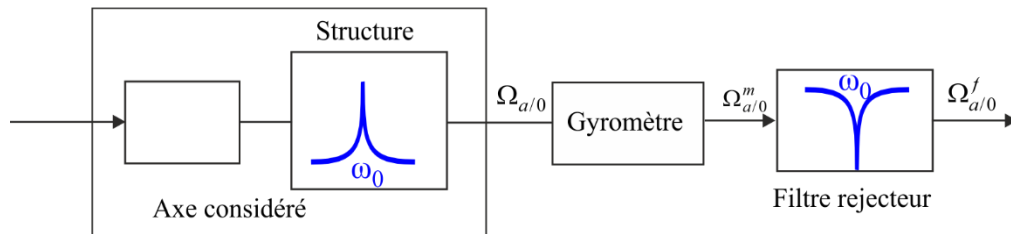


1 Mise en évidence du mode de structure

Lors de la mise en place de mesures de vitesse au moyen de gyromètres placés sur un des axes boule (fin ou gros) des modes oscillants sont constatés expérimentalement. Cela d'autant que les gains de boucle sont importants. Différentes raisons possibles de l'apparition de ces modes peuvent envisagées : existence de modes de structure excités lors de la commande de l'axe, jeu dans les liaisons, etc. Cette deuxième hypothèse est fortement probable.

L'utilisation de modèles simple des boucles de commande pour l'analyse des performances ne permet pas de mettre en évidence d'un point de vue théorique ce problème. Un modèle plus complet modélisant l'axe asservi, la structure, les jeux dans les transmissions est probablement nécessaire (faisable mais hors programme CPGE).



Cependant, sans mettre en place une modélisation complète de tous ces éléments, la connaissance de la pulsation propre permet de mettre en place dans les mesures gyrométriques un filtrage permettant de limiter l'effet du mode propre. Une solution est d'utiliser un filtre réjeteur limitant/supprimant la composante fréquentielle à la pulsation ω_0 dans le signal de mesure.

2 Calcul et analyse d'un filtre réjeteur – Approche simple

2.1 Définition d'un filtre à temps continu

Une fonction de transfert d'un filtre réjeteur peut-être définie en utilisant deux fonction du 2^{ème} ordre selon la formulation :

$$F(p) = \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2 + 2\xi_2\omega_0 p + \omega_0^2}$$

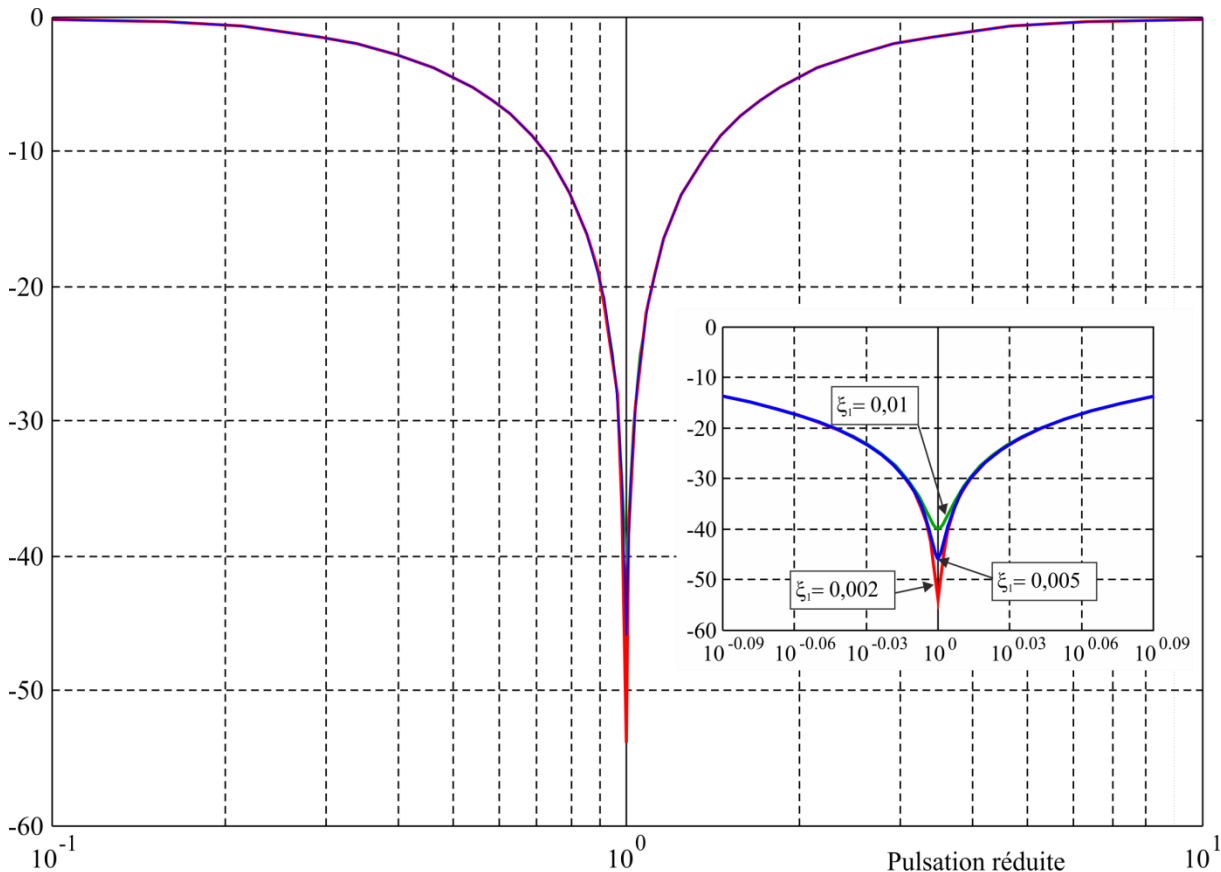
où ω_0 est la pulsation à filtrer et $\xi_1 < \xi_2$. On peut remarquer que ce filtre a un gain unitaire en haute et basse fréquences. En **première approximation**, en particulier si $\xi_1 \ll \xi_2$, on peut aussi noter que :

- le coefficient d'amortissement ξ_1 permet de régler l'atténuation à la pulsation ω_0
- le coefficient d'amortissement ξ_2 permet de régler la largeur de la zone atténuée.

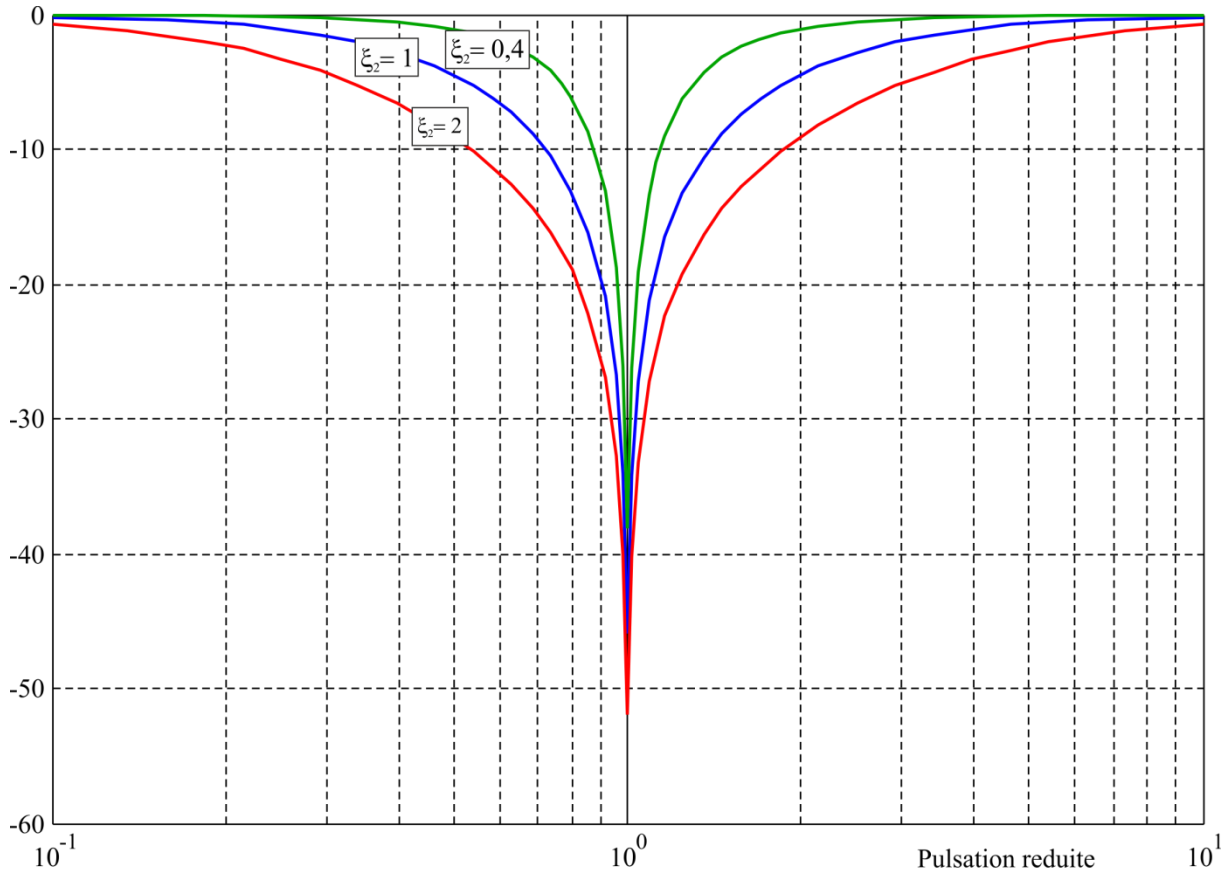
L'incertitude ou l'écart éventuel de la pulsation à rejeter nécessite d'élargir la gamme de pulsations atténuées afin d'éviter un réglage trop sensible. C'est aussi un compromis à trouver car une zone trop

large peut limiter la bande passante de la boucle principale et en conséquence dégrader les performances de la boucle collaborative. Dans le cas du premier prototype le réglage a été effectué avec $\xi_1 = 0,005$ et $\xi_2 = 1$, valeurs qui ont montré des bonnes performances.

La figure suivante montre le module des réponses fréquentielles de ce filtre en pulsations réduites pour trois valeurs du coefficient ξ_1 , $\xi_1 = [0,002; 0,005; 0,01]$ et pour un coefficient $\xi_2 = 1$ fixe. On voit clairement apparaître que la diminution de ξ_1 augmente l'atténuation, la largeur de la bande coupée reste fixe.



La figure suivante montre le module des réponses fréquentielles de ce filtre en pulsations réduites pour trois valeurs du coefficient ξ_2 , $\xi_2 = [0,4; 1; 2]$ et pour un coefficient $\xi_1 = 0,005$ fixe. On voit clairement apparaître que l'augmentation de ξ_2 augmente la largeur de la bande coupée, le niveau d'atténuation est très peu modifié.



2.2 Discrétisation du filtre rejecteur et implantation numérique

La discrétisation du filtre est nécessaire pour l'implantation numérique. L'utilisation des méthodes « classiques » (invariance impulsionnelle ou indicielle, transformations d'Euler ou Homographique) sont déconseillées dans ce cas car elles ne conservent pas la réponse fréquentielle. En pratique elles peuvent conduire à un décalage (plus ou moins important selon la méthode et la période d'échantillonnage) de la fréquence coupée ω_0 . Il est préférable de choisir une méthode de conservation des pôles et zéros (Matched Transform en anglais) qui consiste à factoriser numérateur et dénominateur en des termes de la forme $p - p_i$ et à chacun de ces termes leur affecter la transformation :

$$(p - p_i) \rightarrow \alpha_i (1 - z^{-1} e^{-p_i T_e})$$

où T_e est la période d'échantillonnage et α_i un terme constant permettant de conserver le gain statique. Pour un terme simple la relation :

$$\alpha_i = \frac{1}{1 - e^{-p_i T_e}}$$

permet de conserver rigoureusement le gain statique. On utilise quelques fois une approximation

$$\alpha_i = \frac{1}{-p_i T_e}.$$

Dans le cas de la fonction :

$$F(p) = \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2 + 2\xi_2\omega_0 p + \omega_0^2}$$

on obtient après calcul la fonction de transfert du filtre numérique :

$$F(z) = K \frac{1 - 2e^{-\omega_0 T_e \xi_1} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_1^2}) z^{-1} + e^{-2\omega_0 T_e \xi_1} z^{-2}}{1 - 2e^{-\omega_0 T_e \xi_2} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_2^2}) z^{-1} + e^{-2\omega_0 T_e \xi_2} z^{-2}}$$

Le terme K est déterminé en vue d'obtenir un gain statique unitaire :

$$K = \frac{1 - 2e^{-\omega_0 T_e \xi_2} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_2^2}) z^{-1} + e^{-2\omega_0 T_e \xi_2}}{1 - 2e^{-\omega_0 T_e \xi_1} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_1^2}) + e^{-2\omega_0 T_e \xi_1}}$$

Au final on aboutit au filtre numérique :

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

avec :

$$\begin{cases} b_0 = K \\ b_1 = -2Ke^{-\omega_0 T_e \xi_1} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_1^2}) \\ b_2 = Ke^{-2\omega_0 T_e \xi_1} \\ a_1 = -2e^{-\omega_0 T_e \xi_2} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_2^2}) \\ a_2 = e^{-2\omega_0 T_e \xi_2} \end{cases}$$

$$K = \frac{1 - 2e^{-\omega_0 T_e \xi_2} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_2^2}) z^{-1} + e^{-2\omega_0 T_e \xi_2}}{1 - 2e^{-\omega_0 T_e \xi_1} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1 - \xi_1^2}) + e^{-2\omega_0 T_e \xi_1}}$$

Si on note u_j la mesure de vitesse et u_f la sortie du filtre, l'équation aux différences à implanter en temps réel est :

$$u_f(k) = b_0 u_j(k) + b_1 u_j(k-1) + b_2 u_j(k-2) - a_1 u_f(k-1) - a_2 u_f(k-2)$$

Comme mentionnée précédemment, les essais réalisés sur le premier prototype ont conduit au réglage des coefficients d'amortissement suivant :

Pour (cas Axe BOULE du BGR-300) :

- une fréquence propre $F_0 = 8$ Hz, soit une période d'oscillation $T_0 = 125$ ms
- des facteurs d'amortissement $\xi_1 = 0,005$ $\xi_2 = 1$
- une fréquence d'échantillonnage $F_e = 500$ Hz, soit une période d'échantillonnage $T_e = 2$ ms

on obtient :

$$\begin{cases} b_0 = 0,9063371 \\ b_1 = -1,8026160 \\ b_2 = 0,9054264 \\ a_1 = -1,8087143 \\ a_2 = 0,8178618 \end{cases}$$

La figure suivante montre le module de la réponse fréquentielle obtenue pour les deux réalisations correspondant aux deux cas : filtre analogique et filtre numérique associé.

