LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2017 - 2018

C0 : EXEMPLE DE DOCUMENT LATEX

C0-1 - Exemple de document Latex

3 février 2018

Table des matières

Compétences

- Apprendre à utiliser Latex

I. Introduction

1 Objectif de la modélisation

Dans le chapitre précédent nous avons aborder les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- dimensionner des composants d'une chaine d'énergie en terme de puissance transmissible;
- déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système;
- estimer le rendement d'une chaine complète d'énergie.

C'est l'objet de ce chapitre d'application

2 Présentation du support du cours

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée $\overrightarrow{y}_0$) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement "*vis-écrou*".

Hypothèses :

- le référentiel associé au repère $R_0 = \left(O_0, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$ est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe $\left(O_0, \overrightarrow{y}_0\right)$: $J_1 = I_{(O_0,\overrightarrow{y}_0)}(S_1)$;
- on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3;
- la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \overrightarrow{y}_0 + z \cdot \overrightarrow{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r).
- Seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.

Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0,1$.
- Pas de la vis à billes : $p = 20mm$.
- Diamètre de la vis à billes : $D = 25mm$.
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe $\overrightarrow{y}_0$: $I_v = 2,15 \times 10^{-4} kg \cdot m^2$.
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $Cr = 3N.m$
- l, longueur libre de la vis -entre deux paliers- (mm) : $1000mm$.
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - Couple maximal, $C_{max} = 21,2Nm$.
  - Fréquence de rotation maximale, $Nm = 6000tr/min$.
  - Moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe $\overrightarrow{y}_0$, $I_m = 1,6 \times 10^{-4} kg \cdot m^2$.

Objectif 1 :

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à S_1 : $\overrightarrow{C}_{Moteur \rightarrow S_1} \cdot \overrightarrow{y}_0 = C_m(t)$;
- vitesse de rotation de S_1 : $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \overrightarrow{y}_0 = \dot{\theta}(t)$.

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :

- masse : M_3;
- cinématique de S_3 : $\overrightarrow{a}(G_3 R_0) \cdot \overrightarrow{y}_0 = \ddot{y}(t)$.

3 Bilan de la modélisation du chapitre précédent

Bilan : ***Bilan des résultats du chapitre précédent***

- Puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures :

$$\mathscr{P}(ext \rightarrow E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

- Puissance des des actions mutuelles :

$$\mathscr{P}_{int}(E) = 0$$

- Energie cinétique équivalente de l'ensemble E ramenée l'axe de translation du solide 3 :

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} M_{eq} \dot{y}^2$$

$$M_{eq}(E) = (I_m + I_v) \cdot \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3$$

II. Théorème de l'énergie cinétique

1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

2 Énoncé pour un solide

Théorème 1 : *Théorème de l'énergie cinétique*

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S. Soit :

$$\boxed{\frac{dE_c(S/R)}{dt} = \mathscr{P}(\bar{S} \rightarrow S/R).} \tag{1}$$

3 Énoncé pour un ensemble de solides

Théorème 2 : *Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides*

Soit (E) un ensemble de n solide $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ en mouvement par rapport à un repère galiléen R. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{dE_c(E/R)}{dt} = \mathscr{P}(\bar{E} \rightarrow E/R) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \mathscr{P}(S_i \leftrightarrow S_j/R) = \mathscr{P}(ext \rightarrow E/R_0) + \mathscr{P}_{int}(E).} \tag{2}$$

Avec :

- $\mathscr{P}_{int}(E)$ la puissance intérieur à E qui est nul s'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites).
- $\mathscr{P}(ext \rightarrow E/R_0)$, la puissance galiléenne de E dans son mouvement par rapport à R_0.

Remarque 1 :

- Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel E que l'on considère.
- Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- Pour obtenir une équation de mouvement (*ie* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

Exemple 1 : ***Application du théorème de l'énergie cinétique au système de dépose de composant***

Q 1 : Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E
En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient :

$$M_{eq} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t) + 0$$

On peut postuler un sens de déplacement : $\dot{y}(t) > 0$, ainsi $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p}\dot{y}(t) < 0$, $C_r > 0$, $Y_{03} < 0$:

$$M_{eq} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = \left[-(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} + Y_{03} \right] \cdot \dot{y}(t)$$

Exemple 2 : ***Détermination de l'équation de mouvement du système de dépose de composant***

Q 2 : Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m **à** $y(t)$
Il faut éliminer le paramètre Y_{03}. Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliqué à S_3 en projection selon $\overrightarrow{z}_0$:

$$Z_{03} - M_3 \cdot g = 0$$

Or la loi de Coulomb donne (avec $Z_{03} > 0$ et $Y_{03} < 0$) :

$$Y_{03} = -\mu \cdot Z_{03} = -\mu \cdot M_3 \cdot g$$

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant $\dot{y}(t) \neq 0$) :

$$\boxed{M_{eq} \cdot \ddot{y}(t) = -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} - \mu \cdot M_3 \cdot g}$$

Q 3 : Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

$$C_m = -\frac{p}{2\pi}\left[M_{eq}\ddot{y}_{max} + M_3 \cdot g \cdot \mu\right] - C_r = -\frac{p}{2\pi} M_3 \left(\ddot{y}_{max} + g \cdot \mu\right) - (I_m + I_v)\frac{2\pi}{p}\ddot{y}_{max} - C_r$$

L'application numérique donne : $C_m = -3,79 N \cdot m$

III. Notion de rendement énergétique

1 Définition du rendement d'une chaine fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaine fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- En **régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs.
- En **régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

Définition 1 : ***rendement d'une chaine fonctionnelle***

Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaine fonctionnelle :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathscr{P}(utile)}{\mathscr{P}(entrée)}}$$

- $\eta \in [0,1]$
- $\mathscr{P}(entrée) > 0$ définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**.
- $\mathscr{P}(utile) > 0$ définit la puissance fournie à l'aval d'une chaine fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

Propriété 1 : ***Rendement global d'une chaine d'énergie***

Le **rendement global** d'une chaine d'énergie comportant n éléments de rendements η_i est donné par :

$$\boxed{\eta = \prod_{i=1}^{n} \eta_i \leq 1} \tag{3}$$

Chacun des rendements successifs η_i étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

2 Détermination d'une puissance dissipée

Propriété 2 : ***Estimation des dissipations***

On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement η :

$$\boxed{\mathscr{P}(dissipée) = (1-\eta)\cdot\mathscr{P}(entrée)} \tag{4}$$

Exemple 3 : *Expression des pertes dissipées par la liaison hélicoïdale dans le système de dépose de composants*

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2. On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Q 4 : En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.

$$\eta = \frac{\mathscr{P}(utile)}{\mathscr{P}(entrée)} = \frac{\mathscr{P}(S_2 \to S_3/R_0)}{\mathscr{P}(moteur \to S_1/R_0)}$$

Q 5 : On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2. En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

- Expression de $\mathscr{P}(dissipée)$:

$$\mathscr{P}(dissipée) = -\mathscr{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -(\mathscr{P}(S_1 \to S_2/R_0) + \mathscr{P}(S_2 \to S_1/R_0))$$

- TEC appliqué à S_2/R_0 en régime permanent :

$$\mathscr{P}(S_1 \to S_2/R_0) = -\mathscr{P}(S_3 \to S_2/R_0)$$

- TEC appliqué à S_1/R_0 en régime permanent :

$$\mathscr{P}(moteur \to S_1/R_0) = -\mathscr{P}(S_2 \to S_1/R_0)$$

- en combinant ces équations on obtient $\mathscr{P}(dissipée)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(dissipée) &= -(-\mathscr{P}(S_3 \to S_2/R_0) - \mathscr{P}(moteur \to S_1/R_0)) \\ &= -\mathscr{P}(S_2 \to S_3/R_0) + \mathscr{P}(moteur \to S_1/R_0) = \left(1-\eta\right)\mathscr{P}(moteur \to S_1/R_0)\end{aligned}$$

Exemple 4 : *Quantification des pertes dans la liaison hélicoïdale en régime permanent maximal*

On donne :

- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Q 6 : Déterminer dans ces conditions les dissipations.

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(dissipée) &= C_{max} \cdot \dot{\theta}_{max} \cdot \left(\eta - 1\right) \\ &= 21,2 \times 6000 \frac{2\pi}{60} \cdot \left(1-\eta\right) = 2664 W\end{aligned}$$