Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2022

Tema 8 - Transformadas de Laplace y Z

Santiago Rodríguez

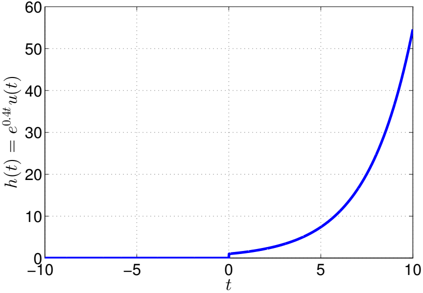
Transformada de Laplace - Contenido

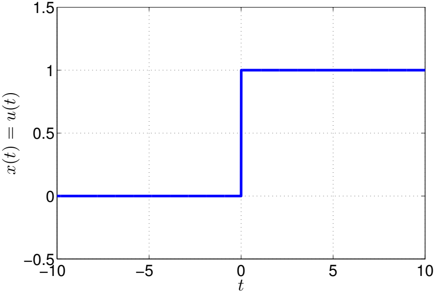
1. Introducción
2. Transformada de Laplace
3. Pares Transformados
4. Transformada Inversa
5. Propiedades
6. Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo
7. Ecuaciones Diferenciales (SLIT)
8. Transformadas unilaterales, TVI y TVF

Señales y Transformadas

Señales y Sistemas de Variable independiente continua.

- Señales de energía finita $\rightarrow$ Transformada de Fourier.
- Señales de potencia finita $\rightarrow$ TF + Deltas de Dirac
- Sistemas estables $\rightarrow$ $H(f) = \mathrm{TF}\{h(t)\}$
  Ejemplo:





- Respuesta de sistemas inestables (o a señales que no tienen TF).
  $\rightarrow$ Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

Señales (V.I. $\in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ Funciones de variable compleja

Utilidad:

- Análisis de señales y sistemas que no tienen TF.
- Determinación de estabilidad de sistemas.
- Descomposición de sistemas en bloques simples.
- Manipulación de diagramas en bloques.
- Diseño de sistemas lineales.

Definición

Transformada de Laplace (señales continuas)

$$X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s \in RDC \subset \mathbb{C}$$

- *RDC* es la región de convergencia de la transformada en el plano complejo.
- $X(s)$ es una función de variable compleja analítica en su región de convergencia.

Relación con Transformadas de Fourier

Escribiendo $s = \alpha + j2\pi f$ vemos que

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\alpha t}e^{-j2\pi ft}dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\alpha t}\}(f)$$

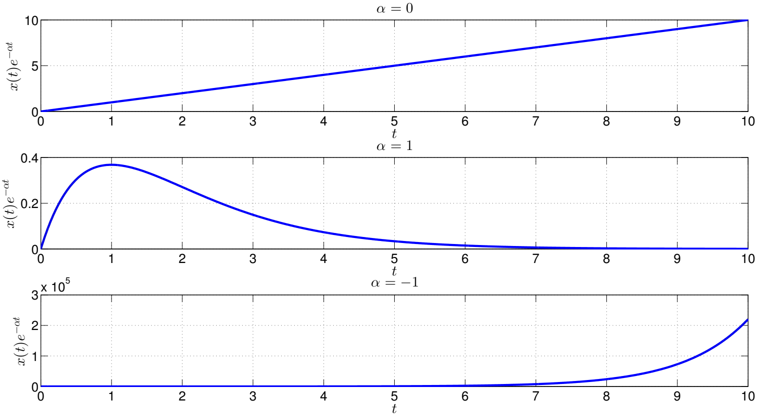
Si $\{\alpha = 0\} \in RDC$

$$\boxed{X^L(j2\pi f) = X^F(f)}$$

Coincide con la TF

Región de Convergencia (TL)

$$x(t) = tu(t)$$



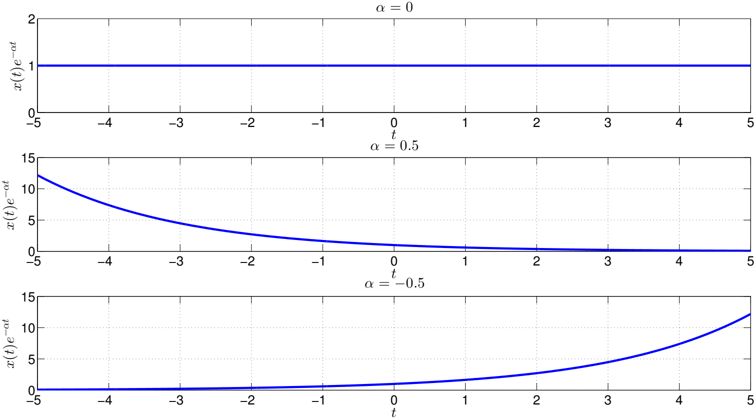
Según el valor de α la transformada converge o no.

La región de convergencia es siempre del tipo $\{\, a < \mathcal{R}\{s\} < b\}$.

Señales sin Transformada de Laplace

¡No todas las señales tienen Transformada de Laplace!

$$x(t) = 1$$



Algunos pares transformados

Transformada de Laplace:

$x(t)$	$X(s)$	RDC
$\delta(t)$	1	$\mathbb{C}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}\{s\} > 0$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathcal{R}\{s\} > a$
$-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathcal{R}\{s\} < a$
$te^{at}u(t)$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\mathcal{R}\{s\} > a$
$e^{at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}\{s\} > a$

Transformada Inversa

Puede deducirse a partir de la antitransformada de Fourier

Antitransformada de Laplace (señales continuas)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X\}(t) \triangleq \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(s)e^{st}ds, \quad \alpha \in \mathcal{R}\{RDC\}$$

Alternativas:

- Descomposición en fracciones parciales para transformadas racionales ($H(s) = \sum_k r_k/(s - p_k)$).
- Comparación con pares transformados conocidos.
- Integración en el plano complejo (Residuos).

Principales propiedades

Linealidad

$$w(t) = ax(t) + by(t) \Leftrightarrow W(s) = aX(s) + bY(s)$$

Diferenciación

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(s) = sX(s)$$

Convolución

$$w(t) = \{x * y\}(t) \Leftrightarrow W(s) = X(s)Y(s)$$

Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT)

Para SLIT:

$$y(t) = \{h * x\}(t)$$

Si aplicamos transformada de Laplace:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Transferencia

Definimos la transferencia de un sistema SLIT como $H(s) \triangleq \mathcal{L}\{h(t)\}$, la transformada de Laplace de la respuesta impulsional.

Propiedades y región de convergencia

- $h(t)$ es absolutamente integrable $\Leftrightarrow \{\mathcal{R}\{s\} = 0\} \subset RDC$
  (Sistemas estables)
- $h(t)$ es unilateral derecha $\Leftrightarrow \{\mathcal{R}\{s\} = \infty\} \subset RDC$
  (Sistemas causales)
- $h(t)$ es unilateral izquierda $\Leftrightarrow \{\mathcal{R}\{s\} = -\infty\} \subset RDC$
  (Sistemas anticausales)
- $h(t)$ es bilateral $\Leftrightarrow \{\mathcal{R}\{s\} = \pm\infty\} \notin RDC$
  (Sistemas no-causales)

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales lineales

$$y(t) = -a_1\dot{y}(t) - a_2\ddot{y}(t) + b_0x(t) + b_1\dot{x}(t) + b_2\ddot{x}(t)$$

- Pueden resolverse con la transformada de Laplace

$$Y(s) = -a_1sY(s) - a_2s^2Y(s) + b_0X(s) + b_1sX(s) + b_2s^2X^L(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{1 + a_1s + a_2s^2}X(s) = \frac{b(s)}{a(s)}X(s)$$

- La transferencia del sistema $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ es racional (cociente de polinomios)

Polos y Ceros

En una función de transferencia racional H:

- Raíces del numerador: Ceros ($H(c_k) = 0$)
- Raíces del denominador: Polos ($H(p_k) \to \infty$)
- Ejemplo:
  $H(s) = \dfrac{3s + 5}{s^2 + 2s - 3}$, ¿polos? ¿ceros?
  Factorzando num y den: $H(s) = \dfrac{3(s + 5/3)}{(s - 1)(s + 3)}$,
  polos: $\{-3, 1\}$, ceros: $\{-5/3, \infty\}$
  Desc. en frac. parciales: $H(s) = \dfrac{1}{(s - 1)} + \dfrac{2}{(s + 3)}$

Imprtante

Un sistema **causal estable** tiene los polos de su **Función de Transferencia** en el semiplano izquierdo.

Transformadas unilaterales

Permiten considerar condiciones iniciales

Transformada de Laplace unilateral

$$X^{+}(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad \mathcal{R}\{s\} > a$$

Diferenciación

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y^{+}(s) = sX^{+}(s) - x(0)$$

Teoremas del valor inicial y final

Teorema del valor inicial

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Y si $sX(s)$ tiene todos sus polos en el semiplano izq.

Teorema del valor final

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Resumen

Transformada de Laplace

- Definición, propiedades y ejemplos
- Señales de potencia infinita y Sistemas inestables
- Regiones de convergencia
- Transformada inversa
- Ecs. Diferenciales
- Polos y Ceros
- Transformada Unilateral (cond. inciales)

Transformada Z - Contenido

9. Transformada Z
   - Definición y Propiedades

10. Sistemas Lineales Invariantes al Desplazamiento

11. TVI, TVF y otras propiedades

Señales y Transformadas

Señales y Sistemas de Variable independiente discreta.

- Señales de energía finita $\rightarrow$ Transformada de Fourier de Tiempo Discreto.
- Señales de potencia finita $\rightarrow$ TFTD + Deltas de Dirac
- Sistemas estables $\rightarrow H(e^{j2\pi s}) = \text{TFTD}\{h[n]\}$
- Respuesta de sistemas inestables (o a señales que no tienen TFTD) $\rightarrow$ Transformada Z

Transformada Z

Señales (V.I. $\in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ Funciones de variable compleja

Utilidad:

- Análisis de señales y sistemas que no tienen TFTD
- Determinación de estabilidad de sistemas
- Descomposición de sistemas en bloques simples
- Manipulación de diagramas en bloques
- Diseño de sistemas lineales

Filtrado!

Definición

Transformada Z (señales discretas)

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in RDC \subset \mathbb{C}$$

- *RDC* del plano complejo es la región de convergencia de la transformada.
- $X(z)$ es una función de variable compleja analítica en su región de convergencia.

Relación con la TFTD

Escribiendo $z = re^{j2\pi s}$ vemos que

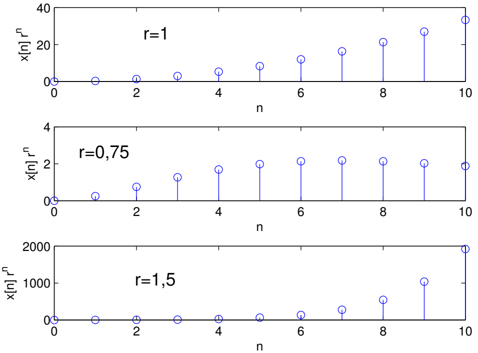
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j2\pi sn} = TFTD\{x[n]r^{-n}\}(e^{j2\pi s})$$

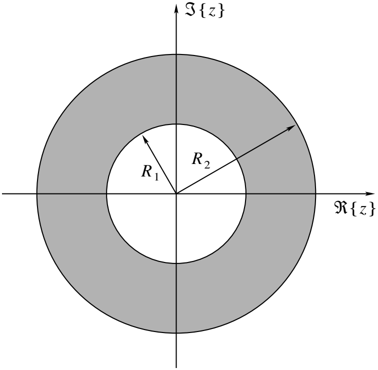
Si $\{r = 1\} \in RDC$:

$$\boxed{X^z(e^{j2\pi s}) = X^f(e^{j2\pi s})}$$

Coincide con la TFTD.

Región de Convergencia (TZ)





Según el valor de r la transformada converge o no.

La región de convergencia es siempre del tipo $\{R_1 < |z| < R_2\}$

Señales sin Transformada Z

Hay señales sin transformada Z.
Ejemplos ??

Pares transformados

Transformada Z:

$x[n]$	$X(z)$	RDC
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-(n+1)]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az-1}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n \cos(\theta_0 n) u[n]$	$\frac{1-a\cos\theta_0 z^{-1}}{1-2a\cos\theta_0 z^{-1}+a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Transformadas Inversas

Antitransformada Z (señales discretas)

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X\}(z) \triangleq \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz, \quad \bigcirc \subset RDC$$

Es una integral sobre una cruva cerrada en el plano complejo (puede resolverse usando el teorema de Cauchy).
Alternativas:

- Descomposición en fracciones parciales para transformadas racionales ($H(z) = \sum_k r_k / (1 - p_k z^{-1})$)
- Comparación con pares transformados conocidos
- Expansión en serie

Principales propiedades

Linealidad

$$w[n] = ax[n] + by[n] \Leftrightarrow W(z) = aX(z) + bY(z)$$

Retardo

$$y[n] = x[n-m] \Leftrightarrow Y(z) = z^{-m}X(z)$$

Convolución

$$w[n] = \{x * y\}[n] \Leftrightarrow W(z) = X(z)Y(z)$$

Sistemas Lineales Invariantes al Desplazamiento (SLID)

Para SLID:

$$y[n] = \{h * x\}[n]$$

Si aplicamos transformada Z:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Transferencia

Definimos la transferencia de un sistema SLID como $H(z) \triangleq \mathcal{Z}\{h[n]\}$, la transformada Z de la respuesta impulsional.

Propiedades y región de convergencia

- $h[n]$ es absolutamente sumable $\Leftrightarrow \{|z| = 1\} \subset RDC$
  (Sistemas estables)
- $h[n]$ es unilateral derecha $\Leftrightarrow \{|z| = \infty\} \subset RDC$
  (Sistemas causales)
- $h[n]$ es unilateral izquierda $\Leftrightarrow \{|z| = 0\} \subset RDC$
  (Sistemas anticausales)
- $h[n]$ es bilateral $\Leftrightarrow \{|z| = 0, |z| = \infty\} \not\subset RDC$
  (Sistemas no causales)

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Pueden resolverse con la transformada Z

$$Y(z) = (-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) Y(z) + (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) X(z)$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) = \frac{b(z)}{a(z)} X(z)$$

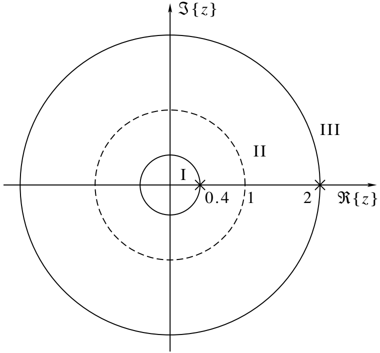
La transferencia del sistema $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ es racional.

Polos y Ceros

En una función de transferencia racional H:

- Raíces del numerador: Ceros ($H(c_k) = 0$)
- Raíces del denominador: Polos ($H(p_k) \to \infty$)
- Ejemplo:

$$H(z) = \frac{z(z+1.2)}{(z-0.4)(z-2)}$$



- Un sistema discreto causal y estable tiene sus polos dentro del círculo unidad

Transformadas unilaterales

Permiten considerar condiciones iniciales

Transformada Z unilateral

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad |z| > R_1$$

Retardo

$$y[n] = x[n-1] \Leftrightarrow Y(z) = z^{-1}X^{+}(z) + x[-1]$$

Teoremas del valor inicial y final

$$\text{Si } x[n] = 0 \;\forall n < 0$$

Teorema del valor inicial

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Y si además, $(z-1)X(z)$ existe sobre todo el círculo unidad

Teorema del valor final

$$\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$$

Otras propiedades

Escalamiento en z

$$z_0^n x[n] \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Reflexión

$$x[-n] \Leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Conjugación

$$x^*[n] \Leftrightarrow X^*(z^*)$$

Diferenciación en z

$$nx[n] \Leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$