Ejercicio 1. Utilizar Pumping Lema para demostrar que los siguientes lenguajes no son regulares.

a • $L_1 = \{a^m bbc^m : m \geq 0\}$.

b • $L_2 = \{\alpha\alpha^R : \alpha \in \{a,b\}^*\}$ (capicuas de longitud par).

c • $L_3 = \{a^i b^j : 0 \leq i < j\}$.

d • $L_4 = \{a^i b^j : 0 \leq j \leq i\}$.

e • $L_5 = \{\alpha \in \{a,b\}^* : |\alpha|_a = |\alpha|_b\}$.

f • $L_6 = \{a^i b^j c^{i+j} : i, j \in \mathbb{N}\}$.

Pumping Lemma para lenguajes regulares

El lema establece que si un lenguaje L es regular, existe una constante p (llamada longitud de bombeo) tal que cualquier cadena $w \in L$ con $|w| \geq p$ puede dividirse en tres partes $w = xyz$, cumpliendo las siguientes condiciones:

1. $xy^iz \in L$ para todo $i \geq 0$,
2. $|y| > 0$ (la parte y no puede estar vacía),
3. $|xy| \leq p$ (las partes x e y juntas tienen una longitud menor o igual a p).

Si algún lenguaje L no cumple estas condiciones, entonces L no es regular.

a) $L_1 = \{a^m bbc^m : m \geq 0\}$

Supongamos que L_1 es regular. Sea p la longitud de bombeo. Tomemos una cadena $w \in L_1$ con $|w| \geq p$

$$w = a^p b^2 c^p$$

$m = p$

Dividimos w como xyz con

$x = a^i$
$y = a^j$, con $j > 0$
$z = a^{p-i-j} b^2 c^p$

Bombeemos y (es decir, repetimos y i-veces, y^i)

si $i = 2$ obtenemos:

$$w' = xy^2z = a^i . a^{2j} a^{p-i-j} b^2 c^p = a^{p+j} b^2 c^p$$

Ahora, $w' \notin L_1$ porque el número de a's $(p+j)$ ya no coincide con el de c's (p)

Esto contradice la condición $xy^iz \in L_1 \ \forall i \geq 0$

$\therefore L_1$ no es regular.

b) $L_2 = \{\alpha\alpha^R ; \alpha \in \{a,b\}^*\}$

Supongamos que L2 es regular. Sea p la longitud de bombeo. Tomemos una cadena w perteneciente a L2 con |w|>= p:

w=a^p b a^p

Aquí, alpha = a^p y alpha^R = a^p

Dividimos w como xyz. cumpliendo:

$x = a^i$

$y = a^j$, con $j \geq 0$

$z = a^{p-i-j} b a^p$

Bombeemos y

si $i = 2$:

$w' = xy^2z = a^{p+j} b a^p$

- Ahora, $w' \notin L_2$, porque no es un palíndromo (la mitad izquierda no coincide con la derecha).

5. Esto contradice la condición $xy^iz \in L_2$ para todo $i \geq 0$.

c) $L_3 = \{a^i b^j : 0 \leq i < j\}$

1. **Supongamos que L_3 es regular.**
2. Sea p la longitud de bombeo. Tomemos una cadena $w \in L_3$ con $|w| \geq p$:

$$w = a^p b^{p+1}$$

Aquí, $i = p$ y $j = p + 1$.

3. Dividimos w como xyz, cumpliendo:
   - $x = a^i$,
   - $y = a^j$, con $j > 0$,
   - $z = a^{p-i-j} b^{p+1}$.
4. Bombeemos y:
   - Si $i = 2$, obtenemos:

$$w' = xy^2z = a^{p+j} b^{p+1}$$

   - Ahora, $w' \notin L_3$, porque $i \geq j$.
5. Esto contradice la condición $xy^iz \in L_3$ para todo $i \geq 0$.

d) $L_4 = \{a^i b^j : 0 \leq j < i\}$

Prueba utilizando el Pumping Lemma:

1. **Supongamos que L_4 es regular.**
2. Sea p la longitud de bombeo. Tomemos una cadena $w \in L_4$ con $|w| \geq p$:

$$w = a^p b^p$$

   Aquí, $i = p$ y $j = p$.

3. Dividimos w como xyz, cumpliendo:
   - $x = a^i$,
   - $y = a^j$, con $j > 0$,
   - $z = a^{p-i-j} b^p$.
4. Bombeemos y:
   - Si $i = 2$, obtenemos:

$$w' = xy^2z = a^{p+j} b^p$$

   - Ahora, $w' \notin L_4$, porque $j > i$, es decir, hay más b's que a's.
5. Esto contradice la condición $xy^i z \in L_4$ para todo $i \geq 0$.

Conclusión: El lenguaje L_4 no es regular.

e) $L_5 = \{ \alpha \in \{a, b\}^* : |\alpha|_a = |\alpha|_b \}$

1. **Supongamos que L_5 es regular.**
2. Sea p la longitud de bombeo. Tomemos una cadena $w \in L_5$ con $|w| \geq p$:

$$w = a^p b^p$$

   Aquí, $|\alpha|_a = |\alpha|_b = p$.

3. Dividimos w como xyz, cumpliendo:
   - $x = a^i$,
   - $y = a^j$, con $j > 0$,
   - $z = a^{p-i-j} b^p$.
4. Bombeemos y:
   - Si $i = 2$, obtenemos:

$$w' = xy^2z = a^{p+j} b^p$$

   - Ahora, $w' \notin L_5$, porque $|\alpha|_a \neq |\alpha|_b$.
5. Esto contradice la condición $xy^i z \in L_5$ para todo $i \geq 0$.

Conclusión: El lenguaje L_5 no es regular.

f) $L_6 = \{ a^i b^j c^{i+j} : i, j \in \mathbb{N} \}$

1. **Supongamos que L_6 es regular.**
2. Sea p la longitud de bombeo. Tomemos una cadena $w \in L_6$ con $|w| \geq p$:

$$w = a^p b^p c^{2p}$$

   Aquí, $i = p, j = p$, y $i + j = 2p$.

3. Dividimos w como xyz, cumpliendo:
   - $x = a^i$,
   - $y = a^j$, con $j > 0$,
   - $z = a^{p-i-j} b^p c^{2p}$.
4. Bombeemos y:
   - Si $i = 2$, obtenemos:

$$w' = xy^2z = a^{p+j} b^p c^{2p}$$

   - Ahora, $w' \notin L_6$, porque el número de c's ($2p$) ya no coincide con $i + j$ ($p + j + p = 2p + j$).
5. Esto contradice la condición $xy^i z \in L_6$ para todo $i \geq 0$.

Conclusión: El lenguaje L_6 no es regular.

Ejercicio 2. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, sin utilizar el Pumping Lema demostrar que el lenguaje $L = \{a^i b^j : i \neq j\}$ no es regular. Ayuda: recordar que los lenguajes regulares son cerrados para los operadores de conjuntos.

Estrategia: Cerradura bajo intersección y complemento

1. Recordemos que los lenguajes regulares son cerrados bajo:
   - Unión ($\cup$),
   - Intersección ($\cap$),
   - Complemento ($\overline{L}$).
2. Vamos a probar que $L = \{a^i b^j : i \neq j\}$ no es regular utilizando las siguientes ideas:
   - $L' = \{a^i b^j : i = j\}$ es regular.
   - Si L' es regular, entonces su complemento $\overline{L'} = \{a^i b^j : i \neq j\}$ debería ser regular si L fuera regular.
   - Demostraremos que $\overline{L'}$ no es regular, contradiciendo la cerradura de los lenguajes regulares bajo el complemento.

Paso 1: Lenguaje $L' = \{a^i b^j : i = j\}$

L' es regular porque podemos construir un autómata finito (AF) que lo acepte:
- L' contiene todas las cadenas con una cantidad igual de a's seguidos por b's.
- Un AF para L':
  - Usa una pila finita para contar los a's y los b's.
  - Este tipo de comportamiento se puede manejar por un lenguaje regular.

Por lo tanto, $L' \in LR_\Sigma$.

Paso 2: Complemento de L', $\overline{L'} = \{a^i b^j : i \neq j\}$

Si los lenguajes regulares fueran cerrados bajo el complemento, entonces $\overline{L'}$ también sería regular. Pero sabemos que:
1. L' se puede describir con un autómata porque solo necesita verificar igualdad entre a's y b's.
2. $\overline{L'}$ requiere verificar desigualdad $i \neq j$, lo que introduce una relación más compleja y no puede ser manejado por un autómata finito.

Esto implica que $\overline{L'}$ no es regular, y por tanto, L tampoco lo es.

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando formalmente en cada caso.

a) Si $L \notin LR^\Sigma$, entonces L es infinito.

b) Si $(L_1 \cup L_2) \in LR^\Sigma$, entonces $L_1 \in LR^\Sigma$ y $L_2 \in LR^\Sigma$.

c) Si $L \in LR^\Sigma$ y $L' \subseteq L$, entonces $L' \in LR^\Sigma$.

d) Si $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ con $L_i \in LR^\Sigma$, entonces $L \in LR^\Sigma$.

a)

Evaluación: VERDADERA

Dudosa

- **Justificación**:
  - Si un lenguaje es finito, por definición siempre es regular, ya que un autómata finito puede enumerar todas las cadenas de dicho lenguaje.
  - Por lo tanto, si $L \notin LR_\Sigma$, necesariamente L debe ser infinito.

Conclusión:

La afirmación es correcta porque no existen lenguajes finitos no regulares.

b)

Evaluación: FALSA

- **Justificación**:
  - La cerradura de los lenguajes regulares bajo la unión no implica que los operandos individuales sean regulares.
  - Ejemplo:
    - Sea $L_1 = \{a^n b^n : n \geq 0\}$, un lenguaje **no regular**.
    - Sea $L_2 = \{a^i b^j : i \neq j\}$, un lenguaje **regular**.
    - La unión:
      $$L_1 \cup L_2 = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a^i b^j : i \neq j\}$$
      puede ser regular si L_2 "domina" las características no regulares de L_1, pero esto no garantiza que L_1 sea regular.

Conclusión:

La afirmación es falsa porque $L_1 \cup L_2$ puede ser regular sin que ambos lenguajes L_1 y L_2 lo sean.

c)

Afirmación (c): Si $L \in LR_\Sigma$ y $L' \subseteq L$, entonces $L' \in LR_\Sigma$.

Evaluación: FALSA

- **Justificación**:
  - Aunque L es regular, un subconjunto de L puede no ser regular si el subconjunto tiene una estructura más compleja.
  - Ejemplo:
    - Sea $L = \{a, b\}^*$, un lenguaje regular que contiene todas las cadenas sobre $\{a, b\}$.
    - Sea $L' = \{a^n b^n : n \geq 0\}$, un subconjunto no regular de L.
    - Aunque L es regular, $L' \notin LR_\Sigma$.

Conclusión:

La afirmación es falsa porque L' puede no ser regular incluso si L lo es.

d)

Evaluación: FALSA

- **Justificación**:
  - Los lenguajes regulares no son cerrados bajo una cantidad infinita de uniones.
  - Ejemplo:
    - Sea $L_i = \{a^i b^i\}$, un conjunto finito regular para cada i.
    - La unión infinita:

$$L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

no es regular, porque no puede ser reconocido por un autómata finito (violación del Lema de Bombeo).

Conclusión:

La afirmación es falsa porque la unión infinita de lenguajes regulares puede no ser regular.