3. Resolver la ecuación diferencial
$xy'' + 2y' = 6x$

haciendo una sustitución adecuada para convertir la ecuación (2) en una EDO de primer orden

$$y'' + \frac{2}{x}y' = 6 \qquad \frac{xy''}{x} + \frac{2y'}{x} = \frac{6x}{x}$$

$$xy'' + 2y' = 6x \qquad u = y'$$

$$x\frac{du}{dx} + 2u = 6x \qquad \frac{1}{x}\left(x\frac{du}{dx} + 2u = 6x\right)$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 6$$ Factor Integrante

$$P(x) = \frac{2}{x} \qquad f(x) = 6$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e \qquad \int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2\ln|x|$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} \qquad e^{2\ln|x|} = e^{\ln|x^2|}$$

$\mu(x) = x^2$ Toda la ecuación por el factor integrante $\mu(x)$

$$x^2\frac{du}{dx} + x^2\frac{2}{x}u = 6x^2 \qquad x^2\frac{du}{dx} + 2xu = 6x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^2u) = 6x^2 \qquad x^2u = \int 6x^2dx = 2x^3 + C$$

$$u = \frac{2x^3 + C}{x^2} = 2x + \frac{C}{x^2} \qquad y' = 2x + \frac{C}{x^2}$$

$$y = \int\left(2x + \frac{C}{x^2}\right)dx = \int 2x\,dx + \int \frac{C}{x^2}dx$$

$$y = x^2 - \frac{C}{x} + D \qquad y = x^2 + \frac{C2}{x} + C1$$

A partir de la ecuación de primer orden obtenida, indicar la región del plano R2 en donde vale el teorema de existencia y unicidad, e indicar aquellas regiones en donde no se cumple. Analizar en los puntos donde no se cumple el teorema, qué es lo que ocurre con las soluciones en estos puntos (hay solución?, hay más de una? o no hay soluciones)

$u' + \frac{2}{x}u = 6 \quad u' = 6 - \frac{2}{x}u$

Continuidad de los coeficientes:

La función $\frac{2}{x}$ no es continua en $x' = 0$, por consiguiente,la ecuación diferencial puede no satisfacer las condiciones del teorema en $x' = 0$

Región donde se cumple el teorema:

En el plano R^2, el teorema de existencia y unicidad se cumple en cualquier región donde $x \neq 0$. Es decir, el teorema es válido en las regiones:

$x \epsilon (- \infty, 0) \cup (0, \infty)$,

Existencia de soluciones: Sí, pueden existir soluciones, pero solo para ciertos valores de las constantes. Para $C = 0$,hay soluciones continuas en $x = 0$

Más de una solución: Sí, es posible que existan múltiples soluciones que satisfacen la ecuación diferencial en $x = 0$,dependiendo de los valores de las constantes $C\ y\ D$.

No hay soluciones continuas: Para $C \neq 0$, la solución general $y = x^2 - \frac{C}{x} + D$ no es continua en $x = 0$,lo que implica que no hay soluciones bien definidas en ese punto para estos casos.

Resolver los problemas de valor inicial siguientes: y(1) = 2, y(1) = −2, y(1) = 1, y(0) = −3 y graficar las soluciones obtenidas asumiendo un término constante C = 0.

Problemas de Valor Inicial

$y(1)=2$, $y(1)=-2$, $y(1)=1$, $y(0)=-3$

asumiendo un término constante $C=0$

$y(1)=2$ $\quad y=x^2-\frac{C}{x}+D$

$2=1-\frac{C}{1}+D$ $\quad 2=1-C+D$ $\quad 1=-C+D$

$D=C+1$ $\quad y=x^2-\frac{C}{x}+(C+1)=x^2-\frac{C}{x}+C+1$

$\underline{y=x^2+1}$

2 $y(1)=-2$ $\quad -2=1-C+D$ $\quad D=C-3$

$y=x^2-\frac{C}{x}+(C-3)=x^2-\frac{C}{x}+C-3$ $\quad \underline{y=x^2-3}$

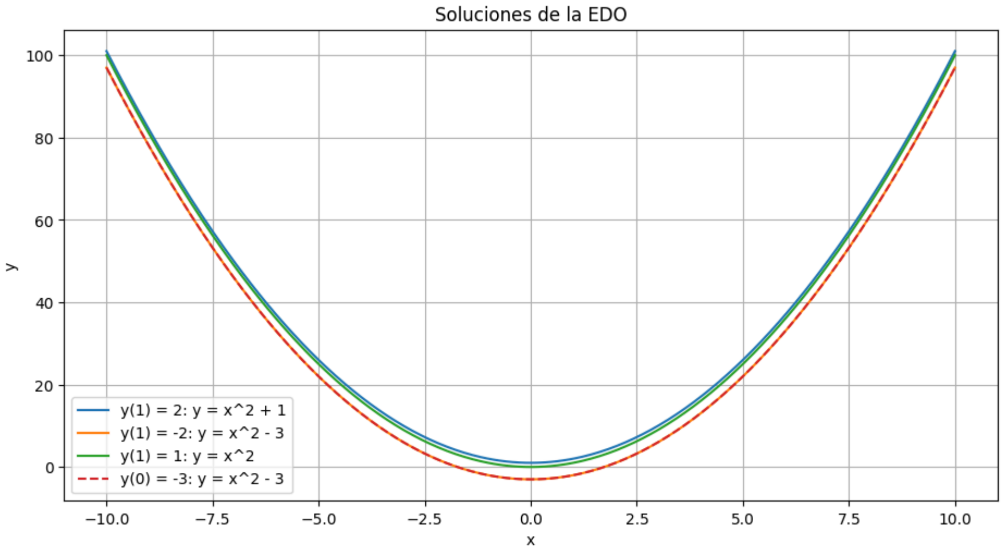
3. $y(1)=1$ $\quad y=x^2-\frac{C}{x}+D$

$1=1-C+D$ $\quad D=C$

$y=x^2-\frac{C}{x}+C$ $\quad y=x^2$ //

$y(0)=-3$ No se puede resolver directamente para $x=0$ ya que la solución general no es válida en $x=0$.

Gráficos:


Soluciones de la EDO
100
80
60
40
20
0
y
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
x
y(1) = 2: y = x^2 + 1
y(1) = -2: y = x^2 - 3
y(1) = 1: y = x^2
y(0) = -3: y = x^2 - 3