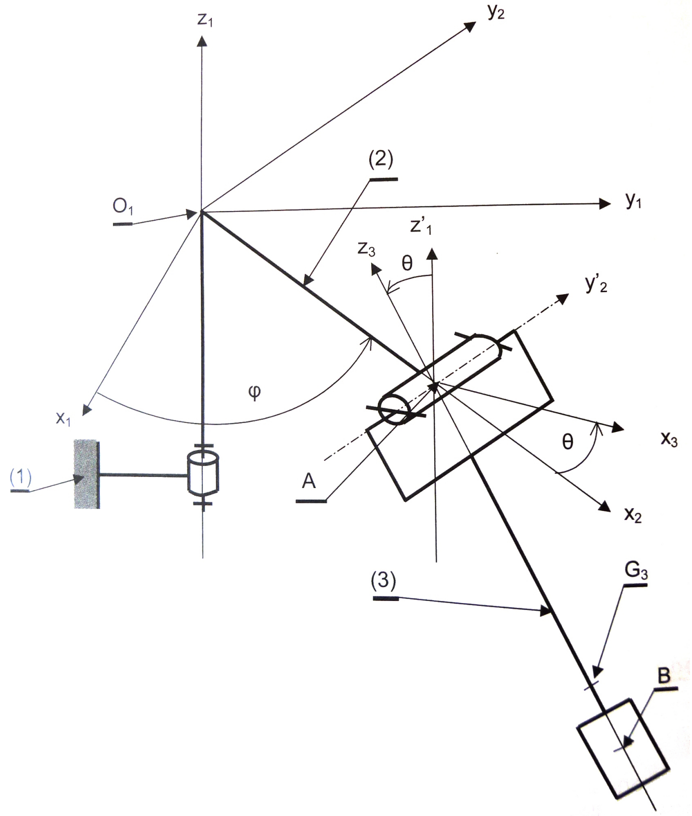
Colle: Dynamique
Chaises volantes

1 Présentation

Un manège est constitué d'un socle **1**, d'un fût central **2** qui supporte dix potences. Au bout de chacune d'elles, est suspendu l'ensemble noté **3** constitué d'une barre et du passager. Le siège est situé en B et fait partie intégrante de cet ensemble **3** rigide. La direction $\overrightarrow{z_1}$ est verticale. Les liaisons sont parfaites et sans frottement.

On donne :

- $\overrightarrow{O_1A} = R \cdot \overrightarrow{x_2} \qquad \overrightarrow{AG_3} = -L \cdot \overrightarrow{z_3} \qquad \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_2}' = \overrightarrow{y_3}$
- Solide **3** : masse m_3, centre d'inertie G_3, $\bar{\bar{I}}_{(A,3)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{b_3}$
- La schématisation cinématique :

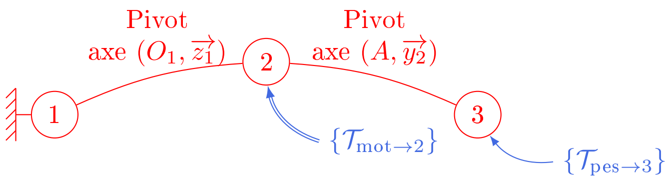


Objectif

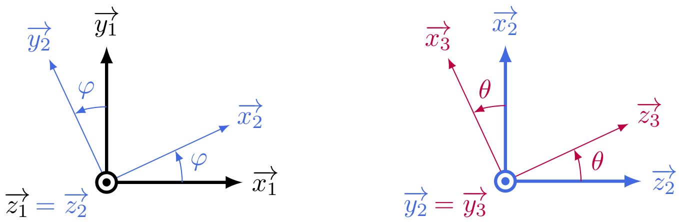
L'objectif est de déterminer l'angle d'inclinaison θ correspondant à une vitesse de rotation du manège donnée.

2 Travail demandé

Question 1 Tracer le graphe des liaisons en plaçant l'ensemble des informations nécessaires à l'étude.



Question 2 Réaliser les figures de changement de bases.



Question 3 Préciser le torseur des actions mécaniques de **2** sur **3** en A dans la base b_2.

Liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{y_2})$: $\boxed{\{\mathcal{T}_{2\to 3}\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & N_{23} \end{array}\right\}_{b_2}}$

Question 4 Déterminer la stratégie d'isolement et de projection afin d'étudier les variations de l'angle θ.

On isole **3** puis on applique le théorème du moment dynamique en A autour de $\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_3}$. Comme cela, on trouvera directement l'équation du mouvement et on ne verra pas apparaitre les actions mécaniques de la liaison pivot.

La vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ est constante. De plus, on suppose que le moment d'inertie C_3 est négligeable devant les autres.

Question 5 Déterminer le torseur cinétique en A de **3** dans R_1.

Résultante cinétique

$$\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1G_3}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}R.\overrightarrow{x_2} - L.\overrightarrow{z_3}\right]_{R_1}$$

Avec : $\left[\dfrac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{R_1} = \dot{\varphi}.\overrightarrow{y_2}$ et $\left[\dfrac{d\overrightarrow{z_3}}{dt}\right]_{R_1} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{x_3} - \dot{\varphi}\sin\theta.\overrightarrow{y_2}$

On a alors : $\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}} = -L\dot{\theta}.\overrightarrow{x_3} + (R - L\sin\theta)\dot{\varphi}.\overrightarrow{y_2}$

Soit enfin : $\overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{3/1}\}} = m_3\,\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}} = \boxed{m_3\left(-L\dot{\theta}.\overrightarrow{x_3} + (R - L\sin\theta)\dot{\varphi}.\overrightarrow{y_2}\right)}$

Moment cinétique en A

$$\overrightarrow{M_A\{\mathcal{C}_{3/1}\}} = \overrightarrow{\sigma_{A\in 3/1}} = \bar{\bar{I}}_{(A,3)}.\overrightarrow{\Omega_{3/1}} + m_3\overrightarrow{AG_3} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 3/1}}$$

Pour le produit matriciel, il faut exprimer $\overrightarrow{\Omega_{3/1}}$ dans b_3 : $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{y_3} + \dot{\varphi}.\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}_{b_3}$

Soit, avec C_3 négligeable : $\bar{\bar{I}}_{(A,3)}.\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = -A_3\dot{\varphi}\sin\theta.\overrightarrow{x_3} + B_3\dot{\theta}.\overrightarrow{y_3}$

Et : $\overrightarrow{AG_3} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 3/1}} = -L.\overrightarrow{z_3} \wedge R\dot{\varphi}.\overrightarrow{y_2} = LR\dot{\varphi}.\overrightarrow{x_3} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\sigma_{A\in 3/1}} = \boxed{(m_3LR - A_3\sin\theta)\,\dot{\varphi}.\overrightarrow{x_3} + B_3\dot{\theta}.\overrightarrow{y_3}}$

Torseur cinétique

En combinant les 2 résultats précédents : $\boxed{\{\mathcal{C}_{3/1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} m_3\left(-L\dot{\theta}.\overrightarrow{x_3} + (R - L\sin\theta)\dot{\varphi}.\overrightarrow{y_2}\right) \\ (m_3LR - A_3\sin\theta)\,\dot{\varphi}.\overrightarrow{x_3} + B_3\dot{\theta}.\overrightarrow{y_3} \end{array} \right\}}}$

Question 6 Déterminer le torseur dynamique en A de **3** dans R_1.

Résultante dynamique

$\overrightarrow{\Gamma_{G_3\in 3/1}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}}\right]_{R_1}$ avec : $\left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right]_{R_1} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{z_3} + \dot{\varphi}\cos\theta.\overrightarrow{y_3}$

Alors : $\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{3/1}\}} = m_3\overrightarrow{\Gamma_{G_3\in 3/1}} = \boxed{m_3\left(-L\ddot{\theta}.\overrightarrow{x_3} - 2L\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta.\overrightarrow{y_2} - (R - L\sin\theta)\dot{\varphi}^2.\overrightarrow{x_2} + L\dot{\theta}^2.\overrightarrow{z_3}\right)}$

Moment dynamique en A

On a : $\overrightarrow{M_A\{\mathcal{D}_{3/1}\}} = \overrightarrow{\delta_{A\in 3/1}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A\in 3/1}}\right]_{R_1} + \overrightarrow{V_{A/1}} \wedge m_3\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}}$ ce qui donne après calculs :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in 3/1}} = -B_3\dot{\varphi}\dot{\theta}.\overrightarrow{x_2} - A_3\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta.\overrightarrow{x_3} + \left((-A_3\sin\theta + m_3LR)\,\dot{\varphi}^2\cos\theta + B_3\ddot{\theta}\right).\overrightarrow{y_2} + A_3\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}.\overrightarrow{z_3}}$$

Torseur dynamique

En combinant les 2 résultats précédents :

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{3/1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} m_3\left(-L\ddot{\theta}.\overrightarrow{x_3} - 2L\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta.\overrightarrow{y_2} - (R - L\sin\theta)\dot{\varphi}^2.\overrightarrow{x_2} + L\dot{\theta}^2.\overrightarrow{z_3}\right) \\ -B_3\dot{\varphi}\dot{\theta}.\overrightarrow{x_2} - A_3\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta.\overrightarrow{x_3} + \left((-A_3\sin\theta + m_3LR)\,\dot{\varphi}^2\cos\theta + B_3\ddot{\theta}\right).\overrightarrow{y_2} + A_3\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}.\overrightarrow{z_3} \end{array} \right\}}}$$

Question 7 Déterminer l'équation différentielle qui gouverne les variations de l'angle θ.

On va appliquer le PFD à **3** et on écrira l'équation de moment en A en projection sur $\overrightarrow{y_2}$. De cette manière, on ne verra pas apparaître les inconnues de liaison de la liaison pivot.

IAME

- $MomA\{\mathcal{T}_{\text{pes}\to 3}\} \cdot \overrightarrow{y_2} = -Lm_3g\sin\theta$

PFD

En reprenant les résultats précédents, on trouve : $\boxed{B_3\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2\cos\theta\,(m_3LR - A_3\sin\theta) = -Lm_3g\sin\theta}$ (1)

A une vitesse de rotation constante, la barre **3** se stabilise par rapport à **2** : θ est alors constant et noté θ_s.

Question 8 Déterminer l'expression de cet angle d'inclinaison en supposant qu'en première approximation A_3 peut être négligé devant le produit m_3LR. Réaliser l'application numérique avec $R = 4\,\text{m}$ et $\dot{\varphi} = 1\,\text{rad.s}^{-1}$.

Avec $\theta = \theta_s$ et $A_3 \ll m_3LR$: $(1) : m_3LR\dot{\varphi}^2 = -Lm_3g\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta_s = -\dfrac{R\dot{\varphi}^2}{g}}$

AN: $\boxed{\theta_s = -22{,}2^\circ}$ (< 0 car attiré vers l'extérieur... comportement logique)

Question 9 Déterminer dans ce cas l'expression des composantes de $\{\mathcal{T}_{2\to3}\}$.

On reprend le PFD appliqué à **3** : $\boxed{\{\mathcal{T}_{2\to3}\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} -m_3\left(R - L\sin\theta\right)\dot{\varphi}^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_3g & 0 \end{array}\right\}_{b_2}}$

Question 10 Réaliser l'application numérique avec : $L = 2\,\text{m}$ $m_3 = 100\,\text{kg}$ $A_3 = B_3 = 130\,\text{kg.m}^2$.

$\{\mathcal{T}_{2\to3}\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} -324 & 0 \\ 0 & 0 \\ 981 & 0 \end{array}\right\}_{b_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\|\overrightarrow{F_{2\to3}}\right\| = 1033\,\text{N}}$

Question 11 Dessiner dans le plan $(A_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{z_1})$ la position de la barre ainsi que les efforts qu'elle subit.