Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Facundo Bustos
Mauricio Tellechea Gonzalo Zigarán

FaMAF, 6 de septiembre de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Representación de álgebras de Boole finitas

2. Representación se reticulados distributivos finitos
   - Conjuntos decrecientes de un poset

Álgebras de Boole finitas

Definición

Dado un poset $\mathbf{P}$ con elemento mínimo 0, decimos que a es un *átomo* si cubre a 0. Denotamos con $At(\mathbf{P}) = \{a \in P : a \text{ es átomo de } \mathbf{P}\}$.

Álgebras de Boole finitas

Definición

Dado un poset $\mathbf{P}$ con elemento mínimo 0, decimos que a es un *átomo* si cubre a 0. Denotamos con $At(\mathbf{P}) = \{a \in P : a \text{ es átomo de } \mathbf{P}\}$.

Nos interesa ver que, en las álgebras de Boole finitas, los átomos "separan" elementos distintos.

Lema

*Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole **finita**. Para todo $x \in B$, $x \neq 0$, existe un átomo a tal que $a \leq x$.*

Álgebras de Boole finitas

Definición

Dado un poset $\mathbf{P}$ con elemento mínimo 0, decimos que a es un *átomo* si cubre a 0. Denotamos con $At(\mathbf{P}) = \{a \in P : a \text{ es átomo de } \mathbf{P}\}$.

Nos interesa ver que, en las álgebras de Boole finitas, los átomos "separan" elementos distintos.

Lema

*Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole **finita**. Para todo $x \in B$, $x \neq 0$, existe un átomo a tal que $a \leq x$.*

Lema (separación)

Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole finita y sean $x, y \in B$, tales que $x \nleq y$. Entonces existe un átomo a tal que

$$a \leq x \quad \text{y} \quad a \nleq y.$$

Lema

Sea $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo con elemento mínimo* 0*. Sean* $b_1, \ldots, b_n \in L$ *y* a *un átomo de* $\mathbf{L}$*. Si* $a \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ *entonces* $a \leq b_i$ *para algún* i*,* $1 \leq i \leq n$*.*

Álgebras de Boole finitas

Lema

Sea $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo con elemento mínimo* 0. *Sean* $b_1, \ldots, b_n \in L$ *y* a *un átomo de* $\mathbf{L}$. *Si* $a \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ *entonces* $a \leq b_i$ *para algún* i, $1 \leq i \leq n$.

Teorema (Representación de álgebras de Boole finitas)

Sea $\mathbf{B}$ *un álgebra de Boole finita. La función*

$$\begin{aligned} F : B &\to \mathcal{P}(At(\mathbf{B})) \\ x &\mapsto \{a \in At(\mathbf{B}) : a \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $\mathbf{B}$ *y* $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, At(\mathbf{B}))$ *y la inversa de* F *es el* $\sup$.

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.

Para esto es suficiente probar que

(1) F es suryectiva y que

(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.
Para esto es suficiente probar que
(1) F es suryectiva y que
(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Para ver (1), consideremos $A \subseteq At(\mathbf{B})$. Veremos que $F(\sup(A)) = A$.

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.
Para esto es suficiente probar que
(1) F es suryectiva y que
(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Para ver (1), consideremos $A \subseteq At(\mathbf{B})$. Veremos que $F(\sup(A)) = A$.
La inclusión $A \subseteq F(\sup(A))$ es trivial.

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.
Para esto es suficiente probar que
(1) F es suryectiva y que
(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Para ver (1), consideremos $A \subseteq At(\mathbf{B})$. Veremos que $F(\sup(A)) = A$.
La inclusión $A \subseteq F(\sup(A))$ es trivial. Para ver la otra inclusión,

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.
Para esto es suficiente probar que
(1) F es suryectiva y que
(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Para ver (1), consideremos $A \subseteq At(\mathbf{B})$. Veremos que $F(\sup(A)) = A$.
La inclusión $A \subseteq F(\sup(A))$ es trivial. Para ver la otra inclusión,
(si $A = \emptyset$

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.
Para esto es suficiente probar que
(1) F es suryectiva y que
(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Para ver (1), consideremos $A \subseteq At(\mathbf{B})$. Veremos que $F(\sup(A)) = A$.
La inclusión $A \subseteq F(\sup(A))$ es trivial. Para ver la otra inclusión,
(si $A = \emptyset \longrightarrow$ Ejercicio

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.
Para esto es suficiente probar que
(1) F es suryectiva y que
(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Para ver (1), consideremos $A \subseteq At(\mathbf{B})$. Veremos que $F(\sup(A)) = A$.
La inclusión $A \subseteq F(\sup(A))$ es trivial. Para ver la otra inclusión, (si $A = \emptyset \longrightarrow$ Ejercicio) sea $a \in F(\sup(A))$, es decir, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces $a \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Por el Lema anterior, existe i tal que $a \leq a_i$, como a y a_i son átomos, $a = a_i$ y en consecuencia $a \in A$.

Demostración.

Si $\leq$ es el orden asociado a $\mathbf{B}$, basta probar que F es un isomorfismo entre $(B, \leq)$ y $(\mathcal{P}(At(\mathbf{B})), \subseteq)$.
Para esto es suficiente probar que
(1) F es suryectiva y que
(2) para todo $x, y \in B$, $x \leq y \iff F(x) \subseteq F(y)$.

Para ver (1), consideremos $A \subseteq At(\mathbf{B})$. Veremos que $F(\sup(A)) = A$.
La inclusión $A \subseteq F(\sup(A))$ es trivial. Para ver la otra inclusión, (si $A = \emptyset \longrightarrow$ Ejercicio) sea $a \in F(\sup(A))$, es decir, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces $a \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Por el Lema anterior, existe i tal que $a \leq a_i$, como a y a_i son átomos, $a = a_i$ y en consecuencia $a \in A$.
Para ver (2), sean $x, y \in B$ tales que $x \leq y$. Si $a \leq x$ por transitividad $a \leq y$ por lo que $F(x) \subseteq F(y)$. Para ver la otra implicación probaremos la contrarrecíproca. Si $x \not\leq y$, por el Lema de separación por átomos, existe un átomo a tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$, lo que implica $F(x) \not\subseteq F(y)$.

Álgebras de Boole finitas

Corolario

Si $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Boole finita entonces* $|B| = 2^n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$*.*

Álgebras de Boole finitas

Corolario

Si $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Boole finita entonces* $|B| = 2^n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$.

Corolario

Si $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B}'$ *son álgebras de Boole finitas y* $g : At(\mathbf{B}) \to At(\mathbf{B}')$ *es una función biyectiva, existe un y sólo un isomorfismo* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{B}'$ *que extiende a* g.
Todo isomorfismo de álgebras de Boole está determinado por su valor en los átomos.

Álgebras de Boole finitas

Corolario

Si $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Boole finita entonces* $|B| = 2^n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$.

Corolario

Si $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B}'$ *son álgebras de Boole finitas y* $g : At(\mathbf{B}) \to At(\mathbf{B}')$ *es una función biyectiva, existe un y sólo un isomorfismo* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{B}'$ *que extiende a* g.
Todo isomorfismo de álgebras de Boole está determinado por su valor en los átomos.

Corolario

Si $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B}'$ *son dos álgebras de Boole finitas, son isomorfas sii tienen la misma cantidad de átomos.*

Criterio

Este teorema nos sirve como criterio para determinar si un reticulado finito es o no álgebra de Boole.

Criterio

Este teorema nos sirve como criterio para determinar si un reticulado finito es o no álgebra de Boole.

Para cualquier reticulado finito $\mathbf{L}$ podemos realizar la contrucción $(\mathcal{P}(At(\mathbf{L})), \subseteq)$ y fijarnos si es isomorfa a $\mathbf{L}$.

Criterio

Este teorema nos sirve como criterio para determinar si un reticulado finito es o no álgebra de Boole.

Para cualquier reticulado finito $\mathbf{L}$ podemos realizar la contrucción $(\mathcal{P}(At(\mathbf{L})), \subseteq)$ y fijarnos si es isomorfa a $\mathbf{L}$.

Podemos concluir que $\mathbf{L}$ es un álgebra de Boole sii resulta isomorfo a $(\mathcal{P}(At(\mathbf{L})), \subseteq)$.

Conjuntos decrecientes de un poset

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset. Decimos que un subconjunto $D \subseteq P$ es *decreciente* sii para todo $x, z \in P$,

$$\text{si } x \in D \text{ y } z \leq x \text{ entonces } z \in D.$$

Llamaremos $\mathcal{D}(\mathbf{P}) :=$ familia de todos los subconjuntos decrecientes de $\mathbf{P}$.

Lema

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, $(\mathcal{D}(P), \subseteq)$ es un subreticulado de $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$.

Corolario

$(D(P), \subseteq)$ *es distributivo.*

Definición

Dado un reticulado $\mathbf{L}$, un elemento $u \in L$ es (supremo)irreducible sii cubre exactamente a un elemento.
Denotaremos mediante $\mathbf{L}$ al conjunto de los elementos irreducibles de $\mathbf{L}$.

Observar que si u es irreducible y $u = x_1 \vee \cdots \vee x_n$ entonces $u = x_i$ para algún i.

Representación de reticulados distributivos finitos

Teorema (Birkhoff)

Sea $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo finito. Entonces la función*

$$\begin{aligned} F : L &\to \mathcal{D}(Irr(L)) \\ x &\mapsto \{u \in Irr(L) : u \leq x\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $(L, \leq)$ *y* $(\mathcal{D}(Irr(L)), \subseteq)$