(1) Determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.

(a) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,3),(3,1)\}$
(b) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\}$
(c) $\{(x,y) \mid 1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 5\}$

Para ver si es una relación de equivalencia hay que ver que cumpla con: Reflexividad, simetría y transitividad.

(a) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,3),(3,1)\}$

Es reflexiva pues $\forall a \in A, (a,a) \in R$
Es simétrica pues $\forall a,b \in A$, si $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
Es transitiva $a,b,c \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ (No hay ningún caso que lo incumpla).

Clases de equivalencia $1 = 3 = \{1,3\}$
$2 = \{2\}$
$4 = \{4\}$
$5 = \{5\}$

(b) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\}$

Reflexiva ✗ Pues $(5,5)$ no se incluye
simétrica ✓
transitiva ✓ No es relación de equivalencia.

(c) $\{(x,y) \mid 1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 5\}$

Esta relación tiene todas las combinaciones posibles
Reflexiva ✓
simétrica ✓
transitiva ✓

Clase de equivalencia $1 = 2 = 3 = 4 = 5$

(2) Determine si las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas:

(a) $(x,y) \in R$ sii $x^2 = y^2$
(b) $(x,y) \in R$ sii $x > y$
(c) $(x,y) \in R$ sii $x \ge y$
(d) $(x,y) \in R$ sii $x \ne y$

a) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = |y|$

Reflexiva es pues (x,x) se cumple siempre ✓
simétrica es. ✓
transitiva ✓
antisimetrica no pues por ejemplo $x^2 = y^2$ pero $x = -y$

b) Reflexiva no es pues (x,x) no existe por la restricción $>$ ✗
simétrica no pues por ejemplo si $(3,1)$, $(1,3) \notin R$ ✗
transitiva ✓
antisimética ¿no estoy seguro.

c) Reflexiva ✓
simétrica ✗
antisimétrica ✓
transitiva ✓

d) Reflexiva ✗
simétrica ✓
antisimétrica ✗
transitiva ✗ $x \ne y \wedge y \ne z \not\Rightarrow x \ne z$

(3) Utilizando las respuestas del ejercicio (2) determine para cada caso si la relación es de equivalencia y/o de orden. Recuerde que una relación de *orden* debe ser reflexiva, antisimétrica, y transitiva.

a) Es de equivalencia
b) Ninguna
c) Es de orden
d) Ninguna

(4) Sea A un conjunto y f una función definida en A. Probar que la relación $\{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$ es una relación de equivalencia sobre A. Comparar con 2a.

$\{(x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$

Para probar que R es de equivalencia hay que probar que es reflexiva, simetrica y transitiva:

Reflexividad.
Se debe ver que $\forall a \in A,\ (a,a) \in R$
Ahora $f(a) = f(a)$ ✓ $\therefore$ es reflexiva

Simetria:
Se debe ver que $\forall a,b \in A$, si $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
Ahora si $(a,b) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b,a)$ ✓ es simetrica

Transitividad:
Se debe ver que $\forall a,b,c \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
Naturalmente si:

$(a,b) \Rightarrow f(a) = f(b)$
$(b,c) \Rightarrow f(b) = f(c)$
reemplazo $\Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a,c)$ ✓ es transitiva

Por lo tanto es una relación de equivalencia.

Comparado con el ejercicio 2a), este es el caso general. Mientras que $x^2 = y^2$ no es antisimétrica, este podría serlo si f fuese inyectiva por ejemplo.

(5) Utilizando como motivación con los ejercicios 2b y 2c, responda:

(a) Sea R una relación irreflexiva y transitiva ("relación de orden parcial estricto") sobre un conjunto A. Probar que $R \cup \text{Igualdad}_A$ es una relación de orden parcial sobre A.

(b) ¿Cómo se podrá obtener una relación de orden parcial estricto a partir de una relación de orden parcial?

a) Definamos:

- R es una relación de **orden parcial estricto**, lo que significa que R es irreflexiva (para todo $x \in A$, no se cumple $(x,x) \in R$) y transitiva (si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, entonces $(x,z) \in R$).
- Igualdad_A es la relación de igualdad, es decir, $\text{Igualdad}_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$, que es reflexiva.

Definamos R' como $R \cup \text{Igualdad}_A$. Hay que probar entonces que R' es Reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Reflexividad:
Por $\text{Igualdad}_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ es parte de R' $\Rightarrow$ es reflexiva. ✓

Antisimétrica:
Probar que R' cumple $\forall a,b \in A$, si $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

- Supongamos que $(x,y) \in R'$ y $(y,x) \in R'$. Esto significa que al menos uno de los pares debe provenir de R (porque Igualdad_A solo contiene pares de la forma (x,x)).
- Si $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$, esto violaría la transitividad de R, ya que R es irreflexiva. Por lo tanto, si ambos pares pertenecen a R, esto no puede suceder.
- Si uno de los pares pertenece a Igualdad_A, entonces $x = y$, lo que no viola la antisimetría. Por lo tanto, R' es antisimétrica.

3. **Transitividad**:
   - Si $(x,y) \in R'$ y $(y,z) \in R'$, entonces pueden ocurrir dos casos:
     - Si ambos pares están en R, entonces, como R es transitiva, $(x,z) \in R$, lo que implica $(x,z) \in R'$.
     - Si alguno de los pares pertenece a Igualdad_A, por ejemplo, (x,x), entonces no afecta la transitividad, ya que sigue siendo verdadero que $(x,z) \in R'$.
   - Por lo tanto, R' es transitiva.

∴ es una relación de orden parcial.

b) Si tenemos una relación de **orden parcial** R, podemos obtener una relación de **orden parcial estricto** R' eliminando la reflexividad de R. Esto se puede lograr definiendo la relación estricta R' como:

$$R' = R \setminus \{(x,x) \mid x \in A\}$$

Es decir, la nueva relación R' contiene todos los pares de R excepto los pares de la forma (x,x). Al eliminar la reflexividad, la nueva relación será irreflexiva y conservará la transitividad y la antisimetría de R, por lo que R' será una relación de orden parcial estricto.

Conclusión: Para obtener una relación de orden parcial estricto a partir de una relación de orden parcial, simplemente eliminamos los pares reflexivos (x,x).

(6) Liste los pares de la relación de equivalencia sobre $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ definida por la partición dada. También señale las clases de equivalencia $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$.

(a) $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ (b) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

a) $\{1,2\}, \{3,4\}$

$[1] = [2] = \{1,2\}$ ya que 1 y 2 están en el mismo subconjunto.

$[3] = [4] = \{3,4\}$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃

Para $\{1,2\}$, los pares son: $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$

〃 $\{3,4\}$ 〃 〃 〃 〃 $(3,3), (3,4), (4,3), (4,4)$

Relación completa $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$

(b) Partición: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

- En este caso, cada elemento pertenece a su propio subconjunto, lo que significa que cada clase de equivalencia contiene solo un elemento.
- **Clases de equivalencia**:
  - $[1] = \{1\}$
  - $[2] = \{2\}$
  - $[3] = \{3\}$
  - $[4] = \{4\}$
- **Pares de la relación de equivalencia**:
  - Para la clase {1}, el par es: $(1, 1)$.
  - Para la clase {2}, el par es: $(2, 2)$.
  - Para la clase {3}, el par es: $(3, 3)$.
  - Para la clase {4}, el par es: $(4, 4)$.
- **Relación completa**:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

(7) Sea R la relación "Fulano no es más viejo que Mengano" sobre un conjunto de personas A.

(a) De un ejemplo, puede ser ficticio, de un conjunto A de personas en los cuales esa relación no sea un orden parcial.

(b) Explique qué propiedad falla para que sea un orden parcial.

Sea R: (Fulano edad x no es más viejo que Mengano edad y)

a) Imaginemos un ejemplo.

Supongamos $A = \{$Juan, Javier, Jaime$\}$ la triple J.

Edades:

Juan = 24

Javier = 31

Jaime = 31

Veamos que cumple la reflexividad porque ninguno es más viejo que sí mismo. Cumple la transitividad pues: Juan no es más viejo que Javier y Javier no es más viejo que Jaime, entonces Juan no es más viejo que Jaime. Pero la antisimetría no la cumple pues: por ejemplo (Javier, Jaime) $\in R$ $\wedge$ (Jaime, Javier) $\in R$ pero Javier $\neq$ Jaime pues son personas individuales.

Con esa última respuesta se concluye el punto b) también, la propiedad que falla es la antisimetría.