INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES - AÑO 2023

Práctica 4

Transformada de Fourier (TF), Sistemas Lineales y TF, Serie de Fourier (SF), Sistemas Lineales y SF

1. **TF y sus propiedades**

   a) Sea $v(t) = \bigwedge(t)$ una función par y real, y $V(f)$ su TF dada por:

   $$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, \cos(2\pi f t)\, dt$$

   I. Grafique el integrando de la ecuación anterior para $f = 0,5; 1; 3; 5$.
   II. ¿Dónde aparece reflejado el contenido frecuencial de la señal $v(t)$?
   III. ¿Qué sucede cuando $f \to \infty$?
   IV. Calcule y grafique $V(f)$. Indique en el gráfico los resultados previamente obtenidos.

   b) Dada la función $x(t) = e^{-t} \sqcap (t - 1/2)$

   I. Calcule la TF de $x(t)$.
   II. Halle la parte par e impar de $x(t)$, luego calcule sus TFs.
   III. Obtenga las transformadas del inciso anterior por propiedades y verifique que coinciden.

   c) Demuestre que si $x(t)$ es una señal real y $X(f)$ su TF, entonces $X(-f) = X^*(f)$ (simetría Hermítica). A partir de esto demuestre que $\mathrm{Re}\{X(f)\}$ es par, $\mathrm{Im}\{X(f)\}$ es impar, $|X(f)|$ es par y $\angle X(f)$ es impar (salvo número entero de ciclos, o sea $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$).

   d) Sea $x(t) = A + \cos(2\pi f_0 t)$, con A y f_0 constantes reales, y llamemos $y(t)$ a su derivada.

   I. Calcule $X(f)$ e $Y(f)$.
   II. Pruebe la propiedad de derivación en el tiempo de la TF y vea que $X(f)$ e $Y(f)$ la cumplen.
   III. ¿Que sucede con el valor medio de la señal al derivar? ¿Cómo aparece reflejado este hecho en el dominio transformado?
   IV. ¿Son $x(t)$ e $y(t)$ señales de energía o de potencia? ¿Cómo vemos esto en sus transformadas?

   e) I. Halle la TF de $x(t) = u(t)$, usando la propiedad de derivación en el tiempo. ¿Cuánto vale el valor medio de $x(t)$? ¿Cómo se ve en su transformada?
   II. ¿Cuál es la TF de $y(t) = \mathrm{sgn}(t)$?
   III. Demuestre la propiedad de integración en el tiempo recordando que $\int_{-\infty}^{t} f(\lambda) d\lambda = \{f * u\}(t)$. ¿Qué sucede si $f(t)$ tiene valor medio?

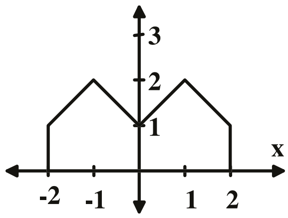
   f) Sea $x(t) = 2 \sqcap (t/4 - 1/4) - \sqcap (t - 1)$. Grafíquela. Sin calcular su TF, $X(f)$, encuentre:

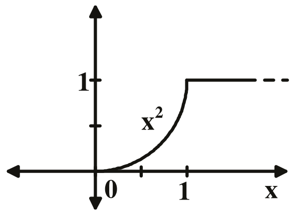
   I) $X(0)$ II) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, df$ III) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$

2. **Al derecho y al revés.**

   a) Hallar la TF y graficar esquemáticamente:

   I. $x(t) = \sqcap (t/4 - 5)$
   II. $x(t) = \sqcap (t - 1) + \bigwedge((t + 1)/2)$
   III. $x(t) = e^{-3t^2 + 2t}$
   IV. $x(t) = e^{-j\pi t}$ (señal compleja)
   V. $x(t) = 1 + \cos(\pi t)$
   VI. $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)\, \mathrm{sinc}(t)$
   VII. $x(t) = \delta(5\, t - 2)$
   VIII. $x(t) = \bigwedge(t - 2) * \sqcap (t) * \delta(3t)$
   IX. $x(t) = \mathrm{sen}(\pi t) \sqcap (t/2)$
   X. $x(t) = \cos(\pi t) \sqcap (t/2)$
   XI. $x(t) = (e^{-(t-1)}\, u(t - 1)) * \sqcap (t - 3)$
   XII. Para las señales de la figura:





b) Halle las antitransformadas de Fourier de las siguientes señales.

I. $X(f) = \sqcap(2f) + j\,f\,\sqcap(f)$

II. $X(f) = \mathrm{sinc}(2f-1)$

III. $X(f) = 2\delta(f+1) + 2\delta(f-1) + 4\delta(f)$

IV. $X(f) = \cos(8\pi f + \pi/3)$

V. $X(f) = j(\wedge(f+10) + \wedge(f-10))$

3. **Respuesta en frecuencia de un SLIT**

Consideremos un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$, cuya TF es $H(f)$. Si llamamos $x(t)$ a su entrada e $y(t)$ a su salida, sabemos que se verifica que $y(t) = \{x * h\}(t)$.

a) Operando en el dominio del tiempo, pruebe que si $x(t) = A\ e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$, con $f_0 \in \mathbb{R}$, entonces la salida es $y(t) = A\ H(f_0)\ e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ (por esto $H(f)$ es llamada la respuesta en frecuencia).

b) Halle una expresión que vincule la TF de la salida, $Y(f)$, con la TF de una entrada cualquiera, $X(f)$. Asumiendo que $X(f)$ existe, ¿qué característica del sistema es necesaria para que exista $Y(f)$?

c) Obtenga el resultado de 3*a* operando en el dominio de la frecuencia.

d) Considerando que $h(t)$ es real (como será en general para todos los sistemas que veamos), y utilizando los resultados anteriores demuestre que la salida a la entrada $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ se puede expresar como $y(t) = B\cos(2\pi f_0 t + \phi)$. ¿Cuánto valen B y ϕ?

e) Si la entrada $x(t) = 1 + 4\cos(2\pi t) + 8\ \mathrm{sen}(3\pi t - \pi/2)$ produce la salida $y(t) = 2 - 2\ \mathrm{sen}(2\pi t)$, ¿Qué valores de $H(f)$ es posible determinar? ¿Cuánto valen?

f) Explique por qué no se puede caracterizar al sistema con un par entrada-salida como el anterior y sí cuando la entrada es un impulso o un escalón.

g) Suponga que la ecuación diferencial que describe al SLIT es $y'(t) + 3\ y(t) = x(t)$. Halle $H(f)$ aplicando TF directamente a la ecuación. Halle $h(t)$ antitransformando. Obtenga la salida del sistema cuando la entrada es:

I. $x(t) = \cos(2\pi t)$

II. $x(t) = \cos(3\pi t) + \mathrm{sen}(5\pi t)$

III. $x(t) = e^{-2t}u(t)$

IV. $x(t) = e^{-3t}u(t)$

V. $x(t) = \sqcap(t)$

VI. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k)$

4. **TF de señales periódicas y SF**

Sea $p(t)$ una señal periódica de período T y $q(t) = p(t)\sqcap\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, arbitrario. Es decir, $q(t)$ es igual a $p(t)$ en un período y cero en los restantes valores de t. La señal $p(t)$ puede escribirse como $p(t) = \{q * p_T\}(t)$, donde $p_T(t) = \frac{1}{T} ш\left(\frac{t}{T}\right)$.

a) Utilizando este hecho escriba cómo resultaría la TF de $p(t)$, $P(f)$, en términos de la TF de $q(t)$, $Q(f)$.

b) Exprese los coeficientes de la SF de $p(t)$, $c[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$), en función de $Q(f)$.

c) En base a los dos incisos anteriores, exprese la TF de $p(t)$, $P(f)$, en términos de los coeficientes de su SF, $c[n]$.

d) Sea $r(t) = p(t - t_1)$, con $t_1 \in \mathbb{R}$. ¿Cómo resultan los coeficientes de la SF de $r(t)$ en términos de los $c[n]$? ¿Qué sucede en el caso $t_1 = T/2$?

e) Calcule la potencia de $p(t)$ en función de los $c[n]$. ¿Cuál es el valor medio de $p(t)$?

f) Obtener la SF para las siguientes señales. Graficar los $c[n]$ en módulo y fase. Hallar su potencia.

I. $p(t) = e^{-j10\pi t}$

II. $p(t) = \cos(\pi t + \pi/4)$

III. $q(t) = \sqcap(t/4)$ y $T = 8$

IV. $q(t) = \sqcap(t/4 - 1)$ y $T = 8$

V. $q(t) = \sqcap(t/4)$ y $T = 12$

VI. $q(t) = \wedge(t/4)$ y $T = 8$

g) Halle la TF de las señales del inciso anterior.

5. **Señales periódicas a través de sistemas**

a) Demuestre que si a la entrada de un SLIT se aplica una señal periódica $x(t)$, la señal de salida, $y(t)$, resulta también periódica. ¿Cómo resulta la SF de $y(t)$ en términos de la SF de $x(t)$? **Ayuda:** En el ejercicio 3 analizamos cómo resulta la salida de un SLIT con respuesta en frecuencia $H(f)$ cuando a su entrada se aplica la señal $x(t) = A\ e^{j(2\pi f_0 t+\theta)}$, con $f_0 \in \mathbb{R}$.

b) Considere el sistema SLIT con respuesta impulsional $h(t)$, al que se aplican las señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ donde:

$h(t) = \sqcap\ (5/2(t - 1/5))$

$x_1(t) = \cos(2\pi t) + \cos(5\pi t)$

$x_2(t) = \{q * p_T\}$ con $q(t) = \sqcap\left(\frac{5t}{2}\right)$ y $T = 4/5$

I. Halle el período fundamental de la señal $x_1(t)$ (puede serle de utilidad revisar lo hecho en la Práctica 1). Calcule su SF, su TF y grafique esta última ¿dónde aparece reflejado el período fundamental?

II. Halle la SF de la señal de salida del sistema cuando a su entrada se aplica la señal $x_1(t)$. Halle la TF y grafíquela. ¿Cuál es el período fundamental de esta señal?

III. Halle la SF y la TF de $x_2(t)$.

IV. Halle la SF de la señal de salida del sistema cuando a su entrada se aplica la señal $x_2(t)$. Trate de explicar el resultado pensando qué ocurre en el dominio del tiempo.

c) La señal $x(t) = \cos(2\pi t)$ se aplica al sistema descripto por $y(t) = \cos(\pi t)x(t)$. Halle las SF de las señales de entrada y de salida. Compare este resultado con lo que esperaría en caso de que el sistema fuese SLIT.

d) La señal $x(t) = \cos(2\pi t)$ se aplica al sistema descripto por $y(t) = (x(t))^2$. Halle las SF de las señales de entrada y de salida. Compare este resultado con lo que esperaría en caso de que el sistema fuese SLIT.

Cuidado: Estos dos últimos incisos son sólo ejemplos de lo que sucedería al aplicar señales periódicas a sistemas que no son SLIT. A partir de estos ejemplos no es posible generalizar sobre el comportamiento de sistemas que no son SLIT.

6. **TF y SF con MATLAB**

a) Calcule en forma analítica y grafique en MATLAB la TF de la señal $x(t) = \wedge(t/2)$.

b) La integral que define la TF puede calcularse numéricamente, para cada valor de frecuencia, utilizando la suma de Riemman. Para subintervalos de longitud ΔT se tiene:

$$X(f) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta T \wedge (n\Delta T/2) e^{-j2\pi f n\Delta T}$$

En una implementación numérica, la sumatoria no puede realizarse de $-\infty$ a ∞, sino de un determinado valor N_1 a N_2:

$$X(f) \approx \sum_{n=-N_1}^{N_2} \Delta T \wedge (n\Delta T/2) e^{-j2\pi f n \Delta T}$$

Cuando la función a integrar es de soporte finito, como es el caso del triángulo, eligiendo adecuadamente los valores de N_1 y N_2 esta aproximación es similar a la anterior. Para funciones de soporte infinito habrá una aproximación adicional debido a la elección de estos valores.

Calcule la TF de la señal $x(t)$ utilizando esta aproximación, para lo cual deberá ejecutar las sentencias siguientes, previa implementación de la función `tri` en un archivo `*.m`:

```
dt =.2; t = [-2:dt:2]; x = tri(t/2);
df = 0.125; f = -2:df:2; X=zeros(size(f));
for k=1:length(f)
    X(k) = sum(dt*x.*exp(-1i*2*pi*f(k)*t));
end
```

Compare con la TF analítica graficando módulo y fase. Repita para diferentes valores de dt, como por ejemplo 0.4, 0.5, 0.02, etc. ¿Qué sucede al tomar $dt = 0{,}5$?. Puede modificar también el paso de evaluación de frecuencia, df.

c) Con un enfoque similar puede obtenerse una aproximación de los coeficientes de la SF de una señal periódica de período T:

$$c_k \approx \frac{\Delta T}{T} \sum_{n=-T/2\Delta T}^{T/2\Delta T} x(n\Delta T) e^{-j2\pi k n \Delta T / T}$$

Calcule y grafique los coeficientes de la SF (truncada) de la señal periódica (*iii*) del ejercicio 4f, para lo cual deberá ejecular las sentencias siguientes, previa definición de la función `caj` en un archivo `*.m`:

```
T = 8; dt = T/1000; t = -.5*T:dt:.5*T;
K = 19; ks = [-K:K];
q = caj(t/4); c = zeros(1,2*K+1);
for k = ks
    c(K+1+k) = dt/T*sum(q.*exp(-1i*2*pi*k*t/T));
end
```

Compare con la SF analítica graficando módulo y fase.

d) A partir de los coeficientes de la SF truncada, reconstruya la señal utilizando las sentencias siguientes:

```
y = zeros(size(t));
for k = ks
     y = y+exp(1i*2*pi*k*t/T)*c(K+1+k);
end
```

Compare este resultado con la señal original $q(t)$. Analice qué sucede para diferentes valores de `K`.

e) Suponga que esta señal periódica es aplicada a la entrada de un SLIT con respuesta en frecuencia:

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f)^2 + 2\ j2\pi f + 1}$$

Obtenga la SF de la señal de salida utilizando la SF (truncada) de la señal de entrada, previamente calculada. A partir de ella, reconstruya la señal de salida. Analice qué sucede para diferentes valores de `K`.

Algunos resultados

2. *a*)
   I. $4\ \mathrm{sinc}(4f)\ e^{-j40\pi f}$
   II. $\mathrm{sinc}(f)\ e^{-j2\pi f} + 2\ \mathrm{sinc}^2(2f)\ e^{j2\pi f}$
   III. $e^{1/3}\sqrt{\pi/3}\ e^{-j2\pi f/3}\ e^{-\pi^2 f^2/3}$
   IV. $\delta(f+0{,}5)$
   V. $\delta(f) + \frac{1}{2}\{\delta(f+0{,}5) + \delta(f-0{,}5)\}$
   VI. $\sqcap(f)(\frac{3}{4} - f^2) + \sqcap(|f|-1)(\frac{f^2}{2} - \frac{3|f|}{2} + \frac{9}{8})$
   VII. $e^{-j4\pi f/5}/5$
   VIII. $\mathrm{sinc}^3(f)\ e^{-j4\pi f}/3$
   IX. $j\{\mathrm{sinc}(2f+1) - \mathrm{sinc}(2f-1)\}$
   X. $\mathrm{sinc}(2f+1) + \mathrm{sinc}(2f-1)$
   XI. $\mathrm{sinc}(f)e^{-j8\pi f}/(1+j2\pi f)$
   XII. i)$2\ \mathrm{sinc}^2(f)\cos(2\pi f) + 4\ \mathrm{sinc}(4f)$
   XII. ii)$(\delta(f) - \mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f}/(\pi f)^2 + e^{-j2\pi f}/(\pi f)^2)/2$

   b)
   I. $\mathrm{sinc}(t/2)/2 + \mathrm{sinc}'(t)/2\pi$
   II. $\sqcap(t/2)\ e^{j\pi t}/2$
   III. $4(1+\cos(2\pi t))$
   IV. $0{,}5 * (\delta(t+4)\ e^{j\pi/3} + \delta(t-4)\ e^{-j\pi/3})$
   V. $2j\ \mathrm{sinc}^2(t)\cos(20\pi t)$

3. *e*) $H(0) = 2$, $H(1) = H(-1)^* = 0{,}5j$ y $H(1{,}5) = H(-1{,}5) = 0$

   g)
   I. $\dfrac{\cos(2\pi t - \mathrm{tg}^{-1}(2\pi/3))}{\sqrt{9+4\pi^2}}$
   II. $\dfrac{\cos(3\pi t - \mathrm{tg}^{-1}(\pi))}{3\sqrt{1+\pi^2}} + \dfrac{\mathrm{sen}(5\pi t - \mathrm{tg}^{-1}(5\pi/3))}{\sqrt{9+25\pi^2}}$
   III. $(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$
   IV. $te^{-3t}u(t)$
   V. $\dfrac{(1-e^{-3(t+0{,}5)})\sqcap(t)}{3} + \dfrac{(1-e^{-3})e^{-3(t-0{,}5)}u(t-0{,}5)}{3}$
   VI. $\dfrac{1}{9} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2\pi kt/3 - \mathrm{tg}^{-1}(2\pi k/9))}{\sqrt{81+4\pi^2k^2}}$

4. *f*)
   I. $c[n] = \delta[n+1]$ $(P = 1$ y $T = \frac{1}{5})$
   II. $c[n] = e^{j\pi n/4}(\delta[n+1] + \delta[n-1])/2$ $(P = \frac{1}{2}$ y $T = 2)$
   III. $c[n] = \frac{1}{2}\ \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})\ (P = \frac{1}{2})$
   IV. $c[n] = \frac{1}{2}\ \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})(-1)^n\ (P = \frac{1}{2})$
   V. $c[n] = \frac{1}{3}\ \mathrm{sinc}(\frac{n}{3})\ (P = \frac{1}{3})$
   VI. $c[n] = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\frac{n}{2})\ (P = \frac{1}{3})$