Tema III - Ex. 4

Ichim Teodora & Radu Mihai-Emilian - 2B1

Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Facultatea de Informatica Iasi

a) Consideram o problema de decizie a p-colorarii unui graf, care este NP-completa. Vom reduce aceasta problema la problema CLUST-P.
Consideram o instanta pentru problema p-colorarii:
Graf G(V,E) si un numar p, p ϵ $\mathbb{N}$
Consideram o instanta de problema pt CLUST-P in modul urmator:

$$A = V \ si \ \alpha(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \notin E \\ 3, (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

p=p, s=2
Ruland CLUST-P pe aceasta instanta, putem obtine urmatoarele rezultate:
1. DA ($\exists$ partitie) $\implies$ $\exists A_1, A_2, ..., A_p$ astfel incat

$$max_{u,v \in A_i} \alpha(u, v) \leq s \ \ \forall 1 \leq i \leq p$$

Pentru $\forall$ i=1,2,..,p coloram nodurile din multimea A_i cu culoarea i.
Presupunem ca

$$\exists (u, v) \in E \ \ a.i. \ \ c(u) = c(v)$$

c(x) este culoarea nodului x $\implies$ $\alpha(u, v) = 3$.
Dar, u,v in aceeasi multime $\implies$ $\alpha(u, v) \leq 2$
Contradictie! $\implies$ admite o p-colorare.

2. NU $\implies$ $\nexists$ partitie.
Presupunem ca graful admite o p-colorare
Consideram A_i=multimea nodurilor colorate cu valoarea i.
Consideram u,v din aceeasi multime $\implies$ $(u, v) \notin E$
$\implies$ $\alpha(u, v) = 1$ $\implies$ $\alpha(u, v) \leq s$
Deoarece u si v au fost alese arbitrar $\implies$

$$max_{u,v \in A_i} \ \ \alpha(u, v) \leq s \ \ \forall 1 \leq i \leq p$$

$\implies$ $A_1, A_2, ..., A_p$ o partitie valida pentru CLUST-P.
Contradictie! $\implies$ graful nu admite p-colorare
Din (1) si (2) $\implies$ raspunsul pt p-coloare este identic cu raspunsul pentru CLUST-P $\implies$ p-colorare se reduce la CLUST-P $\overset{p-colorareNP-completa}{\implies}$ CLUST-P NP-completa.

b) Fiecarui obiect din A, ii asociem un varf in graful G.

$$\exists (v_i, v_j) \in E \iff \alpha(v_i, v_j) > s$$

Aratam ca A admite o pozitie in 2 multimi $\iff$ G este bipartit. " $\implies$ "
Consideram A_1, A_2 o partitie astfel incat $max_{u,v \in A_i} \alpha(u, v) \leq s \ \ \forall 1 \leq i \leq p$
Presupunem (u,v) $\in$ E cu (u,v) in aceeasi multime $\implies$ $\alpha(u, v) \leq s$ dar cum $\alpha(u, v) > s$ $\implies$
Contradictie! $\implies$ Graful este bipartit.

" $\impliedby$ "
Graf bipartit $\implies$ $\exists A_1, A_2$ o partitie a lui V astfel incat $\exists$ muchii doar de la o multime la alta.
Consideram u,v arbitrare din aceeasi multime

$$\implies (u, v) \notin E \implies \alpha(u, v) \leq s \implies max_{u,v \in A_i} \ \ \alpha(u, v) \leq s \ \ \forall 1 \leq i \leq 2$$

$\implies$ A admite o partitie valida.

```
c[0...v-1]=-1
function DFS(v,color)
   c[v]=color
   for u in N(v)
      if c[u]==-1
         if !DFS(u,1-color) return false
         else if c[u]==c[v] return false
      return true

\\ main()
if DFS(0,0)
   print(BIPARTIT)
else
   print(NOT BIPARTIT)
```

Algoritmul este de complexitate O(m+n)