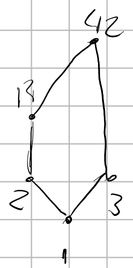
Copiar el siguiente enunciado en papel (**no se puede volver**) y responder:

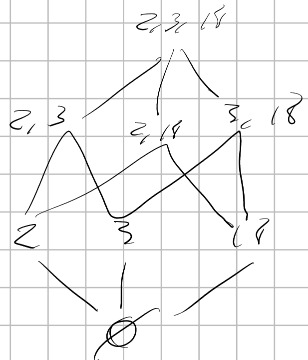
Sea L el poset reticulado formado por los números {1, 2, 3, 14, 42} con el orden de la divisibilidad. Seleccionar cuáles elementos de L son irreducibles.

$P(\{1,2,3,14,42\}, |)$



Los irreducibles son $\{2, 3, 14\}$

$D(Irr(L))$



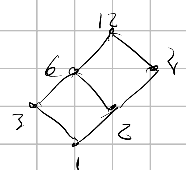
$|D(Irr(L))| > |L|$

Determine si son isomorfos $(D_{12}, |)$ y $(D_{18}, |)$

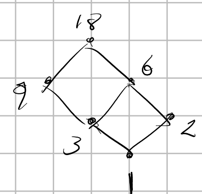
$12 = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2$

$18 = 9 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2$

$(D_{12}, |)$



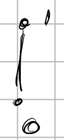
$(D_{18}, |)$



son claramente isomorfos

Determine si son isomorfos ([0, 1], ⩽) y ([-1, 0], ⩽)

$([0,1], \leq)$ $\qquad$ $([-1,0], \leq)$



son isomorfos pues para todo $x, y \in [0,1]$
$x \leq y$ $\exists$ $f(x) \leq f(y)$ tq $f(x), f(y) \in [-1,0]$

Proponemos $f(x) = x - 1$
y su inversa $f^{-1}(x) = x+1$

Veamos por ejemplo para $x=0$, $y=1$
$x \leq y$

$f(x) = 0-1 = -1 \leq f(y) = 1-1 = 0$

Ahora:

$f^{-1}(f(x)) = (x-1)+1 = x$ ✓

1. Probar que $([0,1), \leqslant)$ es isomorfo a $([2,4), \leqslant)$ (ambos con el orden usual de los reales).

2. Demostrar que en un álgebra de Boole, $\neg x \vee \neg y$ es complemento de $x \wedge y$.

Si fueran complemento se debería cumplir que:

$$(\neg x \vee \neg y) \wedge (x \wedge y) = 0 \quad (1)$$

$$(\neg x \vee \neg y) \vee (x \wedge y) = 1 \quad (2)$$

vale por ser algebra de Boole.

Partamos de (1)

$$(\neg x \vee \neg y) \wedge (x \wedge y) = ((x \wedge y) \wedge \neg x) \vee ((x \wedge y)) \wedge \neg y)$$

$$= ((x \wedge \neg x) \wedge y) \vee ((y \wedge \neg y) \wedge x)$$

$$(0 \wedge y) \vee (0 \wedge x)$$

$$0 \vee 0 = 0$$

Probemos (2)

$$(\neg x \vee \neg y) \vee (x \wedge y) = ((\neg x \vee \neg y) \vee x) \wedge ((\neg x \vee \neg y) \vee y)$$

$$((\neg x \vee x) \vee y) \wedge ((\neg y \vee y) \vee x)$$

$$(1 \vee y) \wedge (1 \vee x)$$

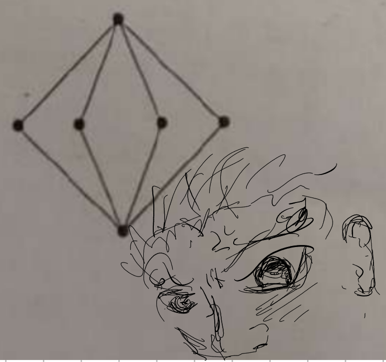
$$1 \wedge 1 = 1$$

Queda probado

3. Determine si las siguientes son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) D_{24} es isomorfo a D_{30}. F

b) El reticulado M_4 (ver figura) se incrusta en $\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f, g\})$. F



c) Sea L reticulado distributivo finito. Entonces para todo $x \in L$ se tiene que

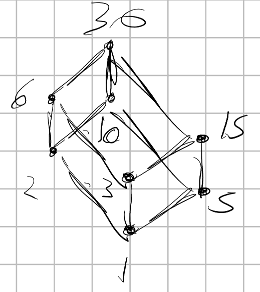
$$x = \sup\{a \in At(L) : a \leq x\}.$$ ✓

a) $24 = 12 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3$

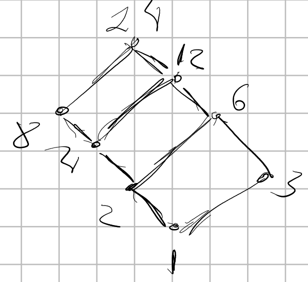
$30 = 15 \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2$

Como se descomponen en cantidades de primos distintos no son isomorfos.

(D_{30})



(D_{24})



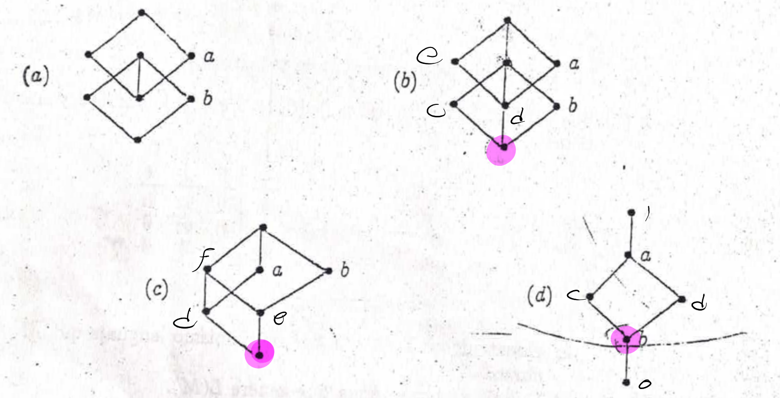
b) $\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f, g\})$

Veamos que M_4 no es un retículo distributivo pues M_3 se le incrusta.

Sabemos que todos los $\mathcal{P}(X)$ son distributivos $\therefore$ M_4 no se puede incrustar en $\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f, g\})$

c) verdadero.

(1) Considere los siguientes diagramas de Hasse:



(i) Marque sobre cada diagrama $inf\{a,b\}$, en caso que exista. ✓

(ii) Determine cuales son reticulados, justifique la respuesta. ✓

(iii) Determine cuales son reticulados distributivos, justifique la respuesta. $\frac{2}{3}$

(iv) Para los reticulados, calcule en cada caso el conjunto de átomos y el conjunto de join-irreducibles. $\frac{5}{6}$

(v) Calcule todos los filtros primos de (d). $\frac{1}{4}$

1) ii) a) No es reticulado porque $inf(\{a,b\})$ no existe.
b) es reticulado pues $\exists$ sup e inf $\forall$ par x, y del poset.
c) es reticulado pues se incrusta en D_{30}
d) Idem b)

iii) a) No es reticulado $\Rightarrow$ No es distributivo.
b) M_3 se incrusta $\Rightarrow$ No es distributivo.
c) Se incrusta en D_{30} que sí es distributivo $\Rightarrow$ es distributivo.
d) Ni M_3 ni N_5 se incrustan $\Rightarrow$ es distributivo.

iv) $At(b) = \{c, d, b\}$ $\quad At(c) = \{d, e\}$

$Irr(b) = At(b) \cup \{e, a)$ $\quad Irr(c) = At(c) \cup \{a, b\}$

$At(d) = \{b\}$

$Irr(d) = At(d) \cup \{a, d, 1\}$

(2) (i) Pruebe que en todo reticulado vale la desigualdad:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z)$$

(ii) Pruebe que en toda álgebra de Boole vale la propiedad:

$$x \leq y' \Leftrightarrow x \wedge y = 0$$

(iii) Pruebe que en toda álgebra de Boole vale la igualdad:

$$(x'' \vee y'') = (x' \wedge y')'.$$

2) i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z)$

$$\begin{cases} (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (x \vee y) \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (y \vee z) \end{cases}$$

$x \vee y \geq x \wedge y$ ✓

$x \vee y \geq x \wedge z \iff x \vee y \geq x \geq x \wedge z$ ✓

$y \vee z \geq x \wedge y \Rightarrow y \vee z \geq y \geq x \wedge y$ ✓

$y \vee z \geq x \wedge z \iff y \vee z \geq z \geq x \wedge z$ ✓

ii)

$x \leq y' \iff x \wedge y = 0$

sabemos que $y \wedge y' = 0$ y $y \vee y' = 1$

Tambien sabemos que como es un algebra de Boole $\exists$ un solo complemento.

$\Rightarrow)$ $x \leq y \Rightarrow x \wedge y \leq y \wedge y'$

$x \wedge y \leq 0$

entonces $x \wedge y = 0$ ✓

$\Leftarrow)$ $x \wedge y = 0 \Rightarrow x \leq y \Rightarrow x \wedge y' \leq y \wedge y'$

$\Rightarrow x \leq y'$ ✓

iii) Pruebe que $\forall$ AB vale:

$(x'' \vee y'') = (x' \wedge y')'$

$\equiv$ {Doble negación}

$x \vee y = (x' \wedge y')'$

$\equiv$ {Ley de Morgan}

$x \vee y = x'' \vee y''$

$\equiv$ {Doble negación}

$x \vee y = x \vee y$

Doble negación

$x'' = x$

$x'' \vee x' = 1$

$x'' \wedge x' = 0$

Pero

$x' \vee x = 1$

$x' \wedge x = 0$

$\Rightarrow x'' = x$ ✓

Por unicidad del complemento

Ley de Morgan $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

$(x \wedge y)' \vee (x' \vee y') = 1$

$(x \wedge y)' \wedge (x' \vee y') = 0$

Dualidad

$(x \wedge y)' \leq (x' \vee y')$ / $(x \wedge y) \geq (x' \vee y')$

$(x \leq y)'$ $\quad x \leq y$

$x \geq y$ $\quad x' \geq y'$

$(0 \wedge 0)'$ $\quad (0' \vee 0')$

$(0)'$ $\quad (1 \vee 1)$

1 $\quad 1$ ✓

(3) (a) Defina isomorfismo de poset, e isomorfismo de reticulado.
(b) Suponga que $f : L \to L'$ es un isomorfismo de posets, y que L, L' son reticulados. Pruebe que f es un isomorfismo de reticulados.
(c) Suponga que $(L, \vee, \wedge, 0, 1, ')$, $(L', \vee', \wedge', 0', 1', '')$ son reticulados acotados con operación complemento, y que $f : L \to L'$ es un isomorfismo de posets.
(i) Vale que $f(x')$ es complemento de $f(x)$?
(ii) Vale que $f(x') = f(x)''$?

3) a) Un isomorfismo de poset

Es una función $\overset{\text{biy}}{}$ $f: (P, \leq) \to (Q, \leq')$ tal que $\forall x, y \in P$ $x \leq y$, hay un $f(x), f(y) \in Q$ tq $f(x) \leq' f(y)$.

Un isomorfismo de un reticulado:

Es una función $\overset{\text{biy}}{}$ $f: (L, \wedge, \vee) \to (L', \wedge', \vee')$ tq $\forall x, y \in L$ hay un $f(x), f(y) \in L'$ tq $x \wedge y = c$ $f(x) \wedge f(y) = c$
$x \vee y = d$ $f(x \vee y) = d$ more or less

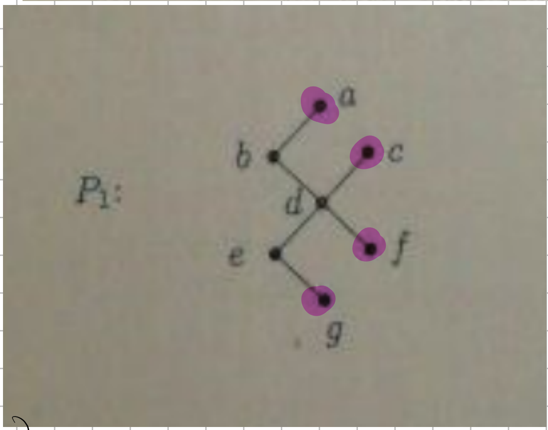
Definición

Sean $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$ dos retículos y $f : L \to L'$ una función. Decimos que f es un ismomorfismo de $\mathbf{L}$ en $\mathbf{L}'$ sii f es biyectiva y para todo $x, y \in L$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \quad \text{y} \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

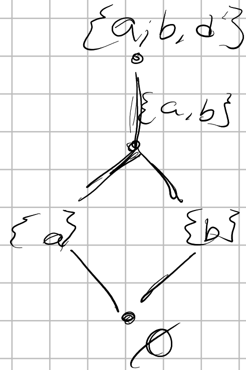
b)

(1) (a) Señale los elementos minimales, maximales, mínimos y máximos en el poset P_1 de la figura.
(b) Determine si el poset $(P_2, \subseteq)$ es reticulado, donde $P_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,d\}\}$
(c) Determine las cotas superiores del conjunto $A = \{2,3,6\}$ en el poset $(P_3, |)$, donde $P_3 = \{2,3,4,6,12,8,24\}$. ¿Tiene A supremo?



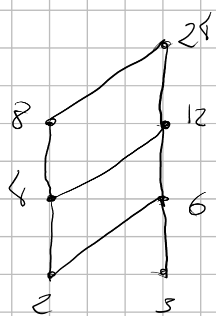
a) Maximales : $\{a, c\}$
minimales : $\{g, f\}$
max ninguno
Min ninguno.

b) $(P_2, \subseteq)$ $\quad P_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,d\}\}$



Sí es reticulado

c) $P_3 = \{2,3,4,6,12,8,24\}$ $\quad (P_3, |)$



$A = \{2,3,6\}$

Cotas superiores: $\{6, 12, 24\}$
$\sup\{2,3,6\} = 6$

$P_3 = \{2,3,4,6,12,8,24\}$. ¿Tiene A supremo?

(2) Responda si es Verdadero o Falso. Justifique su respuesta.

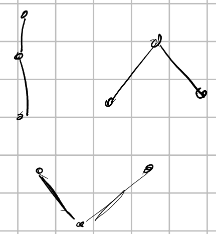
(a) En todo reticulado distributivo finito, el mayor elemento se puede escribir como supremo de átomos. V

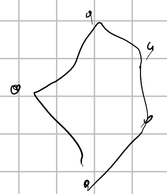
(b) Para todo poset P de menos de 4 elementos, $\mathcal{D}(P)$ es un reticulado distributivo acotado. V

(c) Existe un n tal que D_n sea isomorfo a N_5. F

(d) Existe una biyección entre dos Álg. de Boole que preserve el $\vee$ pero no preserve el $\wedge$ F

$|P| = 1$ $|P| = 2$ $|P| = 3$





(3) Dé un natural n tal que D_n satisface lo siguiente. Justifique su respuesta.

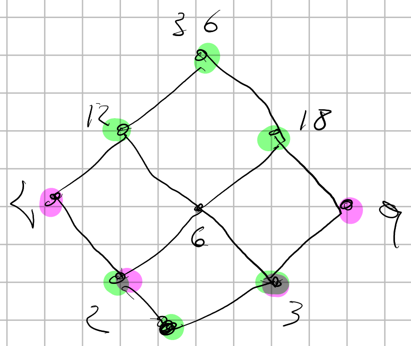
(i) No tiene a $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$ como subreticulado

(ii) Tiene al menos 4 irreducibles.

(iii) Tiene al menos 3 elementos complementados.

$2^2 \cdot 3^2 = 36$ $|D_{36}| = 9 \leq |P|$

$P(\{a,b,c,d\})$



(4) Sea L un reticulado. Pruebe que PROP 1 implica PROP 2, donde:

PROP 1: Para todo $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

PROP 2: Para todo $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\forall x, y, z \in L,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$\Rightarrow$

$\forall x, y, z \in L,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Sabiendo que se cumple Prop 1 sabemos que L es ret distr. podemos ver que L es simétrico con respecto a ∨ e ∧.
∴ se cumple Prop 2

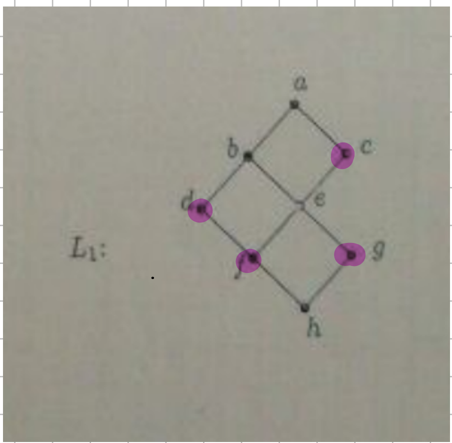
(5) Considere el reticulado dado por L_1 de la figura. Sea F el isomorfismo dado por el Teorema de Birkhoff.

(a) ¿Cuánto vale $F(b)$?

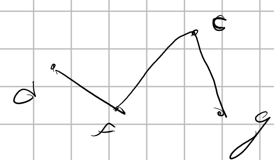
(b) ¿Qué elemento $x \in L_1$ satisface $F(x) = \{f, g, c\}$?

(c) ¿Cuál es el elemento $x \in L_1$ tal que $F(x) = At(L_1)$?

(d) ¿Existe $x \in L_1$ tal que $F(x) = \{i \in Irr(L_1) : i \leq e\}$?

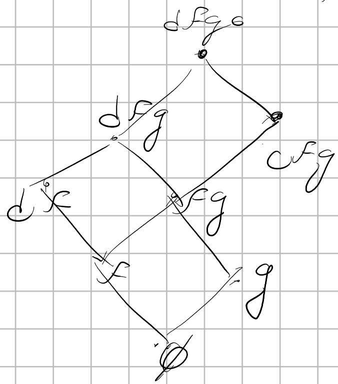


$Irr(L_1)$:



$D(Irr(L_1)) = (\emptyset, \cancel{\{d\}}, \{f\}, \cancel{\{c\}}, \{g\}, \{d f\}, \cancel{\{d g\}}, \cancel{\{f, c\}}, \{f g\}, \{c, f, g\}, \{d f g\}, \cancel{\{d, f, c\}}, \{d, f, c, g\})$

$(\emptyset, f, g, \{d, f\}, \{f, g\}, \{d f g\}, \{d f g c\})$



b) $F(b) = \{d f g\}$

c) $F\{f\} = f$ At

$F\{g\} = g$ At

d) $F(e) = \{f, g\}$

(d) ¿Existe

(6) Sea B un Álgebra de Boole finita. Pruebe que todo elemento de B se puede escribir como supremo de átomos. Enuncie (sin probar) todo resultado auxiliar que utilice.