

# TEA018 - Hidrologia Ambiental

Propagação do Escoamento em Rios, Lagos e Reservatórios

Modelos Distribuídos para propagação de Cheias

Métodos das Diferenças Finitas e de Muskingum Cunge

Exemplos

Emílio Graciliano Ferreira Mercuri

Departamento de Engenharia Ambiental

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

# Outline

## Agenda de atividades

- Contextualização e importância
- Modelos Distribuídos
- Aspectos teóricos
- Equações de Saint-Venant
- Propagação de cheias em rios - Método das Diferenças Finitas
  - Exemplo 1 Google Colab
  - Propagação de cheias em rios - Método de Muskingum-Cunge
  - Exemplo 2 Google Colab
- Exercícios Propostos

# Contextualização

Fenômeno da **Cabeça d'água**

- Rio Illgraben na Suíça



O vale de Illgraben é uma das regiões geologicamente mais instáveis da Suíça e está localizado ao sul de Leuk, no cantão de Valais.

# Contextualização

## Diferença de Cabeça d'água e Tromba d'água



Cabeça d'água

A cabeça d'água se caracteriza pela chuva intensa. Geralmente, a chuva acontece em um ponto isolado e alto do rio, na nascente, por exemplo. Quando chove muito na cabeceira do rio, a tendência natural é a vazão de água aumentar ao longo do percurso e de maneira abrupta.



Tromba d'água

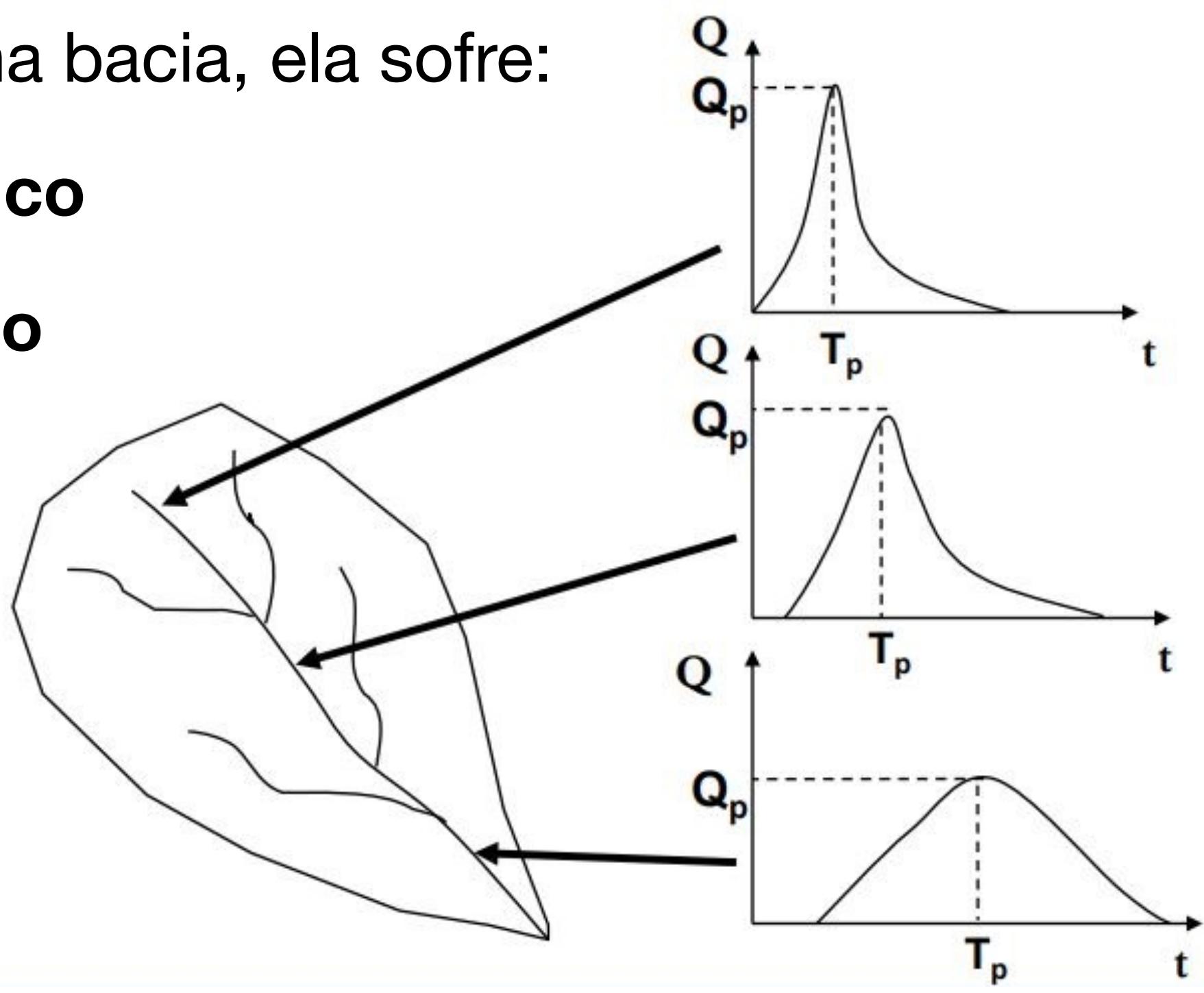
A tromba d'água é um tornado que se forma sobre uma superfície de água. O vórtice de ar girando suga a água, dando a ela uma forma que se assemelha a uma tromba. Geralmente, acontece no mar ou, raramente, em rios muito largos.

# Propagação do escoamento em rios, lagos e reservatórios

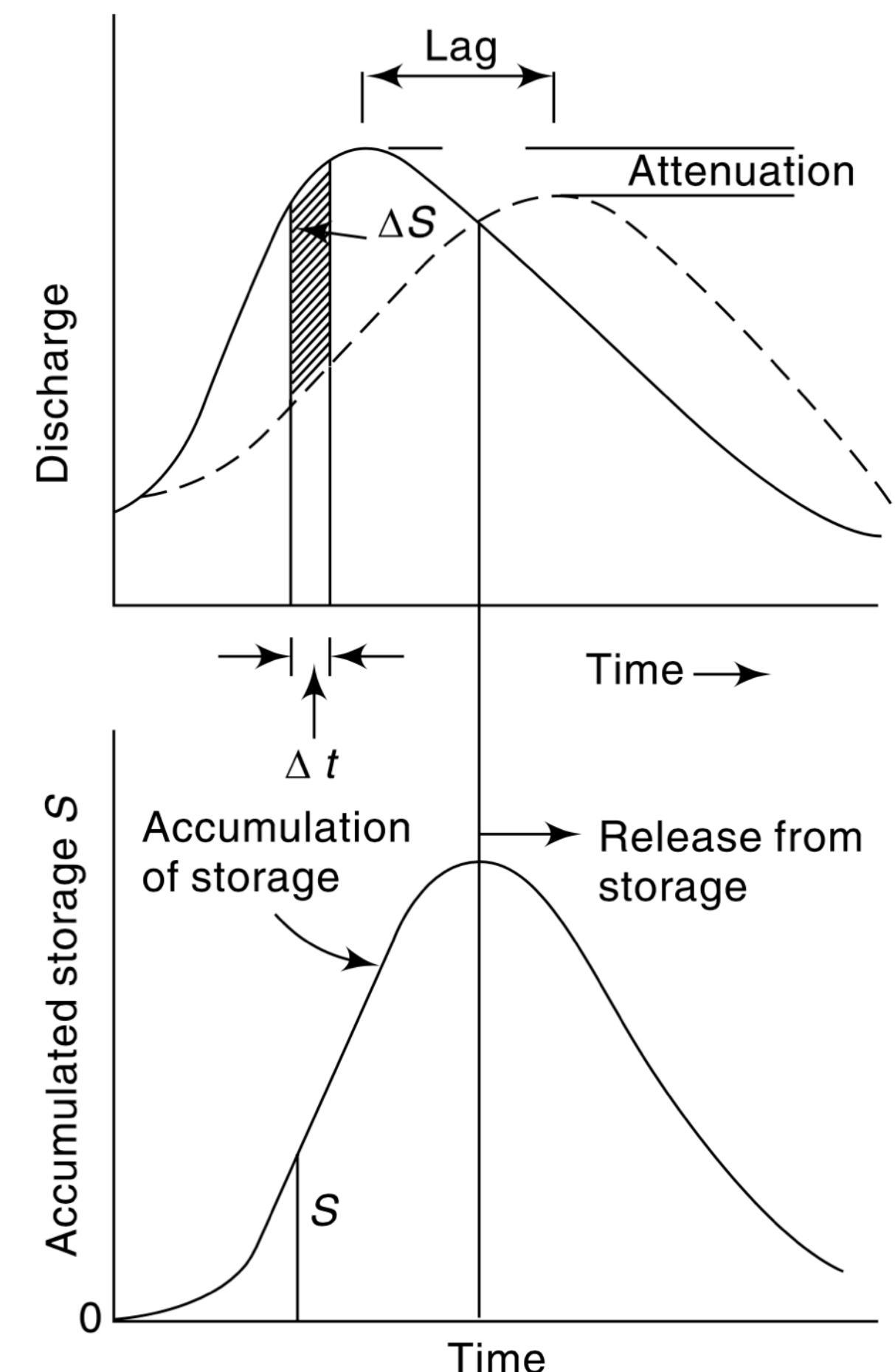
## Propagação de cheias

A medida que a onda de cheia (hidrograma) se propaga a jusante na bacia, ela sofre:

- **Atenuação do Pico**
- **Tempo de retardo**

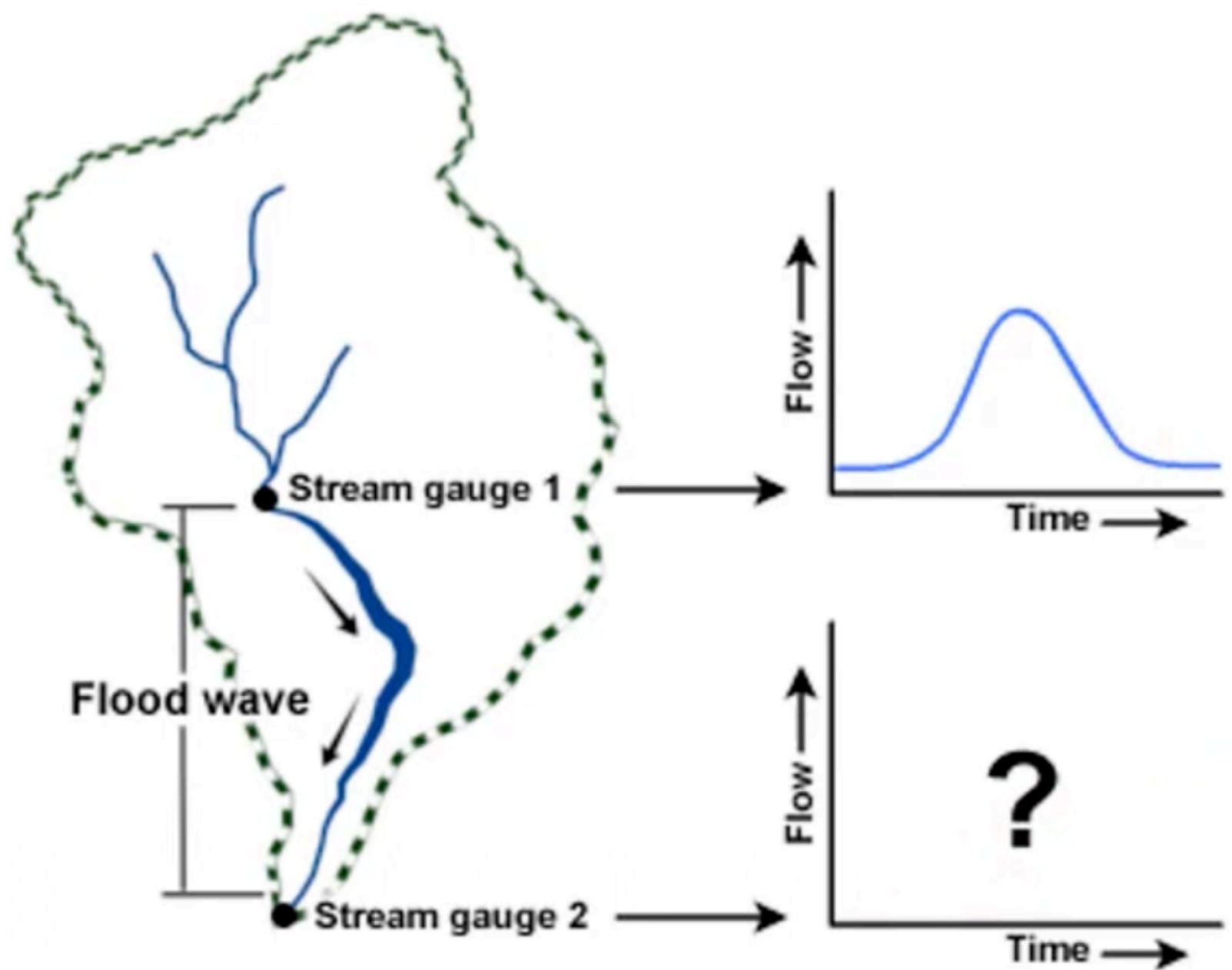


Propagação da cheia a jusante de um ponto na bacia hidrográfica



**Fig. 8.8** Hydrographs and storage in channel routing

# Qual é o hidrograma em um local a jusante se o hidrograma em um local montante é conhecido?



Queremos saber:

- Magnitude da vazão
- Tempo de ocorrência dos picos
- Tempo de chegada da onda ■

# Propagação do escoamento e de cheias

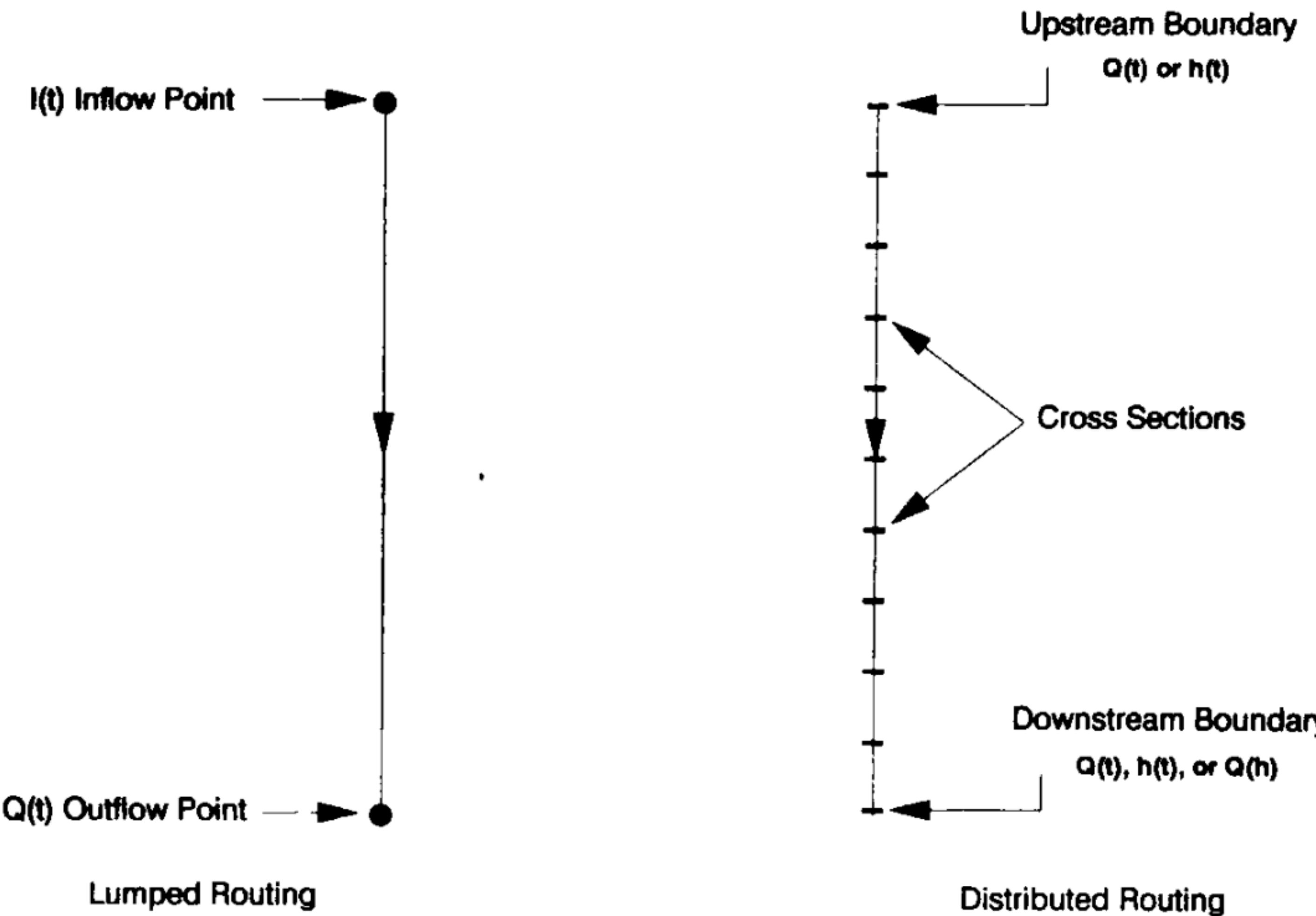
## Modelos Concentrados × Distribuídos

- **Lumped Flow Routing** (Capítulo 8 - Maidment)
  - Método de Muskingum
- **Distributed Flow Routing** (Capítulo 9 - Maidment)
  - Equações de Saint-Venant
  - Modelo de uma onda (celeridade)
  - Método das Diferenças Finitas
  - Método de Muskingum-Cunge

Na aula de hoje focaremos em **modelos distribuídos**.

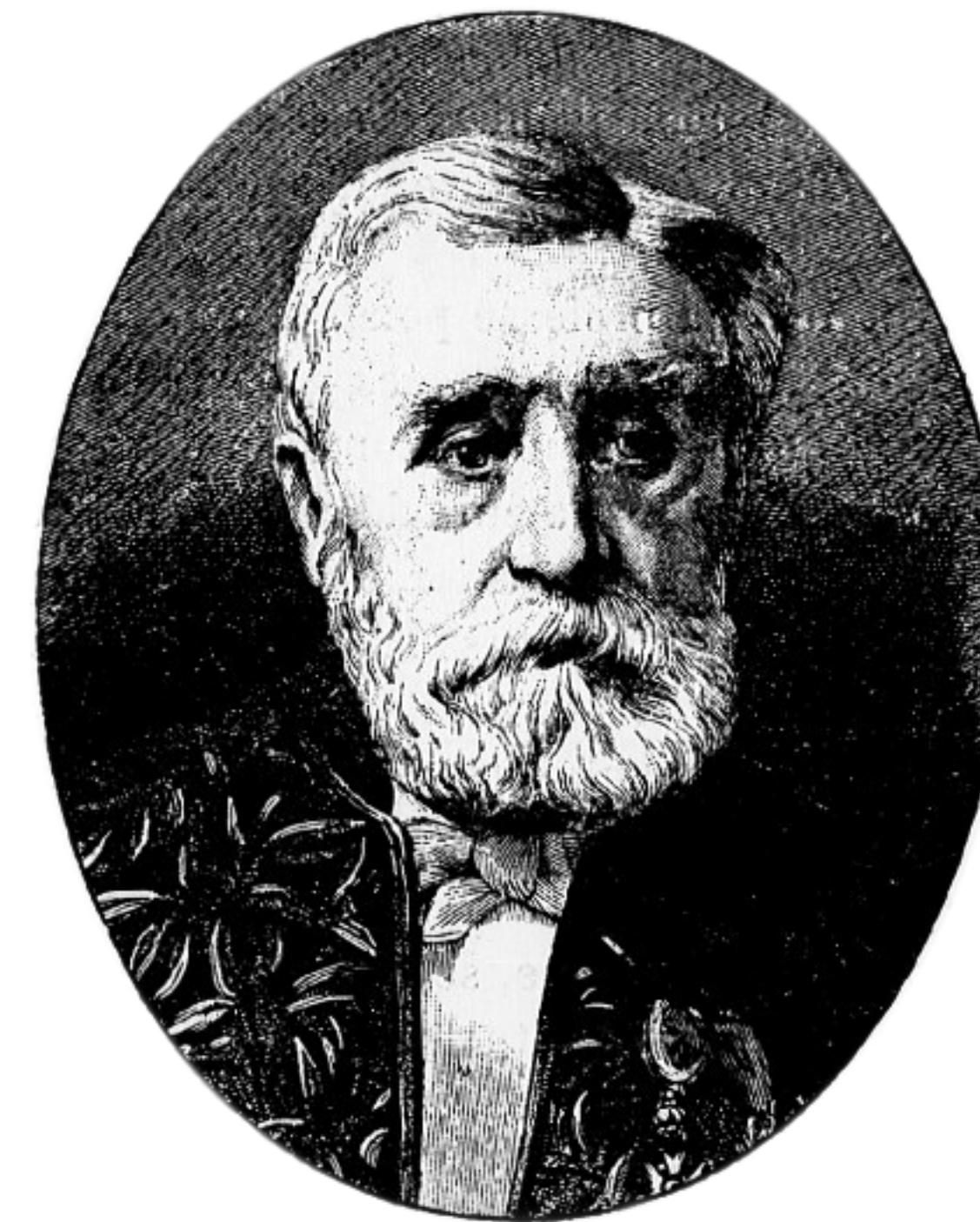
# Propagação do escoamento e de cheias

## Modelos Concentrados × Distribuídos



**FIGURE 10.1.1** Schematic showing lumped and distributed flow routing system, where  $Q$  is discharge or flow rate and  $h$  is water surface elevation or stage.

# Equações de Saint-Venant



**Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant**

(Villiers-en-Bière, 23/08/1797 — Saint-Ouen, 6/1/1886)  
foi um professor e engenheiro francês.

# Equações de Saint-Venant

## Hipóteses simplificadoras:

1. O fluxo é 1D, a profundidade e a velocidade variam na direção longitudinal do canal e no tempo.
2. O fluxo varia gradualmente ao longo do canal, de modo que a pressão hidrostática prevaleça e as acelerações verticais possam ser desprezadas (Chow, 1959).
3. O eixo longitudinal do rio/canal é aproximado como uma linha reta.
4. A inclinação do canal é pequena e o leito do canal é fixo; isto é, os efeitos da erosão e da deposição são insignificantes.
5. Os coeficientes de resistência para fluxo turbulento uniforme e estacionário são aplicáveis para que relações como a equação de Manning possam ser usadas para descrever efeitos de resistência.
6. O fluido é incompressível e de densidade constante em todo o fluxo.



Saint-Venant

# Eq's Saint-Venant - Equação da Continuidade

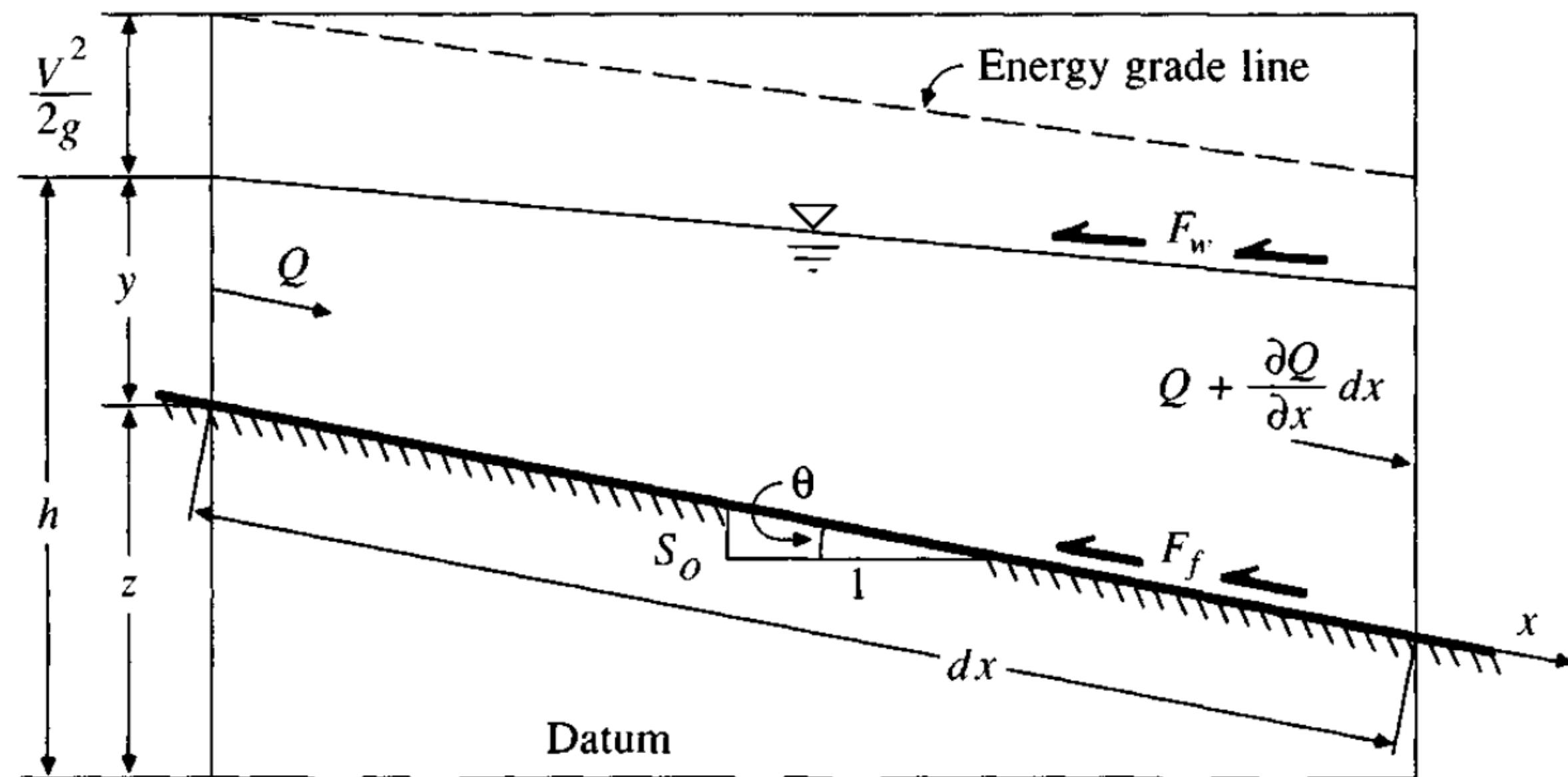
Teorema de Transporte de Reynolds T.T.R. (já vimos)

Eq. continuidade p/ fluxo não permanente de  $\rho$  variável em V.C.:

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho dV + \iint_{S.C.} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

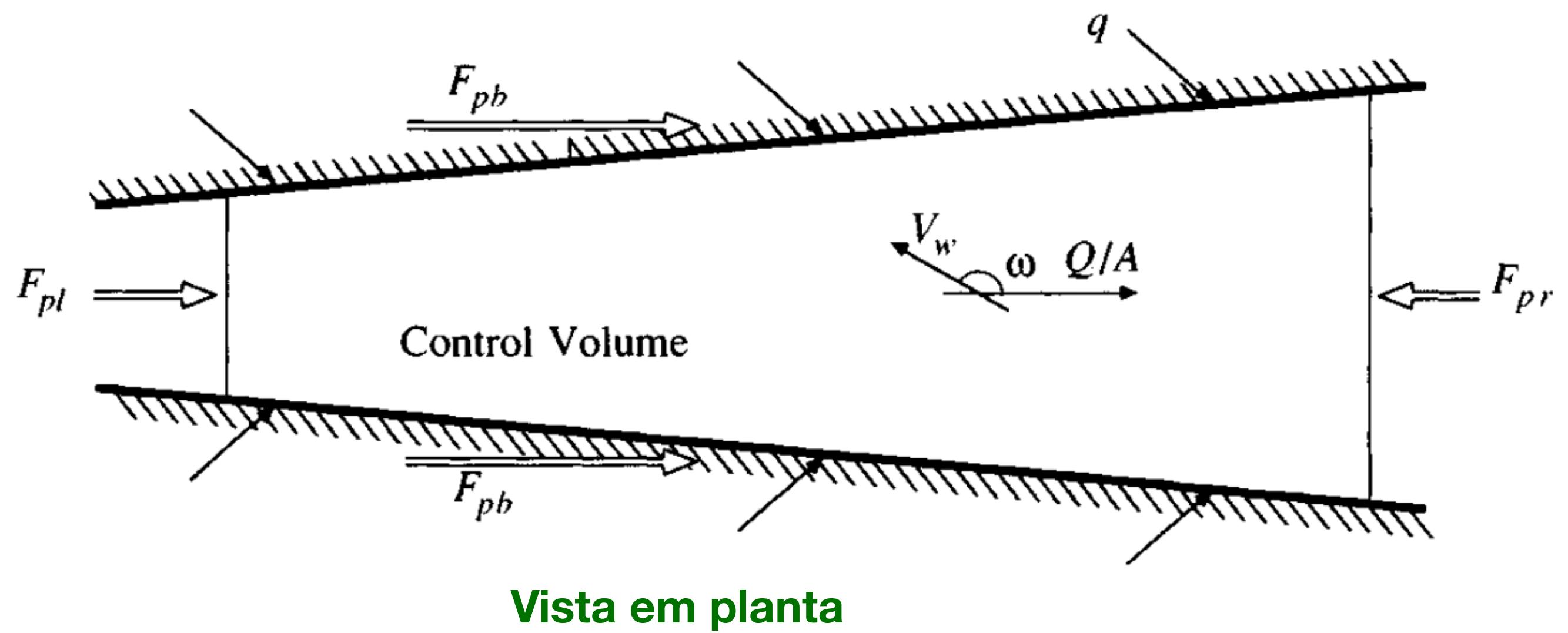
$V$ : volume,  $\mathbf{V}$ : velocidade e  $A$ : área da seção transversal

Considere **V.C. elementar** de comprimento  $dx$  num rio/canal.

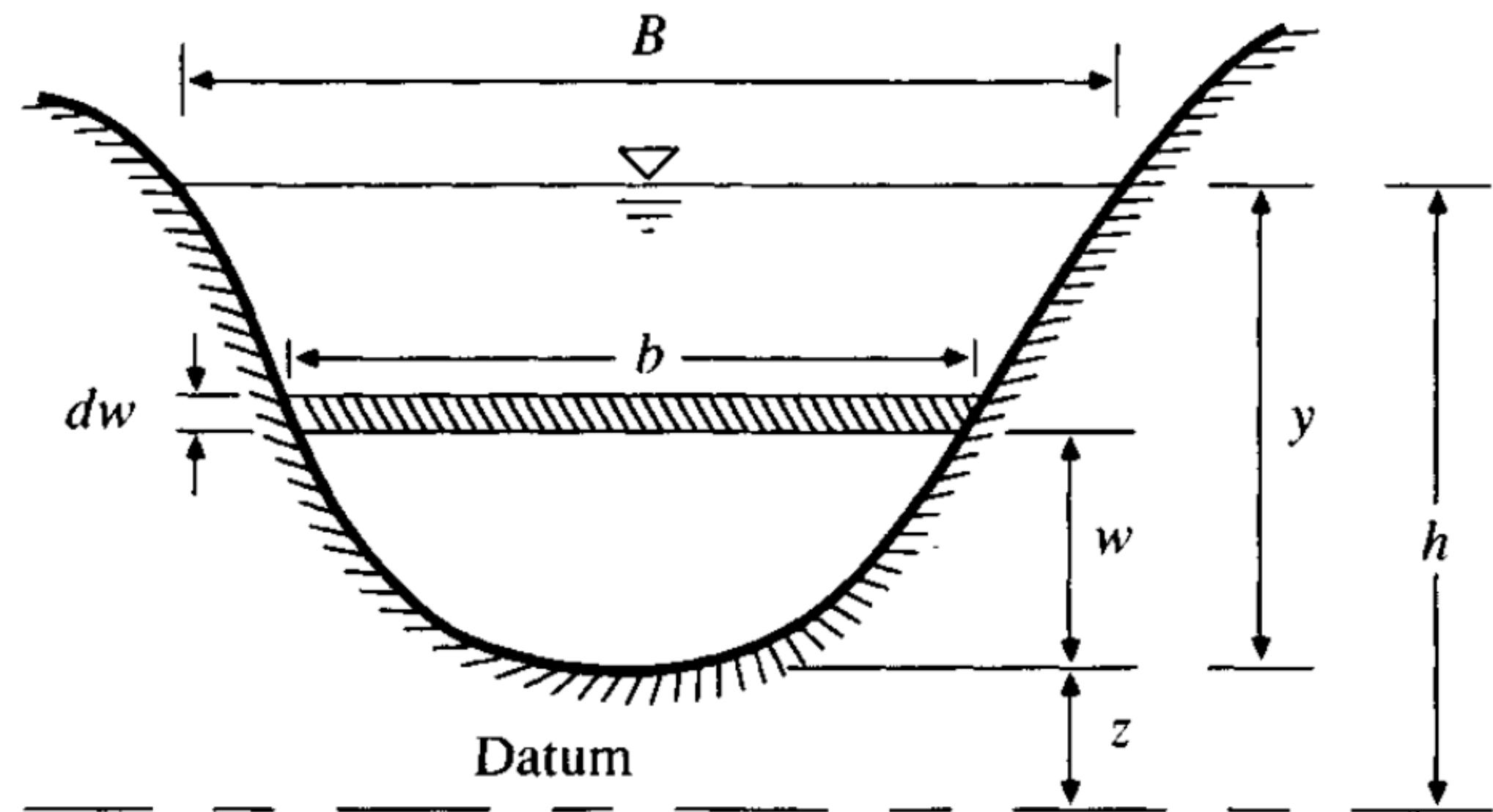


**Vista ao longo da direção longitudinal**

(elevação do fundo e da superfície)



**Vista em planta**



**Vista da seção transversal do rio**

# Eq's Saint-Venant: 1. Equação da Continuidade

Eq. continuidade p/ fluxo não permanente de  $\rho$  variável em V.C.:

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho dV + \iint_{S.C.} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

- Entrada V.C. :  $Q$  (vazão a montante) +  $q$  (fluxo lateral / unidade de comprimento)

- Saída V.C. :  $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$  (Série de Taylor)

Fluxo no V.C.:

$$\iint_{S.C.} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -\rho (Q + q dx) + \rho \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right)$$

Acumulação no V.C.:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho dV = \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t}$$

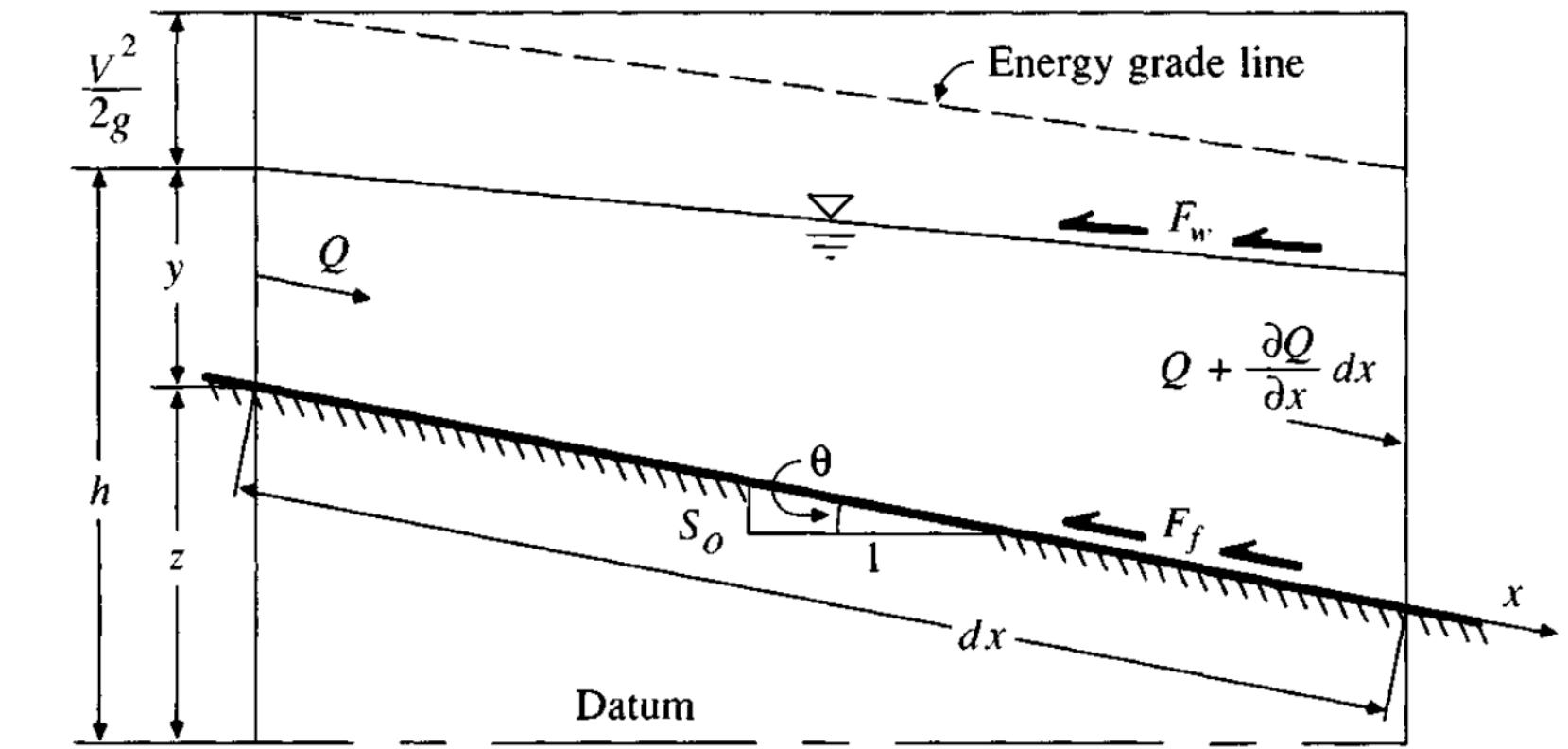
Juntando:

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} - \rho(Q + q dx) + \rho \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) = 0$$

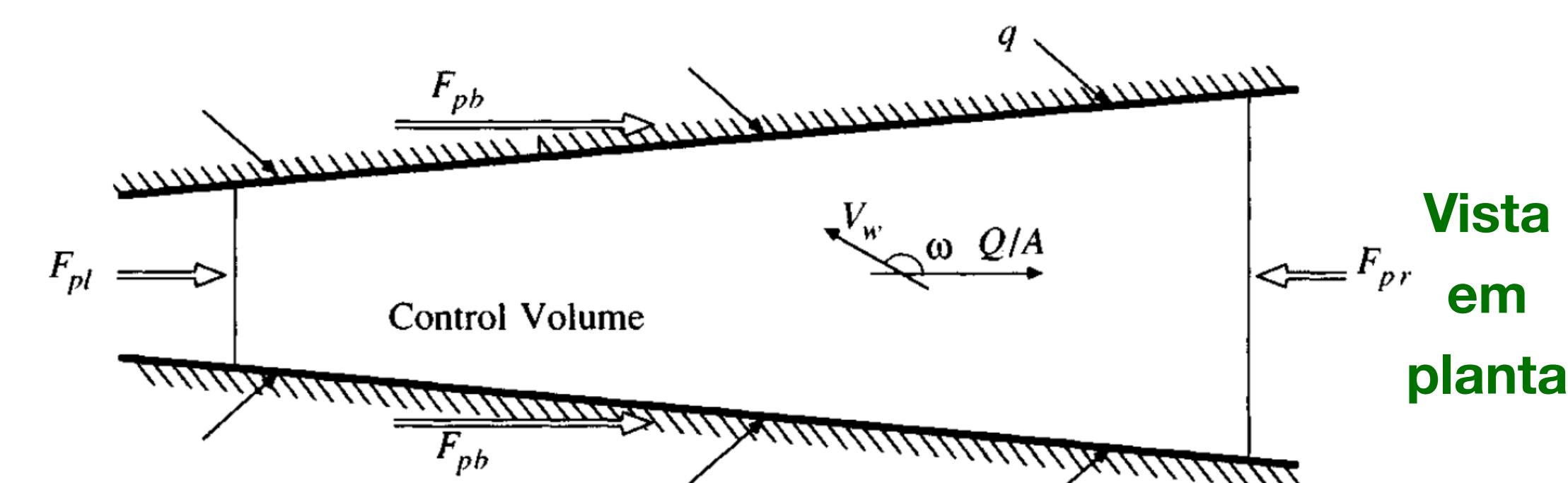
Se  $\rho = \text{constante}$ , dividindo por  $A dx$  e simplificando:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \quad (\text{forma conservativa da Eq. Continuidade})$$

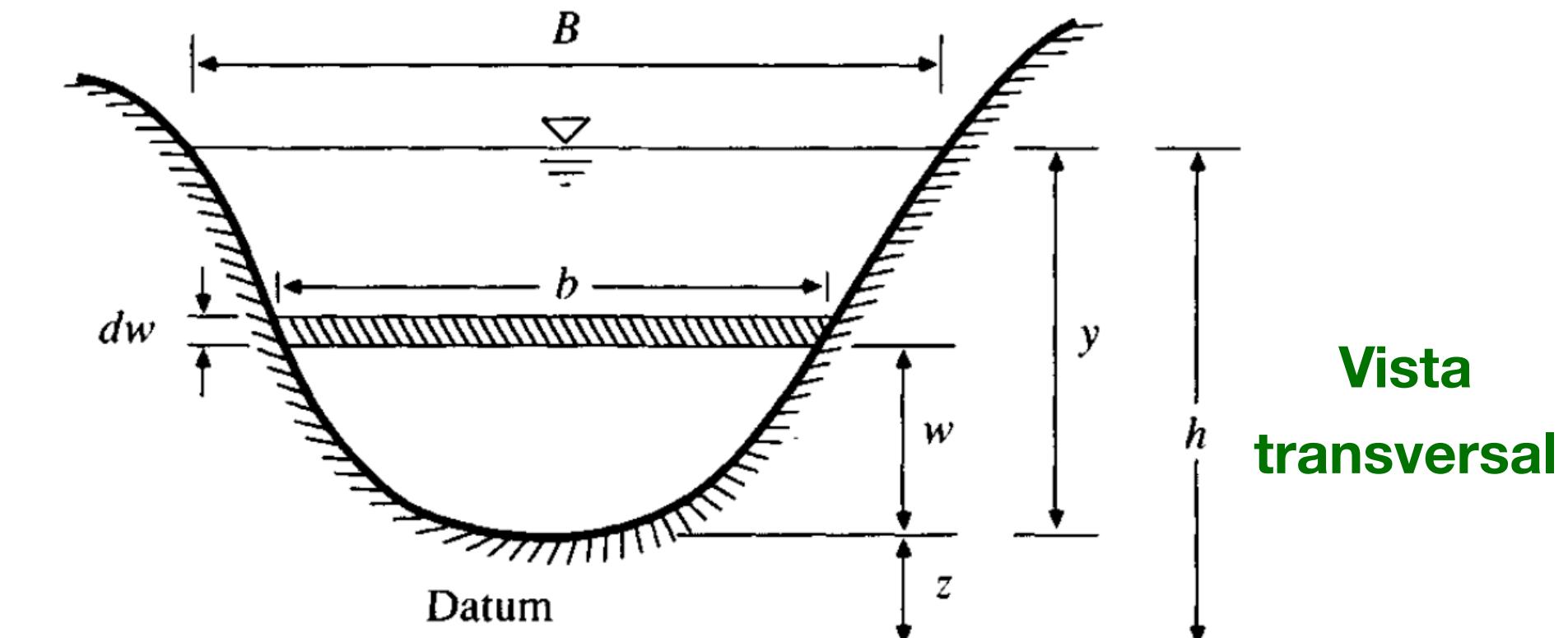
válida p/ canal prismático ou não prismático (seção transversal variável) ■



Vista  
lateral



Vista  
em  
planta



Vista  
transversal

# Eq's Saint-Venant: 1. Equação da Continuidade

Eq. continuidade p/ fluxo não permanente de  $\rho$  constante:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \text{ (forma conservativa da Eq. Continuidade)}$$

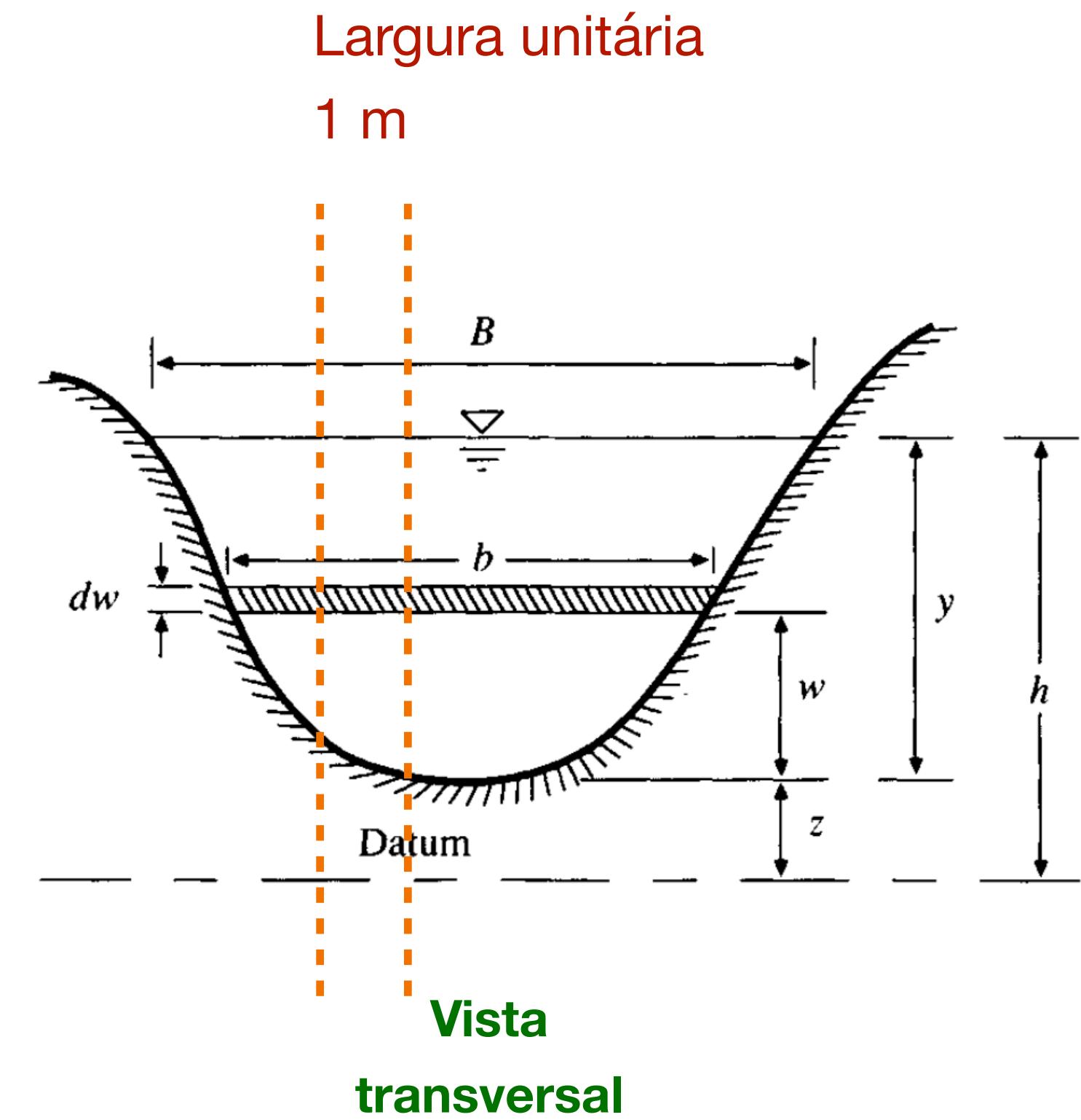
Se desprezarmos o influxo lateral  $q$ ,  $V$  = velocidade e para uma largura unitária de fluxo  $A = y \times 1 = y$  e vazão  $Q = VA = Vy$ .

$$\frac{\partial(Vy)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

ou

$$V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

(forma não conservativa da Eq. Continuidade)



## Eq's Saint-Venant: 2. Equação do Momentum

Do T.T.R. e da 2<sup>a</sup> lei de Newton temos que:  $\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \mathbf{V} \rho dV + \iint_{S.C.} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$

5 Forças:  $\Sigma F = F_g + F_f + F_e + F_w + F_p$

1. Gravitacional:  $F_g = \rho g A dx \sin \theta \approx \rho g A S_o dx$  sendo  $S_o = -\partial z / \partial x$

2. Atrito do fundo:  $F_f = -\rho g A S_f dx$  sendo  $S_f$  declividade da linha de energia

3. Força devido a expansão ou contração do canal:  $F_e = -\rho g A S_e dx$

sendo  $S_e$  a declividade equivalente devida a dissipação de energia turbulenta

(Gerada pela perda da energia do escoamento por geração de vórtices turbulentos)

$$S_e = \frac{K_e}{2g} \frac{\partial(Q/A)^2}{\partial x}$$

$K_e$ : coeficiente de expansão ou contração adimensional

4. Cisalhamento do vento  $F_w = -W_f B \rho dx$  sendo  $W_f = C_f |V_r| V_r / 2$

$V_r = \frac{Q}{A} - V_w \cos \omega$  é a velocidade relativa (v. escoamento -  $V_w$  vento)

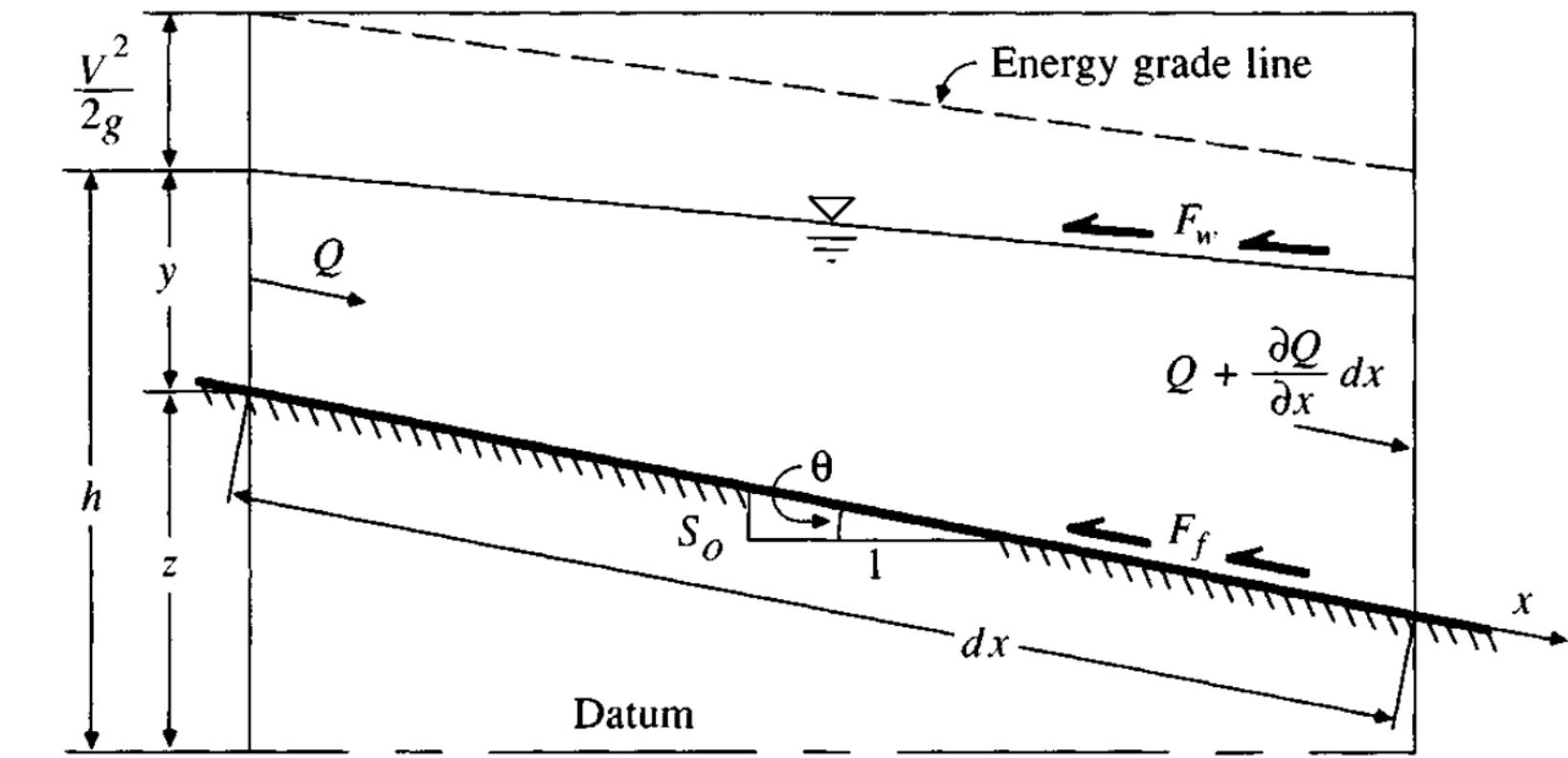
5.  $F_p$ : Forças por desbalanceamento da Pressão

$F_p = F_{pl} - F_{pr} + F_{pb}$  (forças hidrostáticas esquerda, direita e das laterais ou "banks")

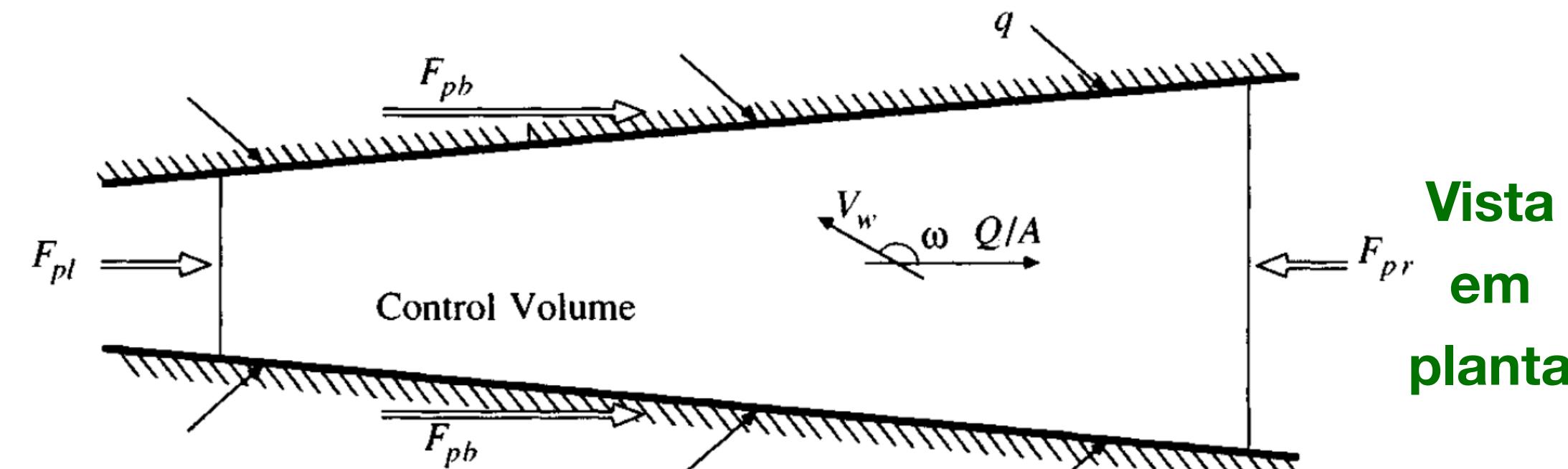
O somatório pode ser escrito como (mais detalhes no Maidment)

$$\Sigma F = \rho g A S_o dx - \rho g A S_f dx - \rho g A S_e dx - W_f B \rho dx - \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

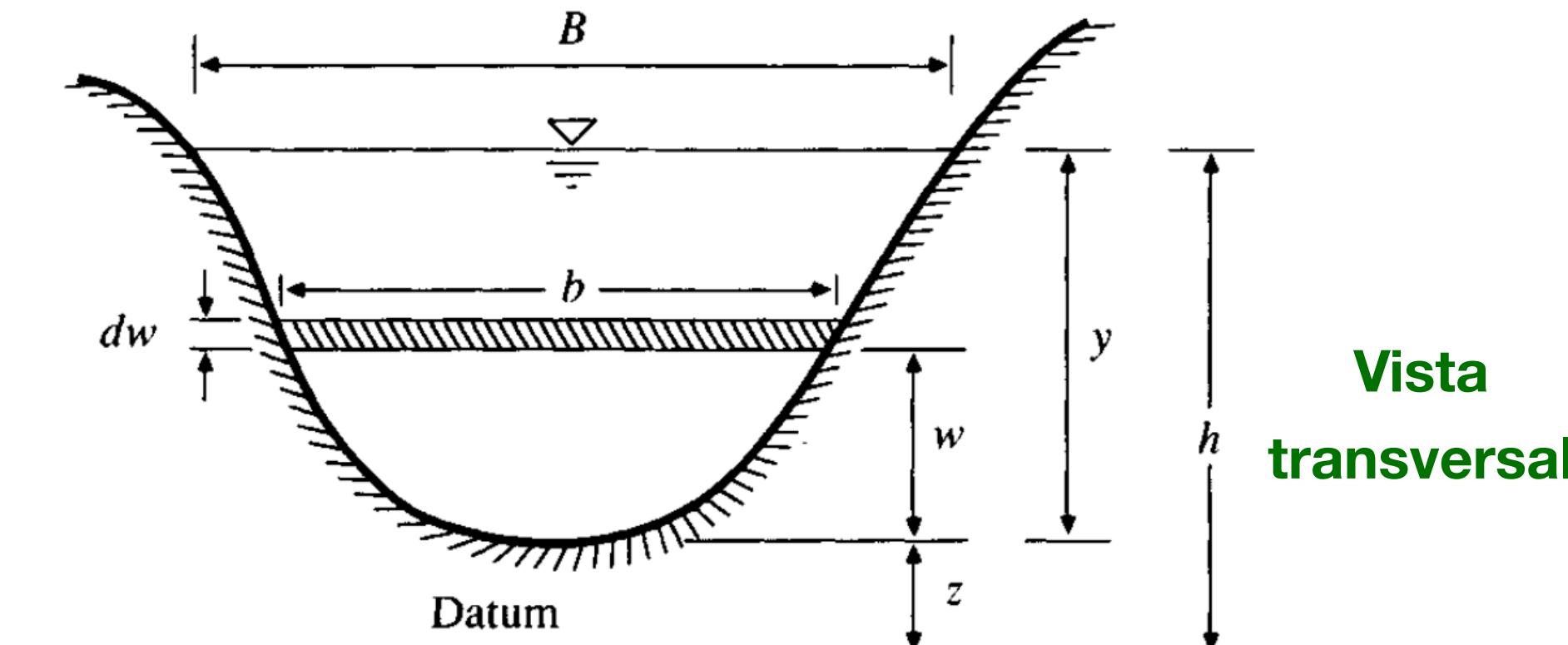
(gravidade) (atrito) (Exp./contr.) (vento) (pressão) ■



Vista lateral



Vista em planta



Vista transversal

## Eq's Saint-Venant: 2. Equação do Momentum

Armazenamento de Momentum no V.C.:  $\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \mathbf{V} \rho dV = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx$

Fluxo de Momentum na **entrada** da S.C.:  $\iint_{\text{entrada}} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -\rho (\beta VQ + \beta v_x q dx)$

onde  $\rho \beta VQ$  é o momento que entra pela extremidade a montante do canal, e  $\rho \beta v_x q dx$  é o momento que entra no canal principal com o influxo lateral, que tem uma velocidade  $v_x$  na direção  $x$ .

O fluxo de momento é calculado multiplicando as duas taxas de fluxo de massa pelas suas respectivas velocidades e um fator de correção de momento  $\beta$ .

$\beta$ : **coeficiente de momento** ou **coeficiente de Boussinesq**, serve para corrigir a distribuição não uniforme da velocidade na seção transversal do canal.

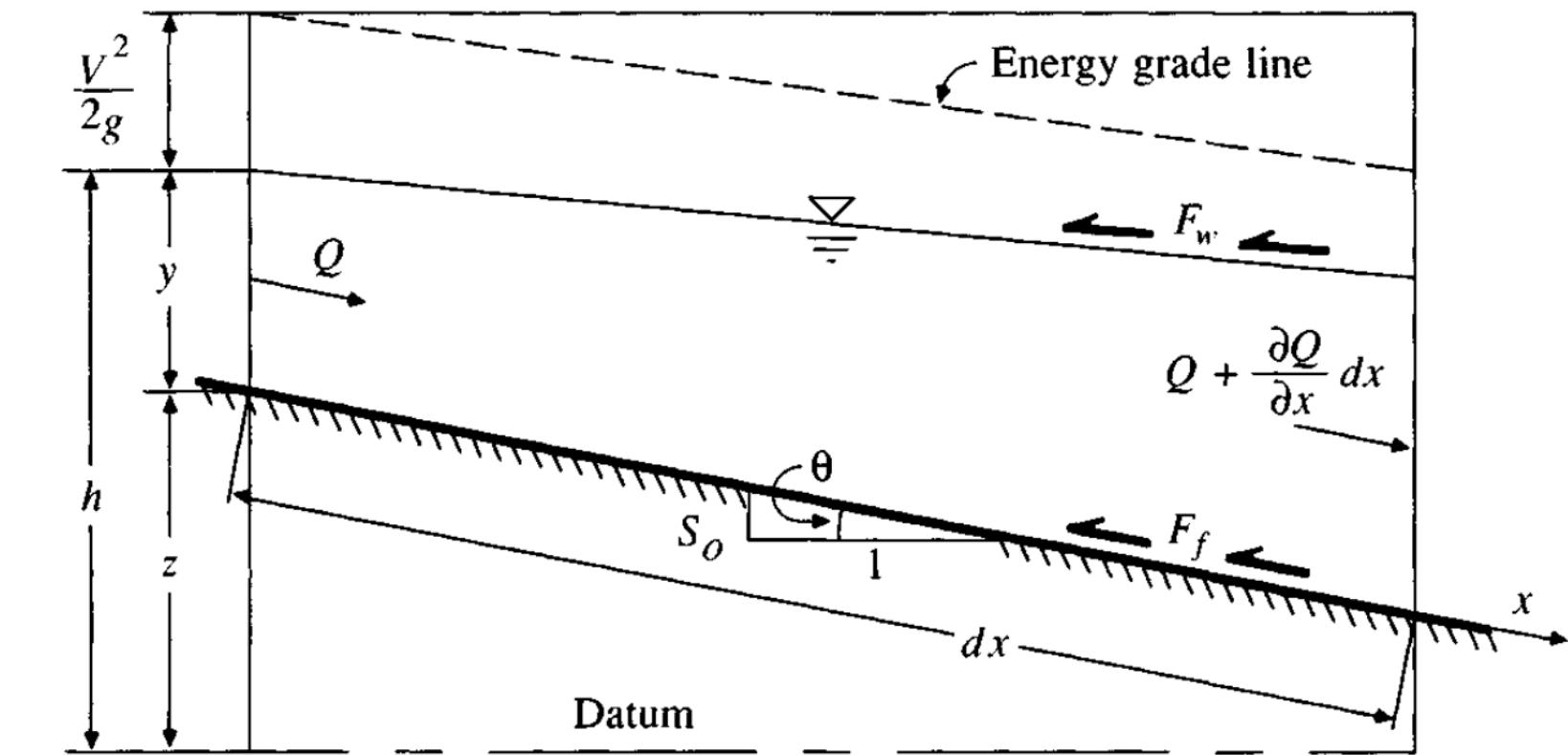
$$\beta = \frac{1}{V^2 A} \iint v^2 dA \quad (\text{o } V \text{ aqui é velocidade})$$

onde  $v$  é a velocidade em pequeno elemento de área  $dA$  na seção transversal do canal.

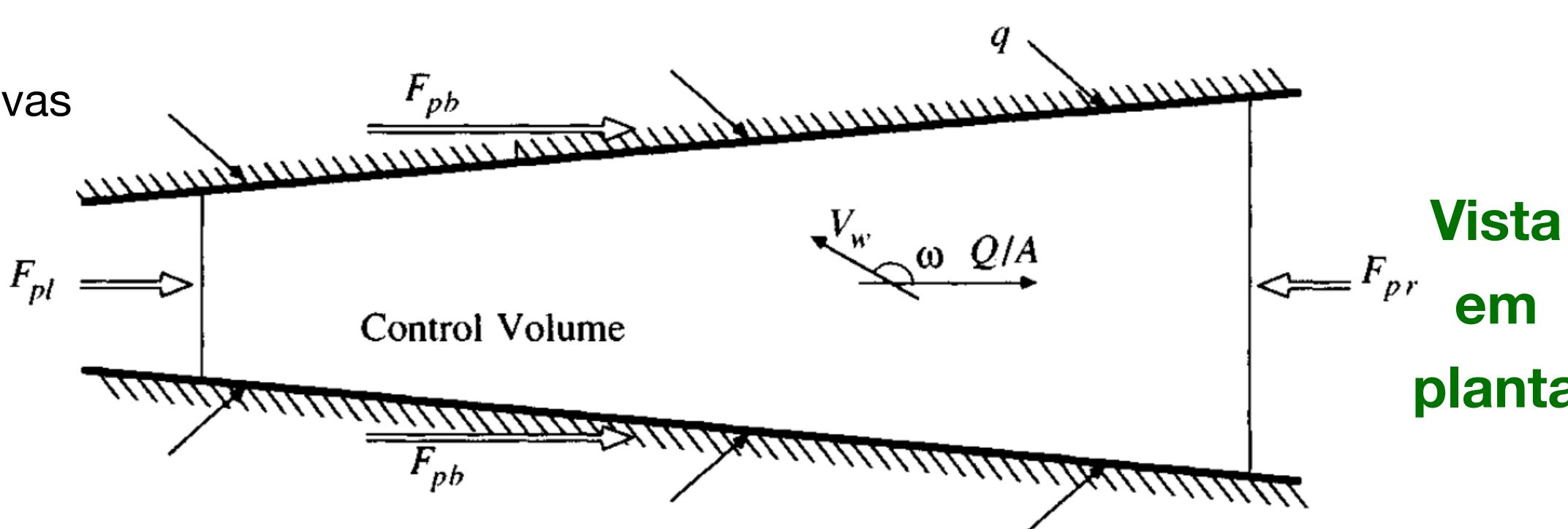
O valor de  $\beta$  varia de 1,01 para canais prismáticos retos a 1,33 para vales fluviais com planícies aluviais (Chow, 1959; Henderson, 1966).

Fluxo de Momentum na **saída** da S.C.:  $\iint_{\text{saída}} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = \rho \left[ \beta VQ + \frac{\partial(\beta VQ)}{\partial x} dx \right] \quad (V = \text{velocidade})$

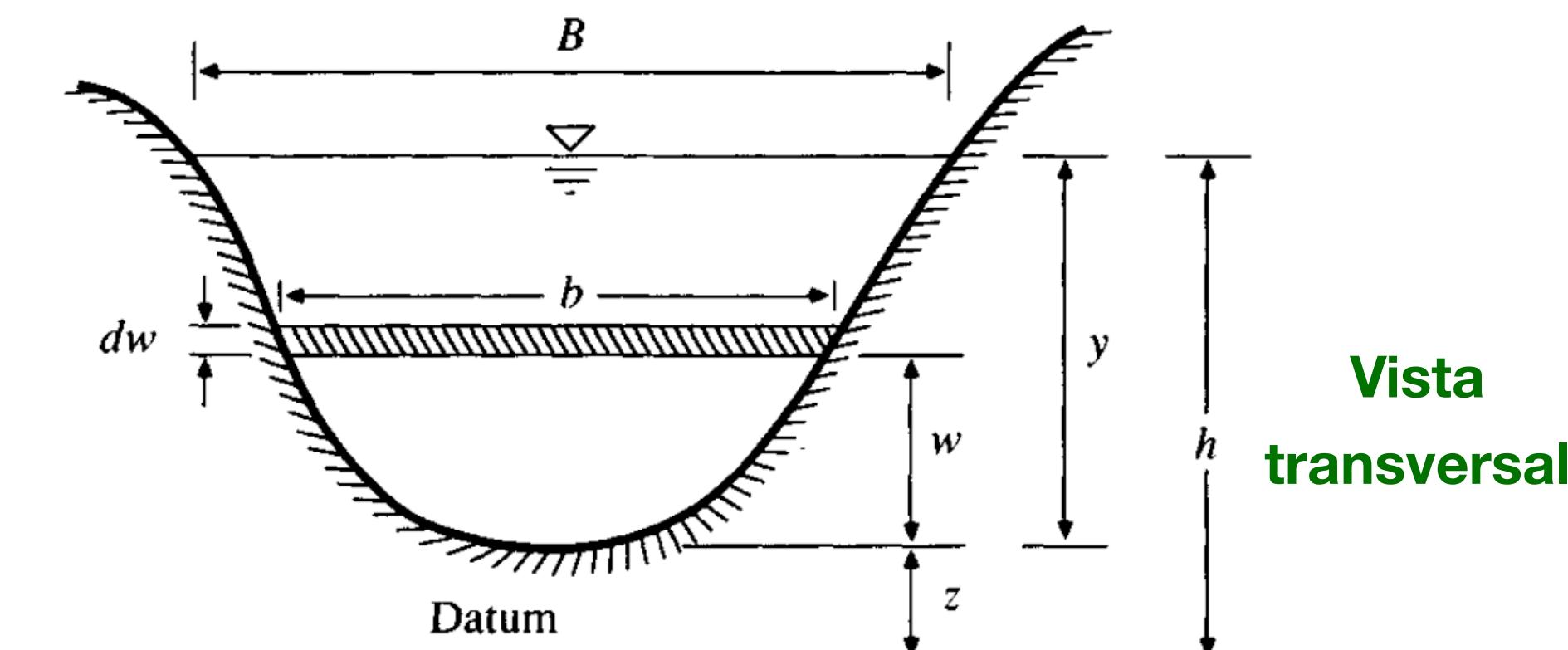
Simplificando (entrada + saída):  $\iint_{\text{S.C.}} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -\rho \left[ \beta v_x q - \frac{\partial(\beta VQ)}{\partial x} \right] dx \quad \blacksquare$



Vista lateral



Vista em planta



Vista transversal

# Eq's Saint-Venant: 2. Equação do Momentum

Do T.T.R. e da 2<sup>a</sup> lei de Newton temos que:  $\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \mathbf{V} \rho dV + \iint_{S.C.} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$

Somatório de Forças:  $\Sigma F = \rho g A S_o dx - \rho g A S_f dx - \rho g A S_e dx - W_f B \rho dx - \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx$   
 (gravidade) ( atrito) (Exp./contr.) (vento) (pressão)

Armazenamento no V.C.:  $\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \mathbf{V} \rho dV = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx$

Fluxo na S.C.:  $\iint_{S.C.} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -\rho \left[ \beta v_x q - \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} \right] dx$

$$\rho g A S_0 dx - \rho g A S_f dx - \rho g A S_e dx - W_f B \rho dx - \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

Juntando os 3 termos:

$$= -\rho \left[ \beta v_x - \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} \right] dx + \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx$$

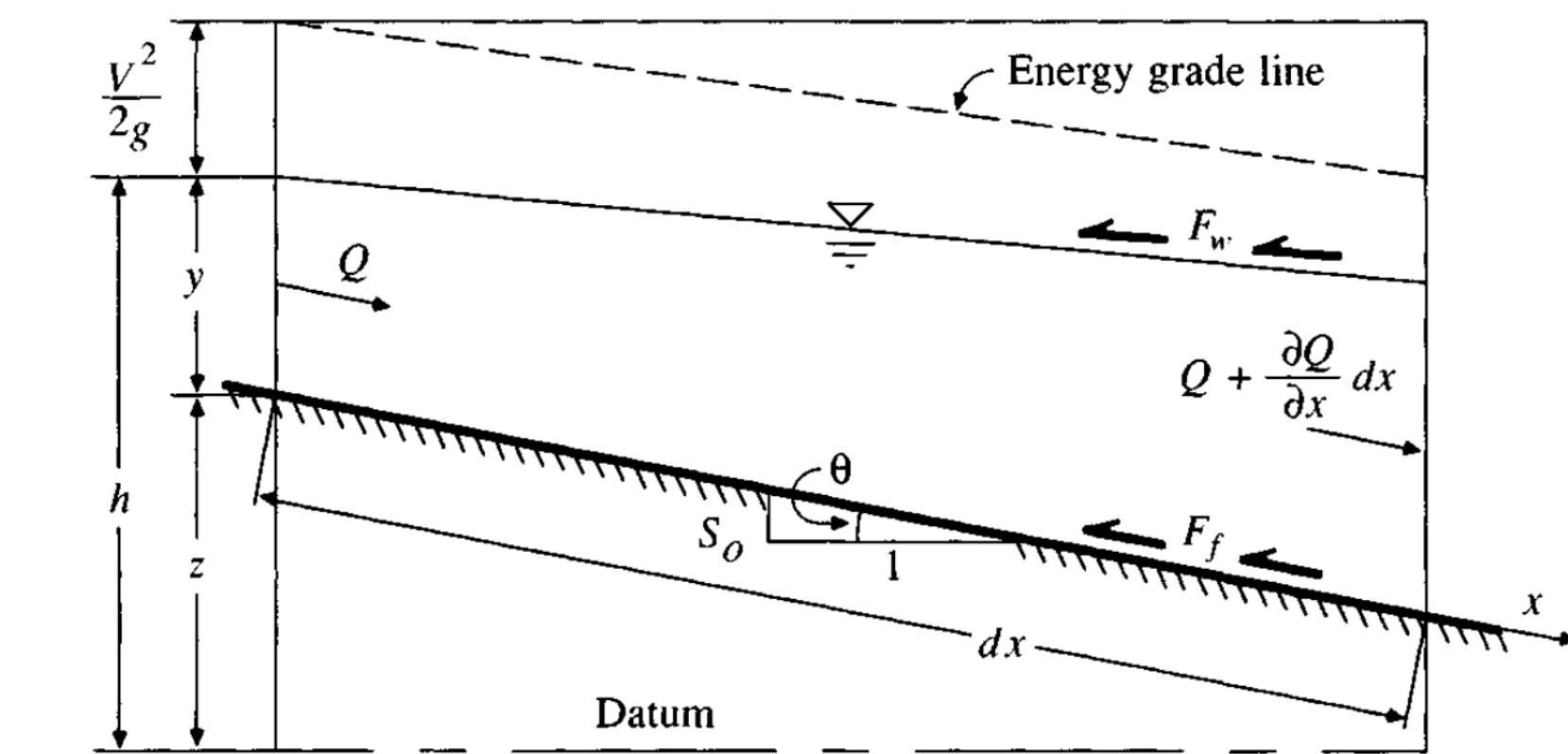
Dividindo por  $\rho dx$ , substituindo  $V = Q/A$  e rearranjando, obtemos:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\beta Q^2/A)}{\partial x} + gA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - S_o + S_f + S_e \right) - \beta q v_x + W_f B = 0$$

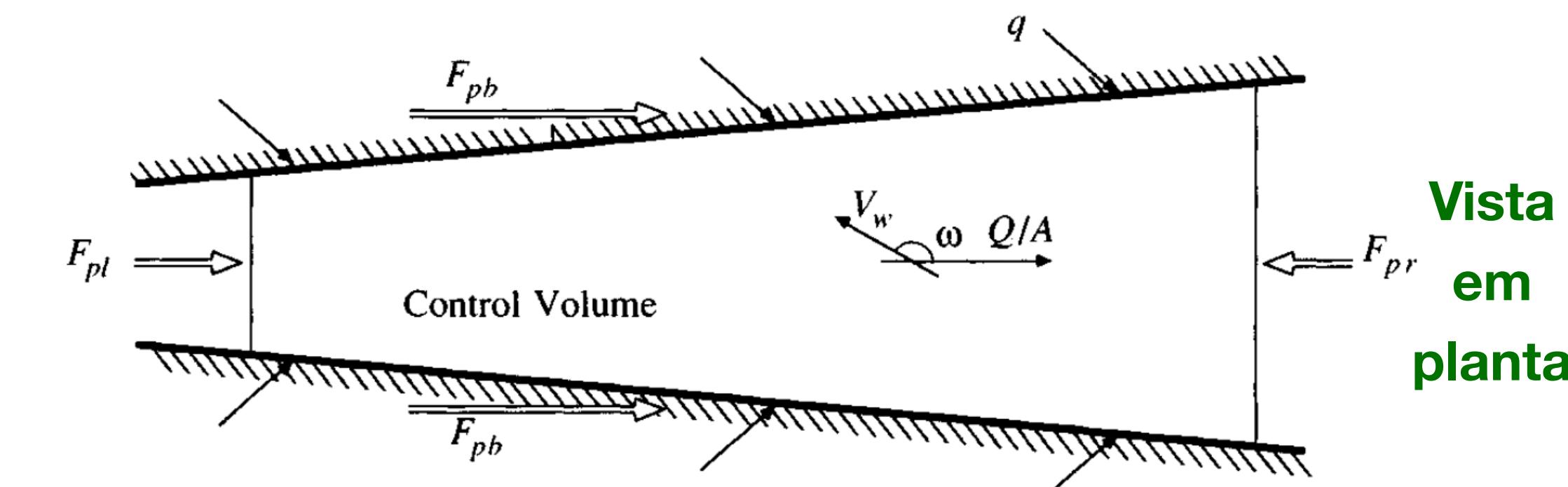
Substituindo  $h = y + z$ , derivando:  $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - S_o$ , reescrevendo:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\beta Q^2/A)}{\partial x} + gA \left( \frac{\partial h}{\partial x} + S_f + S_e \right) - \beta q v_x + W_f B = 0 \blacksquare \text{ (eq. Momentum conservativa)}$$

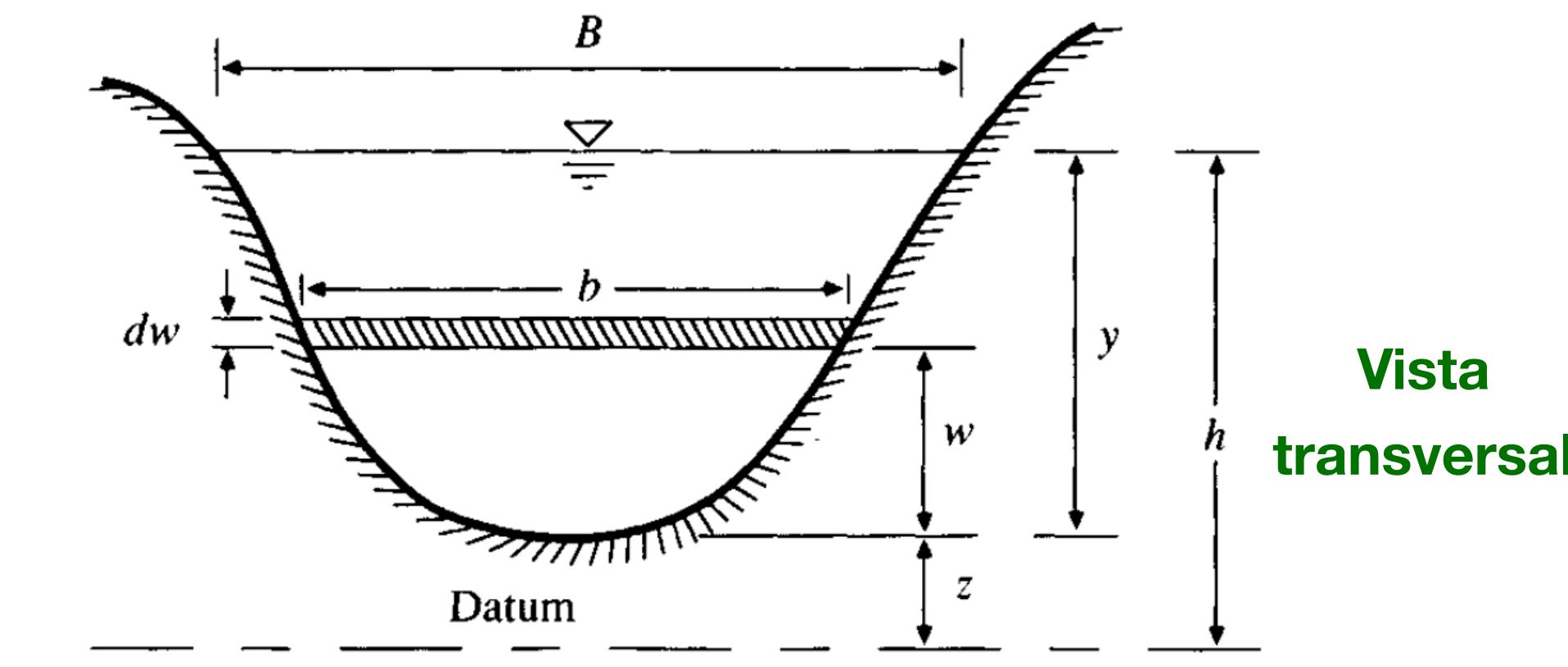
$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \left( \frac{\partial y}{\partial x} - S_o + S_f \right) = 0 \blacksquare \text{ (eq. Momentum não conservativa)}$$



Vista lateral



Vista em planta



Vista transversal

# Equações de Saint-Venant

## Summary of the Saint-Venant equations\*

### *Continuity equation*

## Conservation form

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

### Nonconservation form

$$V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

### *Momentum equation*

### Conservation form

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$$

Local  
acceleration  
term

## Convective acceleration term

Pressure  
force  
term

Gravity  
force  
term

friction  
orce  
rm

### Nonconservation form (unit width element)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$$



\* Neglecting lateral inflow, wind shear, and eddy losses, and assuming  $\beta = 1$ .

## Modelos distribuídos simplificados:

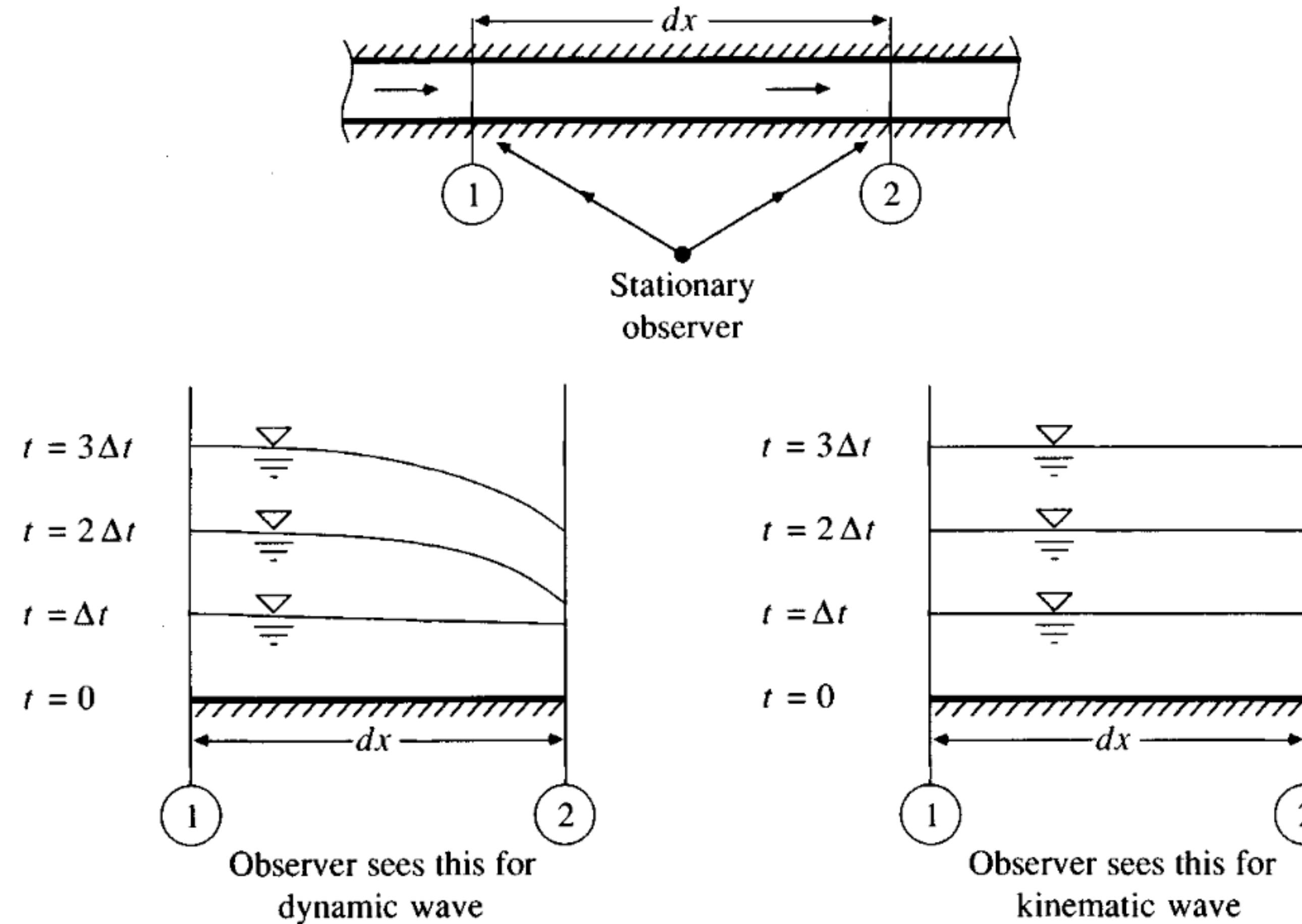
1. **Modelo de onda cinemática**: que negligencia a aceleração local, a aceleração convectiva e os termos de pressão na equação do momento; isto é, assume  $S_0 = S_f$  e as forças de atrito e gravidade se equilibram.
  2. **O modelo de onda de difusão** negligencia os termos de aceleração local e convectiva, mas incorpora o termo de pressão.
  3. **O modelo de onda dinâmica** considera todos os termos de aceleração e pressão na equação do momento.

# Modelos do movimento de uma onda

As **ondas cinemáticas** governam o fluxo quando as **forças iniciais e de pressão não são importantes**.

As **ondas dinâmicas** governam o fluxo quando estas **forças são importantes**, como no movimento de uma grande onda de inundação num rio largo.

Numa onda cinemática, as forças de gravidade e de atrito estão equilibradas, de modo que o fluxo não acelera apreciavelmente.



Ondas **dinâmicas** e **cinemáticas** em um canal curto visto por um observador estacionário.

# Modelo da onda cinemática

## Celeridade da Onda Cinemática

O modelo de onda cinemática é definido como:

- Equação da Continuidade:  $\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \quad (1)$
- Equação do Momentum:  $S_0 = S_f \quad (2)$

A equação do Momentum pode ser escrita no formato:  $A = \alpha Q^\beta \quad (3)$

Se a vazão for calculada por Manning  $S_0 = S_f$  e  $R = A/P$ , temos:  $Q = \frac{1.49 S_o^{1/2}}{n P^{2/3}} A^{5/3}$

que pode ser resolvido para A como:  $A = \left( \frac{n P^{2/3}}{1.49 \sqrt{S_o}} \right)^{3/5} Q^{3/5}$

Portanto:  $\alpha = \left[ n P^{2/3} / (1.49 \sqrt{S_o}) \right]^{0.6}$  e  $\beta = 0,6$ .

A Equação (1) tem duas variáveis dependentes, A e Q, mas A pode ser eliminada derivando (3) em relação ao tempo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha \beta Q^{\beta-1} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)$$

e substituindo  $dA/dt$  em (1) para dar:  $\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \beta Q^{\beta-1} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q \quad (4) \blacksquare$

## Modelo da onda cinemática

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha\beta Q^{\beta-1} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q \quad (4)$$

Ondas cinemáticas resultam de mudanças em Q.

Um incremento na vazão, dQ, pode ser escrito como:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \quad (5)$$

Dividindo por  $dx$  e rearranjando:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{dt}{dx} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dx} \quad (6)$$

As Equações (6) e (4) são idênticas se:  $\frac{dQ}{dx} = q$  e  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha\beta Q^{\beta-1}}$  (7)

Derivando a Eq. (3)  $\rightarrow A = \alpha Q^\beta$  em relação a A:  $\frac{dA}{dA} = \frac{d(\alpha Q^\beta)}{dA} = \frac{d(\alpha Q^\beta)}{dQ} \frac{dA}{dQ}$

$$1 = \frac{d(\alpha Q^\beta)}{dQ} \frac{dA}{dQ} \rightarrow 1 = \alpha\beta Q^{(\beta-1)} \frac{dA}{dQ} \rightarrow \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{\alpha\beta Q^{\beta-1}} \quad (8)$$

Comparando (7) e (8) percebe-se que:  $\frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dA}$

Ou seja:  $c_k = \frac{dQ}{dA} = \frac{dx}{dt}$

Sendo  $c_k$  a celeridade da onda cinemática. ■

# Solução Numérica do modelo da onda cinemática

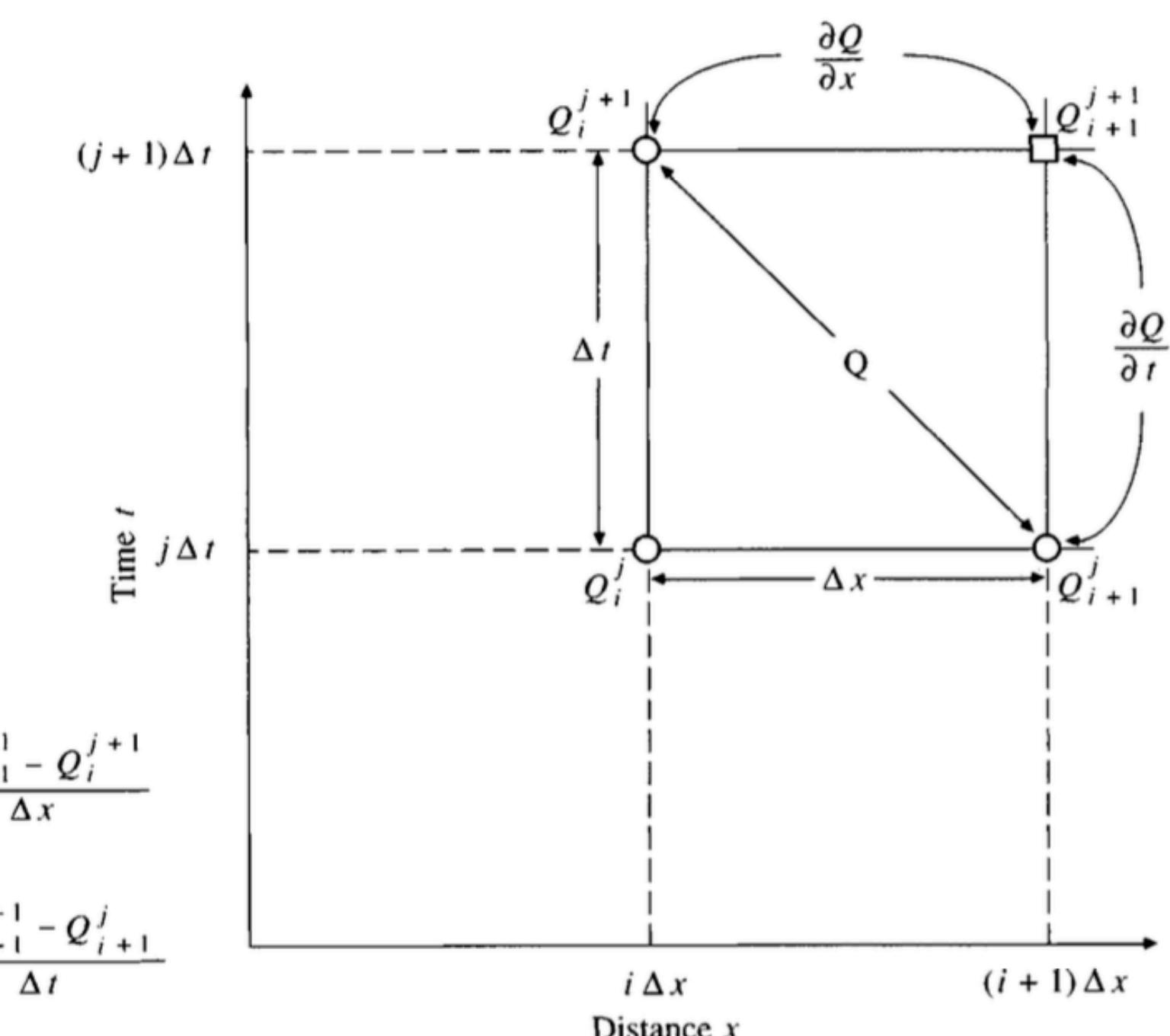
$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha\beta Q^{\beta-1} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{\Delta t}$$

$Q_{i+1}^{j+1} + Q_i^j$

○ Known value of  $Q$



# Solução Numérica do Modelo da onda cinemática

Método das Diferenças Finitas (MDF)

Vamos resolver a equação:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha\beta Q^{\beta-1} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q$$

Com o esquema implícito de diferenças finitas:

$$\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + \alpha\beta \left( \frac{Q_{i+1}^j + Q_i^j}{2} \right)^{\beta-1} \left( \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{\Delta t} \right) = \frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2}$$

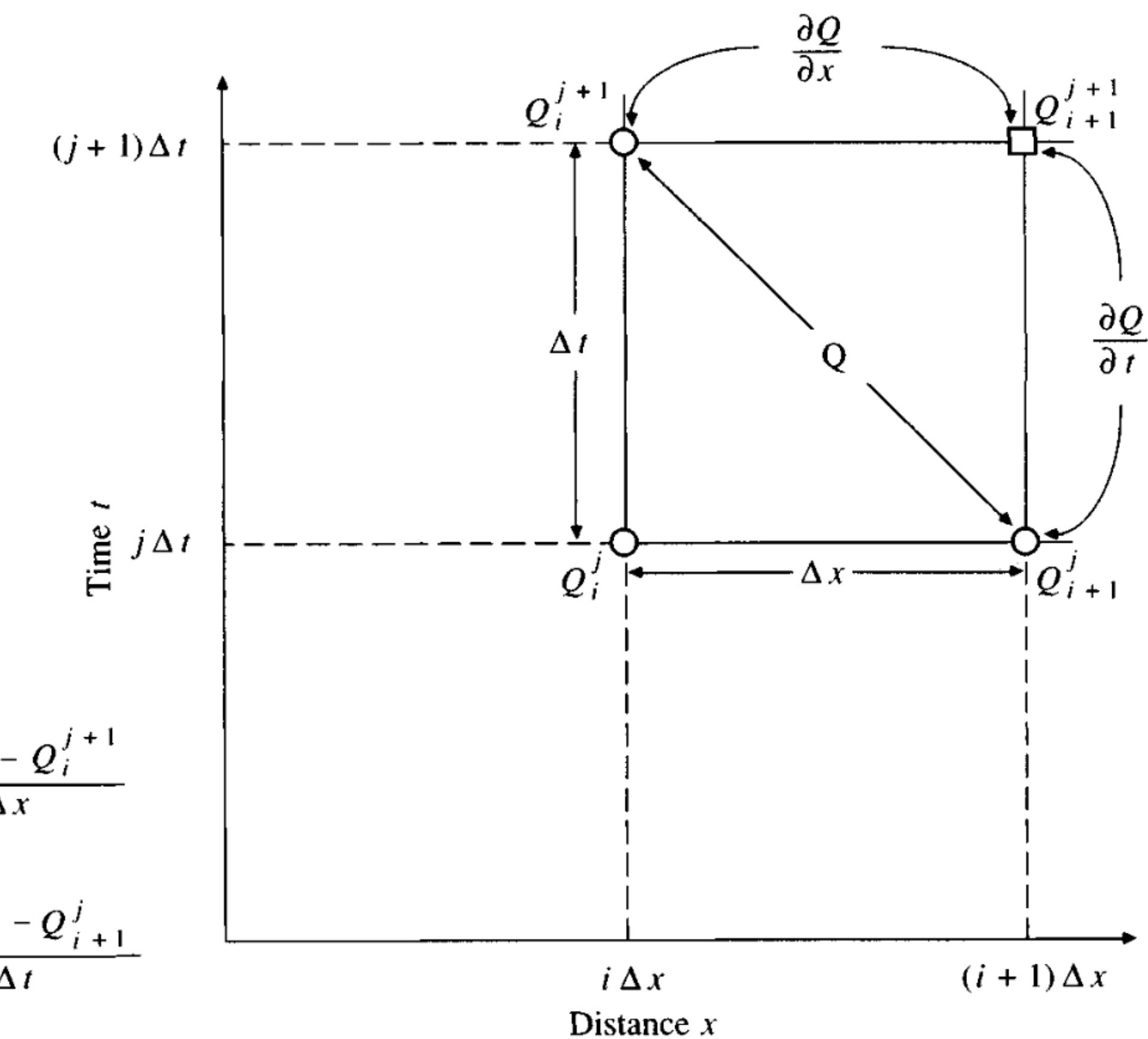
Isolando  $Q_{i+1}^{j+1}$ :

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{\left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^{j+1} + \alpha\beta Q_{i+1}^j \left( \frac{Q_{i+1}^j + Q_i^j}{2} \right)^{\beta-1} + \Delta t \left( \frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} \right) \right]}{\left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha\beta \left( \frac{Q_{i+1}^j + Q_i^j}{2} \right)^{\beta-1} \right]} \blacksquare$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x}$$

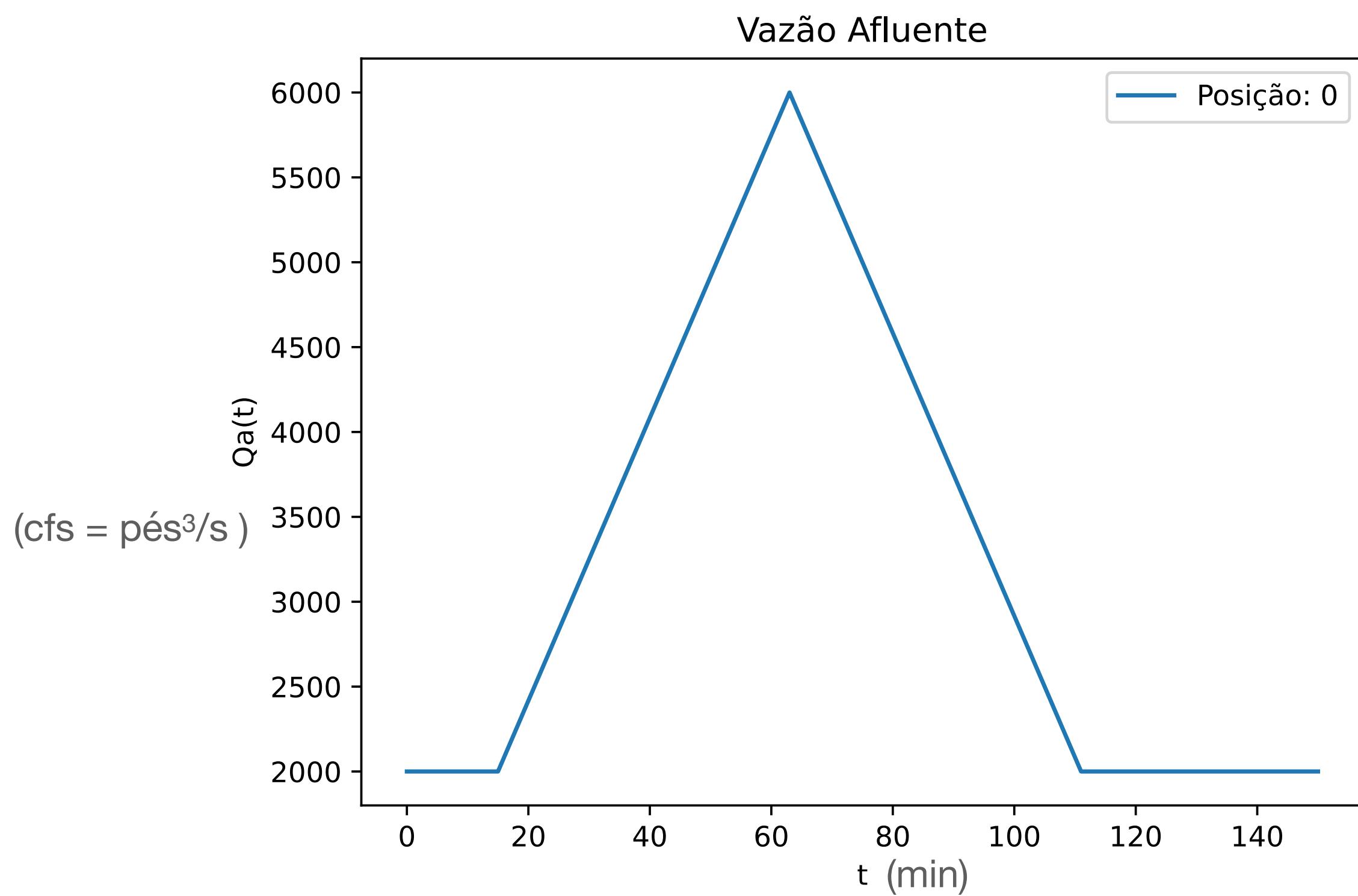
$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{\Delta t}$$

$$Q \approx \frac{Q_i^{j+1} + Q_{i+1}^j}{2}$$



- Known value of  $Q$
- Unknown value of  $Q$

**Exemplo 1.** Considere um canal retangular (largura = 200 pés, comprimento = 15.000 pés, inclinação = 1% e n de Manning = 0,035), o hidrograma de vazão afluente ao rio é apresentada no gráfico. Resolva numericamente o modelo de onda cinemática linear usando o MDF e propague o hidrograma de afluência dado através do canal usando  $\Delta x = 3000$  pés e  $\Delta t = 3$  min. Não há entrada lateral. A condição inicial é vazão uniforme de 2.000 cfs ao longo do canal.



Solução no Google Colab.

[https://drive.google.com/file/d/1Ga3lwvfSD\\_Mli6NbmmKsplzMdG2LYjsz/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1Ga3lwvfSD_Mli6NbmmKsplzMdG2LYjsz/view?usp=sharing)



# Método de Muskingum-Cunge

# Método de Muskingum-Cunge

Diversas variações do método de propagação de ondas cinemáticas foram propostas.

Cunge (1969) propôs um método baseado no método Muskingum.

Na última aula vimos o Método de Muskingum:

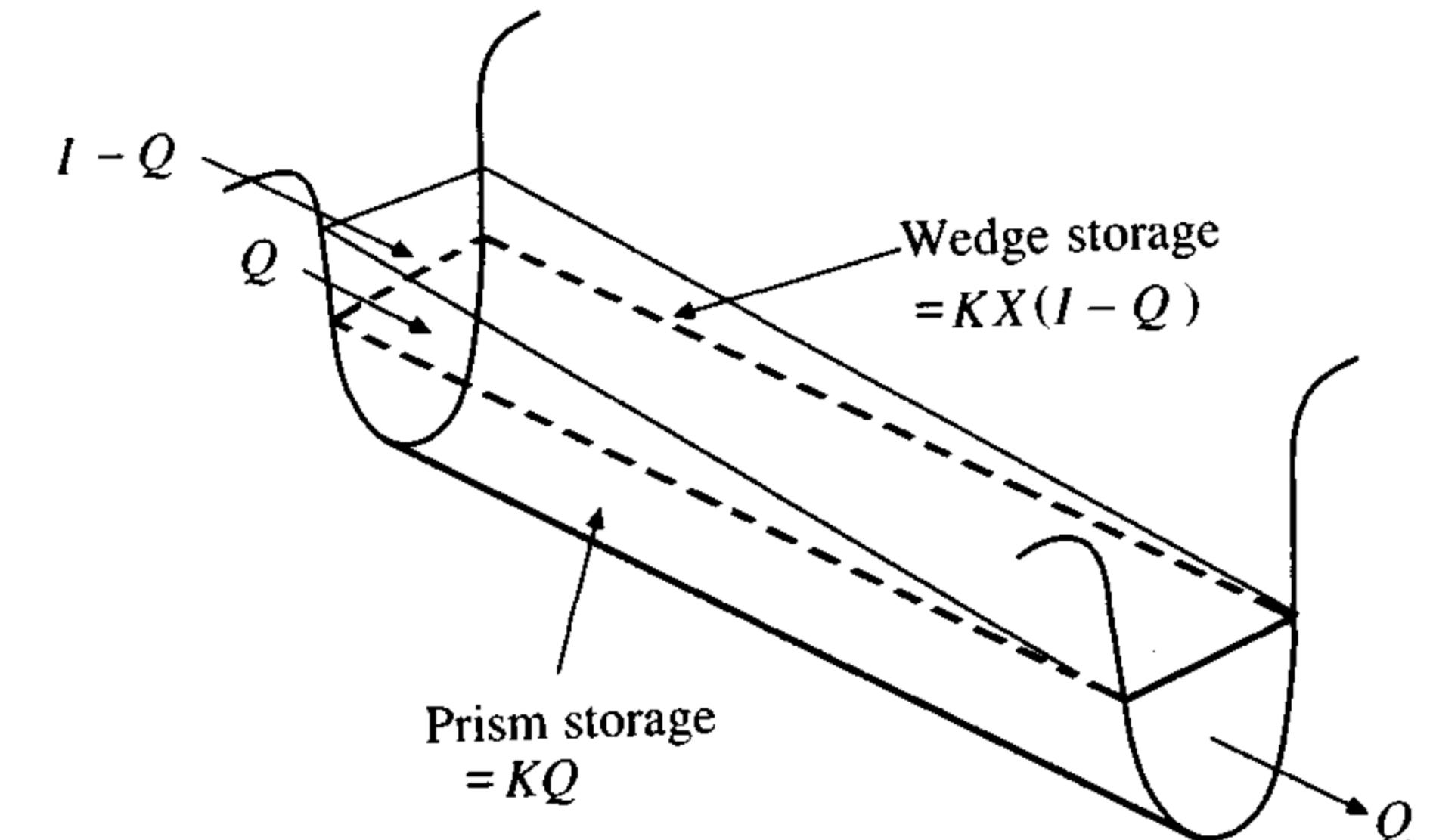
$$Q_{j+1} = C_1 I_{j+1} + C_2 I_j + C_3 Q_j$$

Sendo:

$$C_1 = \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t}$$

$$C_2 = \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t}$$

$$C_3 = \frac{2K(1 - X) - \Delta t}{2K(1 - X) + \Delta t}$$



Cunge (1969) faz estimativas dos parâmetros  $K$  e  $X$  com base em características físicas do rio.

# Método de Muskingum-Cunge

Cunge (1969) faz estimativas dos parâmetros  $K$  e  $X$  com base em características físicas do rio.

$$K = \frac{\Delta x}{c_k} = \frac{\Delta x}{dQ/dA} \quad \text{e} \quad X = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{Q}{B c_k S_o \Delta x} \right)$$

Sendo  $c_k$  a celeridade da onda cuja vazão é  $Q$  e largura da seção do rio é  $B$ .

Fread (1993) mostrou que a estabilidade depende de:

$$\Delta x \leq \frac{c \cdot \Delta t}{2} \left[ 1 + \left( 1 + 1,5 \cdot \frac{Q}{B \cdot S_0 \cdot \Delta t \cdot c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

O método Muskingum-Cunge é aplicado resolvendo a equação algébrica:

$Q_{j+1} = C_1 I_{j+1} + C_2 I_j + C_3 Q_j$  → no contexto do modelos numéricos, fazendo os índices  $j$  = tempo e  $i$  = espaço

Temos que:

$$Q_{i+1}^{j+1} = C_1 Q_i^{j+1} + C_2 Q_i^j + C_3 Q_{i+1}^j$$

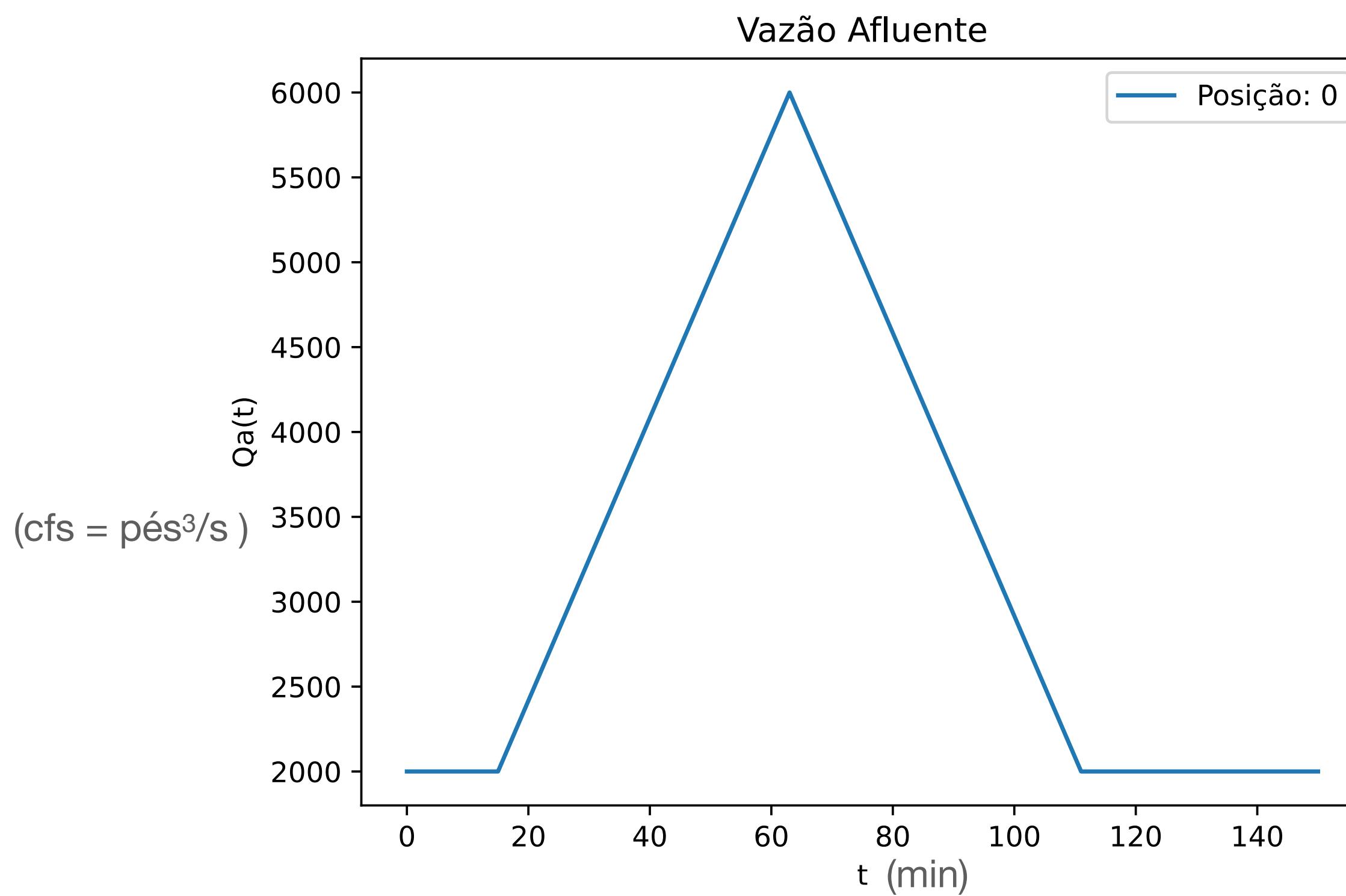
Os coeficientes  $K$  e  $X$  são calculados com as equações acima juntamente com as Eqs.:

$$C_1 = \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t}, C_2 = \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1 - X) + \Delta t} \text{ e } C_3 = \frac{2K(1 - X) - \Delta t}{2K(1 - X) + \Delta t}$$

para cada ponto de cálculo no tempo e no espaço, uma vez que  $K$  e  $X$  podem mudar em relação ao tempo e ao espaço.

**Exemplo 2.** Considere um canal retangular (largura = 200 pés, comprimento = 15.000 pés, inclinação = 1% e  $n$  de Manning = 0,035), o hidrograma de vazão afluente ao rio é apresentada no gráfico.

Resolva numericamente o modelo de onda cinemática linear usando o **Método de Muskingum-Cunge** e propague o hidrograma de afluência dado através do canal usando  $\Delta x = 3000$  pés e  $\Delta t = 3$  min. Não há entrada lateral. A condição inicial é vazão uniforme de 2.000 cfs ao longo do canal.



Solução no Google Colab.

<https://drive.google.com/file/d/>

[1pLuVm40wvXhGOa270s7TMPEOTMIL-IYs/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1pLuVm40wvXhGOa270s7TMPEOTMIL-IYs/view?usp=sharing). ■