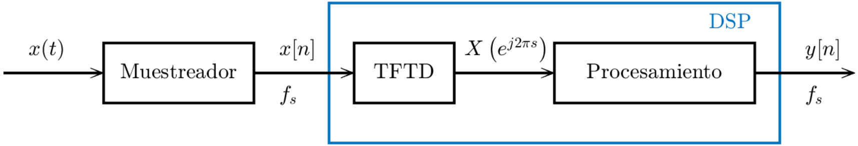
Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2023

Tema 7 - Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Santiago Rodríguez

Transformada Discreta de Fourier

Motivación



Méritos de TFTD

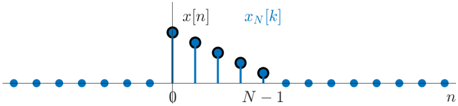
- Permite Análisis Espectral
- Convierte la convolución en producto
- Simplifica el análisis de operación de los SLID

Cuestionamientos

- $X(e^{j2\pi s})$ es una SVIC de s. Se desea algo 100% digital: tanto $x[n]$ como una TF adecuada. Para procesar el espectro debemos tener frecuencias discretas.
- Maneja secuencias de largo infinito. La mayoría de nuestros datos son registros de largo finito N: p.ej. $x[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$

Prolongación de la secuencia finita

Opción 1: prolongar con ceros



$$X_N(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi sn}$$

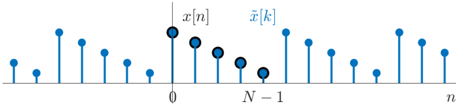
Cuestionamientos

- $X_N\left(e^{j2\pi s}\right)$ sigue siendo una SVIC de s
- Impusimos que la señal sea nula fuera de $[0, N-1]$. ¿Por qué?

Transformada Discreta de Fourier

Motivación

Opción 2: prolongar periódicamente



Méritos

- Se extiende a $\tilde{x}[n]$ con señal que realmente ocurrió en $[0, N-1]$
- Se podría representar eficientemente la extensión periódica con una Serie Discreta de Fourier (SDF)

Transformada Discreta de Fourier

Motivación

Extensión periódica

Usamos SDF sobre $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ pensando formalmente como que se ha extendido periódicamente, con período N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi s})\Big|_{s=\frac{k}{N}} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Observación: $X\left(e^{j2\pi s}\right)$ venía dada por la TFTD de 1 período de la señal periódica. Es decir $X\left(e^{j2\pi s}\right) \equiv X_N\left(e^{j2\pi s}\right)$

Definimos

$$X[k] \triangleq X(e^{j2\pi s})\Big|_{s=\frac{k}{N}} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

y ahora el dominio de los a_k es discreto.

Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Dada $x[n]$ real o compleja de duración finita ($0 \leq n \leq N-1$)

Transformada (ecuación de Análisis)

$$X[k] = TDF\{x\}[k] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \; 0 \leq k \leq N-1$$

Antitransformada (ecuación de Síntesis)

$$x[n] = TDF^{-1}\{X\}[n] \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \; 0 \leq n \leq N-1$$

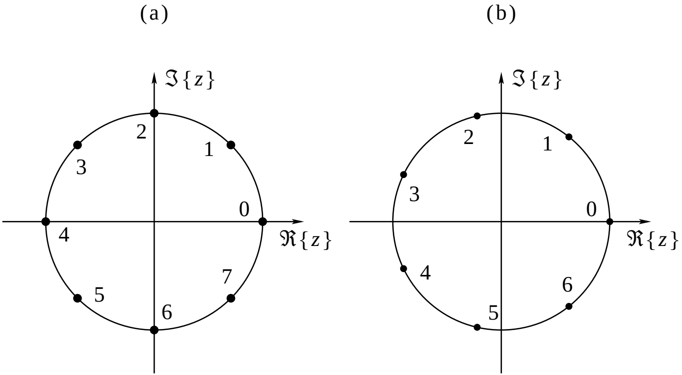
- No hay problemas de existencia (suma finita).

Exponencial compleja discreta

Definimos: $W_N \triangleq e^{j2\pi/N}$

$$\Rightarrow X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-nk} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{nk}$$

- $\{W_N^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica, con período N ($W_N^N = W_N^0 = 1$).
- a) $N = 8$. b) $N = 7$.



Teorema útil

Teorema

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = N\delta[(k)_N] = \begin{cases} N & \text{si } (k)_N = 0 \\ 0 & \text{si } (k)_N \neq 0 \end{cases}$$

donde $(k)_N$ denota k *mod* N, el resto de dividir a k por N

- Si $k = mN \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{Nmn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$
- Si $k \neq mN$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{W_N^0 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = \frac{1-1}{1 - W_N^k} = 0$$

Demostración

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-nk} \Rightarrow x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{nk}$$

Demostración

$$TDF^{-1}\{X\}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_N^{-km} \right] W_N^{kn} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} \right] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \delta[(n-m)_N] = x[n]$$

Ejemplos

- $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < n < N \end{cases} \Rightarrow X[k] = 1,\ 0 \leq k \leq N-1$
- $x[n] = 1,\ 0 \leq n \leq N-1 \Rightarrow X[k] = \begin{cases} N & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < k < N \end{cases}$
- $x[n] = \{1,\ 3,\ 0,\ -2\}$

Propiedades I

Linealidad

$z[n] = ax[n] + by[n] \Leftrightarrow Z[k] = aX[k] + bY[k],\ a, b \in \mathbb{C}$

Reflexión (circular)

$$y[n] = x[(N-n)_N] \Leftrightarrow Y[k] = X[(N-k)_N]$$

Conjugación

$$y[n] = \bar{x}[n] \Leftrightarrow Y[k] = \bar{X}[(N-k)_N]$$

Dualidad

$$y[n] = X[n] \Leftrightarrow Y[k] = N\,x[(N-k)_N]$$

Propiedades II

Desplazamiento circular

$$y[n] = x[(n-m)_N] \Leftrightarrow Y[k] = W_N^{-km} X[k],\ m \in \mathbb{Z}$$
$$y[n] = W_N^{nm} x[n] \Leftrightarrow Y[k] = X[(k-m)_N],\ m \in \mathbb{Z}$$

Convolución circular

$$z[n] = \{x \circledast y\}[n] \Leftrightarrow Z[k] = X[k]Y[d]$$
$$z[n] = x[n]y[n] \Leftrightarrow Z[k] = \frac{1}{N}\{X \circledast Y\}[k]$$

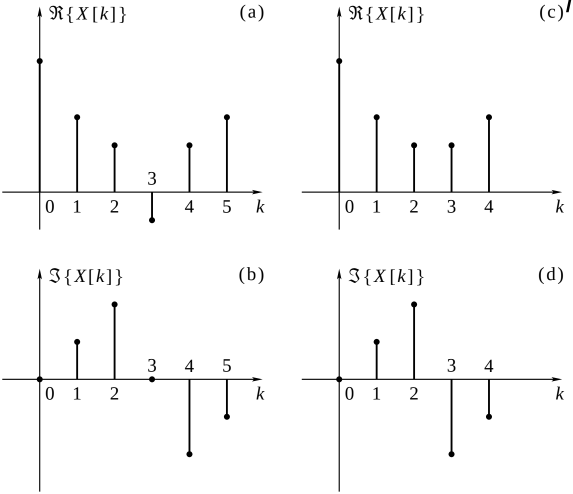
Simetría Hermítica circular

$$\text{Si } x[n] \in \mathbb{R} \Rightarrow X[(N-k)_N] = \bar{X}[k]$$

Simetría Hermítica circular

- $X[(N-k)_N] = \bar{X}[k] \;\Rightarrow \Re\{X\}$ y $|X|$ circularmente par.
  $\Im\{X\}$ y $\measuredangle X$ circularmente impar.
- $N = 6$

$N = 5$



Vinculación de la TDF con la TFTD

Si tenemos una secuencia $x[n]$ tal que $x[n] = 0$ si $n \neq 0 \ldots N-1$

$$X(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi sn}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}$$

$$X[k] = X(e^{j2\pi s})\Big|_{s=\frac{k}{N}}$$

Conclusión

Puedo obtener la TDF de $x[n]$, $X[k]$, evaluando la TFTD de $x[n]$, $X(e^{j2\pi s})$ en $\frac{k}{N}$, siempre que $x[n] = 0$ si $n \neq 0 \ldots N-1$

TDF de una sinusoide

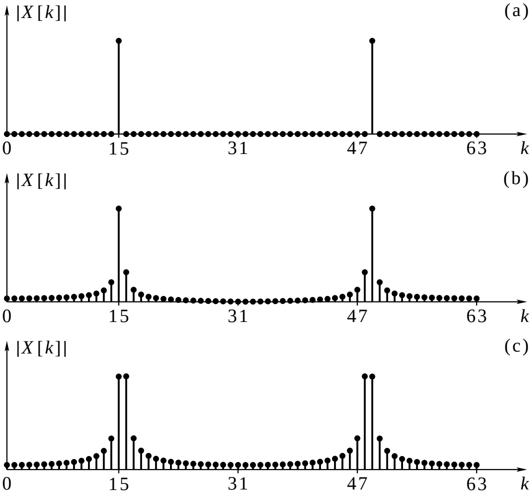
- $x[n] = \cos(\theta_0 n + \phi_0),\ 0 \leq n \leq N-1,\ 0 < \theta_0 < \pi$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\theta_0 n + \phi_0) W_N^{-kn} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\phi_0} \frac{1 - e^{j\theta_0 N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi k}{N})}} + \frac{1}{2} e^{-j\phi_0} \frac{1 - e^{-j\theta_0 N}}{1 - e^{-j(\theta_0 + \frac{2\pi k}{N})}}$$

TDF de una sinusoide ($N = 64$)

a) $\theta_0 = 2\pi 15/64$, b) $\theta_0 = 2\pi 15.25/64$, c) $\theta_0 = 2\pi 15.5/64$.



Convolución circular o periódica

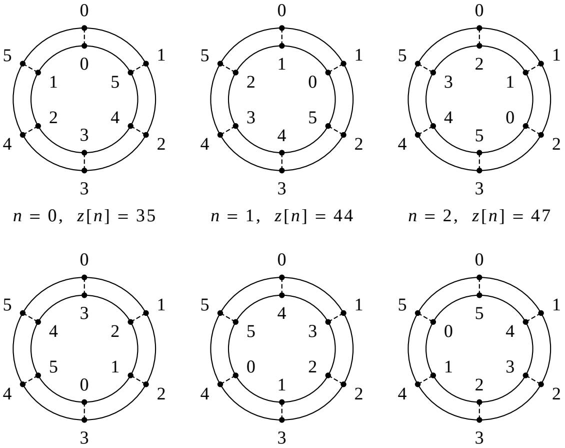
Dadas $x[n]$ e $y[n]$ secuencias duración finita, de igual largo N.

Convolución circular o periódica

$$z[n] = \{x \circledast y\}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n-m)_N],\ 0 \leq n \leq N-1$$

- $\{x \circledast y\} = \{y \circledast x\}$
- $\{\{x \circledast y\} \circledast z\} = \{x \circledast \{y \circledast z\}\}$

Interpretación Gráfica



$n = 0, \;\; z[n] = 35$ $\quad$ $n = 1, \;\; z[n] = 44$ $\quad$ $n = 2, \;\; z[n] = 47$

$n = 3, \;\; z[n] = 44$ $\quad$ $n = 4, \;\; z[n] = 35$ $\quad$ $n = 5, \;\; z[n] = 20$

La matriz TDF

$$\text{Si definimos: } \mathbf{x_N} \triangleq \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} ; \mathbf{X_N} \triangleq \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} ;$$

La TDF, $\mathcal{D} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, es lineal $\Rightarrow$ Matriz de $N \times N$

$$\mathbf{F_N} \triangleq \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} ; \boxed{\mathbf{X_N} = \mathbf{F_N}\mathbf{x_N}}$$

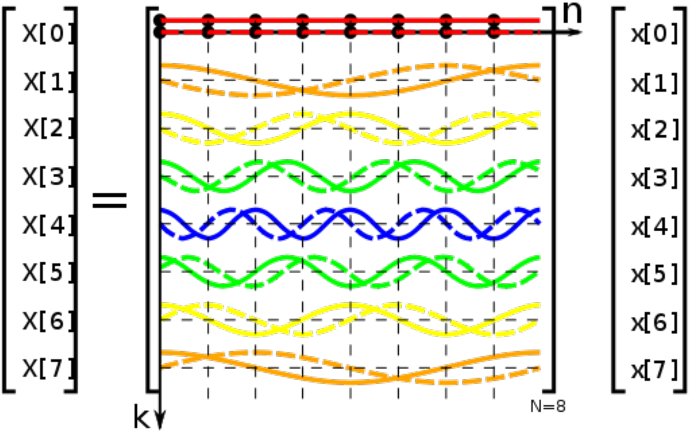
Ejemplos

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; \mathbf{F_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+j\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1-j\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1-j\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1+j\sqrt{3}) \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{F_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{X_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-5j \\ 0 \\ 1+5j \end{bmatrix} ;$$

Interpretación Gráfica



Vinculación de la TDF con la TFTD

Si tenemos una secuencia $x[n]$ tal que $x[n] = 0$ si $n \neq 0 \dots N-1$

$$X(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi sn}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}$$

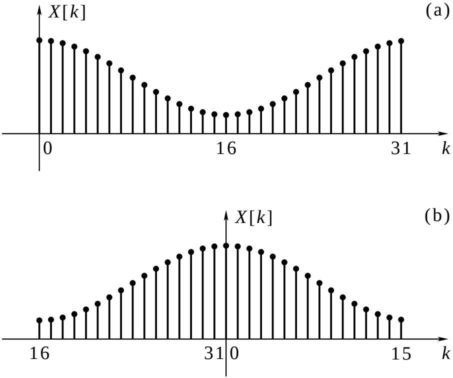
$$X[k] = X(e^{j2\pi s})\Big|_{s=\frac{k}{N}}$$

Conclusión

Puedo obtener la TDF de $x[n]$, $X[k]$, evaluando la TFTD de $x[n]$, $X(e^{j2\pi s})$ en $\frac{k}{N}$, siempre que $x[n] = 0$ si $n \neq 0 \dots N-1$

Rango de frecuencias analizadas

- $0 \leq k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ corresponde a frecuencias del intervalo $0 \leq s \leq 1/2$.
- $\lceil N/2 \rceil \leq k \leq N - 1$ corresponde a frecuencias del intervalo $1/2 \leq s < 1$, o $-1/2 \leq s < 0$.
- Para evitar confusiones suele re-acomodarse al graficar:



Resolución de frecuencias de la TDF

Si se toman N muestras de una señal $x(t)$ cada T seg.:

$X[k]$	$X(e^{j2\pi s})$	$X(e^{j2\pi fT})$
$0 \ldots N-1$	$[0,1]$	$\left[0, \dfrac{1}{T}\right]$

- Distancia entre dos frecs. sucesivas: $\Delta s = \dfrac{1}{N}$
- En términos de frecuencias "físicas": $\Delta f = \dfrac{\Delta s}{T} = \dfrac{1}{NT}$

Resolución de frecuencias de la TDF

Δf de la TDF es la inversa de la duración de la señal

Para un NT fijo, es independiente del número de muestras!

Relleno con ceros en tiempo

Extendemos $x[n],\ 0 \leq n \leq N-1$ con $M-N$ ceros:

$$x_a[n] = \begin{cases} x[n] & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{si } N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

Entonces, la TDF de $x_a[n]$ es:

$$X_a[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x_a[n] e^{-j2\pi nk/M} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/M} =$$

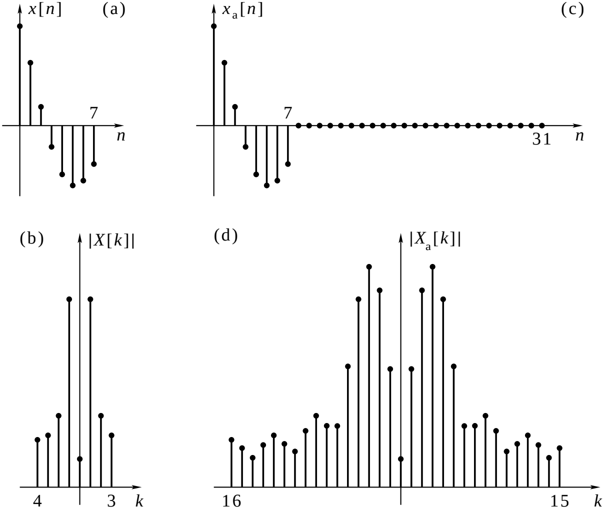
$$= X(e^{j2\pi s[k]}), \qquad \text{con} \qquad s[k] = \frac{k}{M}, \qquad 0 \leq k \leq M-1$$

Obtenemos M muestras equiespaciadas de $X(e^{j2\pi s})$

Interpolación en frecuencia

(a) y (b)
$N = 8$.

(c) y (d)
$M = 32$.



Vinculación de la convolución lineal con la circular

Dadas $x[n]$ e $y[n]$ secuencias duración finita, de largo N_1 y N_2, su convolución lineal se calcula como

$$z_l[n] = \{x * y\}[n] = \sum_{m=\text{máx}\{0,n-N_2+1\}}^{\text{mín}\{N_1-1,n\}} x[m]y[n-m],\ 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

Si rellenamos con ceros hasta $N = N_1 + N_2 - 1$ para obetener $x_a[n]$ e $y_a[n]$, la convolución lineal puede escribirse ahora como

$$z_l[n] = \sum_{m=0}^{n} x_a[m]y_a[n-m],\ 0 \leq n \leq N - 1$$

Vinculación de la convolución lineal con la circular

Como $x_a[n]$ e $y_a[n]$ tienen el mismo largo, podemos calcular también su correlación circular

$$
\begin{aligned}
z_a[n] = \{x_a \circledast y_a\}[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x_a[m] y_a[(n-m)_N] \\
&= \sum_{m=0}^{n} x_a[m] y_a[n-m] + \sum_{m=n+1}^{N-1} x_a[m] y_a[n+N-m]
\end{aligned}
$$

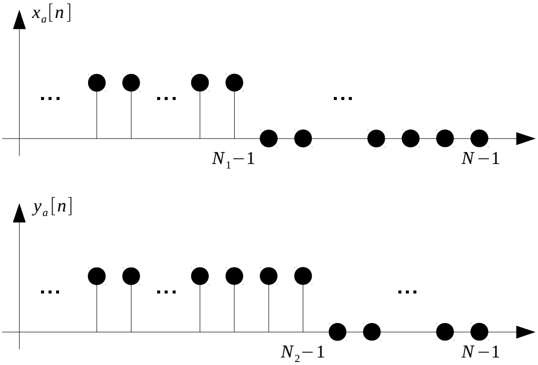
donde la última igualdad es simplemente una forma conveniente de expresar la operación "módulo N".

Vinculación de la convolución lineal con la circular

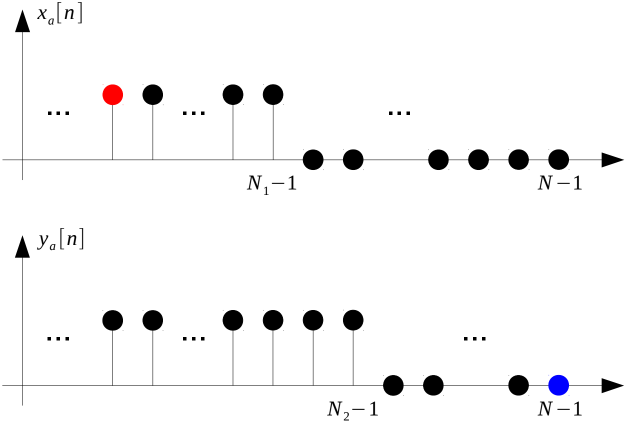
El segundo sumando de la última expresión merece un poco de atención

$$\sum_{m=n+1}^{N-1} x_a[m]y_a[n+N-m]$$

y conviene analizarlo visualmente



Vinculación de la convolución lineal con la circular

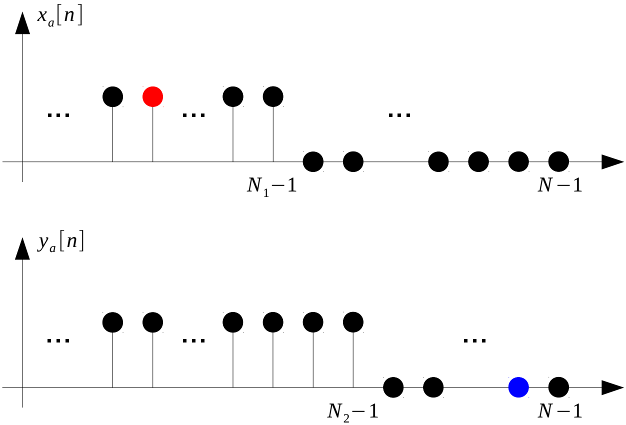


$$m = n + 1$$

$$n - m + N = N - 1$$

$$x_a[m] y_a[n + N - m] = 0$$

Vinculación de la convolución lineal con la circular

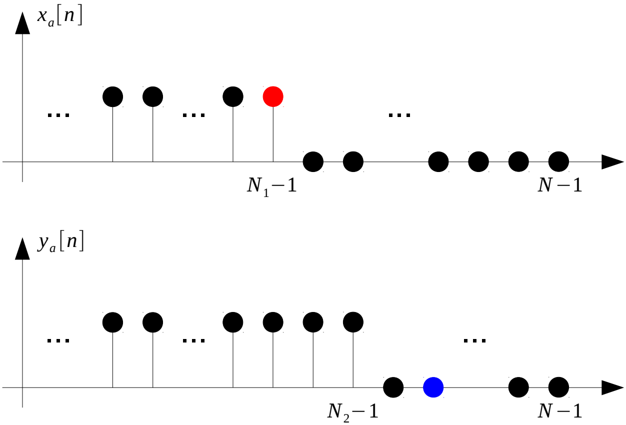


$$m = n + 2$$

$$n - m + N = N - 2$$

$$x_a[m]y_a[n + N - m] = 0$$

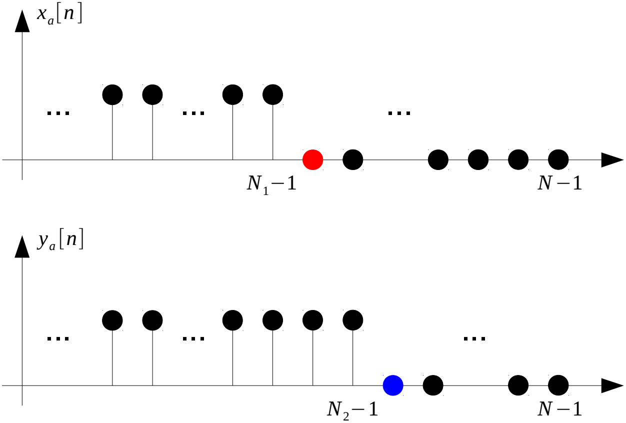
Vinculación de la convolución lineal con la circular



$$m = N_1 - 1$$
$$n - m + N = N_2 + n$$

$$x_a[m]y_a[n+N-m] = 0$$

Vinculación de la convolución lineal con la circular



$$m = N_1$$

$$n - m + N = N_2 + n - 1$$

$$x_a[m]y_a[n+N-m] = 0$$

Vinculación de la convolución lineal con la circular

En conclusión

$$\sum_{m=n+1}^{N-1} x_a[m]y_a[n+N-m] = 0$$

y por lo tanto

$$z_a[n] = \{x_a \circledast y_a\}[n] = \sum_{m=0}^{n} x_a[m]y_a[n-m]$$

Es decir

$$z_a[n] = z_l[n]$$

Vinculación de la convolución lineal con la circular

La convolución lineal de dos secuencias finitas de largo N_1 y N_2 puede calcularse como la convolución circular de las secuencias extendidas con ceros a una longitud $N = N_1 + N_2 - 1$.

Convolución circular y FFT

La cuenta de la convolución circular puede hacerse en el dominio de la frecuencia usando la TDF

$$z_a[n] = TDF^{-1} X_a[k] Y_a[k]$$

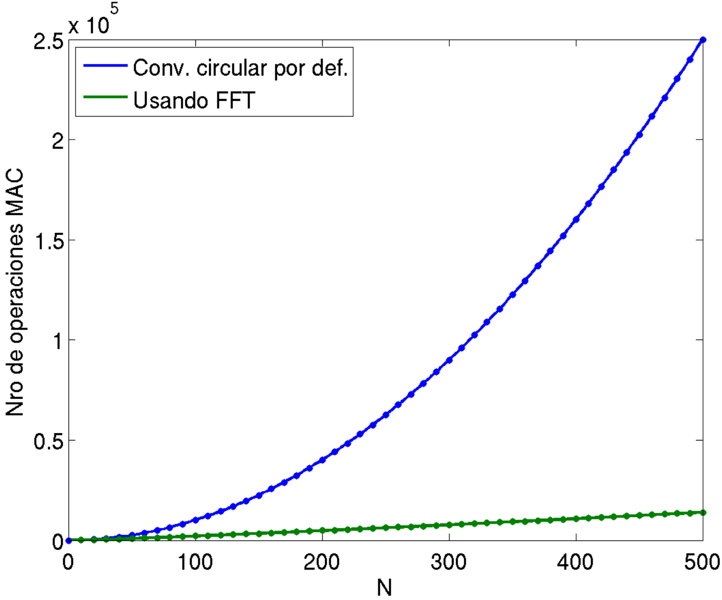
¿Qué ventajas tiene esto?
Desde un punto de vista teórico, ninguna. Pero desde un punto de vista práctico, las transformadas pueden calcularse con el algoritmo de la FFT, conduciendo a una reducción considerable del número de operaciones necesarias.

Convolución circular y FFT

Si queremos convolucionar dos secuencias de largo N, la cantidad de operaciones MAC (multiplicación y adición compleja) necesarias es aproximadamente

Calculo directo	Con FFT
N^2	$3N\log_2 N + N$

Convolución circular y FFT



Convolución circular y FFT