1. Demostrar que para toda valuación $\llbracket\cdot\rrbracket$ y todas $\varphi, \psi \in PROP$ se cumple que:
   a) $\llbracket(\neg\varphi)\rrbracket = 1 - \llbracket\varphi\rrbracket$.
   b) $\llbracket(\varphi \leftrightarrow \psi)\rrbracket = 1 \iff \llbracket\varphi\rrbracket = \llbracket\psi\rrbracket$.
   c) $\llbracket(\varphi \to \psi)\rrbracket = \text{máx}\{1 - \llbracket\varphi\rrbracket, \llbracket\psi\rrbracket\}$.

Negación y si y solo si:
$(\neg\varphi) = (\varphi \to \bot)$
$(\varphi \leftrightarrow \psi) = ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

a) $\llbracket(\neg\varphi)\rrbracket = \llbracket(\varphi \to \bot)\rrbracket = 1 - \llbracket\varphi\rrbracket$

Veamos caso $\llbracket\varphi\rrbracket = 0$

vale pues $1 - 0 = 1$

veremos caso $\llbracket\varphi\rrbracket = 1$

vale pues $1 - 1 = 0$

b) $\llbracket(\varphi \leftrightarrow \psi)\rrbracket = 1 \iff \llbracket\varphi\rrbracket = \llbracket\psi\rrbracket$

$(\varphi \leftrightarrow \psi) = ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

$\Rightarrow)$

$\llbracket(\varphi \to \psi)\rrbracket = 0$ sii $\llbracket\varphi\rrbracket = 1$ y $\llbracket\psi\rrbracket = 0$

$\llbracket((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))\rrbracket$

$= \text{mín}(\llbracket\varphi \to \psi\rrbracket, \llbracket\psi \to \varphi\rrbracket)$ Ambas tienen que ser 1

$= \text{mín}(1, 1) = 1$ para que suceda esto $\varphi = \psi$, $\varphi = 0$ $\psi = 0$ $\vee$ $\varphi = 1$ $\psi = 1$,

$\therefore \llbracket\varphi\rrbracket = \llbracket\psi\rrbracket$

$\Leftarrow)$ Resolver!

c) $\llbracket(\varphi \to \psi)\rrbracket = \text{máx}(\underset{①}{1 - \llbracket\varphi\rrbracket}, \underset{②}{\llbracket\psi\rrbracket})$

$\llbracket(\varphi \to \psi)\rrbracket = 0$ sii $\llbracket\varphi\rrbracket = 1$ y $\llbracket\psi\rrbracket = 0$

supongamos que ① $= 0 \Rightarrow \text{Máx}(1 - 1, 0) = 0$ ✓

else $\text{máx}(1 - 0, 0) = 1$ ✓

" $(1 - 1, 1) = 1$ ✓

2. Suponga que $f : \mathcal{V} \to \{0,1\}$ es una asignación. En cada caso, tenemos información parcial sobre f y se debe determinar el valor de la valuación asociada. Recuerde que $(\neg\varphi) := (\varphi \to \bot)$ y $(p_1 \leftrightarrow p_2) := ((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_1))$.
   a) $f(p_1) = 0,\ f(p_2) = 1,\ f(p_3) = 0$; calcular $[\![((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \to p_2)))]\!]_f$.
   b) $f_1(p_1) = f_1(p_2) = f_1(p_3) = 0$; calcular $[\![((((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \ \to\ p_3)]\!]_f$.

a) $[\![((\neg P_2) \to (P_3 \vee (P_1 \to P_2)))]\!]_f$

$f(P_1) = 0$
$f(P_2) = 1$
$f(P_3) = 0$

$\to ([\![P_2 \to \bot]\!]^{f}, [\![(P_3 \vee (P_1 \to P_2))]\!])$

$\to (0, \text{Max}([\![P_3]\!], [\![(P_1 \to P_2)]\!]))$

$\to (0, \text{Max}(0, 1))$

$\to (0, 1) = 1$

b) $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = 0$

$[((((\neg P_2) \to (P_3 \vee (P_1 \leftrightarrow P_2))) \wedge (\neg P_3)) \to P_3)]$

$[(((1 \to (0 \vee 1)) \wedge 1) \to 0)]$

$[(((1 \to 1) \wedge 1) \to 0)]$

$[((1 \wedge 1) \to 0)]$

$[(1 \to 0)] = 0$ & Esta resolución es informal.

3. Para cada ítem, decida si existe una asignación f que valide el conjunto dado.
   (a) $\{p_0\}$ (b) $\{p_0, \neg p_1, p_2, \neg p_3, ...\}$ (c) $PROP$ (d) $\{p_0, p_0 \to \neg p_1, p_1\}$

a)
$f(x) = 1$

b) $f(P_P) = 0$
$f(P_I) = 1$

$P = 2n$ (par) $n \in \mathbb{N}_0$
$I = 2n+1$ (impar)

c) $[\![\bot]\!]_f = 0$ para cualquier asignación de f
∴ Como $\bot \in PROP$ no hay asignación válida.

d) $f(P_0) = 1$
$f(P_1) = 1$

Pero $P_0 \to \neg P_1 = 1 \to 0 = 0$

Por lo tanto no existe asignación.

4. Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$.

b) $\models \varphi$ si y sólo si $\emptyset \models \varphi$.

Definición

- f **valida** Γ sii para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- φ es **consecuencia lógica** de Γ sii para toda asignación f que valida Γ, $[\![\varphi]\!]_f = 1$ (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda asignación f. (**notación**: $\models \varphi$)

1 $\models (\varphi \to \varphi)$.
Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$. Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.

a) $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$

Ver si es una tautología

Veamos $[\![\varphi]\!] = 0$

$\Rightarrow ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$

$0 \to 0 = 1$

veamos $[\![\varphi]\!] = 1$

$1 \to 1 = 1$ ✓

b)

4b) Proving $\models \varphi$ if and only if $\emptyset \models \varphi$:

This statement is about **semantic consequence**. It asserts that a formula φ is true in all interpretations (i.e., is a tautology) if and only if the empty set of premises also semantically entails φ.

- **If φ is a tautology** ($\models \varphi$), it means φ is true regardless of the truth values of its components.
- **The empty set** $\emptyset$ has no premises, so it vacuously entails any formula that is always true.

Hence, if φ is a tautology, the empty set of premises will entail it, and vice versa.

Would you like to explore these proofs in more detail or clarify any other questions?

5. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta. En caso de serlo debe demostrarla utilizando la definición de consecuencia. Si no es cierta, debe encontrar una asignación que certifique su falsedad.

a) $\{p_0 \to p_1\} \models \neg p_0 \vee p_1$. ← Faltan ()

b) $\{p_0\} \models (p_0 \wedge p_1)$.

c) $\{p_0, (p_0 \to (p_1 \vee p_2)\} \models p_2$.

a)

p_0	p_1	$(p_0 \to p_1)$	$(\neg p_0 \vee p_1)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

es verdadero

$[\![(p_0 \to p_1)]\!] = 1$

$\models \neg p_0 \vee p_1$

b) $\{P_0\} \models (P_0 \wedge P_1)$ No es consecuencia lógica

P_0	P_1	$P_0 \wedge P_1$	
0	0	0	
0	1	0	
1	0	0	$\rightarrow$ aquí no se cumple
1	1	1	

c) $\{p_0, (p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_2)\} \models p_2$.

The statement $\{p_0, (p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_2))\} \models p_2$ is **false**. A counterexample is when $p_0 = 1, p_1 = 1$, and $p_2 = 0$, where the premises are true, but p_2 is false.

6. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \models \varphi$, entonces $\Delta \models \varphi$.

b) Si $\Gamma \models \varphi$ y $\{\varphi\} \models \psi$, entonces $\Gamma \models \psi$.

a) Asumamos que $\Delta \not\models \varphi$

esto significa que todas las formulas en Δ son 1 pero φ puede ser 0,

Como $\Gamma \subseteq \Delta$ aplica lo mismo que Δ, pero $\Gamma \models \varphi$ indicando que todas las formulas en Γ son 1 y $\varphi = 1$. pero contradice

$\therefore \Delta \models \varphi$

- The key idea here is that Γ is a subset of Δ. If φ is a logical consequence of Γ, meaning φ must be true in every interpretation where all formulas in Γ are true, then it must also hold in any interpretation where the formulas of Δ are true, because Γ's formulas are included in Δ.
- Even though Δ may have additional formulas, those formulas cannot contradict the truth of φ, because $\Gamma \models \varphi$ already guarantees φ's truth in any interpretation that satisfies Γ.

b) $\Gamma \models \varphi$ y $\{\varphi\} \models \psi$, $\Rightarrow \Gamma \models \psi$

Demostración:

Esta es esencialmente una propiedad de **transitividad** en la consecuencia semántica. Si Γ implica a φ, y φ implica a ψ, entonces Γ debería implicar a ψ. Vamos a probarlo formalmente:

Paso a paso:

1. **Asumimos que $\Gamma \models \varphi$:**
   - Esto significa que para cualquier interpretación I, si todas las fórmulas en Γ son verdaderas bajo I, entonces φ también es verdadera bajo I.
2. **Asumimos que $\{\varphi\} \models \psi$:**
   - Esto significa que para cualquier interpretación I, si φ es verdadera bajo I, entonces ψ también es verdadera bajo I.
3. **Ahora conectemos estas dos afirmaciones:**
   - Consideremos una interpretación I donde todas las fórmulas en Γ son verdaderas. Por $\Gamma \models \varphi$, esto significa que φ también debe ser verdadera bajo I.
   - Como φ es verdadera bajo I, y sabemos que $\{\varphi\} \models \psi$, esto significa que ψ también debe ser verdadera bajo I.
4. **Conclusión:**
   - Por lo tanto, en cualquier interpretación I donde todas las fórmulas en Γ son verdaderas, ψ también debe ser verdadera.
   - Esto prueba que $\Gamma \models \psi$, es decir, ψ es una consecuencia lógica de Γ.

7. Sea f una asignación. Halle una asignación g tal que $[\![\varphi]\!]_g = [\![\varphi[\perp/p_0]]\!]_f$ para toda $\varphi \in PROP$.

$f(p_0) = 0$ $\qquad g(p_i) = f(p_i)$

$$g(p) = \begin{cases} \perp & \text{si } p = p_0 \\ f(p) & \text{si } p \neq p_0 \end{cases}$$