Problemas de E.D.O. 2º de Matemáticas. Curso 2016-2017

1. (*) Hacer un estudio cualitativo de las soluciones de las siguientes ecuaciones autónomas, atendiendo principalmente a:
a). Crecimiento y decrecimiento, y posibles puntos críticos.
b). Estabilidad. Existencia de asíntotas.

$i)\ \dfrac{du}{dt} = |u|(1-u)$ $\qquad ii)\ \dfrac{du}{dt} = u^2(1-u)$

$iii)\ \dfrac{du}{dt} = 1 + u(1-u^2)$ $\qquad iv)\ \dfrac{du}{dt} = \sqrt{u}(1-u)(\text{ con } u \geq 0).$

2. (*) Sea f una función continua, y supongamos que todo problema de valor inicial para la ecuación autónoma

$$x' = f(x)$$

tiene solución única.
a) Demostrar que toda solución $x(t)$ no constante es una función estrictamente monótona.
b) Demostrar que si $x(t)$ es una solución tal que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = c,$$

entonces $u(t) \equiv c$ también es solución.

3. (*) Probar que el cambio $z = ax+by+c$ transforma la ecuación $y' = f(ax+by+c)$ en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

- $y' = (x+y)^2$.
- $y' = \text{sen }(x-y-1)$.

4. (*) Escoger un valor adecuado de k de manera que el cambio $z = y/x^k$ transforme la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}$$

en una ecuación de variables separadas.

5. (*) Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas

- $x \,\text{sen}\, \dfrac{y}{x} y' = y \,\text{sen}\, \dfrac{y}{x} + x$.
- $xy' = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $x^2y' = y^2 + 2xy$.
- $(x^3+y^3)dx - xy^2dy = 0$.

6. (*) Hallar la solución general de :

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Observación: la solución $y = x$ no aparece típicamente representada en la fórmula de la solución general. Trátese de dar una explicación, aunque sea intuitiva, de este hecho. Nótese que $y(x) = x$ e $y(x) = -x$ son dos soluciones de b) bajo la condición $y(0) = 0$, es decir, ni siquiera hay unicidad. Estos temas se tratarán más adelante en el curso.

7. (*) Dada la ecuación

$$y' = G\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$$

a) Si $AE \neq BD$, demostrar que se pueden elegir constantes h y k de modo que el cambio de variables $x = z - h$, $y = w - k$ la transforma en una ecuación homogénea.

b) Si $AE = BD$, hallar un cambio de variables que reduzca la ecuación a una de variables separadas.

c) Aplicar los resultados de los apartados anteriores para resolver:

- $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$
- $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}$

8. (*) Calcular la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$$a) \quad \begin{cases} x\,(2\,x^2 + y^2) + y\,(x^2 + 2\,y^2)\,y' = 0\,, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} y + y\ \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x} + \big(x\ \cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\big)\, y' = 0 \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$$

9. (*) Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas, y resolverlas en caso afirmativo.

- $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$
- $(1 + y)dx + (1 - x)dy = 0.$
- $(2xy^4 + \operatorname{sen}\, y) + (4x^2y^3 + x\cos y)y' = 0.$
- $2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) = \sqrt{x^2 - y}\, y'.$
- $3x^2(1 + \log y)dx + (\dfrac{x^3}{y} - 2y)dy = 0.$

10. (*) Resolver primero como ecuación exacta y después como ecuación homogénea:

$$\frac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3}+\frac{8y^2-x^2}{4y^3-x^2y}y'=0.$$

11. (*) Hallar un factor integrante de la forma $\mu=\mu(x+y^2)$, para la ecuación

$$3\,y^2-x+2\,y\,(y^2-3\,x)\,y'=0\,.$$

Calcular la solución general de la ecuación.

12. (*) Las siguientes ecuaciones admiten un factor integrante de la forma $\mu=\mu(x)$, $\mu=\mu(y)$, $\mu=\mu(x+y)$, o $\mu=\mu(xy)$. Calcular la solución:

a) $(x+y)dx+dy=0$

b) $1+(1+(x+y)\tan y)y'=0$

c) $(1+xy)dx+x^2dy=0$

d) $y+(2x-ye^y)y'=0$

e) $y+(x-3x^2y^2)y'=0$.

13. Demostrar que si $\mu_1(x,y)$ y $\mu_2(x,y)\neq 0$ son dos factores integrantes de la ecuación

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0\,,$$

cuyo cociente no se reduce a una constante, entonces las curvas

$$\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}=C$$

son solución de la ecuación.

14. a) Hallar todas las soluciones de las ecuaciones

$$a)\quad t\,x'+(1-t)\,x=0\,,\quad b)\quad t\,x'+(1-t)\,x=1\,,$$

b) Calcular las soluciones que cumplen $x(0)=0$ y $x(0)=1$, o demostrar que tales soluciones no existen.

15. Demostrar que si $Q(t)$ es un polinomio de grado n , la ecuación

$$t\,x'+x=Q(t)$$

tiene exactamente una solución polinómica de grado n .

16. (*) Sea $y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable. Demostrar que si todas las tangentes a su gráfica pasan por un mismo punto, entonces es un segmento de recta, y que si todas las normales pasan por un mismo punto, es un arco de circunferencia.

17. (*) Resolver las ecuaciones lineales:

- $x' + x = 2\,t\,e^{-t} + t^2$
- $y' - 2\,x\,y = 6\,x\,\exp(x^2)$
- $xy' - 3y = x^4$.
- $(2y - x^3)dx = xdy$.
- $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.
- $(x \log x)y' + y = 3x^3$.

18. La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ recibe el nombre de *Ecuación de Bernoulli* (observar que es lineal en los casos particulares $n = 0$ y $n = 1$). Demostrar que el cambio de variables $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Aplicar el método anterior para resolver $xy^2y' + y^3 = x \cos x$.

19. Probar que la ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y \log y$ puede resolverse mediante el cambio $z = \log y$, y aplicar este método para resolver la ecuación $xy' = 2x^2y + y \log y$.

20. (*) Resolver las siguientes ecuaciones de segundo orden:

- $yy'' + (y')^2 = 0$.
- $xy'' = y' + (y')^3$.
- $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$.
- $2yy'' = 1 + (y')^2$.

21. (*) Resolver

$$a) \quad (y'')^2 + (y''')^2 = 1, \qquad b) \quad y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$$

22. Una extensión natural de la ecuación lineal de primer orden es la *Ecuación de Riccati*

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

Aunque, en general, esta ecuación no puede resolverse por métodos elementales, demostrar que si se conoce una solución particular $y_1(x)$, el cambio de variables $z = y - y_1$ la transforma en una ecuación de Bernoulli .

a) Utilizar este método para resolver

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

sabiendo que la ecuación anterior tiene una solución particular $y_1(x) = x$.

b) Aplicar lo anterior para resolver la ecuación

$$2\,x^2\,y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2\,x\,y.$$