

## Tema II - Ex. 2

Ichim Teodora & Radu Mihai-Emilian - 2B1

Consideram ca  $G$  contine  $p$  muchii ce genereaza un cuplaj.

Fie  $H = G \times K_{|G|-2p} \implies H$  are un cuplaj perfect deoarece varfurile nemarcate in  $V$  vor putea fi marcate folosind muchiile adaugate astfel.

"  $\implies$  "

$$\stackrel{(T.Tutte)}{\implies} \forall S' \subseteq V(H), q(H - S') \leq |S'|$$

Consideram ca pentru  $\forall S \subseteq V(G), S' = S + |G| - 2p \implies G - S = H - S'$

$$\implies q(G - S) = q(H - S') \leq |S'| = |S| + |G| - 2p$$

"  $\Leftarrow$  "

$H$  are  $|G| + |G| - 2p$  varfuri adica  $2(|G| - p) \implies q(H - \emptyset) = 0 \implies$  ca sa il deconectam pe  $H$  trebuie sa scoatem toate varfurile adaugate

$$\implies \forall S' \subset H, q(H - S') \leq 1$$

Consideram  $S'$  ce contine toate varfurile adaugate si  $S = S' \cap G \implies$

$$\begin{aligned} H - S' &= (G \cup K_{|G|-2p}) - S' = G - S \implies \\ q(H - S') &= q(G - S) \leq |S| + |G| - 2p = |S'| \end{aligned}$$

$\implies H$  satisface  $T. Tutte$  si contine un cuplaj perfect. In  $G$  cel mult  $|G| - 2p$  de varfuri sunt cuplate folosind muchiile pe care le-am adaugat  $\implies$  cel putin  $|G| - (|G| - 2p) = 2p$  varfuri sunt cuplate folosind muchiile originale  $\implies G$  are un cuplaj de cardinal  $p$ .