Гусейнов Эмил 3822Б1ФИ2

Постановка задачи:

Решить задачу целочисленного линейного программирования, используя 1 алгоритм Гомори

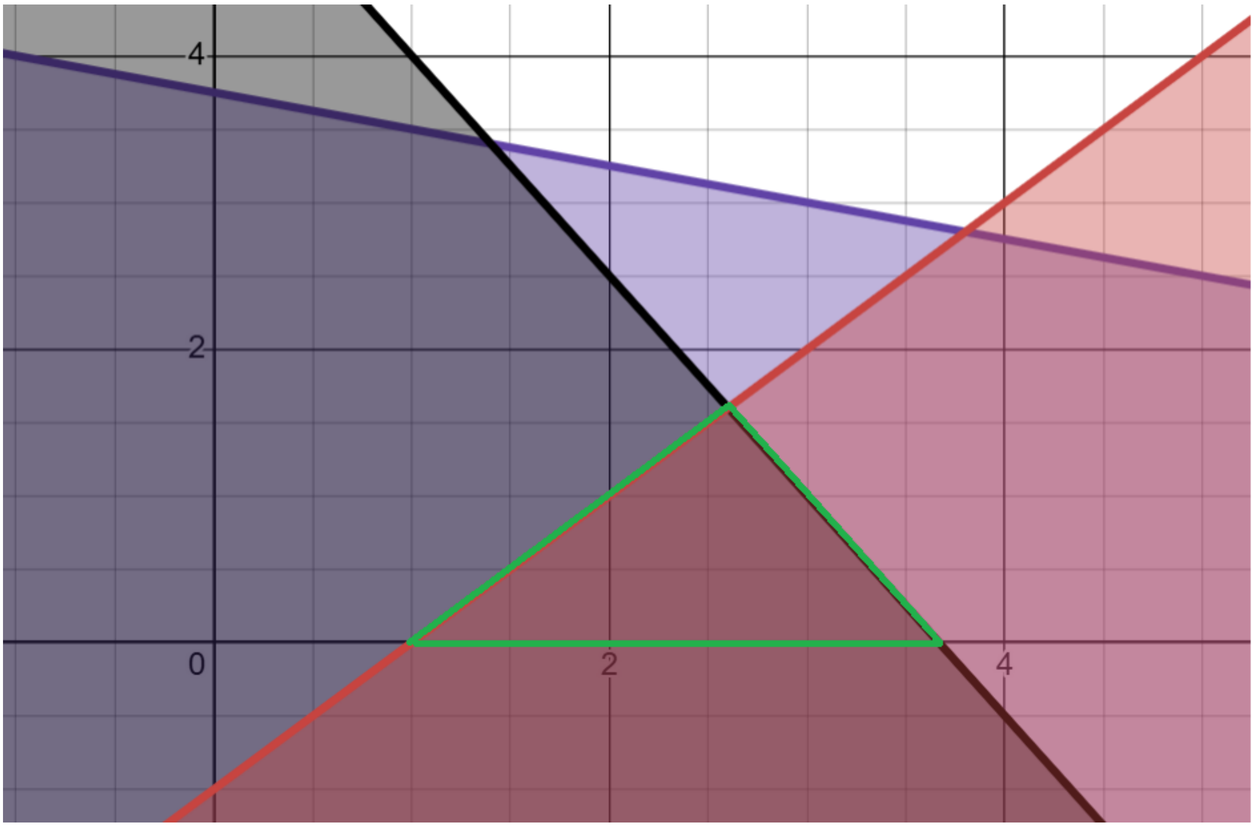
Задача: найти max $x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 11 \\ -x_1 + x_2 \le -1 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \in Z^+$

Алгоритм заключается в том, что сначала решим симплекс методом задачу линейного программирования, если решение не целочисленное, то будем уменьшать область поиска, добавив новое ограничение и снова решим ЗЛП симплекс методом, пока не получим оптимальное решение в целых числах.

Сделаем графики по условиям задачи



Зеленым треугольником выделена область, удовлетворяющая всем условиям, мы будем искать решение из этого треугольника.

Запишем все наши условия в столбцовую матрицу, где с помощью операций со столбцами будем приводить матрицу к нужному нам виду (элементы в 1 столбце должны быть положительными, а коэффициенты переменных целевой функции отрицательными). Матрицу такого вида будем называть оптимальной.

		x_1	x_2
f	0	1	2
x_1	0	1	0
x_2	0	0	1
x_3	15	-1	-4
x_4	11	-3	-2
x_5	-1	1	-1

На каждой итерации будем выбирать ведущий элемент. Будем выделять ведущий элемент красным цветом, также будем писать последовательность операций над столбцами.

		x_1	x_2
f	0	1	2
x_1	0	1	0
x_2	0	0	1
x_3	15	-1	-4
x_4	11	-3	-2
x_5	-1	1	-1

1. [2] $*(-\frac{1}{3})$
2. [1] – [2] * 11
3. [3] + [2] * 2

		x_4	x_2
f	$\frac{11}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	$\frac{11}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$
x_2	0	0	1
x_3	$\frac{34}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-10}{3}$
x_4	0	1	0
x_5	$\frac{8}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-5}{3}$

Матрица не оптимально, выбираем новый ведущий элемент.

		x_4	x_2
f	$\frac{11}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	$\frac{11}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$
x_2	0	0	1
x_3	$\frac{34}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-10}{3}$
x_4	0	1	0
x_5	$\frac{8}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-5}{3}$

1. [3] * (- $\frac{3}{5}$)
2. [2] + [3] * $\frac{1}{3}$
3. [1] - [3] * $\frac{8}{3}$

x_4 x_5

f	$\frac{29}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-4}{5}$
x_1	$\frac{13}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	$\frac{8}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$
x_3	6	1	2
x_4	0	1	0
x_5	0	0	1

Мы получили оптимальную матрицу, но для симплекса метода. То есть наша целевая функция выглядит следующим образом:

$$f = \frac{29}{5} - \frac{3}{5} x_4 - \frac{4}{5} x_5$$

Мы получили не целое решение, поэтому будем делать отсечения.

Сделаем преобразования в целевой функции.

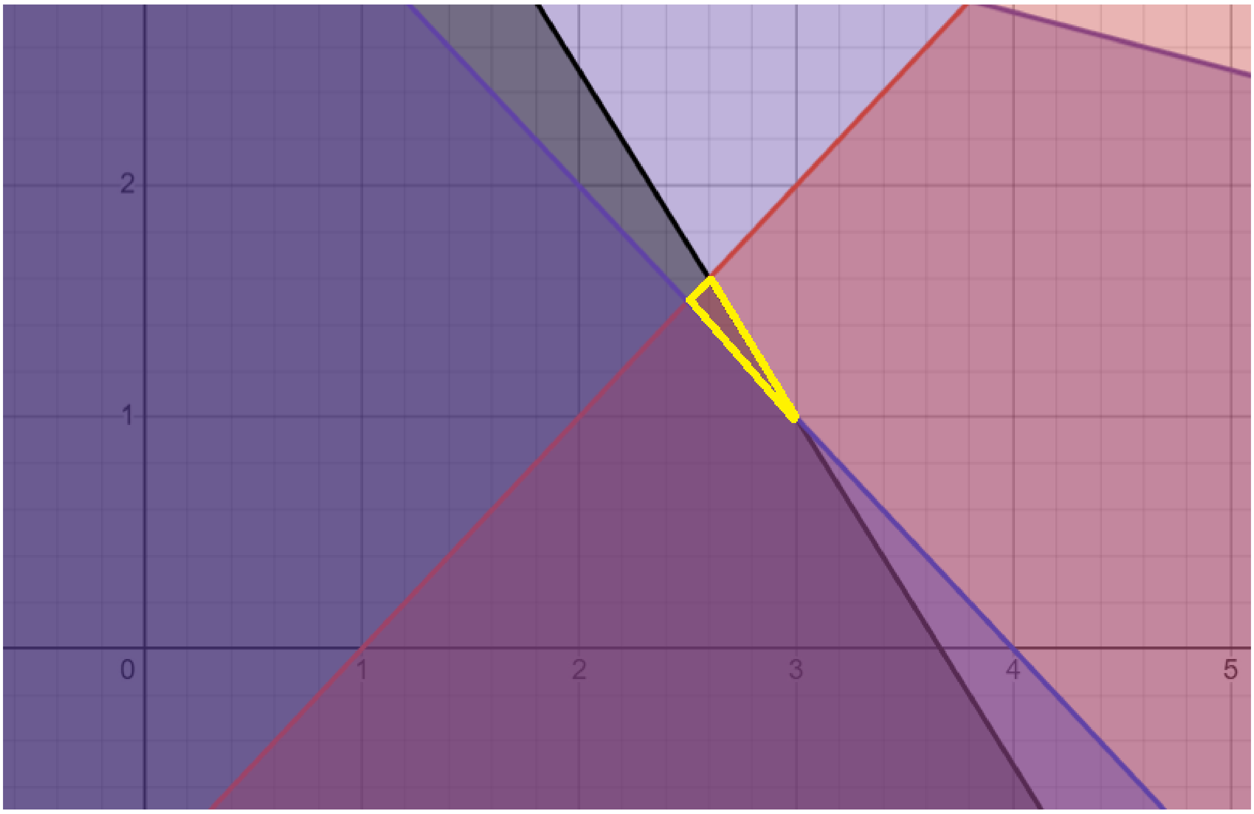
$f = \lfloor\frac{29}{5}\rfloor + \{\frac{29}{5}\} + (\lfloor- \frac{3}{5}\rfloor + \{- \frac{3}{5}\})\ x_4 + (\lfloor- \frac{4}{5}\rfloor + \{- \frac{4}{5}\})\ x_5$

Из такой записи можем получить отсечение:

$S = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 \geq 1$

Из этого следует:

$S = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 \geq 0$



Желтым треугольником выделена отсечённая область.

Запишем отсечение в нашу матрицу:

		x_4	x_5
f	$\frac{29}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-4}{5}$
x_1	$\frac{13}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	$\frac{8}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$
x_3	6	1	2
x_4	0	1	0
x_5	0	0	1

S	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Матрица вновь не оптимальна, будем повторять преобразования.

		x_4	x_5
f	$\frac{29}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-4}{5}$
x_1	$\frac{13}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	$\frac{8}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$
x_3	6	1	2
x_4	0	1	0
x_5	0	0	1
S	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

1. [2] * $\frac{5}{2}$
2. [1] + [2] * $\frac{1}{5}$
3. [3] - [2] * $\frac{1}{5}$

		x_4	x_5
f	$\frac{11}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_1	$\frac{5}{2}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_3	$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_5	0	0	1
S	0	1	0

Полученное решение также не является оптимальным для ЗЦЛП. Сделаем новое отсечение.

$$f = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

$f = \lfloor\frac{11}{2}\rfloor + \{\frac{11}{2}\} + (\lfloor-\frac{3}{2}\rfloor + \{-\frac{3}{2}\})\, x_4 + (\lfloor-\frac{1}{2}\rfloor + \{-\frac{1}{2}\})\, x_5$

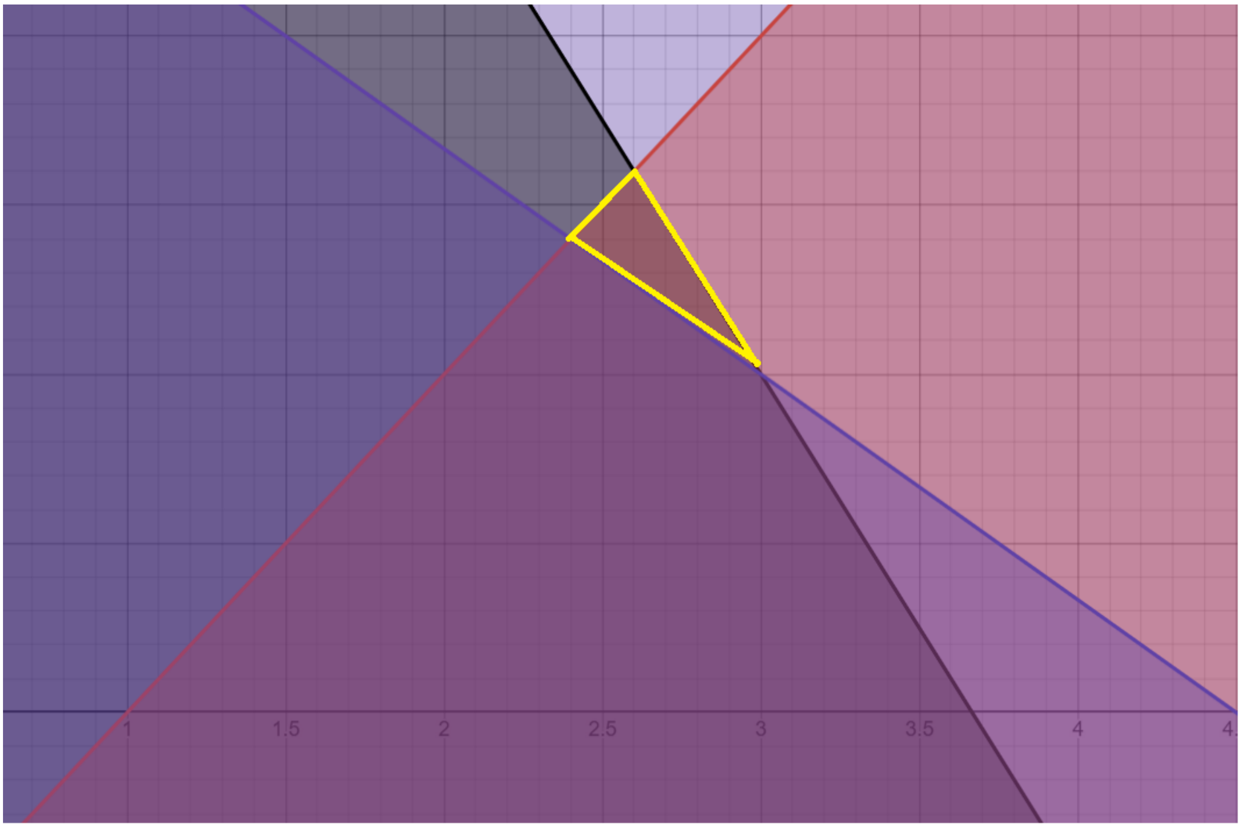
Из такой записи можем получить отсечение:

$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq 1$

Из этого следует:

$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq 0$

Далее можно наглядно увидеть, что область поиска снова уменьшилась, поэтому мы будем повторять те же действия, но уже с другим отсечением.



		x_4	x_5
f	$\frac{11}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_1	$\frac{5}{2}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_3	$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-1}{2}$
x_5	0	0	1
S	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

1. [3] * 2
2. [1] + [3] * $\frac{1}{2}$
3. [1] - [3] * $\frac{1}{2}$

		x_4	x_5
f	5	-1	-1
x_1	3	-1	1
x_2	1	0	-1
x_3	8	1	3
x_4	0	3	-1
x_5	1	-1	2
S	0	0	1

Мы получили оптимальную матрицу для ЗЦЛП.

Ответ: max $x_1 + 2x_2 = 5$