstyle D_1}}{\perp} \to E$$

Pruebo que D atestigua $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$:

$Concl(D) = \perp$ es por definición

$Hip(D)$

$=$

$\{\varphi\} \cup Hip\left(\begin{matrix} \vdots \\ \neg\varphi \end{matrix}{\scriptstyle D_1}\right)$

$\subseteq \{Hip(D) \subseteq \Gamma\}$

$\{\varphi\} \cup \Gamma$

$=$

$\Gamma \cup \{\varphi\}$

9b) Las tautologías

Explanation:

- A **tautology** is a proposition that is true in every possible interpretation, such as $p \vee \neg p$ (i.e., "either p or not p").
- The set of all tautologies includes every proposition that is always true, regardless of the truth values of individual propositions.
- **Consistent**: The set of all tautologies is **consistent** because tautologies are always true and never lead to a contradiction.
- **Maximal**: To check if the set is maximal, we must determine if adding any proposition that is not already a tautology would make the set inconsistent. Since tautologies are true in all cases, adding a non-tautology could potentially lead to a contradiction. Therefore, the set of tautologies is **maximal** because adding anything outside of this set could create an inconsistency.