



AMELIORER LES PERFORMANCES D'UN AXE ASSERVI

CORRIGE

RAPPEL DE LA PROBLEMATIQUE

Comment optimiser les performances de positionnement d'un système asservi ?

TOUTE L'EQUIPE

Le TP peut maintenant commencer : on se placera, pour débiter, successivement sur les onglets "Schéma structurel", "Schéma fonctionnel" et "Schéma bloc".

Vérifier que le pilotage se fait en boucle fermée (Menu "BO/BF") et que le gain du correcteur vaut 0.1 (Menu "Correcteur", onglet "PID académique") puis piloter le système avec différents échelons d'amplitude 50 mm.

A travers la rainure dans la partie supérieure du carter en plexiglas, exercer des perturbations à la main sur le chariot. Observer le comportement du système.
. Observer le comportement du système.

Se placer maintenant en boucle ouverte (Menu "BO/BF"), piloter le système avec différents échelons de tension par pas de 0.5 V.

Observer et commenter le comportement observé.

De la même façon, explorer les onglets "Schéma fonctionnel" et "Schéma bloc" :

Validation du cahier des charges

On impose le cahier des charges ci-dessous.

Exigence	Critères		Niveaux
Positionner une pièce	C1	Système asymptotiquement stable	
	C2	Amortissement caractérisé par le premier dépassement.	$D_1 < 25\%$
	C3	Rapidité caractérisée par le temps de réponse à 5 %.	$T_{5\%} < 500 \text{ ms}$
	C4	Précision caractérisée par l'écart statique (écart permanent pour une entrée en échelon)	$\varepsilon_S < 0.5 \text{ mm}$

Vérifier que le pilotage se fait en boucle fermée (Menu "BO/BF") et que le gain du correcteur vaut 0.1 (Menu "Correcteur").



TOUTE L'EQUIPE

On travaille maintenant dans l'onglet "Analyse temporelle". Générer une consigne en échelon de 100 mm d'amplitude : menu "Analyse temporelle", "Définir entrée" puis cliquer sur le bouton "Lancer mouvement" :

En observant la réponse indicielle, constater que les critères du cahier des charges ne sont pas tous respectés.

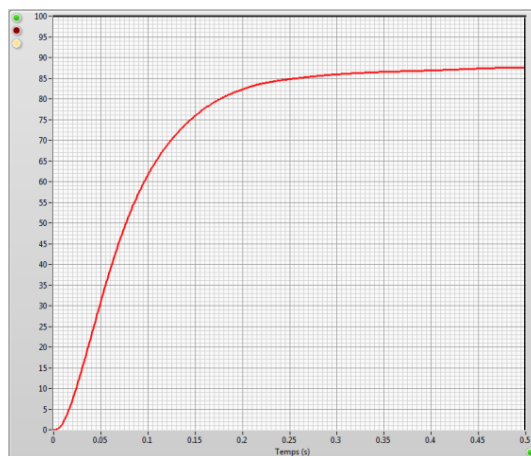
On va maintenant chercher à prévoir le comportement de l'asservissement et notamment l'influence du correcteur sur ses performances. La finalité étant de concevoir un correcteur permettant de satisfaire tous les critères du cahier des charges.

CORRECTION

En boucle fermée, la sortie se stabilise à une valeur image de la consigne. De plus, en exerçant des perturbations sur le chariot, on s'aperçoit effectivement que le système tend à les rejeter et à revenir vers une valeur proche de la consigne : il est donc bien asservi.

En boucle ouverte des tensions inférieures à 1.5 V ne permettent pas au chariot de partir.

Validation du cahier des charges :



Essai de réponse indicielle en boucle fermée, gain proportionnel $G = 0.1$

Critère C1 : Stabilité : Boucle fermée asymptotiquement stable : OK

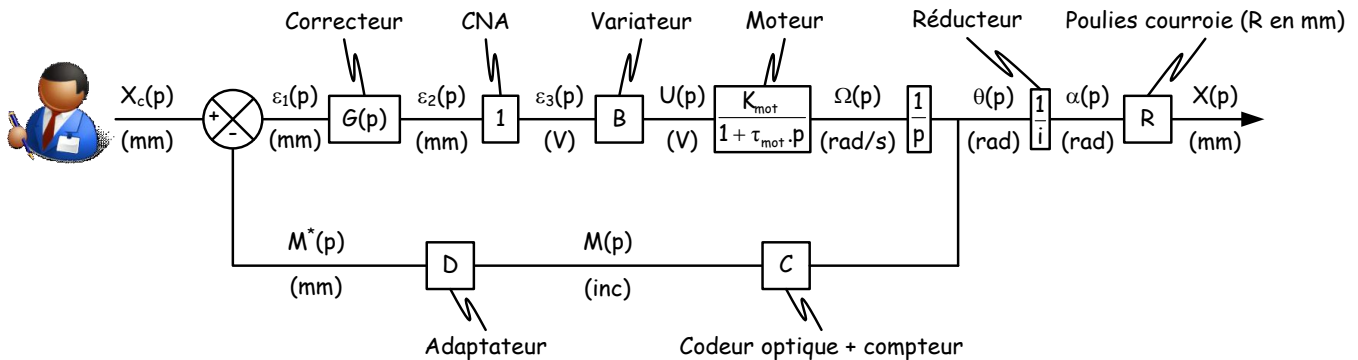
Critère C2 : Amortissement : pas de dépassement, non oscillatoire : OK

Critère C3 : Rapidité : Temps de réponse à 5% : inférieur à 200 ms, critère respecté

Critère C4 : Précision : Valeur finale = 89.6 mm soit un écart statique de 10.4 mm, critère non respecté

ANALYSTES MODELISATEURS

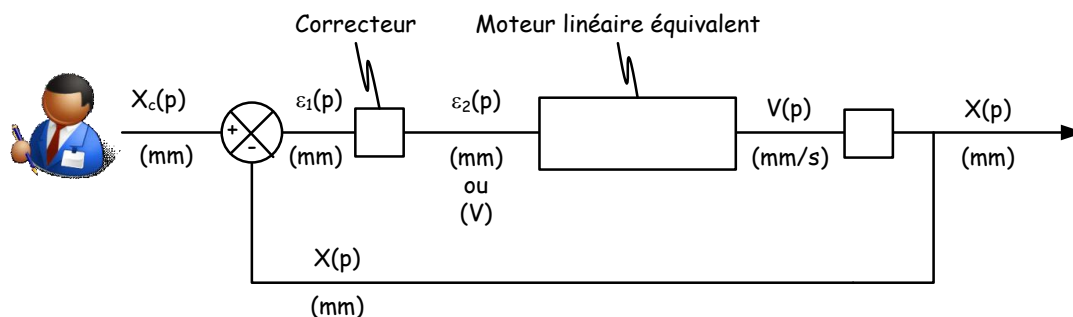
On travaille sur le schéma bloc ci-dessous :



Quel est le gain du capteur fictif de position linéaire en incréments/mm ?

Quel gain D (en mm/incréments) donner à l'adaptateur pour que le retour soit unitaire c'est-à-dire pour que $m^*(t) = x(t)$?

Donner la fonction de transfert du bloc "moteur linéaire équivalent" qui comprend le convertisseur numérique analogique, le variateur (interface de puissance), le moteur et le système de transformation de mouvement :



On considère pour commencer un correcteur proportionnel $G(p) = G$. Calculer analytiquement la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi corrigée : $H_{bo}(p)$. Préciser sa classe et son gain de boucle. On pourra la mettre sous la forme $H_{bo}(p) = \frac{G \cdot K_{eq}}{p \cdot (1 + \tau_{eq} \cdot p)}$ où l'on précisera les expressions de

K_{eq} et τ_{eq} .



ANALYSTES MODELISATEURS

On trouve alors une fonction de transfert en boucle fermée :

$$H_{bf}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K_{bf}}{1 + \frac{2\zeta_{bf}}{\omega_{nbf}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{nbf}^2}}$$

où

$$\begin{cases} K_{bf} = 1 \\ \zeta_{bf} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{G \cdot K_{eq} \cdot \tau_{mot}}} \\ \omega_{nbf} = \sqrt{\frac{G \cdot K_{eq}}{\tau_{mot}}} \end{cases}$$

D'après le modèle mis en place, analyser **qualitativement** l'influence du gain G sur les performances de l'asservissement en termes de :

- Amortissement
- Rapidité
- Précision vis-à-vis d'une entrée en échelon

CORRECTION

Le gain du capteur fictif de position linéaire a pour gain : $\frac{i \cdot C}{R}$

Le moteur linéaire équivalent a pour fonction de transfert $\frac{V(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{\frac{B \cdot K_{mot} \cdot R}{i}}{1 + \tau_{mot} \cdot p}$

Pour cela il faut avoir préalablement choisi un adaptateur de gain $D = \frac{R}{i \cdot C}$

$$H_{bo}(p) = \frac{G \cdot K_{eq}}{p \cdot (1 + \tau_{eq} \cdot p)} \text{ où } K_{eq} = \frac{B \cdot K_{mot} \cdot R}{i} \text{ et } \tau_{eq} = \tau_{mot}$$

La boucle ouverte est de classe 1 et a un gain de boucle, $K_{BO} = G \cdot K_{eq} = G \cdot B \cdot K_{mot} \cdot R / i$



CORRECTION

Prévision de l'influence du gain G sur les performances : Analyse basée sur la boucle ouverte

$$H_{bo}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_1(p)} = \frac{G \cdot K_{\text{eq}}}{p \cdot (1 + \tau_{\text{eq}} \cdot p)}$$

Performance	Effet d'une augmentation du gain de correcteur G
Stabilité	Les marges de stabilité sont toujours positives, G n'a pas d'influence sur la stabilité de la BF.
Amortissement	La marge de gain est toujours infinie, la marge de phase diminue lorsque le gain G augmente : L'amortissement diminue.
Rapidité	La pulsation de coupure à 0 dB de la BO augmente lorsque le gain G augmente : la rapidité augmente (au sens vivacité ou temps de montée).
Précision	La classe vaut 1, l'asservissement est précis pour une entrée indicielle. L'écart de poursuite pour une entrée en rampe diminue lorsque le gain G augmente : la précision s'améliore.

Prévision qualitative du comportement en BF par analyse de la fonction de transfert en BO

Prévision de l'influence du gain G sur les performances : Analyse basée sur la boucle fermée

$$H_{bf}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K_{bf}}{1 + \frac{2 \cdot z_{bf}}{\omega_{nbf}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{nbf}^2}} \quad \text{où : } \begin{cases} K_{bf} = 1 \\ \xi_{bf} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{bo} \cdot \tau_{mot}}} \\ \omega_{nbf} = \sqrt{\frac{K_{bo}}{\tau_{mot}}} \end{cases} \quad \text{et } K_{bo} = G \cdot \frac{B \cdot K_{mot} \cdot R}{i}$$

Performance	Effet d'une augmentation du gain de correcteur G
Stabilité	Les pôles de la boucle fermée sont toujours à partie réelle strictement négative (tous les coefficients du dénominateur sont strictement de même signe) : L'asservissement est toujours stable.
Amortissement	ζ_{bf} diminue lorsque G augmente : l'amortissement diminue.
Rapidité	La pulsation propre non amortie ω_{nbf} augmente lorsque le gain G augmente : La rapidité (au sens vivacité) augmente avec G .
Précision	$K_{bf} = 1$: l'asservissement est précis pour des entrées indicelles. (Raisonnement valable car retour est unitaire)

Prévision qualitative du comportement en BF par analyse de la fonction de transfert en BF



ANALYSTES EXPERIMENTATEURS

On cherche ici à analyser qualitativement l'influence du correcteur proportionnel.

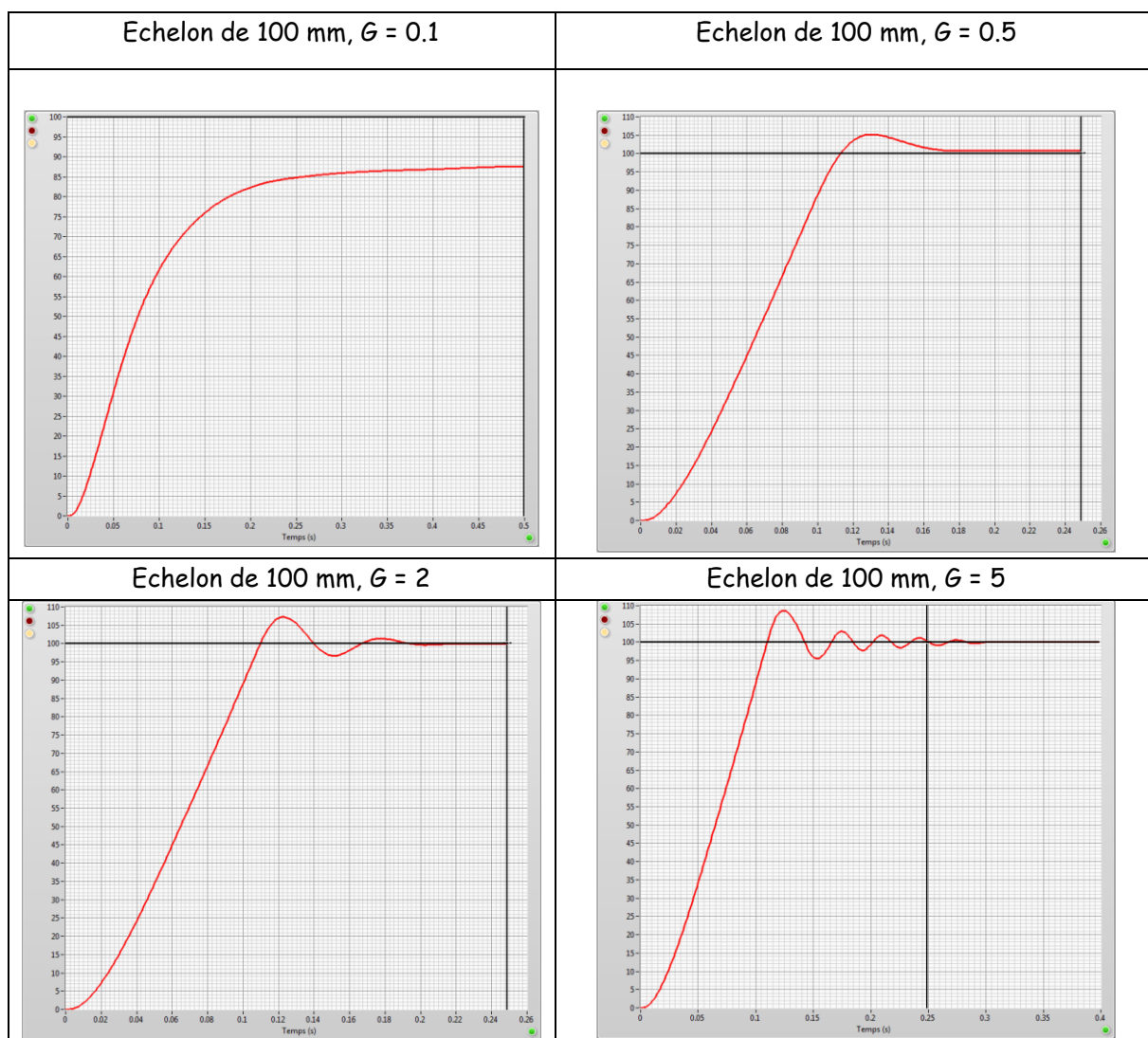
On continue à travailler dans l'onglet "Analyse temporelle". On conserve une amplitude d'échelon de 100 mm et on modifie la valeur du gain proportionnel que l'on choisira parmi {0.1, 0.5, 1, 3}.

Lancer des consignes en échelon et observer le comportement du système réel.

Quels est l'influence qualitative du gain du correcteur sur les performances en termes de :

- Amortissement
- Rapidité
- Précision

CORRECTION



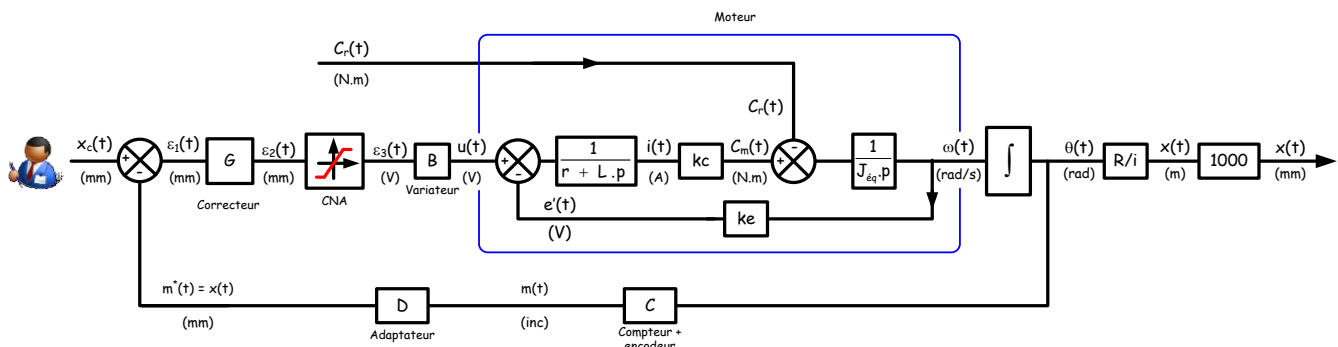


CORRECTION

Le modèle permet de prévoir les tendances en termes de rapidité et d'amortissement mais pas en termes de précision.

Le modèle mis en place laisse penser que le système est précis pour des entrées en échelon or il n'en n'est rien. En effet, il y a toujours dans le système des frottements secs. Ces frottements ramenés sur l'arbre du moteur se comportent comme un couple perturbateur $C_r(t)$. Ce couple n'ayant pas été pris en compte dans le modèle, la théorie ne permet pas de prévoir son effet.

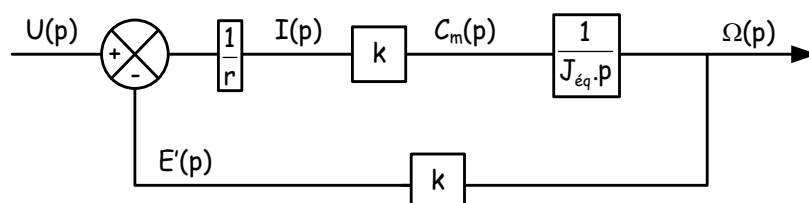
On aurait pu modéliser ce couple résistant (perturbateur) en le faisant intervenir sur le bloc "moteur". Manifestement, les perturbations ne sont pas forcément négligeables. En régime permanent, ces perturbations sont constantes alors qu'elles changent de signe en régime transitoire (mais elles sont toujours résistantes).



Il n'y a pas d'intégration en amont de ces perturbations $C_r(t)$ constantes donc le système ne les rejette pas : l'écart vis à vis de ces perturbations n'est pas nul. On sait par contre que la précision augmente avec l'augmentation du gain en amont de la perturbation, donc en particulier avec l'augmentation de G : plus le gain G est grand plus la perturbation va être rejetée et plus la précision va s'améliorer.

ANALYSTES MODELISATEURS

Exploiter le dossier technique pour renseigner les valeurs des paramètres du modèle mis en place. On pourra partir sur un modèle du moteur seul du type :





CORRECTION

Pour le moteur seul, le modèle de base serait celui-ci-dessus avec :

$$r = 5.1 \, \Omega$$

$$k = 0.21 \, (\text{N.m})/(\text{A}) \text{ ou } \text{V}/(\text{rad/s})$$

$$J_{\text{eq}} = 2.15 \times 10^{-4} \, \text{kg.m}^2$$

Pour le reste de l'asservissement on a :

$$B = 4$$

$$i = 3$$

$$R = 24.67 \text{mm (à laisser en mm dans ces applications numériques)}$$

$$\text{On a alors : } \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{r \cdot J}{k^2} \cdot p} \text{ et donc } K_{\text{mot}} = \frac{1}{k} \text{ et } \tau_{\text{mot}} = \frac{r \cdot J_{\text{eq}}}{k^2}$$

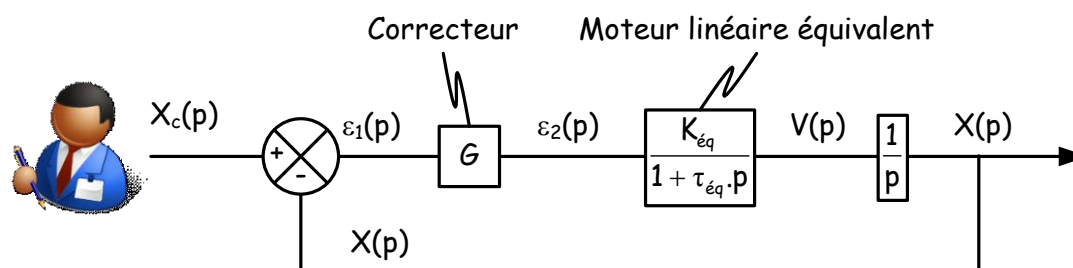
$$\text{On en conclue : } K_{\text{eq}} = \frac{B \cdot K_{\text{mot}} \cdot R}{i} \text{ et } \tau_{\text{eq}} = \tau_{\text{mot}}.$$

Un autre modèle linéaire tenant compte des frottements visqueux conduirait à :

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{k}{k^2 + f_v \cdot r}}{1 + \frac{r \cdot J_{\text{eq}}}{k^2 + f_v \cdot r} \cdot p} \text{ avec } f_v \approx 0.0014 \, (\text{N.m})/(\text{rad/s})$$

ANALYSTES EXPERIMENTATEURS

On cherche dans cette partie à mettre en place un modèle de comportement de boucle fermée.

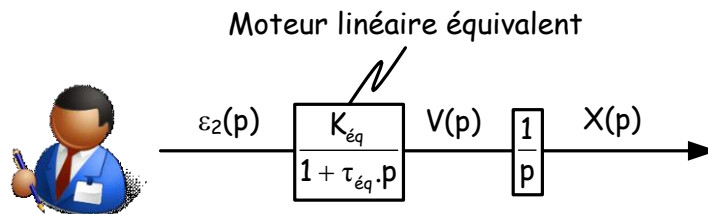


Ce modèle de comportement se résume à priori à la connaissance des deux paramètres K_{eq} et τ_{eq} .



ANALYSTES EXPERIMENTATEURS

Pour déterminer ces deux paramètres (K_{eq} et τ_{eq}), on va procéder à une identification sur la base de la réponse indicielle en boucle ouverte du moteur linéaire équivalent.



On se place en boucle ouverte (Menu "BO/BF"). Après avoir réinitialisé le système (Menu "Initialisation", "Tout réinitialisation") lancer un échelon $\varepsilon_z(t)$ de 10 V d'amplitude (Menu "Analyse temporelle", "Définir entrée").

Quel type de modèle semble pouvoir refléter le comportement de boucle ouverte observé ?

Relever la valeur finale atteinte V_∞ et la constante de temps du système τ_{eq} (éventuellement du seul mode dominant retenu).

Que retenir pour les paramètres K_{eq} et τ_{eq} ?

On pourra introduire la tension de seuil u_{seuil} que l'on calculera

On pourra introduire la tension de saturation V_{sat} que l'on calculera

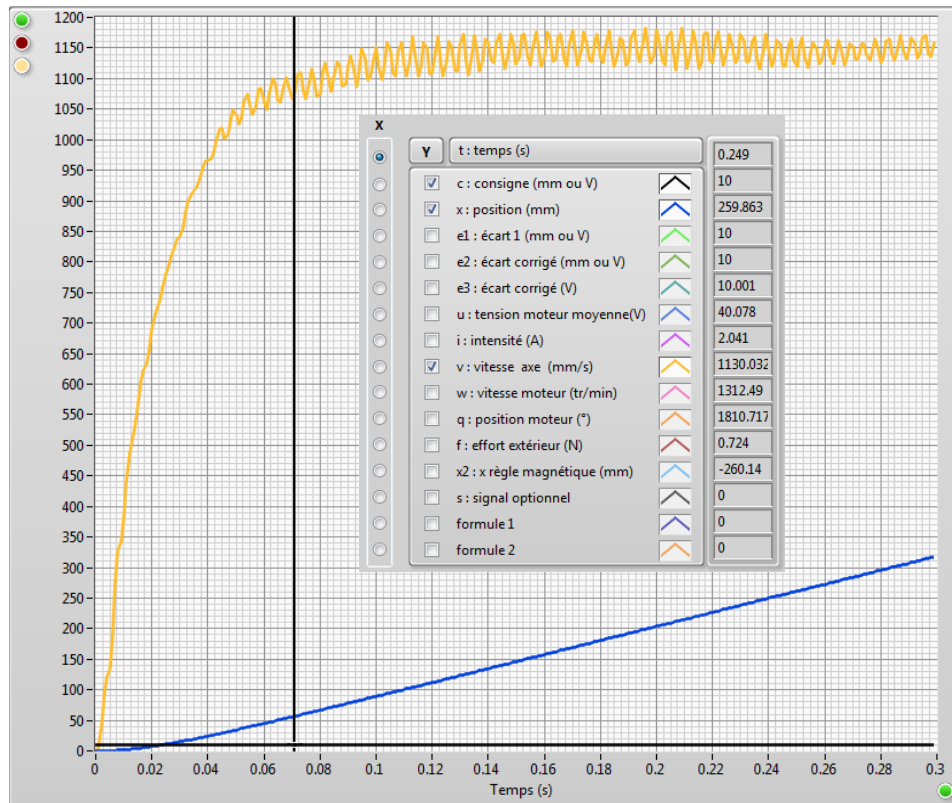
Quelle peut être l'origine physique de cette tension de seuil ? Peut-elle être considérée comme une perturbation ?

Quelle peut être l'origine physique de cette saturation ?



CORRECTION

On peut réaliser une identification basée sur la réponse en vitesse. Le modèle attendu est alors un premier ordre : modèle qui semble tout à fait convenir.



Tension $\varepsilon_2(t)$ appliquée (V)	Vitesse finale atteinte V_∞ (mm/s)	τ_{eq} (ms)
0	0	xx
2	76	xx
4	328	20
6	605	19
8	878	21
10	1140	22
15	1139	22

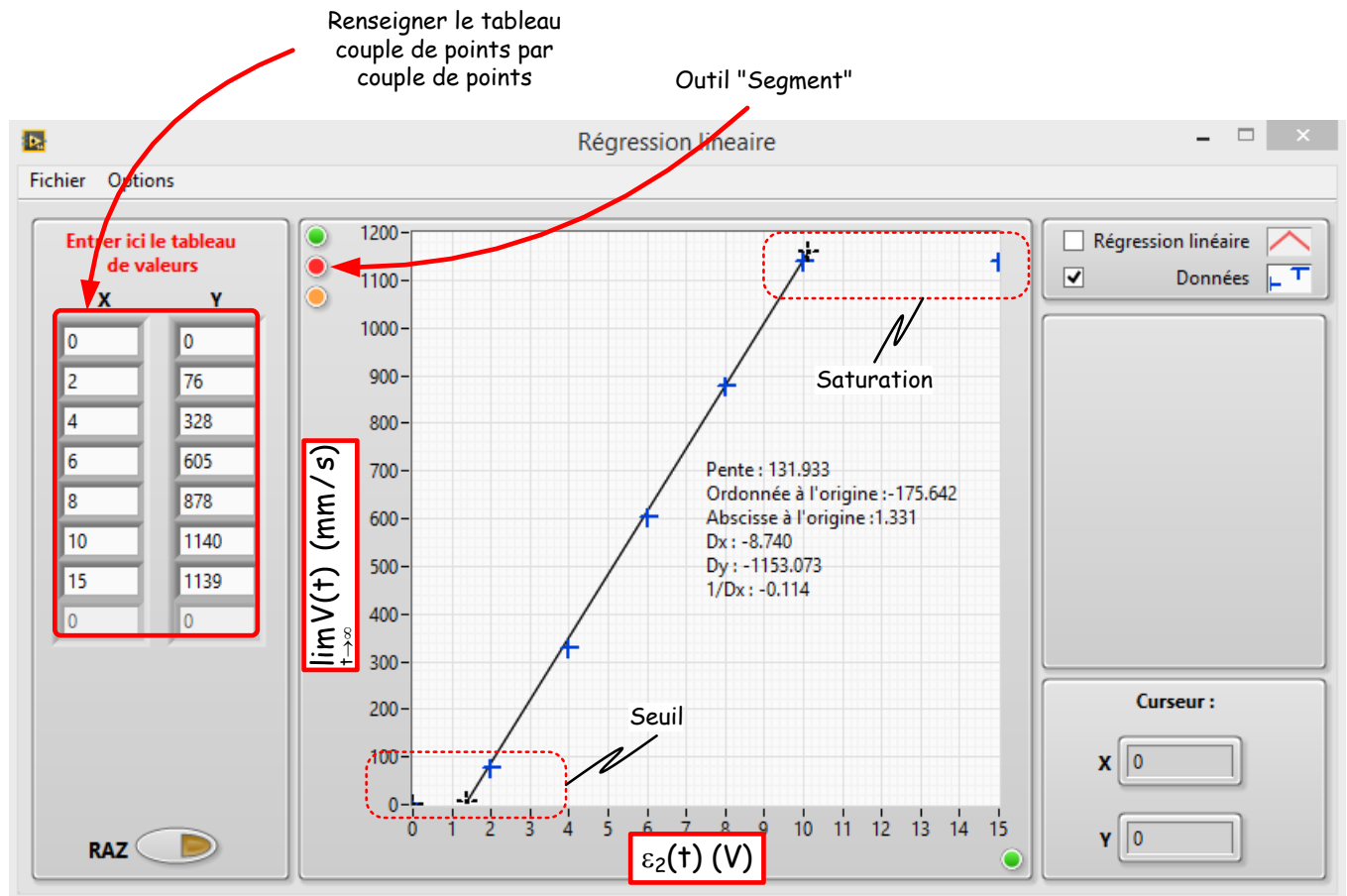
On trouve alors : $V_\infty = 1140$ mm/s et $\tau_{\text{eq}} = 22$ ms

La constante de temps est quasiment la même pour toutes les tensions d'entrée : $\tau_{\text{eq}} = 22$ ms

On peut dépouiller les résultats relatifs à la vitesse finale atteinte en traçant $V_\infty = V_\infty(\varepsilon_2)$.



CORRECTION



On peut après dépouillement retenir les paramètres suivants :

$$K_{eq} = (132 \text{ mm/s})/V$$

$$\tau_{eq} = 22 \text{ ms}$$

$$u_{seuil} = 1.5 \text{ V}$$

$$V_{sat} = 10 \text{ V}$$

La tension de seuil u_{seuil} provient des résistances passives type frottements secs ou résistances au roulement.

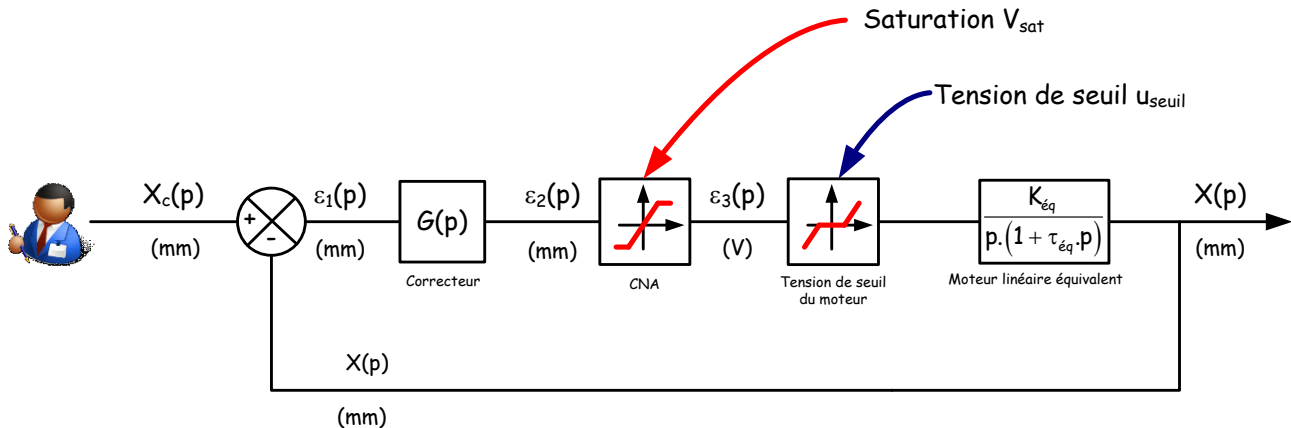
La tension de saturation provient de la carte de commande.

Nota : l'allure de la courbe obtenue montre que la méthode consistant à diviser la vitesse finale atteinte par la tension constante appliquée n'aurait pas conduit à des résultats satisfaisants à cause de la tension de seuil de 1.5 V.

TOUTE L'EQUIPE

Comparer les modèles de connaissance et de comportement mis en place. Discuter.

On présente ci-dessous un modèle non linéaire qui reflète très bien le comportement de Control'X :



Le modèle de boucle ouverte ayant été mis en place, on va maintenant le valider.

Pour cela, on va procéder à différents essais de réponses indicielles en boucle ouverte pour différentes amplitudes d'échelon : à choisir parmi {2V, 5V, 10V, 15V}.

Choisir un pilotage en boucle ouverte (Menu BO/BF) et réinitialiser la position du chariot (bouton rouge "Réinitialiser"). On commence avec $\varepsilon_2(t) = 10 \text{ V}$: Menu analyse temporelle "Définir entrée".

On se place dans l'onglet "Identification / Simulation", "Temporelle non linéaire", "Modèle 1" qui permet de comparer la réponse réelle, la réponse issue du modèle linéaire et celle issue du modèle non linéaire.

On peut dans cet onglet d'identification rajouter les deux non linéarités observées lors de l'identification de la boucle ouverte : tension de seuil u_{seuil} du moteur linéaire équivalent et saturation V_{sat} à $\pm 10 \text{ V}$.

Valider le modèle **non linéaire** de boucle ouverte pour les différentes amplitudes de tension d'entrée $\varepsilon_2(t)$. Expliquer physiquement les différences observées entre le modèle linéaire et le modèle non linéaire.

Le modèle **non linéaire** de boucle ouverte étant validé, on va l'exploiter pour prévoir le comportement de la boucle fermée qui en découle. On se place dans le cadre d'un correcteur proportionnel de gain $G(p) = G$. On choisira les gains G du correcteur parmi {0.5, 1, 5}



TOUTE L'EQUIPE

On va maintenant procéder à différents essais de réponses indicielles en boucle fermée : différentes amplitudes d'échelon et différents gains G .

Choisir un pilotage en boucle fermée (Menu "BO/BF") et réinitialiser la position du chariot (bouton rouge "Réinitialiser").

Faire un premier essai avec une amplitude d'échelon de 0 à 300 mm et un gain $G = 1$: menu "Analyse temporelle", "Définir entrée".

Valider le modèle **non linéaire** de boucle fermée.

Expliquer physiquement les différences observées entre le modèle linéaire et le modèle non linéaire.

CORRECTION

Le modèle linéaire de connaissance donne :

$$\text{Sans frottements visqueux : } \frac{V(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{\frac{B.K_{\text{mot}}.R}{i}}{1 + \tau_{\text{mot}} \cdot p} = \frac{\frac{B.R}{k.i}}{1 + \frac{r.J_{\text{eq}}}{k^2} \cdot p} = \frac{157}{1 + 0.025p}$$

La vitesse est en mm/s et la tension en volts.

$$\text{Avec frottement visqueux : } \frac{V(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{\frac{B.K_{\text{mot}}.R}{i}}{1 + \tau_{\text{mot}} \cdot p} = \frac{\frac{B.R.k}{i.(k^2 + f_v.r)}}{1 + \frac{r.J_{\text{eq}}}{k^2 + f_v.r} \cdot p} = \frac{136}{1 + 0.022.p}$$

Remarque : La constante de temps avec frottements visqueux est inférieure à celle qui n'en tient pas compte. Cela peut sembler paradoxal. Les frottements visqueux améliorent la dynamique de boucle ouverte mais en contrepartie, la vitesse finale atteinte sera moins élevée que s'il n'y en avait pas.

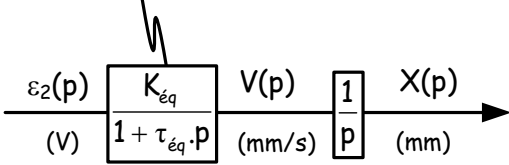
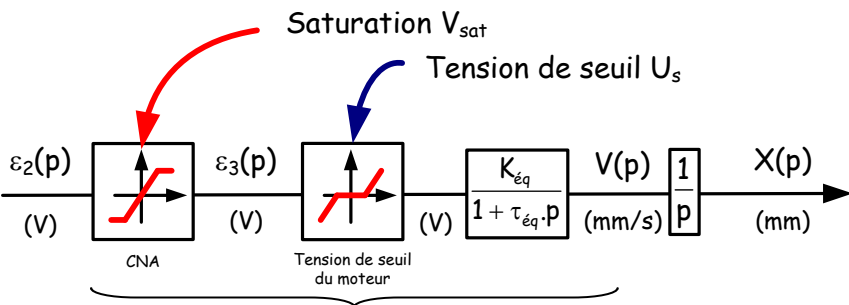
Les modèles de connaissance et de comportement sont très voisins. Les différences s'expliquent par la tension de seuil (issue des frottements secs) qui n'a pas été prise en compte. Prendre en considération ces frottements secs donne un modèle non linéaire plus fidèle à la réalité mais plus difficile à exploiter.



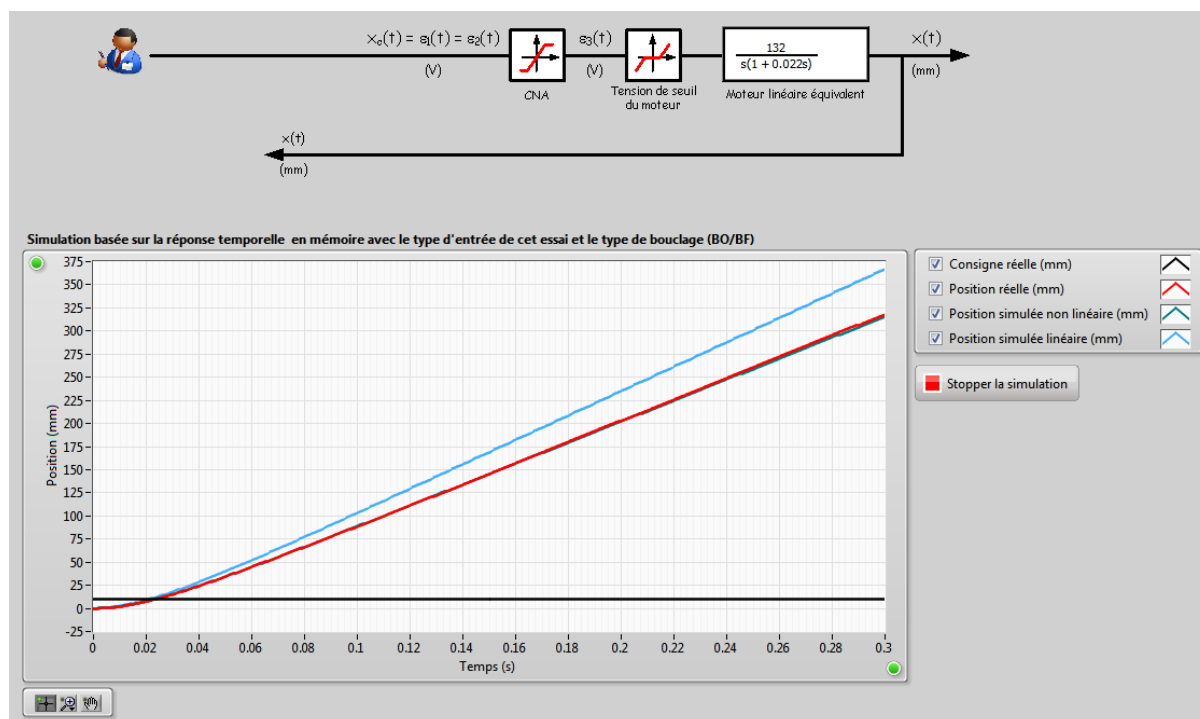
CORRECTION

Le comportement étant manifestement non linéaire, il faut à ce stade faire des choix :

On peut retenir les valeurs suivantes :

Modèle linéaire	<p>Moteur linéaire équivalent</p> 	$K_{ég} = 132$ (mm/s)/V $\tau_{ég} = 22$ ms
Modèle non linéaire (avec bande morte ou seuil)	 <p>Saturation V_{sat}</p> <p>Tension de seuil U_s</p> <p>Moteur linéaire équivalent</p>	$K_{ég} = 132$ (mm/s)/V $\tau_{ég} = 22$ ms $U_s = 1.5$ V $V_{sat} = 10$ V

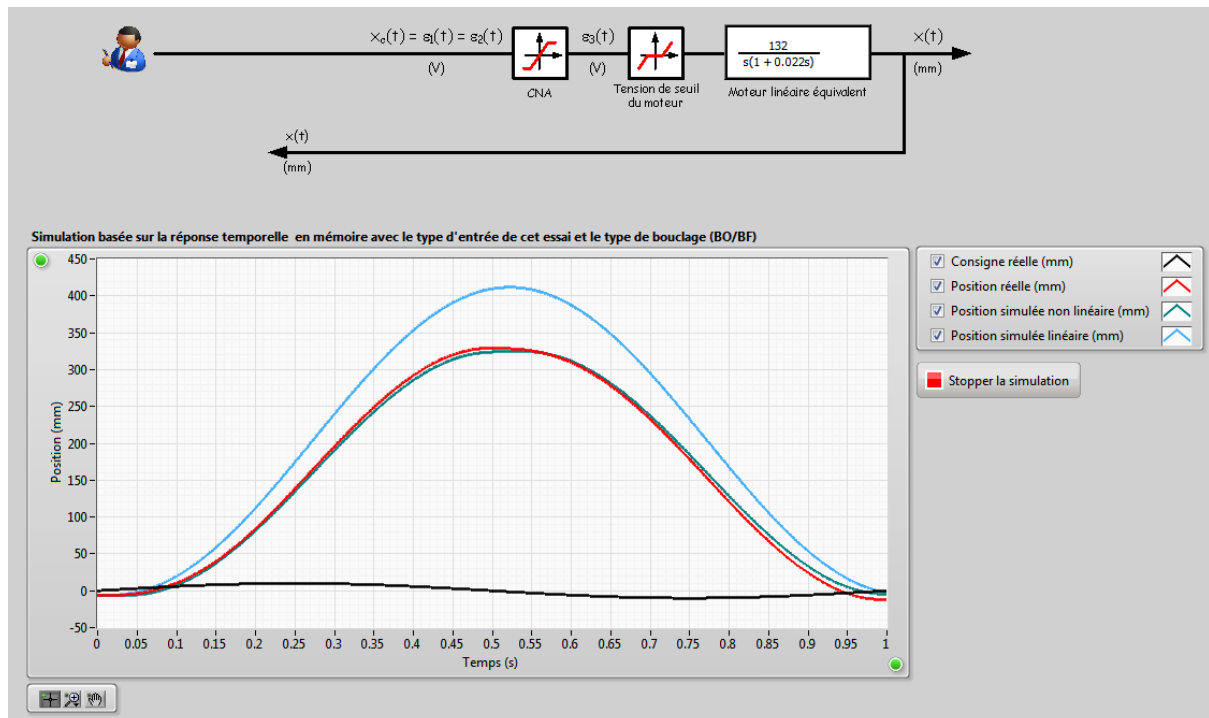
Validation du modèle de boucle ouverte :





CORRECTION

Le modèle non linéaire colle très bien sur le comportement réel. Le modèle linéaire évidemment un peu moins bien. Dans la réalité, il y a toujours 1.5 V qui ne servent pas à faire tourner le moteur mais uniquement à générer une intensité donc un couple qui permettra de lutter contre le couple de frottements secs : le système réel va donc moins vite.



Le modèle de boucle ouverte colle aussi pour une large variété d'entrées : c'est le propre d'un bon modèle.

Validation du modèle de boucle fermée :

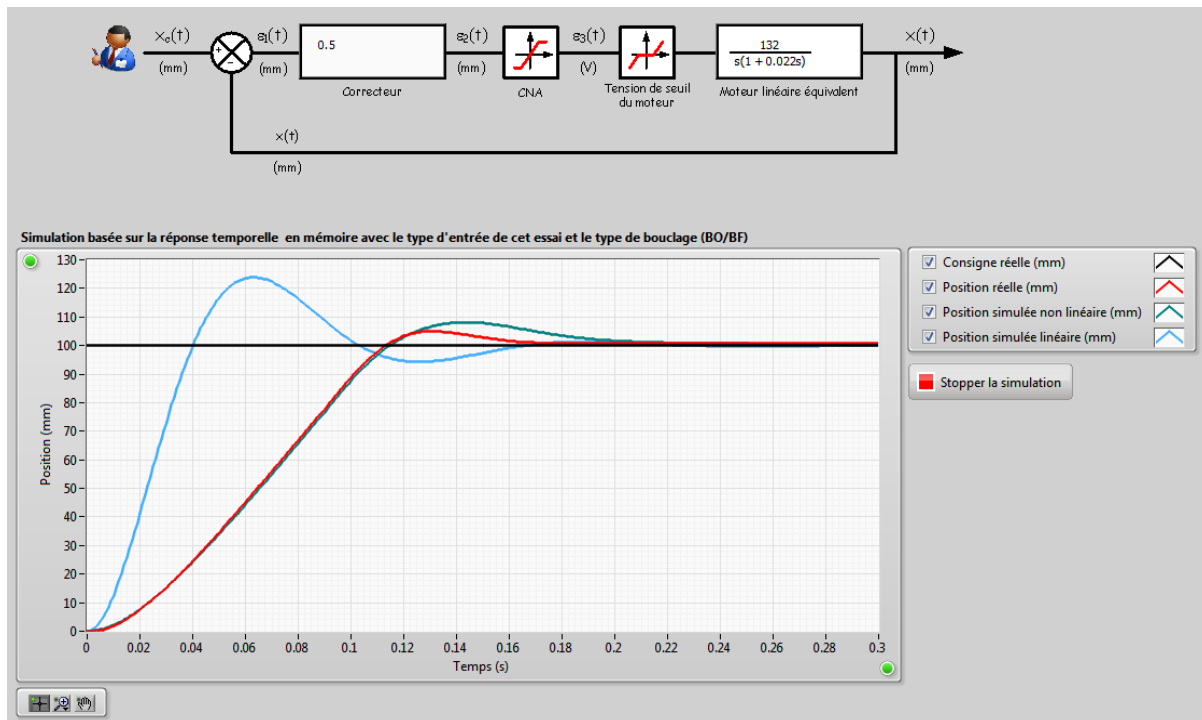
Le modèle de boucle ouverte étant bien calée, il n'y a pas de raison manifeste que le modèle de boucle fermée ne colle pas lui non plus.

Quel que soit le gain G du correcteur, le modèle non linéaire de boucle fermée reflète très bien le comportement réel.

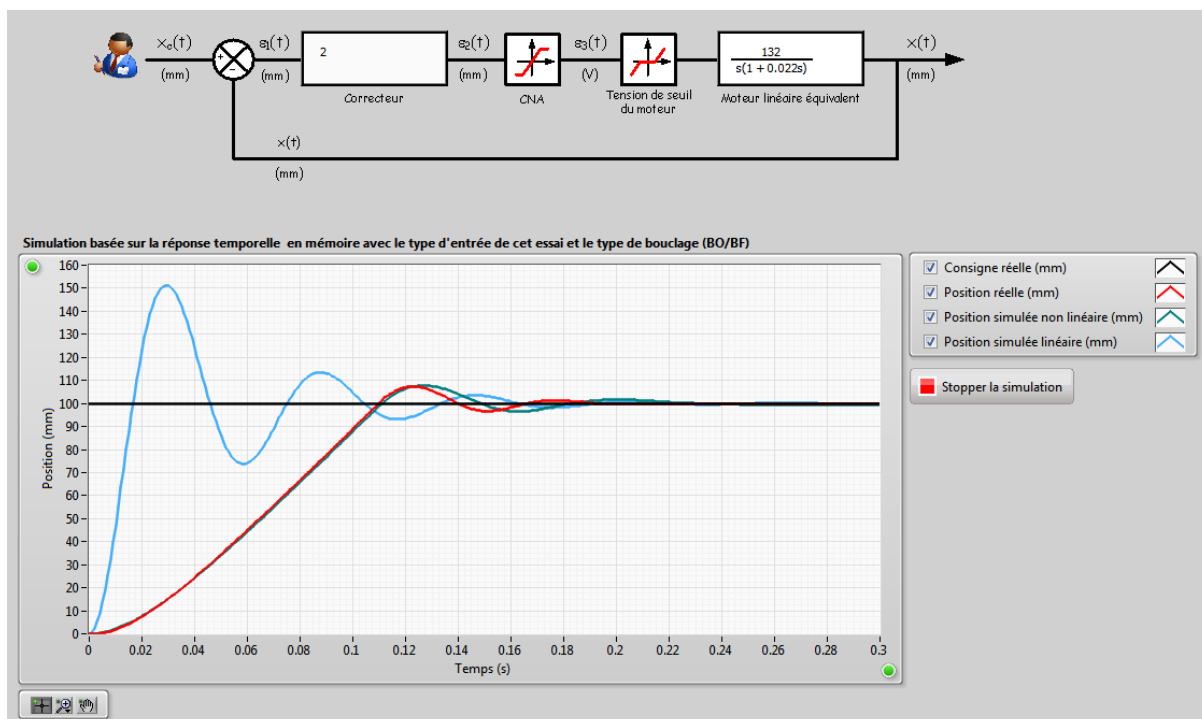
En général, les écarts modèle-réel sont plus faibles avec des gains de correcteur importants parce que les perturbations (qui ne sont prises en compte que de façon qu'approximative avec la tension de seuil) sont mieux rejetées par l'asservissement.



CORRECTION



Réponse indicielle de 100 mm, $G = 0.5$



Réponse indicielle de 100 mm, $G = 2$