TEA018 - Hidrologia Ambiental

Hidrograma Unitário (Programação Linear)

Solução por Programação Linear

Exemplos

Emílio Graciliano Ferreira Mercuri

Departamento de Engenharia Ambiental

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Outline

Agenda de atividades

- Hidrograma Unitário
  - Soluções por substituição e matricial
- Programação Linear (PL)
  - Exemplo
- Hidrograma com ordenadas negativas?
- Solução do Hidrograma Unitário usando PL

Exemplo 1 - Hidrograma unitário

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

Tempo (h)	Precipitação Efetiva (mm)	Escoamento direto $\left(m^3/s\right)$
1	1	1
2	1	3
3	-	3
4	-	1

Encontre as ordenadas do hidrograma unitário para a bacia utilizando:

a) O método de substituições;

b) O método matricial.

c) Existe diferença nos resultados? Descreva qual é o melhor método e o porquê.

Exemplo 1 - Hidrograma unitário

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

Tempo (h)	Precipitação Efetiva (mm)	Escoamento direto $\left(m^3/s\right)$
1	1	1
2	1	3
3	-	3
4	-	1

a) Encontre as ordenadas da hidrógrafa unitária para a bacia usando o método de substituições.
Nesse exemplo temos $N - M + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$ ordenadas da hidrógrafa unitária.
Para obter as ordenadas vamos usar a equação:

$$Q_n = \sum_{m=1}^{n \leq M} P_m U_{n-m+1}$$

$n = 1, 2, 3, 4$
$Q_1 = P_1 U_{1-1+1} = P_1 U_1$
$Q_2 = P_1 U_{2-1+1} + P_2 U_{2-2+1} = P_1 U_2 + P_2 U_1$
$Q_3 = P_1 U_{3-1+1} + P_2 U_{3-2+1} = P_1 U_3 + P_2 U_2$
$Q_4 = P_1 U_{4-1+1} + P_2 U_{4-2+1} = P_1 (0) + P_2 U_3 = P_2 U_3$

Resolvendo por substituição:

$$U_1 = \frac{Q_1}{P_1} = \frac{1}{1} = 1\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{s.mm}) \quad \blacksquare$$

$$U_2 = \frac{Q_2 - P_2 U_1}{P_1} = \frac{3 - 1(1)}{1} = 2\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{s.mm}) \quad \blacksquare$$

$$U_3 = \frac{Q_3 - P_2 U_2}{P_1} = \frac{3 - 1(2)}{1} = 1\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{s.mm}) \quad \blacksquare$$

Exemplo 1 - Hidrograma unitário

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

Tempo (h)	Precipitação Efetiva (mm)	Escoamento direto $\left(m^3/s\right)$
1	1	1
2	1	3
3	-	3
4	-	1

b) Encontre as ordenadas da hidrógrafa unitária para a bacia usando o método matricial.
Usando a Notação Matricial o nosso problema é:

$$[P]_{N\times(N-M+1)}\,[U]_{(N-M+1)\times 1} = [Q]_{N\times 1}$$

Como N = 4 e M = 2, temos N-M+1 = 3.

$$[P]_{4\times 3}\,[U]_{3\times 1} = [Q]_{4\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & 0 \\ 0 & P_2 & P_1 \\ 0 & 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

Para a solução por Regressão Linear vamos definir a Matriz quadrada $[Z]$:

$$[Z] = [P]^T\,[P]$$

A matriz quadrada será importante a diante pois permitirá o cálculo de uma matriz inversa.
Multiplicando a Equação anterior à esquerda pela matriz $[P]^T$:

$$[P]^T\,[P]\,[U] = [P]^T\,[Q]$$

$$[Z]\,[U] = [P]^T\,[Q]$$

Exemplo 1 - Hidrograma unitário

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

Tempo (h)	Precipitação Efetiva (mm)	Escoamento direto (m^3/s)
1	1	1
2	1	3
3	-	3
4	-	1

Multiplicando à esquerda pela matriz $[Z]^{-1}$ (supondo a existência da matriz inversa):

$$[Z]^{-1}[Z][U] = [Z]^{-1}[P]^T[Q]$$

$$[U] = [Z]^{-1}[P]^T[Q]$$

A Equação acima representa a solução para o Hidrógrama Unitário $[U]$.
Calculando as matrizes:

$$[Z] = [P]^T[P] = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & 0 \\ 0 & P_2 & P_1 \\ 0 & 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O determinante de $[Z]$ não é zero, portanto a matriz inversa existe. Para o cálculo da inversa escreva a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 1 - Hidrograma unitário

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Encontre o pivô na 1ª coluna e troque a 2ª linha com a 1ª

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Elimine a 1ª coluna, ou seja, faça $L_2 \leftarrow (-2)L_1 + L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Encontre o pivô na 2ª coluna e troque a 3ª linha com a 2ª

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Elimine a 2ª coluna, ou seja, faça $L_3 \leftarrow (3)L_2 + L_3$ e $L_1 \leftarrow (-2)L_2 + L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Faça o pivô na 3ª coluna dividindo a 3ª linha por 4

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right]$$

Elimine a 3ª coluna, ou seja, faça $L_2 \leftarrow (-2)L_3 + L_2$ e $L_1 \leftarrow (3)L_3 + L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right]$$

Portanto,

$$[Z]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 - Hidrograma unitário

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

$$[Z]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Agora podemos encontrar $[U]$ fazendo:

$$[U] = [Z]^{-1} [P]^T [Q]$$

Vamos começar com

$$[Z]^{-1} [P]^T = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para facilitar vamos tornar todos os $-1/2$ em $-2/4$:

$$[Z]^{-1} [P]^T = \begin{bmatrix} 3/4 & -2/4 & 1/4 \\ -2/4 & 4/4 & -2/4 \\ 1/4 & -2/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -2/4 & 2/4 & 2/4 & -2/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos encontrar $[U]$ fazendo:

$$[U] = [Z]^{-1} [P]^T [Q] = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -2/4 & 2/4 & 2/4 & -2/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathrm{m^3/(s.mm)} \quad \blacksquare$$

Solução no Colab: https://colab.research.google.com/drive/14aeSaIEAWHICQ5BUgOUyjxSo-oGnfFVU?usp=sharing

Os resultados são iguais, mas isso foi uma mera coincidência. O melhor método é o matricial pois ele envolve uma otimização de parâmetros de um sistema sobredeterminado. As ordenadas do hidrograma unitário no método matricial são obtidos por uma regressão linear e pelo método dos mínimos quadrados.

Mas os dois métodos (substituição e matricial) não funcionam 100% do tempo!

Eles podem fornecer ordenadas negativas, veremos em um outro exemplo.

Mas antes vamos ver o que é um problema de Programação Linear

Problema de Programação Linear

Para encontrar as ordenadas do Hidrograma Unitário

Programação Linear

- É um conjunto de técnicas da programação matemática / otimização
- São técnicas para **resolver sistemas de equações lineares e desigualdades** enquanto **maximiza** ou **minimiza** alguma **função linear.**
- É importante em áreas como computação científica, economia, ciências, manufatura, transporte, militar, gestão, energia…

Nesta aula vamos aprender:

1. O que é **Programação Linear** e porquê é importante
2. Quais **técnicas** de Python podem ser usadas para programação linear
3. Como construir um modelo de Programação Linear em Python
4. Como resolver um problema de Programação Linear em Python ■

O que é Programação Linear?

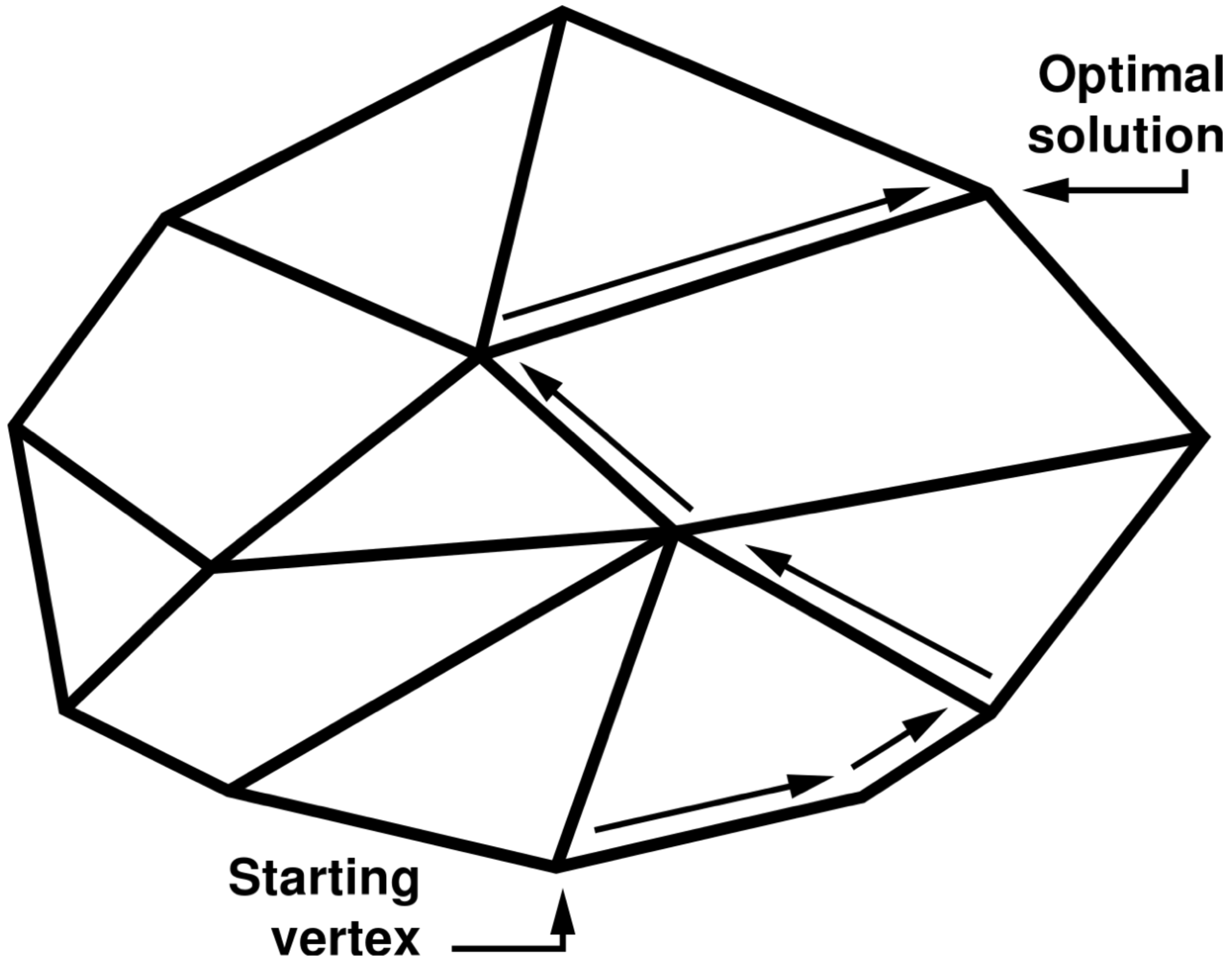
- Imagine que você tem um sistema de equações e desigualdades lineares.
- Tais sistemas muitas vezes têm muitas soluções possíveis.
- A programação linear é um conjunto de ferramentas matemáticas e computacionais que permite encontrar uma solução particular para este sistema que corresponda ao máximo ou mínimo de alguma outra função linear.

Classes de Problemas de Programação Matemática

- **Programação linear inteira mista** (variáveis discretas e inteiras)
- **Programação binária** (variáveis binárias)
- Variáveis inteiras são importantes para representar adequadamente quantidades expressas naturalmente com números inteiros, como o número de aviões produzidos ou o número de clientes atendidos.
- Um tipo particularmente importante de variável inteira é a **variável binária**. Pode assumir apenas os valores zero ou um e é útil na tomada de decisões do tipo sim ou não, como se uma planta deve ser construída ou se uma máquina deve ser ligada ou desligada. Você também pode usá-los para imitar restrições lógicas. ■

Programação Linear

- O método básico para resolver problemas de programação linear é chamado de método **simplex**, que possui diversas variantes. Outra abordagem popular é o **método do ponto interior**.



Um sistema de desigualdades lineares define um polígono como uma região viável. O algoritmo **simplex** começa em um vértice inicial e se move ao longo das arestas do polígono até atingir o vértice da solução ótima. ■

Exemplo simples de Programação Linear

Considere o seguinte problema de programação linear:

variáveis de decisão

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \left. z = x + 2y \right\} \text{ função objetivo} \\
\text{subject to:} & \left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 20 \\ -4x + 5y \leq 10 \\ -x + 2y \geq -2 \end{array}\right\} \text{ restrições de desigualdade.} \\
 & \left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \text{ restrições das variáveis de decisão}
\end{array}
$$

Você precisa encontrar x e y de modo que as desigualdades vermelha, azul e amarela, bem como as desigualdades $x \geq 0$ e $y \geq 0$, sejam satisfeitas. Ao mesmo tempo, a sua solução deve corresponder ao maior valor possível de z.

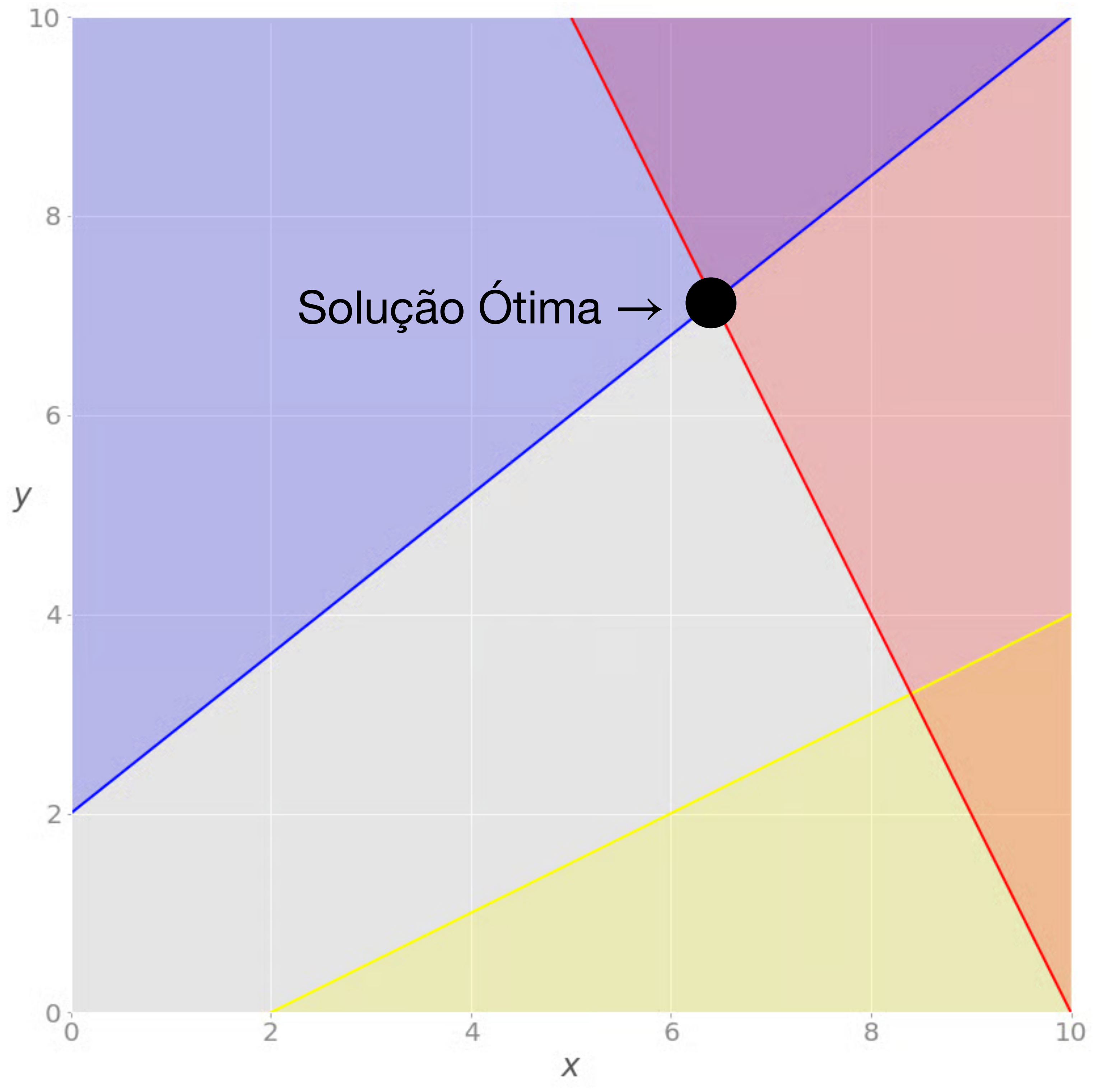
Exemplo simples de Programação Linear

Problema de programação linear:

variáveis de decisão

$$
\begin{array}{lrl}
\text{maximize} & z = x + 2y & \} \text{ função objetivo} \\
\text{subject to:} & \left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 20 \\ -4x + 5y \leq 10 \\ -x + 2y \geq -2 \end{array}\right\} & \text{restrições de desigualdade.} \\
 & \left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} & \text{restrições das variáveis de decisão}
\end{array}
$$

É assim que você pode visualizar o problema:



Se você desconsiderar as áreas vermelha, azul e amarela, apenas a área cinza permanecerá. Cada ponto da área cinzenta satisfaz todas as restrições e é uma solução potencial para o problema. Esta área é chamada de **região viável** e seus pontos são **soluções viáveis**. Neste caso, há um número infinito de soluções viáveis.

Você deseja maximizar z. A solução viável que corresponde ao z máximo é a solução ótima. Se você estivesse tentando minimizar a função objetivo, a solução ótima corresponderia ao seu mínimo viável.

Observe que z é linear. Você pode imaginá-lo como um plano no espaço tridimensional. É por isso que a solução ótima deve estar em um vértice, ou canto, da região viável. **Neste caso, a solução ideal é o ponto onde as linhas vermelha e azul se cruzam**, como verá mais tarde.

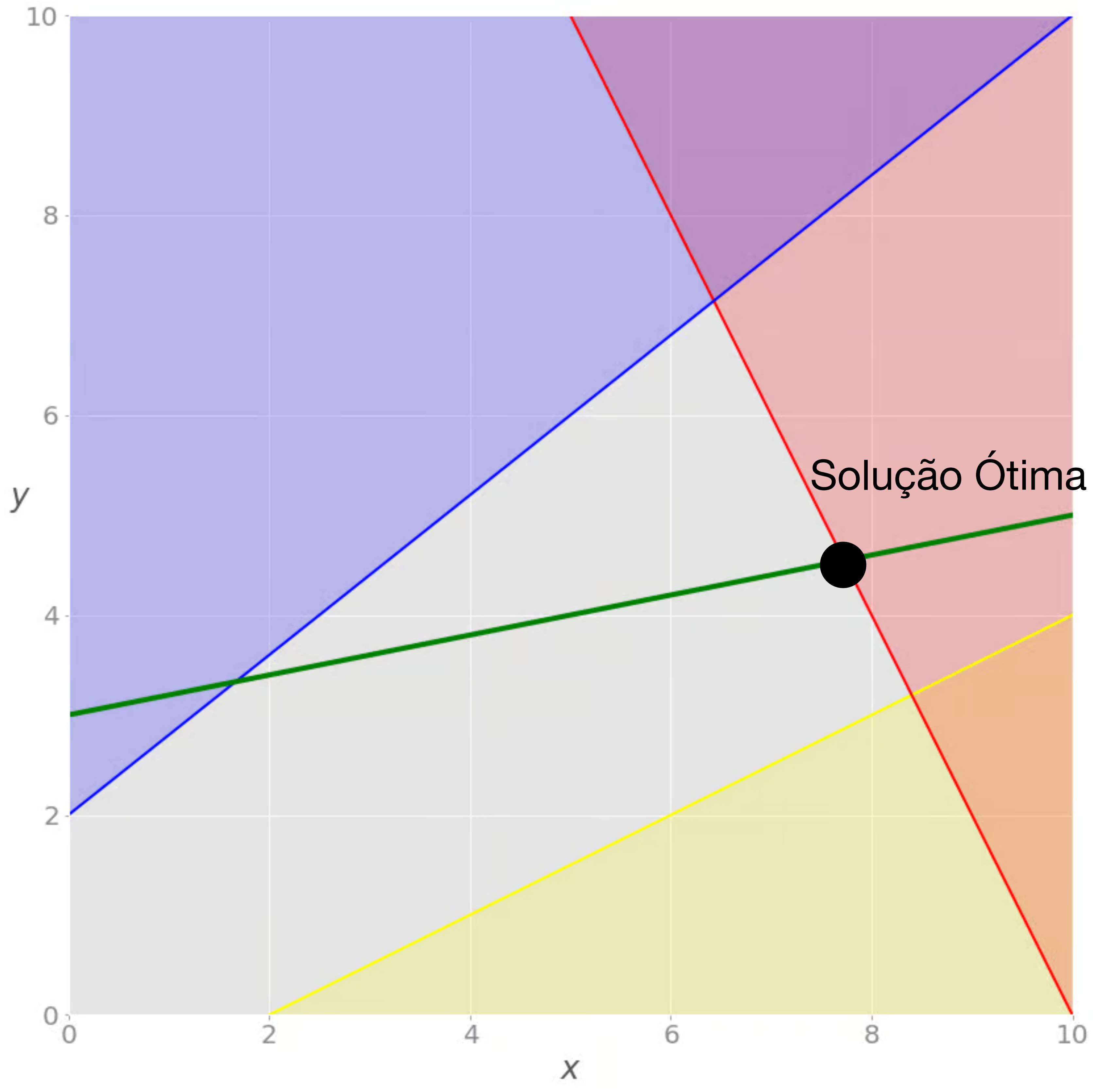
Às vezes, toda uma aresta da região viável, ou mesmo toda a região, pode corresponder ao mesmo valor de z. Nesse caso, você tem muitas soluções ideais.

Exemplo simples de Programação Linear

Agora você está pronto para expandir o problema com a restrição de igualdade adicional mostrada em verde:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{maximize} & z = & x + 2y \\
\text{subject to:} & 2x + y \leq & 20 \\
& -4x + 5y \leq & 10 \\
& -x + 2y \geq & -2 \\
& -x + 5y = & 15 \\
& x \geq & 0 \\
& y \geq & 0
\end{array}
$$

A equação $-x + 5y = 15$, escrita em verde, é nova. É uma restrição de igualdade. Você pode visualizá-lo adicionando uma linha verde correspondente à imagem anterior:

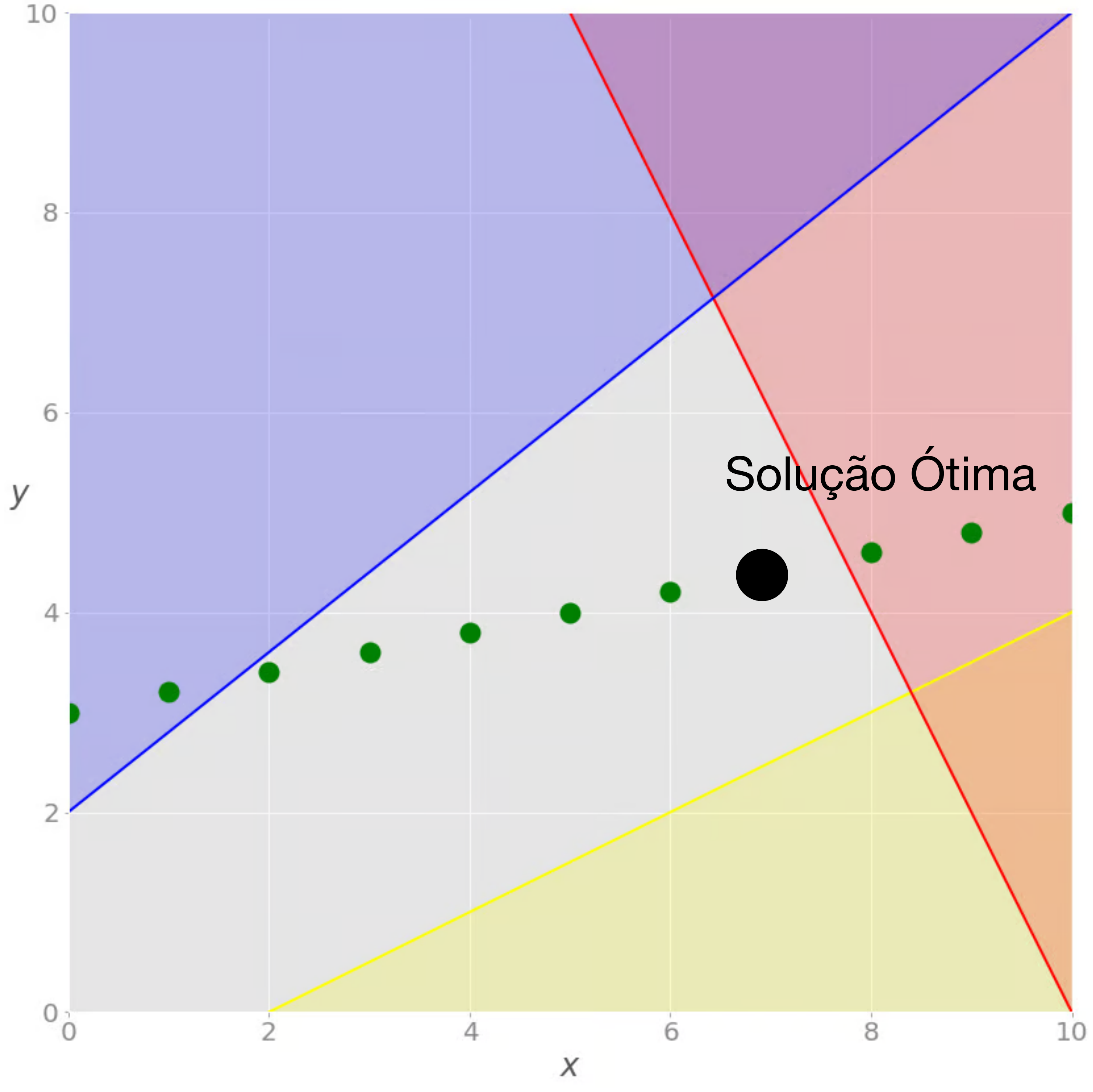


Exemplo simples de Programação Linear

Agora você está pronto para expandir o problema com a restrição de igualdade adicional mostrada em verde:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = x + 2y \\
\text{subject to:} \quad & 2x + y \leq 20 \\
& -4x + 5y \leq 10 \\
& -x + 2y \geq -2 \\
& -x + 5y = 15 \\
& x \geq 0 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

Se você inserir a exigência de que todos os valores de x devem ser inteiros, então você terá um problema de **programação linear inteira mista**, e o conjunto de soluções viáveis mudará mais uma vez:



Exemplo de Problema de Programação Linear

Google Colab:

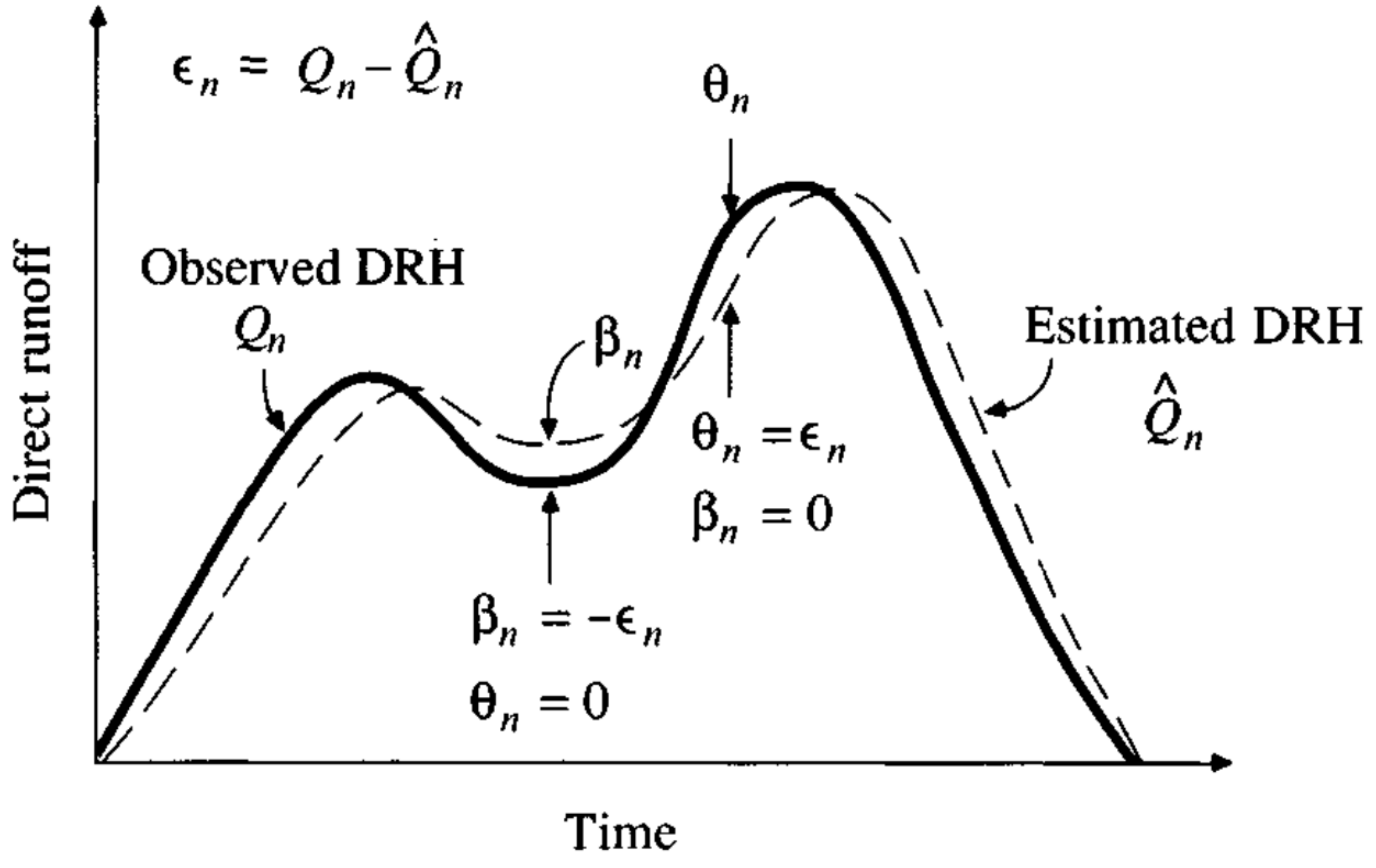
https://colab.research.google.com/drive/170J9q7d7ltq3nexTt42H5Zeoiiyn8wYE

Resolvendo o Hidrograma unitário com Programação Linear

Desenvolveremos um código de programação linear para resolver a Eq. $[P][U] = [Q]$ para o hidrograma unitário dado a Precipitação Efetiva ERH (*Effective Rainfall Hyetograph*) $P_m = 1,2,...,M$, e o Escoamento Direto DRH (*Direct Runoff Hydrograph*) $Q_n = 1,2,...,N$.

O objetivo é minimizar $\sum_{n=1}^{N} \left|\epsilon_n\right|$ onde $\epsilon_n = \widehat{Q}_n - Q_n$. ($Q_n$: escoamento direto observado; $\widehat{Q}_n$: escoamento direto calculado)

O problema de Programação Linear exige que todas as variáveis sejam não negativas; para realizar esta tarefa, ϵ_n é dividido em dois componentes, um desvio positivo θ_n e um desvio negativo β_n.



- Quando $\epsilon_n > 0$ $(Q_n > \widehat{Q}_n) \rightarrow$ $\theta_n = \epsilon_n$ e $\beta_n = 0$.

(o escoamento direto observado Q_n é maior que o valor calculado $\widehat{Q}_n$)

- Quando $\epsilon_n < 0$ $(Q_n < \widehat{Q}_n) \rightarrow$ $\beta_n = -\epsilon_n$ e $\theta_n = 0$.

Portanto, a solução deve obedecer:

$$Q_n = \widehat{Q}_n - \beta_n + \theta_n \quad n = 1,2,\ldots,N$$

e a função objetivo é:

$$\text{minimize} \sum_{n=1}^{N} (\theta_n + \beta_n)$$

As restrições podem ser escritas na forma matricial:

$$\left[\hat{Q}_n\right] + [\theta_n] - [\beta_n] = [Q_n]$$

Ou expandidas em:

$$P_n U_1 + P_{n-1} U_2 + \ldots + P_{n-M+1} U_M + \theta_n - \beta_n = Q_n \quad n = 1,\ldots,N$$

Para garantir que o HU represente uma unidade de ED, adicionamos a restrição adicional:

$$\sum_{m=1}^{N-M+1} U_m = K$$

onde K é uma constante que converte as unidades do ERH nas unidades do DRH. ■

Resolvendo o Hidrograma unitário com Programação Linear

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

Tempo (h)	Precipitação Efetiva (mm)	Escoamento direto (m^3/s)
1	1	1
2	1	3
3	-	3
4	-	1

Exemplo no Google Colab:

https://colab.research.google.com/drive/1bct88UejOEmLv6ry_lbwTHN9zHjzdxO2#scrollTo=oh33DIlTI35r

Exemplo 2 - Hidrograma unitário

Resolvendo o Hidrograma unitário pelos métodos Matricial e Programação Linear

A precipitação efetiva média na bacia e escoamento direto na exutória são fornecidos, obtenha o Hidrograma Unitário.

Tempo (h)	**Precipitação Efetiva** (cm)	**Escoamento direto** $\left(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\right)$
1	1	1
2	2	2
3	-	10
4	-	2

Solução matricial no Google Colab (ordenadas negativas?):

https://colab.research.google.com/drive/1WO7XaJNADvilOThTElrg7QJkWkcGhyrA

Solução com PL no Google Colab (ordenadas positivas):

https://colab.research.google.com/drive/1rPzjqfQWv5142i1wW8Lgz9aTRroxrPiu

Exercício para casa (lista de exercícios)

Hidrograma Unitário usando Programação Linear

O exercício consiste em resolver com programação linear este problema que foi solucionado com o método matricial.

https://colab.research.google.com/drive/1ffVOcTP180p21ENVtUOlysoTOfbOPPP0#scrollTo=x-WmMmTfZgsJ

Aplicações de Programação Linear na Engenharia Ambiental

https://supernet.isenberg.umass.edu/visuals/Woolley-Management-Science.pdf

Linear Programming and Environmental Quality

Trisha Woolley
Management Science I
Professor Nagurney
Fall 2006

References

- Greenberg, H.J. (1995) Survey, Expository & Tutorial: Mathematical Programming Models for Environmental Quality Control. *Operations Research*. 43(4). 578-622.
- Loucks, D.P., Revelle, C.S., Lynn, W.R. (1967) Linear Programming Models for Water Pollution Control. *Management Science*, 14(4), Application Series. B166-B181.
- Schlottmann, A., Abrams, L. (1977) Sulfur Emissions Taxes and Coal Resources. Review of Economics and Statistics. 59,1. 50-55.
- U.S. Environmental Protection Agency. (http://www.epa.gov/)