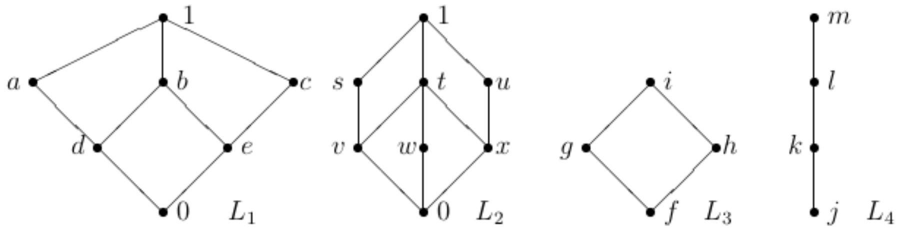
Recuerden que cuando utilizamos el término *reticulado* a secas, nos referimos tanto al poset como a su estructura algebraica de retículo, según corresponda.



1. Considere el reticulado L_2. Encuentre $v \vee x$, $s \vee v$ y $u \vee v$.

L_2

$v \vee x = \sup\{v, x\} = 1$

$s \vee v = \sup\{s, v\} = s$

$w \vee v = \sup\{w, v\} = t$

2. Demuestre que en todo poset reticulado se cumple $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Por definición de supremo:

$x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ $\qquad$ $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Por dualidad

$\begin{cases} x \leq x \vee y \text{ Trivial } \checkmark \\ x \leq x \vee z \text{ Trivial } \checkmark \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y \wedge z \leq x \vee y \quad (1) \\ y \wedge z \leq x \vee z \quad (2) \end{cases}$

(1) $y \wedge z \Leftrightarrow y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ $\checkmark$

(2) $y \wedge z \Leftrightarrow y \wedge z \leq z \leq x \vee z$ $\checkmark$

3. Determine cuáles de los siguientes mapeos f de P a Q son isomorfismos. En caso de no serlo determine qué es lo que falla.
   a) $P = Q = (\mathbb{Z}, \leqslant)$ y $f(x) = x + 1$.
   b) $P = Q = (\mathbb{Z}, \leqslant)$ y $f(x) = 2x$.
   c) $P = Q = (\mathcal{P}(\{a, b, c\}, \subseteq)$ y $f(A) = A^c$.

a) $P = Q = (\mathbb{Z}, \leq)$ y $f(x) = x+1$ sí es.

b) $P = Q = (\mathbb{Z}, \leq)$ y $f(x) = 2x$ No es pues no cumple la biyectividad en $\mathbb{Z}$

c) $P = Q = (P(\{a,b,c\}), \subseteq)$ y $f(A) = A^c$

veamos que $\emptyset \subseteq \{a,b,c\}$, chequemos $f(\emptyset) = \emptyset^c = \{a,b,c\}$

$f(a,b,c) = \{a,b,c\}^c = \emptyset$

pero $\{a,b,c\} \not\subseteq \emptyset$ por lo tanto no lo cumple.

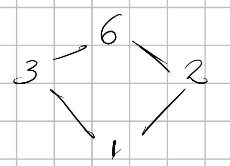
4. Determine si se dan los isomorfismos indicados.

a) $(D_6, |) \cong (\mathcal{P}(\{a,b\}), \subseteq)$.

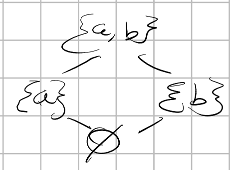
b) $(D_{30}, |) \cong (\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$.

a) $(D_6, |) \cong (P(\{a,b\}), \subseteq)$.

$(D_6, |) =$



$P(\{a,b\}, \subseteq) =$



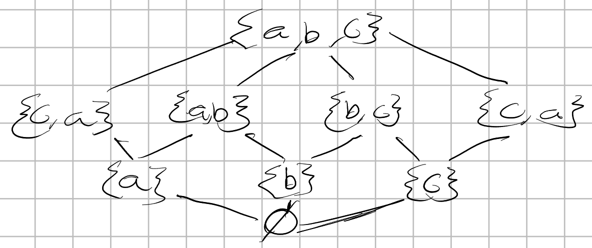
Veamos que podemos hacer

$f(1) = \emptyset \quad f(3) = \{a\}$
$f(2) = \{b\} \quad f(6) = \{a,b\}$

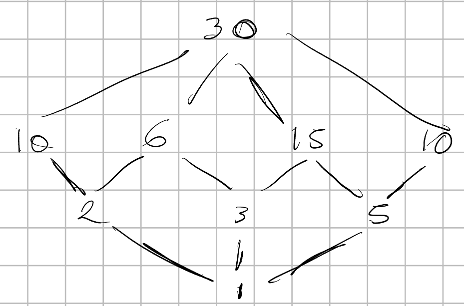
$\therefore$ si son isomorfismos.

b) $(D_{30}, |) \cong (P(\{a,b,c\}), \subseteq)$

$(P(\{a,b,c\}), \subseteq)$



$(D_{30}, |)$



30
15
10
6
5
3
2
1

se mapea bien $\therefore$ son isomorfos.

5. Demuestre que si $f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ es isomorfismo entonces f^{-1} también lo es.

Isomorfismo:
Para algun $x, y \in P$ tal que $x \leq y$ existe una función biyectiva, $f: P \to Q$ tal que $x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$

Como f es biyectiva $\Rightarrow$ existe f^{-1}

Veamos que si hacemos $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f^{-1}(f(y)) = y$.
Por lo tanto es facil ver que:

$f^{-1} : (Q, \leq') \to (P, \leq)$ para cualquier $f(x), f(y) \in Q$ porque:

$f^{-1}(x) \leq' f^{-1}(y) \iff f^{-1}(f(x)) \leq f^{-1}(f(y))$
$x \leq y$

6. Suponga que $f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ es un isomorfismo de posets.

   a) Si $m \in P$ es minimal, entonces $f(m)$ es minimal.

   b) Probar que si Q tiene algún minimal, entonces P tiene un minimal (Ayuda: usar f^{-1}).

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset y $m \in P$. Decimos que

- m es máximo de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, $a \leq m$.
- m es mínimo de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, $m \leq a$.
- m es maximal de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, si $m \leq a$ entonces $a = m$.
- m es minimal de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, si $a \leq m$ entonces $a = m$.

a)

Por definición de minimal:

Tomemos un $a \in P$

$\Rightarrow$ si $m \leq a \Rightarrow a = m$

pero si f es isomorfismo

$m \leq a \Leftrightarrow f(m) \leq' f(a)$

Pero como m es minimal.

$m = a \Leftrightarrow f(m) =' f(a)$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
& m \text{ es minimal de } P \\
\Leftrightarrow & \{\text{Definición minimal}\} \\
& \forall a \in P : a \leq m \Rightarrow a = m \\
\Leftrightarrow & \{f \text{ es un isomorfismo}\} \\
& \forall a \in P : f(a) \leq' f(m) \Rightarrow a = m \\
\Leftrightarrow & \{f \text{ es una función biyectiva}\} \\
& \forall a \in P : f(a) \leq' f(m) \Rightarrow f(a) = f(m) \\
\Leftrightarrow & \{f \text{ es biyectiva, hago cambio de variable}\} \\
& \forall b \in Q : b \leq f(m) \Rightarrow b = f(m) \\
\Leftrightarrow & \{\text{Definición minimal}\} \\
& f(m) \text{ es minimal de } Q
\end{aligned}
$$

7. (*) Determine cuántos isomorfismos hay de $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ en sí mismo.

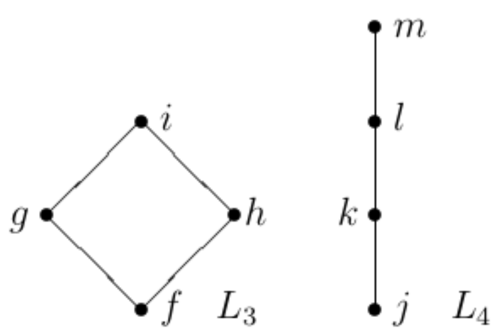
Con decir a donde va a parar {a},{b},{c} alcanza, ya que los de dos elementos se pueden escribir como superemos de esos, por ende hay tantos isomorfismos como formas de reordenar 3 elementos, osea:

3! = 6

8. *a*) Defina una función biyectiva f del reticulado $(L_3, \leq_3)$ en el reticulado $(L_4, \leq_4)$ que preserve el orden, es decir, tal que $x \leq_3 y \Longrightarrow f(x) \leq_4 f(y)$.

   b) Compruebe que no se cumple $x \leq_3 y \Longleftarrow f(x) \leq_4 f(y)$. La función f es un ejemplo que muestra que preservación del orden no implica isomorfismo.

   c) Pruebe también que f no preserva supremo ni ínfimo.



Definición

$(L, \leq)$ es un poset **reticulado** si para todo $a, b \in L$ existen $a \vee b := \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b := \inf\{a, b\}$.

$f: (L_3, \leq_3) \longrightarrow (L_4, \leq_4)$

a)

$f(i) = m$
$f(h) = l$
$f(g) = k$
$f(f) = j$

b)

$g \leq h \equiv \text{False}$
$f(g) \leq f(h) \equiv \text{True}$

c)

$f(\sup\{g, h\}) = f(i)$
$\sup\{f(g), f(h)\} = \sup\{l, k\} = l$

9. Sea $(L, \otimes, \oslash)$ un retículo. Demostrar que $x \oslash (y \oslash z) = z \oslash (y \oslash x)$.

$x \wedge (y \wedge z) = z \wedge (y \wedge x)$ Aplican asociatividad y sale.

10. (del teórico) Sea $(L, \otimes, \oslash)$ un retículo y considere la relación de orden parcial definida por $x \leq y \iff x \otimes y = y$. Probar que $x \otimes y$ es cota superior del conjunto $\{x, y\}$.

$\Rightarrow)$ $x \leq y$

tomando $\{x, y\}$ y siguiendo la relación de orden...

y es cota superior

$\Leftarrow)$ $x \vee y = y$

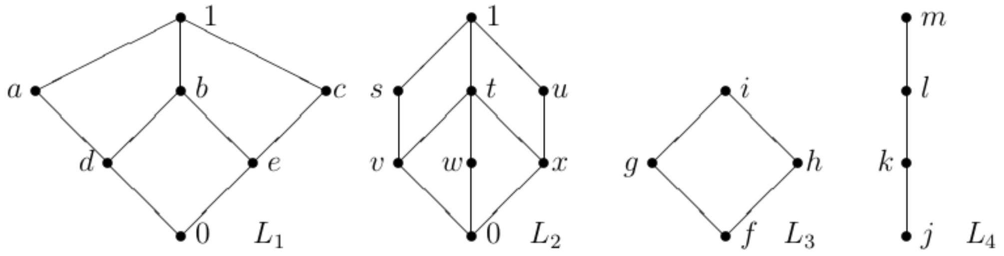
esto es que $\sup(x \vee y) = y$ Por lo tanto $y \geq x$

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset, $c \in P$ y $S \subseteq P$. Decimos que

- c es cota superior de S sii para todo $a \in S$, $a \leq c$.
- c es cota inferior de S sii para todo $a \in S$, $c \leq a$.

11. Decida, y fundamente, cuáles de los reticulados L_1, L_2, L_3 y L_4 son complementados.



L4 no es complementado pues k y l no tienen complemento.

L1 no es complementado pues, por ejemplo, b no tiene complemento.

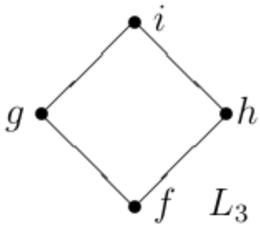
L2 no es complementado pues, por ejemplo, t no tiene complemento.

L_3 si es complementado.

12. (*) Supongamos que un poset P tiene la siguiente propiedad: para todo subconjunto S de P se tiene que $\sup(S)$ existe (en particular existe $\sup(P)$ y $\sup(\emptyset)$). Demostrar que $\inf(S)$ existe para cualquier S.

Sabemos que existe el supremo en todos los casos, y también sabemos que los supremos son los ínfimos del opuesto, por lo tanto por dualidad vale que Inf(S) existe para cualquier S.

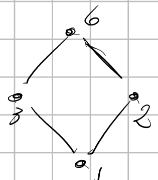
13. ¿Para qué valores n se tiene que D_n se incrusta en L_3?



Veamos que necesitamos un n que nos dé 4 candidatos al menos

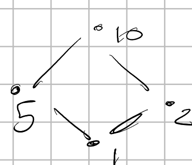
$(D_8, |)$ no pues

$(D_6, |)$



es válido

$(D_{10}, |)$



es válido

Los valores válidos de n son 6 y 10.