TEA018 - Hidrologia Ambiental

Escoamento em canais

Método de Newton-Raphson

Emílio Graciliano Ferreira Mercuri
Departamento de Engenharia Ambiental
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Outline

Agenda de atividades

- Método de Newton-Raphson
- Escoamento em Canais
    - Canal retangular
    - Canal trapezoidal
    - Canal triangular

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

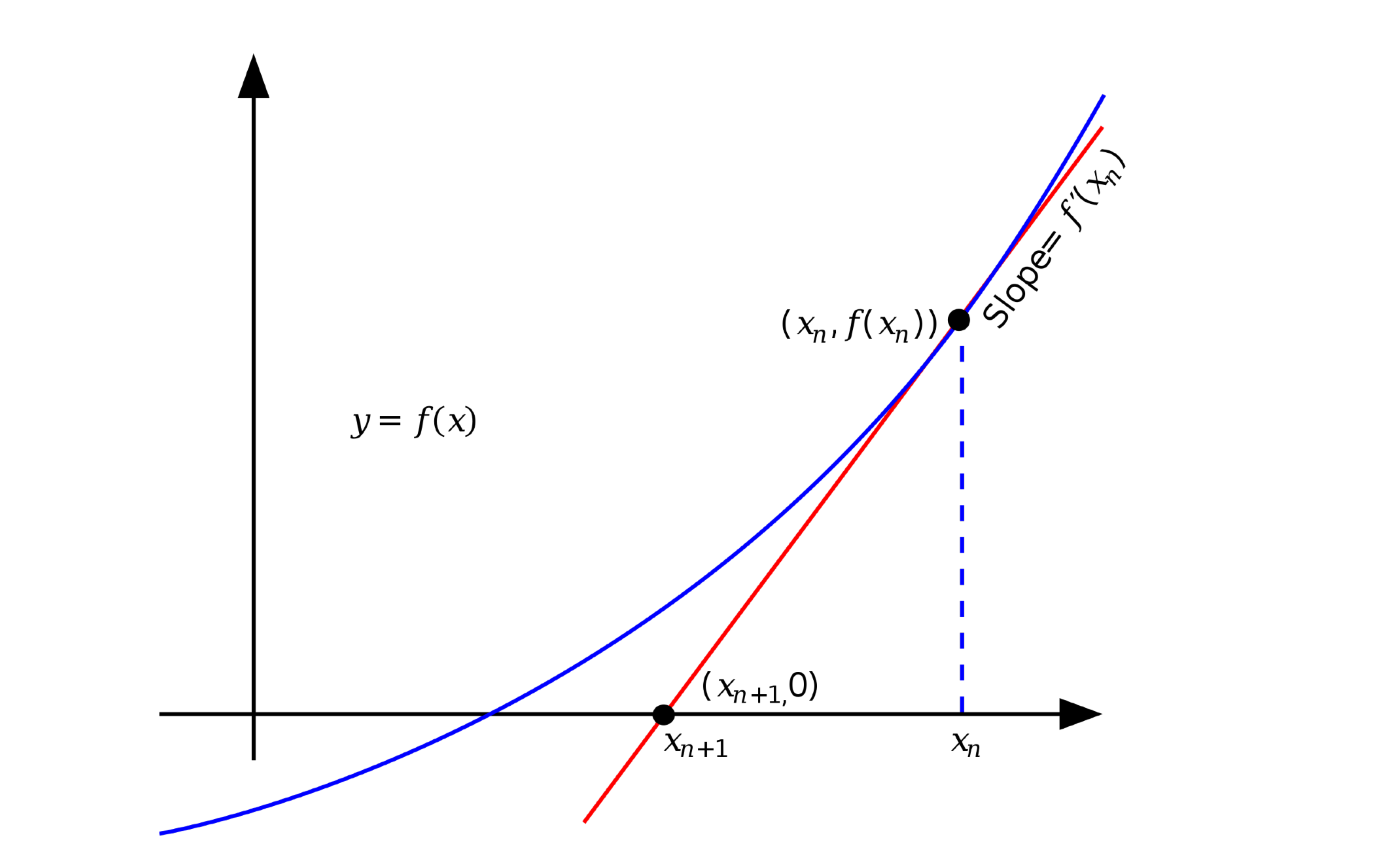
Objetivo: calcular o zero (as raízes) de funções reais de uma variável real.

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}$$

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

Resolvendo para x_{n+1}:

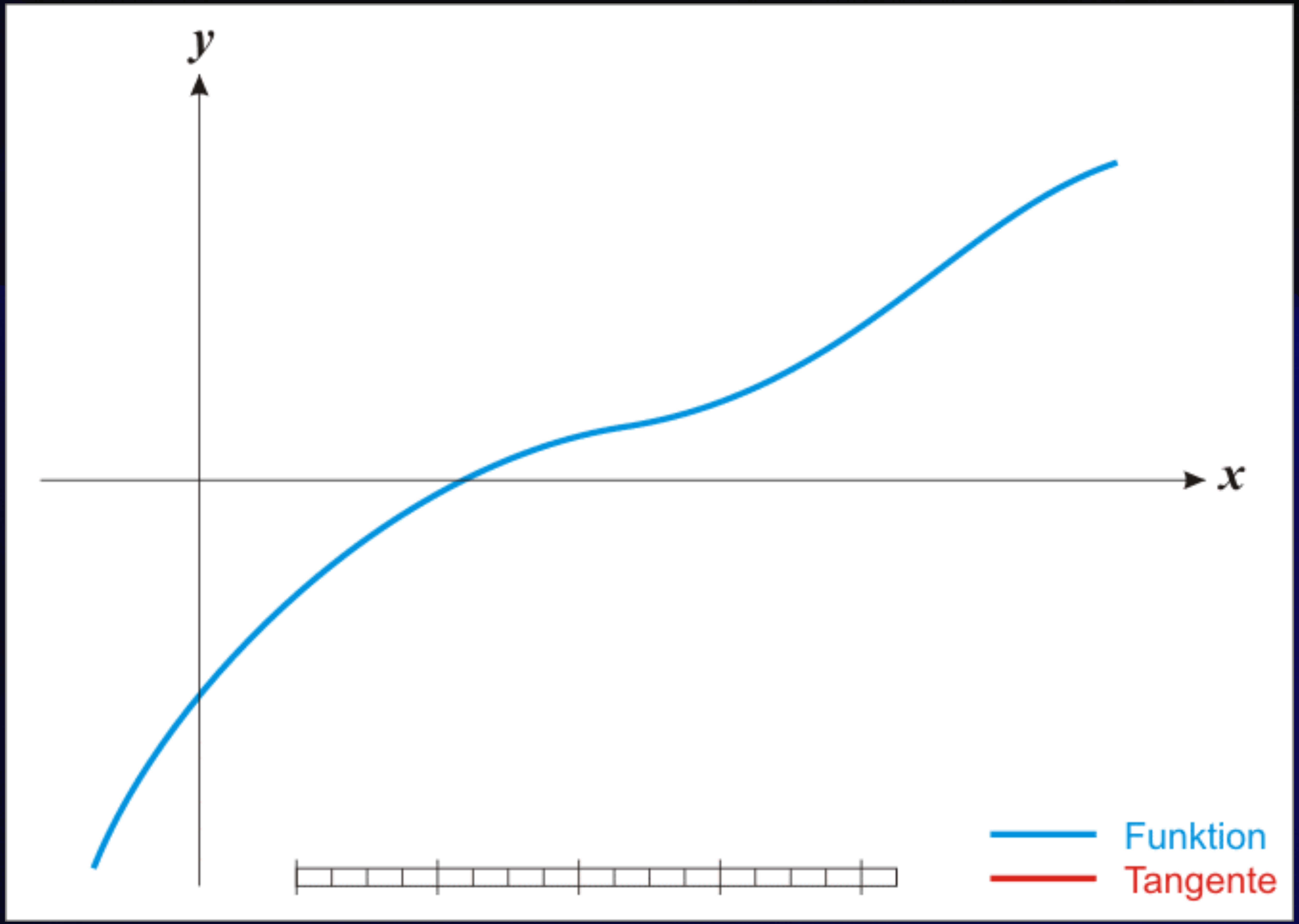
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Método de Newton-Raphson

Objetivo: calcular o zero (as raízes) de funções reais de uma variável real.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

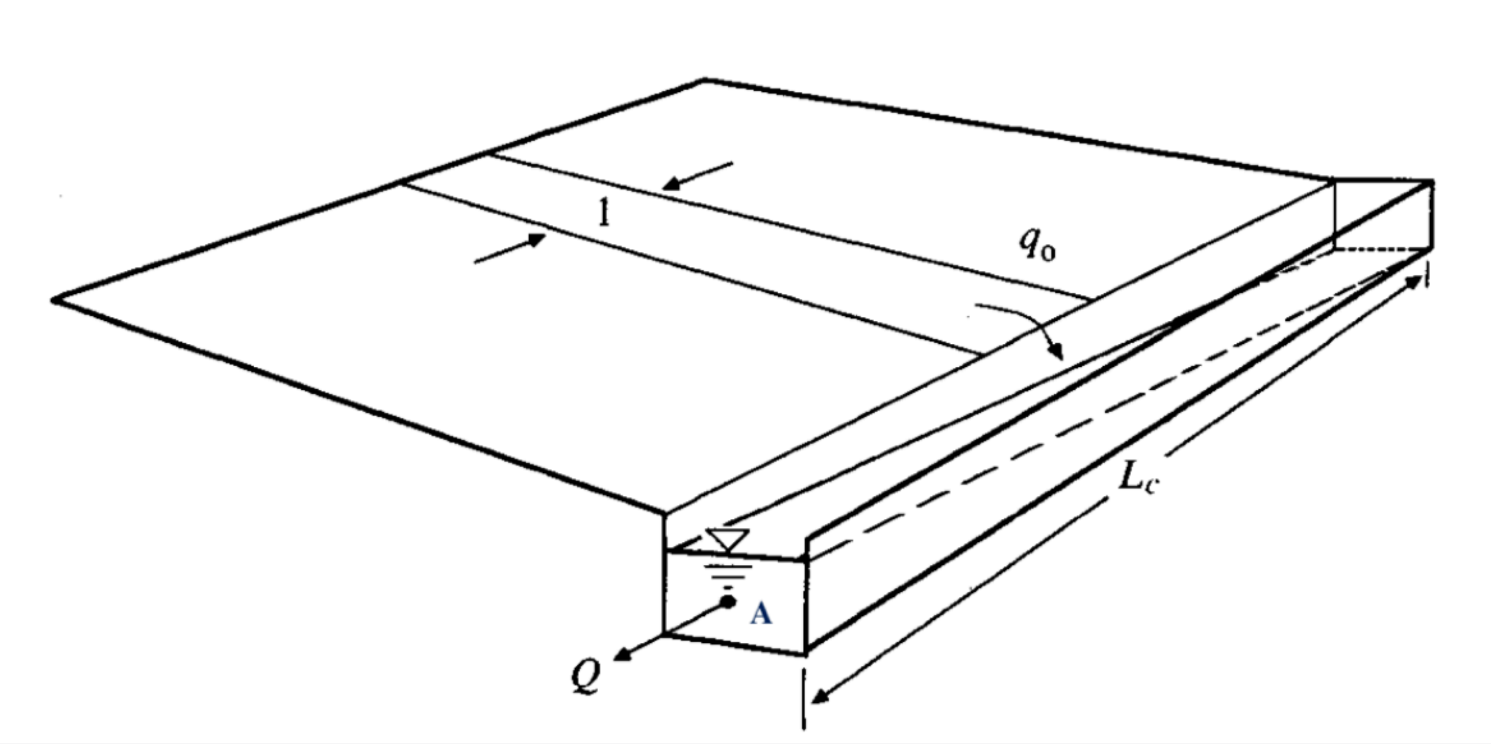


Escoamento em Canais

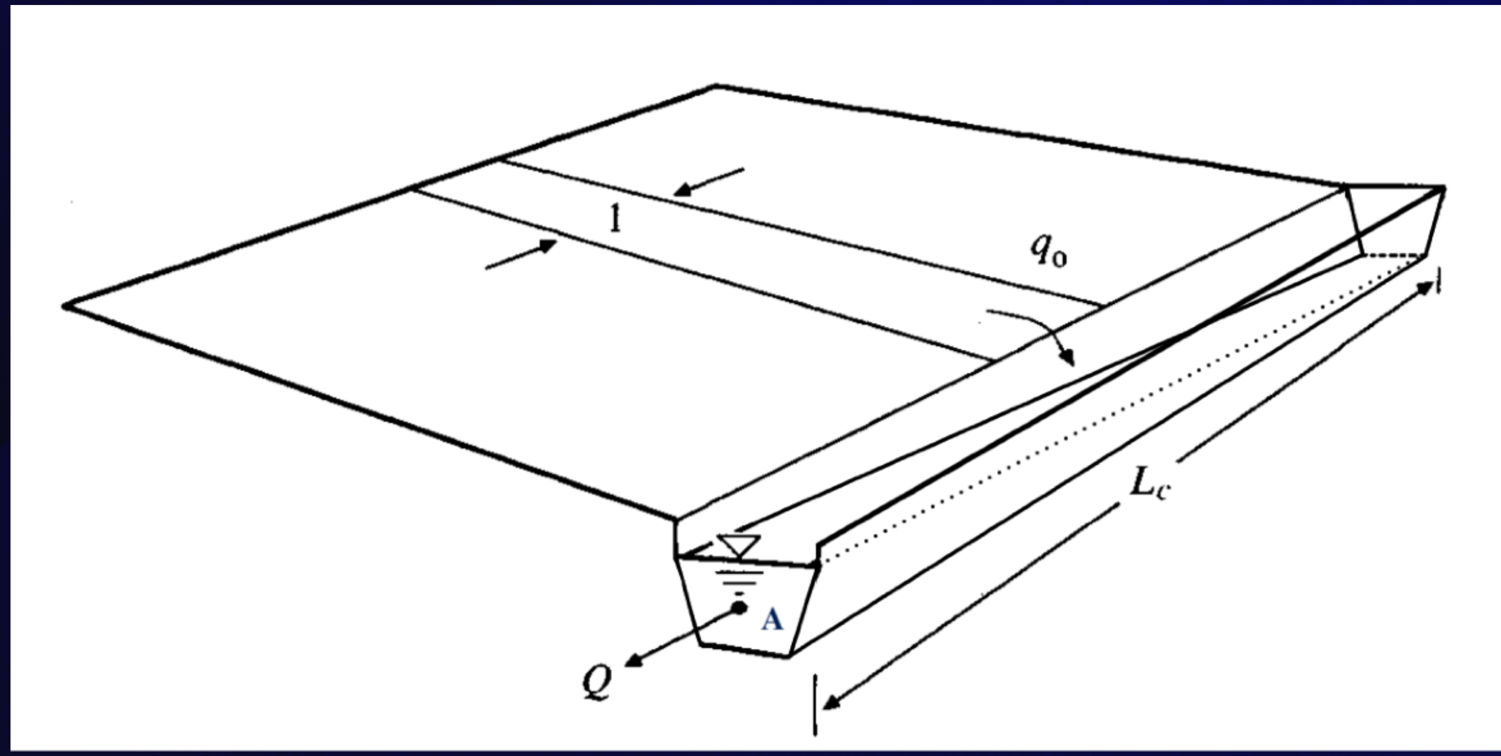
Resposta rápida da bacia (escoamento superficial direto)

Diferentes formatos de canais (retangular, trapezoidal, triangular)

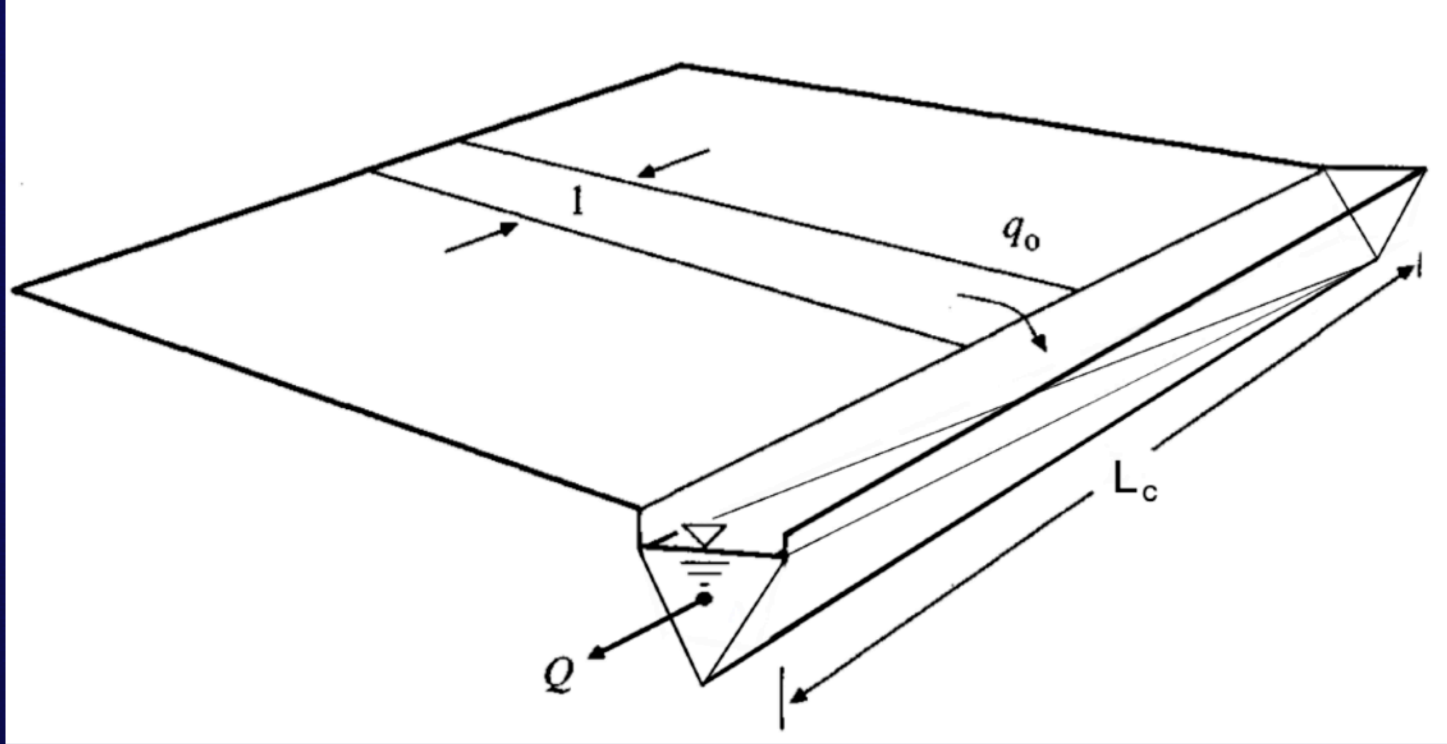
Qual é o nível do canal?



retangular



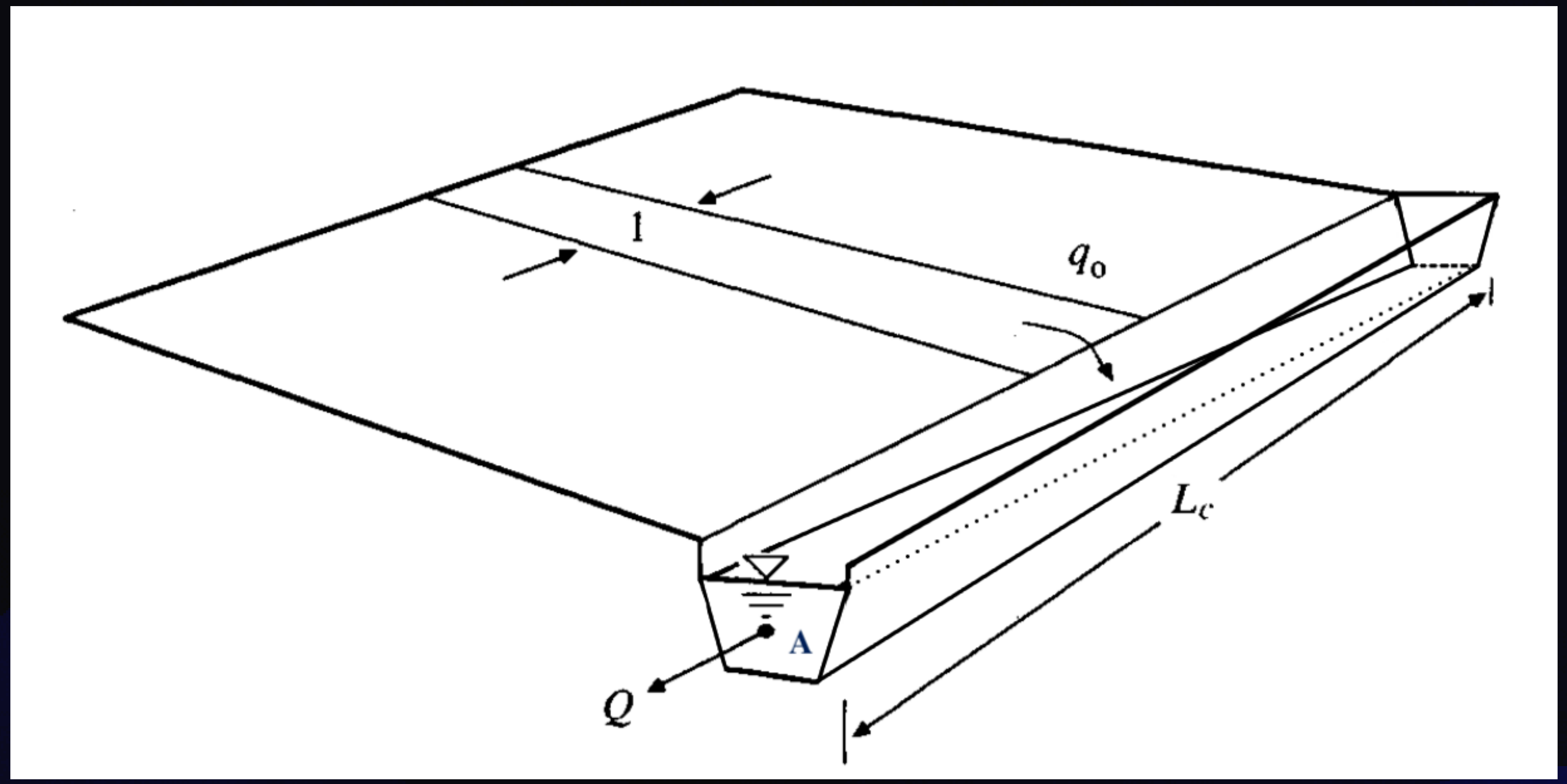
trapezoidal



triangular

Canal Genérico - Equação de Manning

Equações para o método de Newton-Raphson



- q_0 é o fluxo lateral (vazão por largura unitária) m³/(s.m)
- L_c é o comprimento do canal (m)
- y é a altura do escoamento na seção final com área A

A descarga exclusivamente devido ao escoamento superficial no canal é: $Q = q_0 L_c$

A Equação de Manning é: $Q_j = \frac{S_0}{n} A_j R_j^{2/3}$ sendo que o sub-índice *j* se refere ao nível y_j

- A_j é a área da seção transversal
- R_j é o raio hidráulico. $\rightarrow$ $R_j = \frac{A_j}{P_j}$
- P_j é o perímetro molhado

Supondo que conhecemos a vazão Q em uma seção do canal. Vamos adotar uma solução iterativa para encontrar y

A função a ser minimizada é a função erro: $f = Q_j - Q$ e o método para encontrar a altura do escoamento é $y_{j+1} = y_j - \frac{f\left(y_j\right)}{f'\left(y_j\right)}$

A derivada é:

$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}\left(Q_j - Q\right)$, como a vazão Q é conhecida (constante), temos que $\frac{dQ}{dy} = 0$, portanto:

$$\frac{df}{dy} = \frac{dQ_j}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{S_0}{n} A_j R_j^{2/3}\right) = \frac{S_0}{n}\frac{d}{dy}\left(A_j R_j^{2/3}\right) = \frac{S_0}{n}\left[\frac{dA_j}{dy} R_j^{2/3} + A_j \frac{dR_j^{2/3}}{dy}\right]$$

Canal Genérico - Equação de Manning

Equações para o método de Newton-Raphson

A função a ser minimizada é a função erro: $f = Q_j - Q$ e o método para encontrar a altura do escoamento é $y_{j+1} = y_j - \dfrac{f\left(y_j\right)}{f'\left(y_j\right)}$

$$\frac{df}{dy} = \frac{dQ_j}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{S_0}{n}A_jR_j^{2/3}\right) = \frac{S_0}{n}\frac{d}{dy}\left(A_jR_j^{2/3}\right) = \frac{S_0}{n}\left[\frac{dA_j}{dy}R_j^{2/3} + A_j\frac{dR_j^{2/3}}{dy}\right]$$

Usando a regra da cadeia:

$$\frac{dR^{2/3}}{dy} = \frac{dR^{2/3}}{dR}\frac{dR}{dy} = \frac{2}{3}R^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}\frac{dR}{dy} = \frac{2}{3}R^{-1/3}\frac{dR}{dy}$$

Substituindo:

$$\frac{df}{dy} = \frac{S_0}{n}\left[\frac{dA}{dy}R^{2/3} + A\frac{2}{3}R^{-1/3}\frac{dR}{dy}\right]_j$$

Colocando alguns termos em evidência:

$$\frac{df}{dy} = \frac{S_0}{n}R_j^{2/3}A_j\left[\frac{1}{A}\frac{dA}{dy} + \frac{2}{3R}\frac{dR}{dy}\right]_j$$

Ou seja:

$$\frac{df}{dy} = Q_j\left[\frac{2}{3R}\frac{dR}{dy} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dy}\right]_j$$

Portanto, a equação do método fica:

$$y_{j+1} = y_j - \frac{Q_j - Q}{Q_j\left[\frac{2}{3R}\frac{dR}{dy} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dy}\right]_j} = y_j - \frac{Q_j(1 - Q/Q_j)}{Q_j\left[\frac{2}{3R}\frac{dR}{dy} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dy}\right]_j}$$

Simplificando:

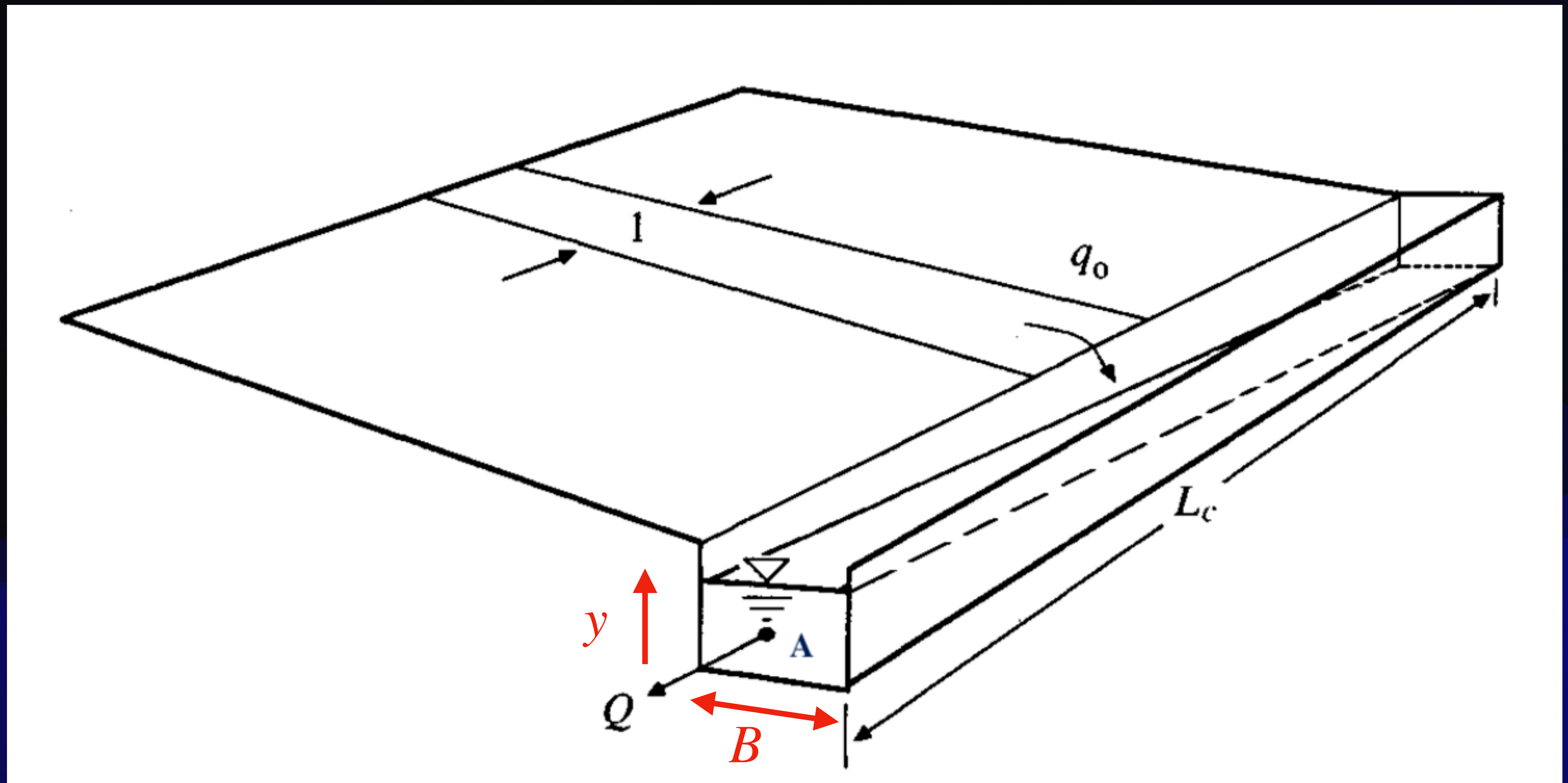
$$y_{j+1} = y_j - \frac{(1 - Q/Q_j)}{\left[\frac{2}{3R}\frac{dR}{dy} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dy}\right]_j}$$

Canal Retangular

Equação do método:

$$y_{j+1} = y_j - \frac{(1 - Q/Q_j)}{\left[\frac{2}{3R}\frac{dR}{dy} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dy}\right]_j}$$

Calcule a profundidade do escoamento em Lc = 1000 m para canal retangular, largura de 2 m, rugosidade $n = 0{,}015$ declividade $S_0 = 0{,}025$ e Fluxo Lateral $q_0 = 0{,}00926$ m³/(s.m)



Área e Raio Hidráulico:

$$A = By \quad \text{e} \quad R = \frac{By}{B+2y}$$

Derivadas da Área e Raio Hidráulico:

$$\frac{dA}{dy} = B$$

$$\frac{dR}{dy} = \frac{d}{dy}\left[By(B+2y)^{-1}\right] = \frac{B}{(B+2y)} + By(-1)(B+2y)^{-2}2 = \frac{B}{(B+2y)} - \frac{2yB}{(B+2y)^2}$$

O denominador da equação rosa é:

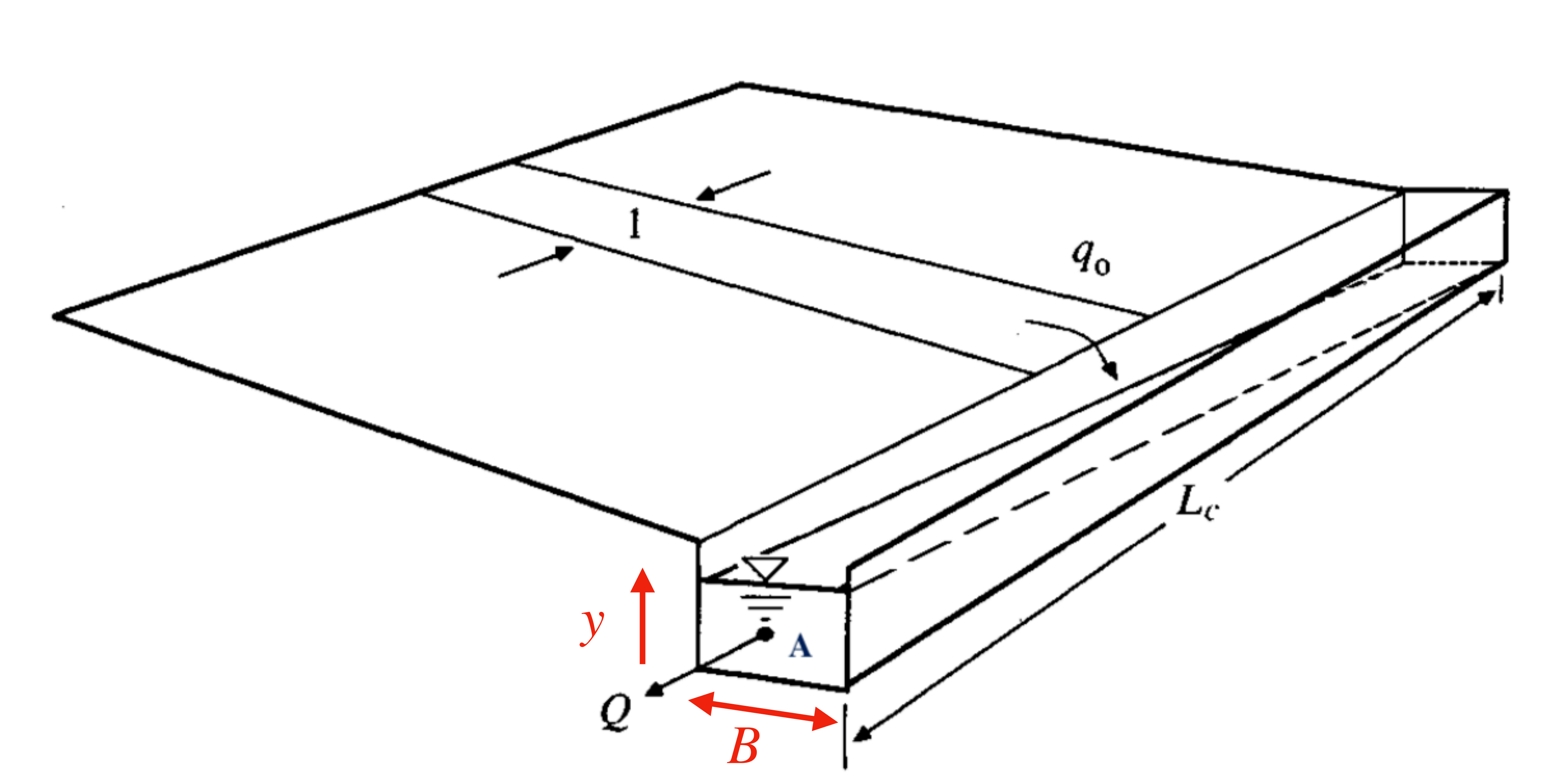
$$\left[\frac{2}{3R}\frac{dR}{dy} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dy}\right]_j = \left\{\frac{2}{3}\frac{B+2y}{By}\left[\frac{B}{(B+2y)} - \frac{2yB}{(B+2y)^2}\right] + \frac{1}{By}B\right\}_j = \left\{\frac{2}{3y}\left[1 - \frac{2y}{(B+2y)}\right] + \frac{1}{y}\right\}_j$$

$$= \left\{\frac{2}{3y} - \frac{4}{3(B+2y)} + \frac{1}{y}\right\}_j = \left\{\frac{5}{3y} - \frac{4}{3(B+2y)}\right\}_j = \left\{\frac{5B+10y-4y}{3y(B+2y)}\right\}_j = \left\{\frac{5B+6y}{3y(B+2y)}\right\}_j$$

Substituindo:

$$y_{j+1} = y_j - \frac{(1 - Q/Q_j)}{\left[\frac{5B+6y}{3y(B+2y)}\right]_j}$$

Escoamento em Canais - Canal Retangular



Aplicações usando o Google Colaboratory

https://colab.research.google.com/drive/1P81JTwApjdgOFdFnVBCulkAfaRum5fKh?usp=sharing

Escoamento em Canais

Exercícios: canal trapezoidal e triangular