

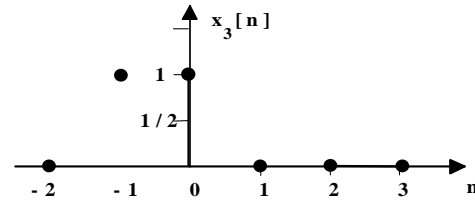
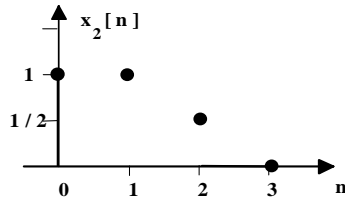
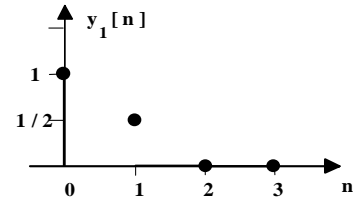
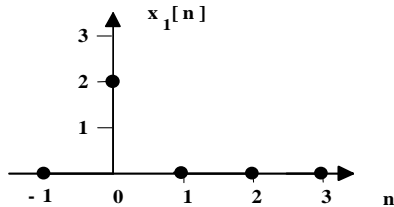
INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES - AÑO 2023

Práctica 3:

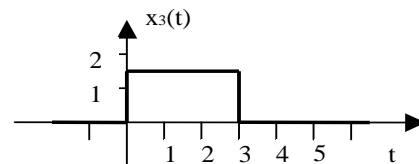
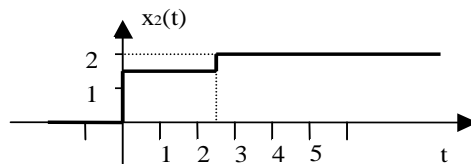
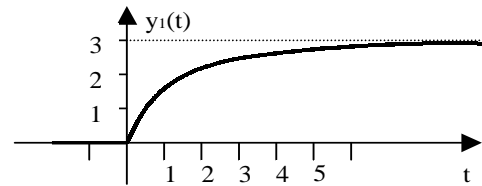
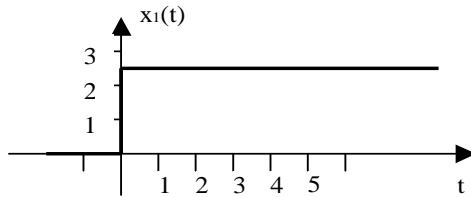
Sistemas Lineales. Respuesta al Impulso. Convolución.

1. Aprovechando la linealidad

a) Sea $S1$ un SLID cuya respuesta a la señal $x_1[n]$ es $y_1[n]$. Halle sus respuestas a $x_2[n]$ y a $x_3[n]$.



b) El SLIT $S2$ responde a $x_1(t)$ con $y_1(t) = 3(1 - e^{-2t})u(t)$. Halle sus respuestas a $x_2(t)$ y a $x_3(t)$.



c) Halle las respuestas impulsionales de los sistemas $S1$ y $S2$.

d) Halle la respuesta del sistema $S2$ a la señal $x_4(t) = t.u(t)$ en función de $y_1(t)$. Para ello trate de vincular $x_4(t)$ con $x_1(t)$.

Ayuda: En el ejercicio 3 de la práctica 2 demostramos que si se tienen dos SLIDs, S_1 y S_2 , conectados en cascada, el sistema S también resulta SLID. En este caso, se puede demostrar (luego veremos cómo) que al intercambiar el orden de S_1 y S_2 se obtiene el mismo sistema S . Esto puede serle de utilidad para los incisos c) y d).

2. Respuesta al impulso

En forma general, diremos que cuando a un sistema lineal discreto se le aplica a su entrada una delta de Kronecker en el instante k , $x[n] = \delta[n - k]$, se obtiene como respuesta la señal $\bar{h}[n, k]$.

a) En base al conocimiento de $\bar{h}[n, k]$, ¿cómo resulta la salida del sistema a una entrada cualquiera $x[n]$?

b) ¿Qué condición debe cumplir $\bar{h}[n, k]$ para que represente a un sistema lineal causal?

c) ¿Qué condición debe cumplir $\bar{h}[n, k]$ para que represente a un sistema sin memoria?

- d) ¿Qué condición debe cumplir $\bar{h}[n, k]$ para que represente a un sistema invariante al desplazamiento? ¿Cómo resulta la salida del sistema a una entrada cualquiera $x[n]$ en este caso?
- e) Para el caso

$$\bar{h}[n, k] = \begin{cases} 1 & -1 \leq n \leq k, \quad k = 0 \\ 1/k & k-1 \leq n \leq k+3, \quad k \neq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

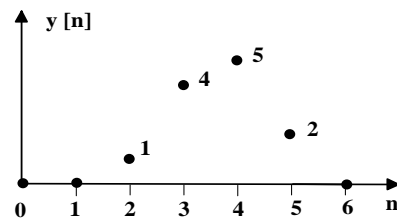
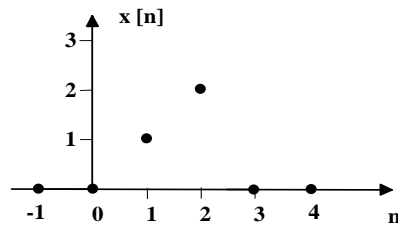
Calcule la secuencia de salida $y[n]$ para $-2 \leq n \leq 6$ cuando se aplica al sistema la entrada $x[n] = u[n] - u[n-3]$

3. Convolución de señales VIC

- a) Sea $y(t) = \{x * h\}(t)$ la convolución entre las señales $x(t)$ y $h(t)$
- ¿Cómo resulta la convolución entre $x(t-t_0)$ y $h(t)$, con $t_0 \in \mathbb{R}$?
 - ¿Cómo resulta la convolución entre $x(t)$ y $h(t-t_1)$, con $t_1 \in \mathbb{R}$?
 - ¿Cómo resulta la convolución entre $x(t-t_0)$ y $h(t-t_1)$, con $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$? Compruebe que este resultado verifica los dos casos anteriores.
- b) Calcular la convolución continua $y(t) = \{x * h\}(t)$ para los casos:
- $x(t) = \text{sinc}(t)$ y $h(t) = \delta(t)$
 - $x(t) = \square(t)$ y $h(t) = \square(t-1)$
 - $x(t) = \square(t)$ y $h(t) = \square(t/2)$
 - Una forma “ingeniosa” de resolver el inciso anterior sería escribir $\square(t/2) = \square(t+\frac{1}{2}) + \square(t-\frac{1}{2})$ y utilizar el resultado de 3bII. Verifique su resultado con este procedimiento.
 - $x(t) = 2\wedge(t+1)$ y $h(t) = \square(t-1)$
 - $x(t) = 2\wedge(t+1)$ y $h(t) = \delta(t-\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})$
 - Calcule $\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$ para el inciso anterior y compárela con el resultado del inciso 3bv. ¿A qué se debe este resultado?
 - $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ y $h(t) = e^{-\beta t} u(t)$ para $\alpha \neq \beta$ y para $\alpha = \beta$
- c) En los incisos anteriores, ¿qué largo tiene el soporte de la señal $y(t)$? ¿Cómo resulta en términos de los soportes de $x(t)$ y $h(t)$?
- d) Definimos el área bajo la curva de una señal $x(t)$ como $A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$. Demuestre que si $y(t) = \{x * h\}(t)$, entonces $A_y = A_x A_h$. Verifique los resultados de los incisos anteriores utilizando esta propiedad.

4. Convolución de señales VID

- a) Calcular la convolución discreta $y[n] = \{x * h\}[n]$ para los casos:
- $x[n] = 0,5^n u[n]$ y $h[n] = 4^n u[n-2]$
 - $x[n] = \delta[n+2]$ y $h[n] = a^{-n} u[-n]$ $0 < a < 1$
 - $x[n] = 1$ y $h[n] = \square_5[n]$
 - $x[n] = u[n]$ y $h[n] = n\square_7[n]$
 - $x[n] = \square_3[n]$ y $h[n] = \square_3[n-1]$
- b) Analice cómo queda el soporte de la señal $y[n]$ en términos de los soportes de $x[n]$ y $h[n]$.
- c) Enuncie propiedades similares a las de los incisos 3a y 3d, para el caso de señales VID.
- d) Obtener $h[n]$ (ó $x[n]$) si se conocen $y[n] = \{x * h\}[n]$ y $x[n]$ (ó $h[n]$), lo que se denomina “deconvolución”, es en general una tarea complicada. Existen, sin embargo casos sencillos donde la misma puede resolverse, por ejemplo en base a plantear un sistema de ecuaciones. En el siguiente gráfico, la señal $y[n]$ es la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$. Sabiendo que $h[-1] = 0$, calcular $h[n]$.



5. Promedio Móvil

El cálculo del promedio móvil de $M = 2N + 1$ muestras de una secuencia dada puede obtenerse aplicando esta secuencia a la entrada de un SLID cuya respuesta impulsional es:

$$h[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N \delta[n-m]$$

- Halle la ecuación en diferencias que describe al sistema.
- ¿Es el sistema causal? ¿Cómo es posible usar este sistema con datos “del mundo físico”?
- Obtenga la salida si la entrada es $x[n] = A + \sin(2\pi n/M)$; con $A \in \mathbb{R}$ constante.
- Analice (se recomienda utilizar MATLAB) qué ocurriría si la entrada es $x[n] = A + \sin(2\pi n/K)$; con $A \in \mathbb{R}$, y con K un número entero no necesariamente igual a $2N + 1$, por ejemplo $A = 1$, $N = 2$, $K = 3, 4, 6, 7, \dots$

6. Realización de Sistemas

Dadas las siguientes ecuaciones en diferencias/diferenciales que describen sistemas LID/LIT:

$$S1) 2y[n] + y[n-1] - 4y[n-3] = x[n] + 3x[n-5]$$

$$S2) y[n] = x[n] - x[n-1] + 2x[n-2] - 3x[n-4]$$

$$S3) \dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

$$S4) \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = x(t)$$

- Halle la realización de los sistemas en la forma directa I.
- Halle la realización de los sistemas en la forma directa II.
- En cada caso: ¿qué realización utiliza menor cantidad de bloques de retardo/integradores? ¿Y sumadores?
- Determine si los sistemas $S1$ y $S2$ son de tipo FIR o IIR.

7. Convoluciones en MATLAB

- En el ambiente de trabajo de MATLAB defina los vectores **x** y **h** correspondientes a señales discretas y calcule la convolución entre ellas ejecutando las siguientes sentencias:

```
N1 = -20; N2 = 20; n = [N1:N2];
x = zeros(size(n)); x((n>=-5)&(n<=5)) = 1;
h = zeros(size(n)); h((n>=-9)&(n<=9)) = [[1:1:10] [9:-1:1]];
n2 = [2*n(1):2*n(end)]; y = conv(x,h);
```

- Grafique utilizando el comando **stem** (tenga en cuenta que debería hacer **stem(n,x)**, **stem(n,h)** y **stem(n2,y)**). Recuerde que puede poner las tres gráficas en una misma figura utilizando el comando **subplot**.
- Pruebe qué sucede al modificar los valores de $N1$ y $N2$.

III. Podría desplazar la señal x , mediante las sentencias $K = 5$; $x = \text{circshift}(x, [0, K]);$. Vuelva a calcular la convolución en este caso e interprete sus resultados. Pruebe qué sucede con diferentes valores de desplazamiento K .

b) Con la misma idea del inciso anterior se podría intentar calcular las respuestas a las excitaciones x_1 , x_2 y x_3 de un sistema con respuesta impulsional h , mediante las siguientes sentencias:

```
N1 = -60; N2 = 60; n = [N1:N2];
h = zeros(size(n)); h(n>0) = exp(-.2*n(n>0));
x1 = zeros(size(n)); x1((n>=0) & (n<=10)) = 1;
x2 = zeros(size(n)); x2((n>=0)) = 1;
x3 = zeros(size(n)); x3((n>=0)) = 1; x3((n>=20)) = 1.5;
y1 = conv(x1,h); y2 = conv(x2,h); y3 = conv(x3,h);
n2 = [2*n(1):2*n(end)];
```

Interprete qué ocurre en y_2 a partir de $n_2 = 61$ (recuerde que conv resuelve la convolución entre secuencias de largo finito).

c) Verificar el resultado del problema 4d.

Algunos resultados

2. e) Para $-2 \leq n \leq 6$, $y[n] = \{0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$
3. b)
 - I. $y(t) = \text{sinc}(t)$
 - II. $y(t) = \bigwedge(t-1)$
 - III. $y(t) = (t+3/2) \bigcap(t+1) + \bigcap(t) + (3/2-t) \bigcap(t-1)$
 - IV. $y(t) = \bigwedge(t+1/2) + \bigwedge(t-1/2)$
 - V. $y(t) = (t+3/2)^2 \bigcap(t+1) + (3/2-2t^2) \bigcap(t) + (t-3/2)^2 \bigcap(t-1)$
 - VI. $y(t) = 2 \bigwedge(t+1/2) - 2 \bigwedge(t-1/2)$
 - VIII. $(\beta - \alpha)^{-1}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$ si $\alpha \neq \beta$; $t e^{-\alpha t}u(t)$ si $\alpha = \beta$
4. a)
 - I. $y[n] = \frac{8}{7} (4^n - 8.0, 5^n)u[n-2]$
 - II. $y[n] = \frac{a^{-n}}{a^2} u[-n-2]$
 - III. $y[n] = 5$
 - IV. $y[n] = \left(\sum_{k=-3}^n k \right) (u[n+3] - u[n-3]) = \frac{(n+4)(n-3)}{2} (u[n+3] - u[n-3])$
 - V. $y[n] = \bigwedge_3[n-1]$
- d) $h[n] = \delta[n-1] + 2 \delta[n-2] + \delta[n-3]$
5. c) $y[n] = A$