Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2023

Tema 1 - Señales

Santiago Rodríguez

¡¡ BIENVENIDOS !!

Presentación de la Cátedra

Integrantes

Profesor Adjunto: Ing. Santiago Rodríguez

Jefe de Trabajos Prácticos: Ing. Germán Scillone

Ayudante Diplomado: Ing. Elián Hanisch

Ayudante Diplomado: Ing. Simón Lombardozzo

Organización

- Contenido
    - Clases teórico-prácticas
    - Ejercitación práctica y consulta
    - Práctica con utilitarios
    - Experiencias y demostraciones de laboratorio

Organización

- Contenido
  - Clases teórico-prácticas
  - Ejercitación práctica y consulta
  - Práctica con utilitarios
  - Experiencias y demostraciones de laboratorio
- Moodle `https://asignaturas.linti.unlp.edu.ar`

Reglamento

Pronto estará disponible en el Moodle de la cursada.

- Bibliografía
- Inscripción:
  - Siu-Guaraní
- Cursada
- Aprobación

Contexto de IPS

Contenido de la materia

Señales: 1D-MD. VIC y VID. Energía. Potencia. Periodicidad.

Sistemas: Sistemas en general (SVIC-SVID). Linealidad. Memoria. Causalidad. Estabilidad. Invarianza.

Sistemas Lineales: Respuesta impulsional. Convolución. Superposición.

Análisis en frecuencia: TF y Serie de Fourier de SVIC. TFTD y Serie de Fourier de SVID. Respuesta en frecuencia. FFT.

Muestreo y reconstrucción: Teorema del muestreo. Reconstrucción. Diezmado e interpolación.

Transformadas operacionales: transformada de Laplace (SVIC) y transformada $\mathcal{Z}$ (SVID).

Aplicaciones: SLIT y SLID. Causalidad. Región de convergencia. Estabilidad. Filtros digitales.

Plan para hoy

- Presentación de la materia.
- Contexto de IPS: mundo físico - transductor / sensor - conversión A/D (discretización en VI y amplitud) - computadora / procesamiento - conversión D/A - transductor / accionamiento - mundo físico.
- Explicación general determinístico vs aleatorio. Ejemplos.
- Señales 1D, 2D. Determinísticas, aleatorias. Ejemplos.

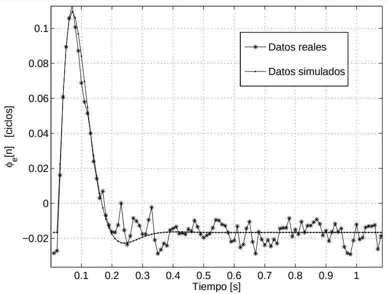
Señal

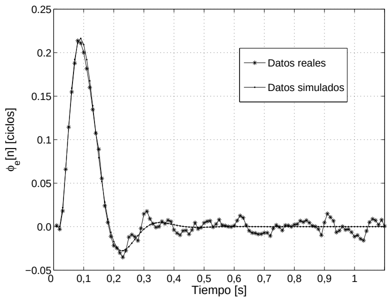
Definición: Funciones de una o más *variables independientes* que llevan información o que representan a una magnitud física.

Señal

Definición: Funciones de una o más *variables independientes* que llevan información o que representan a una magnitud física.

Ejemplo: error de un lazo de enganche de fase en un receptor de GPS





¿Cómo comparamos estas señales? ¿Qué podemos decir?

Sistema

Definición: Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

Sistema

Definición: Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

Ejemplo 1: Circuito LC simple

Sistema

Definición: Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

Ejemplo 1: Circuito LC simple

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/sC}{sL + (1/sC)} = \frac{1/LC}{s^2 + (1/LC)}$$

Ejemplo 2: Rueda de un auto, sin amortiguador

Sistema

Definición: Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

Ejemplo 1: Circuito LC simple

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/sC}{sL + (1/sC)} = \frac{1/LC}{s^2 + (1/LC)}$$

Ejemplo 2: Rueda de un auto, sin amortiguador

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f(t) - ky \qquad \Rightarrow_{Laplace} \qquad \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + (k/m)}$$

Sistema

Definición: Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

Ejemplo 1: Circuito LC simple

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/sC}{sL + (1/sC)} = \frac{1/LC}{s^2 + (1/LC)}$$

Ejemplo 2: Rueda de un auto, sin amortiguador

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f(t) - ky \qquad \Rightarrow_{Laplace} \qquad \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + (k/m)}$$

Dos sistemas bien *distintos*, pero con comportamiento *similar*: básicamente las mismas ecuaciones diferenciales.

Modelización

- Descripción

Modelización

- Descripción
- Señal

Modelización

- Descripción
- Señal
- Sistema

Modelización

- Descripción
- Señal
- Sistema
- Finalidad

Para qué?

Para qué?

1. Analizar y comprender el comportamiento.

Para qué?

1. Analizar y comprender el comportamiento.
2. Extraer información o PROCESAMIENTO.

Para qué?

1. Analizar y comprender el comportamiento.
2. Extraer información o PROCESAMIENTO.
3. Interactuar y sintetizar.

Para qué?

1. Analizar y comprender el comportamiento.
2. Extraer información o PROCESAMIENTO.
3. Interactuar y sintetizar.

¿Sirve? ¿Dónde? Control automático; Comunicaciones; Electrónica de potencia; Bioingeniería; Geofísica; Sensado remoto; Radar; etc.

Para qué?

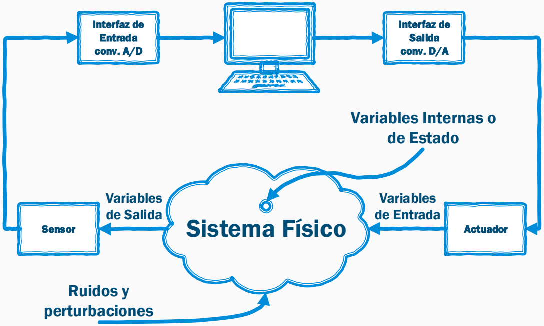
1. Analizar y comprender el comportamiento.
2. Extraer información o PROCESAMIENTO.
3. Interactuar y sintetizar.

¿Sirve? ¿Dónde? Control automático; Comunicaciones; Electrónica de potencia; Bioingeniería; Geofísica; Sensado remoto; Radar; etc.

IPS: 1) y 2). Un poco de 3).
¿Cómo? análisis temporal, análisis frecuencial, diseño de sistemas básicos de procesamiento.

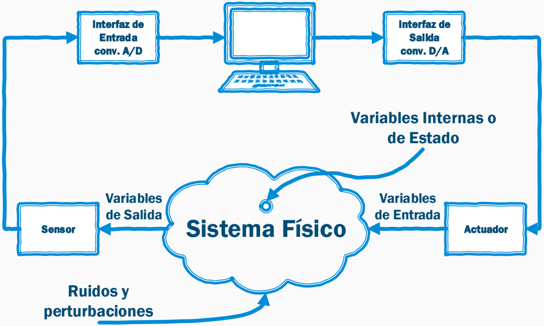
Contexto moderno

Esquema básico: Análisis, extracción y uso de la información



Contexto moderno

Esquema básico: Análisis, extracción y uso de la información



Los sistemas digitales de cómputo (computadoras) manejan señales

- en instantes discretos (*muestreo* y *reconstrucción*) y
- con amplitudes discretas (*cuantización*)

Muestreo - cuantización

Idea: Transformar una señal del ”mundo analógico” al ”dominio digital”

Idea: Transformar una señal del "mundo analógico" al "dominio digital"

SVIC $\rightarrow$ SVID,
T : intervalo de muestreo

Muestreo - cuantización

Idea: Transformar una señal del ”mundo analógico” al ”dominio digital”

SVIC $\rightarrow$ SVID,
T : intervalo de muestreo

$$x(nT) = x[n]$$

Muestreo - cuantización

Idea: Transformar una señal del ”mundo analógico” al ”dominio digital”

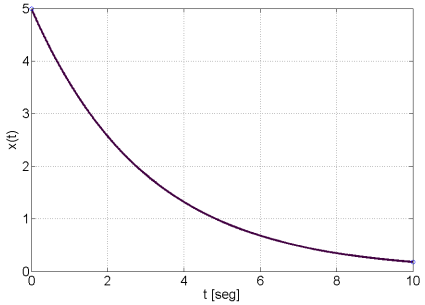
SVIC $\rightarrow$ SVID,
T : intervalo de muestreo

$$x(nT) = x[n]$$

$\boxed{\text{señal analógica } x(t) \rightarrow \text{señal muestreada } x[n]} \rightarrow$
$\boxed{\text{señal cuantizada } x_Q(t) \rightarrow \text{señal digital } x_Q[n]}$.

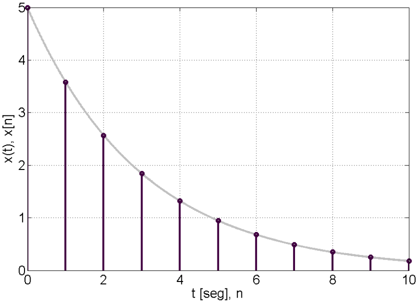
Señales Analógicas y Digitales

- Variables independientes (tiempo):
  - Señales de tiempo continuo, $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
  - Señales de tiempo discreto, $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Variable dependiente (valores):
  - Señales de valores continuos.
  - Señales de valores discretos.



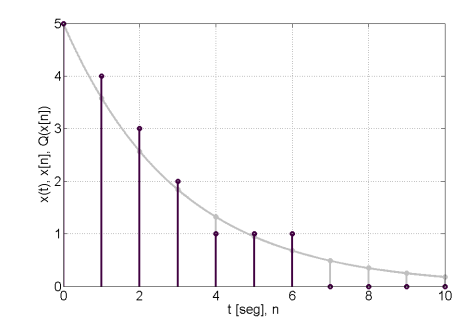
Señales Analógicas y Digitales

- Variables independientes (tiempo):
  - Señales de tiempo continuo, $x(t),\ t \in \mathbb{R}$.
  - Señales de tiempo discreto, $x[n],\ n \in \mathbb{Z}$.
- Variable dependiente (valores):
  - Señales de valores continuos.
  - Señales de valores discretos.



Señales Analógicas y Digitales

- Variables independientes (tiempo):
  - Señales de tiempo continuo, $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
  - Señales de tiempo discreto, $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Variable dependiente (valores):
  - Señales de valores continuos.
  - Señales de valores discretos.

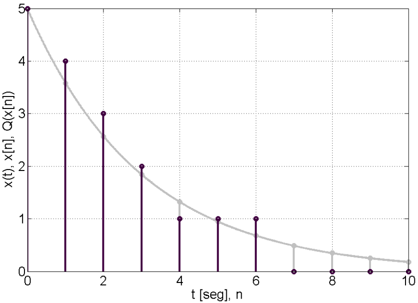


Señales Analógicas y Digitales

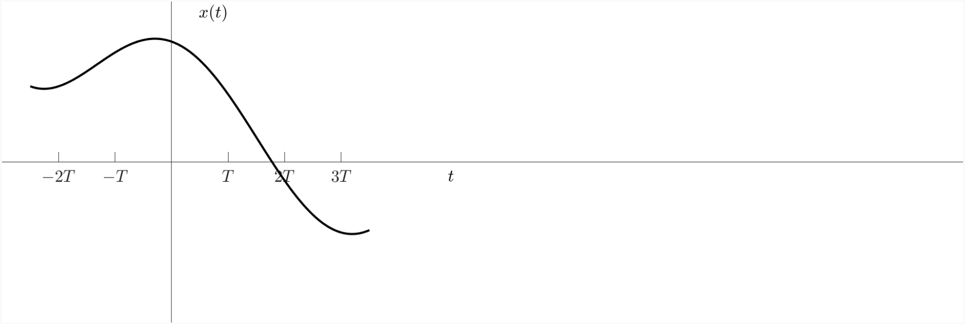
- Variables independientes (tiempo):
  - Señales de tiempo continuo, $x(t),\ t \in \mathbb{R}$.
  - Señales de tiempo discreto, $x[n],\ n \in \mathbb{Z}$.
- Variable dependiente (valores):
  - Señales de valores continuos.
  - Señales de valores discretos.

Señales analógicas
Tiempo y valores continuos

Señales digitales
Tiempo y valores discretos



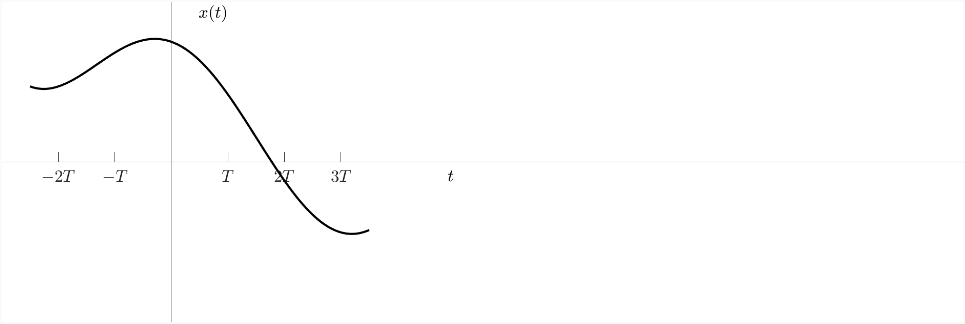
Introducción



SVIC

señal
analógica
$x(t)$

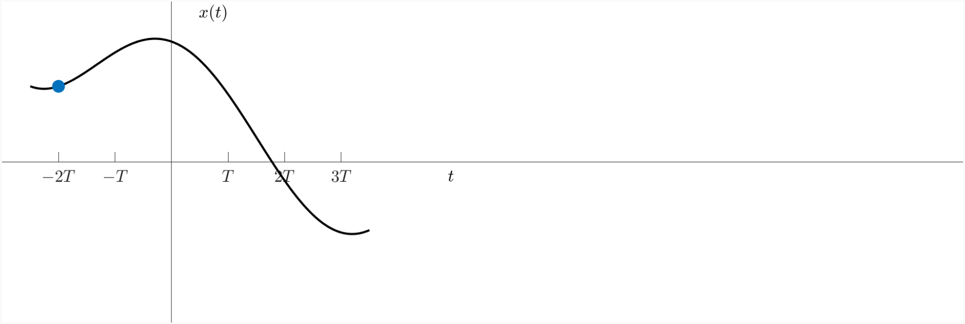
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$

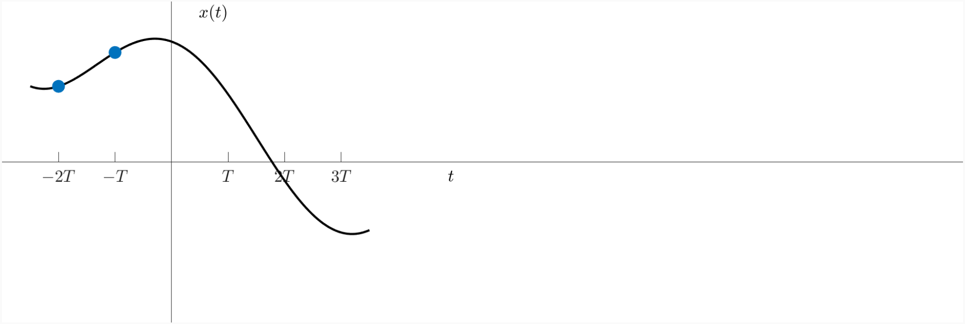
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$

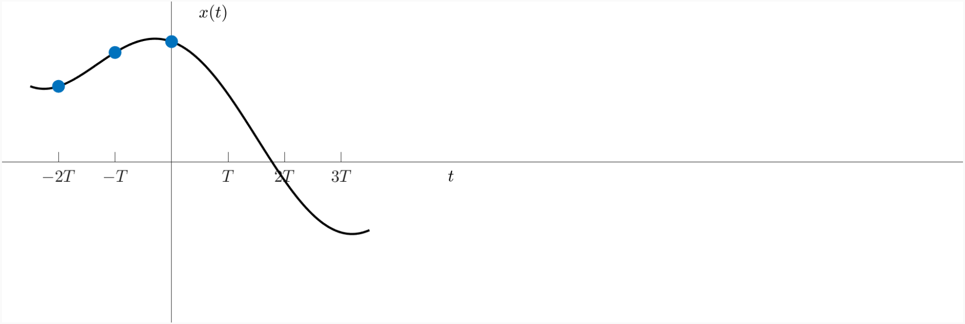
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$

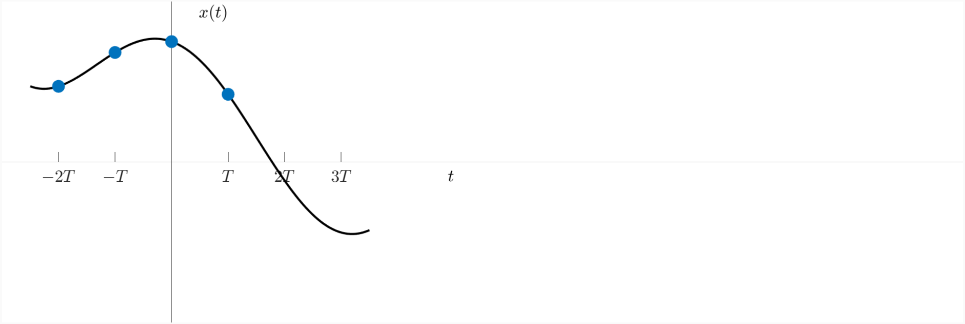
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal
analógica
$x(t)$

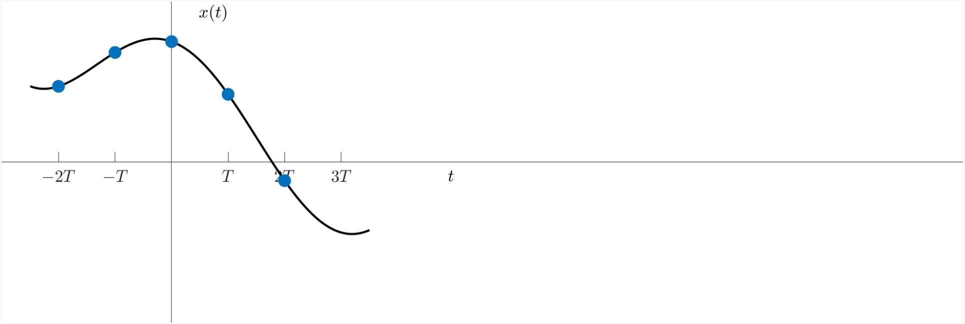
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$

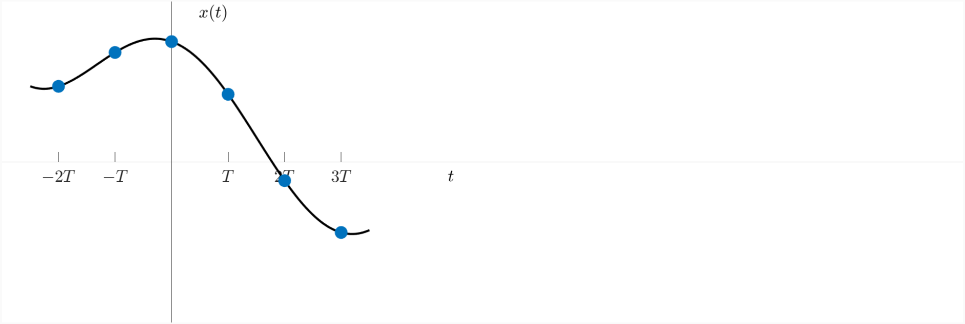
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$

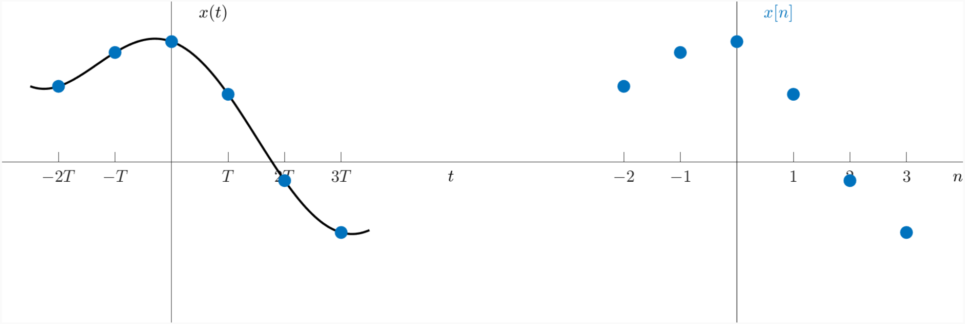
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$

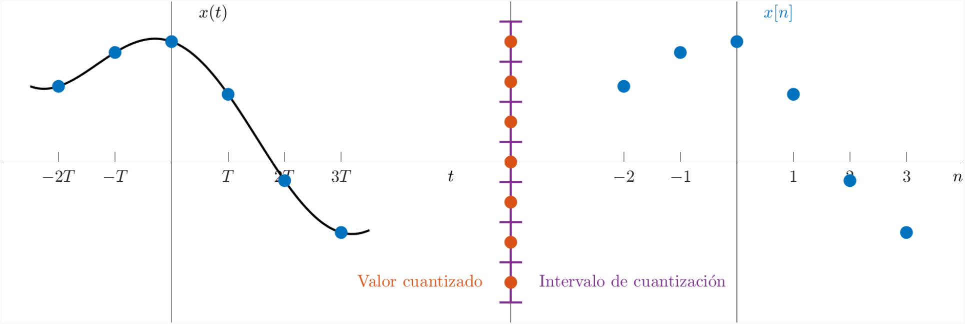
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

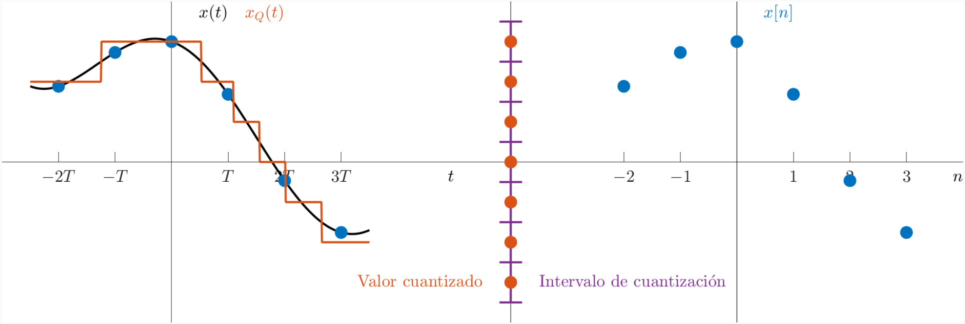
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

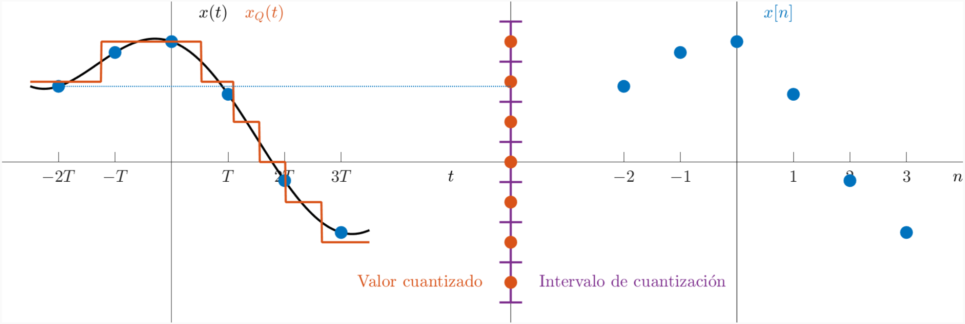
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

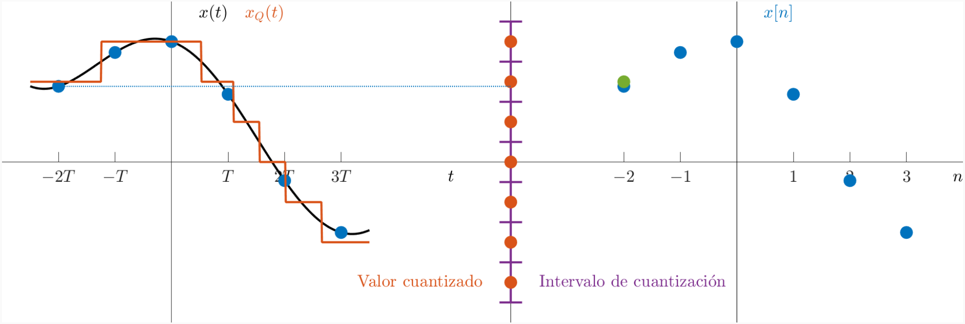
señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

Introducción



SVIC $\to$ SVID, T intervalo de muestreo. $\quad x(nT) = x[n]$

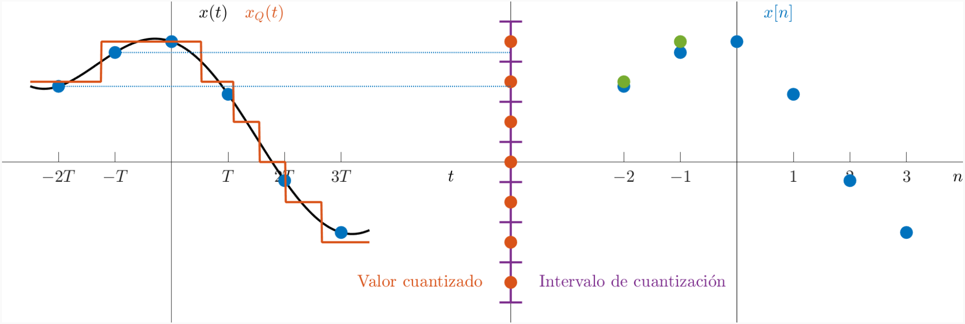
señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $\quad x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

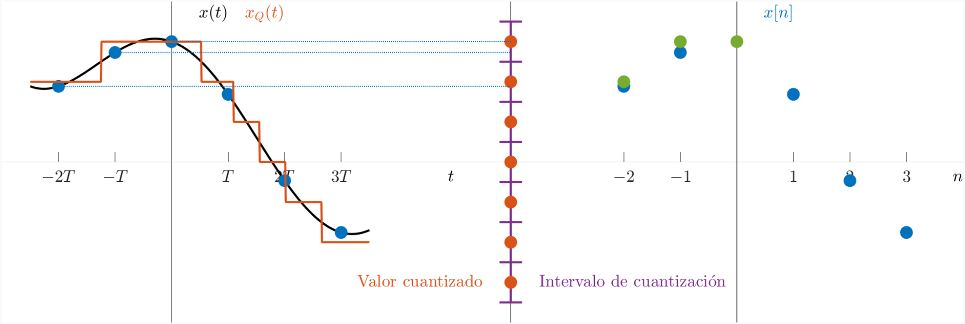
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $\quad x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

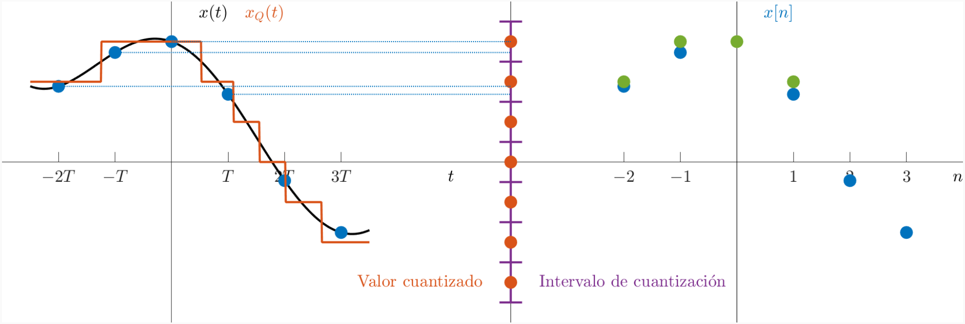
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $\quad x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

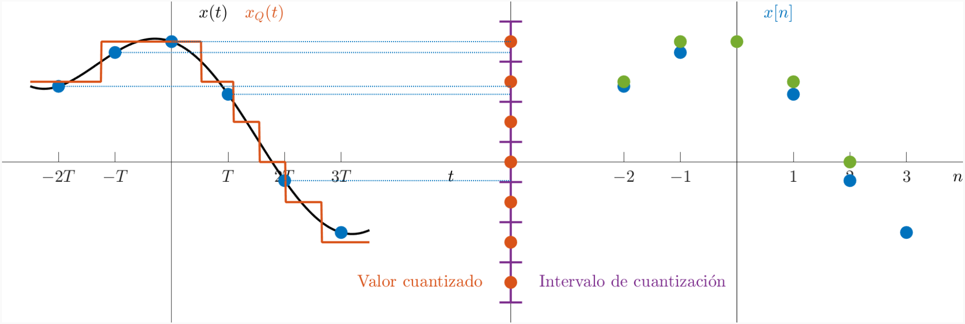
Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $\quad x(nT) = x[n]$

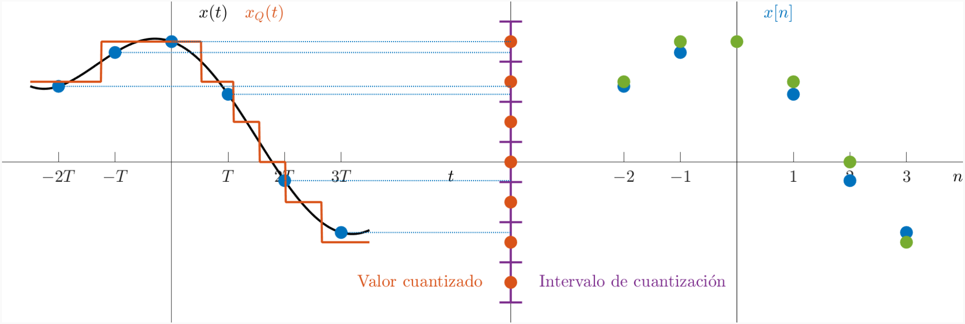
señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $x(nT) = x[n]$

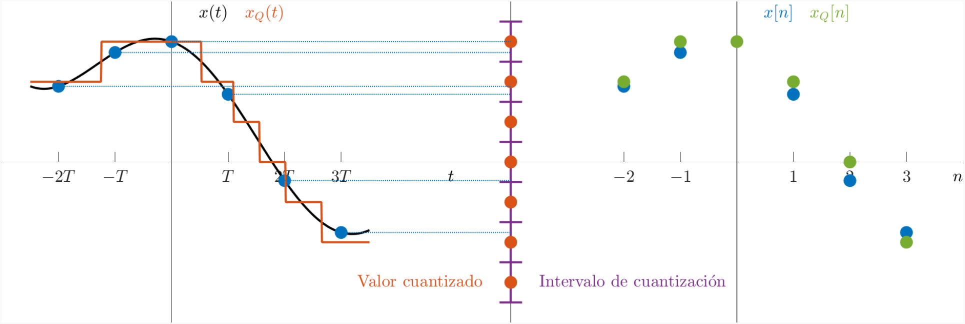
señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $\quad x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$

Introducción



SVIC $\rightarrow$ SVID, T intervalo de muestreo. $\quad x(nT) = x[n]$

señal analógica $x(t)$	$\longrightarrow$	señal muestreada $x[n]$	$\longrightarrow$	señal digital $x_Q[n]$

Clases de Señales

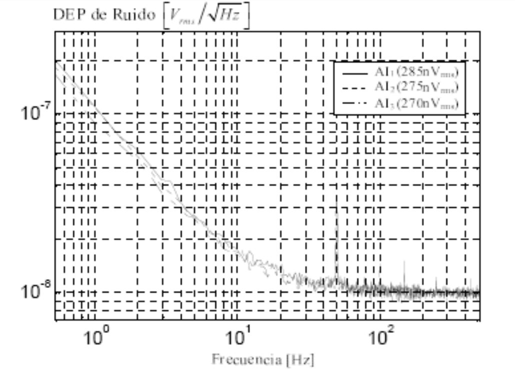
Por su *variable independiente* - 1

Número de variables independientes

- 1 (1D): tratadas en IPS
- 2 (2D), 3 (3D): imágenes rasterizadas (TV, monitor); cortes tomográficos (imágenes de resonancia magnética, de tomografía computada de rayos X, de emisión de positrones, etc), sensado remoto...
- Múltiples (MD): multidimensionales

La variable independiente no tiene por qué ser siempre "tiempo".

Ejemplo: amplificador



Por su *variable independiente* - 2

Tipo de Dominio

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$$

- SVIC: Señal de Variable Independiente Continua (naturalmente SVIC o por reconstrucción de SVID). Funciones $\boxed{f(t)}$ con $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ o un intervalo $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$
- SVID: Señal de Variable Independiente Discreta (naturalmente SVID o por muestreo de SVIC). Secuencias $\boxed{f[n]}$ con $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ o un intervalo $\mathcal{I} \in \mathbb{Z}$.

Por su rango o *amplitudes* 1

Rango de la función o secuencia

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$$

- Continuo: Las amplitudes toman valores que pertenecen a $\mathcal{R} \equiv$ intervalo de $\mathbb{R}$.
  Ejemplos: tensión eficaz de línea, temperatura promedio del día en un invernáculo, presión intraventricular del corazón, tensión sobre el cuero cabelludo de un electrodo de EEG

Por su rango o *amplitudes* 2

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$$

- Discreto: Las amplitudes pueden tomar sólo un número contable de valores; p.ej.: 2 niveles (o señal binaria); o $\mathcal{R} \equiv$ intervalo de $\mathbb{Z}$.
  Ejemplos: señal de manipulador telegráfico (idealizada), número de requerimientos de llamado a una central telefónica, número de fotones que llegan a un fotodiodo, número de autos que pasan por "verde" de un semáforo, códigos para detección y corrección de errores, códigos para encriptación y seguridad.

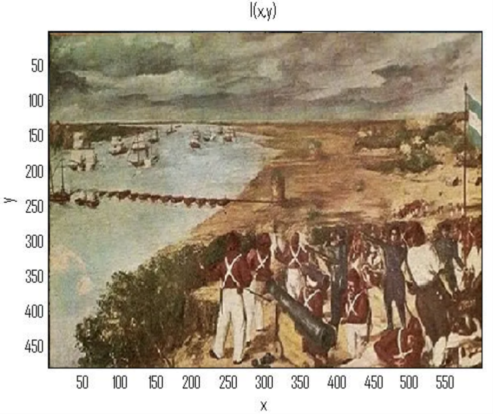
Señales Vectoriales y Multidimensionales

- Valor (variable dependiente): real, complejo, o vectorial.
    - $s(t) = A\cos(3\pi t)$
    - $s(t) = A\exp(j3\pi t) = A\cos(3\pi t) + jA\text{sen}(3\pi t)$
    - $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$

Señales Vectoriales y Multidimensionales

- Valor (variable dependiente): real, complejo, o vectorial.
    - $s(t) = A\cos(3\pi t)$
    - $s(t) = A\exp(j3\pi t) = A\cos(3\pi t) + jA\mathrm{sen}(3\pi t)$
    - $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$
- Nº variables independientes $\equiv$ Dimensión.
    - $I(x, y)$
    - $I(x, y, t)$
    - $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_R(x, y, t) \\ I_G(x, y, t) \\ I_B(x, y, t) \end{bmatrix}$

- Valor (variable dependiente): real, complejo, o vectorial.
  - $s(t) = A\cos(3\pi t)$
  - $s(t) = A\exp(j3\pi t) = A\cos(3\pi t) + jA\mathrm{sen}(3\pi t)$
  - $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$
- Nº variables independientes $\equiv$ Dimensión.
  - $I(x, y)$
  - $I(x, y, t)$
  - $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_R(x, y, t) \\ I_G(x, y, t) \\ I_B(x, y, t) \end{bmatrix}$



Tipos de señales

- Analógica: SVIC y Amplitud continua

Tipos de señales

- Analógica: SVIC y Amplitud continua
- Muestreada: SVID y Amplitud continua

Tipos de señales

- Analógica: SVIC y Amplitud continua
- Muestreada: SVID y Amplitud continua
- Cuantizada: SVIC y Amplitud discreta

Tipos de señales

- Analógica: SVIC y Amplitud continua
- Muestreada: SVID y Amplitud continua
- Cuantizada: SVIC y Amplitud discreta
- Digital: SVID y Amplitud discreta

Por su naturaleza 1

Realización: señal que se toma de una experiencia sobre una magnitud física.

- Determinística: describible para todo valor de la variable independiente por una función matemática (sin variables aleatorias). Al repetir una experiencia, cada realización da la misma señal.
  Ejemplo: $x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \phi)$, con A, f_0, ϕ constantes.

Tipos de señales

Por su naturaleza 2

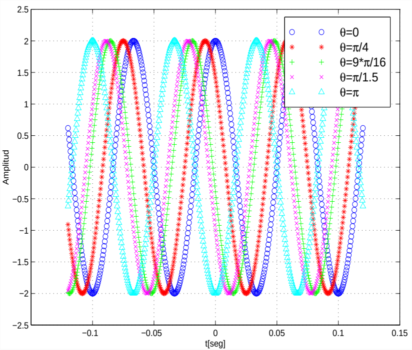
- Aleatoria: no se puede describir por una función matemática sin recurrir a un número (finito o infinito) de variables aleatorias. Al repetir una experiencia, todas las realizaciones difieren entre sí. La colección o *ensemble* de realizaciones se denomina PROCESO ESTOCÁSTICO

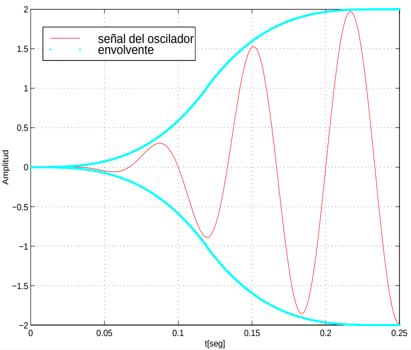
  Ejemplos:

  Con una VA: $x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \phi)$ con ϕ una VA distribuida uniformemente en $[-\pi, \pi)$.

  Con infinitas VA: proceso independiente e idénticamente distribuido *iid* ("ruido").

Distintas realizaciones del generador senoidal modelado como proceso estocástico

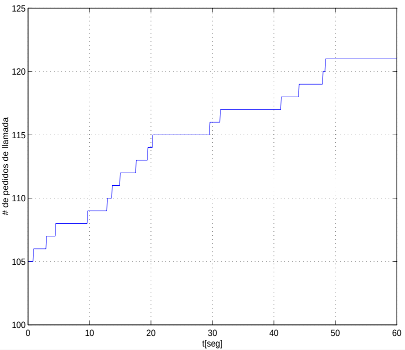


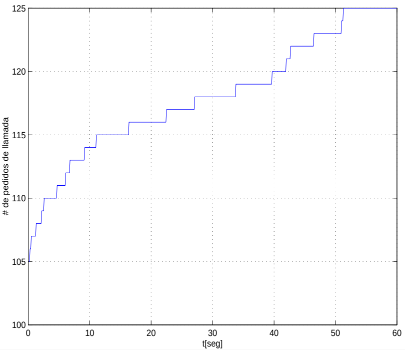


Una aproximación de la tensión de salida de un generador senoidal desde su inicio

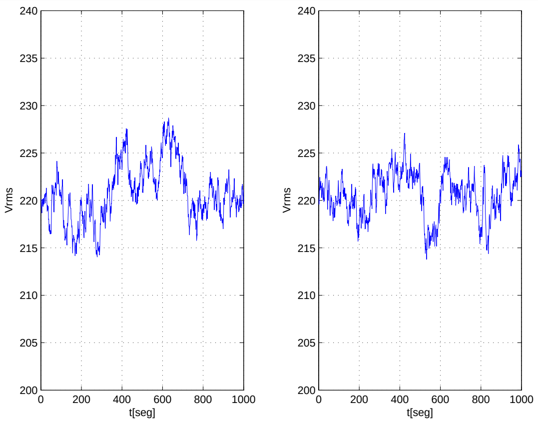
Señales aleatorias 2

Número de llamadas a una central telefónica en una hora pico





Registros de tensión eficaz de línea

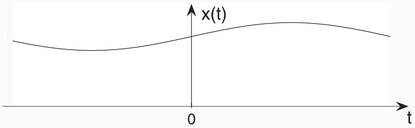


Señales aleatorias 4

Lo anteriormente descripto no es la única forma posible de aleatoreidad; existen por ejemplo, las señales caóticas, fractales, etc. *No las usaremos en IPS*.

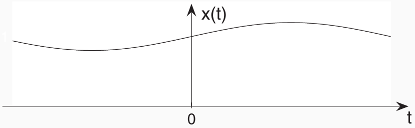
Señales, Secuencias

SVIC

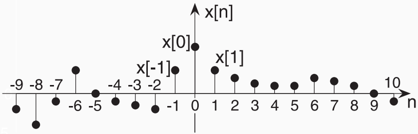


Señales, secuencias. VI: tiempo, índice

SVIC

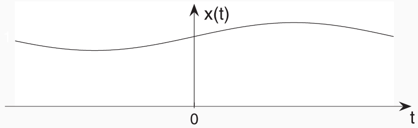


SVID

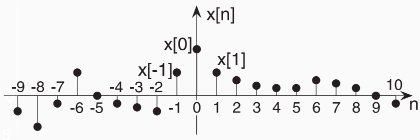


Señales, secuencias. VI: tiempo, índice

SVIC



SVID



No “hay” señal entre muestras; no está definida

Señales especiales SVIC

- escalón $\rightarrow u(x)$

Señales especiales SVIC

- escalón $\rightarrow u(x)$
- cajón $\rightarrow \sqcap(x)$

Señales especiales SVIC

- escalón $\rightarrow u(x)$
- cajón $\rightarrow \sqcap(x)$
- triángulo $\rightarrow \wedge(x)$

Señales especiales SVIC

- escalón $\rightarrow u(x)$
- cajón $\rightarrow \sqcap(x)$
- triángulo $\rightarrow \wedge(x)$
- exponencial $\rightarrow e^{cx},\ c \in \mathbb{C}$

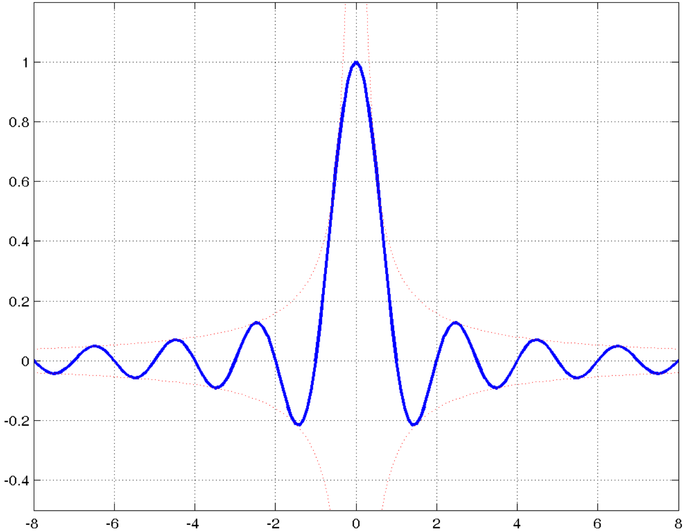
Señales especiales SVIC

- escalón $\rightarrow u(x)$
- cajón $\rightarrow \sqcap(x)$
- triángulo $\rightarrow \wedge(x)$
- exponencial $\rightarrow e^{cx},\ c \in \mathbb{C}$
- sinc $\rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$

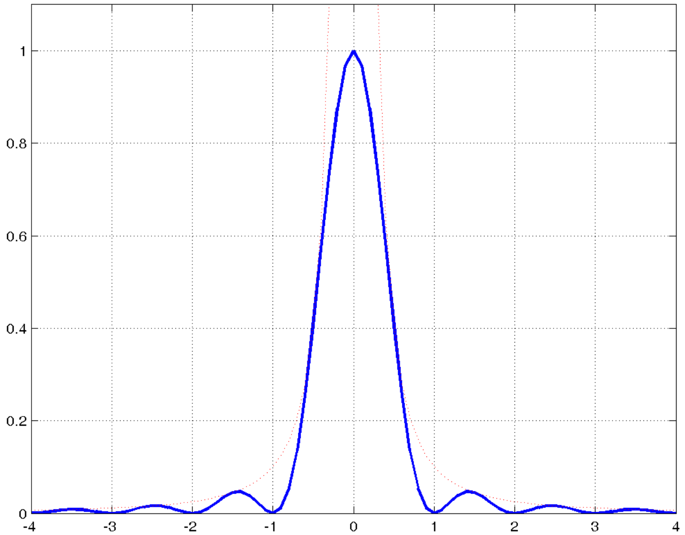
Señales especiales SVIC

- escalón $\to u(x)$
- cajón $\to \sqcap(x)$
- triángulo $\to \wedge(x)$
- exponencial $\to e^{cx},\ c \in \mathbb{C}$
- sinc $\to \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$
- sind $\to \text{sind}_N(x) = \frac{\text{sen}(\pi N x)}{\text{sen}(\pi x)}$

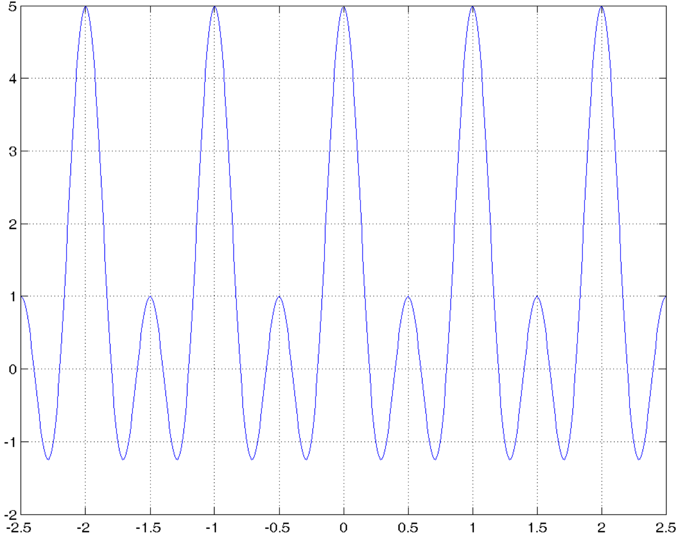
Ejemplos SVIC: $sinc(x)$



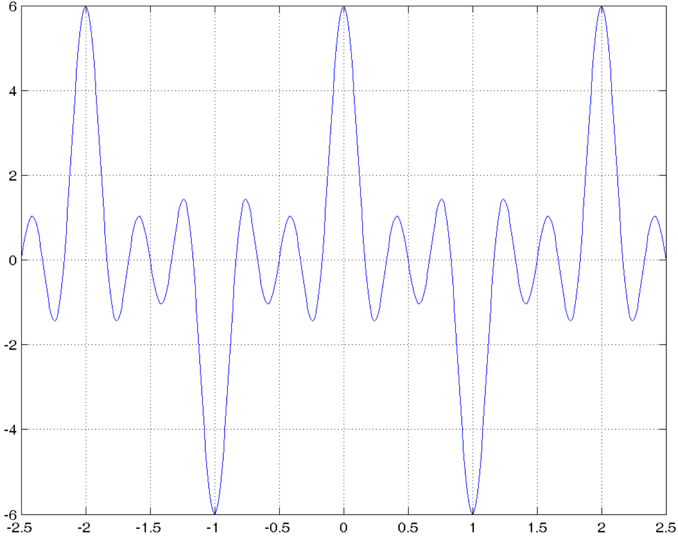
Ejemplos SVIC: $sinc^2(x)$



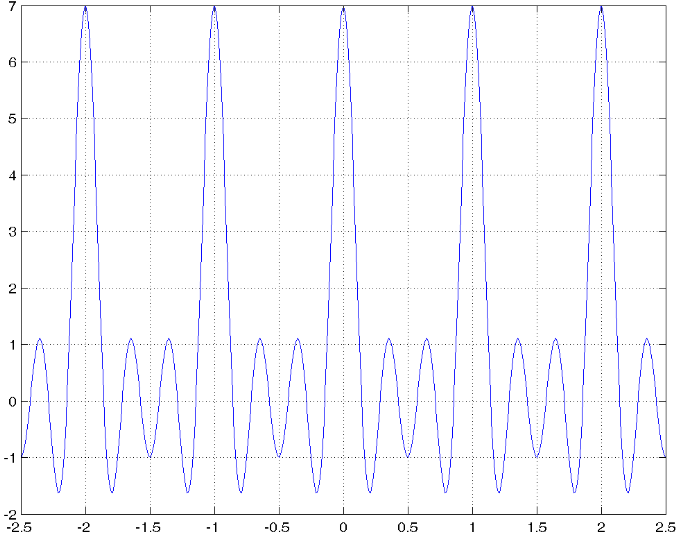
Ejemplos SVIC: $sind_5(x)$



Ejemplos SVIC: $sind_6(x)$



Ejemplos SVIC: $sind_7(x)$



Señales especiales SVID:

- escalón $\rightarrow u[n]$

Señales especiales SVID:

- escalón $\rightarrow u[n]$
- cajón $\rightarrow \sqcap_N[n]$ de N-puntos, sólo para N impar

Señales especiales SVID:

- escalón $\rightarrow u[n]$
- cajón $\rightarrow \sqcap_N[n]$ de N-puntos, sólo para N impar
- triángulo $\rightarrow \wedge_N[n]$ de $2N-1$-puntos, $\wedge_N[0] = N$

Señales especiales SVID:

- escalón $\rightarrow u[n]$
- cajón $\rightarrow \sqcap_N[n]$ de N-puntos, sólo para N impar
- triángulo $\rightarrow \wedge_N[n]$ de $2N-1$-puntos, $\wedge_N[0] = N$
- exponencial $\rightarrow e^{cn}$, $c \in \mathbb{C}$

Señales especiales SVID:

- escalón $\rightarrow u[n]$
- cajón $\rightarrow \sqcap_N[n]$ de N-puntos, sólo para N impar
- triángulo $\rightarrow \wedge_N[n]$ de $2N-1$-puntos, $\wedge_N[0] = N$
- exponencial $\rightarrow e^{cn}$, $c \in \mathbb{C}$
- seno y coseno $\rightarrow \operatorname{sen}(2\pi f_0 n + \varphi)$

Deltas

Delta de Dirac – SVIC

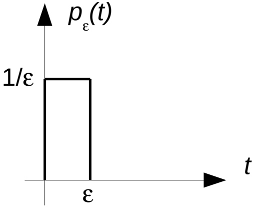
Importante para

- representar condiciones iniciales de sistemas (en circuitos por ej., carga inicial de un capacitor)
- para poder transformar señales periódicas (Fourier, Laplace)
- para definir la respuesta impulsional de sistemas lineales

entre otros usos.

Delta de Dirac – Idea

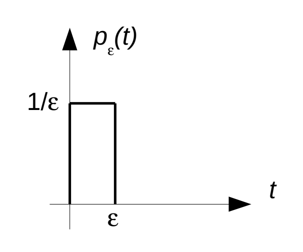
Teoría de distribuciones o
Funciones generalizadas



- Pulso/límite
  $\int \lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon(\tau) d\tau = 0$ pero $\lim_{\epsilon\to 0} \int p_\epsilon(\tau) d\tau = 1$

Delta de Dirac – Idea

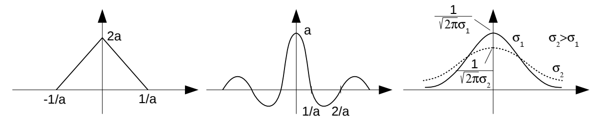
Teoría de distribuciones o
Funciones generalizadas



- Pulso/límite
  $\int \lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon(\tau)d\tau = 0$ pero $\lim_{\epsilon\to 0}\int p_\epsilon(\tau)d\tau = 1$
- Representantes de la Delta ("integral=1; soporte=0")

$$\lim_{a\to\infty} 2a \bigwedge(ax); \quad \lim_{a\to\infty}\frac{\mathrm{sen}(\pi a x)}{\pi x}; \quad \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

y muchas otras



Delta de Dirac – Propiedades 1

- Igualdad en sentido distribucional $\delta_{LI}(x)“=”\delta_{LD}(x)$ es

$$\int \delta_{LI}(x)\Phi(x)dx = \int \delta_{LD}(x)\Phi(x)dx \qquad \forall \Phi(x) \in FPB$$

donde *FPB* es la clase de funciones que se “portan bien”.

Delta de Dirac – Propiedades 1

- Igualdad en sentido distribucional $\delta_{LI}(x)``="\delta_{LD}(x)$ es

$$\int \delta_{LI}(x)\Phi(x)dx = \int \delta_{LD}(x)\Phi(x)dx \qquad \forall \Phi(x) \in FPB$$

  donde *FPB* es la clase de funciones que se "portan bien".

- Expansión-Compresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{-c\infty}^{c\infty} \delta(x)dx = \frac{1}{|c|}$$

Delta de Dirac – Propiedades 1

- Igualdad en sentido distribucional $\delta_{LI}(x)“ = ”\delta_{LD}(x)$ es

$$\int \delta_{LI}(x)\Phi(x)dx = \int \delta_{LD}(x)\Phi(x)dx \qquad \forall\Phi(x) \in FPB$$

  donde FPB es la clase de funciones que se “portan bien”.

- Expansión-Compresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{-c\infty}^{c\infty} \delta(x)dx = \frac{1}{|c|}$$

- No se puede definir, en general, el producto de distribuciones de manera consistente

Delta de Dirac – Propiedades 2

- Extracción

$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

siempre que $a < 0 < b$

Delta de Dirac – Propiedades 2

- Extracción
$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = f(0)$$
siempre que $a < 0 < b$
- Derivada
$$\int_a^b \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$
con $a < 0 < b$, donde $f^{(n)}(x)$ es la derivada n-sima de $f(x)$

Delta de Dirac – Propiedades 2

- Extracción
$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = f(0)$$
siempre que $a < 0 < b$
- Derivada
$$\int_a^b \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$
con $a < 0 < b$, donde $f^{(n)}(x)$ es la derivada n-sima de $f(x)$
- $\delta(x)$ tiene área 1; $A\delta(x)$ tiene área A

Delta de Kronecker – SVID

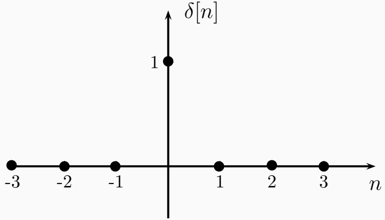
- Juega un papel similar a la Delta de Dirac en SVIC
- Mucho más sencilla de tratar

Delta de Kronecker – SVID

- Juega un papel similar a la Delta de Dirac en SVIC
- Mucho más sencilla de tratar

Definición:

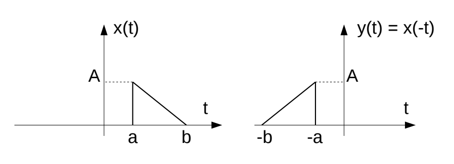
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ 0 & si \quad n \neq 0 \end{cases}$$



Transformaciones de la variable independiente

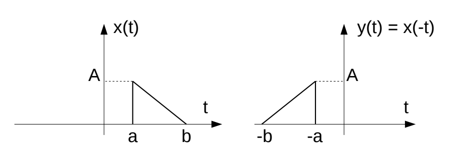
Reflexión

- SVIC: aparece una nueva señal $y(t) = x(-t)$

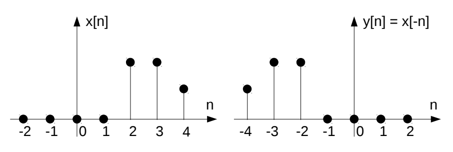


Reflexión

- SVIC: aparece una nueva señal $y(t) = x(-t)$

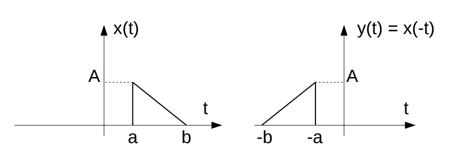


- SVID: aparece una nueva señal $y[n] = x[-n]$

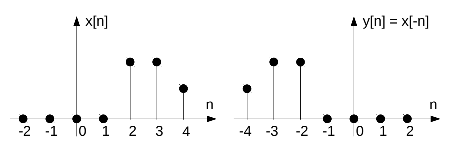


Reflexión

- SVIC: aparece una nueva señal $y(t) = x(-t)$



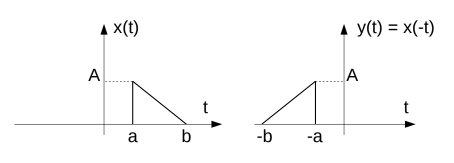
- SVID: aparece una nueva señal $y[n] = x[-n]$



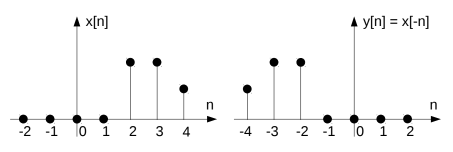
Aplicaciones: recordar la música “satánica” al reproducir cintas y discos (!) al revés.

Reflexión

- SVIC: aparece una nueva señal $y(t) = x(-t)$



- SVID: aparece una nueva señal $y[n] = x[-n]$

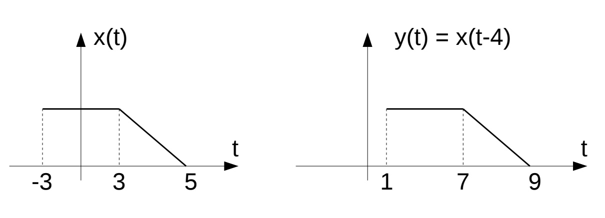


Aplicaciones: recordar la música “satánica” al reproducir cintas y discos (!) al revés.

Matlab: construya su propio ejemplo. `n=-100:1:100;` y `nr=100:-1:-100. plot(n,x(nr))`

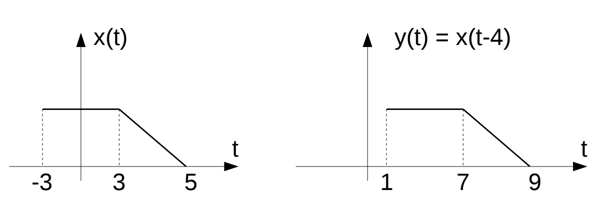
Translación o Desplazamiento

- SVIC: $x(t)$ es transladada en la cantidad $t_0 \in \mathbb{R}$: aparece una nueva señal $y(t) = x(t - t_0)$.



Translación o Desplazamiento

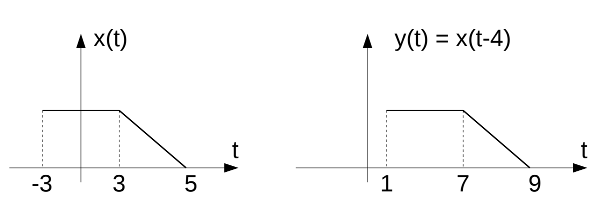
- SVIC: $x(t)$ es transladada en la cantidad $t_0 \in \mathbb{R}$: aparece una nueva señal $y(t) = x(t - t_0)$.



- ¿A derecha o a izquierda?

Translación o Desplazamiento

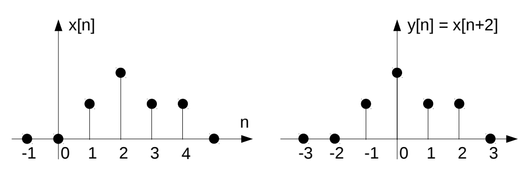
- SVIC: $x(t)$ es transladada en la cantidad $t_0 \in \mathbb{R}$: aparece una nueva señal $y(t) = x(t-t_0)$.



- ¿A derecha o a izquierda? depende del signo de t_0

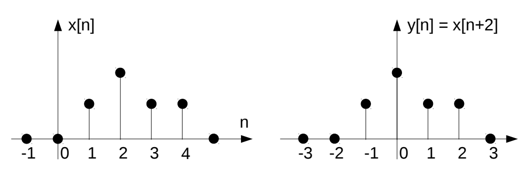
Translación o Desplazamiento

- SVID: $x[n]$ es desplazadada en la cantidad $n_0 \in \mathbb{Z}$: aparece una nueva señal $y[n] = x[n - n_0]$.



Translación o Desplazamiento

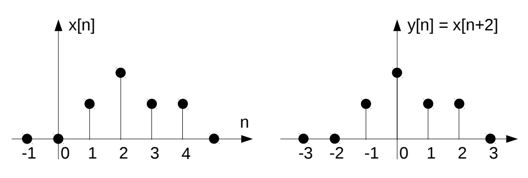
- SVID: $x[n]$ es desplazadada en la cantidad $n_0 \in \mathbb{Z}$: aparece una nueva señal $y[n] = x[n - n_0]$.



- ¿A derecha o a izquierda?

Translación o Desplazamiento

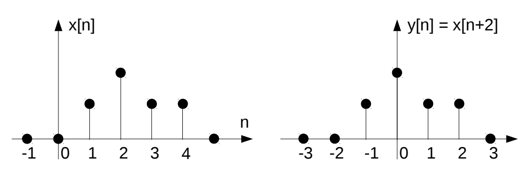
- SVID: $x[n]$ es desplazadada en la cantidad $n_0 \in \mathbb{Z}$: aparece una nueva señal $y[n] = x[n - n_0]$.



- ¿A derecha o a izquierda? depende del signo de n_0. Notar: no cualquier translación es posible, sólo las que corresponden a números enteros.

Translación o Desplazamiento

- SVID: $x[n]$ es desplazadada en la cantidad $n_0 \in \mathbb{Z}$: aparece una nueva señal $y[n] = x[n - n_0]$.



- ¿A derecha o a izquierda? depende del signo de n_0. Notar: no cualquier translación es posible, sólo las que corresponden a números enteros.

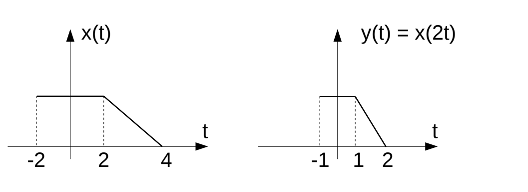
Ejemplo:

Aplicación: acción de control a través de una red.

Matlab: genere $x[n]$ y vea $y[n] = x[n - n_0]$ con plot(n,x,n,y)

Contracción o Expansión

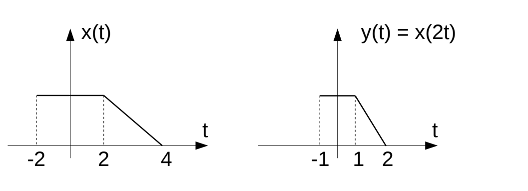
- SVIC: $x(t)$, se cambia su escala por $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at)$



Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVIC: $x(t)$, se cambia su escala por $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at)$

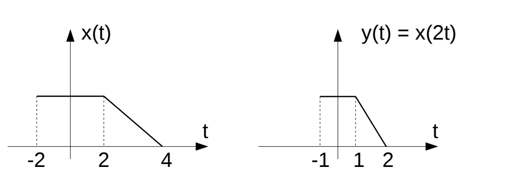


- o también se podría $z(t) = x(t/a)$

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVIC: $x(t)$, se cambia su escala por $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at)$



- o también se podría $z(t) = x(t/a)$
- ¿Cómo “recordar” si es contracción o expansión? ver 1 o 2 puntos notables

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVID: $x[n]$, se pretende cambiar su escala por $M \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[nM]$ Poder, se puede; pero la secuencia está incompleta!

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVID: $x[n]$, se pretende cambiar su escala por $M \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[nM]$ Poder, se puede; pero la secuencia está incompleta!
- Sea $x[n]$, ahora si $y[n] = x[n/M] \ldots$ la secuencia queda indefinida salvo en los n múltiplos de M

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVID: $x[n]$, se pretende cambiar su escala por $M \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[nM]$ Poder, se puede; pero la secuencia está incompleta!
- Sea $x[n]$, ahora si $y[n] = x[n/M] \ldots$ la secuencia queda indefinida salvo en los n múltiplos de M
- Se puede hacer algo perdiendo información (contracción)

$$x[n]; \qquad y[n] = x[nM] \qquad M \in \mathbb{N}$$

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVID: $x[n]$, se pretende cambiar su escala por $M \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[nM]$ Poder, se puede; pero la secuencia está incompleta!
- Sea $x[n]$, ahora si $y[n] = x[n/M] \ldots$ la secuencia queda indefinida salvo en los n múltiplos de M
- Se puede hacer algo perdiendo información (contracción)

$$x[n]; \qquad y[n] = x[nM] \qquad M \in \mathbb{N}$$

- Se puede hacer algo agregando información (expansión)

$$x[n]; \qquad y[m] = \begin{cases} x[n] & \text{si } m = nM \\ 0 & \text{si } m \neq nM \end{cases}$$

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVID: $x[n]$, se pretende cambiar su escala por $M \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[nM]$ Poder, se puede; pero la secuencia está incompleta!
- Sea $x[n]$, ahora si $y[n] = x[n/M] \ldots$ la secuencia queda indefinida salvo en los n múltiplos de M
- Se puede hacer algo perdiendo información (contracción)

$$x[n]; \qquad y[n] = x[nM] \qquad M \in \mathbb{N}$$

- Se puede hacer algo agregando información (expansión)

$$x[n]; \qquad y[m] = \begin{cases} x[n] & \text{si } m = nM \\ 0 & \text{si } m \neq nM \end{cases}$$

- En todo caso, las últimas 2 variantes son una alteración de la señal original

MATLAB: compruebe lo de más arriba

Translación y cambio de escala conjuntos

- SVIC: $x(t)$, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at + b)$

Translación y cambio de escala conjuntos

- SVIC: $x(t)$, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at + b)$
- esto NO es una cambio de escala por a y una translación por b

Translación y cambio de escala conjuntos

- SVIC: $x(t)$, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at + b)$
- esto NO es una cambio de escala por a y una translación por b
- Lo correcto es ver como $y(t) = x(a(t + b/a))$, es decir cambio de escala por a y translación por b/a

Translación y cambio de escala conjuntos

- SVIC: $x(t)$, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at + b)$
- esto NO es una cambio de escala por a y una translación por b
- Lo correcto es ver como $y(t) = x(a(t + b/a))$, es decir cambio de escala por a y translación por b/a

Aplicación: rayo reflejado y multicamino (celulares, radar, GPS, sonar)

Otras transformaciones

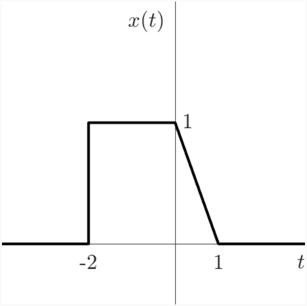
Cambio de escala no-lineal.

Ejemplo: $y(t) = x(t^2) = \{x \circ \phi\}(t)$

Otras transformaciones

Cambio de escala no-lineal.

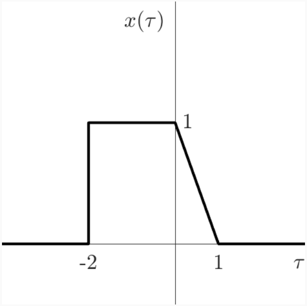
Ejemplo: $y(t) = x(t^2) = \{x \circ \phi\}(t)$



Otras transformaciones

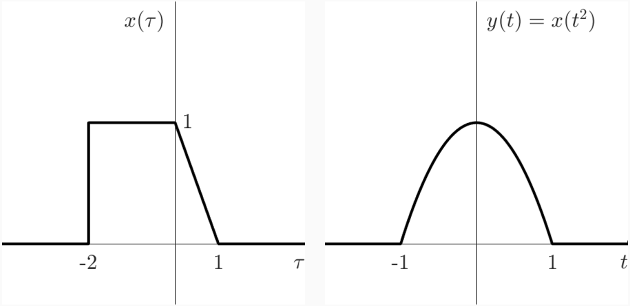
Cambio de escala no-lineal.

Ejemplo: $y(t) = x(t^2) = \{x \circ \phi\}(t)$



Cambio de escala no-lineal.

Ejemplo: $y(t) = x(t^2) = \{x \circ \phi\}(t)$



Partes par e impar

Descomposición de SVIC

Como se vio en Análisis,

$$x_P(t) = \text{Parte par de } x(t) \triangleq \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

$$x_N(t) = \text{Parte non de } x(t) \triangleq \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

Descomposición de SVIC

Como se vio en Análisis,

$$x_P(t) = \text{Parte par de } x(t) \triangleq \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_N(t) = \text{Parte non de } x(t) \triangleq \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Propiedades

$$x_P(t) = x_P(-t) \qquad x_N(t) = -x_N(-t)$$

Descomposición de SVIC

Como se vio en Análisis,

$$x_P(t) = \text{Parte par de } x(t) \triangleq \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_N(t) = \text{Parte non de } x(t) \triangleq \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Propiedades

$$x_P(t) = x_P(-t) \qquad x_N(t) = -x_N(-t)$$

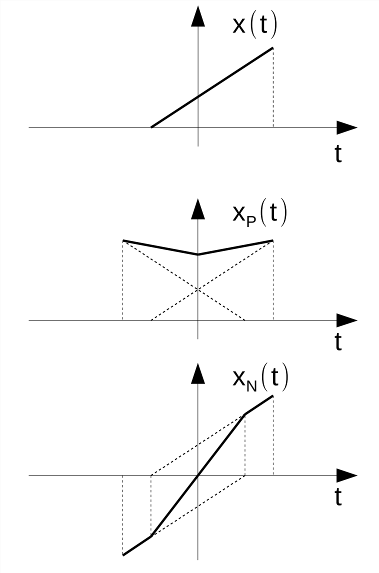
Notar

- Cualquier SVIC se descompone en parte par e impar. Incluye señales periódicas y aperiódicas
- Las SVIC pueden ser pares, impares o ninguna de las dos
- Se puede reconstruir una SVIC a partir de sus partes par e impar,

$$x(t) = x_P(t) + x_N(t)$$

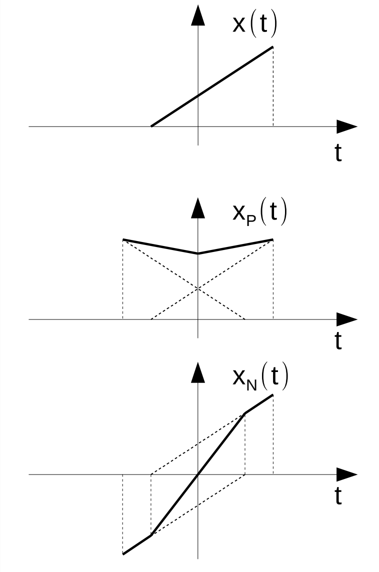
Descomposición de SVIC

De manera gráfica



Descomposición de SVIC

De manera gráfica



Notar

- Una función impar tiene $x(0) = 0$
- La función signo, $\text{sgn}(t)$ se define impar, o sea $\text{sgn}(0) = 0$

Descomposición de SVID

En forma paralela,

$$x_P[n] = \text{Parte par de } x[n] \triangleq \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_N[n] = \text{Parte non de } x[n] \triangleq \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

Descomposición de SVID

En forma paralela,

$$x_P[n] = \text{Parte par de } x[n] \triangleq \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_N[n] = \text{Parte non de } x[n] \triangleq \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

Propiedades

$$x_P[n] = x_P[-n] \qquad x_N[n] = -x_N[-n]$$

Descomposición de SVID

En forma paralela,

$$x_P[n] = \text{Parte par de } x[n] \triangleq \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_N[n] = \text{Parte non de } x[n] \triangleq \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

Propiedades

$$x_P[n] = x_P[-n] \qquad x_N[n] = -x_N[-n]$$

Notar

- Cualquier SVID se descompone en parte par e impar. Incluye señales periódicas y aperiódicas
- Las SVID pueden ser pares, impares o ninguna de las dos
- Se puede reconstruir una SVID a partir de sus partes par e impar,

$$x[n] = x_P[n] + x_N[n]$$

Descomposición de SVID

De manera gráfica

Descomposición de SVID

De manera gráfica

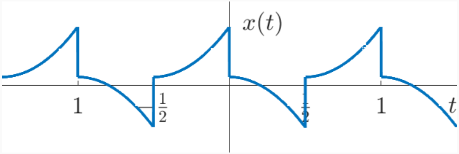
Notar

- La función signo, sgn$[n]$ se define impar, o sea sgn$[0] = 0$

Señales periódicas

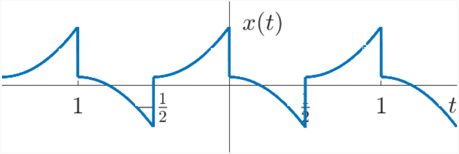
Señales Periódicas

SVIC periódica: $x(t)$ periódica de *período fundamental* T si existe un $T \in \mathbb{R}$ de modo que T es el mínimo $T > 0$ que satisface $x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$.

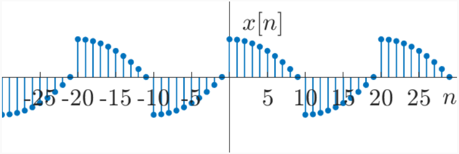


Señales Periódicas

SVIC periódica: $x(t)$ periódica de *período fundamental* T si existe un $T \in \mathbb{R}$ de modo que T es el mínimo $T > 0$ que satisface $x(t) = x(t + T), \forall t \in \mathbb{R}$.

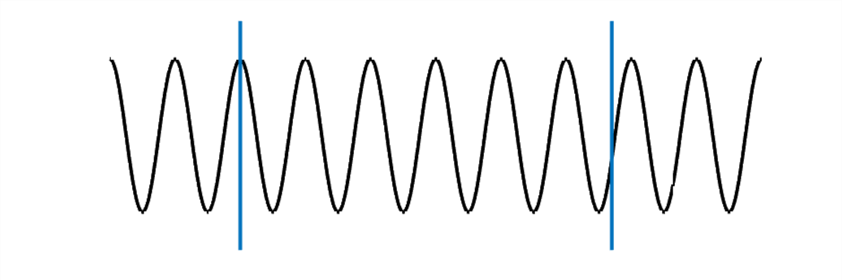


SVID periódica: $x[n]$ periódica de *período fundamental* N si existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que N es el mínimo que satisface $x[n] = x[n + N], \forall n \in \mathbb{Z}$.



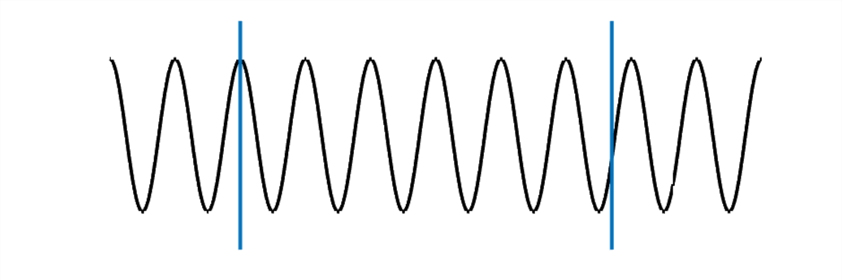
Señales Periódicas

Tasa de repetición



De una sinusoide: cantidad de oscilaciones en un intervalo.

Tasa de repetición



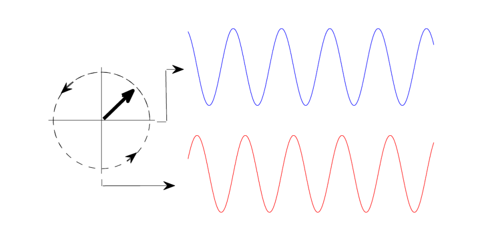
De una sinusoide: cantidad de oscilaciones en un intervalo.

Si la variable independiente es tiempo:

- f [ciclos/s]
- $\omega = 2\pi f$ [rad/s]

Señales Periódicas

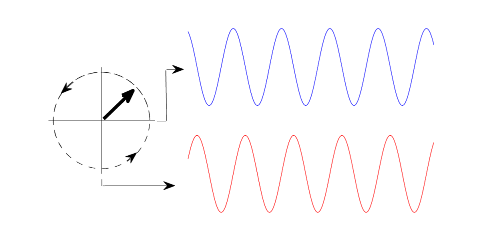
Tasa o velocidad de giro



Algo que gira:

Señales Periódicas

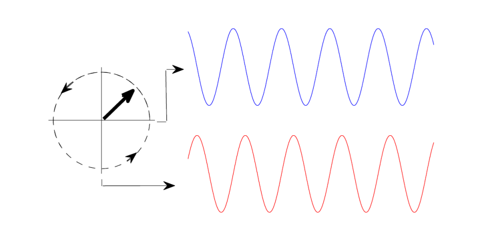
Tasa o velocidad de giro



Algo que gira: Necesitamos dos dimensiones para representarlo

Señales Periódicas

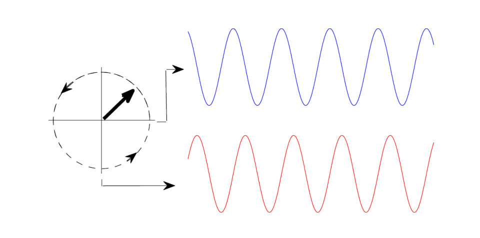
Tasa o velocidad de giro



Algo que gira: Necesitamos dos dimensiones para representarlo $\rightarrow$ dos proyecciones ortogonales.

Señales Periódicas

Tasa o velocidad de giro

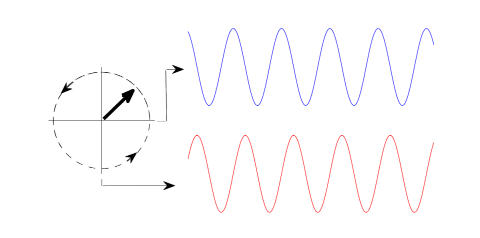


Algo que gira: Necesitamos dos dimensiones para representarlo $\rightarrow$ dos proyecciones ortogonales. Por ejemplo parte real y parte imaginaria.

$$x(t) = A\left[\cos(\omega t + \phi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\right] = Ae^{j(\omega t+\phi)} = A' e^{j\omega t}$$

Señales Periódicas

Tasa o velocidad de giro



Algo que gira: Necesitamos dos dimensiones para representarlo $\rightarrow$ dos proyecciones ortogonales. Por ejemplo parte real y parte imaginaria.

$$x(t) = A\left[\cos(\omega t + \phi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\right] = Ae^{j(\omega t+\phi)} = A' e^{j\omega t}$$

Frecuencias negativas: Al trabajar con funciones complejas tiene sentido pensar en frecuencias negativas (sentido de giro).

SVIC periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \omega + j\alpha$

$$e^{jct} = \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{amortiguación}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{periódica}}$$

SVIC periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \omega + j\alpha$

$$e^{jct} = \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{amortiguación}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{periódica}}$$

- Pulsación: ω rad/seg. Frecuencia: $\omega = 2\pi f$

SVIC periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \omega + j\alpha$

$$e^{jct} = \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{amortiguación}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{periódica}}$$

- Pulsación: ω rad/seg. Frecuencia: $\omega = 2\pi f$
- Periodicidad de $e^{j\omega t}$

$$\begin{array}{lcr} e^{j2\pi ft} = e^{j2\pi f(t+T)} & \Rightarrow & e^{j2\pi fT} = 1 \\ \Rightarrow 2\pi fT = 2\pi k; & \text{con } fT = k \in \mathbb{Z} & \Rightarrow k \in \mathbb{N} \end{array}$$

SVIC periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \omega + j\alpha$

$$e^{jct} = \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{amortiguación}} \quad \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{periódica}}$$

- Pulsación: ω rad/seg. Frecuencia: $\omega = 2\pi f$
- Periodicidad de $e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} e^{j2\pi ft} = e^{j2\pi f(t+T)} \qquad &\Rightarrow \qquad e^{j2\pi fT} = 1 \\ \Rightarrow 2\pi fT = 2\pi k; \qquad &\text{con } fT = k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- "mínimo $T > 0 \ldots \Rightarrow$" Número de ciclos por segundo $= 1/T = f$

SVIC periódicas

Consecuencias

- A mayor ω mayor cantidad de oscilaciones por segundo

SVIC periódicas

Consecuencias

- A mayor ω mayor cantidad de oscilaciones por segundo
- $e^{j\omega t}$ es periódica $\forall \omega \in \mathbb{R}$

SVIC periódicas

Consecuencias

- A mayor ω mayor cantidad de oscilaciones por segundo
- $e^{j\omega t}$ es periódica $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- Armónicos: dada $e^{j\omega_0 t}$; $\omega_0 \in \mathbb{R}$; $k\omega_0,\ k \in \mathbb{Z}$ son las frecuencias armónicas, que también dan SVIC periódicas

SVIC periódicas

Consecuencias

- A mayor ω mayor cantidad de oscilaciones por segundo
- $e^{j\omega t}$ es periódica $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- Armónicos: dada $e^{j\omega_0 t}$; $\omega_0 \in \mathbb{R}$; $k\omega_0,\ k \in \mathbb{Z}$ son las frecuencias armónicas, que también dan SVIC periódicas
- Existe un infinito número de armónicos, que también dan SVIC periódicas $e^{jk\omega_0 t}$

MATLAB: Ejemplo $e^{j2k\pi f_0 t}$

SVID periódicas

- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$

SVID periódicas

- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$
- Pulsación: Ω sin unidades o rad (n es adimensional).
  "Frecuencia": $\Omega = 2\pi f$

SVID periódicas

- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$
- Pulsación: Ω sin unidades o rad (n es adimensional).
  "Frecuencia": $\Omega = 2\pi f$

$$
\begin{array}{ccc}
e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} & \Rightarrow & e^{j\Omega N} = 1 \\
\Rightarrow \Omega N = 2\pi m; & \text{con } fN = m \in \mathbb{Z} & \Rightarrow f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}
\end{array}
$$

SVID periódicas

- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$
- Pulsación: Ω sin unidades o rad (n es adimensional).
  "Frecuencia": $\Omega = 2\pi f$

$$
\begin{array}{lcr}
e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} & \Rightarrow & e^{j\Omega N} = 1 \\
\Rightarrow \Omega N = 2\pi m; & \text{con } fN = m \in \mathbb{Z} & \Rightarrow f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{es periódica sólo para } f \in \mathbb{Q}}$

SVID periódicas

- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$
- Pulsación: Ω sin unidades o rad (n es adimensional). "Frecuencia": $\Omega = 2\pi f$

$$\begin{array}{lll} e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} & \Rightarrow & e^{j\Omega N} = 1 \\ \Rightarrow \Omega N = 2\pi m; & \text{con } fN = m \in \mathbb{Z} & \Rightarrow f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q} \end{array}$$

$\boxed{\text{es periódica sólo para } f \in \mathbb{Q}}$

- Armónicos: son los múltiplos de $1/N$, si N es el período fundamental.

SVID periódicas

Consecuencias

- Sólo hay $N - 1$ armónicos distintos asociados a una fundamental de período N. Es un número finito de armónicos.

SVID periódicas

Consecuencias

- Sólo hay $N - 1$ armónicos distintos asociados a una fundamental de período N. Es un número finito de armónicos.
- Si $f = m/N$; $m > N$ entonces $m = kN + m'$, $k, m' \in \mathbb{Z}$ y $f = m/N = k + f'$ y $m' < N$; luego $e^{j2\pi fn} = e^{j2\pi(m/N)n} = e^{j2\pi f'n}$.

SVID periódicas

Consecuencias

- Sólo hay $N-1$ armónicos distintos asociados a una fundamental de período N. Es un número finito de armónicos.
- Si $f = m/N$; $m > N$ entonces $m = kN + m'$, $k, m' \in \mathbb{Z}$ y $f = m/N = k + f'$ y $m' < N$; luego $e^{j2\pi fn} = e^{j2\pi(m/N)n} = e^{j2\pi f'n}$.
- Si el período fundamental es N, los armónicos son k/N con $k = 0, 1, \ldots, N-1$

SVID periódicas

Más consecuencias

- A mayor Ω las pulsaciones (y frecuencias) se repiten en forma periódica. Sea Ω_0 con período fundamental N o sea $\Omega_0 N = 2\pi$ entonces,

$$(\Omega_0 + 2\pi k)N = 2\pi + 2\pi kN = 2\pi l \qquad l = 1 + kN \in \mathbb{Z}$$

Más consecuencias

- A mayor Ω las pulsaciones (y frecuencias) se repiten en forma periódica. Sea Ω_0 con período fundamental N o sea $\Omega_0 N = 2\pi$ entonces,

$$(\Omega_0 + 2\pi k)N = 2\pi + 2\pi kN = 2\pi l \qquad l = 1 + kN \in \mathbb{Z}$$

- Se repiten las pulsaciones cada 2π. A medida que se eleva la frecuencia no necesariamente aumentan los ciclos u oscilaciones por segundo

SVID periódicas

Más consecuencias

- A mayor Ω las pulsaciones (y frecuencias) se repiten en forma periódica. Sea Ω_0 con período fundamental N o sea $\Omega_0 N = 2\pi$ entonces,

$$(\Omega_0 + 2\pi k)N = 2\pi + 2\pi kN = 2\pi l \qquad l = 1 + kN \in \mathbb{Z}$$

- Se repiten las pulsaciones cada 2π. A medida que se eleva la frecuencia no necesariamente aumentan los ciclos u oscilaciones por segundo

Ejemplo: $\sin(2\pi 1/10 n)$ y sus armónicos.

SVID periódicas

Más consecuencias

- A mayor Ω las pulsaciones (y frecuencias) se repiten en forma periódica. Sea Ω_0 con período fundamental N o sea $\Omega_0 N = 2\pi$ entonces,

$$(\Omega_0 + 2\pi k)N = 2\pi + 2\pi kN = 2\pi l \qquad l = 1 + kN \in \mathbb{Z}$$

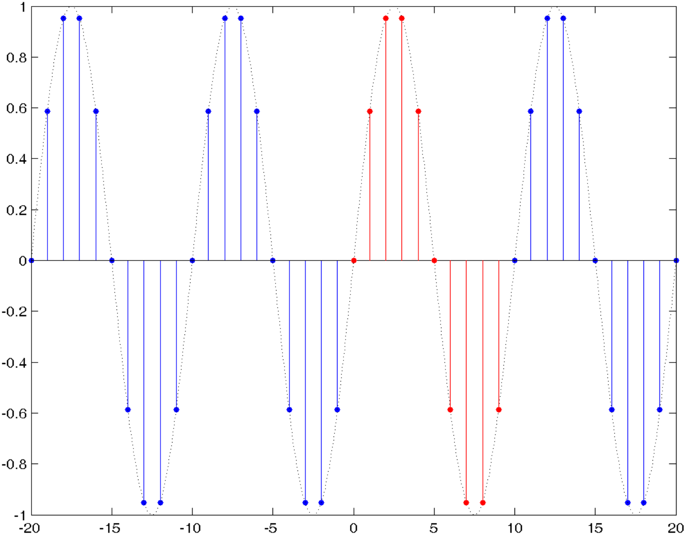
- Se repiten las pulsaciones cada 2π. A medida que se eleva la frecuencia no necesariamente aumentan los ciclos u oscilaciones por segundo

Ejemplo: $\sin(2\pi 1/10 n)$ y sus armónicos.

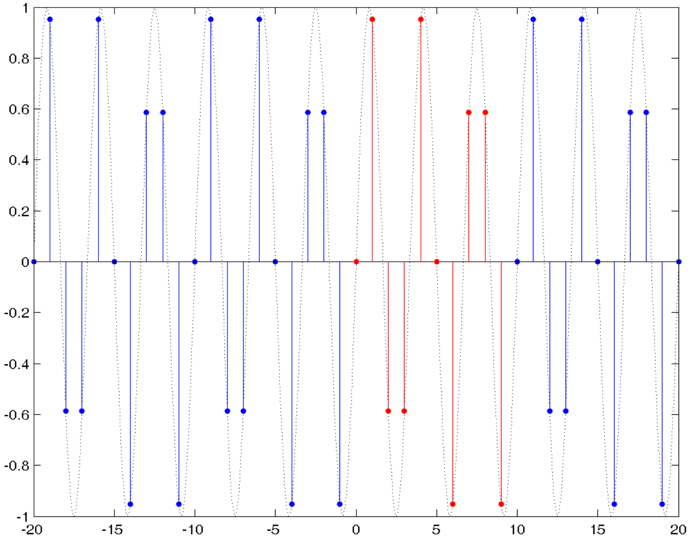
MATLAB: el ejemplo con otra frecuencia. Ver $\cos(2\pi(1/110)^{1/2} n)$

Ejemplos

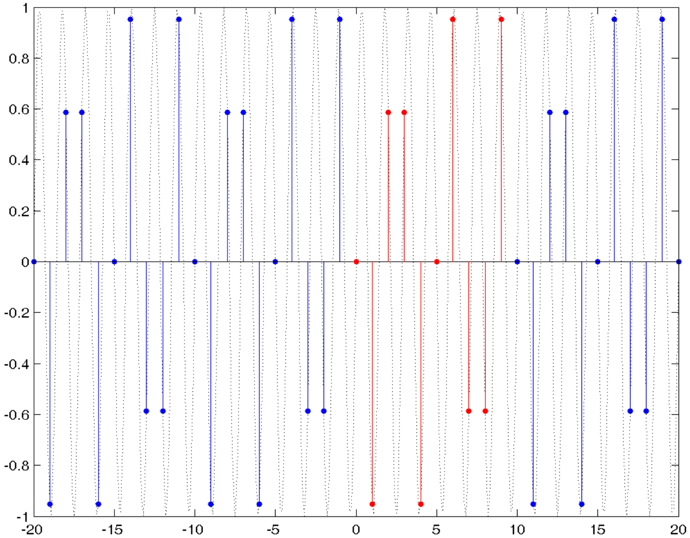
$\text{sen}(2\pi 1/10n)$



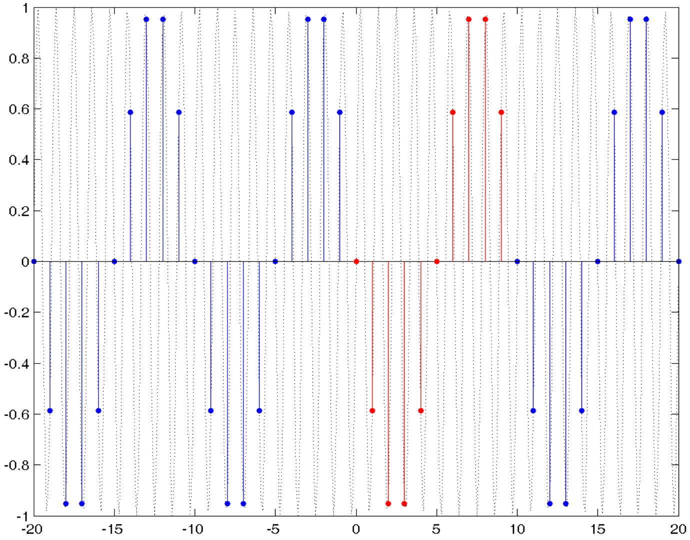
sen($2\pi 3/10n$)



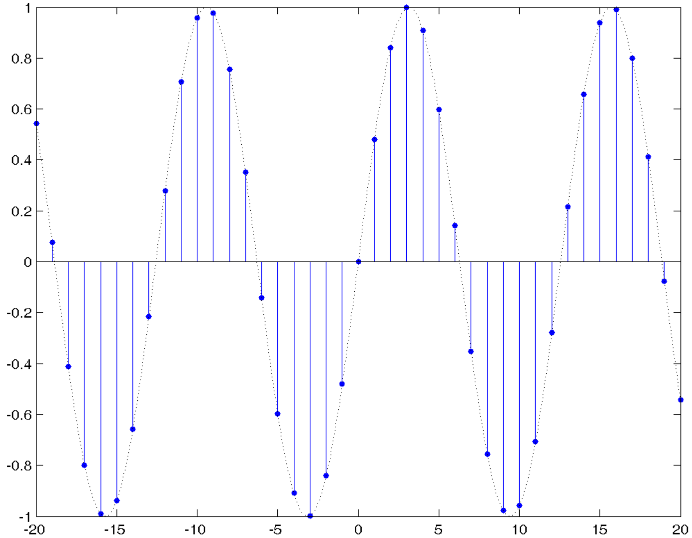
sen($2\pi 7/10 n$)



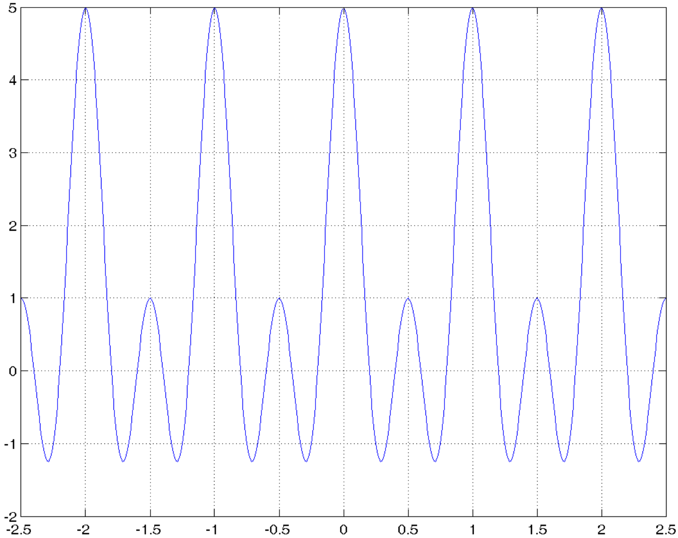
$\mathrm{sen}(2\pi 9/10n)$



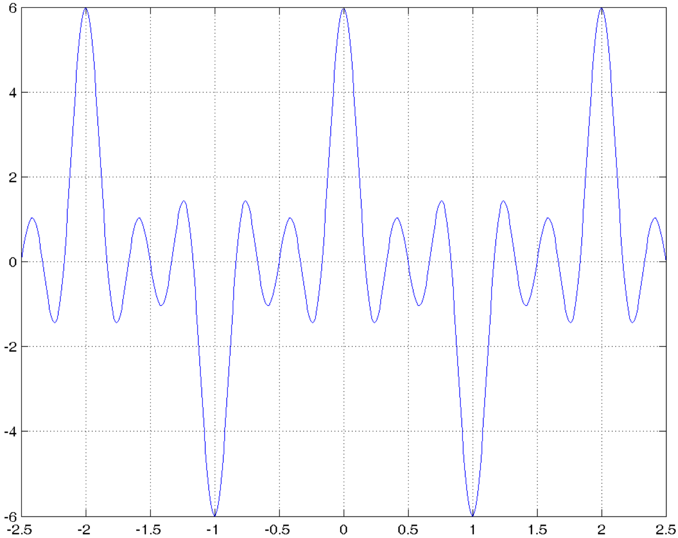
sen$(n/2)$



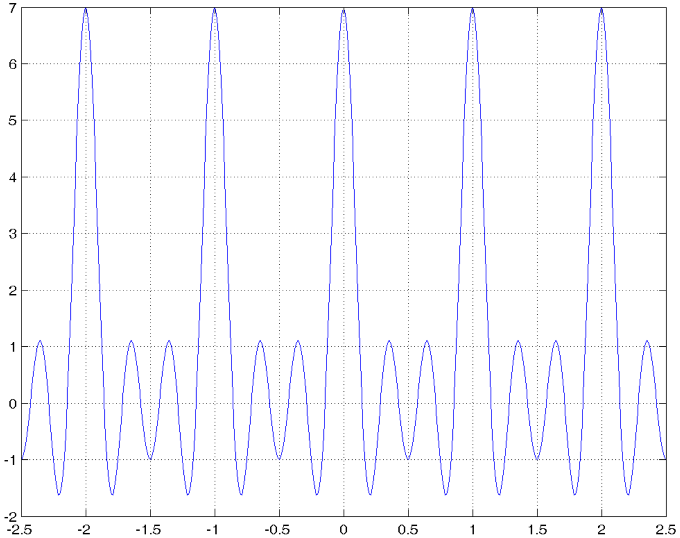
$sind_5(x)$



$sind_6(x)$



$sind_7(x)$



Energía, potencia, valor medio temporal

Energía

Potencia instantánea: $P_i[n] = |x[n]|^2$ para SVID y $P_i(t) = |x(t)|^2$ para SVIC.

Energía

Potencia instantánea: $P_i[n] = |x[n]|^2$ para SVID y $P_i(t) = |x(t)|^2$ para SVIC. Asimile a una tensión de valor $x[n]$ (o $x(t)$) aplicada sobre un resistor de $R = 1\Omega$

Energía

Potencia instantánea: $P_i[n] = |x[n]|^2$ para SVID y $P_i(t) = |x(t)|^2$ para SVIC. Asimile a una tensión de valor $x[n]$ (o $x(t)$) aplicada sobre un resistor de $R = 1\Omega$ Cuando existe la suma o la integral,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Energía

Potencia instantánea: $P_i[n] = |x[n]|^2$ para SVID y $P_i(t) = |x(t)|^2$ para SVIC. Asimile a una tensión de valor $x[n]$ (o $x(t)$) aplicada sobre un resistor de $R = 1\Omega$ Cuando existe la suma o la integral,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

- $x[n]$ es *SVID de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$

Energía

Potencia instantánea: $P_i[n] = |x[n]|^2$ para SVID y $P_i(t) = |x(t)|^2$ para SVIC. Asimile a una tensión de valor $x[n]$ (o $x(t)$) aplicada sobre un resistor de $R = 1\Omega$ Cuando existe la suma o la integral,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

- $x[n]$ es *SVID de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$

Ejemplos:

- $\sqcap(t)$, $e^{-t}u(t)$, $(1/2)^n u[n]$ son señales de energía
- $\cos(2\pi f_0 t)$, $e^t u(t)$, $(1/2)^n u[-n]$ *no* lo son

Potencia

Hay señales que no son de energía, pero tienen potencia finita.

P.ej.: las señales periódicas.

Potencia media de señales periódicas: Energía en un ciclo/Duración del ciclo (período).

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T |x(\tau)|^2 d\tau$$

Potencia

En general,

Potencia

En general,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Potencia

En general,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

- $x[n]$ es *SVID de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$

Potencia

En general,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

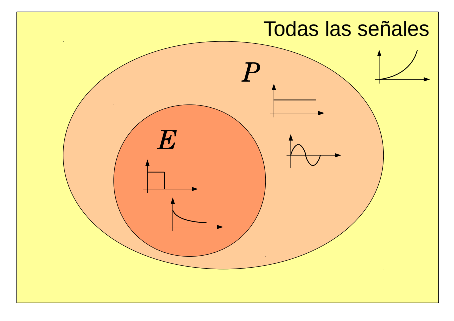
- $x[n]$ es *SVID de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$

Ejemplos:

- Calcular la potencia de $u[n]$
- Calcular la potencia de $A\text{sen}(2\pi f_0 t + \phi)$

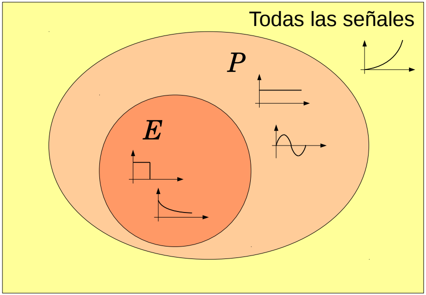
Potencia

Las señales de energía, claramente son de potencia; pero **no** viceversa.



Potencia

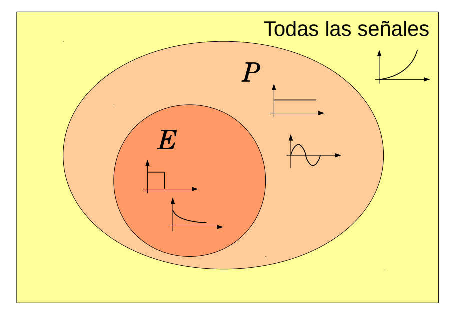
Las señales de energía, claramente son de potencia; pero **no** viceversa.



- Las señales periódicas suelen tener potencia media finita; pero no siempre (piense algún ejemplo).

Potencia

Las señales de energía, claramente son de potencia; pero **no** viceversa.



- Las señales periódicas suelen tener potencia media finita; pero no siempre (piense algún ejemplo).
- Muchas señales aleatorias veremos que son de potencia.

Definición:

$$\text{SVID:} \quad \langle x \rangle_N[n] \triangleq \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} x[k]$$

$$\text{SVIC:} \quad \langle x \rangle_T(t) \triangleq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$$

que depende del instante donde se mira el promedio n (t) y de la ventana en que se mide la señal $\pm N$ ($\pm T$).

Promedio Temporal

Definición:

$$\text{SVID:} \quad \langle x \rangle_N[n] \triangleq \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} x[k]$$

$$\text{SVIC:} \quad \langle x \rangle_T(t) \triangleq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$$

que depende del instante donde se mira el promedio n (t) y de la ventana en que se mide la señal $\pm N$ ($\pm T$).

Las siguientes definiciones son independientes del instante de toma del promedio y de su largo; pero no siempre existen

Definición:

$$\text{SVID:} \quad \langle x \rangle \triangleq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x[k]$$

$$\text{SVIC:} \quad \langle x \rangle \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(\tau) d\tau$$