Analyse des systèmes : synthèse

Émilien DURIF

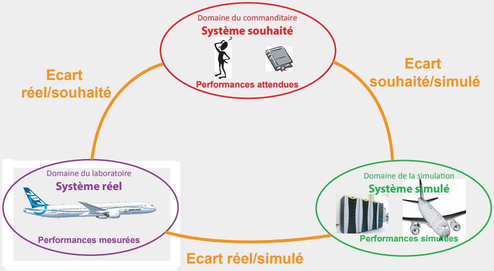
Lycée F. Roosevelt
Classe de PCSI

Plan

Introduction

La modélisation des systèmes linéaires continus et invariants peut présenté plusieurs objectifs :

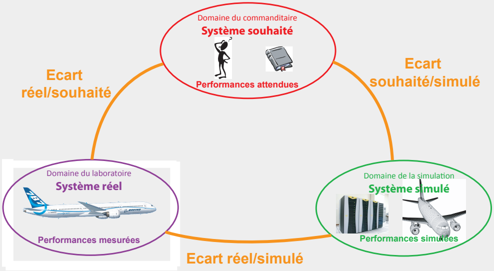
- Prévoir les performances d'un système et vérifier les performances vis-à-vis du cahier des charges.
- Identifier les caractéristiques d'un système.



Introduction

La modélisation des systèmes linéaires continus et invariants peut présenté plusieurs objectifs :

- Prévoir les performances d'un système et vérifier les performances vis-à-vis du cahier des charges.
- Identifier les caractéristiques d'un système.



Analyse des performances réelles d'un systèmes

On rappelle la méthodologie de l'analyse des performances réelles d'un système.

1. Identifier la grandeur physique à mesurer (exemple la position du bras du robot) qui peut être défini par le cahier des charges.
2. Mettre en place un protocole expérimental : à définir et à expliciter rigoureusement.
3. Effectuer la mesure avec généralement le logiciel d'acquisition dédié.
4. Analyser les données expérimentales en identifiant des zones élémentaires.
5. Vérifier la reproductibilité de la mesure en réitérant les manipulations.
6. Vérifier la limite du modèle (linéarité, vitesse de saturation, etc...).

Analyse des performances réelles d'un systèmes

On rappelle la méthodologie de l'analyse des performances réelles d'un système.

1. Identifier la grandeur physique à mesurer (exemple la position du bras du robot) qui peut être défini par le cahier des charges.
2. Mettre en place un protocole expérimental : à définir et à expliciter rigoureusement.
3. Effectuer la mesure avec généralement le logiciel d'acquisition dédié.
4. Analyser les données expérimentales en identifiant des zones élémentaires.
5. Vérifier la reproductibilité de la mesure en réitérant les manipulations.
6. Vérifier la limite du modèle (linéarité, vitesse de saturation, etc...).

Analyse des performances réelles d'un systèmes

On rappelle la méthodologie de l'analyse des performances réelles d'un système.

1. Identifier la grandeur physique à mesurer (exemple la position du bras du robot) qui peut être défini par le cahier des charges.
2. Mettre en place un protocole expérimental : à définir et à expliciter rigoureusement.
3. Effectuer la mesure avec généralement le logiciel d'acquisition dédié.
4. Analyser les données expérimentales en identifiant des zones élémentaires.
5. Vérifier la reproductibilité de la mesure en réitérant les manipulations.
6. Vérifier la limite du modèle (linéarité, vitesse de saturation, etc...).

Analyse des performances réelles d'un systèmes

On rappelle la méthodologie de l'analyse des performances réelles d'un système.

1. Identifier la grandeur physique à mesurer (exemple la position du bras du robot) qui peut être défini par le cahier des charges.
2. Mettre en place un protocole expérimental : à définir et à expliciter rigoureusement.
3. Effectuer la mesure avec généralement le logiciel d'acquisition dédié.
4. Analyser les données expérimentales en identifiant des zones élémentaires.
5. Vérifier la reproductibilité de la mesure en réitérant les manipulations.
6. Vérifier la limite du modèle (linéarité, vitesse de saturation, etc...).

Analyse des performances réelles d'un systèmes

On rappelle la méthodologie de l'analyse des performances réelles d'un système.

1. Identifier la grandeur physique à mesurer (exemple la position du bras du robot) qui peut être défini par le cahier des charges.
2. Mettre en place un protocole expérimental : à définir et à expliciter rigoureusement.
3. Effectuer la mesure avec généralement le logiciel d'acquisition dédié.
4. Analyser les données expérimentales en identifiant des zones élémentaires.
5. Vérifier la reproductibilité de la mesure en réitérant les manipulations.
6. Vérifier la limite du modèle (linéarité, vitesse de saturation, etc...).

Analyse des performances réelles d'un systèmes

On rappelle la méthodologie de l'analyse des performances réelles d'un système.

1. Identifier la grandeur physique à mesurer (exemple la position du bras du robot) qui peut être défini par le cahier des charges.
2. Mettre en place un protocole expérimental : à définir et à expliciter rigoureusement.
3. Effectuer la mesure avec généralement le logiciel d'acquisition dédié.
4. Analyser les données expérimentales en identifiant des zones élémentaires.
5. Vérifier la reproductibilité de la mesure en réitérant les manipulations.
6. Vérifier la limite du modèle (linéarité, vitesse de saturation, etc...).

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Les systèmes élémentaires sont principalement :

- système à action proportionnelle : $H(p) = K$;
- système à action intégrale : $H(p) = \frac{1}{p}$;
- système à action dérivée : $H(p) = p$;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\tau\ p}$ avec K le gain statique et τ (en s) la constante de temps ;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\ \xi}{\omega_0}\ p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec K le gain statique, ξ coefficient d'amortissement (sans dimension) et ω_0, la pulsation propre ;

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Les systèmes élémentaires sont principalement :

- système à action proportionnelle : $H(p) = K$;
- système à action intégrale : $H(p) = \frac{1}{p}$;
- système à action dérivée : $H(p) = p$;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\tau\ p}$ avec K le gain statique et τ (en s) la constante de temps ;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\ \xi}{\omega_0}\ p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec K le gain statique, ξ coefficient d'amortissement (sans dimension) et ω_0, la pulsation propre ;

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Les systèmes élémentaires sont principalement :

- système à action proportionnelle : $H(p) = K$;
- système à action intégrale : $H(p) = \frac{1}{p}$;
- système à action dérivée : $H(p) = p$;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\tau\ p}$ avec K le gain statique et τ (en s) la constante de temps ;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\ \xi}{\omega_0}\ p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec K le gain statique, ξ coefficient d'amortissement (sans dimension) et ω_0, la pulsation propre ;

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Les systèmes élémentaires sont principalement :

- système à action proportionnelle : $H(p) = K$;
- système à action intégrale : $H(p) = \frac{1}{p}$;
- système à action dérivée : $H(p) = p$;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\tau\ p}$ avec K le gain statique et τ (en s) la constante de temps ;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\ \xi}{\omega_0}\ p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec K le gain statique, ξ coefficient d'amortissement (sans dimension) et ω_0, la pulsation propre ;

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Les systèmes élémentaires sont principalement :

- système à action proportionnelle : $H(p) = K$;
- système à action intégrale : $H(p) = \frac{1}{p}$;
- système à action dérivée : $H(p) = p$;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\tau\ p}$ avec K le gain statique et τ (en s) la constante de temps ;
- système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\ \xi}{\omega_0}\ p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec K le gain statique, ξ coefficient d'amortissement (sans dimension) et ω_0, la pulsation propre ;

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Théorèmes généraux :

- Théorème du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\, F(p)$;
- Amortissement : $\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega)$;
- Dérivation première : $\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\, F(p) - f(0^-)$;
- Dérivation seconde : $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p\, f(0^-) - f'(0^-)$;
- Intégration : $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{g(0^-)}{p}$ avec $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$;
- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\, F(p)$$

;

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\, F(p)$$

.

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Théorèmes généraux :

- Théorème du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\, F(p)$;
- Amortissement : $\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega)$;
- Dérivation première : $\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\, F(p) - f(0^-)$;
- Dérivation seconde : $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p\, f(0^-) - f'(0^-)$;
- Intégration : $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{g(0^-)}{p}$ avec $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$;
- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\, F(p)$$

;

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p\, F(p)$$

.

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Théorèmes généraux :

- Théorème du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\ F(p)$;
- Amortissement : $\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega)$;
- Dérivation première : $\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\ F(p) - f(0^-)$;
- Dérivation seconde : $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p\ f(0^-) - f'(0^-)$;
- Intégration : $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{g(0^-)}{p}$ avec $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$;
- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\ F(p)$$

;
- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\ F(p)$$

.

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Théorèmes généraux :

- Théorème du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\, F(p)$;
- Amortissement : $\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega)$;
- Dérivation première : $\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\, F(p) - f(0^-)$;
- Dérivation seconde : $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p\, f(0^-) - f'(0^-)$;
- Intégration : $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{g(0^-)}{p}$ avec $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$;
- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\, F(p)$$

;

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\, F(p)$$

.

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Théorèmes généraux :

- Théorème du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\, F(p)$;
- Amortissement : $\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega)$;
- Dérivation première : $\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\, F(p) - f(0^-)$;
- Dérivation seconde : $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p\, f(0^-) - f'(0^-)$;
- Intégration : $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{g(0^-)}{p}$ avec $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$;
- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\, F(p)$$

;

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\, F(p)$$

.

Théorèmes généraux :

- Théorème du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\ F(p)$;
- Amortissement : $\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega)$;
- Dérivation première : $\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\ F(p) - f(0^-)$;
- Dérivation seconde : $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p\ f(0^-) - f'(0^-)$;
- Intégration : $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{g(0^-)}{p}$ avec $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$;
- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\ F(p)$$

;

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\ F(p)$$

.

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Théorèmes généraux :

- Théorème du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\; F(p)$;
- Amortissement : $\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega)$;
- Dérivation première : $\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\; F(p) - f(0^-)$;
- Dérivation seconde : $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p\; f(0^-) - f'(0^-)$;
- Intégration : $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{g(0^-)}{p}$ avec $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$;
- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\; F(p)$$

;

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\; F(p)$$

.

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du premier ordre :

- est toujours stable (si $\tau > 0$),
- ne présente jamais de dépassements,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de pente $\frac{K\ e_0}{\tau}$,
- possède un temps de réponse à 5% qui vaut $t_{r5\%} = 3\ \tau$.

./images/1er_ordre.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du premier ordre :

- est toujours stable (si $\tau > 0$),
- ne présente jamais de dépassements,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de pente $\frac{K\ e_0}{\tau}$,
- possède un temps de réponse à 5% qui vaut $t_{r5\%} = 3\ \tau$.

./images/1er_ordre.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du premier ordre :

- est toujours stable (si $\tau > 0$),
- ne présente jamais de dépassements,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de pente $\frac{K\ e_0}{\tau}$,
- possède un temps de réponse à 5% qui vaut $t_{r5\%} = 3\ \tau$.

./images/1er_ordre.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du premier ordre :

- est toujours stable (si $\tau > 0$),
- ne présente jamais de dépassements,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de pente $\frac{K\ e_0}{\tau}$,
- possède un temps de réponse à 5% qui vaut $t_{r5\%} = 3\ \tau$.

./images/1er_ordre.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du premier ordre :

- est toujours stable (si $\tau > 0$),
- ne présente jamais de dépassements,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de pente $\frac{K\ e_0}{\tau}$,
- possède un temps de réponse à 5% qui vaut $t_{r5\%} = 3\ \tau$.

./images/1er_ordre.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du deuxième ordre :

- présente un dépassement si $\xi < 1$,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de **pente nulle** ,
- possède un temps de réponse à 5% qui se calcule à partir de l'abaque.
- possède un optimal de rapidité pour $\xi = 0,7$ et $t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$.

./images/2nd_ordre_echelon0.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du deuxième ordre :

- présente un dépassement si $\xi < 1$,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de **pente nulle** ,
- possède un temps de réponse à 5% qui se calcule à partir de l'abaque.
- possède un optimal de rapidité pour $\xi = 0,7$ et $t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$.

./images/2nd_ordre_echelon0.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du deuxième ordre :

- présente un dépassement si $\xi < 1$,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de **pente nulle** ,
- possède un temps de réponse à 5% qui se calcule à partir de l'abaque.
- possède un optimal de rapidité pour $\xi = 0,7$ et $t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$.

./images/2nd_ordre_echelon0.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du deuxième ordre :

- présente un dépassement si $\xi < 1$,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de **pente nulle** ,
- possède un temps de réponse à 5% qui se calcule à partir de l'abaque.
- possède un optimal de rapidité pour $\xi = 0,7$ et $t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$.

./images/2nd_ordre_echelon0.pdf

Synthèse des éléments théoriques de l'analyse des SLCI

Lors d'une réponse indicielle (vis-à-vis d'une échelon), un système du deuxième ordre :

- présente un dépassement si $\xi < 1$,
- converge vers $K\ e_0$,
- possède une tangente à l'origine de **pente nulle** ,
- possède un temps de réponse à 5% qui se calcule à partir de l'abaque.
- possède un optimal de rapidité pour $\xi = 0,7$ et $t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$.

./images/2nd_ordre_echelon0.pdf

Notion d'identification

L'identification d'un modèle sur une réponse expérimentale consiste à choisir un modèle pertinent puis d'extraire les paramètres associés. Selon la forme du relevé expérimental, le choix se porte généralement vers un modèle du premier ou du deuxième ordre.

- L'identification du gain statique s'obtient par le rapport de la valeur à convergence sur la valeur de l'échelon d'entrée : $K = \frac{s_\infty}{e_0}$;
- Pour **un premier ordre** la constante de temps τ s'obtient par :
  - par le temps à 63% ;
  - par la tangente à l'origine ;
  - le temps de réponse à 5% égal à 3τ.
- Pour **un second ordre** oscillant la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement s'identifient avec les définitions de :
  - la pseudo période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
  - le dépassement % : $D\% = 100 \times exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100$

Calcul de la réponse temporelle

Le retour en temporel est rarement nécessaire car la plupart des performances utiles peuvent être déterminées directement à partir des expressions dans le domaine de Laplace. On peut éventuellement utiliser un logiciel de simulation pour estimer ces réponses temporelles (**Scilab**). Néanmoins pour calculer la réponse temporelle, il faut :

- Décomposer en éléments simples la réponse dans le domaine de Laplace.
- Identifier les coefficients introduits par la méthode aux limites ou la réduction au même dénominateur.
- Transformer chaque élément simple à l'aide du tableau des transformées de Laplace usuelles.

Calcul de la réponse temporelle

Le retour en temporel est rarement nécessaire car la plupart des performances utiles peuvent être déterminées directement à partir des expressions dans le domaine de Laplace. On peut éventuellement utiliser un logiciel de simulation pour estimer ces réponses temporelles (**Scilab**). Néanmoins pour calculer la réponse temporelle, il faut :

- Décomposer en éléments simples la réponse dans le domaine de Laplace.
- Identifier les coefficients introduits par la méthode aux limites ou la réduction au même dénominateur.
- Transformer chaque élément simple à l'aide du tableau des transformées de Laplace usuelles.

Calcul de la réponse temporelle

Le retour en temporel est rarement nécessaire car la plupart des performances utiles peuvent être déterminées directement à partir des expressions dans le domaine de Laplace. On peut éventuellement utiliser un logiciel de simulation pour estimer ces réponses temporelles (**Scilab**). Néanmoins pour calculer la réponse temporelle, il faut :

- Décomposer en éléments simples la réponse dans le domaine de Laplace.
- Identifier les coefficients introduits par la méthode aux limites ou la réduction au même dénominateur.
- Transformer chaque élément simple à l'aide du tableau des transformées de Laplace usuelles.