Zestaw 2
Statystyczna Analiza Danych

Emilia Wiśnios

24 marca 2021

1. **Rozmiar testu, moc testu a liczebność**

   Niech $\{X_1, ..., X_n\}$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(m, 2^2)$. Hipotezę $H_0 : m = 1$ przy alternatywie $H_1 : m = 3$ będziemy weryfikować, wykorzystując test o zbiorze krytycznym postaci $\{(x_1, x_2, ..., x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_\alpha\}$.

   - Wyznacz k_α, aby otrzymać test o rozmiarze 0.05.
   - Jak dużą próbę losową należy pobrać, aby uzyskać test o mocy nie mniejszej niż 0.95?

   Rozwiązanie:

   $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, 2^2), \quad H_0 : \mu = 1, \quad H_1 : \mu = 3$

   Zbiór krytyczny: $K = \{x : \sum x_i \geq k_\alpha\}$

$$\sum x_i \sim (n\mu, n\sigma^2)$$

$$P_{\mu=1}(x \in K) = P_{\mu=1}(\sum x_i \geq K_\alpha) = P_{\mu=1}\left(\frac{\sum x_i - n}{2\sqrt{n}} \geq \frac{k_\alpha - n}{2\sqrt{n}}\right) = 1 - \psi\left(\frac{k_\alpha - n}{2\sqrt{n}}\right) = 0.05$$

$$\psi\left(\frac{k_\alpha - n}{2\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$\frac{k_\alpha - n}{2\sqrt{n}} = z_{0.95} = 1.65, \quad \Rightarrow \quad k_\alpha = 3.3\sqrt{n} + n$$

   Moc testu:

$$P_{\mu=3}(\sum x_i \geq k_\alpha) = P_{\mu=3}(\sum x_i \geq 3.3\sqrt{n} + n) = P_{\mu=3}\left(\frac{\sum x_i - 3n}{2\sqrt{n}} \geq \frac{3.3\sqrt{n} + n - 3n}{2\sqrt{n}}\right) =$$

$$1 - \psi(1.65 - \sqrt{n}) \geq 0.95$$

$$\psi(1.65 - \sqrt{n}) \leq 0.05$$

$$1.65 - \sqrt{n} \leq -20.95$$

$$\sqrt{n} > 3.3$$

$$n > (3.3)^2$$

2. **Rozmiar testu**

   Wyhodowano nową odmianę pewnej rośliny. Hipotezę, że kiełkuje 70% sadzonek, wobec hipotezy alternatywnej, że kiełkuje więcej niż 70%, testowano na podstawie próbki 10 sadzonek. Hipotezę zerową odrzucamy, gdy wykiełkuje 8 lub więcej sadzonek.

   - Czy rozmiar tego testu jest mniejszy niż 0.05?
   - Jaki jest rozmiar innego testu, który odrzuca hipotezę zerową, jeśli wszystkie sadzonki wykiełkują?

   Rozwiązanie: $H_0 : p = 0.7,\ H_1 : p > 0.7$

   Zbiór krytyczny: $K = \{S_{10} \geq 8\}$

   Rozmiar testu:

   $$P_{H_0}(S_{10} \geq 8) = \binom{10}{8}(0.7)^8(0.3)^2 + \binom{10}{9}(0.7)^9(0.3) + \binom{10}{10}(0.7)^{10} = 0.38$$

   Druga kropka:

   $$K = \{S_{10} = 10\}$$

   $$P_{H_0}(S_{10} = 10) = \binom{10}{10}(0.7)^{10} = 0.02..$$

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11. W 100 laboratoriach przeprowadzono niezależnie taki sam test na poziomie istotności 0.05. Zakładając, że hipoteza zerowa jest prawdziwa, oblicz prawdopodobieństwo, że w przynajmniej jednym z laboratotoriów została ona odrzucona.

    Rozwiązanie: P (odkrycie laboratorium) $= 0.05$

    Szukamy P(którekolwiek laboratorium odkryje)

    $1 - P(\text{nie ma odkryć}) = 1 - (0.95)^{100} = 1 - 0.006$