

# **Introducción al Procesamiento de Señales**

## **Curso 2023**

### Tema 2 - Sistemas

---

Santiago Rodríguez

# Sistemas

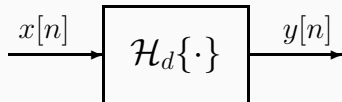
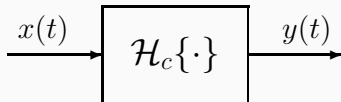
---

# Generalidades

**Definición:** Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

- ★ Evolución (temporal) de las magnitudes físicas  $\rightarrow$  señales.
- ★ Un estímulo aplicado al sistema es la señal de entrada  $\in \mathcal{C}_e$ .
- ★ La respuesta del sistema es la señal de salida  $\in \mathcal{C}_s$ .
- ★ La acción del sistema se describe por un **operador**  $\mathcal{H}$  (toma una señal de entrada y la convierte en otra señal, de salida):

$$\mathcal{H} : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}_s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot]\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$



## Número de entradas y salidas

La relación entrada (única) a salida (única) o E/S es:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot]\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$

y es un sistema SISO (por sus siglas en inglés).

Hay sistemas MIMO (por sus siglas en inglés) con *múltiples entradas y múltiples salidas*.

**Ejemplo MIMO 1 Ducha:** 1) temperatura y 2) caudal del agua entrando al calefón, 3) caudal de gas e interesa la 4) temperatura del agua en la flor de la ducha (3 señales de entrada y 1 de salida).

**Ejemplo MIMO 2 Wi-Fi 802.11n:** Un router con un arreglo de varias antenas se comunica con uno (o más) dispositivos que tiene un arreglito de 2 antenas. Canal MIMO. También 4G, WiMax, etc.

# Sin y con memoria

**Sistema sin memoria:** la salida en cada instante depende de la entrada en ese mismo instante

**Sistema con memoria:** la salida en cada instante depende de la entrada en ese mismo instante y de las entradas *anteriores* (y/o *futuras*)

**Ejemplo 1:**  $y(t) = \frac{R_2 x(t)}{R_1 + R_2} \Rightarrow$  sin memoria

**Ejemplo 2:**  $y(t) = v_C(0)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-(t-\sigma)/RC} x(\sigma) d\sigma \Rightarrow$  con memoria

**Ejemplo 3:** Amplificador logarítmico (usado en radar)

$y(t) = K \log x(t) + C \Rightarrow$  sin memoria

# Lineales, no lineales

Se tratan de distinta manera según los sistemas sean *lineales* (SL) o *no lineales* (SNL).

Condiciones para **linealidad**:

1. **Homogeneidad**: Si  $x_1(t) = cx(t)$   $c \in \mathbb{R}$  e  $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$ ; entonces  $y_1(t) = \mathcal{H}\{cx(\cdot)\}(t) = c\mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) = cy(t)$ .
2. **Aditividad**: Para cualesquiera señales de entrada admisibles  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , las salidas respectivas son  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ . Luego si  $y(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot) + x_2(\cdot)\}(t)$  es la salida a la entrada  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ; resulta  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ .

$\mathcal{H}$  es lineal sii  $\mathcal{H}$  es homogéneo y aditivo.

Si un sistema no es lineal, entonces es no-lineal.

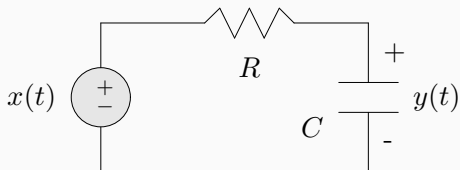
## Ejemplos lineales, no lineales

**Ejemplo 1:**  $y(t) = x^2(t)$  es no lineal.

**Ejemplo 2:** Un circuito con  $R$ ,  $L$ ,  $C$  ideales, constantes, *con condiciones iniciales nulas* y que no tengan valores que dependan de la corriente o tensión aplicadas es lineal.

**Ejemplo 3:** Una  $L$  con núcleo de hierro es casi seguro no-lineal (aunque para pequeñas amplitudes pueda considerarse lineal).

Recordar el Ejemplo 2 de Sistemas con Memoria.



$$y(t) = v_C(0)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-(t-\sigma)/RC} x(\sigma) d\sigma$$

El sistema no es homogéneo ni aditivo; no es lineal!!

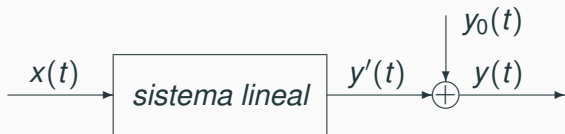


# Incrementalmente lineales

¿A qué se debe? Al término con las condiciones iniciales. Eso motiva

**Definición:** sistemas en los que la diferencia de las salidas para cualesquiera dos funciones de entrada es una función lineal.

Forma general de sistemas incrementalmente lineales:



# Invariancia en el tiempo

Sistema con VIC.

1. Se aplica  $x_1(t)$  y se obtiene  $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$ .
2. Si se aplica la misma señal en el instante  $t_0$ , se aplica una  $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ . La salida es  $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}(t)$ .
3. El sistema es **invariante en el tiempo** si se cumple que  $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ .
4. **Interpretación 1**: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordemente, no importa en qué instante se la aplica.
5. **Interpretación 2**: El sistema responde siempre igual no importa cuándo se aplique la misma señal de entrada.
6. Un sistema lineal, que es invariante en el tiempo, se denota abreviadamente SLIT.

**Ejemplo:** divisor resistivo con termistor; ¿Variante?

# Propiedades de Sistemas

**Ejemplo 1:**  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$

si  $x_1(\alpha) = x(\alpha - \tau)$  entonces  $y_1(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda - \tau) d\lambda$

por otro lado

$$\begin{aligned} y(t - \tau) &= \int_{-\infty}^{t-\tau} x(\lambda) d\lambda & \lambda = \alpha - \tau \rightarrow \alpha = \lambda + \tau \\ &= \int_{-\infty}^t x(\alpha - \tau) d\alpha \end{aligned}$$

$$y(t - \tau) = y_1(t) \quad \text{invariante en el tiempo}$$

**Ejemplo 2:** divisor resistivo con termistor; si cambia la temperatura a medida que transcurre el tiempo, cambia la ganancia del sistema. Lineal, variante con el tiempo

# Invariancia al desplazamiento

Sistema con VID.

1. Se aplica  $x_1[n]$  y se obtiene  $y_1[n] = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}[n]$ .
2. Si se aplica la misma señal desplazada en  $n_0$ , se aplica una  $x_2[n] = x_1[n - n_0]$ . La salida de denomina  $y_2[n] = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}[n]$ .
3. El sistema es **invariante al desplazamiento** si se cumple que  $y_2[n] = y_1[n - n_0]$ .
4. **Interpretación 1**: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordeamente, no importa en qué momento se la aplica.
5. **Interpretación 2**: El sistema responde siempre igual no importa cuándo se aplique la misma señal de entrada.
6. Un sistema lineal discreto, que es invariante al desplazamiento, se denota abreviadamente SLID.

## Sistemas variantes

Si no son invariantes, son *variantes*: SVT y SVD.

- El operador de un SVT cambia según el instante en que se aplica la señal.
- Por ejemplo, se debe denotar  $y[n] = \mathcal{H}_k\{x(\cdot)\}[n]$  indicando que se aplicó la secuencia  $x[\cdot]$  en el instante  $k$  y se observa su respuesta  $y[\cdot]$  en el instante  $n$ .

De manera similar para SLIT.

**Ejemplo 1:** Celular - enlaces ascendente (móvil a base) y descendente (base a móvil).

**Ejemplo 2:** Guiado - vehículo con masa variable por consumo de combustible  $\left(\text{recordar } F = \frac{d(m\vec{v})}{dt}\right)$ .

# Causalidad

**Intuición:** dado un cambio a la entrada, la respuesta al mismo aparece en la salida de un sistema *causal* solamente después del cambio en la señal de entrada.

- Sistemas físicos: son causales.
- VIC o VID con señales de VI que no son tiempo  $\Rightarrow$  sistemas *anticipativos* o *no-anticipativos*.
- En la computadora es fácil tener sistemas anticipativos.  
Por ejemplo:

$$y[n] = x[n - 1] + x[n] + x[n + 1]$$

o en imágenes.

**Ejemplo:**  $y[n] = x[-n]$

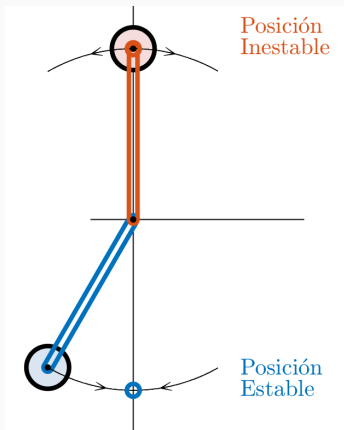
$$y[1] = x[-1] \quad y[0] = x[0] \quad y[-1] = x[1]$$

el pasado depende del futuro

**NO CAUSAL**

# Estabilidad 1

**Intuición:** Un sistema es estable si para una perturbación de entrada de pequeña amplitud, no se aparta demasiado del punto donde estaba y/o retorna a él, más o menos lentamente.



## Estabilidad 2

- Hay varios tipos de estabilidad (verán más en Instrumentación y control) asintótica, exponencial, uniforme, etc.
- Usaremos una forma simple: estabilidad en sentido entrada-acotada/salida-acotada, denotada EA/SA.
- **Estabilidad EA/SA – intuición:** para cualquier entrada acotada la salida también resulta acotada.
- Entrada acotada: significa que existe  $0 < K_e < \infty$  tal que  $|x[n]| < K_e, \forall n \in \mathbb{Z}$ .
- $x[n] = e^n$  no es acotada;  $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \phi)$  es acotada pues cualquier  $K_e \geq 1$  es una cota.
- **Estabilidad EA/SA:** Un sistema es estable EA/SA si al aplicar cualquier entrada acotada causa que exista un  $0 < K_s < \infty$  tal que  $|y[n]| < K_s, \forall n \in \mathbb{Z}$ ; o sea, que la salida sea acotada.
- Igualmente para sistemas continuos.



## Estabilidad – ejemplo discreto

**Ejemplo 3:**  $y[n]$ : balance de una cuenta;  $\alpha$ : tasa diaria de interés;  $x[n]$ : depósitos diarios. Entonces

$$y[n+1] = (1 + \alpha)y[n] + x[n]$$

Si comienzo el día cero con  $y[0] = y_0$  y nunca deposito nada,

$$y[1] = (1 + \alpha)y_0 + 0$$

$$y[2] = (1 + \alpha)y[1] = (1 + \alpha)^2 y_0$$

$$y[n] = y[1] = (1 + \alpha)^n y_0$$

... como  $\alpha$  es positivo, seré rico si vivo lo suficiente!

¿Un sistema así es estable?

# Combinación de sistemas

- Serie o cascada



- Paralelo



- Realimentación

