06-ESTACIONARIEDAD

Emiliano Pérez Caullieres

2022-09-27

Contents

Chapter 1

Mínimos Cuadrados Ordinarios

1.1 El problema

Recordando que el método de MCO resulta en encontrar la combinación de valores de los estimadores de los parámetros $\hat{\beta}$ que permita minimizar la suma de los residuales (estimadores de los términos de erro ε) al cuadrado dada por:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \mathbf{X}_i'\hat{\beta})^2$$

Donde $\hat{\beta}$ denota el vector de estimadores $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_K$ y dado que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)'(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \mathbf{e}'\mathbf{e}$, el problema del método de MCO consiste en resolver el problema de optimización:

$$\begin{aligned} Minimizar_{\hat{\beta}} S(\hat{\beta}) &= Minimizar_{\hat{\beta}} \mathbf{e}'\mathbf{e} \\ &= Minimizar_{\hat{\beta}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \end{aligned}$$

Expandiendo la expresión $\mathbf{e}'\mathbf{e}$ obtenemos:

$$\mathbf{e}'\mathbf{e} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\beta} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta}$$

De esta forma obtenemos que las condiciones necesarias de un mínimo son:

$$\frac{\partial S(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{0}$$

Y se pueden despejar las *ecuaciones normales* dadas por:

Debido a que el objetivo es encontrar la matriz $\hat{\beta}$ despejamos:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

1.2 Estimación R

Para la estimación utilizaremos el paquete "BatchGetSymbols". Este paquete nos permitirá descargar información acerca de la bolsa de valores internacional.

1.2.1 Dependencias

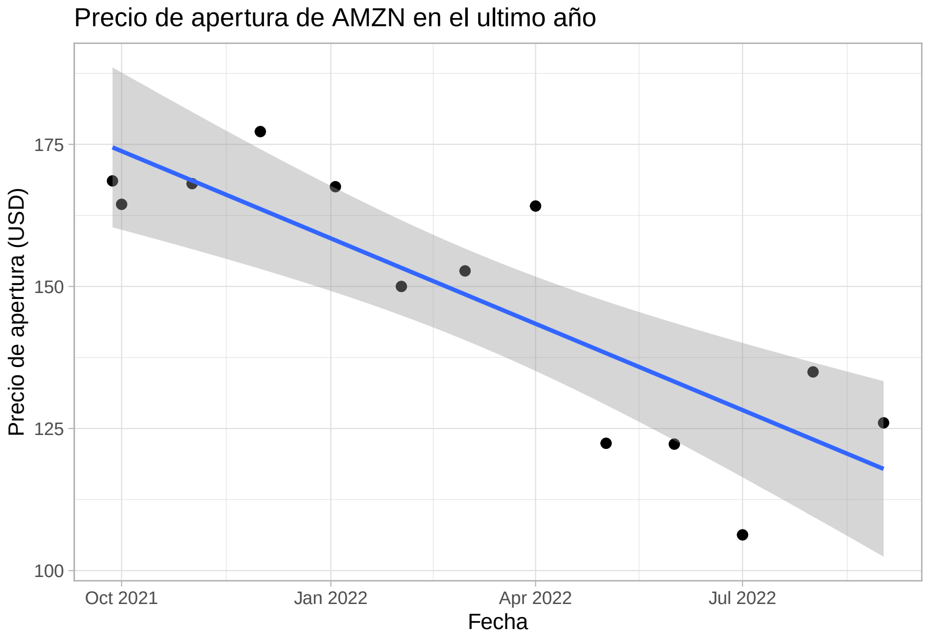
```
#install.packages("pacman")
#pacman nos permite cargar varias librerias en una sola línea
library(pacman)
pacman::p_load(tidyverse,BatchGetSymbols,ggplot2, lubridate)
```

1.2.2 Descarga de los valores

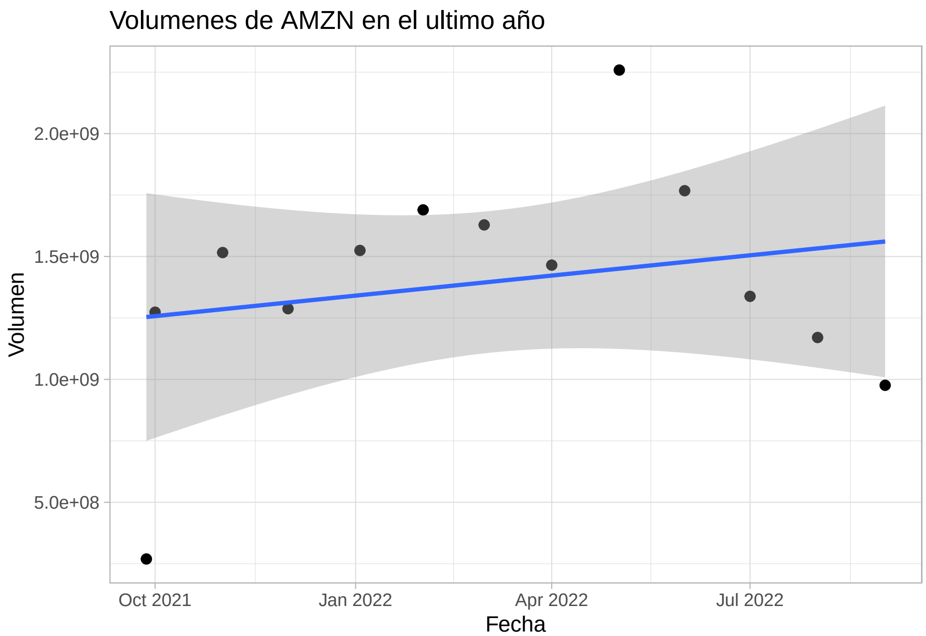
```
#Primero determinamos el lapso de tiempo
pd<-Sys.Date()-365 #primer fecha
pd
#> [1] "2021-09-27"
ld<-Sys.Date() #última fecha
ld
#> [1] "2022-09-27"
#Intervalos de tiempo
int<-"monthly"
#Datos a elegir
dt<-c("AMZN")

#Descargando los valores
?BatchGetSymbols()
data<- BatchGetSymbols(tickers = dt,
                       first.date = pd,
                       last.date = ld,
                       freq.data = int,
                       do.cache = FALSE,
                       thresh.bad.data = 0)

#Generando data frame con los valores
```

```
data_precio<-data$df.tickers
colnames(data_precio)
#>  [1] "ticker"             "ref.date"
#>  [3] "volume"             "price.open"
#>  [5] "price.high"         "price.low"
#>  [7] "price.close"        "price.adjusted"
#>  [9] "ret.adjusted.prices" "ret.closing.prices"
```

```
sp_precio<-ggplot(data_precio, aes(x=ref.date, y=price.open))+geom_point(size =2, colour = "black
sp_precio
```




```
sp_volumen<-ggplot(data_precio, aes(x=ref.date, y=volume))+geom_point(size =2, colour = "black")+
sp_volumen
```



1.2.4 Regresión lineal que optiene los coeficientes $\hat{\beta}$

```
#datos estadísticos
summary(data_precio[c("price.open","volume")])
#>    price.open        volume
#>  Min.   :106.3   Min.   :2.694e+08
#>  1st Qu.:126.0   1st Qu.:1.273e+09
#>  Median :152.7   Median :1.465e+09
#>  Mean   :148.1   Mean   :1.397e+09
#>  3rd Qu.:167.6   3rd Qu.:1.628e+09
#>  Max.   :177.2   Max.   :2.258e+09
#análisis de regresión lineal lm() y=precio,x=fecha
reg_tiempo_precio<-lm(price.open~ref.date, data=data_precio)
#¡Siempre se pone dentro de lm() la variable dependiente primero y luego la independie
summary(reg_tiempo_precio)
#>
#> Call:
#> lm(formula = price.open ~ ref.date, data = data_precio)
#>
#> Residuals:
#>     Min      1Q  Median      3Q     Max
#> -21.955  -9.357  -0.544   9.431  20.717
#>
#> Coefficients:
```

```
#>               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#> (Intercept) 3328.34629  631.35702   5.272 0.000264 ***
#> ref.date      -0.16690    0.03313  -5.037 0.000380 ***
#> ---
#> Signif. codes:
#> 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#>
#> Residual standard error: 13.2 on 11 degrees of freedom
#> Multiple R-squared:  0.6976, Adjusted R-squared:  0.6701
#> F-statistic: 25.37 on 1 and 11 DF,  p-value: 0.0003796

#análisis de regresión lineal lm() y=volumen,x=fecha
reg_tiempo_volumen<-lm(volume~ref.date, data=data_precio)
summary(reg_tiempo_volumen)
#>
#> Call:
#> lm(formula = volume ~ ref.date, data = data_precio)
#>
#> Residuals:
#>        Min         1Q     Median         3Q        Max
#> -984384732 -167015119   42626028  234203568  807994488
#>
#> Coefficients:
#>               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#> (Intercept) -1.588e+10  2.260e+10  -0.702    0.497
#> ref.date     9.064e+05  1.186e+06   0.764    0.461
#>
#> Residual standard error: 472300000 on 11 degrees of freedom
#> Multiple R-squared:  0.05043,    Adjusted R-squared:  -0.03589
#> F-statistic: 0.5842 on 1 and 11 DF,  p-value: 0.4608
```

1.3 Ejercicio

El objetivo de este ejrcicio es simplemente que indiquen y modifiquen los errores en el código. Así pues, deberán descomentar -*quitar las #antes del código*- para empezar el ejercicio.

1.3.1 1

El objetivo de este código es explicar la variable **"volume"** con la variable **"price.high"**.

```
#reg_tiempo_ej1<-lm(price.high~volume, data=data_precio)
#sumary(reg_tiempo_ej1)
```

1.3.2 2

El objetivo de este código es explicar la variable **"volume"** con la variable **"price.low"**.

```
#reg_tiempo_ej2<-lm(price.low~volume, data=data_precio)
#summary(reg_tiempo_ej1)
```

1.3.3 3 (opcional)

El objetivo de este ejercicio es descargar los valores del stock de Tesla *BMV: TSLA* en los últimos *dos años*.

```
#dt_ej3<-("TSLA")
#pdej<-Sys.Date()-(365*3) #primer fecha
#pdej
#Descargando los valores
#dataej3<- BatchgetSymbols(tickers = dt_ej3,
                       #first.date = pdej,
                       #last.date = ld,
                       #freq.data = int,
                       #do.cache = FALSE,
                       #thresh.bad.data = 0)

#Generando data frame con los valores
#data_precio_ej2<-dataej3$df.tickers
#1colnames(data_precio_ej2)
```

Chapter 2

Máxima Verosimilitud

2.1 El problema

Recordemos que dado $f(y_i|\mathbf{x}_i)$ la función de densidad condicional de y_i dado $\mathbf{x}_i$. Sea θ un conjunto de parámetros de la función. Entonces la función de densidad conjunta de variables aleatorias independientes $\{y_i : y_i \in \mathbb{R}\}$ dados los valores $\{\mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^K\}$ estará dada por:

$$\Pi_{i=1}^{n} f(y_i|\mathbf{x}_i;\theta) = f(y_1, y_2, \dots, y_n|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n;\theta) = L(\theta) \tag{2.1}$$

A la ecuación (**??**) se le conoce como ecuación de verosimilitud. El problema de máxima verosimilitud entonces será:

$$\max_{\theta\in\Theta} \Pi_{i=1}^{n} f(y_i|\mathbf{x}_i;\theta) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta) \tag{2.2}$$

Dado que el logaritmo natural es una transformación monotona, podemos decir que el problema de la ecuación (**??**) es equivalente a:

$$\max_{\theta\in\Theta} lnL(\theta) = \max_{\theta\in\Theta} ln\Pi_{i=1}^{n} f(y_i|\mathbf{x}_i;\theta) = \max_{\theta\in\Theta} \sum_{i=1}^{n} lnf(y_i|\mathbf{x}_i;\theta) \tag{2.3}$$

Para solucionnar el problema se tiene que determinar las condicones de primer y segundo orden, las cuales serán:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} lnL(\theta) = \nabla lnL(\theta) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta} lnL(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} lnL(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} lnL(\theta') = H(\theta) \tag{2.5}$$

La solución estará dada por aquel valor de $\hat{\theta}$ que hace:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} lnL(\hat{\theta}) = 0$$

A su vez, la varianza será aquella que resulta de:

$$Var[\hat{\theta}|\mathbf{X}] = \left(-\mathbb{E}_{\hat{\theta}}[H(\theta)]\right)^{-1}$$

2.2 Estimación y simunlación

2.2.1 Lanzar una moneda

```
set.seed(1234)#esto sirve para siempre generar los mismos numeros aleatorios
#rbinom(numero observaciones,numero de ensayos,probabilidad de exito en cada ensayo)
cara<-rbinom(1,100,0.5)
cara#esto nos dice de los 100 ensayos cuantos fueron cara
#> [1] 47
sol<-100-cara
sol
#> [1] 53


#Ahora definiremos la función que encontrará la función de verosimilutud para determin
#
verosimilitud <- function(p){
  dbinom(cara, 100, p)
}

#si suponemos que la probabilidad sesgada de que caiga cara es 40%
prob_sesgada<-0.4
#es posible calcular la función de que salga cara
verosimilitud(prob_sesgada)
#> [1] 0.02919091
#ahora es posible generar una función de verimilitud negativa
#para maximizar el valor de la verosimilitud
neg_verosimilitud <- function(p){
  dbinom(cara, 100, p)*-1
}
neg_verosimilitud(prob_sesgada)
#> [1] -0.02919091
# unamos la función nlm() para maximizar esta función no linear
#?nlm()
nlm(neg_verosimilitud,0.5,stepmax=0.5)#se pone un parametro porque sabemos que hay un 
#> $minimum
```

```
#> [1] -0.07973193
#>
#> $estimate
#> [1] 0.47
#>
#> $gradient
#> [1] 1.589701e-10
#>
#> $code
#> [1] 1
#>
#> $iterations
#> [1] 4
```

Si bien el ejercicio anterior es un tanto repetitivo debido a que sabemos que hay un 50% de que caiga una moneda de un lado o otro. Esto ejemplifica la manera en la que se utiliza el metodo de maximización de máxima verosimilitud.

Chapter 3

Método Generalizado de Momentos (MGM)

3.1 El problema

Retomemos el modelo de regresión lineal tal que:

$$y_i = X_i\beta + u_i \tag{3.1}$$

Tomando en cuenta los principios de ortogonalidad ($E(Z_i u_i) = 0$) y ($rankE(Z_i^{'} X_i) = 0$) sabemos que β es el único vector de $N \times 1$ que resuelve las condiciones de momento de determinada población. En otras palabras, $E[z_i^{'}(y_i - x_i\beta)] = 0$ es una solución y $E[z_i^{'}(y_i - x_i\beta)] \neq 0$ *NO* es una solución. Debido a que la media muestral son estimadores consistentes de momentos de una población, se puede:

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} z_i^{'}(y_i - x_i\beta) = 0 \tag{3.2}$$

Asumiendo que la ecuación (**??**) tiene L ecuaciones lineales y K coeficientes β desconocidos y $K = L$, entonces la matriz $\sum_{i=1}^{N} z_i^{'} x_i$ debe ser no singular para encontrar los coeficientes de la siguiente manera.

$$\hat{\beta} = N^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} z_i^{'} x_i\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} z_i^{'} y_i\right] \tag{3.3}$$

Para simplificar (**??**) se puede nombrar Z juntando z_i N veces para crear una matriz de tamaño $NG \times L$. Lo mismo hacemos con X juntando x_i para obtener una de $NG \times K$ y Y obteniendo una $NG \times 1$. Obteniendo:

$$\hat{\beta} = [Z^{'}X]^{-1}[Z^{'}Y] \tag{3.4}$$

Es importante tomar en cuenta cuando el caso en el que hay más ecuaciones lineales que coeficientes β; es decir, $L \geq K$. En estos casos es muy probrable que no haya solución, por lo que mejor que se puede estimar es pones la ecuación (**??**), tan pequeña como sea posible. Por lo mismo el paso que nos lleva a la ecuación (**??**), debe eliminarse N^{-1}. El objetivo:

$$\min_{\beta} \left[\sum_{i=1}^{N} z_i^{'} x_i \beta\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} z_i^{'} y_i \beta\right] \tag{3.5}$$

Así pues nombramos a W como una matriz simétrica de $W \times W$ donde se genera la variable b que debemos minimizar que sustituye a β creando una función cuadrática en la ecuación (**??**).

$$\min_{b} \left[\sum_{i=1}^{N} z_i^{'} x_i b\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} z_i^{'} y_i b\right] \tag{3.6}$$

$$\therefore \hat{\beta} = [X^{'}Z\hat{W}Z^{'}X]^{-1}[X^{'}Z\hat{W}Z^{'}Y] \tag{3.7}$$

Sin embargo, $X^{'}Z\hat{W}Z^{'}X$ debe ser no singular para que haya una solución. Para esto se asume que $\hat{W}$ tiene un limite de probabilidad no singular. Esto se describe como $\hat{W} \overset{p}{\rightarrow} W$ y $N \rightarrow W\infty$ donde W no es aleatorio, es una matriz positiva definida simétrica de $L \times L$.

Chapter 4

CAPITAL ASSET PRICING MODEL (CAPM)

4.1 El problema

Una vez que hemos establecido la manera en la que se pueden estimar algunos valores –como las regresiones lineales y el método de máxima verosimilitud–, además de la naturaleza de los retornos de algunos activos en el capítulo 4, es posible comenzar a hablar de maneras en la que se pueden estimar los valores futuros de los rendimientos de activos y –de esta manera– poder tomar mejores decisiones de inversiones. Por ello, hablaremos del modelo de **Capital Asset Pricing Model**. El modelo es muy sencillo y pretende estimar su rentabilidad esperada en función del **riesgo sistemático**. Por lo mismo, en este modelo se utilizan los valores de los precios de los activos a lo largo del tiempo y utiliza la intuición con la que derivamos la ecuación lineal con los Mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

$$R_{jt} - Rft = \alpha_j + \beta_j(R_{mt} - R_{ft}) + u_{jt} \tag{4.1}$$

En la ecuación (**??**)

- R_{jt} es el retorno del portafolio j en el tiempo t
- R_{ft} es el retorno de un bono sin riesgo gubernamental en un año. **Parecido a los CETES**.
- R_{mt} es el retorno en un portafolio de mercado.
- u_{jt} es el retorno en un portafolio de mercado.

- α_j, β_j son los coeficientes que queremos obtener.

De esta manera, α_j es el coeficiente que más nos interesa debido a que queremos ver si el activo supera o no el index del mercado con base en el activo fijo.

Si α_j es positivo entonces sabemos que el retorno tiene buenos rendimiendtos y uno negativo significa que no. Por tanto $H_0 : \alpha_j = 0$

4.2 Estimación R

Para la estimación utilizaremos el paquete "BatchGetSymbols". Este paquete nos permitirá descargar información acerca de la bolsa de valores internacional.

4.3 ESTIMACIÓN

4.3.1 Dependencias

```
#install.packages("pacman")
#pacman nos permite cargar varias librerias en una sola línea
library(pacman)
pacman::p_load(tidyverse,BatchGetSymbols,ggplot2,lubridate,readxl,tidyquant)
```

4.3.2 Descarga de los valores

```
#Primero determinamos el lapso de tiempo
pd<-as.Date("2021/09/18") #primer fecha
pd
#> [1] "2021-09-18"
ld<-as.Date("2022/09/18") #última fecha
ld
#> [1] "2022-09-18"
#Intervalos de tiempo
int<-"monthly"
#Datos a elegir
dt<-c("AMZN")
dt2<-c("TSLA")
#Descargando los valores
?BatchGetSymbols()
data1<- BatchGetSymbols(tickers = dt,
                       first.date = pd,
                       last.date = ld,
                       freq.data = int,
                       do.cache = FALSE,
                       thresh.bad.data = 0)
data2<- BatchGetSymbols(tickers = dt2,
```

```
                       first.date = pd,
                       last.date = ld,
                       freq.data = int,
                       do.cache = FALSE,
                       thresh.bad.data = 0)

#Generando data frame con los valores
data_precio_amzn<-data1$df.tickers
colnames(data_precio_amzn)
#>  [1] "ticker"              "ref.date"
#>  [3] "volume"              "price.open"
#>  [5] "price.high"          "price.low"
#>  [7] "price.close"         "price.adjusted"
#>  [9] "ret.adjusted.prices" "ret.closing.prices"
data_precio_tls<-data2$df.tickers
colnames(data_precio_tls)
#>  [1] "ticker"              "ref.date"
#>  [3] "volume"              "price.open"
#>  [5] "price.high"          "price.low"
#>  [7] "price.close"         "price.adjusted"
#>  [9] "ret.adjusted.prices" "ret.closing.prices"
#necesitamos convertir la serie de tiempo de precios en retornos continuos compuestos de los prec
data_precio_amzn$ccrAMZN<-c(NA ,100*diff(log(data_precio_amzn$price.open)))#agregamos un valor NA
data_precio_amzn$ccrAMZN#estos son los retornos
#>  [1]          NA  -3.2011678   2.1889913   5.3061639
#>  [5]  -5.6279333 -11.0646538   1.8052718   7.2089622
#>  [9] -29.3475086  -0.1185366 -13.9945965  23.8807273
#> [13]  -6.8696583

data_precio_tls$ccrTSLA<-c(NA ,100*diff(log(data_precio_tls$price.open)))#agregamos un valor NA d
data_precio_tls$ccrTSLA
#>  [1]         NA   5.796888  38.591933   1.361865  -1.121972
#>  [6] -20.478772  -7.264574  21.765521 -22.795320 -13.089771
#> [11] -10.336735  28.307900 -10.009692
#formateando por año y mes
data_precio_tls$ref.date=format(as.Date(data_precio_tls$ref.date), "%m/%Y")
data_precio_amzn$ref.date=format(as.Date(data_precio_amzn$ref.date), "%m/%Y")
#Compararemos con los CETES
CETES_sep2021_2022<-read_excel("BD/CETES-sep2021-2022.xlsx", skip=17)
head(CETES_sep2021_2022)
#> # A tibble: 6 x 2
#>   Fecha               SF43936
#>   <dttm>                <dbl>
#> 1 2021-09-15 00:00:00    4.6
#> 2 2021-09-23 00:00:00    4.58
```

```
#> 3 2021-09-30 00:00:00    4.69
#> 4 2021-10-07 00:00:00    4.81
#> 5 2021-10-14 00:00:00    4.79
#> 6 2021-10-21 00:00:00    4.83
#indice sp500
SP500 <- read_csv("BD/Download Data - INDEX_US_S&P US_SPX.csv")
SP500$ccrSP500<-c(NA ,100*diff(log(SP500$Open)))
names(SP500)[1]<-paste('ref.date')
#formateando por año y mes

#cetes
cete_1_año<-10.10#esto es el rendimiento a un año de un cete gubernamental seguro

#Juntamos el df
CAPM_2<-merge(data_precio_amzn, data_precio_tls, by = c('ref.date'))
CAPM_4<-merge(SP500, CAPM_2, by = c('ref.date'))
CAPM<-data.frame(CAPM_4)

#exceso de retorno
CAPM$excess_ret_AMZN<-CAPM$ccrAMZN-cete_1_año
CAPM$excess_ret_SP500<-CAPM$ccrSP500-cete_1_año
CAPM$excess_ret_TSLA<-CAPM$ccrTSLA-cete_1_año
```

```
#relacion entre los excesos de demanda
ggplot(CAPM, aes(x=excess_ret_AMZN, y=excess_ret_SP500))+geom_point()+labs(title="Rela
#> Warning: Removed 2 rows containing missing values
#> (geom_point).
```

```
#relacion entre los excesos de demanda
ggplot(CAPM, aes(x=excess_ret_TSLA, y=excess_ret_SP500))+geom_point()+labs(title="Rela
#> Warning: Removed 2 rows containing missing values
#> (geom_point).
```

```
#veamos la regresion lineal
CAPM_lr<-lm(excess_ret_TSLA~excess_ret_SP500,data = CAPM)
summary(CAPM_lr)
#>
#> Call:
#> lm(formula = excess_ret_TSLA ~ excess_ret_SP500, data = CAPM)
#>
#> Residuals:
#>     Min      1Q  Median      3Q     Max
#> -23.980 -13.391  -5.548  11.572  37.067
#>
#> Coefficients:
#>                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

Figure 4.1: Relación de excesos de retornos entre AMZN y SP500

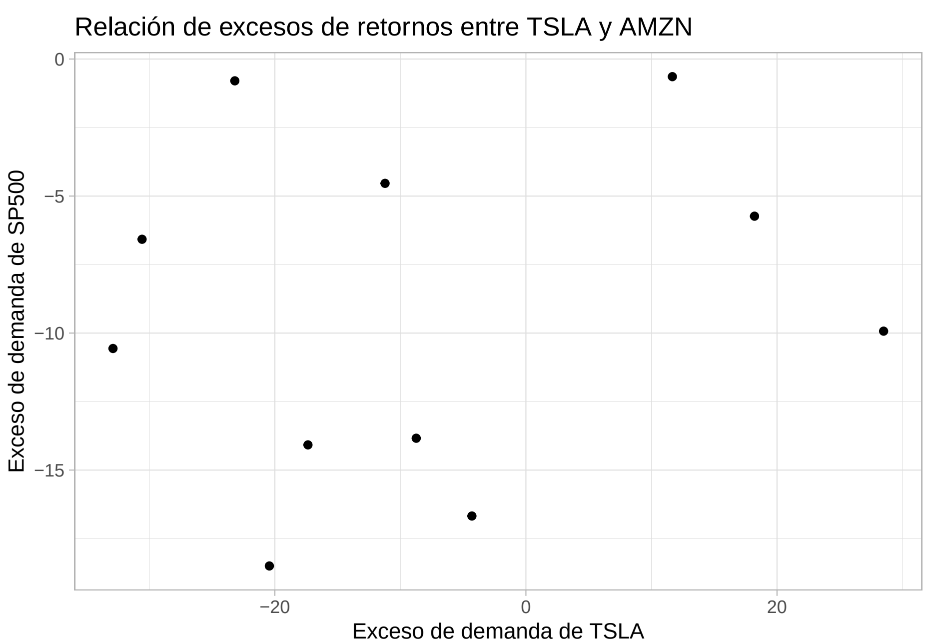


Figure 4.2: Relación de excesos de retornos entre TSLA y SP500

```
#> (Intercept)       -3.2334    11.8097  -0.274     0.79
#> excess_ret_SP500   0.5379     1.0789   0.499     0.63
#>
#> Residual standard error: 20.88 on 9 degrees of freedom
#>   (2 observations deleted due to missingness)
#> Multiple R-squared:  0.02687,    Adjusted R-squared:  -0.08125
#> F-statistic: 0.2486 on 1 and 9 DF,  p-value: 0.6301
alpha1<-coefficients(CAPM_lr)[1]
alpha1<0
#> (Intercept)
#>        TRUE
```

De esta manera sabemos que el rendimiento de TSLA NO es mayor debido a que el coeficiente $\alpha = -2.9534$, lo cual indica peores rendimientos al resto del SP500.

4.4 Ejercicio Compara con TSLA con el APPLE

```
dt3<-"AAPL"
data3<-BatchGetSymbols(tickers = dt3,
                       first.date = pd,
                       last.date = ld,
                       freq.data = int,
                       do.cache = FALSE,
                       thresh.bad.data = 0)
#> Warning: `BatchGetSymbols()` was deprecated in BatchGetSymbols 2.6.4.
#> Please use `yfR::yf_get()` instead.
#> 2022-05-01: Package BatchGetSymbols will soon be replaced by yfR.
#> More details about the change is available at github <<www.github.com/msperlin/yfR>
#> You can install yfR by executing:
#>
#> remotes::install_github('msperlin/yfR')
#>
#> Running BatchGetSymbols for:
#>    tickers =AAPL
#>    Downloading data for benchmark ticker
#> ^GSPC | yahoo (1|1)
#> AAPL | yahoo (1|1) - Got 100% of valid prices | Looking good!
data_precio_AAPL<-data3$df.tickers
colnames(data_precio_AAPL)
#>  [1] "ticker"              "ref.date"
#>  [3] "volume"              "price.open"
#>  [5] "price.high"          "price.low"
#>  [7] "price.close"         "price.adjusted"
```

```
#>  [9] "ret.adjusted.prices" "ret.closing.prices"
data_precio_AAPL$ccrAAPL<-c(NA ,100*diff(log(data_precio_AAPL$price.open)))#agregamos un valor NA
data_precio_AAPL$ccrAAPL
#>  [1]         NA  -1.330092   4.875668  11.698469   5.996413
#>  [6]  -2.171531  -5.498712   5.510207 -10.483068  -4.442864
#> [11]  -9.701946  16.851754  -2.751627
data_precio_AAPL$ref.date=format(as.Date(data_precio_AAPL$ref.date), "%m/%Y")
CAPM_3<-merge(data_precio_AAPL, CAPM, by = c('ref.date'))
CAPM_3$excess_ret_AAPL<-CAPM_3$ccrAAPL-cete_1_año
#veamos la regresion lineal
CAPM3_lr<-lm(excess_ret_AAPL~excess_ret_SP500,data = CAPM_3)
summary(CAPM3_lr)
#>
#> Call:
#> lm(formula = excess_ret_AAPL ~ excess_ret_SP500, data = CAPM_3)
#>
#> Residuals:
#>      Min       1Q   Median       3Q      Max
#> -10.9038  -5.4365   0.4641   3.4629  14.1798
#>
#> Coefficients:
#>                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#> (Intercept)       -4.7542     4.9105  -0.968    0.358
#> excess_ret_SP500   0.4663     0.4486   1.039    0.326
#>
#> Residual standard error: 8.682 on 9 degrees of freedom
#>   (2 observations deleted due to missingness)
#> Multiple R-squared:  0.1072, Adjusted R-squared:  0.007964
#> F-statistic:  1.08 on 1 and 9 DF,  p-value: 0.3258
alpha2<-coefficients(CAPM3_lr)[1]
alpha2<0
#> (Intercept)
#>        TRUE
```

Chapter 5

Estacionariedad

5.1 El problema

Los fundamentos de las series de tiempo están basados en la estacionalidad. Una serie de tiempo r_t que estudia los retornos de un activo a lo largo de tiempo es *estrictamente estacionaria* si la distribución conjunta de los retornos $(r_{t1}, \ldots, r_{t1})$ es *exactamente idéntica* en $(r_{t1+T}, \ldots, r_{t1+T})$, es decir cuando pasa T años, por ejemplo. En otras palabras, definiremos a una serie de tiempo como un vector de variables X_t aleatorias de dimensión T, dado como:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_T \tag{5.1}$$

Es decir, definiremos a una serie de tiempo como una realización de un proceso estocástico –o un Proceso Generador de Datos (PGD). Consideremos una muestra de los múltiples posibles resultados de muestras de tamaño T, la colección dada por:

$$\{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_T^{(1)}\} \tag{5.2}$$

Eventualmente podríamos estar dispuestos a observar este proceso indefinidamente, de forma tal que estemos interesados en observar a la secuencia dada por $\{X_t^{(1)}\}_{t=1}^{\infty}$, lo cual no dejaría se ser sólo una de las tantas realizaciones o secuencias del proceso estocástico original de la ecuación (**??**).

$$\{X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_T^{(2)}\}$$
$$\{X_1^{(3)}, X_2^{(3)}, \dots, X_T^{(3)}\}$$
$$\{X_1^{(4)}, X_2^{(4)}, \dots, X_T^{(4)}\}$$
$$\vdots$$
$$\{X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_T^{(j)}\}$$

Por lo mismo, cada cambio que se hace al vector $\{X_t^{(1)}\}$ es parte del mismo proceso estocástico, por lo que la serie de tiempo es:

$$\{X_1, X_2, \dots, X_T\} \tag{5.3}$$

El proceso estocástico de dimensión T puede ser completamente descrito por su función de distribución multivariada de dimensión T. No obstante, sólo nos enfocaremos en sus primer y segundo momentos, es decir, en sus medias o valores esperados $\mathbb{E}(X_t)$

Para $t = 1, 2, \dots, T$:

$$[\ \mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \dots, \mathbb{E}[X_T]\ ]$$

De sus variazas:

$$Var[X_t] = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2]$$

Para $t = 1, 2, \dots, T$, y de sus $T(T-1)/2$ covarianzas:

$$Cov[X_t, X_s] = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_s - \mathbb{E}[X_s])]$$

Para $t < s$. Por lo tanto, en la forma matricial podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} Var[X_1] & Cov[X_1, X_2] & \cdots & Cov[X_1, X_T] \\ Cov[X_2, X_1] & Var[X_2] & \cdots & Cov[X_2, X_T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X_T, X_1] & Cov[X_T, X_2] & \cdots & Var[X_T] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \cdots & \sigma_T^2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Donde es claro que en la matriz de la ecuación (**??**) existen $T(T-1)/2$ covarianzas distintas, ya que se cumple que $Cov[X_t, X_s] = Cov[X_s, X_t]$, para $t \neq s$.

A menudo, esas covarianzas son denominadas como *autocovarianzas* puesto que ellas son covarianzas entre variables aleatorias pertenecientes al mismo proceso estocástico pero en un momento t diferente. Si el proceso estocástico tiene una distribución normal multivariada, su función de distribución estará totalmente descrita por sus momentos de primer y segundo orden.

5.1.1 Ergocidad

Esto implica que los momentos muestrales, los cuales son calculados en la base de una serie de tiempo con un número finito de observaciones, conforme el tiempo $T \to \infty$ sus correspondientes momentos muestrales, tienden a los verdaderos valores poblacionales, los cuales definiremos como μ, para la media, y σ_X^2 para la varianza. *En pocas palabras, conforme los momentos muestrales aumenten tanto que tiendan al infinito, entonces nos acercamos a valores poblacionales de la media y la varianza.* Este concepto sólo es cierto si asumimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= \mu_t = \mu \\ Var[X_t] &= \sigma_X^2 \end{aligned}$$

Más formalmente, se dice que el PGD o el proceso estocástico es ergódico en la media si:

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\mu)\right)^2\right] = 0 \tag{5.5}$$

y ergódico en la varianza si:

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\mu)^2-\sigma_X^2\right)^2\right] = 0 \tag{5.6}$$

+ Estas condiciones se les conoce como *propiedades de consistencia* para las variables aleatorias. Sin embargo, éstas no pueden ser probadas. Por ello se les denomina como un supuesto que pueden cumplir algunas de las series. Más importante aún: **un proceso estocástico que tiende a estar en equilibrio estadístico en un orden ergódico, es estacionario**.

5.1.2 Tipos de Estacionariedad

Definiremos a la estacionariedad por sus momentos del correspondiente proceso estocástico dado por $\{X_t\}$:

- *Estacionariedad en media*: Un proceso estocástico es estacionario en media si $E[X_t] = \mu_t = \mu$ es constante para todo t.
- *Estacionariedad en varianza*: Un proceso estocástico es estacionario en varianza si $Var[X_t] = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)^2] = \sigma_X^2 = \gamma(0)$ es constante y finita para todo t.

- *Estacionariedad en covarianza*: Un proceso estocástico es estacionario en covarianza si $Cov[X_t, X_s] = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)] = \gamma(|s-t|)$ es sólo una función del tiempo y de la distancia entre las dos variables aleatorias. Por lo que no depende del tiempo denotado por t (no depende de la información contemporánea).

- *Estacionariedad débil*: Como la estacionariedad en varianza resulta de forma inmediata de la estacionariedad en covarianza cuando se asume que $s = t$, un proceso estocástico es débilmente estacionario cuando es estacionario en media y covarianza. **ESTE ES EL MÁS COMÚN Y POSIBLE**, por lo que es el que estudiaremos.

5.1.3 Función de Autocorrelación (ACF)

Para ampliar la discusión, es posible calcular la fuerza o intensidad de la dependencia de las variables aleatorias dentro de un proceso estocástico, ello mediante el uso de las autocovarianzas. Cuando las covarianzas son normalizadas respecto de la varianza, el resultado es un término que es independiente de las unidad de medida aplicada, y se conoce como la *función de autocorrelación*.

Por su parte, un estimador consistente de la función de autocorrelación estará dado por:

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{T-\tau}(X_t - \hat{\mu})(X_{t+\tau} - \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \hat{\mu})^2} = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)}, \text{ para } \tau = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{5.7}$$

El estimador de la ecuación (**??**) es asintóticamente insesgado y **es relevante puesto que nos dice si una serie de tiempo con estacionariedad débil esta serialmente correlacionada si y solo si** $\hat{\rho}(\tau) \neq 0$.

5.1.4 Ruido Blanco

Supongamos una serie de tiempo denotada por: $\{U_t\}_{t=0}^{T}$. Decimos que el proceso estocástico $\{U_t\}$ es un *proceso estocástico puramente aleatorio* o es un *proceso estocástico de ruido blanco o caminata aleatoria*, si éste tiene las siguientes propiedades:

- $\mathbb{E}[U_t] = 0$, $\forall t$
- $Var[U_t] = \mathbb{E}[(U_t - \mu_t)^2] = \mathbb{E}[(U_t - \mu)^2] = \mathbb{E}[(U_t)^2] = \sigma^2$, $\forall t$
- $Cov[U_t, U_s] = \mathbb{E}[(U_t - \mu_t)(U_s - \mu_s)] = \mathbb{E}[(U_t - \mu)(U_s - \mu)] = \mathbb{E}[U_t U_s] = 0$, $\forall t \neq s$.
- $\hat{\rho}(\tau) = 0$

En palabras. Un proceso U_t es un ruido blanco si su valor promedio es cero (0), tiene una varianza finita y constante, y además no le importa la historia pasada, así su valor presente no se ve influenciado por sus valores pasados no importando respecto de que periodo se tome referencia.

Para procesos estacionarios, dicha función de autocorrelación esta dada por:

$$\rho(\tau) = \frac{\mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu)]}{\mathbb{E}[(X_t - \mu)^2]} = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} \tag{5.8}$$

5.2 Estimación

5.2.1 Dependencias

```
#install.packages("pacman")
#pacman nos permite cargar varias librerias en una sola línea
library(pacman)
pacman::p_load(tidyverse,BatchGetSymbols,ggplot2,lubridate,readxl,forecast,stats)
```

5.3 Caminata

```
set.seed(1234)
# Utilizaremos una función guardada en un archivo a parte
# Llamamos a la función:
source("funciones/Caminata.R")

# Definimos argumentos de la función
Opciones <- c(-1, 1)
#
Soporte <- 10000

# Vamos a réplicar el proceso con estos parámetros
Rango <- 200
#
Caminos <- 10

#

for(i in 1:Caminos){
  TT <- data.matrix(data.frame(Caminata(Opciones, Soporte)[1]))
  #
  G_t <- data.matrix(data.frame(Caminata(Opciones, Soporte)[2]))
  #
  plot(TT, G_t, col = "blue", type = "l", ylab = "Ganancias", xlab = "Tiempo", ylim = c(-Rango,Ra
  #
  par(new = TRUE)
```

```
  #
  i <- i +1
}
#
par(new = FALSE)
```

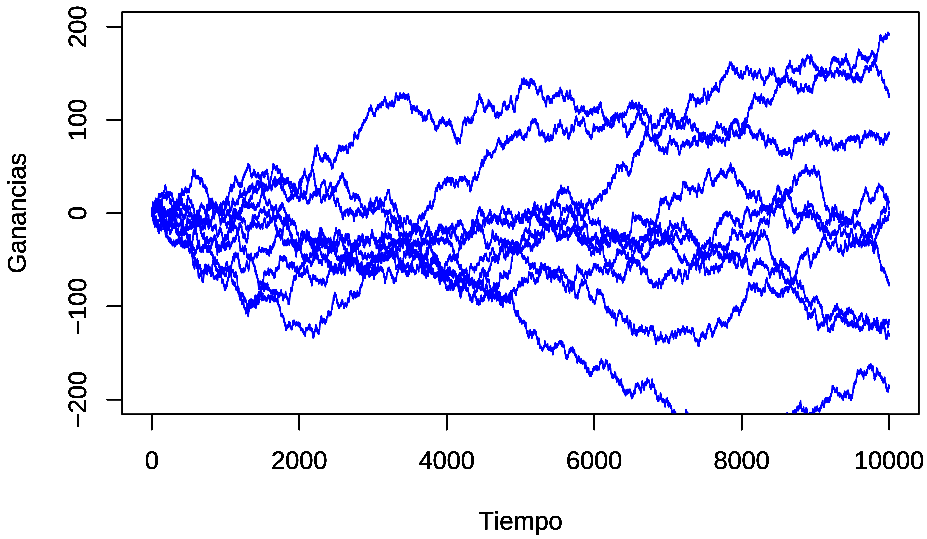


Figure 5.1: Ejemplo de 10 trayectorias de la caminata aleatoria, cuando sólo es posible cambios de +1 y -1

Así, el proceso estocástico dado por la caminata alaeatoria sin un término de ajuste es estacionario en media, pero no en varianza o en covarianza, y consecuentemente, en general no estacionario, condición que contraria al caso del proceso simple descrito en U_t.

Es facil ver que muchas de las posibilidades de realización de este proceso estocástico (series de tiempo) pueden tomar cualquiera de las rutas consideradas en el Figura **??**. Ahora analicemos un solo camino.

5.4 Un camino

```
#Generamos datos
  TT1 <- data.matrix(data.frame(Caminata(Opciones, Soporte)[1]))
  G_t1 <- data.matrix(data.frame(Caminata(Opciones, Soporte)[2]))
#Creemos un data frame
  dt_caminata<-data.frame(TT1,G_t1)
  colnames(dt_caminata)<-c("t","ganancias")
  head(dt_caminata)
```

```
#>    t ganancias
#> 1 1        -1
#> 2 2        -2
#> 3 3        -1
#> 4 4        -2
#> 5 5        -3
#> 6 6        -4
#plot
  plot(TT1, G_t1, col = "blue", type = "l", ylab = "Ganancias", xlab = "Tiempo", ylim = c(-Rango,
```

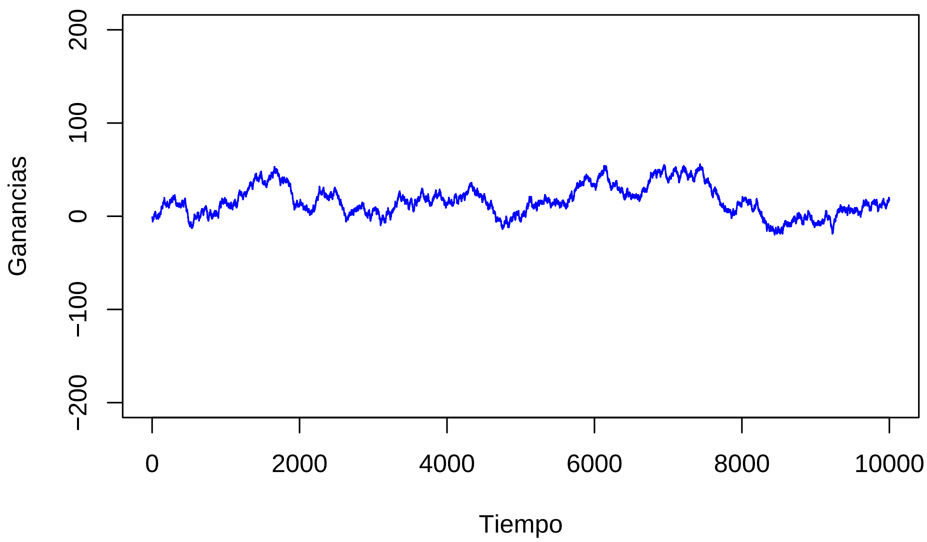


Figure 5.2: Una Caminata aleatoria cuando sólo es posible cambios de +1 y -1

Hay que convertirlo a serie de tiempo

```
#serie de tiempo
caminata_ts<-ts(G_t1,start=1,end=Soporte)
```

5.4.1 Estacionariedad Caminata

```
ACF_caminata_ts<-acf(caminata_ts,na.action = na.pass, main = "Función de Autocorrelación de una C
```

Como se comentó con anterioridad en la Figura **??** es evidente que la Caminata si tiene autocorrelacion, por lo que nuestro plot de autocorrelacion tiene valores muy altos en todos los lags. Veamos los lags.

```
gglagplot(caminata_ts,lags=10,do.lines=FALSE,colour=FALSE)+theme_light()
```

De nuevo, esto al ser creado de manera estandarizada estamos seguros de que

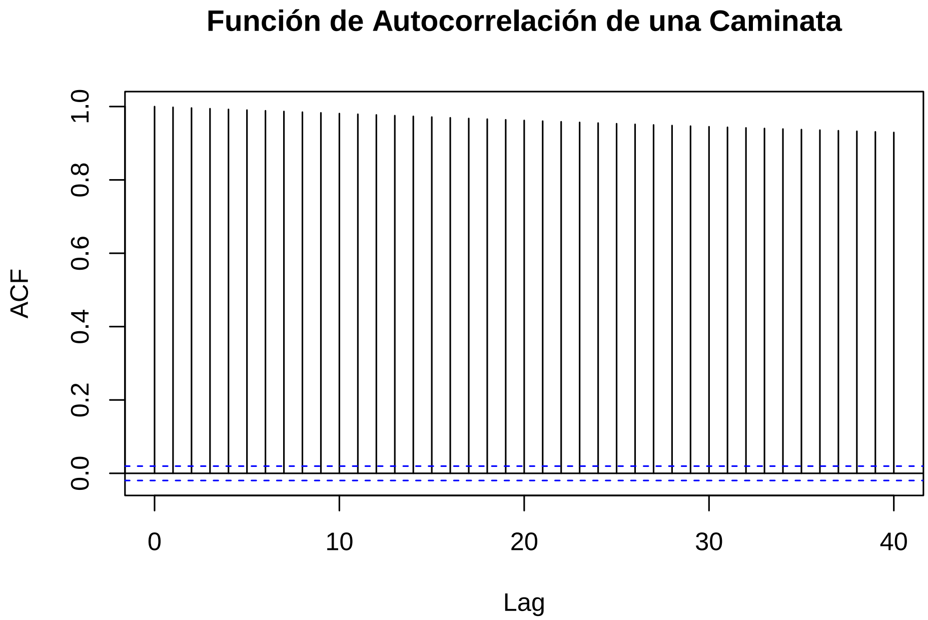


Figure 5.3: Función de Autocorrelación de una Caminata

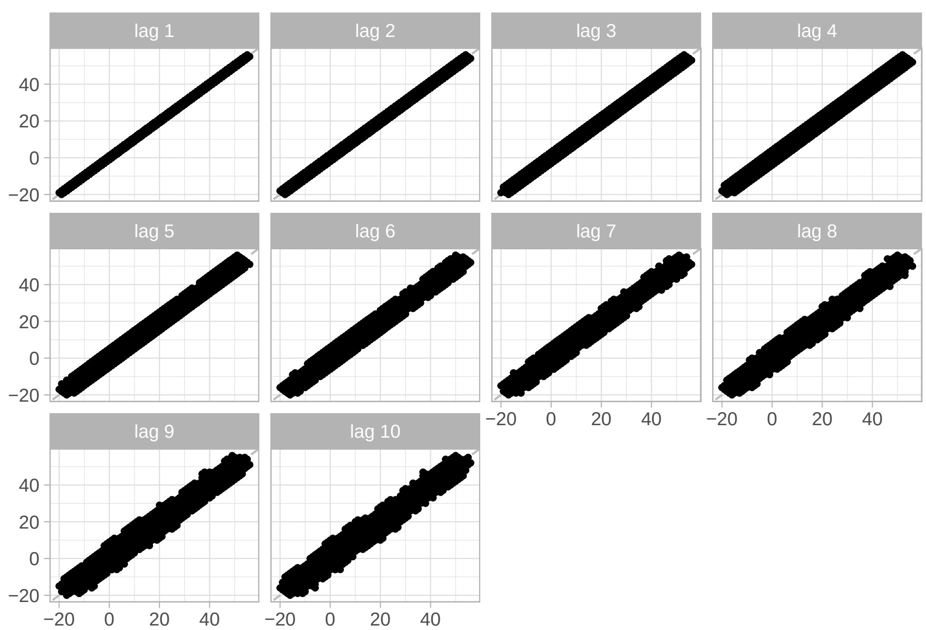


Figure 5.4: Lags de una sola caminata

va a ser estacionario en la medio, por lo mismo los lags de la Figura **??** se ven tan correlacionados.

5.5 Precios de un activo

```
#Primero determinamos el lapso de tiempo
pd<-Sys.Date()-(365*20) #primer fecha
pd
#> [1] "2002-10-02"
ld<-Sys.Date() #última fecha
ld
#> [1] "2022-09-27"
#Intervalos de tiempo
int<-"monthly"
#Datos a elegir
dt<-c("AMZN")
dt2<-c("TSLA")
#Descargando los valores
data1<- BatchGetSymbols(tickers = dt,
                        first.date = pd,
                        last.date = ld,
                        freq.data = int,
                        do.cache = FALSE,
                        thresh.bad.data = 0)
#Generando data frame con los valores
data_precio_amzn<-data1$df.tickers
colnames(data_precio_amzn)
#>  [1] "ticker"              "ref.date"
#>  [3] "volume"              "price.open"
#>  [5] "price.high"          "price.low"
#>  [7] "price.close"         "price.adjusted"
#>  [9] "ret.adjusted.prices" "ret.closing.prices"

#necesitamos convertir la serie de tiempo de precios en retornos continuos compuestos de los prec
data_precio_amzn$ccrAMZN<-c(NA ,100*diff(log(data_precio_amzn$price.open)))#agregamos un valor NA
data_precio_amzn$ccrAMZN#estos son los retornos
#>   [1]           NA  13.39774561  22.83329766 -22.98950701
#>   [5]  13.39221448   0.95260416  14.27998202  11.55626991
#>   [9]  24.11122449  -0.46684144  13.08785513  11.63599301
#>  [13]   3.89974592  12.48104071  -0.73260401  -3.06108260
#>  [17]  -4.08140972 -16.32741069   0.99457279   0.06902105
#>  [21]   9.61879412  11.67844638 -33.59147712  -0.57381482
#>  [25]   7.69997922 -18.78100714  15.60691856  11.66713068
#>  [29]  -4.43506452 -20.41392362  -1.23405211  -6.96531282
```

```
#>  [33]   9.64353557  -6.77486160  30.02382912  -5.40177077
#>  [37]   6.39945115 -12.58398922  20.12391421  -2.92703823
#>  [41]  -7.77281354 -15.93630872  -2.10477279  -4.11970307
#>  [45]  -1.60415929  10.64572285 -37.21478392  15.01070027
#>  [49]   3.59739571  17.58906665   5.43570463  -4.00357496
#>  [53]  -1.90531667   3.54637914   1.33891100  42.77167396
#>  [57]  11.98170332  -0.13070948  12.66409736   2.27857959
#>  [61]  15.63296023  -6.26135927   2.56510858   5.74113839
#>  [65] -18.78533471 -21.72447597  13.78662202   7.15014819
#>  [69]   3.44753666 -11.63053849   5.54650897   8.53074641
#>  [73] -14.71605773 -24.20236452 -29.39126222  20.09953181
#>  [77]  13.15576837   8.77225235  13.27882326   9.60320128
#>  [81]  -2.73678724   7.64068237   2.50334747  -6.96036997
#>  [85]  13.59745291  24.90536163  14.32806129  -0.50514401
#>  [89] -10.08447333  -3.70473986  13.45839135   1.02565002
#>  [93]  -9.33660068 -13.76436786   8.99531736   5.87517724
#>  [97]  21.76202538   4.58513429   8.56726887   1.22598823
#> [101]  -6.16865517   1.74979032   4.53458328   7.93222740
#> [105]  -0.25978671   4.72685785   9.04110889  -4.41608958
#> [109]   0.80039290  -4.18766494  -8.13529694  -8.68550170
#> [113]  -1.18960511   3.43828044   9.60224827  14.70991690
#> [117]  -9.58159747   9.53799598   2.08880372   5.85976366
#> [121]   2.83140800  -8.65274050   7.52661134   1.39202437
#> [125]   4.89612270  -2.12710012   1.39936277  -5.02332605
#> [129]   5.76221809   3.66491122   8.27850152  -6.24554343
#> [133]   9.85520147  15.15285156   8.73395739  -0.05013788
#> [137] -10.51934673  -0.06687288  -5.92858190 -10.58568315
#> [141]   2.74371861   4.15753522  -3.80625428   8.04816141
#> [145]  -5.42111518  -5.03065911   9.90317538  -7.85404256
#> [149]  11.32156221   8.43295383  -2.32429615  13.01462014
#> [153]   1.54061721   2.05813986  20.15392877  -7.39490376
#> [157]   2.34828935  20.47843365   7.17052347  -2.62563883
#> [161] -12.67694180  -3.85435390   5.96629237  11.72089295
#> [165]   8.23387458  -0.49783030   5.76252931   1.44112456
#> [169]   8.10699776  -4.52676184  -6.00796092   0.72964776
#> [173]   8.98955770   2.83447462   4.01536256   4.38443827
#> [177]   7.35281333  -2.61760725   2.36894617  -1.20285851
#> [181]  -2.07377928  13.68712240   5.85471090  -0.00427124
#> [185]  20.93976645   4.63815978  -6.55115525   9.77684681
#> [189]   4.61358018   2.75160333   5.84583306  12.74521370
#> [193]  -0.22279328 -21.94794383   8.60716489 -18.86826361
#> [197]  11.20213025   0.98664739   8.39682297   7.12720047
#> [201]  -9.38002536   8.85565506  -2.70183034  -5.58782369
#> [205]  -1.36520548   2.37757442   0.91249016   3.83805218
#> [209]   6.98245156  -5.31693095   1.37938043  18.97247680
```

```
#> [213]   4.64889431  11.92308161  14.25393454   9.27398656
#> [217]  -8.41337555  -4.66642316   4.05671846   2.52393793
#> [221]  -0.84885499  -3.59427728  -0.31861156  11.12179968
#> [225]  -7.17375312   5.72503641  -2.40180912   4.18486227
#> [229]  -6.11473001   2.18899134   5.30616390  -5.62793333
#> [233] -11.06465380   1.80527180   7.20896224 -29.34750864
#> [237]  -0.11853658 -13.99459654  23.88072732  -6.86965832
#tenemos 20 retornos a lo largo de 20 años
```

Veamos la serie de tiempo

```
ret_20_amazn<-ggplot(data=data_precio_amzn, aes(x=ref.date))+geom_line(aes(y=ccrAMZN))+labs(title
ret_20_amazn
```

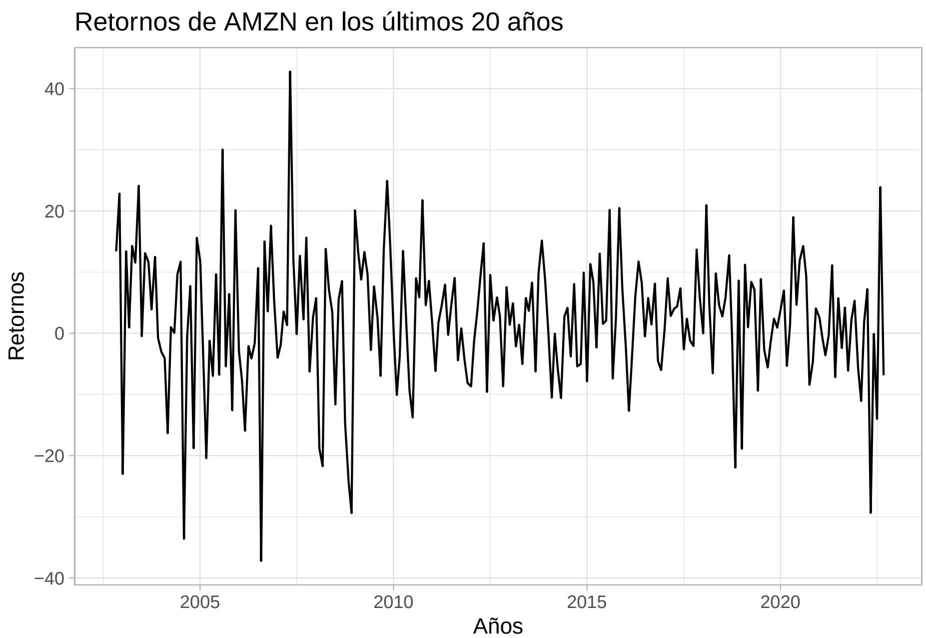


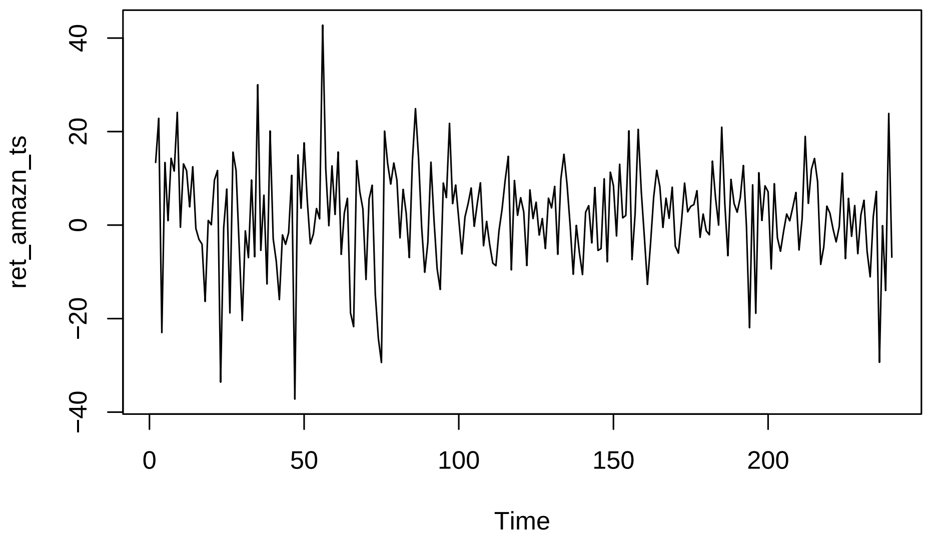
Figure 5.5: Serie de tiempo de los retornos de año en los últimos 20 años

5.5.1 Serie de tiempo

Primero que nada es importante cargar los datos a un objeto series de tiempo. Esto nos lo permite la función ts(). Además debemos serciorarnos de que los datos esten en orden cronológico.

```
data_precio_amzn<-data_precio_amzn[order(data_precio_amzn$ref.date),]
head(data_precio_amzn)#dado que ya estaba en orden cronológico nuestro df no cambia
#> # A tibble: 6 x 11
```

```
#>   ticker ref.date     volume price~1 price~2 price~3 price~4
#>   <chr>  <date>        <dbl>   <dbl>   <dbl>   <dbl>   <dbl>
#> 1 AMZN   2002-10-02   3.89e9   0.840    1.01   0.818   0.968
#> 2 AMZN   2002-11-01   4.13e9   0.961    1.23   0.91    1.17
#> 3 AMZN   2002-12-02   3.11e9   1.21     1.25   0.922   0.944
#> 4 AMZN   2003-01-02   3.38e9   0.960    1.16   0.928   1.09
#> 5 AMZN   2003-02-03   2.32e9   1.10     1.12   0.980   1.10
#> 6 AMZN   2003-03-03   3.28e9   1.11     1.40   1.07    1.30
#> # ... with 4 more variables: price.adjusted <dbl>,
#> #   ret.adjusted.prices <dbl>, ret.closing.prices <dbl>,
#> #   ccrAMZN <dbl>, and abbreviated variable names
#> #   1: price.open, 2: price.high, 3: price.low,
#> #   4: price.close
#hagamos el objeto ts
ret_amazn_ts<-ts(data_precio_amzn$ccrAMZN)
plot(ret_amazn_ts)#de esta manera podemos ver que se cargo bien debido a que es igual
```



5.5.2 Estacionariedad

```
#MA_m5<-forecast::ma(ret_amazn_ts,order=11,centre=TRUE)
#plot(ret_amazn_ts)+lines(MA_m5, col="red", lwd=2)
gglagplot(ret_amazn_ts,lags=20,do.lines=FALSE,colour=FALSE)+theme_light()
```

```
ACF_ret_amazn_ts<-acf(ret_amazn_ts,na.action = na.pass)
```

La Figura **??** nos idica la manera en la que se correlacionan los lags, evidentemente no se puede ver ningún tipo de correlacioo1ón visible. Similarmente la Figura **??** en donde se muestra la función de autocorrelación. Expecto al primer

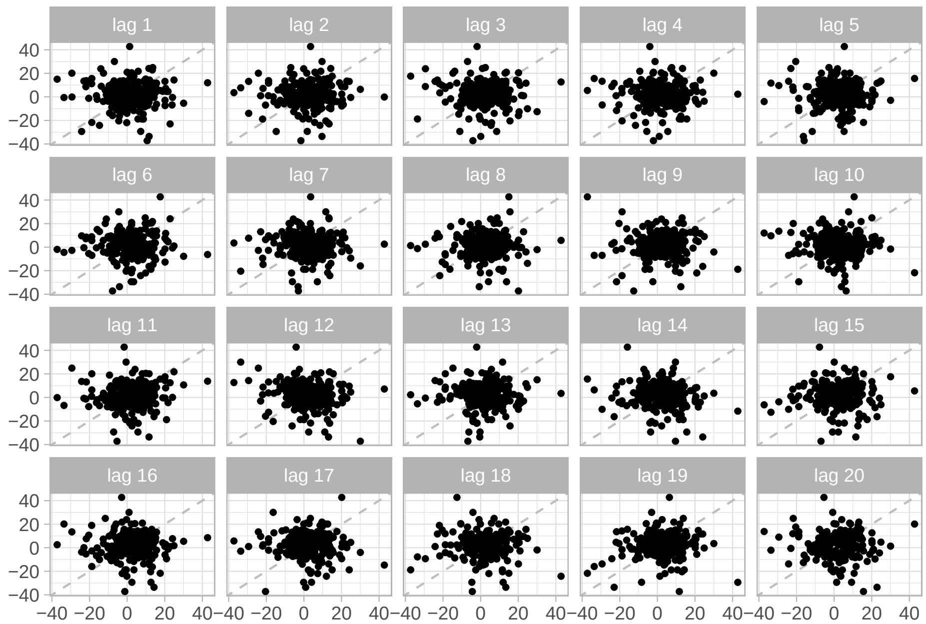


Figure 5.6: Lag Plot que nos muestra la correlación entre 20 lags

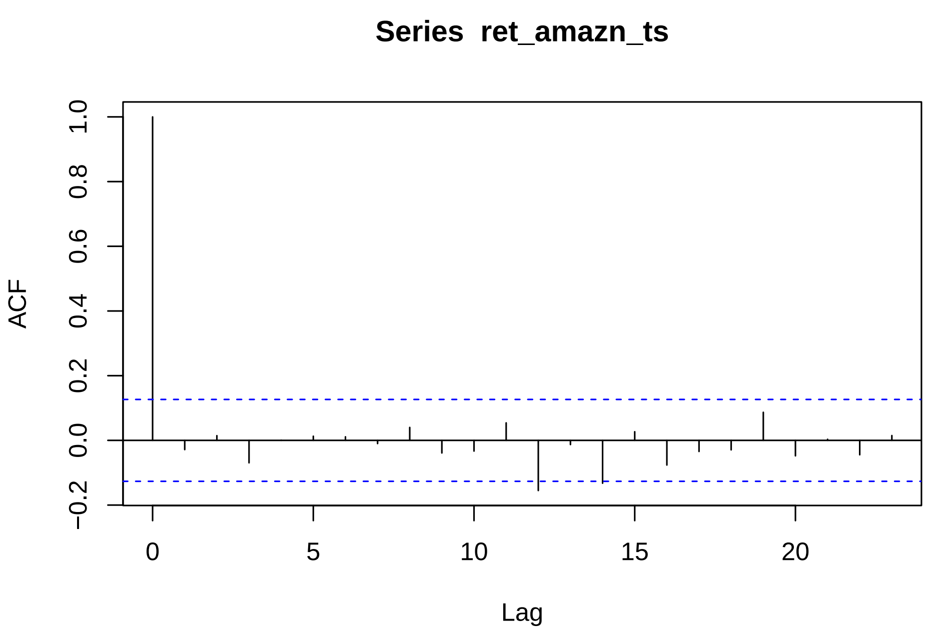


Figure 5.7: Función de Autocorrelación de los retornos de AMZN en los ultimos 20 años

lag –que muestra correlacion debido a que se esta comparando consigo mismo– es evidente que no hay correlacioo1ón fuerte entre ninguno de los lags. Por lo mismo, sería difícil poder encontrar y estimar valores futuros debido a que la Figura **??** y la Figura **??** indican que la serie de tiempo de los retornos de AMZN de la Figura **??** es **completamente aleatorio y no hay estacionariedad**.

Chapter 6

Procesos estacionarios univariados

En este capítulo analizaremos el método o metodología de análisis de series de tiempo propuesto por Box y Jenkins (1970). Los modelos propuestos dentro de está metodología o conjunto de métodos se han vuelto indispensables para efectos de realizar pronósticos de corto plazo.

En este sentido, se analizarán los métodos más importantes en series de tiempo: Autoregresivos (AR) y de Medias Móviles (MA). Asimismo, se realizará un análisis de los procesos que resultan de la combinación de ambos, conocida como ARMA, los cuales son más comúnmente usados para realizar pronósticos.

6.1 Procesos Autoregresivos (AR)

Los procesos autoregresivos tienen su origen en el trabajo de Cochrane y Orcutt de 1949, mediante el cual analizaron los residuales de una regresión clásica como un proceso autoregresivo. Puede consultarse el apéndice para la discusión del modelo de regresión clásica.

6.1.1 AR(1)

Como primer caso analizaremos al proceso autoregresivo de primer orden, $AR(1)$, el cual podemos definir como una Ecuación Lineal en Diferencia Estocástica de Primer Orden. Diremos que una Ecuación Lineal en Diferencia de Primer Orden es estocástica si en su representación analítica considera un componente estocástico como en la ecuación (**??**) descrita a continuación:

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + U_t \tag{6.1}$$

Donde a_0 es un término constante, U_t es un proceso estacionario, con media cero (0), una varianza finita y constante (σ^2) y una covarianza que depende de la distancia entre t y cualquier $t-s$ (γ_s)–que no depende de los valores pasados o futuros de la variable–, X_0 es el valor inicial de X_t. No obstante, en general vamos a asumir que la covarianza será cero (0), por lo que tendremos un proceso puramente aleatorio. Considerando la ecuación (**??**) y un proceso de sustitución sucesivo podemos establecer lo siguiente, empezando con X_1:

$$X_1 = a_0 + a_1 X_0 + U_1$$

Para X_2:

$$\begin{aligned} X_2 &= a_0 + a_1 X_1 + U_2 \\ &= a_0 + a_1(a_0 + a_1 X_0 + U_1) + U_2 \\ &= a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 X_0 + a_1 U_1 + U_2 \end{aligned}$$

Para X_3:

$$\begin{aligned} X_3 &= a_0 + \alpha X_2 + U_3 \\ &= a_0 + a_1(a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 X_0 + a_1 U_1 + U_2) + U_3 \\ &= a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 a_0 + a_1^3 X_0 + a_1^2 U_1 + a_1 U_2 + U_3 \end{aligned}$$

Así, para cualquier X_t, $t = 1, 2, 3, ...$, obtendríamos:

$$\begin{aligned} X_t &= a_0 + a_1 X_{t-1} + U_t \\ &= a_0 + a_1(a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 a_0 + ... + a_1^{t-2} a_0 + a_1^{t-1} X_0 \\ &\quad + a_1^{t-2} U_1 + ... + a_1 U_{t-2} + U_{t-1}) + U_t \\ &= a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 a_0 + a_1^3 a_0 + ... + a_1^{t-1} a_0 + a_1^t X_0 \\ &\quad + a_1^{t-1} U_1 + ... a_1^2 U_{t-2} + a_1 U_{t-1} + U_t \\ &= (1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + ... + a_1^{t-1}) a_0 + a_1^t X_0 \\ &\quad + a_1^{t-1} U_1 + ... + a_1^2 U_{t-2} + a_1 U_{t-1} + U_t \\ &= \frac{1 - a_1^t}{1 - a_1} a_0 + a_1^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a_1^j U_{t-j} \end{aligned} \tag{6.2}$$

De esta forma en la ecuación (**??**) observamos un proceso que es explicado por dos partes: una que depende del tiempo y otra que depende de un proceso estocástico. Asimismo, debe notarse que la condición de convergencia es idéntica que en el caso de ecuaciones en diferencia estudiadas al inicio del curso: $|a_1| < 1$, por lo que cuando $t \to \infty$, la expresión (**??**) será la siguiente:

$$X_t = \frac{1}{1 - a_1} a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j U_{t-j} \tag{6.3}$$

Así, desaparece la parte dependiente del tiempo y únicamente prevalece la parte que es dependiente del proceso estocástico. Esta es la solución de largo plazo del proceso $AR(1)$, la cual depende del proceso estocástico. Notemos, además, que esta solución implica que la variable o la serie de tiempo X_t es tambien un proceso estocástico que hereda las propiedades de U_t. Así, X_t es también un proceso estocástico estacionario, como demostraremos más adelante.

Observemos que la ecuación (**??**) se puede reescribir si consideramos la formulación que en la literatura se denomina como la descomposición de Wold, en la cual se define que es posible asumir que $\psi_j = a_1^j$ y se considera el caso en el cual $|a_1|< 1$, de esta forma tendremos que por ejemplo cuando:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^{2j} = \frac{1}{1 - a_1^2}$$

Alternativamente y de forma similar a las ecuaciones en diferencia estudiadas previamente podemos escribir el proceso $AR(1)$ mediante el uso del operador rezago como:

$$\begin{aligned} X_t &= a_0 + a_1 L X_t + U_t \\ X_t - a_1 L X_t &= a_0 + U_t \\ (1 - a_1 L) X_t &= a_0 + U_t \\ X_t &= \frac{a_0}{1 - a_1 L} + \frac{1}{1 - a_1 L} U_t \end{aligned} \tag{6.4}$$

En esta última ecuación retomamos el siguiente término para reescribirlo como:

$$\frac{1}{1 - a_1 L} = 1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + a_1^3 L^3 + ... \tag{6.5}$$

Tomando este resultado para sustituirlo en ecuación (**??**), obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} X_t &= (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + a_1^3 L^3 + ...)a_0 + (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + a_1^3 L^3 + ...)U_t \\ &= (1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + ...)a_0 + U_t + a_1 U_{t-1} + a_1^2 U_{t-2} + a_1^3 U_{t-3} + ... \\ &= \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j U_{t-j} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Donde la condición de convergencia y estabilidad del proceso descrito en esta ecuación es que $|a_1|< 1$. Por lo que hemos demostrado que mediante el uso del operador de rezago es posible llegar al mismo resultado que obtuvimos mediante el procedimiento de sustituciones iterativas.

La ecuación (**??**) se puede interpretar como sigue. La solución o trayectoria de equilibrio de un AR(1) se divide en dos partes. La primera es una constante que depende de los valores de a_0 y a_1. La segunda parte es la suma ponderada de las desviaciones o errores observados y acumulados en el tiempo hasta el momento t.

Ahora obtendremos los momentos que describen a la serie de tiempo cuando se trata de un porceso $AR(1)$. Para ello debemos obtener la media, la varianza y las covarianzas de X_t. Para los siguientes resultados debemos recordar y tener en mente que si U_t es un proceso puramente aleatorio, entonces:

1. $\mathbb{E}[U_t] = 0$ para todo t
2. $Var[U_t] = \sigma^2$ para todo t
3. $Cov[U_t, U_s] = 0$ para todo $t \neq s$

Dicho lo anterior y partiendo de la ecuación (**??**), el primer momento o valor esperado de la serie de tiempo será el siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}\left[\frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j U_{t-j}\right] \\
&= \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \mathbb{E}[U_{t-j}] \\
&= \frac{a_0}{1-a_1} = \mu \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Respecto de la varianza podemos escribir la siguiente expresión a partir de la ecuación (**??**):

$$\begin{aligned}
Var[X_t] &= \mathbb{E}[(X_t - \mu)^2] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j U_{t-j} - \frac{a_0}{1-a_1}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}[(U_t + a_1 U_{t-1} + a_1^2 U_{t-2} + a_1^3 U_{t-3} + ...)^2] \\
&= \mathbb{E}[U_t^2 + a_1^2 U_{t-1}^2 + a_1^4 U_{t-2}^2 + a_1^6 U_{t-3}^2 + ... \\
&\quad +2a_1 U_t U_{t-1} + 2a_1^2 U_t U_{t-2} + ...] \\
&= \mathbb{E}[U_t^2] + a_1^2 \mathbb{E}[U_{t-1}^2] + a_1^4 \mathbb{E}[U_{t-2}^2] + a_1^6 \mathbb{E}[U_{t-3}^2] + ... \\
&= \sigma^2 + a_1^2 \sigma^2 + a_1^4 \sigma^2 + a_1^6 \sigma^2 + ... \\
&= \sigma^2 (1 + a_1^2 + a_1^4 + a_1^6 + ...) \\
&= \sigma^2 \frac{1}{1-a_1^2} = \gamma(0) \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Previo a analizar la covarianza de la serie recordemos que para el proceso puramente aleatorio U_t su varianza y covarianza puede verse como $\mathbb{E}[U_t, U_s] = \sigma^2$, para $t = s$, y $\mathbb{E}[U_t, U_s] = 0$, para cualquier otro caso, respectivamente.

Dicho lo anterior, partiendo de la ecuación (**??**) la covarianza de la serie estará dada por:

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-\tau}) &= \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j U_{t-j} - \frac{a_0}{1-a_1}\right)\right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j U_{t-\tau-j} - \frac{a_0}{1-a_1}\right)\right] \\
&= a_1^\tau \mathbb{E}[U_{t-\tau}^2 + a_1 U_{t-\tau-1}^2 + a_1^2 U_{t-\tau-2}^2 + a_1^3 U_{t-\tau-3}^2 + ...] \\
&= a_1^\tau \sigma^2 \frac{1}{1-a_1^2} = \gamma(\tau) \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Notése que con estos resultados en las ecuaciones (**??**) y (**??**) podemos construir la función de autocorrelación teórica como sigue:

$$\begin{aligned}
\rho(\tau) &= \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} \\
&= a_1^\tau \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

Donde $\tau = 1, 2, 3, ...$ y $|a_1| < 1$. Este último resultado significa que cuando el proceso autoregresivo es de orden 1 (es decir, AR(1)) la función de autocorrelación teóricamente es igual al parámetro a_1 elevado al número de rezagos considerados. No obstante, note que esto no significa que la autocorrelación observada sea como lo expresa en planteamiento anterior. Por el contrario, una observación sencilla mostraría que la autocorrelación observada sería ligeramente distinta a la autocorrelación teórica.

Ahora veámos algunos ejemplos. En el primer ejemplo simularemos una serie y mostraremos el analísis de un proceso construído considerando un proceso puramente aleatorio como componente U_t.[1] Por su parte, en un segundo ejemplo aplicaremos el análisis a una serie de tiempo de una variable económica observada.[2]

Para el primer ejemplo consideremos un proceso dado por la forma de un $AR(1)$ como en la ecuación (**??**) cuya solución esta dada por la ecuación (**??**). En

[1] El procedimiento e implementación del ejercicio está en el archivo R denominado Clase 4 del repositorio de GitHub.

[2] El procedimiento e implementación del ejercicio está en el archivo R denominado Clase 5 del repositorio de GitHub.

especifico, supongamos que el término o componente estocástico U_t es una serie generada a partir de numeros aleatorios de una función normal con media 0 y desviación estándar 4. Los detalles del proceso simulado se muestra en las siguientes gráficas.

6.1.1.1 EJEMPLO AR(1)

```
library(ggplot2)
library(dplyr)
library(readxl)
library(latex2exp)

# Parametros:
a0 <- 5; a1 <- 0.9; X_0 <- (a0/(1 - a1)); T <- 1000
```

Por lo tanto tenemos la serie de tiempo $AR(1)$:

$$X_t = 5 + 0.9X_{t-1} + U_t$$

```
# Definimos un data frame para almacenar el proceso, agregamos una columna para el tie
X_t <- data.frame(Tiempo = c(0:T))

#  Parte estocastica de la serie de tiempo:
set.seed(12345)

# Agregamos un término estocástico al data frame
X_t$U_t <- rnorm(T+1, mean = 0, sd = 4)
```

En este caso el termino estocastico tiene una media de 0 y una desviación estándar constante $\sigma^2 = 4$

```
# Agregamos columnas con NA's para un proceso teorico y uno real
X_t$X_t <- NA
X_t$XR_t <- NA

# La serie teórica inicia en un valor inicial X_0
X_t$X_t[1] <- X_0

# La serie real inicia en un valor inicial X_0
X_t$XR_t[1] <- X_0

# Agregamos una columna para la función de Autocorrelación teórica:
X_t$rho <-NA

for (i in 2:(T + 1)) {
  # Real:
  X_t$XR_t[i] = a0 + a1*X_t$XR_t[i-1] + X_t$U_t[i-1]
```

```
  # Teórico:
  X_t$X_t[i] = X_t$X_t[i-1] + (a1^(i-1))*X_t$U_t[i-1]

  # Autocorrelación:
  X_t$rho[i-1] = a1^(i-1)
}

head(X_t)
#>   Tiempo        U_t      X_t     XR_t      rho
#> 1      0  2.3421153 50.00000 50.00000 0.900000
#> 2      1  2.8378641 52.10790 52.34212 0.810000
#> 3      2 -0.4372133 54.40657 54.94577 0.729000
#> 4      3 -1.8139887 54.08785 54.01398 0.656100
#> 5      4  2.4235498 52.89769 51.79859 0.590490
#> 6      5 -7.2718239 54.32877 54.04228 0.531441
```

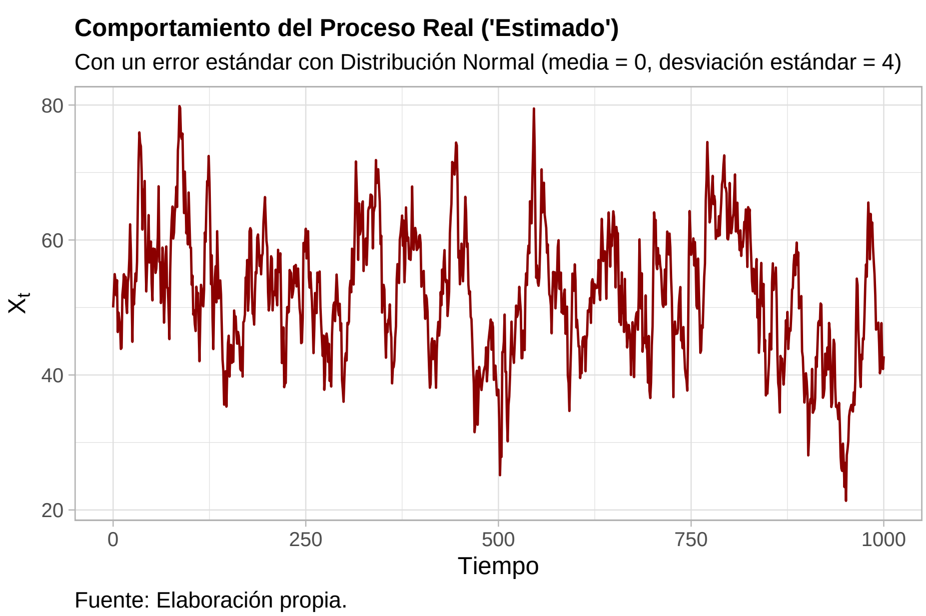


Figure 6.1: AR(1) considerando $X_t = 5 + 0.9X_{t-1} + U_t$; $X_0 = 50$ y que U_t $N(0,4)$ y que $U_t \sim \mathcal{N}(0,4)$

```
ggplot(data = X_t, aes(x = Tiempo, y = X_t)) +
  geom_line(size = 0.5, color = "#0F531C") +
  theme_light() +
  xlab("Tiempo") +
  ylab(TeX("$X_t$")) +
```