# Física Estadística 2026-1 - Tarea 2

Emilio Moreno Ledesma

8 de septiembre de 2025

## Ejercicio 1: Ecuación de Langevin con arrastre o "drift"

Considera una ecuación de Langevin modificada, de modo que incluya la acción de una fuerza constante $F_{const}$. Dado que tenemos una fuerza de fricción proporcional a la velocidad, dicha fuerza constante va a dar lugar a una velocidad terminal. Por conveniencia, escribimos a esta fuerza de la siguiente manera,

$$F_{const} = (v_d \cdot \gamma \cdot m),$$

donde $m$ es la masa de la partícula. Dado que $\gamma$ y $m$ son constantes, la magnitud de la fuerza está dada por $v_d$. Esto nos permite escribir a la ecuación diferencial estocástica para $V$ como:

$$V(t + dt) - V(t) = -\gamma(V(t) - v_d)dt + \sqrt{\beta^2 dt} \cdot N_t^{t+dt}(0, 1) \tag{1}$$

(a) Resuelve esta ecuación con el mismo método desarrollado en clase, suponiendo que $V$ es de la forma $V(t) = \mathcal{N}(\mu_V, \sigma_V^2)$. Esta vez, resuelve a mano (es decir, de manera explícita) las ecuaciones diferenciales que aparezcan.

(b) Identifica a la velocidad terminal en tu solución.

(c) ¿La velocidad terminal afecta a la varianza?

Física Estadística — Tarea 3

Emilio Moreno Ledesma

Ejercicio 1:

$$V(t+dt)-V(t) = -\gamma(V(t)-v_d)dt + \sqrt{\beta^2 dt}\, N_t^{t+dt}(0,1) \quad (1)$$

a) Dividiendo la ecuación estocástica entre $dt$ y tomando el promedio:

$$\left\langle \frac{V(t+dt)-V(t)}{dt}\right\rangle = -\gamma\langle V(t)\rangle + \gamma v_d + \frac{\sqrt{\beta^2 dt}}{dt}\overbrace{\langle N_t^{t+dt}(0,1)\rangle}^{=0}$$

$$\xrightarrow{dt\to 0} \frac{d}{dt}\langle V\rangle = -\gamma\langle V\rangle + \gamma v_d.$$

La ecuación homogénea es

$$\frac{d}{dt}\langle \tilde{V}\rangle = -\gamma\langle \tilde{V}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{V}\rangle = V_0 e^{-\gamma t}.$$

Mientras que una solución particular es tomar $\langle v\rangle = c \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 = \frac{dc}{dt} = -\gamma c + \gamma v_d \Rightarrow c = v_d.$$

Por lo que la solución general es

$$\langle V\rangle = \langle \tilde{V}\rangle + \langle v\rangle = V_0 e^{-\gamma t} + v_d.$$

Ahora, para encontrar la varianza encontramos primero $\langle V^2\rangle$, para lo que tomamos el cuadrado de la ecuación estocástica:

$$(V(t+dt)-V(t))^2 = \gamma^2(V(t)-v_d)^2 dt^2 + \beta^2 dt (N_t^{t+dt}(0,1))^2$$

Ignorando términos $O(dt^2)$:

$$\beta^2 dt (N_t^{t+dt}(0,1))^2 = V^2(t+dt) + V^2(t) - 2V(t)V(t+dt)$$

$$\overset{(1)}{=} V^2(t+dt) + V^2(t) - 2V(t)\left[-\gamma(V(t)-v_d)dt + \sqrt{\beta^2 dt}\, N_t^{t+dt}(0,1) + V(t)\right]$$

$$= V^2(t+dt) - V^2(t) + 2\gamma\left[V^2(t) - V(t)v_d + \sqrt{\beta^2 dt}\, N_t^{t+dt}(0,1)V(t)\right]$$

Antes de tomar el valor esperado, notemos que, de la Ec. 1:

$$V(t) = -\gamma(V(t-dt)-v_d)dt + \sqrt{\beta^2 dt}\, N_{t-dt}^{t}(0,1) + V(t-dt),$$

por lo que $\langle V(t) N_t^{t+dt}(0,1)\rangle = 0$, pues $\langle N_{t-dt}^{t}(0,1)\, N_t^{t+dt}(0,1)\rangle = 0$ y $V(t-dt)$ está relacionado a distribuciones normales con intervalos ajenos a $N_t^{t+dt}(0,1)$ por lo que también $\langle V(t-dt) N_t^{t+dt}(0,1)\rangle = 0$.

Así,

$$\beta^2 dt\,\overbrace{\langle (N_t^{t+dt}(0,1))^2\rangle}^{\langle (N_t^{t+dt}(0,1))^2\rangle - \langle N_t^{t+dt}(0,1)\rangle^2 = var(N_t^{t+dt}) = 1} = \langle V^2(t+dt) - V^2(t)\rangle + 2\gamma(\langle V^2(t)\rangle - \langle V(t)\rangle v_d)$$

$$\xrightarrow{dt\to 0} \frac{d}{dt}\langle V^2\rangle = -2\gamma(\langle V^2\rangle - \langle V\rangle v_d) + \beta^2 \quad (2)$$

y sustituyendo el promedio que encontramos:

$$\frac{d}{dt}\langle V^2\rangle = -2\gamma\langle V^2\rangle + \beta^2 + 2\gamma(V_0 v_d e^{-\gamma t} + v_d^2).$$

Ahora, un sistema con drift es equivalente a un sistema sin drift en un marco de referencia acelerado.

Notemos que en el caso sin drift, la varianza en un marco de referencia estático debe de ser igual a aquélla en el marco de referencia acelerado, pues está asociada a la dispersión espacial de las partículas respecto a su posición central, una medida asociada al desplazamiento que no se ve afectada por la aceleración. Así, como el sistema en el marco de referencia acelerado es equivalente al sistema con drift, la varianza con drift también debe de ser igual a la varianza para el sistema sin drift en el marco de referencia "estático", es decir

$$\underset{\text{con drift}}{\operatorname{var}\{V\}} = \underset{\substack{\text{varianza sin drift,}\\ \text{como vimos en clase.}}}{\frac{\beta^2}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)}$$

Con lo que deberíamos tener

$$\langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2 = \beta/2\gamma\left(1-e^{-2\gamma t}\right)$$

$$\Rightarrow \langle V^2\rangle = \langle V\rangle^2 + \frac{\beta}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)$$

$$= \left(V_0 e^{-\gamma t} + v_d\right)^2 + \frac{\beta^2}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right).$$

Veamos pues que esta expresión satisface la Ecuación 2:

$$-2\gamma\langle V^2\rangle + 2\gamma\langle V\rangle v_d + \beta^2$$

$$= -2\gamma\left(V_0 e^{-\gamma t} + v_d\right)^2 - \beta^2\left(1-e^{-2\gamma t}\right)$$

$$+ 2\gamma\left(V_0 v_d e^{-\gamma t} + v_d^2\right) + \beta^2$$

$$= -2\gamma\left[V_0^2 e^{-2\gamma t} + 2 v_d V_0 e^{-\gamma t} + v_d^2 - V_0 v_d e^{-\gamma t} - v_d^2\right] + \beta^2 e^{-2\gamma t}$$

$$= -2\gamma\left[V_0^2 e^{-2\gamma t} + v_d V_0 e^{-\gamma t}\right] + \beta^2 e^{-2\gamma t}$$

$$= 2\left(V_0 e^{-\gamma t} + v_d\right)\left(-\gamma V_0 e^{-\gamma t}\right) + \beta^2 e^{-2\gamma t}$$

$$= \frac{d}{dt}\langle V^2\rangle.$$

Por lo que la expresión de $\langle V^2\rangle$ que proponemos es la correcta y

$$\operatorname{var}\{V\} = \langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2 = \frac{\beta^2}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right).$$

b) Tenemos

$$\langle V\rangle = V_0 e^{-\gamma t} + v_d \xrightarrow{t\to\infty} v_d,$$ siendo esta la velocidad terminal.

c) No, la expresión de la varianza coincide con la del sistema sin drift.

Siendo $V(t) = N\left(V_0 e^{-\gamma t} + v_d, \frac{\beta^2}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\beta^2}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)}}\exp\left[-\left(x-\left(V_0 e^{-\gamma t}+v_d\right)\right)^2\Big/\left(2\frac{\beta^2}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)\right)\right]$$

## Ejercicio 2: Ecuación de Einstein con arrastre

Considera la ecuación estocástica del caminante aleatorio de Einstein, pero modificada para incluir un término de arrastre:

$$X(t+dt) - X(t) = \alpha dt + \sqrt{\delta^2 dt} \cdot N_t^{t+dt}(0,1). \tag{2}$$

Resuelve esta ecuación de manera iterativa como lo hicimos en clase. ¿Cómo modifica el arrastre a $\mu_X$?

## Ejercicio 3: Correlaciones para el Movimiento browniano de Einstein

Sea $X(t)$ y $X'(t)$ la posición aleatoria instantánea de una partícula browniana a tiempos tales que $t' \leq t$.

1. Encuentra $\text{cov}\{X(t), X(t')\}$.
2. Encuentra $\text{corr}\{X(t), X(t')\}$.
3. Evalúa $\text{corr}\{X(t), X(t')\}$ en los límites $t'/t \to 0$ y $t'/t \to 1$.

**Pista:** Usa la solución 6.3.6 del libro mencionado y la condición de auto-consistencia 6.2.7.

## Ejercicio 4: Un gota de tinta en un vaso de agua

Supongamos que $N_0$ partículas de tinta se liberan al tiempo $t = 0$ en el centro ($x = 0$) de un tubo contenido en un tubo 1-dimensional, y se permite que la tinta se esparza en ambas direcciones a lo largo del tubo. Modelamos este proceso dispersivo como una caminata de Einstein, $X(t+dt) = X(t) + \sqrt{2\alpha dt} \cdot N^{txt}(0,1)$. Al tiempo $t$ la densidad de partículas de tinta en la posición $x$ es el producto $N_0\rho(x,t)$, donde $\rho(x,t)$ es la densidad de probabilidad de que una partícula de tinta esté posicionada en $x$. La densidad posicional es tal que la posición promedio de la gota de tinta incremente a un valor máximo y luego decrece. ¿A qué tiempo $t$ se observa el máximo de la concentración (como función de $x_1$)?

Ejercicio 2:

$$\chi(t+dt)=\chi(t)+\alpha\,dt+\sqrt{\delta^2 dt}\,N_t^{t+dt}(0,1).$$

- Para $t=0$,

$$\chi(dt)=\chi(0)+\alpha dt+\sqrt{\delta^2 dt}\,N_0^{dt}(0,1)$$
$$=\chi(0)+N_0^{dt}(\alpha dt,\ \delta^2 dt).$$

Para $t=dt$,

$$\chi(2dt)=\chi(dt)+\alpha dt+\sqrt{\delta^2 dt}\,N_{dt}^{2dt}(0,1)$$
$$=\chi(0)+N_{dt}^{2dt}(\alpha dt,\delta^2 dt)$$
$$+N_0^{dt}(\alpha dt,\delta^2 dt).$$

y puesto que $N_0^{dt}$, $N_{dt}^{2dt}$ son independientes, podemos sumar los promedios y las varianzas

- $$\chi(2dt)=\chi(0)+N_0^{2dt}(\alpha 2dt,\delta^2 2dt).$$

Así iterativamente tendremos

$$\chi(ndt)=\chi(0)+N_0^{ndt}(\alpha ndt,\delta^2 ndt).$$

y haciendo $t=ndt$:

$$\chi(t)=\chi(0)+N_0^{t}(\alpha t,\delta^2 t).$$

Por lo que el arrastre modifica $\mu_\chi$ como $\chi(0)\to\chi(0)+\alpha t$.

-

Ejercicio 3:

$\chi(t)$, $\chi(t')$ posiciones aleatorias para una partícula browniana con $t'\leq t$.

Para una partícula browniana tenemos

$$\chi(t)=\chi(0)+N_0^t(0,\delta^2 t),\ \langle\chi\rangle=\langle\chi(0)\rangle$$

1. En este caso

$$\mathrm{cov}\{\chi(t),\chi(t')\}=\langle(\chi(t)-\langle\chi(t)\rangle)(\chi(t')-\langle\chi(t')\rangle)\rangle$$
$$=\langle(\chi(t)-\chi(0))(\chi(t')-\chi(0))\rangle$$
$$=\langle N_0^t(0,\delta^2 t)\,N_0^{t'}(0,\delta^2 t')\rangle \quad (1)$$

Ahora, como los intervalos $(0,t')$, $(t',t)$ son disjuntos (pues $t'\leq t$), por autoconsistencia, las variables $N_0^{t'}(0,\delta^2 t')$, $N_{t'}^{t}(0,\delta^2(t-t'))$ son independientes, por lo que podemos escribir

$$N_{t'}^{t}(0,\delta^2(t-t'))+N_0^{t'}(0,\delta^2 t')$$
$$=N_0^t(0,\delta^2(t-t'+t'))=N_0^t(0,\delta^2 t).$$

Así, sustituyendo en (1):

$$\mathrm{cov}\{\chi(t),\chi(t')\}=\langle(N_{t'}^t(0,\delta^2(t-t'))+N_0^{t'}(0,\delta^2 t'))\times N_0^{t'}(0,\delta^2 t')\rangle$$

$$=\langle N_{t'}^t(0,\delta^2(t-t'))N_0^{t'}(0,\delta^2 t')\rangle+\langle(N_0^{t'}(0,\delta^2 t'))^2\rangle$$

$$=\underset{N_{t'}^t,\,N_0^{t'}\ \text{ind.}}{0}+\delta^2 t'=\delta^2 t'.$$

2. Tenemos que

$$\langle X^2(t)\rangle = \langle X(0)^2 + 2X(0)N_0^t(0,\delta^2 t) + (N_0^t(0,\delta^2 t))^2\rangle$$

$$= X^2(0) + 2X(0)\langle N_0^t(0,\delta^2 t)\rangle + \langle (N_0^t(0,\delta^2 t))^2\rangle$$

$$= X^2(0) + \delta^2 t.$$

Con lo que

$$\mathrm{var}\, X(t) = \delta^2 t + X^2(0) - X^2(0) = \delta^2 t,$$

y similarmente

$$\mathrm{var}\, X(t') = \delta^2 t'.$$

Así,

$$\mathrm{corr}\{X(t), X(t')\} = \frac{\mathrm{cov}\{X(t), X(t')\}}{\sqrt{\mathrm{var}\, X(t)\, \mathrm{var}\, X(t')}}$$

$$= \frac{\delta^2 t'}{\delta^2\sqrt{t t'}} = \sqrt{\frac{t'}{t}}.$$

3. Para $\mathrm{corr}\{X(t), X(t')\} = \sqrt{\frac{t'}{t}}$, tenemos

$$\sqrt{\frac{t'}{t}} \xrightarrow{t'/t \to 0} 0,$$

$$\sqrt{\frac{t'}{t}} \xrightarrow{t'/t \to 1} 1.$$

Ejercicio 4:

Para partículas que siguen caminatas de Einstein con $X(0) = 0$, tenemos

$$X(t) = N(0, \delta^2 t)$$

$$\Rightarrow p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \delta^2 t}} e^{-\frac{x^2}{2\delta^2 t}}$$

Siendo la densidad de partículas $N_0\, p(x,t)$.

Para $x_1 \neq 0$ fija la concentración es máxima al tiempo $t$ tal que

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} N_0 p(x_1,t) = N_0 \frac{\partial p(x_1,t)}{\partial t}.$$

$$\Rightarrow 0 = -N_0 \frac{(\delta^2 t - x_1^2)\, e^{-\frac{x_1^2}{2\delta^2 t}}}{(2\delta)^{3/2}\sqrt{\pi}\, t^{5/2}}$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 t - x_1^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{x_1^2}{\delta^2}.$$

## Ejercicio 5 (computacional): Efecto del tamaño del paso en una caminata de Einstein

Considera la ecuación del caminante aleatorio de Einstein, $X(t+1) = X(t) + \sqrt{2\alpha dt}N_i^{txt}$. El algoritmo de para obtener una trayectoria posible del caminante consiste en los siguiente pasos que nos dan la posición al tiempo $t + dt$, partiendo de los pasos que dan la trayectoria hasta el tiempo $t$:

i) Obtén un número al azar de una distribución $\sqrt{2\alpha dt}N(0,1) = N(0, 2\alpha dt)$. ii) Súmalo a la posición anterior $x(t)$ para obtener $x(t + dt)$.

Repitiendo estos pasos, puedes obtener la posición del caminante como función del tiempo dada por la secuencia $\{x(0), x(dt), x(2dt), \ldots, x(t-dt), x(t)\}$. Nota que cada secuencia diferente es una trayectoria distinta. Utilizando este algoritmo para particulas $N = 10^5$ y $N = 10^6$ (es decir, partiendo del origen):

a) Genera una trayectoria con $dt = 1$ (10 pasos), una con $dt = 0{,}1$ (100 pasos) y una con $dt = 0{,}01$ (1000 pasos).

Tenemos

$$X(t + dt) = X(t) + \sqrt{\delta^2 dt}N_t^{t+dt}(0, 1) = X(t) + N_t^{t+dt}(0, \delta^2 dt).$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams.update({"font.family": "Times New Roman", "mathtext.fontset": "cm"})


def Einstein_walk(x0, tmax, dt, delta):
stdv = np.sqrt(delta**2 * dt)
N = int(tmax / dt)
X = np.zeros(N)
X[0] = x0
for n in range(1, N):
    X[n] = X[n - 1] + np.random.normal(0, stdv)
return X


# a)
delta = 1
tmax = 10
x0 = 0
dts = np.array([1, 0.1, 0.01])
walks = [Einstein_walk(x0, tmax, dt, delta) for dt in dts]
```

b) Grafica cada una de estas trayectorias (la posición contra el tiempo).

```
# b)
fig, ax = plt.subplots()

for dt, walk in zip(dts, walks):
    ax.plot(np.arange(0, tmax, dt), walk, label=f"$dt$ = {dt}")
ax.set(title="Caminatas de Einstein para distintos $dt$", xlabel="Tiempo (t)", ylabel="Posición (x)")
plt.legend()
plt.savefig("dts.png")
plt.show()
```

c) Para cada uno de los valores de $dt$ dados arriba, obtén 1,000 trayectorias distintas (¡no es necesario que las grafiques!). Llamemos $X_i = X(t = 10)$ a la posición final de la caminata $i$ dado uno de los valores de $dt$. Esto te va a dar tres colecciones de posiciones finales $\{X_1, X_2, \ldots X_{1,000}\}$, una para cada valor de $dt$.

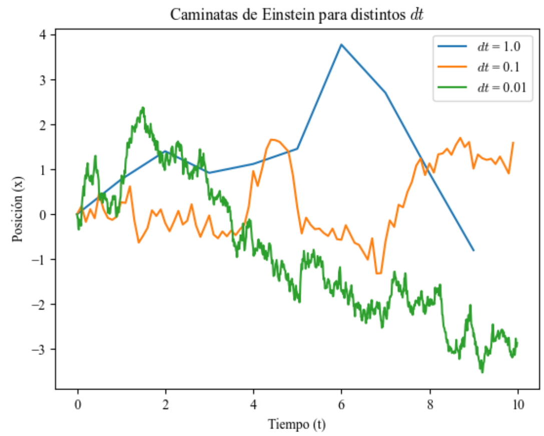


Figura 1: Tres caminatas de Einstein con distintos $dt$.

```python
# c)
n_trayectorias = 10**3
final_positions = []

for dt in dts:
    final_position = []
    for n in range(n_trayectorias):
        final_position.append(Einstein_walk(x0, tmax, dt, delta)[-1])
final_positions.append(np.array(final_position))
```

d) Grafica cada una de estos valores como función del número $i$ para cada $dt$.

```python
# d)
fig, axs = plt.subplot_mosaic([[1], [2], [3]], dpi=200)

for ax_label, dt, walk in zip(axs, dts, final_positions):
    axs[ax_label].plot(final_position, label=f"$dt$ = {dt}", lw=0.5)
    axs[ax_label].set(title=f"Posiciones finales para $dt$ = {dt}", xlabel="Tiempo (t)", ylabel="Posición final (x)
plt.subplots_adjust(hspace=1.5)
plt.savefig("final_positions.png")
plt.show()
```

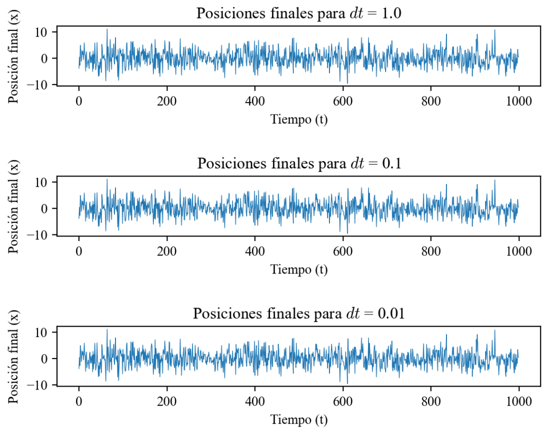


Figura 2: Posiciones finales de caminatas de Einstein para distintos $dt$.

e) Calcula la **varianza muestral** de cada grupo de posiciones finales y compáralas. ¿Es lo que esperabas? Justifica tu respuesta.

Encontramos valores de $\sigma^2 = 9{,}497, 9{,}471, 10{,}354$ para $dt = 1{,}0, 0{,}1, 0{,}01$ respectivamente. Observamos que las varianzas son similares y se aproximan al valor esperado de $\delta^2 t = 10$. La varianza no se ve afectada por el valor de $dt$ que tomamos, pues la variable $X(t)$ está asociada a la normal $N(0, \delta^2 t)$ cuya varianza no depende de $dt$.

## Ejercicio 5 (computacional): Movimiento browniano en 2D (lo que verías a través de un microscopio)

Usa el mismo algoritmo planteado arriba para obtener una trayectoria de $X(t) = N_{i,x}(0,1)\sqrt{\delta 2t}$ y otra para $Y(t) = N_{i,y}(0,1)\sqrt{\delta 2t}$, con $\delta = 1$, $dt = {,}01$ y $t = 100$. Grafica el camino de una partícula Browniana en el plano x-y, suponiendo que las normales para cada eje son estadísticamente independientes. Nota que esta va a ser una gráfica de puntos $(x, y)$, cada uno correspondiente a un tiempo $t$.

Puesto que $X$, $Y$ son estadísticamente independientes, tenemos dos ecuaciones

$$X(t+dt) = X(t) + \sqrt{\delta^2 dt} N_t^{t+dt}(0,1) = X(t) + N_{t,x}^{t+dt}(0, \delta^2 dt).$$
$$Y(t+dt) = X(t) + \sqrt{\delta^2 dt} N_t^{t+dt}(0,1) = Y(t) + N_{t,y}^{t+dt}(0, \delta^2 dt).$$

```
def Einstein_2dwalk(x0, y0, tmax, dt, delta):
stdv = np.sqrt(delta**2 * dt)
N = int(tmax / dt)
X = np.zeros(N)
Y = np.zeros(N)
X[0] = x0
X[0] = y0
for n in range(1, N):
    X[n] = X[n - 1] + np.random.normal(0, stdv)
    Y[n] = Y[n - 1] + np.random.normal(0, stdv)
return X, Y
```

```
delta = 1
dt = 0.01
tmax = 100
x0, y0 = 0, 0
X, Y = Einstein_2dwalk(x0, y0, tmax, dt, delta)

fig, ax = plt.subplots(dpi=200)
ax.scatter(X, Y, s=1)
ax.set(title="Caminata de Eisntein en 2D", xlabel="Posición (x)", ylabel="Posición (y)")

plt.savefig("walk2D.png")
plt.show()
```

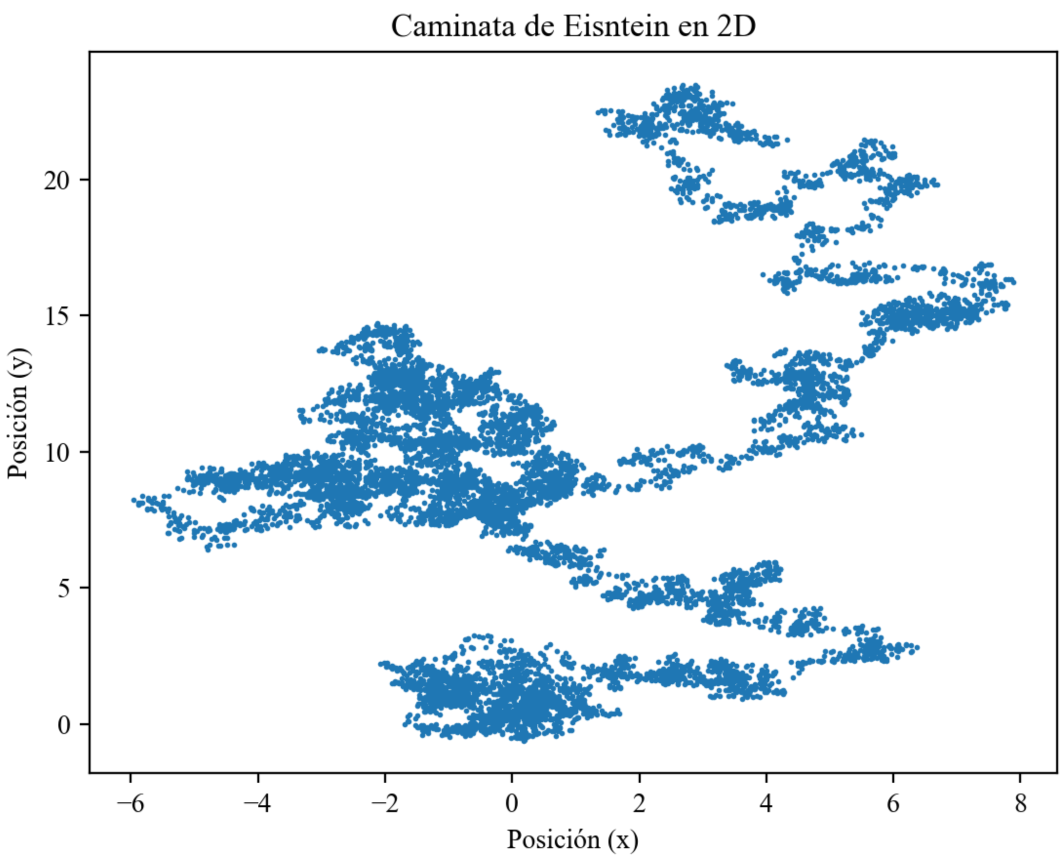


Figura 3: Caminata de Einstein 2D.