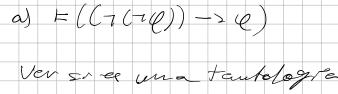




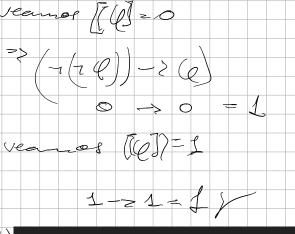
- 4. Demuestre las siguientes afirmaciones.
  - $a) \models ((\neg(\neg\varphi)) \rightarrow \varphi).$
  - $b) \models \varphi \text{ si y s\'olo si } \emptyset \models \varphi.$



## Definición

- lacksquare f valida  $\Gamma$  sii para toda  $\psi \in \Gamma$ ,  $[\![\psi]\!]_f = 1$ .
- $\varphi$  es consecuencia lógica de  $\Gamma$  sii para toda asignación f que valida  $\Gamma$ ,  $[\![\varphi]\!]_f=1$  (notación:  $\Gamma\models\varphi$ )
- $\varphi$  es una **tautología**  $\iff$   $[\![\varphi]\!]_f=1$  para toda asignación f. (notación:  $\models \varphi$ )

Tenemos que ver que para toda asignación f,  $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$ . Equivalentemente,  $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$ .



## 4b) Proving |=arphi if and only if $\emptyset|=arphi$ :

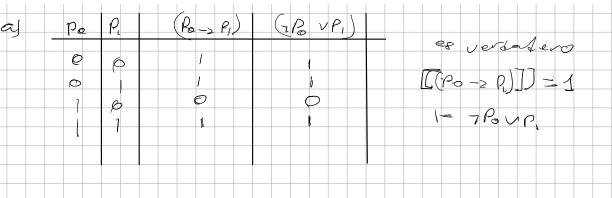
This statement is about **semantic consequence**. It asserts that a formula  $\varphi$  is true in all interpretations (i.e., is a tautology) if and only if the empty set of premises also semantically entails  $\varphi$ .

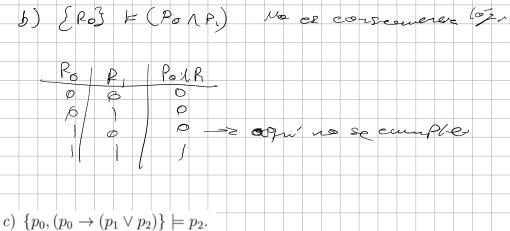
- If  $\varphi$  is a tautology ( $|=\varphi$ ), it means  $\varphi$  is true regardless of the truth values of its components.
- The empty set  $\emptyset$  has no premises, so it vacuously entails any formula that is always true.

Hence, if arphi is a tautology, the empty set of premises will entail it, and vice versa.

Would you like to explore these proofs in more detail or clarify any other questions?

- 5. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta. En caso de serlo debe demostrarla utilizando la definición de consecuencia. Si no es cierta, debe encontrar una asignación que certifique su falsedad.
  - $a) \ \{p_0 \to p_1\} \models \neg p_0 \lor p_1. \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ )$
  - $b) \{p_0\} \models (p_0 \land p_1).$
  - c)  $\{p_0, (p_0 \to (p_1 \lor p_2))\} \models p_2$ .





The statement  $\{p_0,(p_0 o(p_1ee p_2))\}\models p_2$  is **false**. A counterexample is when  $p_0=1$  ,  $p_1=1$  , and  $p_2=0$ , where the premises are true, but  $p_2$  is false.

- 6. Demuestre las siguientes afirmaciones:
  - a) Si  $\Gamma \subseteq \Delta$  y  $\Gamma \models \varphi$ , entonces  $\Delta \models \varphi$ .
  - b) Si  $\Gamma \models \varphi$  y  $\{\varphi\} \models \psi$ , entonces  $\Gamma \models \psi$ .

a) Asumangos que 1 / q

cero significa que todos ces romalas en 1 son 1 pero Q Puede ser O, TI CS aplica lo mirano que 1, Pero V II Q indicando que todas las romalas en V son 1 y Q = 1. Pero contradree. ·. 1 = 0

- The key idea here is that  $\Gamma$  is a subset of  $\Delta$ . If  $\varphi$  is a logical consequence of  $\Gamma$ , meaning  $\varphi$ must be true in every interpretation where all formulas in  $\Gamma$  are true, then it must also hold in any interpretation where the formulas of  $\Delta$  are true, because  $\Gamma$ 's formulas are included in  $\Delta$ .
- ullet Even though  $\Delta$  may have additional formulas, those formulas cannot contradict the truth of  $\varphi$ , because  $\Gamma \models \varphi$  already guarantees  $\varphi$ 's truth in any interpretation that satisfies  $\Gamma$ .

# b) r=e x { ( } = 4 , = > r = 4

Esta es esencialmente una propiedad de **transitividad** en la consecuencia semántica. Si  $\Gamma$  implica a arphi, y arphi implica a  $\psi$  , entonces  $\Gamma$  debería implicar a  $\psi$  . Vamos a probarlo for<u>malmente</u>:

- 1. Asumimos que  $\Gamma \models \varphi$ :
  - Esto significa que para cualquier interpretación I, si todas las fórmulas en  $\Gamma$  son verdaderas bajo I, entonces arphi también es verdadera bajo I.
- 2. Asumimos que  $\{\varphi\} \models \psi$ :
  - Esto significa que para cualquier interpretación I, si arphi es verdadera bajo I, entonces  $\psi$
- Ahora conectemos estas dos afirmaciones:
  - Consideremos una interpretación I donde todas las fórmulas en  $\Gamma$  son verdaderas. Por  $\Gamma \models arphi$ , esto significa que arphi también debe ser verdadera bajo I.
- - Por lo tanto, en cualquier interpretación I donde todas las fórmulas en  $\Gamma$  son verdaderas,
  - Esto prueba que  $\Gamma \models \psi$ , es decir,  $\psi$  es una consecuencia lógica de  $\Gamma.$

