Tema III - Ex. 3

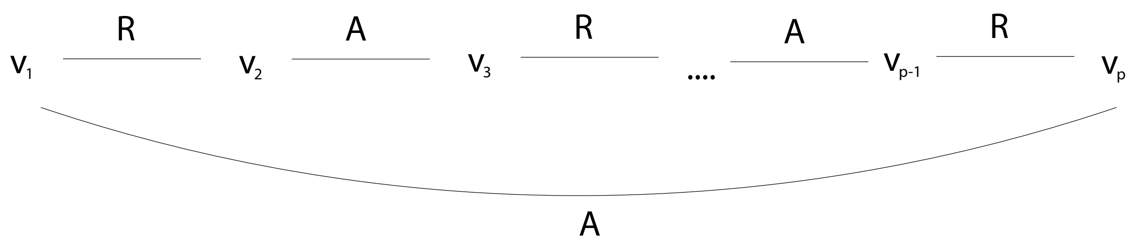
Ichim Teodora & Radu Mihai-Emilian - 2B1

Universitatea Alexandru Ioan Cuza Iasi, Facultatea de Informatica

a) G nu este 2 ring $\implies$

$$\begin{cases} 1) & \forall \text{ v, d(v) par si m par} \\ 2) & \exists \text{ v astfel incat d(v) impar} \end{cases} \tag{1}$$

1) $\forall$ v, d(v) par, G conex $\implies$ G admite un ciclu eulerian



Mergand pe ciclu, coloram alternativ muchiile cu rosu si albastru. Muchia $v_1 v_p$ este albastra deoarece m este par. Consideram un varf v arbitrar si ne uitam la toate aparitiile lui in ciclu. Pentru fiecare astfel de aparitie $\exists$ o muchie si una albastra $\implies$ nr de muchii rosii incidente cu v = numarul de muchii albastre incidente cu v.

$$\implies |c_w^{-1}(R) - c_w^{-1}(A)| = 0 \implies$$
G admite o 2 - colorare-fair

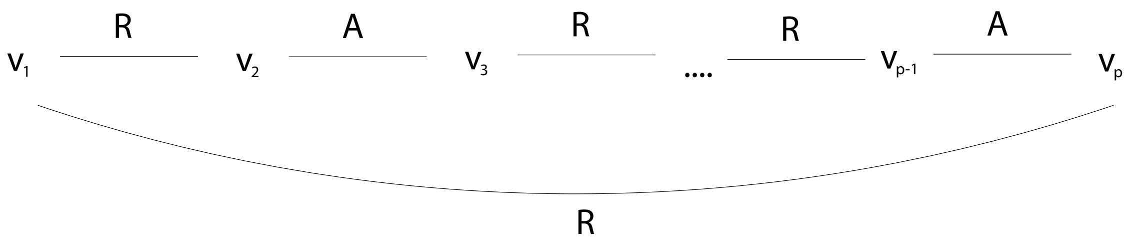
2) $\exists$ nr par de noduri de grad impar.
Fie $u_1, u_2, ..., u_{2k}$ multimea acestor noduri.
Grupam nodurile 2 cate 2 cu $(u_1 u_2), (u_3 u_4) ... (u_{2k-1} u_{2k})$ si adaugam cate o muchie intre nodurile grupate (k-muchii). $\implies$ fiecare nod are grad par, G' conex $\implies$ G' admite un ciclu eulerian.

i) m par $\implies$ procedam ca la (1) $\implies$ obtinem o colorare 2-colorare-fair $c_v^{-1}(R) = c_v^{-1}(A) \; \forall \; v \epsilon V$

Deoarece $v \epsilon V$ se elimina maxim o muchie incidenta cu el $\implies$
$|c_v{-}1 - c_v^{-1}(A)| \leq 1$

$ii)$ m impar $\implies$ procedam ca la (2) doarca muchia $v_m v_1$ o sa fie de aceeasi culoare cu muchia $v_1 v_2$.

Fara a restrange generalitatea presupunem ca $v_1 v_2$ este o muchie adaugata de noi, deci va fi eliminata.
Pentru $\forall v \epsilon V \setminus \{v_1\}$ inecuatia este adevarata folosind (i).
Pentru v_1 initial diferenta este 2, nr muchii rosii = 2+nr muchii albastre



Singura muchie eliminata incidenta cu v_1 este $v_1 v_2$ care este rosie $\implies$ diferenta devine 1.
din (1,2) $\implies$ G admite o 2-colorare-fair.

b) Presupunem ca G admite o p-colorare-fair.
Aratam ca $\forall v \epsilon V, |c_v^{-1}(h) - c_v^{-1}(k)| = 0 \;\; \forall 1 \leq h, k \leq p.$
Fie $k_i(v) = |c_v^{-1}(i)|, \;\; i = 1, 2, ..., p$
Fie v un nod arbitrar, fara a restrange generalitatea, consideram $k_i(v) \leq k_2(v) \leq .... \leq k_p(v) \;\; (*)$
Presupunem ca $k_p(v) \neq k_1(v)$ si cum G admite o p-colorare-fair $\implies$ $k_p(v) = 1 + k_1(v)$
$\implies$ In $(*) \exists$ r valori egale cu $k_1(v)$ si p-r valori egale cu $k_1(v)+1, \; 1 \leq r \leq p-1$
$d(v) = k_1(v)+k_2(v)+...+k_p(v) = r \times k_1(v) + (p-r)(k_1(v)+1) = p \times k_1(v) + p - r$, p-r ϵ {1, ... , p-1}
$\implies$ $p \nmid d(v)$ $\implies$ G nu este p-ring
Contradictie! $\implies$ $k_1(v) = k_p(v)$ $\implies$ $k_1(v) = k_2(v) = ... = k_p(v)$

$$2m = \sum_{v \epsilon V} d(v) = \sum_{v \epsilon V} \sum_{i=1}^{p} k_i(v) = \sum_{v \epsilon V} p \times k_1(v) = p \times \sum_{v \epsilon V} k_1(v)$$

$$2m = p \times 2 \times nr_1$$

nr_1=nr muchii colorate cu culoarea 1 din G.

$$m = p \times nr_1 \implies p | m \implies$$

G nu admite o p-colorare-fair.