

1. Pruebe que $\models \varphi \rightarrow \psi$ si y sólo si $\{\varphi\} \models \psi$.

1) $\models \varphi \rightarrow \psi$ significa que es una tautología, es decir, la expresión vale 1

$\varphi = 0, 1$ Pero en este ejercicio asumimos que vale 1

$\Rightarrow \{\varphi\} \models \psi$ ✓

$\Leftarrow \{\varphi\} \models \psi$ dado $\varphi = 1$ entonces ψ es consecuencia lógica de φ

$\therefore \varphi = 1$ pero esto es $\models \varphi \rightarrow \psi$ ✓

3. Complete las siguientes derivaciones agregando la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. En la primera derivación se deben cancelar todas las hipótesis. En la segunda sólo debe quedar φ sin cancelar.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}}{\neg \psi} \quad \perp}{\neg \varphi} \quad \neg \text{I}$$

$$\frac{\neg \psi \rightarrow \neg \varphi}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)} \rightarrow \text{I}$$

$$\frac{\frac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi} \quad \frac{\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} \quad \neg \text{E}}{\neg \varphi \rightarrow \psi} \quad \rightarrow \text{I}}{(\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\neg \varphi \rightarrow \psi)} \wedge \text{I}$$

Recuerde: $\neg \varphi$ es una abreviatura de $\varphi \rightarrow \perp$

$$\frac{\frac{\frac{[\varphi]_1 \quad [\varphi \rightarrow \psi]_2 \rightarrow \text{E}}{\psi}}{[\neg \psi]_2} \rightarrow \text{E} \quad \perp}{\neg \varphi} \neg \text{I}_1$$

$$\frac{\neg \varphi}{\neg \psi \rightarrow \neg \varphi} \rightarrow \text{I}_2$$

$$\frac{\neg \psi \rightarrow \neg \varphi}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)} \rightarrow \text{I}_3$$

$$\frac{\frac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{I} \quad \frac{\frac{\varphi \quad [\neg \varphi]_1 \rightarrow \text{E}}{\perp} \quad \neg \text{E}}{\neg \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{I}_1}{(\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\neg \varphi \rightarrow \psi)} \wedge \text{I}$$

4. Encuentre derivaciones para:

- $\{\varphi \wedge \gamma, \varphi \rightarrow (\psi \wedge \gamma)\} \vdash \psi$
- $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma), \varphi\} \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)$
- $\{\varphi\} \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma))$

a) $\{\varphi \wedge \gamma, \varphi \rightarrow (\psi \wedge \gamma)\} \vdash \psi$

$$\frac{\frac{\varphi \wedge \gamma}{\varphi} \wedge E \quad \varphi \rightarrow (\psi \wedge \gamma)}{\psi \wedge \gamma} \rightarrow E$$

$$\frac{\psi \wedge \gamma}{\psi} \wedge E$$

b) $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma), \varphi\} \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)$

$$\frac{[\varphi]_1 \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)}{\psi \rightarrow \gamma} \rightarrow E$$

$$\frac{[\psi]_2 \quad \psi \rightarrow \gamma}{\gamma} \rightarrow E$$

$$\frac{\gamma}{\varphi \rightarrow \gamma} \rightarrow I_1$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \gamma}{\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)} \rightarrow I_2$$

$\cdot \psi$
 $\cdot \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)$
 $\cdot \varphi$

c) $\{\varphi\} \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$$\frac{\frac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]_1}{\neg\varphi} \wedge E \quad \varphi}{\perp} \text{RAA}$$

$$\frac{\perp}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)} \neg I_1$$

$$d) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)) \quad H: \begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{[\varphi]_1 [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)]_2 \rightarrow E}{\psi \rightarrow \gamma} \quad \frac{[\varphi]_1 [\varphi \rightarrow \psi]_3 \rightarrow E}{\psi} \rightarrow E \\ \hline \gamma \rightarrow I_1 \\ \hline \varphi \rightarrow \gamma \rightarrow I_2 \\ \hline (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma) \rightarrow I_3 \\ \hline (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)) \end{array}$$

5. Lo siguiente ya fue demostrado en esta guía. ¿En qué ejercicio?

$$\{(\neg(p_2 \rightarrow p_5))\} \vdash \neg(\neg(\neg(p_2 \rightarrow p_5)) \wedge \neg(p_3 \rightarrow ((\neg p_2) \wedge p_5)))$$

$$\{ \neg(\varphi \rightarrow \psi) \} \vdash \neg(\neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi)) \wedge \neg(\gamma \rightarrow (\neg\varphi \wedge \psi)))$$

pp

pp

6. Determine cuáles son válidas. Para las que lo son, encuentre derivaciones que tengan como hipótesis el conjunto de la izquierda, y como conclusión la proposición de la derecha.

- a) $\{\neg\varphi, \psi \rightarrow \varphi\} \vdash \gamma \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)$ *válida*
 b) $\{\neg\varphi\} \vdash \psi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$ *No válida*
 c) $\{\neg\varphi\} \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ *válida*

$$a) \{ \neg\varphi, \psi \rightarrow \varphi \} \vdash \gamma \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)$$

Extra: $\begin{array}{l} \gamma \\ \psi \end{array}$

$$\begin{array}{c} \frac{[\varphi]_1 \varphi \rightarrow \perp}{\varphi} \rightarrow E \\ \hline \perp \rightarrow I_1 \\ \hline \psi \rightarrow \perp \rightarrow I_2 \\ \hline \gamma \rightarrow (\psi \rightarrow \perp) \end{array}$$

$$c) \{ \varphi \rightarrow \perp \} \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp))$$

Hypothesis: φ
 φ

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[\varphi]_{1,3} \quad \varphi \rightarrow \perp \quad [\varphi]_2}{\perp} \rightarrow E}{\psi \rightarrow \perp} \rightarrow I_1}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)} \rightarrow I_2 \\
 \hline
 \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)) \rightarrow I_3
 \end{array}$$

7. Complete the following derivation adding the abbreviation of the rule used in each step, and the brackets in the cancelled hypotheses, supposing that in each step the maximum number of hypotheses possible are cancelled. Only $\neg Q \rightarrow \neg \varphi$ should remain without cancellation.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg Q]_2 \quad \neg Q \rightarrow \neg P \rightarrow E}{[\neg Q]_2 \quad \neg P \rightarrow E} \rightarrow E \\
 \frac{\perp \text{ RA } \perp}{Q} \rightarrow I_1 \\
 \frac{Q \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow I_2}{\neg Q \rightarrow (P \rightarrow Q)} \rightarrow I_2
 \end{array}$$