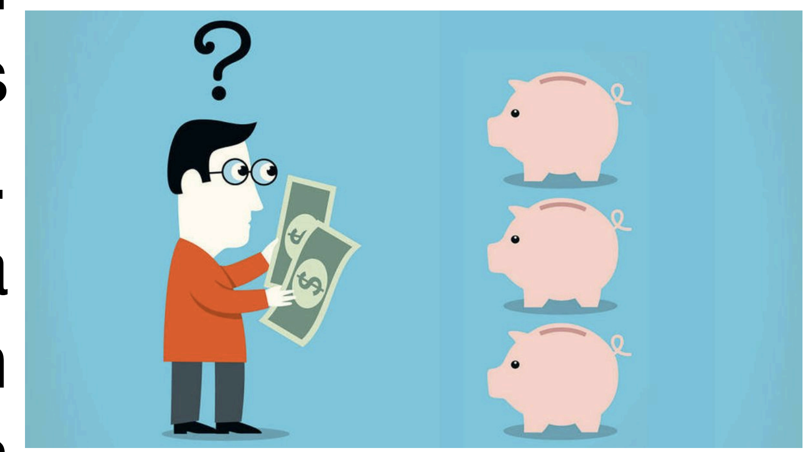
# PROGRAMACIÓN ENTERA

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

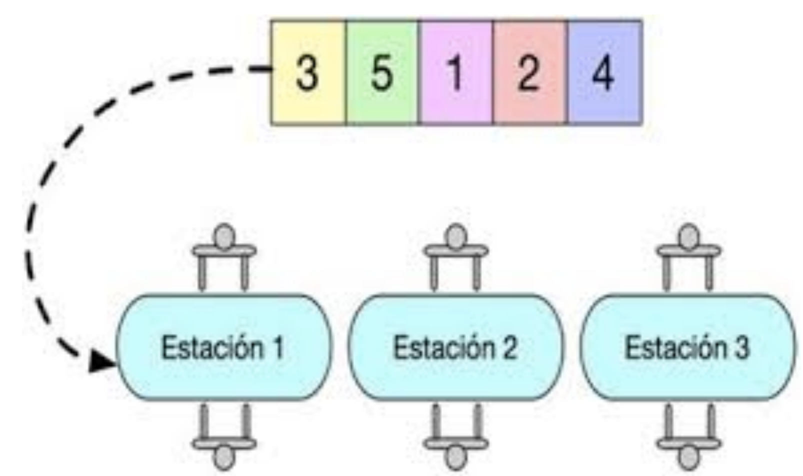
# Programación Entera

- Las aplicaciones de programación lineal entera (PLE) caen dentro de dos categorías: **directa** y **transformada**. En la categoría ***directa***, la naturaleza de la situación impide la asignación de valores fraccionarios a las variables del modelo. Por ejemplo, el problema puede implicar la determinación de si se emprende o no un proyecto (variable binaria), o la determinación del número óptimo de máquinas necesarias para realizar una tarea (variable general entera)



# Programación Entera

- En la categoría transformada se utilizan variables enteras auxiliares para convertir analíticamente situaciones insolubles en modelos que pueden resolverse por medio de algoritmos de optimización disponibles. Por ejemplo, en la secuencia de dos trabajos, *A* y *B*, en una sola máquina, el trabajo *A* puede preceder al trabajo *B* o viceversa.



# Algoritmos de Programación Entera

Los algoritmos de PLE se basan en la explotación del tremendo éxito computacional de la PL. La estrategia de estos algoritmos implica tres pasos.

**Paso 1.**

Desahogue el espacio de soluciones del PLE al eliminar la restricción entera en todas las variables enteras y reemplazar cualquier variable binaria $y$ con el intervalo continuo $0 \leq y \leq 1$. El resultado del desahogo es una programación lineal.

**Paso 2.**

Resuelva la PL, e identifique su óptimo continuo.

**Paso 3.**

Comenzando desde el punto óptimo continuo, agregue restricciones especiales que modifiquen iterativamente el espacio de soluciones de PL de modo que finalmente dé un punto extremo óptimo que satisfaga los requerimientos enteros.

Se desarrollaron dos métodos generales para generar las restricciones especiales en el paso 3.

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

**2.** Método de plano de corte

# Algoritmos de Programación Entera

Los algoritmos de PLE se basan en la explotación del tremendo éxito computacional de la PL. La estrategia de estos algoritmos implica tres pasos.

**Paso 1.**

Desahogue el espacio de soluciones del PLE al eliminar la restricción entera en todas las variables enteras y reemplazar cualquier variable binaria $y$ con el intervalo continuo $0 \leq y \leq 1$. El resultado del desahogo es una programación lineal.

**Paso 2.**

Resuelva la PL, e identifique su óptimo continuo.

**Paso 3.**

Comenzando desde el punto óptimo continuo, agregue restricciones especiales que modifiquen iterativamente el espacio de soluciones de PL de modo que finalmente dé un punto extremo óptimo que satisfaga los requerimientos enteros.

Se desarrollaron dos métodos generales para generar las restricciones especiales en el paso 3.

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

**2.** Método de plano de corte

# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B): El primer algoritmo de ramificación y acotamiento fue desarrollado en 1960 por A. Land y G. Doig para el problema general de PLE combinada o pura.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \text{ enteras no negativas}$$

# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B): El primer algoritmo de ramificación y acotamiento fue desarrollado en 1960 por A. Land y G. Doig para el problema general de PLE combinada o pura.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \text{ enteras no negativas}$$

**Paso 1.**

Desahogue el espacio de soluciones del PLE al eliminar la restricción entera en todas las variables enteras y reemplazar cualquier variable binaria *y* con el intervalo continuo $0 \leq y \leq 1$. El resultado del desahogo es una programación lineal.

# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B): El primer algoritmo de ramificación y acotamiento fue desarrollado en 1960 por A. Land y G. Doig para el problema general de PLE combinada o pura.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \text{ enteras no negativas}$$

**Paso 2.**

Resuelva la PL, e identifique su óptimo continuo.

# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

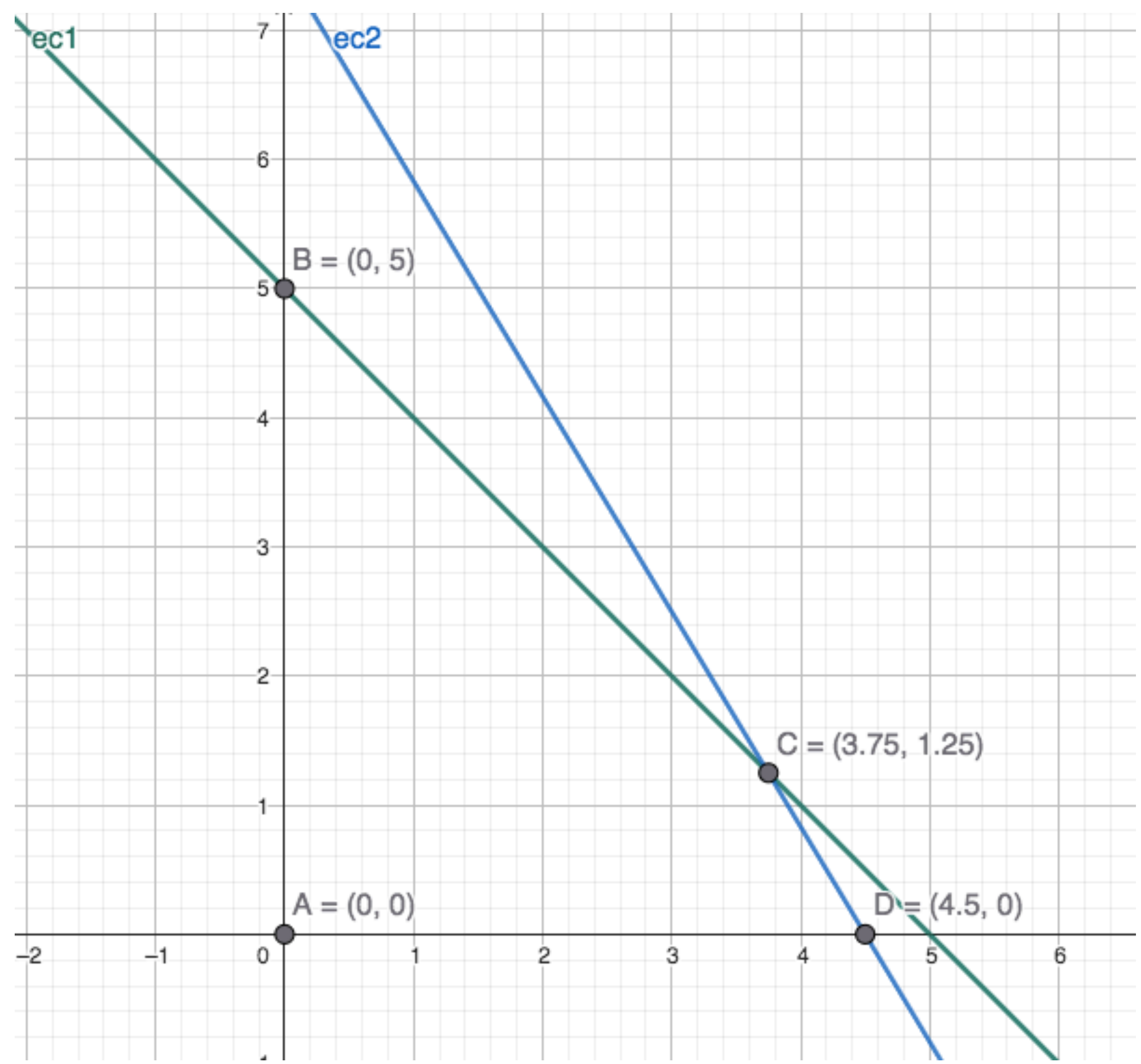
$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \text{ enteras no negativas}$$

| P.E | x1,x2 | Z=5x1 + 4x2 |
|---|---|---|
| A | 0,0 | 0 |
| B | 0,5 | 20 |
| C | 3.75, 1.25 | 23.75 |
| D | 4.5,0 | 22.5 |



# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

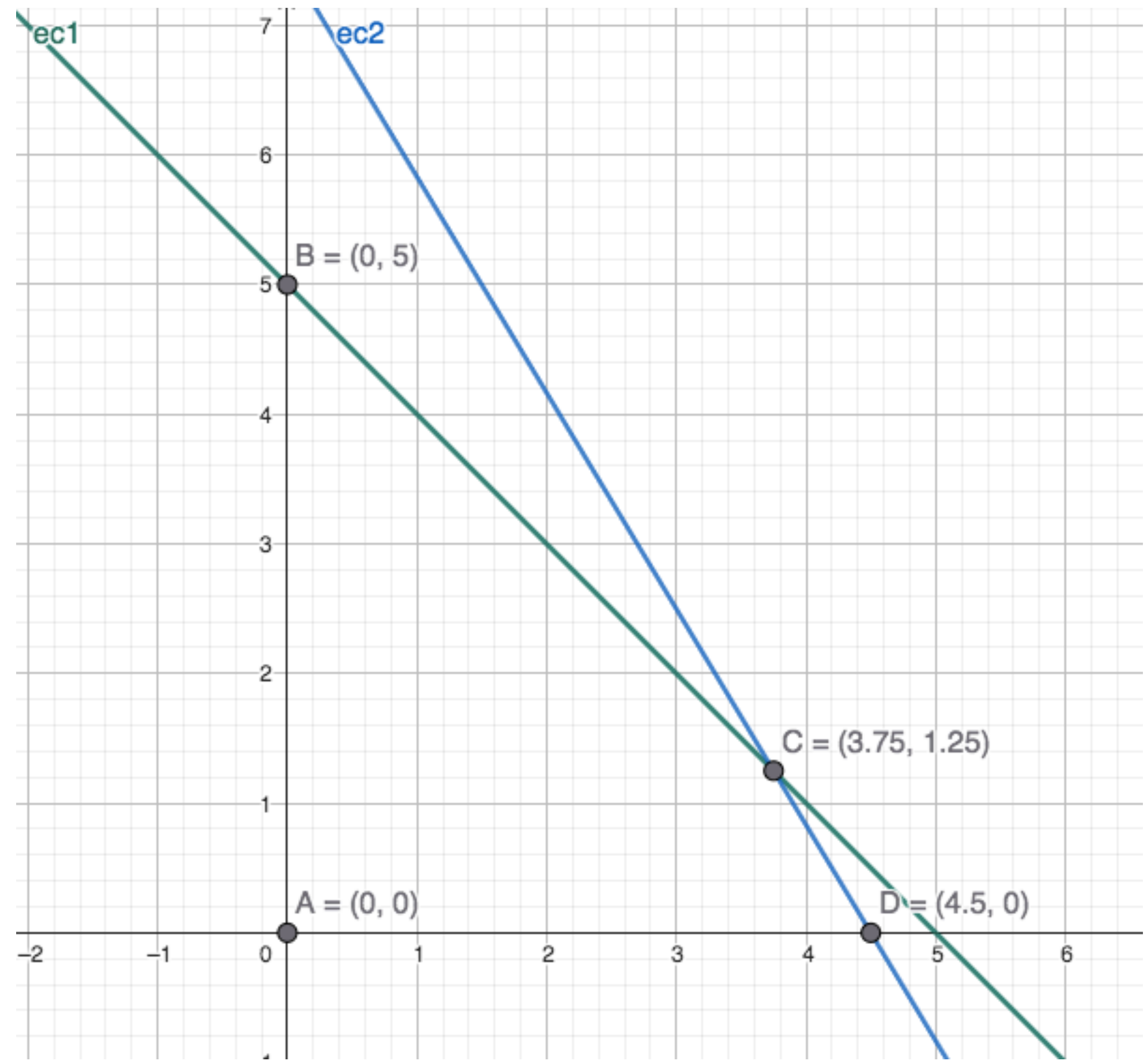
$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \text{ enteras no negativas}$$

| P.E | x1,x2 | Z=5x1 + 4x2 |
|---|---|---|
| A | 0,0 | 0 |
| B | 0,5 | 20 |
| C | 3.75, 1.25 | 23.75 |
| D | 4.5,0 | 22.5 |

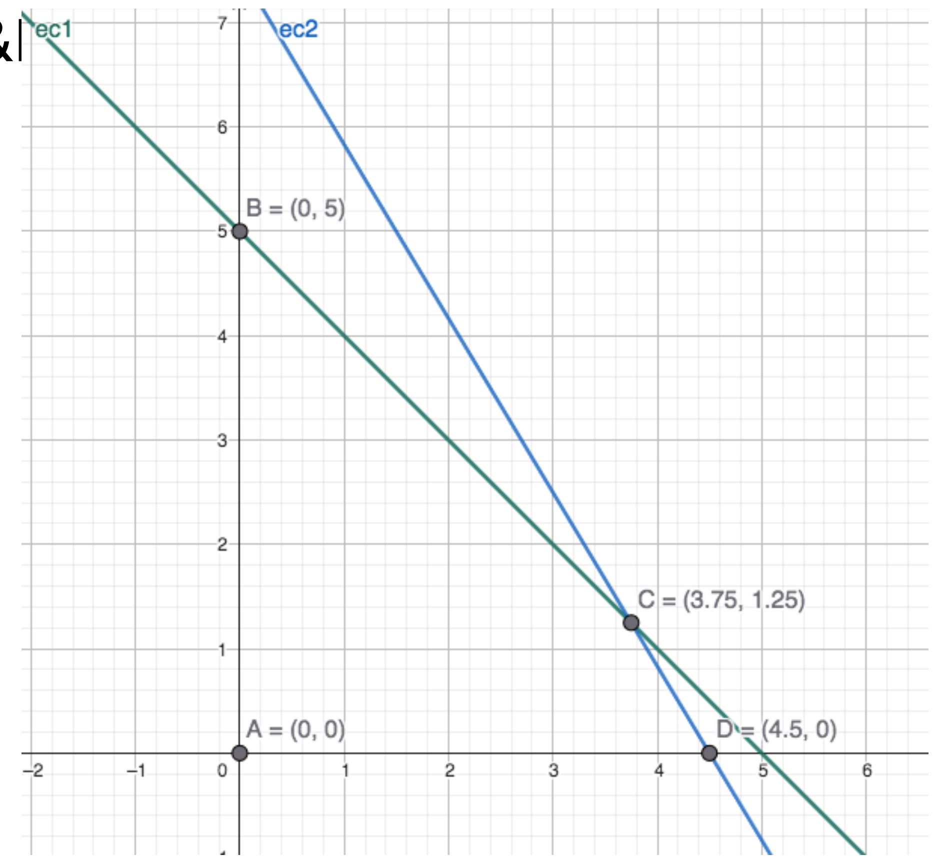



Como la solución óptima de PL1 no satisface las restricciones enteras, el espacio de soluciones se subdivide de una manera sistemática que finalmente localiza el óptimo de la PLE. En primer lugar, el algoritmo de ramificación y acotamiento selecciona una variable entera cuyo valor óptimo en PL1 no es entero.

# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

| P.E | x1,x2 | Z=5x1 + 4x2 |
|---|---|---|
| A | 0,0 | 0 |
| B | 0,5 | 20 |
| C | 3.75, 1.25 | 23.75 |
| D | 4.5,0 | 22.5 |




En este ejemplo, tanto $x_1$ como $x_2$ califican. Seleccionando $x_1 (= 3.75)$ arbitrariamente, la región $3 < x_1 < 4$ del espacio de soluciones de PL1 contiene valores no enteros de $x_1$, y por lo tanto puede ser eliminada. Esto equivale a reemplazar el PL1 original con dos problemas de PL nuevos.

Espacio de PL2 = Espacio de PL1 + ($x_1 \leq 3$)

Espacio de PL3 5 Espacio de PL1 + ($x_1 \leq 4$)

# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

En este ejemplo, tanto $x_1$ como $x_2$ califican. Seleccionando $x_1$(= 3.75) arbitrariamente, la región $3 < x_1 < 4$ del espacio de soluciones de PL1 contiene valores no enteros de $x_1$, y por lo tanto puede ser eliminada. Esto equivale a reemplazar el PL1 original con dos problemas de PL nuevos.

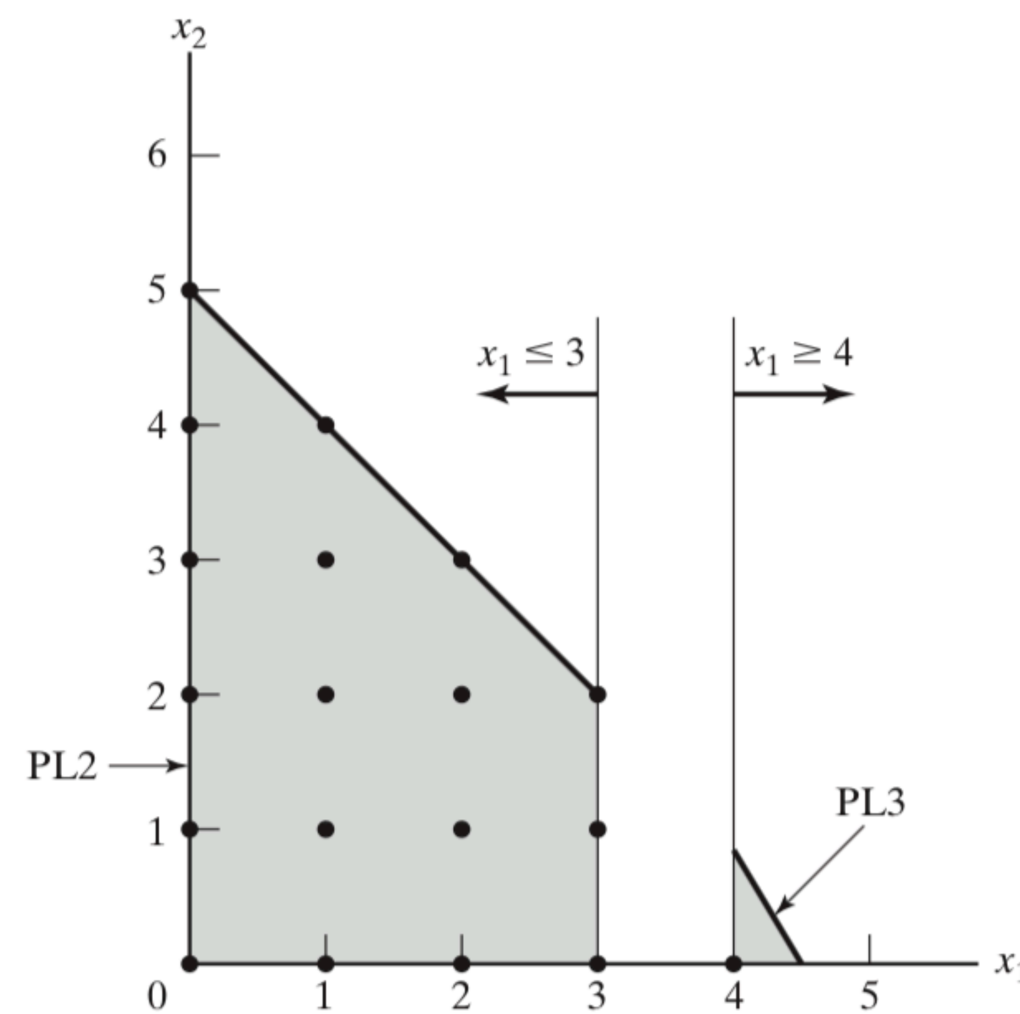
Espacio de PL2 = Espacio de PL1 + ($x_1 \leq 3$)

Espacio de PL3 5 Espacio de PL1 + ($x_1 \leq 4$)

Las nuevas restricciones, $x_1 \leq 3$ y $x_1 \leq 4$, son mutuamente excluyentes, de modo que el PL2 y el PL3 en los nodos 2 y 3 deben tratarse como programaciones lineales distintas, como se muestra en la figura.

Esta dicotomización da lugar al concepto de **ramificación** en el algoritmo de ramificación y acotamiento.

Es este caso, $x_1$ se llama **variable de ramificación**.



# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

La PLE óptima queda *o* en PL2 *o* en PL3. Por consiguiente, ambos subproblemas deben ser examinados. Arbitrariamente examinamos primero PL2

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

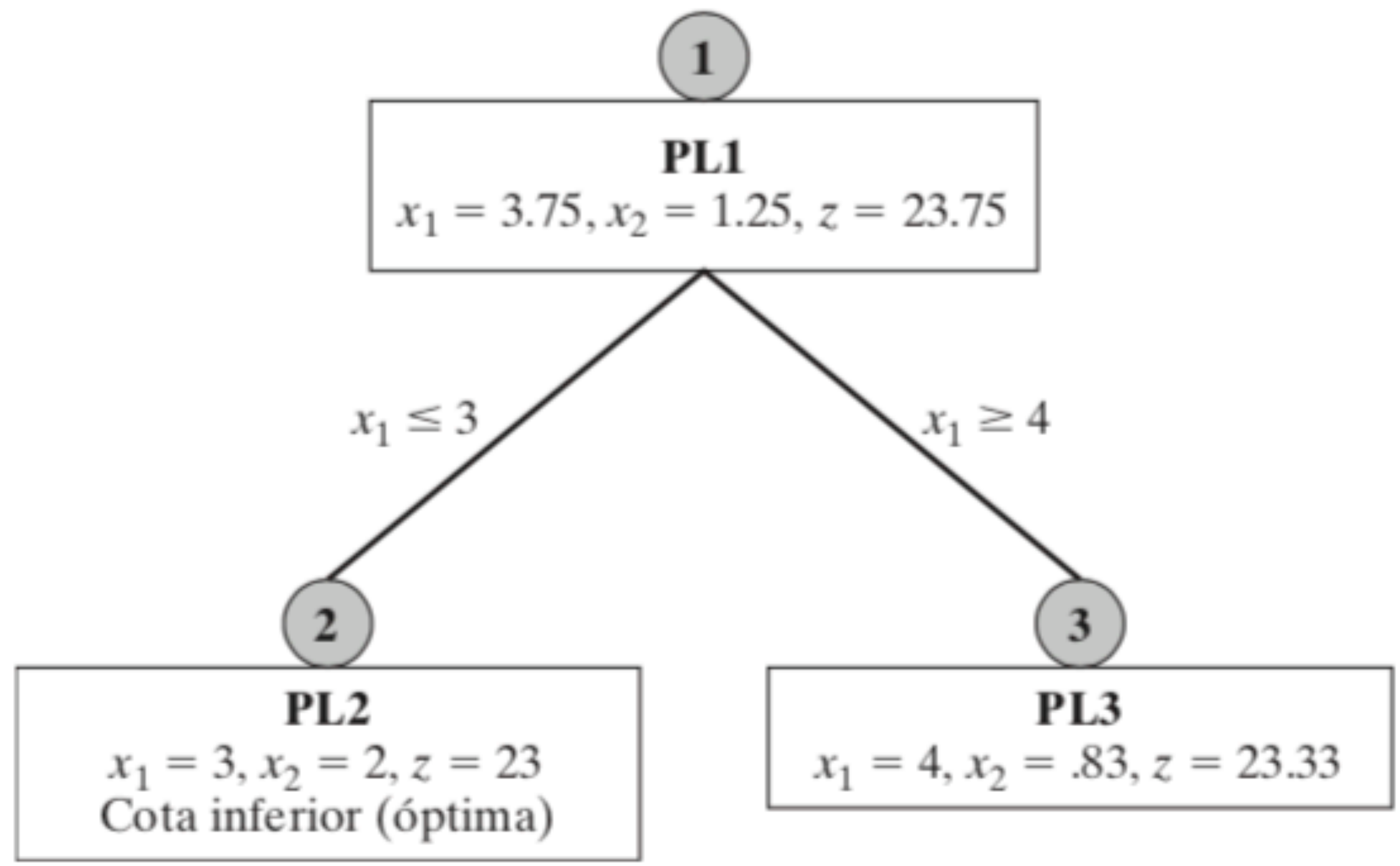
# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

La PLE óptima queda *o* en PL2 *o* en PL3. Por consiguiente, ambos subproblemas deben ser examinados. Arbitrariamente examinamos primero PL2

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



# Algoritmos de Programación Entera

**1.** Método de ramificación y acotación(B&B)

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$