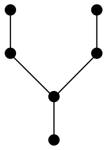
Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 23 de agosto de 2024

Ejes de Contenidos

1. Estructuras Ordenadas



2. Lógica Proposicional
3. Lenguajes y Autómatas

Parte 1: Estructuras ordenadas

Contenidos estimados para hoy

1. Relaciones
   - Relaciones sobre un conjunto
   - Propiedades
   - Relaciones de Equivalencia
   - Relaciones de orden

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de ***conjunto***,

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de ***conjunto***, ***elemento***,

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de ***conjunto***, ***elemento***, ***número*** o

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de ***conjunto***, ***elemento***, ***número*** o ***pertenecia***.

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de ***conjunto***, ***elemento***, ***número*** o ***pertenecia***.
También consideraremos como primitiva la noción de ***par ordenado*** (aunque podríamos definirlo)

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de ***conjunto***, ***elemento***, ***número*** o ***pertenecia***.
También consideraremos como primitiva la noción de ***par ordenado*** (aunque podríamos definirlo) y ***producto cartesiano*** de conjuntos.

Nociones *primitivas*

Hay nociones que no definiremos, que supondremos que les son intuitivamente conocidas.
Como las nociones de ***conjunto***, ***elemento***, ***número*** o ***pertenecia***.
También consideraremos como primitiva la noción de ***par ordenado*** (aunque podríamos definirlo) y ***producto cartesiano*** de conjuntos.

Ejemplo

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{4, 7, 3, 11\}$ está claro qué conjunto es $A \times B$.

Relaciones

Relaciones

Una relación será para nosotros un objeto matemático muy concreto.

Relaciones

Una relación será para nosotros un objeto matemático muy concreto.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, decimos que R es una *relación binaria de A en B* si y sólo si $R \subseteq A \times B$.

Relaciones

Una relación será para nosotros un objeto matemático muy concreto.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, decimos que R es una *relación binaria de A en B* si y sólo si $R \subseteq A \times B$.

Notación

Escribimos aRb para denotar $(a, b) \in R$ y $a\not R b$ para denotar $(a, b) \notin R$

Ejemplo

¿Cómo formalizamos las “relaciones” *‘divide a’*, *‘es menor a’*, *‘pertenece a’*, *‘es igual a’* e *‘está incluido en’*?

Relaciones

Hay relaciones que poseen propiedades que son estudiadas especialmente.

Relaciones

Hay relaciones que poseen propiedades que son estudiadas especialmente.

Ejemplo

Relaciones

Hay relaciones que poseen propiedades que son estudiadas especialmente.

Ejemplo

Dada $R \subseteq A \times B$, si R satisface que,

- para todo $a \in A$ y $b_1, b_2 \in B$,

$$si (a, b_1) \in R \text{ y } (a, b_2) \in R \text{ entonces } b_1 = b_2$$

- y, para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$,

Relaciones

Hay relaciones que poseen propiedades que son estudiadas especialmente.

Ejemplo

Dada $R \subseteq A \times B$, si R satisface que,

- para todo $a \in A$ y $b_1, b_2 \in B$,

$$si(a, b_1) \in R \text{ y } (a, b_2) \in R \text{ entonces } b_1 = b_2$$

- y, para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$,

decimos que R es *una función de A en B*.

Relaciones sobre un conjunto

En este curso nos enfocaremos en relaciones en las que $A = B$.

Definición

Dado un conjunto A, decimos que R es una *relación sobre A* si y sólo si $R \subseteq A \times A$.

Relaciones sobre un conjunto

En este curso nos enfocaremos en relaciones en las que $A = B$.

Definición

Dado un conjunto A, decimos que R es una *relación sobre A* si y sólo si $R \subseteq A \times A$.

Hay un tipo de relaciones sobre A con las que ya tienen cierta familiaridad.

Ejemplo

Sea R la relación sobre $\mathbb{Z}$ de *congruencia módulo* 12, i.e.,

$$(n, m) \in R \text{ sii } 12/(n - m).$$

Propiedades

Sea R una relación sobre A.

R es *reflexiva*

sii para todo $a \in A$, $(a, a) \in R$.

Propiedades

Sea R una relación sobre A.

R es *reflexiva*

sii para todo $a \in A$, $(a, a) \in R$.

R es *simétrica*

sii para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$.

Propiedades

Sea R una relación sobre A.

R es *reflexiva*

sii para todo $a \in A$, $(a, a) \in R$.

R es *simétrica*

sii para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$.

R es *transitiva*

sii para todo $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$.

Propiedades

Sea R una relación sobre A.

R es *reflexiva*

sii para todo $a \in A$, $(a, a) \in R$.

R es *simétrica*

sii para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$.

R es *transitiva*

sii para todo $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$.

R es *antisimétrica*

sii para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ entonces $a = b$.

Relaciones de Equivalencia

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de equivalencia* sii es reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de equivalencia* sii es reflexiva, simétrica y transitiva.

Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, para cada elemento a en A, definimos **la clase de equivalencia de** a como

$$[a] = \{b \in A \colon (a, b) \in R\}.$$

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de equivalencia* sii es reflexiva, simétrica y transitiva.

Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, para cada elemento a en A, definimos **la clase de equivalencia de a** como

$$[a] = \{b \in A : (a, b) \in R\}.$$

Ejemplo

Construyamos una relación de equivalencia sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Particiones de un conjunto

Definición

Una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sí y cuya unión da todo A.

Particiones de un conjunto

Definición

Una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sí y cuya unión da todo A.

Ejemplo

Las siguientes son todas particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Particiones de un conjunto

Definición

Una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sí y cuya unión da todo A.

Ejemplo

Las siguientes son todas particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $\mathcal{P}_1 = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}\}$

Particiones de un conjunto

Definición

Una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sí y cuya unión da todo A.

Ejemplo

Las siguientes son todas particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $\mathcal{P}_1 = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}\}$
- $\mathcal{P}_2 = \{\{2\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4\}\}$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Particiones de un conjunto

Definición

Una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sí y cuya unión da todo A.

Ejemplo

Las siguientes son todas particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $\mathcal{P}_1 = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}\}$
- $\mathcal{P}_2 = \{\{2\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4\}\}$
- $\mathcal{P}_3 = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

Particiones de un conjunto

Definición

Una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sí y cuya unión da todo A.

Ejemplo

Las siguientes son todas particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $\mathcal{P}_1 = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}\}$
- $\mathcal{P}_2 = \{\{2\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4\}\}$
- $\mathcal{P}_3 = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{P}_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

Lema

Sea R una relación de equivalencia sobre A y sean $a, b \in A$. Entonces

1. $[a] = [b]$ *sii* $(a, b) \in R$
2. *Si* $(a, b) \notin R$ *entonces* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Lema

Sea R una relación de equivalencia sobre A y sean $a, b \in A$. Entonces

1. $[a] = [b]$ *sii* $(a, b) \in R$
2. *Si* $(a, b) \notin R$ *entonces* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Corolario

El conjunto $A/R = \{[a] : a \in A\}$ de las clases de equivalencia es una partición de A.

Lema

Sea R una relación de equivalencia sobre A y sean $a, b \in A$. Entonces

1. $[a] = [b]$ *sii* $(a, b) \in R$
2. *Si* $(a, b) \notin R$ *entonces* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Corolario

El conjunto $A/R = \{[a] : a \in A\}$ de las clases de equivalencia es una partición de A.

Lema

Sea $\mathcal{P}$ una partición de A. Entonces la relación S sobre A definida como

$$(a, b) \in S \text{ sii } a \text{ y } b \text{ pertenecen a la misma parte}$$

$$\text{(i.e., existe } P \in \mathcal{P} \text{ tal que } a \in P \text{ y } b \in P\text{)},$$

es una relación de equivalencia y la clase de equivalencia de un elemento es la parte a la que pertenece.

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo

- Las relaciones de orden usuales $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo

- Las relaciones de orden usuales $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
- La relación 'divide' sobre $\mathbb{N}$.

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo

- Las relaciones de orden usuales $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
- La relación 'divide' sobre $\mathbb{N}$.
- La relación de inclusión $\subseteq$ sobre las partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A.

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo

- Las relaciones de orden usuales $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
- La relación 'divide' sobre $\mathbb{N}$.
- La relación de inclusión $\subseteq$ sobre las partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A.
- La relación de inclusión $\subseteq$ sobre el conjunto $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}\}$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Definición

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo

- Las relaciones de orden usuales $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
- La relación 'divide' sobre $\mathbb{N}$.
- La relación de inclusión $\subseteq$ sobre las partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A.
- La relación de inclusión $\subseteq$ sobre el conjunto $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}\}$.

Ejercicio

¿Cómo representaríamos gráficamente la última relación?

Ejercicio: V o F

Ejercicio: V o F

a. Si R es una relación de equivalencia sobre A entonces R **no** es una relación de orden sobre A.

Ejercicio: V o F

a. Si R es una relación de equivalencia sobre A entonces R **no** es una relación de orden sobre A.

b. Si R **no** es una relación de equivalencia sobre A entonces es una relación de orden sobre A.