Hochschule für Technik
und Wirtschaft Berlin
University of Applied Sciences

Kompaktkurs Elementarmathematik

Für Studienanfänger technischer und Informatik-Studiengänge

Stand: 8. Januar 2017

Vorwort

Sehr geehrter Nutzer,

der vorliegende interaktive Kompaktkurs verfolgt die Zielstellung, einige mathematische elementare Kenntnisse und Fähigkeiten zu vertiefen und noch einmal vor Studienanfang aufzuarbeiten: Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen einer reellen Variablen und deren Abhängigkeit von Steuergrößen bzw. von Parametern.

Auf die theoretischen Grundlagen wird dabei nur im begrenzten Umfang eingegangen. Schwerpunkt des Kompaktkurses ist das selbständige Üben. Sie reaktivieren damit Sachverhalte des Schulstoffes, die im Studium vorausgesetzt werden und trainieren eine methodische Vorgehensweise des Lernens. Dabei geht es nicht nur um das grundsätzliche Verständnis, sondern auch um eine zügige Umsetzung von elementaren Umformungen.

Ein studentisches Team hat mit viel Fleiß diesen Kompaktkurs im Rahmen eines von der HTW Berlin geförderten eLearning-Projekts umgesetzt und dabei eigene Erfahrungen aus der Tätigkeit als Tutor im Präsenzkurs eingebracht. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Beteiligten Frau Olga Becker, Frau Nadja Kohlsmann, Frau Sanaz Mortazavi, Herrn André Heber, Herrn Benjamin Hoffmann und Herrn Ali Sinai für Ihre Mitwirkung herzlich bedanken. Frau Sanaz Mortazavi und Herr Ali Sinai haben die Anregung zu diesem Kurs gegeben. Es war für mich ein großes Vergnügen, dieses Team leiten zu dürfen. Mein Dank gilt auch Frau Liane Beuster vom eLearning-Competence Center der HTW für ihre Unterstützung und wertvollen Hinweise, sowie allen Tutoren, die zum Gelingen des Onlinekurses beigetragen haben.

Prof. Dr. Joachim Siegert

Einführung

In der letzten Zeit sind viele online verfügbare Materialien zur Unterstützung der Vorbereitung auf ein Studium bereitgestellt worden. Zum Überprüfen und Bewerten des vorhandenen Wissensstandes stehen ebenfalls verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, beispielsweise die Lernsoftware von R. Schwenkert und Y. Stry, FH München und der Eingangstest der FH Wildau.

Unser Kompaktkurs beschäftigt sich mit ausgewählten Sachverhalten, die insbesondere für ein Ingenieurstudium wichtig sind. Das Material ist so aufgebaut, dass man die Abschnitte der Reihenfolge nach oder auch ungeordnet bearbeiten kann. Am Ende jedes Kapitels wird ein Selbsttest angeboten, der zu Beginn der Bearbeitung durchgeführt und nach dem Durcharbeiten des Stoffes wiederholt werden kann. Dabei sollen Sie aus den vorgeschlagenen Lösungen jeweils die korrekte Antwort auswählen. Nachfolgend werden die jeweils relevanten theoretischen Grundlagen kurz erklärt und an Beispielaufgaben erläutert. Dann soll der Nutzer selbstständig Aufgaben lösen.

Falls sich dabei Fragen ergeben besteht die Möglichkeit, zu den einzelnen Teilschritten gezielt unterstützende Kommentare abzurufen. Es werden verschiedene Zwischenergebnisse diskutiert. Wenn es dem Bearbeiter nicht gelingt, die angegebene Lösung zu erhalten, kann er im Hilfekapitel die kompletten Lösungsansätze, -wege und Erklärungen zu den einzelnen Aufgaben finden.

Die Einbindung von Pencasts vom Pulse Smartpen und ergänzenden Videos von der Videoplattform sofatutor.com runden die Hilfe-Angebote ab.

Für die Vertiefung der Themen unseres Kompaktkurses und die Wiederholung der Sachverhalte empfehlen wir besonders das Portal Mathebibel von Herrn A. Schneider und die angegebene Literatur.

Viele weitere unterstützende Videos zur Mathematik (einschließlich der Elementarmathematik) und zur Informatik, die auch im Studium genutzt werden können, sind auf der Webseite von Prof. Dr. J. Loviscach (FH Bielefeld) abrufbar.

Wir wünschen Ihnen beim Durcharbeiten viel Erfolg und hoffen, Ihnen damit insbesondere bei der Vorbereitung auf das Studium eine zusätzliche Unterstützung und eine „Hilfe zur Selbsthilfe“ gegeben zu haben. Für Hinweise, Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge sind wir sehr dankbar.

Ihr eLearning-Team Kompaktkurs Elementarmathematik

Literatur

1. M. Ruhrländer: Brückenkurs Mathematik (mit MyMathLab) Neuerscheinung!!!, Pearson-Verlag
2. M. Knorrenschild: Vorkurs Mathematik, Fachbuchverlag, Leipzig
3. W. Schirotzek, S. Scholz: Starthilfe Mathematik, Reihe Mathematik für Ingenieure u. Naturwissenschaftler, Teubner-Verlag, Stuttgart/Leipzig
4. W. Schäfer, K. Georgi: Mathematik-Vorkurs, Teubner-Verlag, Stuttgart/Leipzig
5. M. Knorrenschild: Mathematik für Ingenieure, Fachbuchverlag Leipzig
6. E. Berane u.a.: Programmiertes Lehrmaterial, Wiederholungsprogramm „Gleichungen und Funktionen“, Fachbuchverlag Leipzig
7. R. Ku, H. P. Dodge: Barron’s SAT Subject Test Math Level 2, Barron’s Educational Series, Hauppauge

Inhaltsverzeichnis

1 Umstellen von Gleichungen **8**
1.1 Theorie 8
1.2 Beispiele 8
1.3 Übungen 10
1.4 Tests 11

2 Potenzen und Wurzeln **12**
2.1 Theorie 12
2.2 Beispiele 13
2.3 Übungen 15
2.4 Tests 16

3 Binomialkoeffizienten, binomische Formeln, binomischer Lehrsatz **18**
3.1 Theorie 18
3.2 Beispiele 19
3.3 Übungen 20
3.4 Tests 21

4 Polynomdivision **23**
4.1 Theorie 23
4.2 Beispiele 24
4.3 Übungen 26
4.4 Tests 27

5 Mengenlehre **29**
5.1 Theorie 29

6 Funktionen **31**
6.1 Theorie 31
6.1.1 Eigenschaften von Funktionen 31
6.1.2 Wirkung von Parametern 35

7 Lineare Funktionen **37**
7.1 Theorie 37
7.1.1 Einleitung 37
7.1.2 Schnittpunkt von Geraden 38
7.1.3 Orthogonale Geraden 38
7.1.4 Abstand eines Punktes zu einer Geraden 39
7.1.5 Betragsfunktion 39
7.1.6 Lineare Ungleichungen 40
7.2 Beispiele 40

7.3 Übungen . . . 48
7.4 Tests . . . 49

8 Quadratische Funktionen **51**
8.1 Theorie . . . 51
8.1.1 Scheitelpunktform . . . 51
8.1.2 Nullstellen . . . 52
8.1.3 Lösungen einer quadratischen Gleichung . . . 52
8.1.4 Schnittpunkt einer Parabel mit einer Geraden . . . 53
8.1.5 Schnittpunkt von Parabeln . . . 53
8.1.6 Quadratische Ungleichungen . . . 54
8.2 Beispiele . . . 55
8.3 Übungen . . . 64
8.4 Tests . . . 65

9 Potenz- und Wurzelfunktionen, Wurzelgleichungen **67**
9.1 Theorie . . . 67
9.1.1 Potenzfunktionen . . . 67
9.1.2 Wurzelfunktionen . . . 70
9.1.3 Wurzelgleichungen . . . 71
9.2 Beispiele . . . 71
9.3 Übungen . . . 74
9.4 Tests . . . 75

10 Exponential- und Logarithmusfunktionen und -gleichungen **77**
10.1 Theorie . . . 77
10.1.1 Exponentialfunktionen . . . 77
10.1.2 Logarithmus und Logarithmusfunktion . . . 78
10.1.3 Exponentialgleichungen . . . 80
10.1.4 Logarithmusgleichungen . . . 80
10.2 Beispiele . . . 80
10.3 Übungen . . . 84
10.4 Tests . . . 85

11 Trigonometrische Funktionen **87**
11.1 Theorie . . . 87
11.1.1 Winkeleinheiten . . . 87
11.1.2 Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck . . . 87
11.1.3 Grafische Darstellung der Sinus- und Kosinusfunktion . . . 89
11.1.4 Umkehrfunktionen für Sinus- und Kosinusfunktion . . . 90
11.1.5 Additionstheoreme . . . 91
11.1.6 Winkeltabelle . . . 92

11.1.7 Hinweise zur Notation und Benutzung des Taschenrechners . . 92
11.2 Beispiele . . . 93
11.3 Übungen . . . 94
11.4 Tests . . . 95

12 Funktionen in Polarkoordinaten 97
12.1 Theorie . . . 97
12.1.1 Definition Polarkoordinaten . . . 97
12.1.2 Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten . . . 97
12.1.3 Kurvengleichungen . . . 98
12.2 Beispiele . . . 100
12.3 Übungen . . . 104
12.4 Tests . . . 105

13 Hinweise und Lösungen zu den Übungen 106
13.1 Umstellen von Gleichungen . . . 106
13.2 Potenzen und Wurzeln . . . 109
13.3 Binomialkoeffizienten, binomische Formeln und binomischer Lehrsatz 112
13.4 Polynomdivision . . . 116
13.5 Lineare Funktionen . . . 119
13.6 Quadratische Funktionen . . . 127
13.7 Potenz- und Wurzelfunktionen, Wurzelgleichungen . . . 144
13.8 Exponential- und Logarithmusfunktionen und -gleichungen . . . 147
13.9 Trigonometrische Funktionen . . . 152
13.10 Funktionen in Polarkoordinaten . . . 155

14 Hinweise und Lösungen zu den Tests 159
14.1 Umstellen von Gleichungen . . . 159
14.2 Potenzen und Wurzeln . . . 163
14.3 Binomialkoeffizienten und Binomische Formeln . . . 168
14.4 Polynomdivision . . . 172
14.5 Lineare Funktionen . . . 176
14.6 Quadratische Funktionen . . . 182
14.7 Potenz- und Wurzelfunktionen . . . 190
14.8 Exponential- und Logarithmusfunktionen und -gleichungen . . . 193
14.9 Trigonometrische Funktionen . . . 198
14.10 Funktionen in Polarkoordinaten . . . 202

1 Umstellen von Gleichungen

1.1 Theorie

In diesem Abschnitt geht es um das Umstellen und Zusammenfassen von gebrochen-rationalen Termen der Form $a \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{b} = c$, die nach einer Variable, z.B. nach $\boldsymbol{x}$ umgestellt werden sollen.

Dazu benötigen Sie folgende Grundkenntnisse zur Bruchrechnung:

- Addition bzw. Subtraktion gleichnamiger Brüche:
$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$
- Addition bzw. Subtraktion ungleichnamiger Brüche, indem man diese gleichnamig macht:
$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{c \cdot d}$$
Tipp: Brüche werden gleichnamig gemacht, indem die Brüche erweitert werden. Ein geeigneter gemeinsamer Nenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner.
- Multiplikation von Brüchen:
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$
- Division von Brüchen:
$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$
Tipp: Brüche können dividiert werden, indem man den einen Bruch mit dem Kehrwert des anderen Bruchs multipliziert.

Im gesamten Material setzen wir voraus, dass Ausdrücke in einem Nenner jeweils verschieden von Null sind. Die Division durch 0 wird nicht gesondert ausgeschlossen.

1.2 Beispiele

Beispiel 1.2.1 Stellen Sie folgende Gleichung nach $\boldsymbol{f}$ um!

$$\frac{1}{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Lösung: Addieren Sie zuerst die Brüche der rechten Seite durch Bildung eines Hauptnenners:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\boldsymbol{f}} &= \frac{1}{g} \cdot \frac{b}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{g}{g} \\
&= \frac{b}{b \cdot g} + \frac{g}{b \cdot g} \\
\frac{1}{\boldsymbol{f}} &= \frac{b+g}{bg} \\
1 &= \frac{b+g}{bg} \cdot \boldsymbol{f} \\
\boldsymbol{f} &= \frac{bg}{b+g}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.2.2 Stellen Sie folgende Gleichung nach $\boldsymbol{\mu}$ um!

$$F_\mathrm{L} = \frac{1 - 4\frac{H}{D}\boldsymbol{\mu}}{1 + 4\frac{h}{d}\boldsymbol{\mu}} \cdot F_\mathrm{k} \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

Lösung: Beachten Sie, dass $\boldsymbol{\mu}$ an zwei Stellen vorkommt. Um nach $\boldsymbol{\mu}$ umstellen zu können, darf $\boldsymbol{\mu}$ nur einmal in der Gleichung stehen.

Zuerst wird der Nenner durch multiplizieren mit $1 + 4\frac{h}{d}\boldsymbol{\mu}$ beseitigt:

$$F_\mathrm{L} \cdot \left(1 + 4\frac{h}{d}\boldsymbol{\mu}\right) = \left(1 - 4\frac{H}{D}\boldsymbol{\mu}\right) \cdot F_\mathrm{k} \cdot \frac{D^2}{d^2}$$

Anschließend folgt das Ausmultiplizieren der Gleichung:

$$F_\mathrm{L} + 4F_\mathrm{L}\frac{h}{d}\boldsymbol{\mu} = F_\mathrm{k}\frac{D^2}{d^2} - 4\frac{H}{D}\boldsymbol{\mu}F_\mathrm{k}\frac{D^2}{d^2}$$

Es bietet sich an, bereits zu kürzen und zu vereinfachen, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen:

$$F_\mathrm{L} + \frac{4F_\mathrm{L}h\boldsymbol{\mu}}{d} = \frac{F_\mathrm{k}D^2}{d^2} - \frac{4H\boldsymbol{\mu}F_\mathrm{k}D}{d^2}$$

Zur weiteren Vereinfachung werden alle Terme, die $\boldsymbol{\mu}$ enthalten, auf eine Seite der Gleichung gebracht, alle anderen Terme auf die andere Seite. Ziel ist es, $\boldsymbol{\mu}$ auszuklammern:

$$\begin{aligned}
\frac{4F_\mathrm{L}h\boldsymbol{\mu}}{d} + \frac{4H\boldsymbol{\mu}F_\mathrm{k}D}{d^2} &= \frac{F_\mathrm{k}D^2}{d^2} - F_\mathrm{L} \\
\boldsymbol{\mu} \cdot \left(\frac{4F_\mathrm{L}h}{d} + \frac{4HF_\mathrm{k}D}{d^2}\right) &= \frac{F_\mathrm{k}D^2}{d^2} - F_\mathrm{L} \\
\boldsymbol{\mu} \cdot \left(\frac{4F_\mathrm{L}hd + 4HF_\mathrm{k}D}{d^2}\right) &= \frac{F_\mathrm{k}D^2 - F_\mathrm{L}d^2}{d^2} \\
\boldsymbol{\mu} = \frac{\frac{F_\mathrm{k}D^2 - F_\mathrm{L}d^2}{d^2}}{\frac{4F_\mathrm{L}hd + 4HF_\mathrm{k}D}{d^2}} &= \frac{(F_\mathrm{k}D^2 - F_\mathrm{L}d^2) \cdot d^2}{d^2 \cdot (4F_\mathrm{L}hd + 4HF_\mathrm{k}D)} \\
\boldsymbol{\mu} &= \frac{F_\mathrm{k}D^2 - F_\mathrm{L}d^2}{4\,(F_\mathrm{L}hd + F_\mathrm{k}HD)}
\end{aligned}$$

Tipp: In der Technik werden Doppelbrüche in der Regel beseitigt.

1.3 Übungen

Die Lösungen zu den hier gestellten Aufgaben finden Sie im Kapitel „Hilfe und komplette Lösungen". Zu jeder Aufgabe wird eine Bearbeitungszeit vorgegeben.

Übung 1.3.1 *(4 Min.)* Stellen Sie bitte nach $\boldsymbol{\mu}$ um!

$$P_\mathrm{Ü} = \frac{F}{d\pi\left(\frac{d}{4} + \boldsymbol{\mu}h\right)}$$

→ *Lösung auf Seite 106*

Übung 1.3.2 *(8 Min.)* Vereinfachen Sie bitte folgenden Doppelbruch:

$$i_1 = \frac{\frac{u_1}{R + \frac{1}{j\omega C}}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

→ *Lösung auf Seite 107*

Übung 1.3.3 *(6 Min.)* Stellen Sie folgende Gleichung nach $\boldsymbol{x}$ um:

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\varrho_{\text{Ag}}} + \frac{10 - \boldsymbol{x}}{\varrho_{\text{Sx}}} = \frac{10}{\varrho_0}$$

→ *Lösung auf Seite 108*

Übung 1.3.4 *(10 Min.)* Stellen Sie folgende Gleichung nach $\boldsymbol{R_1}$ um:

$$U_2 = \frac{R_2}{\boldsymbol{R_1} + R_2} U_1 - \frac{\boldsymbol{R_1} R_2}{\boldsymbol{R_1} + R_2} I_2$$

→ *Lösung auf Seite 109*

1.4 Tests

Test 1.4.1 *(8 Min.)* Stellen Sie die folgende Gleichung nach $\boldsymbol{g}$ um:

$$y = \frac{\boldsymbol{g}^2 \cdot R_3 \cdot R_2}{\boldsymbol{g} \cdot R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2 \cdot \boldsymbol{g}}{C_4 \cdot R_3}$$

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{g} = y \cdot \left(\frac{R_3 \cdot R_2}{R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{C_4 \cdot R_3} \right)$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{g} = \frac{y \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C_4}{C_4 \cdot {R_3}^2 \cdot R_2 - R_4 \cdot R_0 \cdot 10 \cdot x^2}$

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{g} = \frac{C_4 \cdot R_3^2 \cdot R_2 - R_4 \cdot R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{y \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C_4}$

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{g} = \frac{y}{\frac{R_3 \cdot R_2}{R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{C_4 \cdot R_3}}$

→ *Lösung auf Seite 159*

Test 1.4.2 *(8 Min.)* Stellen Sie die folgende Gleichung nach $\boldsymbol{f_L}$ um:

$$m_1 = \sqrt[3]{a^5} + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{f_L}}} \right) + u_t$$

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{f_L} = \left((m_1 - \sqrt[3]{a^5} - u_t) \cdot \beta \right)^2$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{f_L} = \left(\frac{m_1 - \sqrt[3]{a^5} - u_t}{\beta} \right)^2$

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{f_L} = \left(\frac{\beta}{m_1 - \sqrt[3]{a^5} - u_t} \right)^2$

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{f_L} = \left((m_1 + \sqrt[3]{a^5} + u_t) \cdot \beta \right)^2$

→ *Lösung auf Seite 160*

Test 1.4.3 *(8 Min.)* Stellen Sie folgende Gleichung nach $\boldsymbol{c}$ um:

$$f = \frac{U_a - U_b}{\frac{U_c}{A} - \frac{U_d}{\boldsymbol{c}}}$$

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{c} = U_d \cdot \frac{1}{-\frac{U_a - U_b}{f} + \frac{U_c}{A}}$ $\boxed{2}$ $\boldsymbol{c} = U_d \cdot \frac{1}{-\frac{U_a - U_b}{f} + \frac{U_c}{A}}$

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{c} = \frac{U_d \cdot f \cdot A}{(U_b - U_a) \cdot A + U_c \cdot f}$ $\boxed{4}$ $\boldsymbol{c} = \frac{(U_a - U_d) \cdot f}{(U_a - U_b) \cdot A}$

→ *Lösung auf Seite 161*

Test 1.4.4 *(12 Min.)* Stellen Sie die folgende Gleichung nach $\boldsymbol{r_2}$ um:

$$\phi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_0}{d} \frac{A}{\sqrt{\boldsymbol{r_2} + B}} + \frac{r_0}{d} \cdot \frac{1}{r_3} \right)$$

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{r_2} = \left(\frac{Q_1 \cdot r_1 \cdot d \cdot r_3}{-4 \cdot \phi \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_1 \cdot d \cdot r_3 + Q_1 \cdot d \cdot r_3 + r_0 \cdot Q_1 \cdot r_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{r_0 A}{d} \right)^2 - B$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{r_2} = \left(-\frac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{r_0}{d \cdot r_3} \right)^2 \cdot \left(\frac{r_0 A}{d} \right)^2 + B$

→ *Lösung auf Seite 162*

2 Potenzen und Wurzeln

2.1 Theorie

Im folgenden Abschnitt sollen komplizierte Gleichungen, die Potenzen und Wurzeln enthalten, vereinfacht werden.

Als Grundlage dienen die Potenz- und Wurzelgesetze:

- Multiplikation bzw. Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{(n+m)} \\ a^n : a^m &= a^{(n-m)} \end{aligned}$$

- Multiplikation bzw. Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\ a^n : b^n &= (a : b)^n \end{aligned}$$

- Potenzieren von Potenzen:

$$(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}$$

Zudem gelten folgende Definitionen:

$$\begin{array}{lll} a^{-n} = \frac{1}{a^n} & & \text{für } a \neq 0 \\ a^0 = 1 & & \text{für } a \neq 0 \\ \sqrt[m]{a^n} = a^{n/m} & & \text{für } a \geq 0, \text{ und } n,m \text{ positiv ganzzahlig} \end{array}$$

Im gesamten Material setzen wir voraus, dass Ausdrücke in einem Nenner jeweils verschieden von Null sind, die Division durch 0 wird nicht gesondert ausgeschlossen.

2.2 Beispiele

Beispiel 2.2.1 Vereinfachen Sie folgenden Term ($a \neq 0$) unter Anwendung der jeweiligen Gesetze so weit wie möglich:

$$\frac{5a^n b^{n+4} c^{2n+1}}{abx^{n+1} y^{n+2} z^{n+3}} : \frac{3a^{n-1} b^3 c^{n+1}}{2xy^{2-n} z^{3-n}}$$

Ein möglicher erster Schritt ist das Ausführen der Division:

$$\frac{5a^n b^{n+4} c^{2n+1} \cdot 2xy^{2-n} z^{3-n}}{abx^{n+1} y^{n+2} z^{n+3} \cdot 3a^{n-1} b^3 c^{n+1}}$$

Es ist wieder ratsam, den Term zu sortieren, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen:

$$\frac{10a^n b^{n+4} c^{2n+1} xy^{2-n} z^{3-n}}{3aa^{n-1} bb^3 c^{n+1} x^{n+1} y^{n+2} z^{n+3}}$$

Entweder kürzt man nun direkt oder schreibt einen Term für jede Basis, um die Gesetze leichter anwenden zu können:

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{a^n}{a \cdot a^{n-1}} \cdot \frac{b^{n+4}}{b \cdot b^3} \cdot \frac{c^{2n+1}}{c^{n+1}} \cdot \frac{x}{x^{n+1}} \cdot \frac{y^{2-n}}{y^{n+2}} \cdot \frac{z^{3-n}}{z^{n+3}}$$

Nun kann das Gesetz für die Division von Potenzen mit gleicher Basis angewendet werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{10}{3} \cdot a^{n-(1+n-1)} \cdot b^{n+4-(1+3)} \cdot c^{2n+1-(n+1)} \cdot x^{1-(n+1)} \cdot y^{2-n-(n+2)} \cdot z^{3-n-(n+3)} \\
= \; & \frac{10}{3} \cdot a^{n-1-n+1} \cdot b^{n+4-1-3} \cdot c^{2n+1-n-1} \cdot x^{1-n-1} \cdot y^{2-n-n-2} \cdot z^{3-n-n-3} \\
= \; & \frac{10}{3} \cdot a^{0} \cdot b^{n} \cdot c^{n} \cdot x^{-n} \cdot y^{-2n} \cdot z^{-2n} \\
= \; & \frac{10}{3} \cdot \frac{b^n c^n}{x^n y^{2n} z^{2n}} \\
= \; & \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{bc}{xy^2z^2}\right)^n
\end{aligned}$$

Beispiel 2.2.2 Der folgende Term ist so weit wie möglich durch Anwendung der Potenz- und Wurzelgesetze zu vereinfachen:

$$\frac{125a^7b^{11}}{138x^{10}y^8} : \frac{175a^4b^{18}}{92x^9y^8}$$

Lösung: Zuerst wird die Division durchgeführt, um die Terme auf einen Bruch zu bringen:

$$= \frac{125a^7b^{11} \cdot 92x^9y^8}{138x^{10}y^8 \cdot 175a^4b^{18}}$$

Falls es schwer fällt richtig zu kürzen, sollte man Zähler und Nenner sortieren:

$$= \frac{125 \cdot 92a^7b^{11}x^9y^8}{138 \cdot 175a^4b^{18}x^{10}y^8}$$

Treten in derartigen Ausdrücken ganzzahlige Faktoren auf, können Sie diese leicht durch Zerlegung in Primfaktoren (Primzahlen: natürliche Zahlen, die nur durch 1 oder durch sich selbst teilbar sind) in Potenzausdrücke umschreiben.

Dabei werden beginnend mit 2 die ganzzahligen Teiler der gegebenen Zahl in wachsender Reihenfolge ermittelt. Oft sind diese Faktoren mehrfach vorhanden, wodurch entsprechenden Potenzen auftreten:

$$\begin{aligned}
\underbrace{125}_{\text{ist nicht durch 2 und 3 teilbar}} = 5 \cdot (25) = 5 \cdot (5 \cdot 5) &= 5^3 \\
92 = 2 \cdot (46) = 2 \cdot (2 \cdot \underbrace{23}_{\text{Primzahl}}) &= 2^2 \cdot 23 \\
138 = 2 \cdot (69) = 2 \cdot (3 \cdot \underbrace{23}_{\text{Primzahl}}) &= 2 \cdot 3 \cdot 23 \\
\underbrace{175}_{\text{ist nicht durch 2 und 3 teilbar}} = 5 \cdot (35) = 5 \cdot (5 \cdot 7) &= 5^2 \cdot 7
\end{aligned}$$

Durch Anwendung von Potenzgesetzen können Sie nun weiter vereinfachen:

$$\frac{125 \cdot 92}{138 \cdot 175} = \frac{(5^3) \cdot (2^2 \cdot 23)}{(2 \cdot 3 \cdot 23) \cdot (5^2 \cdot 7)} = \frac{5^{3-2} \cdot 2^{2-1} \cdot 23^{1-1}}{3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Tipp: Manchmal hilft es die Terme einzeln zu betrachten, damit direkt erkannt wird, welches Gesetz angewendet werden kann:

$$\begin{aligned}
&= \frac{10}{21} \cdot \frac{a^7}{a^4} \cdot \frac{b^{11}}{b^{18}} \cdot \frac{x^9}{x^{10}} \cdot \frac{y^8}{y^8} \\
&= \frac{10}{21} \cdot a^{7-4} \cdot b^{11-18} \cdot x^{9-10} \\
&= \frac{10}{21} \cdot a^3 \cdot b^{-7} \cdot x^{-1} \\
&= \frac{10}{21} \cdot \frac{a^3}{b^7 x}
\end{aligned}$$

2.3 Übungen

Übung 2.3.1 *(8 Min.)* Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^{-3}$$

→ *Lösung auf Seite 109*

Übung 2.3.2 *(8 Min.)* Vereinfachen Sie bitte folgenden Ausdruck:

$$\sqrt[6]{vw^3} \cdot \sqrt[4]{n^5 v^8 w^{-2}} \cdot \sqrt{nv^3}$$

→ *Lösung auf Seite 110*

Übung 2.3.3 *(10 Min.)* Vereinfachen Sie bitte folgenden Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{a^x}\left(a^{2x}\right)^{\frac{1}{3}}\left(b^2\right)^x}{\sqrt[6]{a^x}\left(b^x\right)^3}$$

→ *Lösung auf Seite 111*

2.4 Tests

Test 2.4.1 *(8 Min.)* Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$y = \frac{(\alpha \cdot \beta)^{k-3}\mu^2 \cdot \psi^{m+2}}{\alpha^{m+f} \cdot \gamma^5} : \frac{\Omega \cdot \alpha^{l-1}}{\sqrt{\beta \cdot \mu}}$$

1 $y = \alpha^{k-m-f+l-4} \cdot \beta^{k-\frac{7}{2}} \cdot \mu^{\frac{3}{2}} \cdot \psi^{m+2} \cdot \gamma^{-5} \cdot \Omega$

2 $y = \alpha^{\frac{k-3}{(m+f)(l-1)}} \cdot \beta^{\frac{k-3}{2}} \cdot \mu \cdot \psi^{m+2} \cdot \gamma^{-5} \cdot \Omega$

3 $y = \alpha^{k-m-f-l-2} \cdot \beta^{k-\frac{5}{2}} \cdot \mu^{\frac{5}{2}} \cdot \psi^{m+2} \cdot \gamma^{-5} \cdot \Omega^{-1}$

4 $y = \alpha^{k+m+f+l-4} \cdot \beta^{k-\frac{5}{2}} \cdot \mu^{\frac{5}{2}} \cdot \psi^{m+2} \cdot \gamma^{-5} \cdot \Omega^{-1}$

→ *Lösung auf Seite 163*

Test 2.4.2 *(4 Min.)* Stellen Sie folgende Gleichung nach r um:

$$y = \frac{r^{n+1} \cdot a^{pq}}{r^{n-1} \cdot y^m}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $r = \pm\sqrt{\frac{y^{m+1}}{a^{pq}}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $r = \pm\sqrt{\frac{y}{a^{pq}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $r = \pm\sqrt[2n]{\frac{y^{m+1}}{a^{pq}}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{r^n - r}{r^n + r} = \frac{a^{pq}}{y^{m+1}}$

→ *Lösung auf Seite 164*

Test 2.4.3 *(15 Min.)* Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a^{0,5}}{b^{\frac{1}{4}}}\right)^{24}}} : \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{b} \cdot a}{a}\right)^{81}}}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y = \frac{b^2}{a^4}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y = \frac{a^8}{b^4}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y = \frac{a^2}{b}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y = a \cdot b^2$

→ *Lösung auf Seite 165*

Test 2.4.4 *(15 Min.)* Stellen Sie folgenden Ausdruck nach h um:

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha^4 \cdot \beta^5}}{\sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{h^7}}} = \frac{\sqrt[3]{(x \cdot \beta)^6 \cdot \sqrt[7]{\frac{h^4}{\alpha^5}}}}{\sqrt[5]{(x \cdot \beta)^{125}}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $h = \alpha^{\frac{2772}{917}} \cdot \beta^{-\frac{2016}{131}} \cdot x^{\frac{1596}{131}} \cdot \lambda^{-\frac{63}{131}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $h = \alpha^{-\frac{924}{917}} \cdot \beta^{-\frac{2072}{131}} \cdot x^{-\frac{1932}{131}} \cdot \lambda^{\frac{63}{131}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $h = \alpha^{\frac{63}{262}} \cdot \beta^{\frac{1344}{655}} \cdot x^{\frac{4536}{131}} \cdot \lambda^{-\frac{273}{131}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $h = \alpha^{\frac{924}{917}} \cdot \beta^{\frac{1344}{655}} \cdot x^{\frac{1932}{131}} \cdot \lambda^{-\frac{273}{131}}$

→ *Lösung auf Seite 166*

3 Binomialkoeffizienten, binomische Formeln, binomischer Lehrsatz

3.1 Theorie

Mit Hilfe des Binomialkoeffizienten kann bestimmt werden, auf wie viel verschiedene Arten k Elemente aus einer n-elementigen Menge ausgewählt werden können. Dabei ist die Reihenfolge unerheblich und die Elemente dürfen nicht zurückgelegt werden.

Der Binomialkoeffizient wird folgender Maßen berechnet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{für } n,k \in \mathbb{N}_0\,, n \geq k$$

Der Ausdruck für den Binomialkoeffizienten wird „n über k“ gesprochen. Das Symbol ‘!’ wird Fakultät genannt und bezeichnet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. Beispielsweise ist $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
Weiterhin definiert man im Sonderfall $0! = 1$.

Ein bekanntes Beispiel wäre zum Beispiel die Ziehung der Lottozahlen ohne Zusatzzahlen, denn es werden 6 Zahlen aus 49 gezogen. Es gibt also entsprechend viele Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
\binom{49}{6} &= \frac{49!}{6! \cdot 43!} \\
&= \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 43 \cdot 42 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= 13\,983\,816
\end{aligned}$$

Tipp: Sollten die Fakultäten zu groß für die Taschenrechnerkapazität sein, so kann man wie im Beispiel Faktoren, die im Nenner und Zähler vorkommen, kürzen.

Der Name Binomialkoeffizient stammt von der Verwendung des Terms als Koeffizienten im binomischen Lehrsatz. Dieser dient zur Berechnung von potenzierten Summen zweier Variablen, bekannt sind vor allem die so genannten binomischen Formeln.

Der binomische Lehrsatz ist definiert durch:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k
\end{aligned}
$$

Die benötigten Binomialkoeffizienten können berechnet werden oder aus dem Pascalschen Dreieck abgelesen werden:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Der binomische Lehrsatz liefert auch die bekannten binomischen Formeln:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

3.2 Beispiele

Beispiel 3.2.1 Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{10}{6}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & \frac{10!}{6!\,4!} \\ = \; & \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ = \; & \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ = \; & \frac{5\cdot 3\cdot 2\cdot 7}{1} \\ = \; & 210 \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.2 Bestimmen Sie $(a+b)^3$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes!

Lösung:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k}\, b^k \\ &= \binom{3}{0}\cdot a^3\cdot b^0 + \binom{3}{1} a^2b^1 + \binom{3}{2} a^1b^2 + \binom{3}{3} a^0b^3 \\ &= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3 \end{aligned}$$

3.3 Übungen

Übung 3.3.1 *(3 Min.)* Bitte berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{90}{87}$.

→ *Lösung auf Seite 112*

Übung 3.3.2 *(5 Min.)* Bestimmen Sie eine Formel für $(a+b)^4$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes!

→ *Lösung auf Seite 112*

Übung 3.3.3 *(10 Min.)* Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\frac{4a^2}{2a(2a+b)-2ab-b^2}+\left(b^2+\frac{4ab-2a^2b}{a-2}\right)\frac{a}{b^3-4ab^2+4a^2b}$$

→ *Lösung auf Seite 113*

Übung 3.3.4 *(8 Min.)* Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

$$\frac{1}{a^2+2ab+b^2}+\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{b^2}{a^4-a^2b^2}-\frac{1}{a^2}$$

→ *Lösung auf Seite 114*

Übung 3.3.5 *(15 Min.)* Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\left(\sqrt{1+\left(\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\right)^{-6}-\frac{1}{a^2}\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^2+4a^2x^2}$$

→ *Lösung auf Seite 115*

3.4 Tests

Test 3.4.1 *(8 Min.)* Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$y=\sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(n^2+2n+1)(n+1)}{(n^3-n)(n-1)}}$$

1 $y=\frac{n+1}{n-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{n-1}}$ **2** $y=\frac{n+1}{n-1}$ **3** $y=\frac{n+1}{n-1}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

→ *Lösung auf Seite 168*

Test 3.4.2 *(10 Min.)* Vereinfachen Sie die folgende Gleichung und stellen Sie diese nach h um:

$$\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\mu)}{(0{,}25h^2+2h+4)\,(0{,}04\mu^2-1)}=\frac{(\beta^2-\mu^2)}{(\alpha+\beta)\,(0.2\mu+1)}$$

1 $h=\pm\sqrt{\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\beta-\mu)\left(\frac{\mu}{5}-1\right)}}-2$

2 $h=\pm 2\sqrt{\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\beta-\mu)\left(\frac{\mu}{5}-1\right)}}-4$

3 $h=\pm 2\sqrt{\dfrac{5\,(\alpha^2-\beta^2)}{(\beta+\mu)\,(\mu-5)}}-4$

→ *Lösung auf Seite 169*

Test 3.4.3 *(10 Min.)* Der binomische Ausdruck $(x+y)^{15}$ kann mit Hilfe des binomischen Satzes als Summe dargestellt werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B bei den Summanden mit den Potenzen x^4y^{11} bzw. $x^{12}y^3$.

1 $A=455$ $B=1365$

2 $A=1265$ $B=455$

3 $A=330$ $B=72\,600$

→ *Lösung auf Seite 170*

Test 3.4.4 *(15 Min.)* Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$y=\sqrt{\frac{\alpha^3+\alpha^2+3\alpha\gamma^2+2\alpha\gamma+3\alpha^2\gamma+\gamma^3+\gamma^2}{(\alpha^4+\gamma^4-2\alpha^2\gamma^2)\cdot(\alpha^2-\gamma^2-2\gamma-1)}}$$

$\boxed{1}$ $$y = \frac{1}{(\alpha^2 - \gamma^2)} \sqrt{\frac{\alpha^5 + 8\alpha^4\gamma^4 + \gamma^5}{\alpha^2 - (\gamma^2 + 2\gamma + 1)}}$$

$\boxed{2}$ $$y = \frac{1}{\alpha - \gamma} \sqrt{\frac{1}{(\alpha - \gamma - 1)}}$$

$\boxed{3}$ $$y = \frac{\alpha\sqrt{\alpha} + 2\alpha^2\gamma^2\sqrt{2} + \gamma\sqrt{\gamma}}{(\alpha^2 - \gamma^2) \cdot (\alpha - (\gamma + 2))}$$

→ *Lösung auf Seite 171*

4 Polynomdivision

4.1 Theorie

Polynome sind Audrücke der Form

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}; \quad i,n \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei wird a_i als Koeffizient bezeichnet und es wird $a_n \neq 0$ vorausgesetzt; n ist der Grad des Polynoms (Polynom n-ten Grades).

Ein Polynom n-ten Grades kann durch ein anderes Polynom m-ten Grades dividiert werden, wenn $n \geq m$ erfüllt ist:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P_n(x) : P_m(x) = \ldots$$

Das Verfahren funktioniert analog zur schriftlichen Division von Zahlen mit Rest. Dabei wird vom Dividenden das passende Vielfache des Divisors abgezogen, bis die Rechnung komplett aufgeht oder ein Rest übrig bleibt, der nicht mehr durch den Divisor teilbar ist. Eine genaue Erläuterung der Vorgehensweise erfolgt in den Beispielen.

Die Polynomdivision ist u.a. hilfreich bei der Ermittlung von Nullstellen von Polynomen. Es ist i.d.R. kompliziert bzw. unmöglich, die Nullstellen eines Polynoms höheren als zweiten Grades exakt zu berechnen. Wenn man allerdings eine Nullstelle x_* gefunden hat, kann das Polynom $P_n(x)$ ohne Rest durch das Binom $x - x_*$ geteilt werden:

$$\frac{P_n(x)}{x - x_*} = P_n(x) : (x - x_*) = P_{n-1}(x)$$

Das entstehende Restpolynom $P_{n-1}(x)$ wird dann weiter untersucht. Ist zum Beispiel zunächst ein Polynom 3. Grades gegeben,

$$\frac{P_3(x)}{x - x_*} = P_3(x) : (x - x_*) = P_2(x)$$

kann dann für das Restpolynom $P_2(x)$ die p-q-Formel zur exakten Berechnung der weiteren zwei Nullstellen eingesetzt werden.

4.2 Beispiele

Beispiel 4.2.1 Berechnet werden soll die Division

$$\left(x^2 + 2x^3 - 1\right) : \left(-2 + x^2\right)$$

Lösung: Bevor mit der Division begonnen werden kann, müssen die Terme absteigend nach dem Grad des Polynoms zu

$$\left(2x^3 + x^2 - 1\right) : \left(x^2 - 2\right)$$

sortiert werden, da man zuerst die größte Potenz dividiert. Nun überlegt man, wie oft $(x^2 - 2)$ in $2x^3$ passt. Dafür geht man wie folgt vor: Zuerst teilt man $2x^3 : x^2 = 2x$, um das erste Glied des Ergebnisses zu berechnen.

Nun multipliziert man das erste Teilergebnis mit dem Divisor und subtrahiert das Ergebnis vom Dividenden, um zu ermitteln, welcher Rest noch dividiert werden muss. $2x \cdot (x^2 - 2) = 2x^3 - 4x$

Man verwendet folgende Notation, die analog zur schriftlichen Division funktioniert. Zur besseren Übersicht sollten gleiche Potenzen untereinander geschrieben werden:

$$\begin{array}{rlllll}
 & (2x^3 & +x^2 & & -1) & : (x^2-2) = 2x \\
- & (2x^3 & & -4x) & & \\
\hline
\scriptstyle(=) & & x^2 & +4x & -1 &
\end{array}$$

Die -1 entsteht als Übertrag aus der ersten Zeile.

Der bei der Subtraktion entstandene Rest $x^2 + 4x - 1$ hat bereits nur noch einen Polynomgrad von 2. Nun dividiert man $x^2 : x^2 = 1$ und multipliziert das Ergebnis mit

(x^2-2). Anschließend kann die Berechnung fortgeschrieben werden:

$$\begin{array}{rllll} & (2x^3 & +\ x^2 & & -1) \quad : (x^2-2) = 2x+1 \\ - & (2x^3 & & -4x) & \\ \hline \scriptstyle(=) & & x^2 & +4x & -1 \\ & - & (x^2 & & -2) \\ \hline & \scriptstyle(=) & & 4x & +1 \end{array}$$

Nun entsteht ein Rest $4x+1$, der jedoch nicht ganzzahlig durch x^2-2 teilbar ist, da das Restpolynom einen kleineren Grad als der Divisor hat. Deswegen lautet das Ergebnis:

$$\begin{array}{rllll} & (2x^3 & +\ x^2 & & -1) \quad : (x^2-2) = 2x+1+\frac{4x+1}{x^2-2} \\ - & (2x^3 & & -4x) & \\ \hline \scriptstyle(=) & & x^2 & +4x & -1 \\ & - & (x^2 & & -2) \\ \hline & \scriptstyle(=) & & 4x & +1 \quad \scriptstyle\text{(Rest)} \end{array}$$

Beispiel 4.2.2 Das folgende Beispiel zeigt, dass auch eine Polynomdivision mit zwei Variablen funktioniert. Es soll folgende Division ausgeführt werden:

$$\left(a^3-b^3\right) : (a-b)$$

Lösung: Hier sind die Terme nach Variable und Potenz bereits sortiert und es kann (a^3-b^3) durch $(a-b)$ geteilt werden. Vorab erfolgt folgender Zwischenschritt:

$$\begin{aligned} a^3 : a &= a^2 \\ a^2 \cdot (a-b) &= a^3 - a^2 b \end{aligned}$$

Nun kann der erste Schritt ausgeführt werden:

$$\begin{array}{rlll} & (a^3 & & -b^3) \quad : (a-b) = a^2 \\ - & (a^3 & -a^2b) & \\ \hline \scriptstyle(=) & & a^2b & -b^3 \end{array}$$

Der entstandene Rest ist $(a^2b - b^3)$, der nun durch $(a - b)$ dividiert werden muss:

$$
\begin{array}{rllll}
 & (a^3 & & & -b^3) \quad : (a-b) = a^2 + ab \\
- & (a^3 & -a^2b) & & \\
\hline
{\scriptstyle(=)} & & a^2b & & -b^3 \\
 & - & (a^2b & -ab^2) & \\
\cline{2-5}
 & {\scriptstyle(=)} & & ab^2 & -b^3
\end{array}
$$

Der neue Rest ist $(ab^2 - b^3)$. Die Schritte werden so lange fortgeführt, bis die Rechnung aufgegangen ist oder ein nicht teilbarer Rest übrig bleibt:

$$
\begin{array}{rllll}
 & (a^3 & & & -b^3) \quad : (a-b) = a^2 + ab + b^2 \\
- & (a^3 & -a^2b) & & \\
\hline
{\scriptstyle(=)} & & a^2b & & -b^3 \\
 & - & (a^2b & -ab^2) & \\
\cline{2-5}
 & {\scriptstyle(=)} & & ab^2 & -b^3 \\
 & & - & (ab^2 & -b^3) \\
\cline{3-5}
 & & {\scriptstyle(=)} & & 0
\end{array}
$$

In diesem Fall geht die Division ohne Rest auf und die Aufgabe ist damit gelöst.

4.3 Übungen

Übung 4.3.1 *(6 Min.)* Lösen Sie folgende Aufgabe:

$$\left(2x^4 - x^2\right) : (x - 5)$$

→ *Lösung auf Seite 116*

Übung 4.3.2 *(8 Min.)* Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$x^3 + x^2 - 10x + 8$$

→ *Lösung auf Seite 116*

Übung 4.3.3 *(10 Min.)* Führen Sie die folgende Division aus:

$$\left(3x^4 - 3x^2 - 54x - 54\right) : \left(2x - x^2 + 3\right)$$

→ *Lösung auf Seite 118*

Übung 4.3.4 *(10 Min.)* Führen Sie bitte folgende Polynomdivision aus:

$$\left(a^2 b - 3b^3 + ab^2 + a^3\right) : (a - b)$$

→ *Lösung auf Seite 118*

4.4 Tests

Test 4.4.1 *(8 Min.)* Bestimmen Sie mit Hilfe der Polynomdivision die Nullstellen des folgenden Polynoms

$$y = P_3(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$$

1 $x_1 = 1$ $\quad x_2 = -2$ $\quad x_3 = -3$

2 $x_1 = 1$ $\quad$ Der Rest der Polynomdivision ist 8.

3 $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 6$ $\quad x_3 = -1$

→ *Lösung auf Seite 172*

Test 4.4.2 *(12 Min.)* Führen Sie folgende Division durch und bestimmen Sie den Rest R.

$$\left(2a^5 b^{x+2} - 2a^3 b^{x+5} + 3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2}\right) : \left(a^2 - b^3\right)$$

1 $2a^3 b^{x+2} + 3a^2 b^{2x-1}$, $\quad R = 0$

2 $2a^3$, $\quad R = b^{x+2} + 2a^2 b^3 - 2a^3 b^{x+5} + 3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2}$

3 $2a^3 b^{x+2} + 3a^2 b^{2x-1}$, $\quad R = 2a^3 b^{x+2} - 2a^3 b^{x+5} - 3a^2 b^{2x-1}$

→ *Lösung auf Seite 173*

Test 4.4.3 *(12 Min.)* Führen Sie folgende Division durch und bestimmen Sie den Rest R.

$$(5\lambda^8 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 1) : (\lambda + 1)$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $5\lambda^7 + 5\lambda^6 + 5\lambda^5 + 5\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda + 1\ ,$ $R = 0$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $5\lambda^7 - 5\lambda^6 + 5\lambda^5 - 5\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda - 1\ ,$ $R = 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $5\lambda^8 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3\ ,$ $R = \lambda$

→ *Lösung auf Seite 174*

Test 4.4.4 *(15 Min.)* Führen Sie folgende Division durch und bestimmen Sie den Rest R.

$$\left(\alpha^4\beta^{x+4} - \alpha^2\lambda^{y+6}\beta^{x-6} + \alpha^2\lambda^6\beta^{x+8}\right) : \left(\alpha^2\beta^4 + \lambda^6\beta^8\right)$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\alpha^2\beta^x - \lambda^{y+6}\beta^{x-10}\ ,$ $R = \lambda^{y+12}\beta^{x-2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\alpha^2\beta^x - \lambda^{y+6}\beta^{x-10}\ ,$ $R = 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\alpha^2\lambda^{y-1}\beta^x - \lambda^y\beta^x\ ,$ $R = \lambda^{y+12}\beta^{x-2}$

→ *Lösung auf Seite 175*

5 Mengenlehre

5.1 Theorie

Ein wichtiger Bestandteil der mathematischen Theorie ist die Mengenlehre. Sie wird beispielsweise benutzt, um Lösungsmengen anzugeben oder wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet. Daher sollten Sie Grundbegriffe und Schreibweisen der Mengenlehre kennen. Den Mengenbegriff setzen wir hier als bekannt voraus.

Gehört ein Element x zu einer Menge $\mathbb{M}$, schreibt man das in der Form $x \in \mathbb{M}$ oder auch mit der Angabe einer Eigenschaft der Elemente

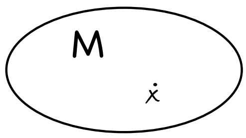
$$\text{Mengenname} = \{x \mid \text{Eigenschaft}\}$$

Diese Menge enthält alle Elemente x, die die entsprechende Eigenschaft besitzen, den senkrechten Strich " | "liest man als "mit der Eigenschaft". Beispielsweise enthält die Menge

$$\mathbb{M} = \{x \mid \mathbb{R}, x > 1\}$$

alle reellen Zahlen größer als 1.

Üblich ist auch die Darstellung im Venn-Diagramm:



Die leere Menge, die kein Element enthält, wird durch $\emptyset$ oder $\{\}$ symbolisiert.

Verschiedene Schreibweisen von Mengen sind:

- Mengenname = {Element 1,...,Element n} aufzählende Angabe der Elemente
- Mengenname = $[a,b]$(Intervallschreibweise): Diese Menge beinhaltet alle Elemente (reelle Zahlen) zwischen a und b inklusive der Grenzen a und b. Sind die Grenzen kein Teil der Menge (offenes Intervall), zeigen die Klammern nach außen oder es werden runde Klammern gesetzt:

  $$\text{Mengenname} =]a,b] = \ (a,b]$$

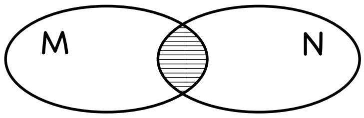
  Diese Menge beinhaltet alle Element ab a bis einschließlich b.

Besonders wichtig sind die möglichen Verknüpfungen von (zwei) Mengen:

- Durchschnitt der Mengen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{N}$ (Schnittmenge):

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{N} \text{ ist definiert durch die Menge} = \{x \mid x \in \mathbb{M} \wedge x \in \mathbb{N}\}$$

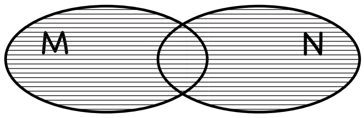
  Der Durchschnitt zweier Mengen ist diejenige Teilmenge, die die Elemente enthält, die in beiden Mengen enthalten sind.



- Vereinigung:

$$\mathbb{M} \cup \mathbb{N} \text{ ist definiert durch die Menge} = \{x \mid x \in \mathbb{M} \vee x \in \mathbb{N}\}$$

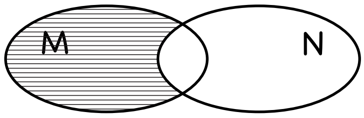
  Die Vereinigung von zwei Mengen ist eine Menge, die alle Element aus $\mathbb{M}$ und alle Element aus $\mathbb{N}$ enthält.



- Differenzmenge:

$$\mathbb{M} \setminus \mathbb{N} \text{ ist definiert durch die Menge} = \{x \mid x \in \mathbb{M} \wedge x \notin \mathbb{N}\}$$

  Die Differenzmenge von $\mathbb{M}$ und $\mathbb{N}$ enthält alle Elemente aus $\mathbb{M}$, die nicht in $\mathbb{N}$ enthalten sind.



6 Funktionen

6.1 Theorie

Eine Funktion ordnet jedem Wert x aus einer Menge durch eine Vorschrift f eindeutig einen Wert y aus einer weiteren Menge zu. Notiert wird eine Funktion durch $y = f(x)$. y ist eine von x abhängige Variable.

Die Menge aus der die Variable x stammt nennt man Definitionsmenge, y ist ein Element des Wertebereichs. Funktionen zeichnen sich durch die Eigenschaften Monotonie, Symmetrie und Periodizität aus, die nachfolgend erläutert werden.

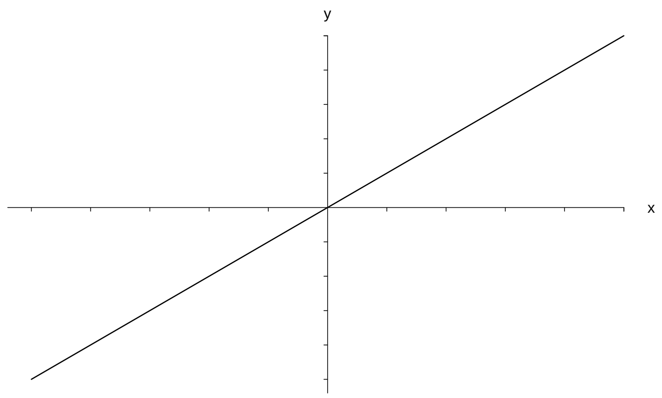
6.1.1 Eigenschaften von Funktionen

Monotonie Mit Hilfe des Monotoniebegriffes lässt sich der Verlauf einer Funktion näher beschreiben. Es existieren 4 Monotoniearten:

- Eine Funktion heißt *streng monoton wachsend*, wenn der nachfolgende Funktionswert stets größer ist als der vorherige.

$$\text{Für} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt} \quad f(x_1) < f(x_2)\,.$$

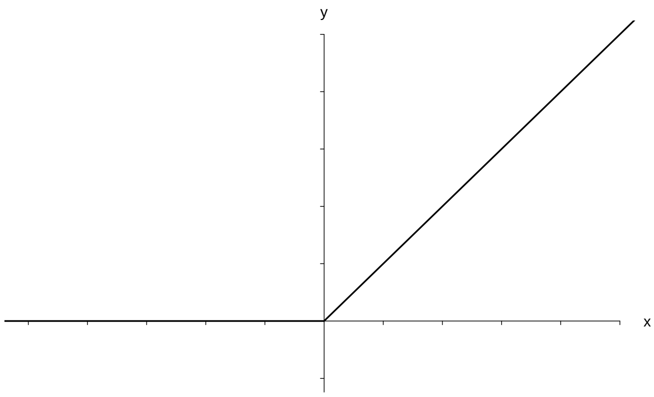
  Beispielhaft dargestellt ist die streng monoton wachsende Funktion $y = f(x) = x$:



- Eine Funktion heißt *monoton wachsend*, wenn auch die Gleichheit der Funktionswerte zugelassen wird.

$$\text{Für} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt} \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,.$$

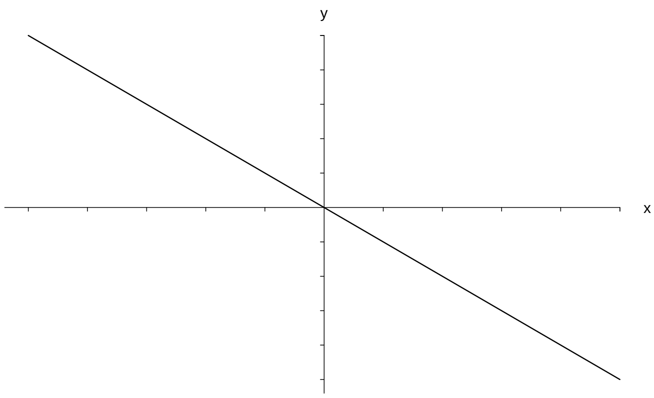
  Die Abbildung zeigt eine monoton wachsende Funktion:



- Eine Funktion kann auch *streng monoton fallend* sein.

$$\text{Für} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt} \quad f(x_1) > f(x_2)\,.$$

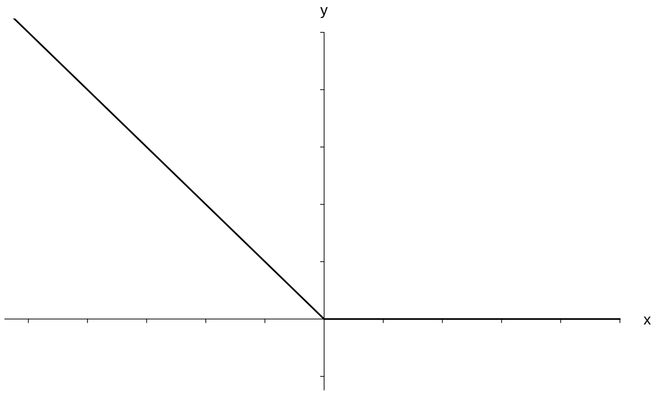
Das Beispiel zeigt die streng monoton fallende Funktion $y = f(x) = -x$:



- Analog heißt eine Funktion *monoton fallend*, wenn auch eine Gleichheit der Funktionswerte zugelassen ist.

$$\text{Für} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt} \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,.$$

Diese Abbildung zeigt eine monoton fallende Funktion:



Hinweis: Die dargestellten Beispiele sind für den gesamten Definitionsbereich monoton. Die Monotonie einer Funktion kann auch auf Intervallen beschrieben werden, wenn eine Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich nicht einer Monotonieart zugeordnet werden kann.

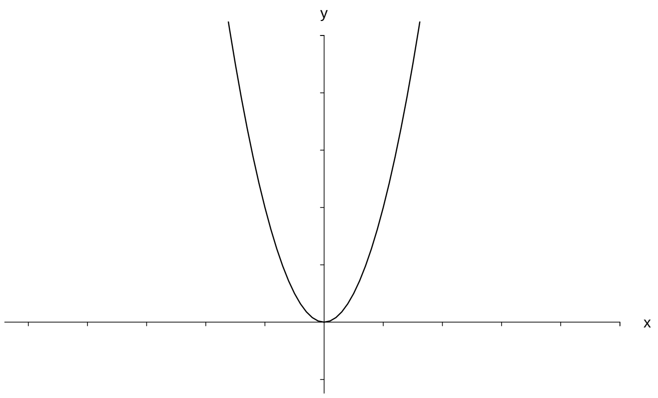
Symmetrie Der Graph einer Funktion kann symmetrisch zu einer Geraden oder symmetrisch zu einem Punkt verlaufen. Man unterscheidet folgende Symmetriearten:

- *Achsensymmetrie:* Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

  $$\text{Für alle} \quad x \in \mathrm{D}_f \quad \text{gilt} \quad f(x) = f(-x)\,.$$

  Die unten abgebildete Funktion ist achsensymmetrisch, da gilt

  $$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

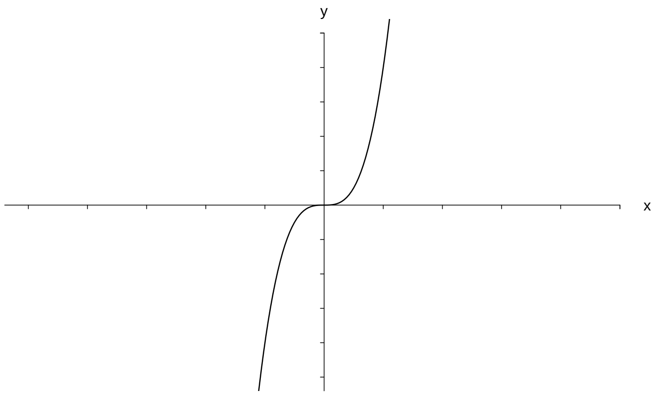
  Hinweis: Es existieren auch noch Achsensymmetrien bezüglich anderer Achsen, jedoch soll auf diese hier nicht weiter eingegangen werden.

- *Punktsymmetrie:* Eine Funktion wird als punktsymmetrisch zum Ursprung bezeichnet, wenn gilt:

  $$\text{Für alle} \quad x \in \mathrm{D}_f \quad \text{gilt} \quad -f(x) = f(-x)\,.$$

  Die Grafik zeigt eine punktsymmetrische Funktion, für die die Bedingung erfüllt ist:

  $$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$



  <u>*Hinweis:*</u> Wiederum existieren auch noch Punktsymmetrien bezüglich anderer Punkte, jedoch soll auf diese hier nicht weiter eingegangen werden.

Periodizität Eine Funktion heißt periodisch, wenn sich die Funktionswerte in regelmäßigen Abständen wiederholen. Mathematisch wird dies durch folgende Formel ausgedrückt:

$$f(x) = f(x + kT) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

T bezeichnet man als Periode. Wichtige periodische Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen, von denen z.B. Sinus und Cosinus eine kleinste Periode von 2π besitzen.

Umkehrbarkeit Funktionen sind umkehrbar, wenn sie für den gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsen oder streng monoton fallend sind. Sollte dieses Kriterium nur für Intervalle des Definitionsbereichs erfüllt sein, so ist die Funktion nur für diese Intervalle umkehrbar. Es existiert die Umkehrfunktion

$$y = f^{-1}(x)$$

Dies darf nicht mit $y = 1/f(x)$ verwechselt werden! Der Definitionsbereich der Funktion entspricht dem Wertebereich der Umkehrfunktion und der Wertebereich der Funktion entspricht dem Definitionsbereich der Umkehrfunktion.

Wenn das Kriterium überprüft wurde, kann die Umkehrfunktion gezeichnet werden, indem man die Funktion an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegelt. Dabei sollte beachtet werden, dass jede Umkehrfunktion pro Intervall eine eigenständige Funktion ist.

Die Umkehrfunktion kann berechnet werden, indem man

1. Die Funktion umstellt, bis die Variable x allein auf einer Seite steht.

2. Anschließend die Variablen formal vertauscht, so dass y durch x ersetzt wird und x durch y.

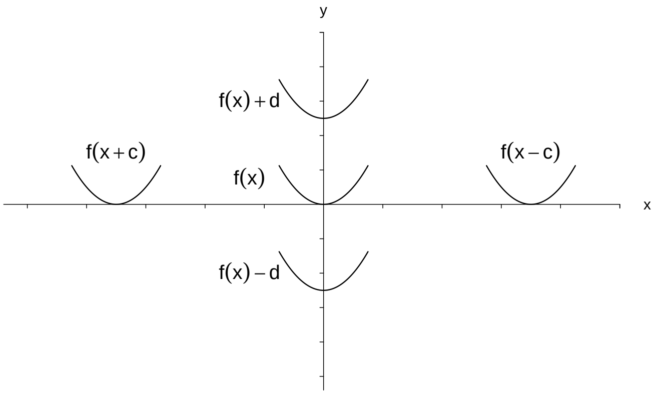
Auch bei der Berechnung der Umkehrfunktion sind die möglichen Intervalle, auf denen die Umkehrfunktionen existieren, zu berücksichtigen. Dies werden wir z.B. im Kapitel 8 üben.

6.1.2 Wirkung von Parametern

In der Technik ist es von Bedeutung zu wissen, wie sich die Parameter a, b, c und d auf Funktionen der Art $y = a \cdot f(b\,x + c) + d$ auswirken. Im folgenden wird auf den Einfluss der einzelnen Parameter eingegangen.

Verschieben durch c und d

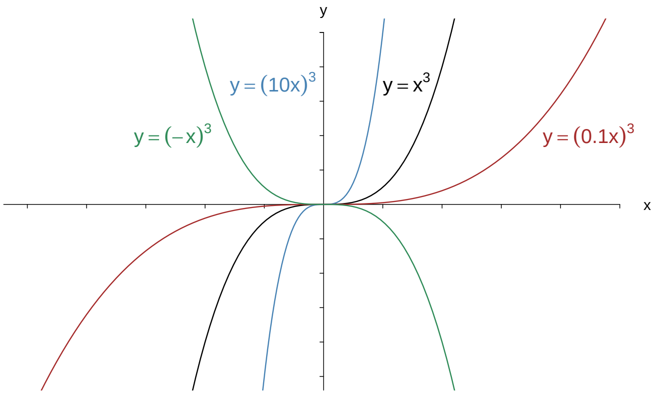
$y = f(x) + d$	Der Graph der Funktion $f(x)$ wird um d nach oben verschoben.
$y = f(x) - d$	Der Graph der Funktion $f(x)$ wird um d nach unten verschoben.
$y = f(x - c)$	Der Graph der Funktion $f(x)$ wird um c nach rechts verschoben.
$y = f(x + c)$	Der Graph der Funktion $f(x)$ wird um c nach links verschoben.



Stauchen, Strecken und Spiegeln durch a und b

$\lvert a\rvert > 1$	Streckung in y-Richtung.
$\lvert a\rvert < 1$	Stauchung in y-Richtung.
$a < 0$	Spiegelung an der x-Achse.
$\lvert b\rvert > 1$	Stauchung in x-Richtung.
$\lvert b\rvert < 1$	Streckung in x-Richtung.
$b < 0$	Spiegelung an der y-Achse.

<u>*Hinweis:*</u> Wenn $b \neq 1$, dann wird in der Funktion $y = f(bx + c)$ der um b gestreckte bzw. gestauchte Funktionsgraph nur um (c/b) verschoben.



7 Lineare Funktionen

7.1 Theorie

7.1.1 Einleitung

Lineare Funktionen sind Polynome ersten Grades bzw. Geraden der Form $y = a_1x + a_0$. Es werden nur zwei Punkte benötigt, um eine lineare Funktion eindeutig zu bestimmen.

Es gibt drei verschiedene Darstellungsformen, dabei ist die Wahl der Formeln ist abhängig von der Aufgabenstellung:

- **Parameterdarstellung**
  Eine Gerade ist definiert durch einen Anstieg und den Punkt, wo sie die y-Achse schneidet, was folgende Formeln ausdrückt:
  $$y = mx + n$$
  mit m als Anstieg und n als y-Achsenabschnitt.
- **Zwei-Punkte-Formel**
  Eine lineare Funktion kann auch durch zwei Punkte $(x_0; y_0)$ und $(x_1; y_1)$ definiert sein, dann gilt die Gleichung
  $$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$
- **Punktrichtungsformel**
  Die Punktrichtungsformel berücksichtigt die Steigung und einen beliebigen Punkt $(x_0; y_0)$. Sie lautet
  $$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Die Steigung einer Geraden kann leicht durch das **Steigungsdreieck** ermittelt werden, was durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = tan\alpha$$

α ist der Steigungswinkel der Geraden.

Die lineare Funktion ist eine besonders einfache und wichtige Funktion, für die folgende (im Kapitel über allgemeine Funktionen bereits vorgestellten) Eigenschaften gelten:

Monotonie:

Ist $m > 0$, handelt es sich um eine streng monoton steigende Funktion.
Für $m < 0$ ist eine lineare Funktion immer streng monoton fallend.

Deswegen sind lineare Funktionen immer **umkehrbar**, da es sich immer um streng monoton wachsende oder streng monoton fallende Funktionen handelt.

Symmetrie:

Eine Gerade kann nur achsensymmetrisch sein, wenn $m = 0$ ist.
Punktsymmetrisch sind lineare Funktionen nur, wenn sie durch den Koordinatenursprung verlaufen, also $n = 0$ ist.

Außerdem sind Geraden **keine periodischen Funktionen**.

7.1.2 Schnittpunkt von Geraden

Wenn zwei Geraden sich schneiden, nennt man den gemeinsamen Punkt Schnittpunkt. In diesem Punkt wird dem x-Wert von beiden linearen Funktionen der gleiche y-Wert zugeordnet:

$$f_1(x) = y = f_2(x)$$

Die Ermittlung des Schnittpunktes erfolgt demnach folgendermaßen:

1. Geradengleichungen gleich setzen
2. Nach x auflösen, um die Schnittstelle zu erhalten
3. Den berechneten x-Wert in eine der zwei Gleichungen einsetzen, um den y-Wert zu bestimmen.

In den vorgerechneten Beispielen dieses Kapitels wird noch die Vorgehensweise an einem konkreten Beispiel erläutert.

7.1.3 Orthogonale Geraden

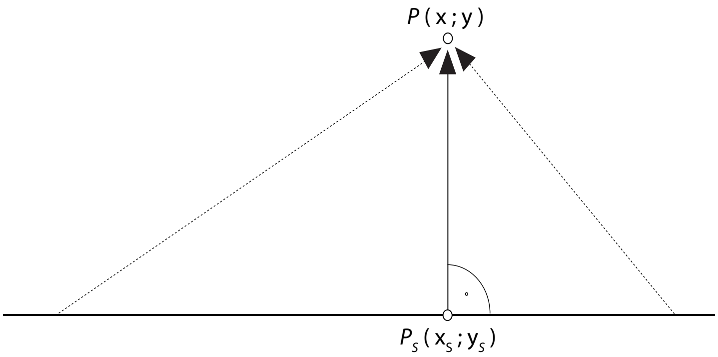
Zwei Geraden nennt man orthogonal, wenn sie sich in einem rechten Winkel schneiden. Für die Steigungen und orthogonaler Geraden gilt

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man Geraden auf Orthogonalität prüfen oder eine orthogonale Gerade zu einer anderen Geraden bestimmen.

7.1.4 Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Mit Abstand bezeichnet man immer den kürzesten Abstand d zwischen einem Punkt P und der Geraden $y = mx + n$. Dieser ist in der Abbildung durchgehend schwarz gekennzeichnet.



Der Punkt P liegt also auf einer orthogonalen Geraden, die bei der Berechnung hilfreich sein wird.

Der Abstand wird wie folgt berechnet:

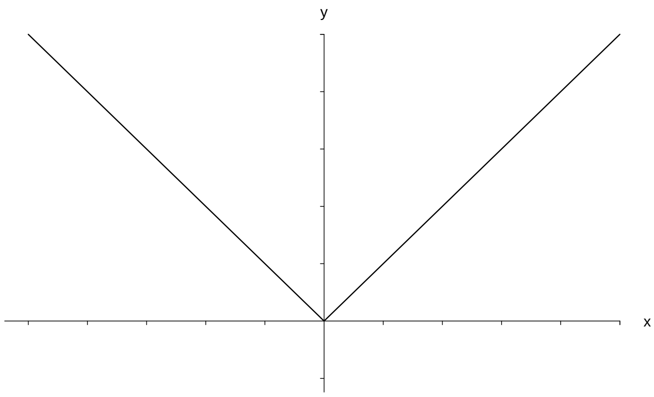
1. Berechnung einer orthogonalen Hilfsgeraden, die durch P verläuft und orthogonal zu der gegebenen Geraden ist. Dies bezeichnet man auch als „Fällen eines Lots“ von Punkt P auf die Gerade.
2. Bestimmung des Schnittpunktes P_S der Geraden und der orthogonalen Hilfsgeraden.
3. Den Abstand d zwischen dem Punkt P und dem Schnittpunkt P_S bzw. die Länge des Lots berechnet man mit der folgenden Formel, die auf dem Satz des Pythagoras basiert:
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

7.1.5 Betragsfunktion

Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ordnet jedem Wert x dessen Absolutbetrag zu. Dieser ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Die Grafik zeigt beispielhaft die Funktion $f(x) = |x|$:



Die Funktion ist für $x \leq 0$ streng monoton fallend und wächst streng monoton für $x \geq 0$. Im Punkt $(0;0)$ nimmt die Betragsfunktion ein Minimum an, ist an dieser Stelle jedoch nicht differenzierbar.

Bitte beachten Sie, dass nicht nur Betragsfunktionen basierend auf linearen Funktionen existieren. Es gibt auch Funktionen, die sich aus Betragsfunktionen zusammensetzen. Beispiele sind $f(x) = |sinx|$, $f(x) = |x^2 - 4|$ oder $f(x) = |\ln x| + 1$. Überlegen Sie sich bitte selbst, was der Betrag im jeweiligen Fall bewirkt.

7.1.6 Lineare Ungleichungen

Ungleichungen verknüpfen Variablen nicht durch das Gleichheitszeichen sondern durch die Zeichen $<$, $\leq$, $>$ und $\geq$; so z.B. die Ungleichung $x + 3 > 4x + 2$. In diesem Fall wäre zu untersuchen, welche Werte für die Variable x aus dieser Ungleichung eine wahre Aussage liefern. Lineare Ungleichungen sind besonders einfach, da nur Fallunterscheidung vorgenommen werden müssen, wenn neben der einen Variablen auch Parameter vorkommen.

Lineare Ungleichungen können zeichnerisch gelöst werden, was anhand der vorgerechneten Beispiele noch näher erläutert wird, oder durch Umstellen. Lineare Ungleichungen müssen nach der Variablen umgestellt werden. Der Lösungsbereich wird mit einer geeigneten Schreibweise für Mengen dargestellt.

Die Sachverhalte dieses Kapitels werden nun an Beispielen noch einmal erläutert.

7.2 Beispiele

Beispiel 7.2.1 Zeichnen Sie die Funktionen und bestimmen Sie die Geradengleichung anhand der gegebenen Angaben

1.) $P_1(4;3)$ $P_2(1;2)$
2.) $P_1(2;0)$ $m=3$
3.) $n=1$ $m=0$

Rechnerische Lösung:
1.) Da zur Aufstellung der Geraden zwei Punkte angegeben sind, bietet es sich an, die Zwei-Punkte-Formel zu verwenden:

$$\frac{y-3}{2-3}=\frac{x-4}{1-4}$$

Diese Formel kann man durch Umstellen leicht in die Parameterform, die für weitere Berechnungen geeigneter ist, überführen:

$$\begin{aligned}\frac{y-3}{-1} &= \frac{x-4}{-3}\\ -3(y-3) &= -1(x-4)\\ -3y+9 &= -x+4\\ -3y &= -x-5\\ y &= \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\end{aligned}$$

2.) Für dieses Beispiel bietet sich die Punktrichtungsformel an:

$$y=3(x-2)+0=3x-6$$

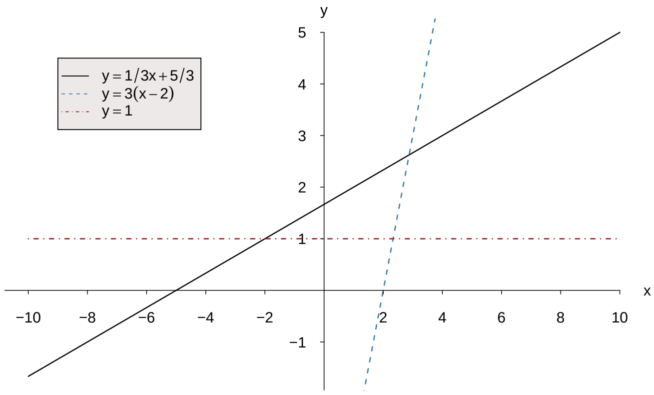
3.) Die Angaben können direkt in die Parameterdarstellung übernommen werden:

$$y=0\cdot x+1=1$$

Grafische Lösung:
1.) Die Gerade lässt sich schnell zeichnen, indem man die zwei gegebenen Punkte einträgt und diese miteinander verbindet.

2.) Die Gerade kann gezeichnet werden, indem man das Wissen über die Parameter aus dem Kapitel über allgemeine Funktionseigenschaften anwendet. Alternativ kann man auch das Steigungsdreieck verwenden.

3.) Hier handelt es sich um eine spezielle Gerade, die parallel zur x-Achse durch $y=1$ verläuft.



Beispiel 7.2.2 Bestimmen Sie den Schnittpunkt zwischen der Geraden aus Beispiel 7.2.1 (1.) und $f(x) = 2x$.

Lösung: Der Schnittpunkt wird durch Gleichsetzen der beiden linearen Funktionen berechnet:

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 2x$$

Nun wird diese Gleichung nach x aufgelöst:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} &= 2x - \frac{1}{3}x \\ \frac{5}{3} &= \frac{6}{3}x - \frac{1}{3}x \\ \frac{5}{3} &= \frac{5}{3}x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Um den y-Wert zu ermitteln, muss der x-Wert des Schnittpunktes in eine der beiden Funktionen eingesetzt werden:

$$y = 2 \cdot 1 = 2$$

Der Schnittpunkt beider Geraden lautet somit $S(1; 2)$.

Beispiel 7.2.3 Berechnen Sie den Abstand der Geraden aus Beispiel 7.2.1 (1.) zu dem Punkt $P(4; 5)$.

Lösung: Um diese Aufgabe zu lösen, wird zunächst der Anstieg der orthogonalen Hilfsgeraden bestimmt:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_H &= -1 \quad \wedge \quad m_1 = \frac{1}{3} \\ m_H &= \frac{-1}{\frac{1}{3}} \\ m_H &= -3 \end{aligned}$$

Da für die Hilfsgerade der Punkt $P(4;5)$ und der Anstieg $m_H = -3$ gegeben sind, kann nun leicht die Punktrichtungsformel angewendet werden:

$$y = -3(x-4) + 5 \, .$$

Für die Berechnung des Schnittpunktes ist die Parameterform besser geeignet. Deshalb sollte man die Gleichung gleich ausmultiplizieren:

$$y = -3x + 12 + 5 = -3x + 17 \, .$$

Anschließend wird der Schnittpunkt beider Geraden (durch Gleichsetzen) bestimmt:

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = -3x + 17 \, .$$

Nun wird nach x aufgelöst:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + 3x &= 17 - \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}x + \frac{9}{3}x &= \frac{51}{3} - \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3}x &= \frac{46}{3} \\ x &= \frac{46}{10} \\ x &= \frac{23}{5} \, . \end{aligned}$$

Der y-Wert des Schnittpunktes wird ermittelt indem man den x-Wert in eine der Geradengleichungen einsetzt:

$$y = -3 \cdot \frac{23}{5} + 17 = \frac{16}{5}\ .$$

Der Schnittpunkt lautet also $S_H(\frac{23}{5}; \frac{16}{5})$.

Es wird nun der Abstand zwischen den Punkten $P(4;5)$ und $S_H\left(\frac{23}{5}; \frac{16}{5}\right)$ mit der oben erläuterten Formel berechnet:

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{\left(4 - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(5 - \frac{16}{5}\right)^2} \\
d &= \sqrt{\left(\frac{20}{5} - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(\frac{25}{5} - \frac{16}{5}\right)} \\
d &= \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} \\
d &= \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{81}{25}} \\
d &= \sqrt{\frac{90}{25}} \\
d &= \frac{\sqrt{90}}{5} \\
d &= \frac{3 \cdot \sqrt{10}}{5}\ .
\end{aligned}$$

Der kürzeste Abstand zwischen dem Punkt $P(4;5)$ und der Geraden beträgt $\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Beispiel 7.2.4 Zeichnen Sie die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}
&\textbf{a)} \quad f(x) = 2(x+1) - 3 \\
&\textbf{b)} \quad f(x) = 3|x-2| - 1
\end{aligned}$$

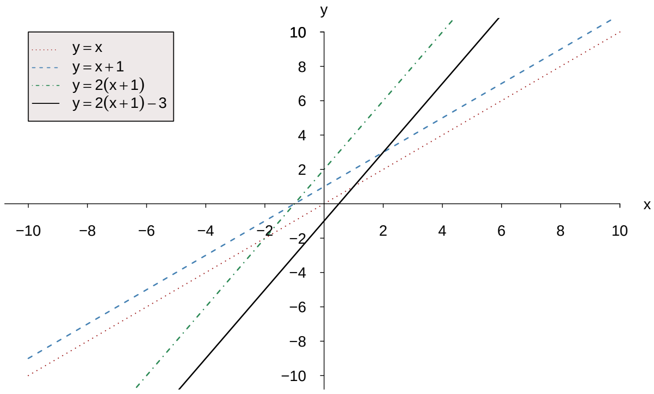
Hinweis: Zeichnen Sie zuerst die Funktion $f(x) = x$ bzw. $f(x) = |x|$ und verschieben, spiegeln und stauchen Sie diese Funktion mit Hilfe der Parameterangaben. Die

Bedeutung der einzelnen Parameter können Sie im Kapitel über die allgemeinen Funktionseigenschaften nachlesen.

Lösung:

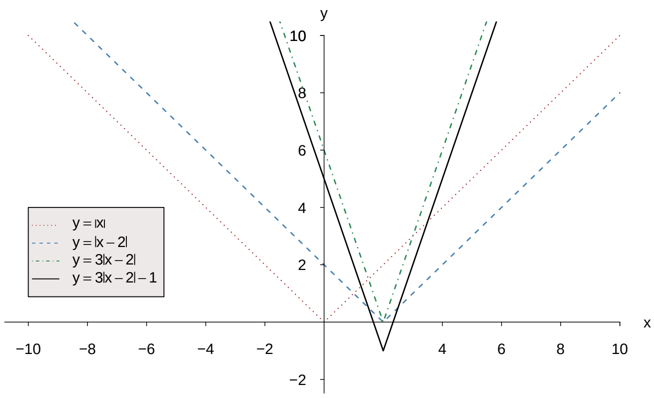
a) Es handelt sich um die lineare Funktion $f(x) = x$, die

- um 1 nach links verschoben wird,
- gestreckt wird in y-Richtung (bzw. deren Steigung sich von $m = 1$ auf $m = 2$ erhöht) und
- um 3 nach unten verschoben wird.



b) Es handelt sich um eine Betragsfunktion, die

- um 2 nach rechts verschoben wird,
- gestreckt wird in y-Richtung und
- um 1 nach unten verschoben wird.



Beispiel 7.2.5 Lösen Sie folgende Ungleichungen und diskutieren Sie deren grafische Bedeutung.

a) $4(x+3)+20 > -17x - 4(2-x)$

b) $ax + 2 < 3x + 4 \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$

Lösung: Beide Aufgaben sollen zunächst rechnerisch, Teil a) anschließend auch grafisch ausgewertet werden.

a) Zuerst wird ausmultipliziert:

$$4x + 12 + 20 > -17x - 8 + 4x$$

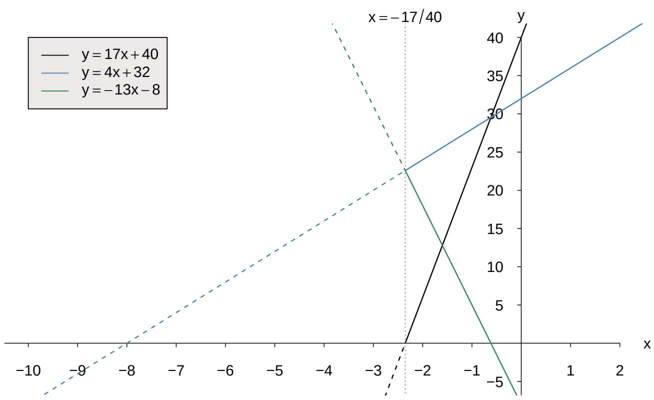
Dann kann die Ungleichung so umgestellt werden, dass x auf einer Seite isoliert ist:

$$\begin{aligned} 4x + 17x - 4x &> -8 - 12 - 20 \\ 17x &> -40 \end{aligned}$$

Nun sollte das Ergebnis noch in Mengenschreibweise formuliert werden:

$$\mathfrak{L} = \left\{ x \mid x > -\frac{40}{17} \right\}$$

Grafisch kann man sich unter der Ungleichung $17x > -40$ bzw. $17x + 40 > 0$ vorstellen, für welche x die Funktion $17x + 40$ positiv ist (schwarz dargestellt). Oder aber man überlegt, ab welcher Stelle x die Funktion $4x + 12 + 20$ größere Funktionswerte annimmt als die Funktion $17x - 8 + 4x$ (farbig dargestellt) :



b) Das besondere an dieser Gleichung ist, dass a unbekannt ist. Deswegen muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

Zunächst wird die Ungleichung wieder nach x umgestellt:

$$\begin{aligned} ax - 3x &< 4 - 2 \\ (a-3)x &< 4 - 2 \end{aligned}$$

Nun muss durch $(a - 3)$ dividiert werden. Dabei ist zu beachten, dass für diesen Schritt $a \neq 3$ sein muss. Wenn $(a-3) > 0$ ist, bleibt das Verhältniszeichen ‚<'. Sollte $(a-3) < 0$ sein, so muss es umgekehrt werden, also wird ‚<' zu ‚>' geändert. Anschließend erfolgt die Unterscheidung der verschiedenen möglichen Fälle:

1. Fall: $a = 3$

$$\begin{aligned} (3-3)\,x &< 2 \\ 0 &< 2 \end{aligned}$$

wahre Aussage

2. Fall: $a - 3 > 0$

$$x < \frac{2}{a-3}$$

3. Fall: $a - 3 < 0$

$$x > \frac{2}{a-3}$$

Zusammenfassen kann man das Ergebnis aller Fälle durch folgende Lösungsmenge:

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} x \mid x < \dfrac{2}{a-3} & \text{für} \quad (a-3) > 0 \\ x \mid x \in \mathbb{R} & \text{für} \quad a = 3 \\ x \mid x > \dfrac{2}{a-3} & \text{für} \quad (a-3) < 0 \end{cases} .$$

7.3 Übungen

Übung 7.3.1 *(5/5/7 Min.)* Berechnen Sie die Geradengleichungen und zeichnen Sie die linearen Funktionen.

a) $m = 2 \quad P(0; 1)$

b) $P_1(0; 1) \quad P_2(0; 4)$

c) Verschieben der Geraden $y = x$ um 2 nach rechts, Spiegelung an der x-Achse. Keine Stauchung bzw. Streckung.

→ *Lösung auf Seite 119*

Übung 7.3.2 *(4/6/8 Min.)*

a) Bestimmen Sie die orthogonale Gerade zur Funktion $y = 4x - 2$, die durch den Punkt $P_1(0; 3)$ verläuft.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden:

$$\begin{aligned} y_1 &= 4x - 2 \\ y_2 &= -\frac{1}{4}x + 3 \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie den Abstand der Punkte $P_1(0; 3)$ und $P_2\left(\frac{20}{17}; \frac{46}{17}\right)$.

→ *Lösung auf Seite 121*

Übung 7.3.3 *(4/8/10 Min.)* Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen und stellen Sie das Problem aus Aufgabe a) grafisch dar.

a) $2x - 1 \leq 3$

b) $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{x-3}{4} > \dfrac{x+4}{2}$

c) $(x - 3)^2 - (x + 2)^2 < 3(2 - x)$

→ *Lösung auf Seite 123*

Übung 7.3.4 *(10/12 Min.)* Berechnen Sie jeweils die Lösungsmenge folgender Ungleichungen. Bitte beachten Sie dabei, dass Fallunterscheidungen notwendig sind.

a) $-ax + 5 \geq -2ax + 10$

b) $(ax + b)^2 - (ax - b)^2 \leq 5$

→ *Lösung auf Seite 125*

7.4 Tests

Test 7.4.1 *(8/8 Min.)*

a) Wie lautet die Geradengleichung, die den Punkt $A(-1;-2)$ besitzt und senkrecht zu der Gerade verläuft, die die Punkte $B(-2{,}3)$ und $C(-5,-6)$ beinhaltet?

b) Wie lautet die Geradengleichung, die durch den Punkt $D(2;-4)$ verläuft und senkrecht zu der Geraden $5x + 3y - 8 = 0$ ist?

$\boxed{1}$	**a)** $y = 3x - 5$	**b)** $y = \frac{5}{3}x - \frac{22}{3}$
$\boxed{2}$	**a)** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$	**b)** $y = \frac{3}{5}x - \frac{26}{5}$
$\boxed{3}$	**a)** $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$	**b)** $y = -\frac{3}{5}x - \frac{14}{5}$

→ *Lösung auf Seite 176*

Test 7.4.2 *(insgesamt 8 Min.)* Gegeben seien zwei Geraden mit:

$$\begin{aligned} 2x - y - 4 &= 0 \\ 6x - 2y &= 10 \end{aligned}$$

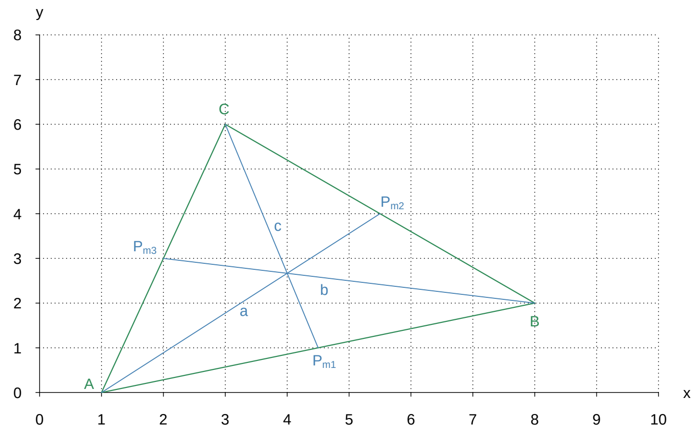
a) Sind die beiden Geraden parallel zueinander?

b) Falls die beiden Geraden nicht parallel sind, so ist der Schnittpunkt zu bestimmen.

1	**a)** Die Geraden sind parallel.	**b)** Es gibt keinen Schnittpunkt.
2	**a)** Die Geraden sind nicht parallel.	**b)** $S\left(\frac{1}{5}; -\frac{18}{5}\right)$
3	**a)** Die Geraden sind nicht parallel.	**b)** $S\,(1; -2)$

→ *Lösung auf Seite 178*

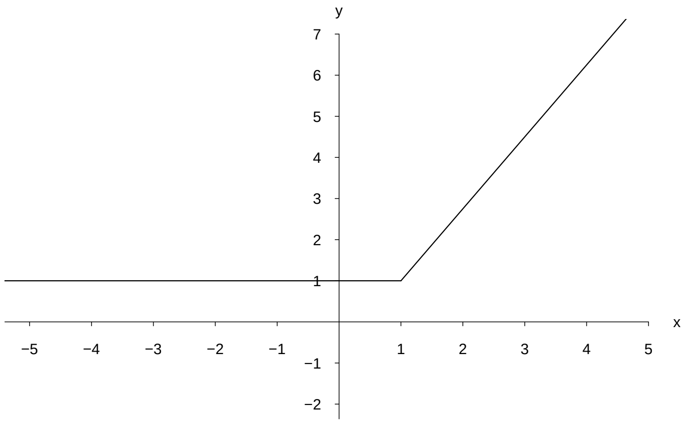
Test 7.4.3 *(12 Min.)* Berechnen Sie die Längen der Seitenhalbierenden a, b und c des folgenden Dreiecks:



1	$\lvert a\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{233}$	$\lvert b\rvert = 5\sqrt{5}$	$\lvert c\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{421}$
2	$\lvert a\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{145}$	$\lvert b\rvert = \sqrt{37}$	$\lvert c\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{109}$
3	$\lvert a\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{85}$	$\lvert b\rvert = \sqrt{74}$	$\lvert c\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{365}$

→ *Lösung auf Seite 179*

Test 7.4.4 *(14 Min.)* Welche der Funktionen gehört zu folgendem Diagramm?



1 $y = |2x - 1|$

2 $y = |x - 1| + x$

3 $y = |x + 1| - x$

→ *Lösung auf Seite 180*

8 Quadratische Funktionen

8.1 Theorie

8.1.1 Scheitelpunktform

Eine quadratische Funktion ist eine Polynomfunktion zweiten Grades der Form

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \; .$$

Die **Scheitelpunktform**

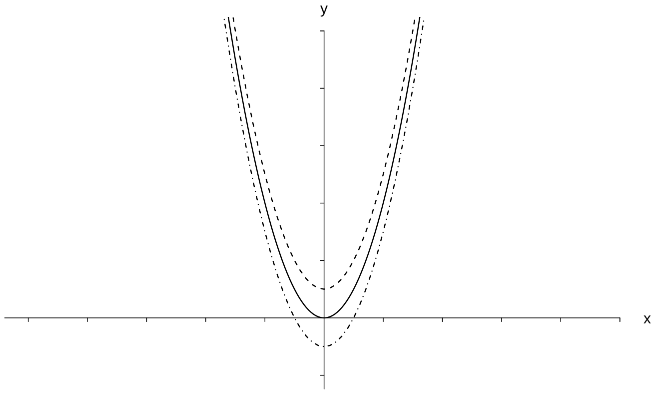
$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

ist eine zweite Darstellungsform, an der der Scheitelpunkt $(x_s; y_s)$ direkt abgelesen werden kann. Anhand dieser Darstellung kann ermittelt werden, wie die Normalparabel $y = x^2$ verschoben und gespiegelt wird, denn der x-Wert des Scheitelpunktes entspricht dem allgemeinen Paramter c und der y-Wert dem Parameter d.

Die erste Form kann durch quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktsform umgewandelt werden. Dazu erzeugt man eine Binomische Formel der Art $x^2 + 2ax + a^2$, um diese dann als Quadrat $(x + a)^2$ zu notieren. Die quadratische Ergänzung und das Verschieben und Spiegeln durch die Parameter werden an den Einführungsbeispielen genauer erläutert und geübt.

8.1.2 Nullstellen

Eine quadratische Funktion kann die x-Achse zweimal, einmal oder gar nicht schneiden, wie die folgende Grafik zeigt.



Um die Nullstellen zu ermitteln muss die quadratische Funktion Null gesetzt werden,

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

da Nullstellen die Schnittpunkte mit der x-Achse sind. Nun muss ermittelt werden, für welche x-Werte die Funktion Null wird.

8.1.3 Lösungen einer quadratischen Gleichung

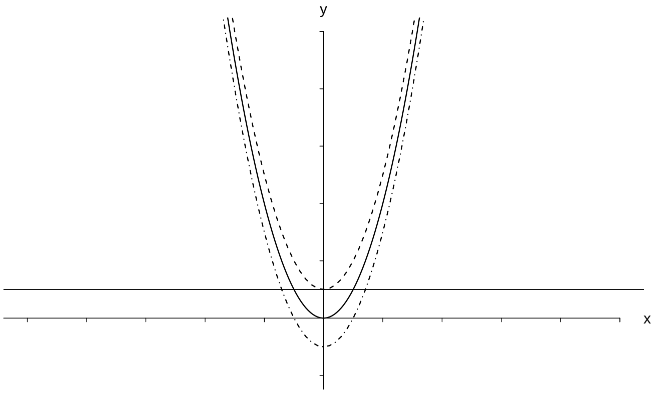
Die Lösungen einer quadratische Gleichung (Nullstellen einer quadratischen Funktion) werden entweder mit der so genannten Mitternachtsformel (auf diese wird hier nicht eingegangen) oder mit der p-q-Formel berechnet. Letztere erfordert die Normalform der quadratischen Gleichung $1x^2 + px + q = 0$, wobei p und q Parameter sind. Die Lösung lautet

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, dann existieren zwei reelle Lösungen x_1 und x_2.
Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, so gibt es eine doppelte reelle Lösung.
Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, dann gibt es keine reelle Lösung.

8.1.4 Schnittpunkt einer Parabel mit einer Geraden

Im Unterschied zu dem Schnittpunkt zweier Geraden kann eine Gerade eine Parabel nicht nur gar nicht oder einmal, sondern sogar zweimal schneiden, wie folgende Grafik zeigt:



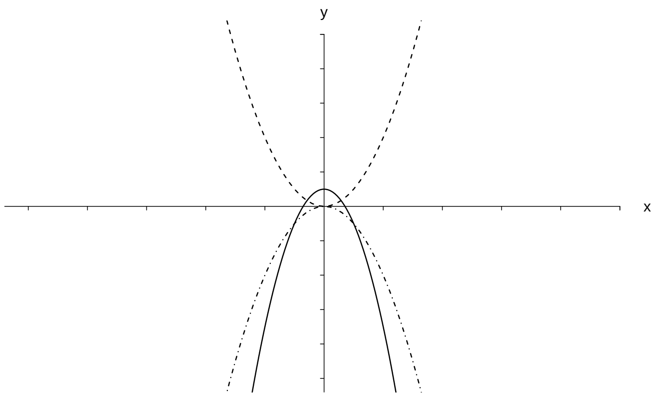
Um die Schnittpunkte zu berechnen, müssen beide Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$m \cdot x + n = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \; .$$

Im Gegensatz zu dem Schnittpunkt zweier Geraden entsteht eine quadratische Gleichung, die zu der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ umgeformt werden kann. Mit Hilfe der p-q-Formel werden die x-Werte ermittelt, die die obere Gleichung erfüllen. Nun müssen die x-Werte in eine der beiden Funktionsgleichungen eingesetzt werden, um die zugehörigen y-Werte zu berechnen.

8.1.5 Schnittpunkt von Parabeln

Auch der Schnittpunkt zweier Parabeln wird ermittelt, indem beide Parabelgleichungen gleichgesetzt werden. Zwei Parabeln können sich ebenfalls in keinem, einem oder zwei Schnittpunkten schneiden.



Die Gleichung wird anschließend nach 0 umgestellt, sodass eine lineare (wenn die quadratischen Terme sich aufheben) oder eine quadratische Gleichung entsteht. Um quadratische Gleichungen zu lösen, kann wieder die p-q-Formel angewendet werden.

8.1.6 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen sind Ungleichungen mit einer Variablen, die im Gegensatz zu den linearen Ungleichungen auch in quadratischer Form vorkommen, wie z.B.

$$x^2 - 5x \leq 2x^2 + 3x - 2 \; .$$

Quadratische Ungleichungen haben nach Umstellung eine der folgenden Formen:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \geq 0 \\ &(2) \qquad a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 > 0 \\ &(3) \qquad a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \leq 0 \\ &(4) \qquad a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 < 0 \; . \end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet dies für Fall (1), dass man eine Parabel $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ gegeben hat und prüft, für welche reellen Zahlen x die Parabel über bzw. auf der x-Achse liegt. Analog dazu sind auch die anderen Fälle auszuwerten.

Zur genauen Ermittlung der Lösungsmenge werden die Nullstellen der Parabel

$$f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

bestimmt. Anschließend wird durch Zeichnen bzw. das Einsetzen von Probewerten ermittelt, wie die Funktion verläuft, um z.B. bestimmen zu können, in welchem Bereich die Funktion z.B. positiv oder gleich 0 ist wie bei der Form (1) gefordert.

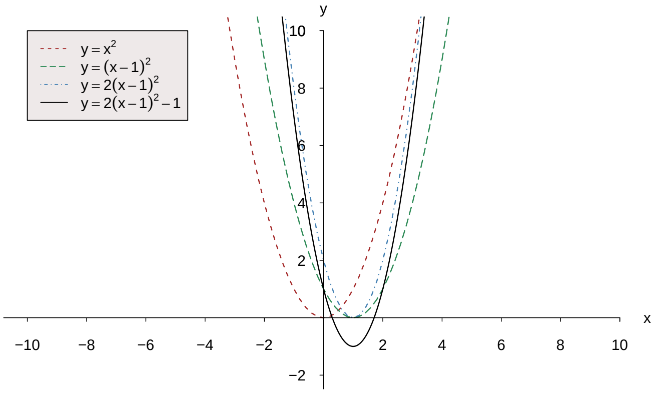
8.2 Beispiele

Beispiel 8.2.1 Zeichnen Sie die folgenden quadratischen Funktionen. Gehen Sie dabei schrittweise vor, indem Sie zunächst die Normalparabel zeichnen und diese anschließend verschieben und strecken bzw. stauchen.

1.) $y = 2(x-1)^2 - 1$
2.) $y = |2x^2 - 2|$

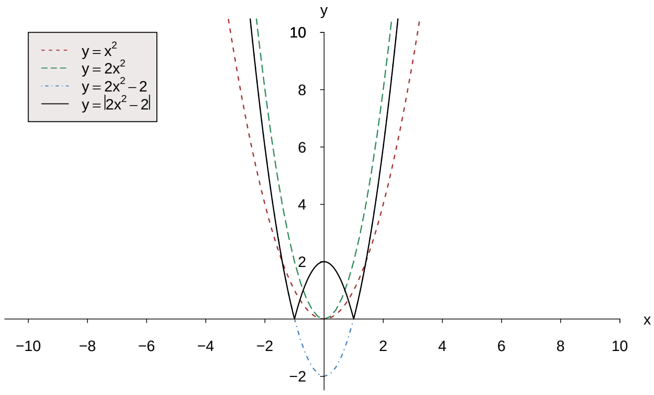
Lösung:

1.) Zeichnen Sie zuerst die Normalparabel $y = x^2$. Verschieben Sie diese um 1 nach rechts. Anhand des Parameters 2 ist ersichtlich, dass die Parabel in y-Richtung gestreckt werden muss. Anschließend wird der Graph um 1 nach unten verschoben.



2.) Zeichnen Sie zuerst die Funktion $y = 2x^2 - 2$, indem Sie die Normalparabel in y-Richtung strecken und um 2 nach unten verschieben. Der Betrag von $2x^2 - 2$ bedeutet geometrisch, dass der Teil der Parabel $2x^2 - 2$, der negativ ist, an der x-Achse gespiegelt wird, denn der Betrag ist definiert durch

$$\left|2x^2 - 2\right| = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{für} \quad 2x^2 - 2 \geq 0 \\ -\left(2x^2 - 2\right) & \text{für} \quad 2x^2 - 2 < 0 \end{cases} .$$



Beispiel 8.2.2 Bringen Sie folgende Funktionsvorschrift durch quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktform und zeichnen Sie diese anschließend.

$$y = 2x^2 + 12x + 24$$

Lösung: Zuerst sollte man 2 ausklammern:

$$y = 2\left(x^2 + 6x + 12\right) \; .$$

Auf der rechten Seite steht nun schon fast eine quadratische Formel, welche jedoch 9 als Absolutglied haben müsste. Deswegen wird die 12 als $9 + 3 = 3^2 + 3$ notiert:

$$y = 2\left(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 + 3\right) \; .$$

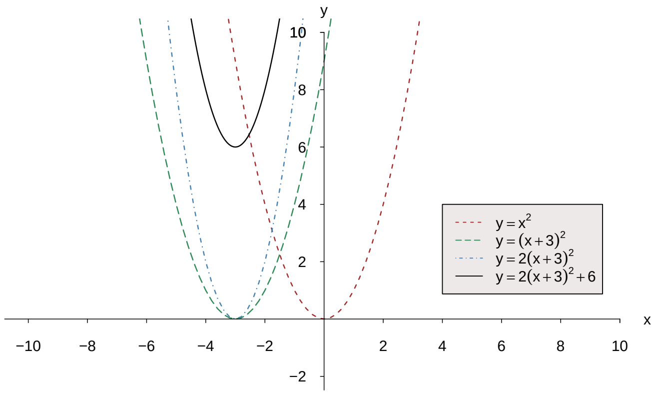
Auf der rechten Seite der Gleichung ist eine binomische Formel entstanden:

$$y = 2\left((x + 3)^2 + 3\right) \; .$$

Die Lösung lautet:

$$y = 2(x + 3)^2 + 6 \, .$$

Es handelt sich um eine Normalparabel, die um 3 nach links verschoben, in y-Richtung gestreckt und um 6 nach oben verschoben wird.



Beispiel 8.2.3 Gegeben sei die Parabel aus Beispiel 8.2.2:

$$y = 2x^2 + 12x + 24 \; .$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktion mit der Parabel $x^2 - 10x + 47$ mit Hilfe der p-q-Formel.

Lösung:

a) Setzen Sie die Funktion gleich 0:

$$2x^2 + 12x + 24 = 0 \; .$$

Stellen Sie die Gleichung nun so um, dass die p-q-Formel angewendet werden kann. Dividieren Sie dafür durch 2:

$$x^2 + 6x + 12 = 0$$

Wenden Sie nun die p-q-Formel an:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 12} \\ &= -3 \pm \sqrt{9 - 12} \\ &= -3 \pm \sqrt{-3} \; . \end{aligned}$$

Da unter der Wurzel eine negative Zahl steht, hat diese Funktion keine reellen Nullstellen.

Dieses Ergebnis war bereits an der Zeichnung aus Beispiel 8.2.2 zu erkennen.

b) Setzen Sie zunächst beide Funktionsvorschriften gleich:

$$2x^2 + 12x + 24 = x^2 - 10x + 47 \ .$$

Nun muss die Gleichung so umgeformt werden, dass die p-q-Formel angewendet werden kann:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x^2 + 12x + 10x + 24 - 47 &= 0 \\ x^2 + 22x - 23 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Lösen Sie die Gleichung nun mit Hilfe der p-q-Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{22}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{22}{2}\right)^2 + 23} \\ &= -11 \pm \sqrt{121 + 23} \\ &= -11 \pm \sqrt{144} \\ &= -11 \pm 12 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_2 = -23 \ .$$

Um die Schnittpunkte zu berechnen, müssen noch die y-Werte ermittelt werden:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 24 = 38 \\ f(-23) &= 2 \cdot (-23)^2 + 12 \cdot (-23) + 24 = 806 \ . \end{aligned}$$

Die Parabeln schneiden sich in den Punkten $P_1(1; 38)$ und $P_2(-23; 806)$.

Beispiel 8.2.4 Lösen Sie folgende quadratische Ungleichung durch Einsetzen eines Probewertes nach Ermittlung der Nullstellen:

$$x^2 - 10x \geq 510 - 23x \ .$$

Lösung: Zuerst muss die Ungleichung umgestellt werden:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 23x - 510 &\geq 0 \\ x^2 + 13x - 510 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nun können die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + 13x - 510$ berechnet werden. Dafür wird die p-q-Formel angewendet:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + 510} \\ &= -6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 + 510} \\ &= -6{,}5 \pm \sqrt{552{,}25} \\ &= -6{,}5 \pm 23{,}5 \\ x_1 = 17 & \qquad x_2 = -30 \; . \end{aligned}$$

Es muss überprüft werden, ob die Funktion zwischen den Nullstellen oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft, um zu identifizieren, wo die Funktion Werte größer Null annimmt. Dazu reicht es, einen Wert zwischen -30 und 17 in die Funktion einzusetzen:

$$f(0) = 0^2 + 13 \cdot 0 - 510 = -510 \; .$$

Die Funktion verläuft zwischen den Nullstellen unterhalb der x-Achse. Also ist die Funktion links von der linken Nullstelle (-30) und rechts von der rechten Nullstelle (17) größer oder gleich Null:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (-\infty, -30] \cup [17, +\infty) \qquad \text{bzw.} \\ \mathfrak{L} &= \{x \mid x \leq -30 \;\vee\; x \geq 17\} \; . \end{aligned}$$

Bei der Darstellung der Lösungsmenge ist darauf zu achten, dass die Nullstellen eingeschlossen sind, da die Funktion größer oder gleich Null sein soll.

Beispiel 8.2.5 Lösen Sie die folgende Ungleichung durch Zeichnen nach Ermittlung der Nullstellen:

$$x(x + 7) < 5(x + 1{,}6) \; .$$

Lösung: Stellen Sie die Ungleichung zuerst um.

$$\begin{aligned} x^2+7x &< 5x+8 \\ x^2+7x-5x-8 &< 0 \\ x^2+2x-8 &< 0\,. \end{aligned}$$

Anschließend müssen die Nullstellen ermittelt werden;

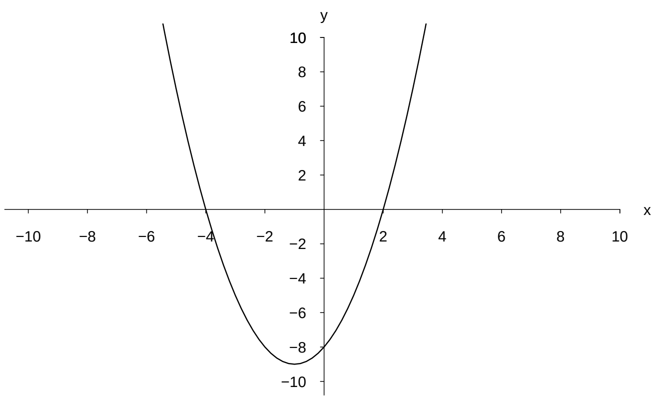
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+8} \\ &= -1 \pm \sqrt{9} \\ &= -1 \pm 3 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_2 = -4\,.$$

Zur Überprüfung des Funktionsverlaufs soll diese gezeichnet werden. Dazu wird die Funktion in die Scheitelpunktform umgewandelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2-9 \\ f(x) &= (x+1)^2-9\,. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine Normalparabel, die um 1 nach links und um 9 nach unten verschoben wird.



Da diese Parabel nach oben geöffnet ist, nimmt sie zwischen den Nullstellen negative Werte an. Die Lösungsmenge lautet somit

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= (-4{,}2) \quad bzw. \\ \mathfrak{L} &= \{x \,|\, x \in (-4{,}2)\}\ .\end{aligned}$$

In diesem Fall gehören die Nullstellen nicht zur Lösungsmenge.

Beispiel 8.2.6 Lösen Sie folgende quadratrische Gleichung:

$$x^2 - \left(1 + \frac{1-2p}{p}\right) x - \frac{1}{p} = 0\ .$$

Lösung: Bevor Sie die p-q-Formel anwenden, sollten Sie den Ausdruck als Bruch schreiben:

$$\begin{aligned}x^2 - \left(\frac{p}{p} + \frac{1-2p}{p}\right) x - \frac{1}{p} &= 0 \\ x^2 - \left(\frac{p+1-2p}{p}\right) x - \frac{1}{p} &= 0 \\ x^2 - \left(\frac{1-p}{p}\right) x - \frac{1}{p} &= 0\ .\end{aligned}$$

Nun kann die p-q-Formel angewendet werden:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{1-p}{2p} \pm \sqrt{\left(\frac{1-p}{2p}\right)^2 + \frac{1}{p}} \\ &= \frac{1-p}{2p} \pm \sqrt{\frac{(1-p)^2}{4p^2} + \frac{1}{p}}\ .\end{aligned}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel sollte vereinfacht werden. Dafür werden die Brüche gleichnamig gemacht:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{1-p}{2p} \pm \sqrt{\frac{(1-p)^2}{4p^2} + \frac{4p}{4p^2}} \\
&= \frac{1-p}{2p} \pm \sqrt{\frac{1-2p+p^2+4p}{4p^2}} \\
&= \frac{1-p}{2p} \pm \sqrt{\frac{1+2p+p^2}{4p^2}} \\
&= \frac{1-p}{2p} \pm \sqrt{\frac{(1+p)^2}{4p^2}} \\
&= \frac{1-p}{2p} \pm \frac{1+p}{2p}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1-p}{2p} + \frac{1+p}{2p} \\
&= \frac{1-p+1+p}{2p} = \frac{2}{2p} \\
x_1 &= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1-p}{2p} - \frac{1+p}{2p} \\
&= \frac{1-p-1-p}{2p} = -\frac{2p}{2p} \\
x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Nun sollten Sie noch eine Probe durchführen:

$$x_1 = \frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{p}\right)^2 - \left(1 + \frac{1-2p}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{p} &= 0 \\
\frac{1}{p^2} - \left(\frac{1-p}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{p} &= 0 \\
\frac{1}{p^2} - \frac{1-p}{p^2} - \frac{1}{p} &= 0 \\
\frac{1}{p^2} - \frac{1-p}{p^2} - \frac{p}{p^2} &= 0 \\
\frac{1-1+p-p}{p^2} &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_2 = -1$$

$$\begin{aligned}
(-1)^2 - \left(1 + \frac{1-2p}{p}\right) \cdot (-1) - \frac{1}{p} &= 0 \\
1 + \frac{1-p}{p} - \frac{1}{p} &= 0 \\
\frac{p}{p} + \frac{1-p}{p} - \frac{1}{p} &= 0 \\
\frac{p+1-p-1}{p} &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Somit ist die Lösung

$$\mathfrak{L} = \left\{ \left(\frac{1}{p}\right) \ ; \ -1 \right\} \ .$$

8.3 Übungen

Übung 8.3.1 *(3/5/7/8 Min.)* Zeichnen Sie die folgenden Parabeln, indem Sie schrittweise die Normalparabel verschieben, stauchen oder strecken.

a) $y = -(x-1)^2 + 1$
b) $y = |-(x+1)^2| + 2$
c) $y = x^2 + 14x + 52$
d) $y = 5x^2 - 30x + 2$.

→ *Lösung auf Seite 127*

Übung 8.3.2 *(5/2/10 Min.)* Berechnen Sie die Nullstellen folgender quadratischer Funktionen.

a) $f(x) = 5x^2 - 10x + 5$
b) $f(x) = (x+5) \cdot (x-2)$
c) $f(x) = ax^2 - (a^2m - m)\,x - am^2 \quad$ für $a \neq 0;\; a,m \in \mathbb{R}$

→ *Lösung auf Seite 132*

Übung 8.3.3 *(4/6/8 Min.)* Gegeben sei die Parabel

$$y = 4x^2 + 10x - 3\ .$$

Berechnen Sie die Schnittpunkte mit

a) der Geraden $y = 5x + 2$
b) der Parabel $y = x^2 + x + 3$
c) der Parabel $y = 3x^2 + (10-2a)x - 2 + 2a$

→ *Lösung auf Seite 135*

Übung 8.3.4 *(8/10/10 Min.)*

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender quadratischer Ungleichungen

a) $x^2 + 3x - 2 < -2x^2 - 3x + 7$
indem Sie die Funktion nach der Nullstellenermittlung zeichnen.

b) $x \cdot \left(\frac{x+2}{5}\right) - \frac{x+3}{15} > \frac{x+5}{3}$
durch Einsetzen eines Probewertes nach Ermittlung der Nullstellen.

c) $(2x + 8)(2x - 8) < 4x$
durch ein selbstgewähltes Verfahren.

→ *Lösung auf Seite 140*

8.4 Tests

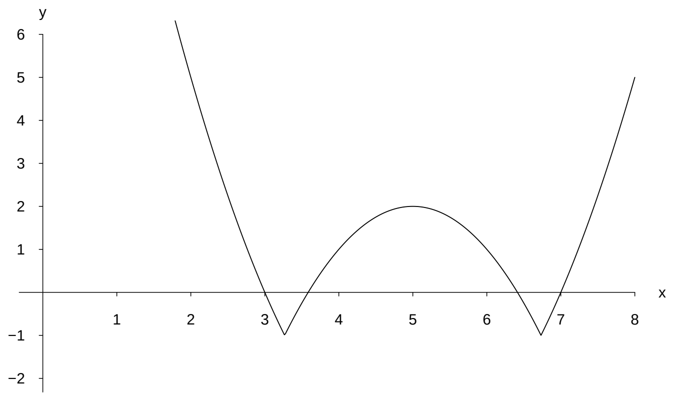
Test 8.4.1 *(6 Min.)* Formen Sie die folgende Funktionsgleichung in die Form $y = a(x + b)^n + c$ um. Bestimmen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Funktionsverlauf in der Umgebung des Scheitels.

$$y = -x^2 + 6x - 8$$

1	$y = -(x + 6)^2 - 8$	Keine Nullstellen	
2	$y = -(x - 3)^2 + 1$	$x_{01} = 2$	$x_{02} = 4$
3	$y = -(x + 3)^2 + 1$	$x_{01} = -2$	$x_{02} = -4$

→ *Lösung auf Seite 182*

Test 8.4.2 *(8 Min.)* Gegeben ist das folgende Bild einer Funktion, die aus der Normalparabel erzeugt wurde. Welche Funktion gehört zu diesem Diagramm?



$\boxed{1}$ $y = (x-5)^2 - 1$

$\boxed{2}$ $y = |(x-5)^2 - 3| + 1$

$\boxed{3}$ $y = |(x-5)^2 - 3| - 1$

→ *Lösung auf Seite 184*

Test 8.4.3 *(12 Min.)* Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsungleichung

$$-x^2 + 3x + 8 \leq |x-1| + x$$

$\boxed{1}$ $\mathbf{L} = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right)$

$\boxed{2}$ $\mathbf{L} = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right)$

$\boxed{3}$ $\mathbf{L} = \left[\frac{3-\sqrt{37}}{2}, \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right]$

→ *Lösung auf Seite 186*

Test 8.4.4 *(12 Min.)* Welche der angegebenen Optionen sind die Lösungen der folgenden Gleichung?

$$x^2 - \frac{2a \cdot (a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \cdot x + \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 - b^2} = 0$$

$\boxed{1}$ $x_1 = \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ $\qquad$ $x_2 = a + b$

$\boxed{2}$ $x_1 = a + \sqrt{a^2 - a + b}$ $\qquad$ $x_2 = a - \sqrt{a^2 - a + b}$

$\boxed{3}$ $x_1 = \dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

→ *Lösung auf Seite 188*

9 Potenz- und Wurzelfunktionen, Wurzelgleichungen

9.1 Theorie

9.1.1 Potenzfunktionen

Eine Funktion der Form

$$f(x) = x^n \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \quad \text{und } n \in \mathbb{N}$$

heißt eine Potenzfunktion vom Grade n. Der Definitionsbereich ist der Bereich der reellen Zahlen. Der Funktionsgraph stellt die Parabel n-ter Ordnung dar.

Eigenschaften der Potenzfunktion $f(x) = x^n$:

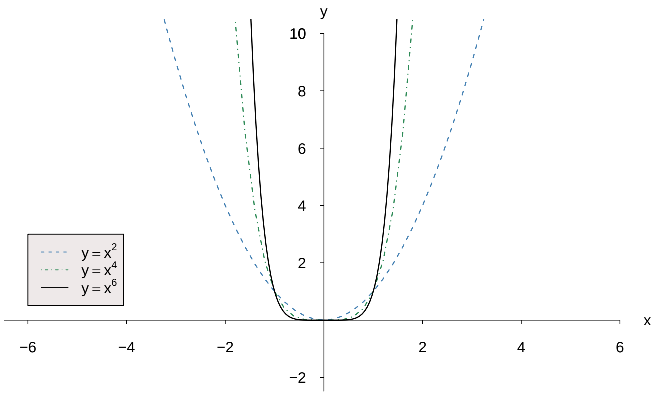
(I) n ist eine gerade Zahl ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$)

- Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. Funktion ist gerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

  $$f(x) = f(-x)$$

  .
- $(0;0)$, $(-1;1)$ und $(1;1)$ gehören zu dem Graphen.
- Die Funktion ist für $x \in (-\infty;0)$ streng monoton fallend und für $x \in (0;\infty)$ streng monoton wachsend.
- Der Wertebereich der Funktion ist $W \in [0;\infty)$

Beispiele:



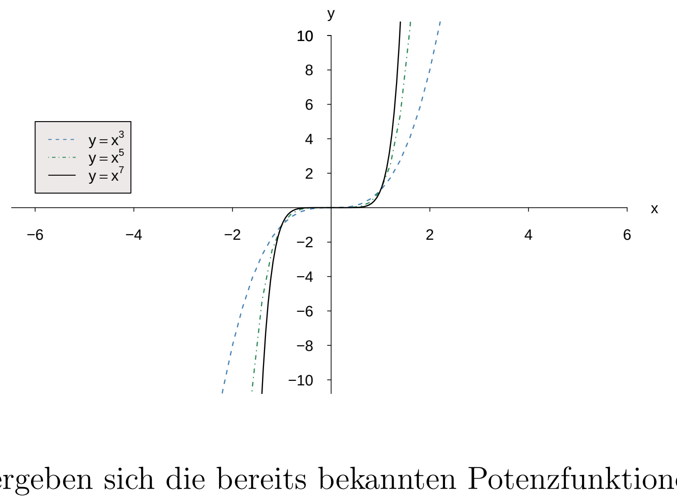
(II) n ist eine ungerade Zahl ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$)

- Der Graph der Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, d.h. Funktion ist ungerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = -f(-x).$$

- $(0; 0)$, $(-1; -1)$ und $(1; 1)$ gehören zu dem Graphen.
- Die Funktion ist für $x \in \mathbb{R}$ streng monoton steigend.
- Der Wertebereich ist $W \in (-\infty; \infty)$

Beispiele:



Für $n = 0$ und $n = 1$ ergeben sich die bereits bekannten Potenzfunktionen

$$f(x) = x^0 = 1 \quad \text{(konstante Funktion)}, \; f(x) = x^1 = x \quad \text{(lineare Funktion)}$$

Die Potenzfunktion der Form

$$f(x) = x^{-n} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, (x \neq 0) \quad \text{und } n \in \mathbb{N}$$

nennt man Hyperbelfunktion vom Grade n, der Graph ist eine Hyperbel n-ter Ordnung. Der Definitionsbereich umfasst alle reellen Zahlen außer 0.

Eigenschaften der Hyperbelfunktion $f(x) = x^{-n}$:

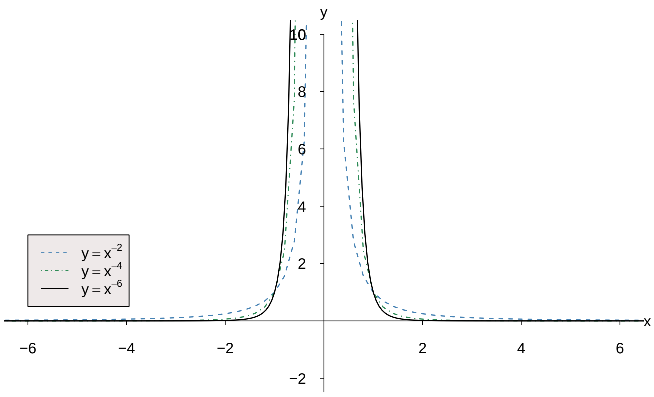
(I) n ist eine gerade Zahl ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$)

- Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. Funktion ist gerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = f(-x).$$

- Der Graph besteht aus zwei Hyperbel-Ästen und schmiegt sich an die positive y-Achse und an die x-Achse.
- $(-1; 1)$ und $(1; 1)$ gehören zu dem Graphen.
- Die Funktion ist für $x \in (-\infty; 0)$ streng monoton wachsend und für $x \in (0; \infty)$ streng monoton fallend. (Zwei monotone Hyperbeläste)
- Der Wertebereich ist $W \in \mathbb{R}^+$

Beispiele:



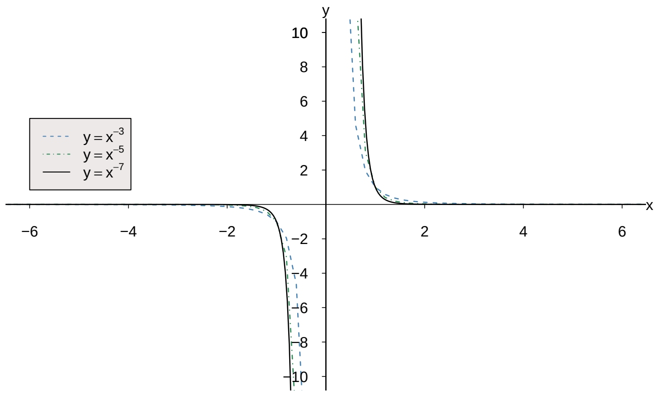
(II) n ist eine ungerade Zahl ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$)

- Der Graph der Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, d.h. Funktion ist ungerade. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = -f(-x).$$

- Der Graph besteht aus zwei Hyperbel-Ästen, die sich jeweils an die positiven und negativen Achsen anschmiegen.
- $(-1;-1)$ und $(1;1)$ gehören zu dem Graphen.
- Die Funktion ist sowohl für $x \in (-\infty;0)$ als auch für $x \in (0;\infty)$ streng monoton fallend. (Zwei monotone Hyperbeläste)
- Der Wertebereich ist $W \in \mathbb{R}_0$.

Beispiele:



9.1.2 Wurzelfunktionen

Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion ist die Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$$

Der Definitionsbereich ist

für gerade n:	$D \in [0;\infty)$ bzw.
für ungerade n:	$D \in \mathbb{R}$.

Wie schon aus dem Abschnitt über die Umkehrfunktion bekannt ist, spielt für die Umkehrbarkeit einer Funktion die Monotonie eine wichtige Rolle. Ein Hindernis der Umkehrbarkeit der Potenzfunktion ist der Monotoniewechsel bei den geraden Potenzfunktionen. Also muss man den Definitionsbereich geeignet einschränken, damit man eine Umkehrfunktion bilden kann. Bei den ungeraden Potenzfunktionen treten solche Probleme nicht auf, weil diese Funktionen auf gesamten Definitionsbereich monoton steigend sind.

Eine Wurzelfunktion ist eine Potenzfunktion mit einem rationalem Exponenten, denn es gilt

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

9.1.3 Wurzelgleichungen

Gleichungen, bei denen im Radikanden einer Wurzel eine Variable auftritt, nennt man Wurzelgleichungen. Der Umgang mit Wurzelgleichungen wird am besten an den nachfolgenden Beispielen deutlich, in denen die Lösung solcher Gleichungen ausführlich erklärt wird.

Zu beachten ist, dass Wurzelausdrücke in $\mathbb{R}$ nur für nicht-negative Radikanten erklärt sind. Deshalb muss man immer den entsprechenden Definitionsbereich vor der Bestimmung der Lösungsmenge untersuchen.

9.2 Beispiele

Beispiel 9.2.1 Gesucht ist die Umkehrfunktion für die Funktion

$$f(x) = x^2 - 1, \quad x \geq 0$$

Bestimmen Sie anschließend den Definitionsbereich der Umkehrfunktion!

Lösung: Zuerst muss die Funktionsgleichung nach x umgestellt werden:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 1 \\ y + 1 &= x^2 \\ \pm\sqrt{y+1} &= x \end{aligned}$$

Gesucht ist nur $+\sqrt{y+1}$ wegen $x \geq 0$. Anschließend werden formal die Variablen vertauscht:

$$y = \sqrt{x+1}$$

Somit ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$$

Nun muss noch der Definitionsbereich ermittelt werden. Für $\sqrt{x+1}$ muss $x + 1 \geq 0$ gelten, weil der Radikand $x+1$ nicht negativ sein darf (damit der Wert der Wurzel reell bleibt).

$$\begin{aligned} x+1 &\geq 0 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich ist somit

$$D = [-1; \infty) \ .$$

Beispiel 9.2.2 Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x+5} - 4 = 1 \ .$$

Lösung: Zuerst muss der Definitionsbereich bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x \in [-5; \infty) \ .$$

Jetzt können wir die Gleichung lösen. Durch Quadrieren kann die Wurzel verschwinden. In diesem Beispiel ist es aber nicht sehr sinnvoll, die Gleichung in der ursprünglichen Form zu quadrieren, weil sonst auf der linken Gleichungsseite die 2. Binomische Formel entsteht. Also muss die Gleichung umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} - 4 &= 1 \\ \sqrt{x+5} &= 5 \ . \end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung leicht quadriert werden:

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = 5^2 \ .$$

Durch Anwendung der Potenzgesetze ($(\sqrt{a})^2 = a$) erhält man

$$\begin{aligned} x+5 &= 25 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Nun erfolgt eine Überprüfung, ob das Ergebnis auch Teil des Definitionsbereiches der Funktion ist. Dies trifft für dieses Beispiel zu:

$$20 \in [-5; \infty)$$

Zuletzt setzen wir den gefundenen Wert zur Probe in die Ausgangsgleichung ein:

$$\begin{aligned} \sqrt{20+5} - 4 &= 1 \\ \sqrt{25} - 4 &= 1 \\ 5 - 4 &= 1 \\ 1 &= 1 \qquad \text{wahre Aussage} \ . \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet somit

$$\mathfrak{L} = \{20\} \ .$$

Hinweis: Die gefundenen Lösungen müssen immer kontrolliert werden, da Quadrieren (und Potenzieren mit einem geraden Exponenten allgemein) keine Äquivalenzumformung ist! (d.h. wenn aus der Gleichheit $a = b$ die Gleichheit $a^2 = b^2$ folgt, gilt dies nicht in umgekehrter Richtung!)

Beispiel 9.2.3 Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{7x+8} = 4 + \sqrt{7x-24} \ .$$

Lösung: Zunächst erfolgt die Bestimmung des Definitionsbereiches. Dabei muss gelten

$$7x + 8 \geq 0 \qquad \text{und} \qquad 7x - 24 \geq 0 \ .$$

Löst man beide Ungleichungen nach x auf, so erhält man

$$x \geq -\frac{8}{7} \qquad \text{und} \qquad x \geq \frac{24}{7} \ .$$

Daraus folgt für den Definitionsbereich

$$D = \left\{ x \mid x \geq \frac{24}{7} \right\} \ .$$

Nun wird die in der Aufgabe gegebene Gleichung gelöst. In diesem Beispiel können wir keine weitere Vereinfachungen vornehmen, also quadrieren wir auf beiden Seiten (Vorsicht: auf der rechten Gleichungsseite entsteht 1. Binomische Formel!).

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{7x+8}\right)^2 &= \left(4+\sqrt{7x-24}\right)^2\\ 7x+8 &= 16+8\sqrt{7x-24}+(7x-24)\\ 16 &= 8\sqrt{7x-24}\end{aligned}$$

Nun wird die Gleichung noch einmal quadriert, um die Wurzel zu beseitigen:

$$\begin{aligned}16^2 &= \left(8\sqrt{7x-24}\right)^2\\ 256 &= 64(7x-24)\\ 4 &= 7x-24\\ 28 &= 7x\\ x &= 4\end{aligned}$$

Schließlich wird noch eine Probe durchgeführt:

$$\begin{aligned}\sqrt{7\cdot 4+8} &= 4+\sqrt{7\cdot 4-24}\\ 6 &= 4+2\\ 6 &= 6 \qquad \text{wahre Aussage}\ .\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet somit

$$\mathfrak{L}=\{4\}\ .$$

9.3 Übungen

Übung 9.3.1 *(10 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}\ .$$

→ *Lösung auf Seite 144*

Übung 9.3.2 *(10 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$5\sqrt{3x+4}-3\sqrt{2x-5}=4\sqrt{3x-5}\ .$$

→ *Lösung auf Seite 145*

Übung 9.3.3 *(10 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x+5a^2} = 4a - \sqrt{x-3a^2}\ .$$

→ *Lösung auf Seite 146*

Übung 9.3.4 *(10 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x-4ab} + \sqrt{9x+4ab} = 4\sqrt{x-ab}, \quad ab > 0\ .$$

→ *Lösung auf Seite 147*

9.4 Tests

Test 9.4.1 *(6 Min.)* Welcher x-Wert ist die Lösung der folgenden Gleichung und wie lautet der Definitionsbereich dieser Gleichung?

$$\sqrt[4]{2x-8} + 5 = 7$$

1 $x = 6$, $x \geq 4$
2 $x = 8$, $x \geq 4$
3 $x = 12$, $x \geq 4$

→ *Lösung auf Seite 190*

Test 9.4.2 *(10 Min.)*

Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = y_1$ und $f_2(x) = y_2$. Finden Sie den (bzw. die) Schnittpunkt(e) der beiden Funktionen.

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{x^2+3} - 1 \\ y_2 &= \sqrt{x^2+2x-10} \end{aligned}$$

1 $x = 6$ **2** $x = 7$ **3** $x = \frac{23}{7}$

→ *Lösung auf Seite 191*

Test 9.4.3 *(12 Min.)* Wie lautet die Umkehrfunktion der folgenden Funktion?

$$y = f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$$

1 $y = (x^3 - 1)^2$
2 $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{y}}$
3 $y = (x^2 - 1)^3$

→ *Lösung auf Seite 192*

Test 9.4.4 *(12 Min.)* Wie lautet die Lösung der folgenden Gleichung?

$$\frac{1}{\sqrt{x^4 - 18x^2 + 81}} = \frac{x + 2}{(x - 3)\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$$

1 $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

2 $x_1 = -2 \qquad x_2 = -3$

3 Ich komme bei dieser Aufgabe nicht weiter!

→ *Lösung auf Seite 192*

10 Exponential- und Logarithmusfunktionen und -gleichungen

10.1 Theorie

10.1.1 Exponentialfunktionen

Eine Funktion der Form

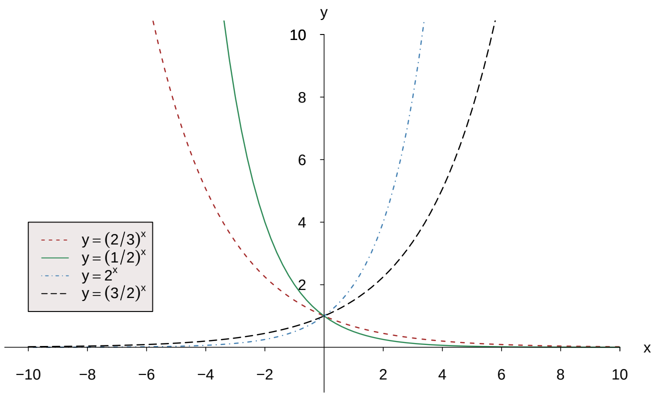
$$f(x) = a^x \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+$$

heißt Exponentialfunktion zur Basis a.

Grundlegende Eigenschaften sind:

- Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion ist $D(f) = \mathbb{R}$.
- Der Wertebereich ist $W(f) = \mathbb{R}^+$.
- Für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton steigend, für $0 < a < 1$ ist die Funktion streng monoton fallend. Alle Graphen enthalten den Punkt $(0; 1)$, denn es gilt $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$.

Beispiel:



Ein Spezialfall der Exponentialfunktion ist die e-Funktion

$$f(x) = e^x \ .$$

In der Literatur wird die e-Funktion auch oft dargestellt durch

$$f(x) = e^x = \exp(x) \; .$$

Die Zahl e heißt Eulerzahl mit $e = 2{,}718281828\ldots$ und hat in der Mathematik, Technik und Informatik eine große Bedeutung. Das Besondere an der e-Funktion ist, dass das Verhältnis aus der Kurvensteigung und dem Funktionswert an jeder Stelle konstant gleich 1 ist.

10.1.2 Logarithmus und Logarithmusfunktion

Was bedeutet log? Die Gleichung $a^x = b$ ist lösbar und die Lösung lautet $x = \log_a b$ mit $a{,}b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$.

Definition: Der Logarithmus von einer positiven reellen Zahl b zur Basis a ist diejenige Zahl x, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Beispiel:

$$2^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Spezialfälle des Logarithmus:

$$\begin{array}{lcll} \log_{10} b & = & \lg b & \text{wird als dekadischer Logarithmus bezeichnet } (a = 10). \\ \log_e b & = & \ln b & \text{wird als natürlicher Logarithmus bezeichnet } (a = e). \\ \log_2 b & = & \mathrm{lb}\, b & \text{wird als binärer Logarithmus bezeichnet } (a = 2). \end{array}$$

Logarithmengesetze (Die Basis a wird oft nicht angegeben):

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^y) = y \cdot \log(x) \qquad \log\left(\sqrt[y]{x}\right) = \frac{1}{y} \cdot \log(x)$$

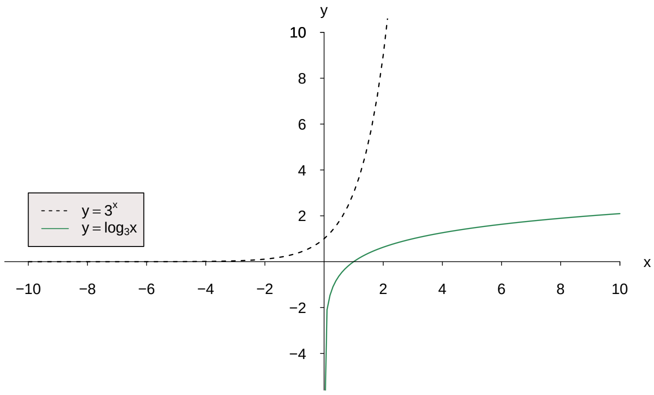
$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_x b = \frac{\log_a b}{\log_a x}$$

Eine Funktion der Form

$$f(x) = \log_a x, \; a \in \mathbb{R}^+$$

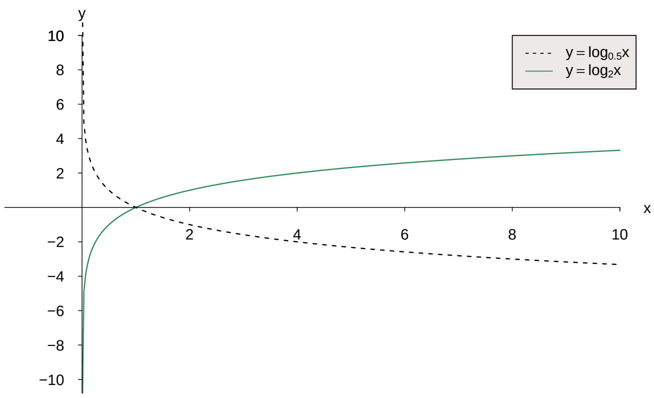
heißt Logarithmusfunktion. Sie ist für Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ die Umkehrfunktion.



Grundlegende Eigenschaften sind:

- Der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion ist $\mathbb{R}^+$.
- Der Wertevorrat ist $W(f) = \mathbb{R}$.
- Auf Grund von
$$a^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a 1 = 0$$
haben alle Graphen der Logarithmusfunktion den gemeinsamen Punkt $(0; 1)$.
- Für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton steigend.
- Für $0 < a < 1$ ist die Funktion streng monoton fallend.

Beispiel:



10.1.3 Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Variable ausschließlich im Exponenten auftritt. Solche Gleichungen lassen sich durch Gleichsetzen der Exponenten (bei gleicher Basis) oder durch Logarithmieren (bei unterschiedlicher Basis) lösen. Dabei sind die Potenz- und Logarithmengesetze zu beachten.

Die praktische Lösung dieser Art von Gleichungen wird ausführlich an den nachfolgenden Beispielen erläutert.

10.1.4 Logarithmusgleichungen

Beim Lösen von Logarithmusgleichungen ist zu beachten, dass der Definitionsbereich der Gleichung stark eingeschränkt sein kann. Deswegen ist es wichtig, jede Lösung mit einer abschließenden Proberechnung zu überprüfen.

Allgemein lassen sich logarithmische Gleichungen durch geeignete Umformungen (insbesondere durch die Anwendung der Logarithmengesetze) lösen. Nachfolgende Beispiele erläutern den genauen Lösungsweg.

10.2 Beispiele

Beispiel 10.2.1 Lösen Sie die Gleichung

$$6^{3x+9} = 36^{2x+5} \ .$$

Lösung: Zunächst sehen die beiden Basen unterschiedlich aus. Betrachtet diese aber genauer, so fällt auf, dass man 36 zerlegen kann zu

$$36 = 6 \cdot 6 = 6^2 \ .$$

Anschließend kann man wie folgt umformen:

$$6^{3x+9} = \left(6^2\right)^{2x+5} \ .$$

Jetzt kann man das Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{nm}$ anwenden:

$$6^{3x+9} = 6^{2(2x+5)} \ .$$

Wenn zwei Potenzen mit gleicher Basis gleich sein sollen, dann müssen auch die Exponenten übereinstimmen:

$$\begin{aligned} 3x+9 &= 2(2x+5) \\ 3x+9 &= 4x+10 \\ -x &= 1 \\ x &= -1\,. \end{aligned}$$

Schließlich kann noch eine Probe durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} 6^{3\cdot(-1)+9} &= 36^{2\cdot(-1)+5} \\ 6^6 &= 36^3 \\ 46656 &= 46656\,. \end{aligned}$$

Beispiel 10.2.2 Lösen Sie die Gleichung

$$5^x - 5^{x-1} = 100\,.$$

Lösung: Diese Gleichung kann man nicht mit der gleichen Methode wie im Beispiel 1 lösen, da hier neben den Potenzen noch ein Term ohne Exponenten auftritt. Daher sollte man als erstes versuchen, die Gleichung soweit möglich zu vereinfachen:

$$5^x - 5^x \cdot 5^{-1} = 100$$

Nun kann man 5^x ausklammern:

$$\begin{aligned} 5^x\left(1-\frac{1}{5}\right) &= 100 \\ 5^x \cdot 0{,}8 &= 100 \\ 5^x &= 125\,. \end{aligned}$$

Nun sollten die Gleichung auf beiden Seiten logarithmieren, um später nach x auflösen zu können:

$$\begin{aligned} x \cdot \lg 5 &= \lg 125 \\ x &= \frac{\lg 125}{\lg 5} \\ x &= 3\ . \end{aligned}$$

Anschließend sollten Sie noch eine Probe durchführen:

$$\begin{aligned} 5^3 - 5^{3-1} &= 100 \\ 100 &= 100\ . \end{aligned}$$

Beispiel 10.2.3 Lösen Sie folgende Gleichung:

$$\log_x 9 = 1 + \log_x 3\ .$$

Lösung: Als erstes sollten Sie die Gleichung umformen, um sie auf die Form $\log_x b = a$ zu bringen:

$$\log_9 - \log_x 3 = 1\ .$$

Nun kann man die Logarithmengesetze anwenden:

$$\begin{aligned} \log_x \left(\frac{9}{3}\right) &= 1 \\ \log_x 3 &= 1\ . \end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung in eine Potenz umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 3 &= x^1 \\ x &= 3\ . \end{aligned}$$

Nun sollten Sie noch eine Probe durchführen:

$$\begin{aligned} \log_3 9 &= 1 + \log_3 3 \\ 2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Beispiel 10.2.4 Lösen Sie die Gleichung

$$\ln\left(x^2 + 4x + 2\right) - \ln(x + 12) = 0\,.$$

Lösung: Formen Sie die Gleichung zunächst um:

$$\ln\left(x^2 + 4x + 2\right) = \ln(x + 12)\,.$$

Nun können Sie die Regel $\log_a T_1(x) = \log_a T_2(x) \;\Leftrightarrow\; T_1(x) = T_2(x)$ anwenden, wobei $T_1(x)$ und $T_2(x)$ Funktionen sind.

$$x^2 + 4x + 2 = x + 12$$

Nun ist die Gleichung einfach zu lösen durch Umformung und Anwendung der p-q-Formel:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 10}$$

$$x_1 = -5 \qquad x_2 = 2$$

Abschließend ist noch die Proberechnung durchzuführen:

$x = -5$

$$\begin{aligned} \ln(25 - 20 + 2) - \ln(-5 + 12) &= 0 \\ \ln 7 - \ln 7 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$x = -2$

$$\begin{aligned} \ln(4 + 8 + 2) - \ln(2 + 12) &= 0 \\ \ln 14 - \ln 14 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist demnach

$$\mathfrak{L} = \{-5; 2\}\,.$$

10.3 Übungen

Übung 10.3.1 *(8 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$2^{2x+3} + 3 \cdot 2^{2x} = 22 \;.$$

→ *Lösung auf Seite 147*

Übung 10.3.2 *(8 Min.)* Lösen Sie die Gleichung:

$$\sqrt{a^{3x-7}} = \sqrt[3]{a^{4x-3}} \;.$$

→ *Lösung auf Seite 148*

Übung 10.3.3 *(10 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3} \;.$$

→ *Lösung auf Seite 148*

Übung 10.3.4 *(12 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$32^{\frac{2x+1}{x+2}} = 4^{\frac{6x-1}{4x-1}} \;.$$

→ *Lösung auf Seite 149*

Übung 10.3.5 *(10 Min.)*

Lösen Sie die Gleichung

$$\lg(2x+3) = \lg(x+1) + 1 \;.$$

→ *Lösung auf Seite 150*

Übung 10.3.6 *(12 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$\log_x \sqrt{2} + \log_x 4 = \frac{1}{2} \, .$$

→ *Lösung auf Seite 150*

Übung 10.3.7 *(12 Min.)* Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf:

$$\frac{1}{2} \lg(2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} = 1 \, .$$

→ *Lösung auf Seite 151*

Übung 10.3.8 *(12 Min.)* Lösen Sie die Gleichung nach x auf:

$$3 \cdot \sqrt{\lg(x)} - \lg(x) = 2 \, .$$

→ *Lösung auf Seite 151*

10.4 Tests

Test 10.4.1 *(6 Min.)* Berechnen Sie den Wert von x in der folgenden Gleichung:

$$\log_3(\log_2 x) = 5$$

1 $x = 30$ **2** $x = \frac{5}{6}$ **3** $x = 2^{243}$

→ *Lösung auf Seite 193*

Test 10.4.2 *(10 Min.)* Was ist der Wert von A?

$$A = \log_5(125) - 4\log_2\left(\sqrt{2}\right) + \left[\log_3\left(\frac{1}{27}\right)\right] \cdot \left(\log_7 \sqrt[3]{49}\right)$$

1 $A = 1$ **2** $A = -2$ **3** $A = -1$

→ *Lösung auf Seite 194*

Test 10.4.3 *(10 Min.)* Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\log(8x) - \log\left(1+\sqrt{x}\right) = 2$$

1 $x_1 \approx 12{,}188$; $x_2 \approx 13{,}076$

2 $x_1 \approx 180{,}384$; $x_2 \approx 0{,}866$

3 $x \approx 10^{\frac{17}{4}}$

4 $x \approx 180{,}384$

→ *Lösung auf Seite 195*

Test 10.4.4 *(12 Min.)* Gegeben ist die folgende Gleichung:

$$\log_3\left(x^2-1\right) = 1 + \log_3(x+3)\ .$$

Was ist (sind) der (die) x-Wert(e), der (die) diese Gleichung erfüllt (erfüllen)?

1 $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$; $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$

2 $x = 9$

3 $x_1 = 5$; $x_2 = -2$

→ *Lösung auf Seite 197*

11 Trigonometrische Funktionen

11.1 Theorie

11.1.1 Winkeleinheiten

Jeder Winkel kann durch einen Punkt auf einem Einheitskreis (d.h. ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0;0)$ im kartesischen Koordinatensystem und dem Radius $r = 1$) dargestellt werden.

Teilt man den Kreis in 360 gleiche Teile, wird jedes einzelne Stück als Grad bezeichnet. (Notation: $1°$)

Das Bogenmaß ist eine weitere Möglichkeit zur Messung von Winkeln, dabei gilt:

$$360° \widehat{=} 2\pi \, .$$

Die Winkeleinheit im Bogenmaß ist „rad“ (Radiant), diese wird aber oft weggelassen.

Für die Umrechnung sind folgende Beziehungen wichtig:

$$\begin{aligned} 1° \widehat{=} \frac{1}{360°} \cdot 2\pi &= \frac{\pi}{180°} \\ 1\,rad \widehat{=} \frac{1}{2}\pi \cdot 360° &= \frac{180°}{\pi} \, . \end{aligned}$$

Bei den Berechnungen im Taschenrechner muss man auf richtige Einstellung achten: DEG steht für Grad (Degree) und RAD für Radiant!

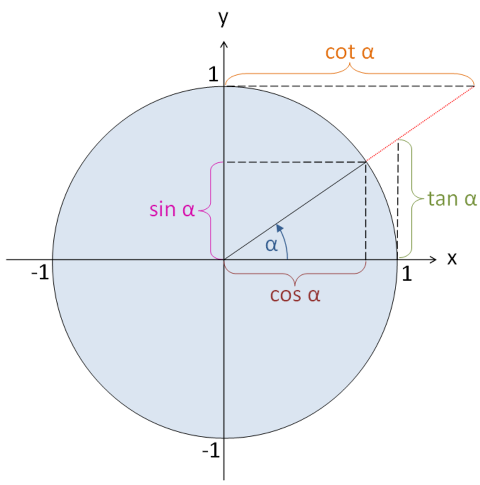
11.1.2 Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck kann das Verhältnis zweier Seiten in Abhängigkeit eines Winkels dargestellt werden. Die längste Seite bezeichnet man *Hypotenuse* c (den gegenüberliegenden Winkel als γ), die beiden anderen werden Katheten genannt: *Gegenkathete* a (gegenüberliegender Winkel ist α) und *Ankathete* b (gegenüberliegender Winkel ist β).

Es gelten folgende Definitionen:

$$\begin{array}{lll} \text{Sinus:} & \sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} & = \frac{a}{c} \\[2ex] \text{Kosinus:} & \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} & = \frac{b}{c} \\[2ex] \text{Tangens:} & \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} & = \frac{a}{b} \\[2ex] \text{Kotangens:} & \cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} & = \frac{a}{b} \end{array}$$

Diese Definitionen lassen sich zur Veranschaulichung gut auf den Einheitskreis übertragen:



Da die Winkelbeziehungen über den Einheitskreis definiert sind, lässt sich der Satz von Pythagoras anwenden ($a^2 + b^2 = c^2$) und man erhält einen sehr wichtigen Satz:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ .$$

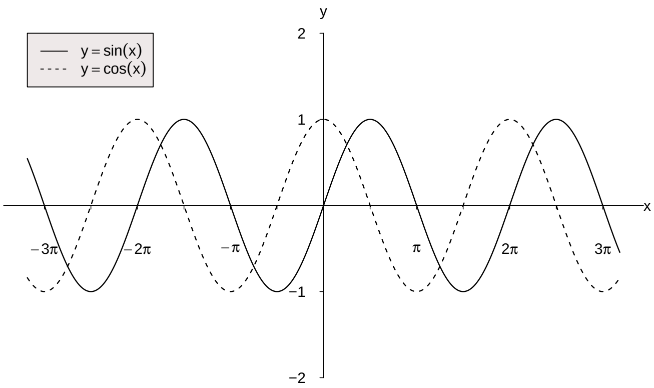
Dieser Satz wird auch als „Trigonometrischer Pythagoras“ bezeichnet.

Weiterhin gilt für die Winkelbeziehungen folgende Periodizität, die sich aus der Definition ableiten lässt und auch sehr gut in der grafischen Darstellung der jeweiligen Funktion widerspiegelt. (Diese wird weiter unten behandelt.)

$$
\begin{aligned}
\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \\
\cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos\alpha \\
\\
\sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos\alpha \\
\\
\sin(360^\circ - \alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(360^\circ - \alpha) &= \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Für die Winkel $360^\circ + \alpha$ ergibt sich wieder derselbe Winkel, weil das einer Drehung von 360° (oder 2π) im Einheitskreis entspricht.

11.1.3 Grafische Darstellung der Sinus- und Kosinusfunktion



Anhand der Funktionsgraphen lassen sich grundlegende Funktionseigenschaften erkennen:

- Die Sinus- und Kosinusfunktionen sind periodisch. Die kleinste Periode ist 2π, deshalb gilt

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \,. \end{aligned}$$

- Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch, denn es gilt

$$\sin(-x) = -\sin(x) \,.$$

- Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn es gilt

$$\cos(-x) = \cos(x) \,.$$

- Sinus- und Kosinusfunktion sind wie folgt miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \,. \end{aligned}$$

11.1.4 Umkehrfunktionen für Sinus- und Kosinusfunktion

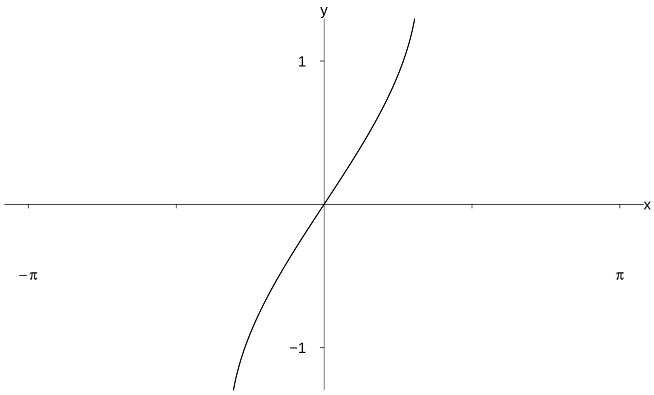
Wie bereits bekannt ist, lassen sich nur solche Funktionen umkehren, die streng monoton steigend bzw. fallend sind. Ist dies nicht der Fall, muss ein geeigneter Abschnitt der Funktion gewählt werden, auf dem die Funktion streng monoton fallend bzw. steigend ist. Die Umkehrfunktion einer trigonometrischen Funktion heißt Arcusfunktion.

Wenn man den Verlauf der sin-Funktion betrachtet, bietet sich das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ für die Umkehrfunktion an, weil die sin-Funktion in diesem Intervall streng monoton steigend ist. Die Umkehrfunktion bezeichnet man dann als

$$f(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1} x \,.$$

Dabei darf der Ausdruck $\left(\sin^{-1} x\right)$ nicht mit dem reziproken Wert $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$ verwechselt werden.

Der Definitionsbereich ist dann $[-1; 1]$ und Wertebereich $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

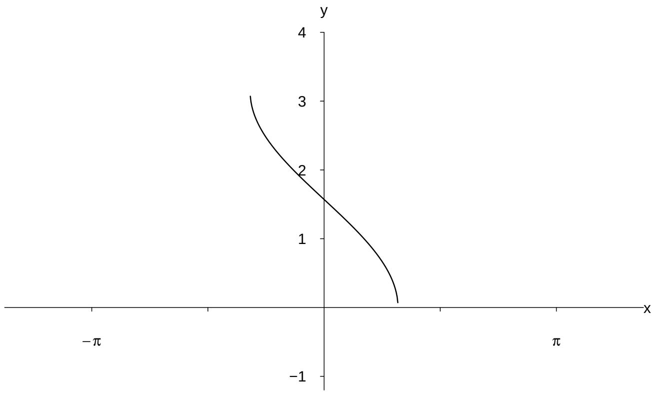


Für die cos-Funktion kann man das Intervall $[0; \pi]$ wählen, da die Funktion in diesem Abschnitt streng monoton fallend ist. Die Umkehrfunktion wird als

$$f(x) = \arccos(x) = \cos^{-1} x$$

bezeichnet, der Definitionsbereich ist $[-1; 1]$ und der Wertebereich ist $[0; \pi]$.

Dabei darf der Ausdruck $(\cos^{-1} x)$ nicht mit dem reziproken Wert $\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ verwechselt werden.



11.1.5 Additionstheoreme

Für die trigonometrischen Funktionen gelten folgende Beziehungen, die so genannten Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sin(2x) &= 2 \sin x \cdot \cos x
\end{aligned}$$

11.1.6 Winkeltabelle

Um bestimmte Werte für $\sin x$ und $\cos x$ leichter ermitteln zu können, erhalten Sie eine Tabelle mit den wichtigsten Winkeln:

Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

11.1.7 Hinweise zur Notation und Benutzung des Taschenrechners

Zur Umkehrfunktion der trigonometrischen Funktionen sollten Sie folgenden Sachverhalt beachten:

Man kann schreiben:

$$\arccos x = \cos^{-1} x \ ,$$

aber es gilt:

$$(\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x} \ .$$

Es ist wichtig, dass Sie diesen Unterschied kennen, damit es nicht zu Verwechselungen kommt.

Auch das folgende Zitat aus dem Buch „Mathematik für Ingenieure“ von M. Knorrenschild (Hanser Verlag) auf Seite 24 kann in diesem Zusammenhang hilfreich sein:

„Auf den meisten Taschenrechnern müssen Sie für arcsin die Tastenfolge *inv* $\Rightarrow$ *sin* oder die Taste sin^{-1} wählen. Kein Problem für Sie, denn Sie wissen ja, dass arcsin die Umkehrfunktion (inverse Funktion) von sin ist, also ist $\arcsin = \sin^{-1}$."

11.2 Beispiele

Beispiel 11.2.1 Eine Anwendung der trigonometrischen Funktionen sind die trigonometrischen Gleichungen. Bei diesen ist es wichtig, dass Sie die Periodizität beachten. Falls der Definitionsbereich von x nicht eingeschränkt ist, muss die Lösung mit $(+2k\pi)$ erweitert werden.

Gesucht sind alle Lösungen für x:

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Als erstes muss man den Wert ermitteln, für den der Sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist. Das geschieht entweder durch Berechnung oder durch einen Blick in die Tabelle für Winkelwerte. Man erhält $\frac{\pi}{3}$. Daraus folgt:

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} \ .$$

Nach Umstellen der Gleichung ist leicht ersichtlich, dass

$$x_1 = \pi \ .$$

Außerdem hat die Sinusfunktion den gleichen Funktionswert an der Stelle $\frac{2\pi}{3}$, also gilt auch

$$x_2 = 2\pi \ .$$

Außerdem muss bei den trigonometrischen Gleichungen die Periodizität beachtet werden. Die Lösungen lauten also:

$$x_1 = \pi + 6k\pi \quad \text{und} \quad x_2 = 2\pi + 6k\pi \ .$$

Beispiel 11.2.2 Gesucht sind alle Lösungen für x im Intervall $[0; 2\pi]$:

$$2\sin x + \sin(2x) = 0 \ .$$

Zunächst sollten Sie die Gleichung vereinfachen. Aus dem Abschnitt Additionstheoreme ist bekannt, dass $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$ ist. Daraus folgt

$$2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0 \ .$$

Nun kann $2\sin x$ ausgeklammert werden:

$$2\sin x(1 + \cos x) = 0 \ .$$

Wenn ein Produkt gleich 0 ist, dann muss mindestens einer der Faktoren auch 0 sein.

$$\begin{aligned} 2\sin x &= 0 \quad \text{oder} \quad & 1 + \cos x &= 0 \\ \sin x &= 0 \quad \text{oder} \quad & \cos x &= -1 \ . \end{aligned}$$

Nun kann man die beiden einfachen trigonometrischen Gleichungen lösen. Aus der Tabelle erhält man

$$\sin 0 = 0 \quad \text{sowie} \quad \cos\pi = -1 \ .$$

Außerdem gilt wegen der Periodizität

$$\sin(2\pi) = 0 \ .$$

Also sind die Lösungen

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = \pi \ , \quad x_3 = 2\pi \ .$$

11.3 Übungen

Übung 11.3.1 *(8 Min.)* Lösen Sie folgende Gleichung:

$$\tan x + \sin x = 0 \ , \quad x \in [0; 2\pi] \ .$$

→ *Lösung auf Seite 152*

Übung 11.3.2 *(10 Min.)* Lösen Sie die Gleichung

$$\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0\ , \quad x \in [0; 2\pi]\ .$$

→ *Lösung auf Seite 153*

Übung 11.3.3 *(10 Min.)* Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2(2x) + \cos^4 x\ .$$

→ *Lösung auf Seite 154*

Übung 11.3.4 *(10 Min.)* Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\sin^4 x - \cos^4 x\ .$$

→ *Lösung auf Seite 154*

11.4 Tests

Test 11.4.1 *(6 Min.)* Berechnen Sie den Betrag von $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, wenn $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$ vorgegeben ist. Das Ergebnis lautet

$\boxed{1}$ 0,5 $\boxed{2}$ $\frac{123}{100}$ $\boxed{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

→ *Lösung auf Seite 198*

Test 11.4.2 *(12 Min.)* Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $30° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{4}$ (b) $60° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{3}$ (c) $90° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{3}$

(e) $30° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{6}$ (h) $150° \mathrel{\widehat{=}} \frac{5\pi}{6}$ (i) $45° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{4}$

(j) $60° = \sin\frac{\pi}{6}$ (l) $270° \mathrel{\widehat{=}} \frac{3\pi}{2}$ (n) $120° \mathrel{\widehat{=}} \frac{2\pi}{3}$

(r) $\sin\pi = \sin 7\pi$ (t) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ (w) $\sin 405° = \sin\frac{\pi}{4}$

$\boxed{1}$ a-b-r-t-w $\boxed{2}$ h-t-w-b-e-r-l-i-n $\boxed{3}$ i-j-l-n-r-t

→ *Lösung auf Seite 200*

Test 11.4.3 *(12 Min.)* Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$

(b) $\dfrac{1}{\sin x \cot x} = (\cos x)^{-1}$

(c) $\sin x + (\cos x \cdot \cot x) = \dfrac{1}{\sin x}$

(d) $\dfrac{\tan x - \sin x \cdot \cos x}{\tan x} = \sin^2 x$

(e) $\dfrac{1}{\cos x} - (\sin x \cdot \tan x) = \cos x$

$\boxed{1}$ c-d-e $\boxed{2}$ a-b-c-d-e $\boxed{3}$ a-c-e

→ *Lösung auf Seite 200*

Test 11.4.4 *(14 Min.)*

(a) $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\sin^{-1} 1 + \sin^{-1}(-1) = 0$

(d) $\cos^{-1} 1 + \cos^{-1}(-1) = \pi$

(e) wenn $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$, dann ist $x = 20^\circ \ \pm k \cdot 120^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\boxed{1}$ Keine der Aussagen ist richtig $\boxed{2}$ Alle Aussagen sind richtig $\boxed{3}$ a-d-e

→ *Lösung auf Seite 201*

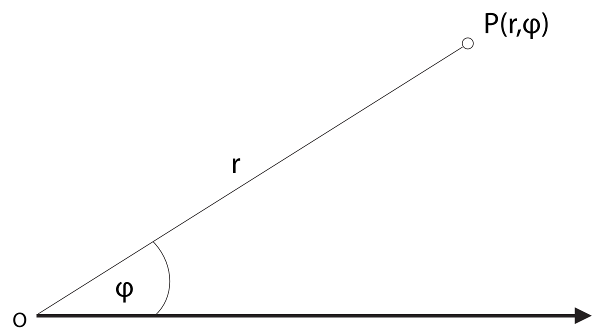
12 Funktionen in Polarkoordinaten

12.1 Theorie

12.1.1 Definition Polarkoordinaten

Jeden Punkt in der Ebene kann man neben den kartesischen Koordinaten auch mit Polarkoordinaten beschreiben. Vor allem für Aufgaben, die sich auf Kreise bzw. Kreisabschnitte beziehen, ist die Arbeit mit Polarkoordinaten vorteilhafter als die Verwendung von kartesischen Koordinaten.

Bei den Polarkoordinaten wird ein Strahl, der vom Ursprung O in Richtung der positiven x-Achse ausgeht, als Polarachse bezeichnet. Dann ist jeder Punkt der Ebene eindeutig durch die Strecke r ($r > 0$) und den Winkel φ , den die Strecke r mit der Polarachse bildet, festgelegt.



r und φ sind die Polarkoordinaten eines Punktes der Ebene. Der Winkel kann sowohl in Grad als auch im Bogenmaß angegeben werden.

12.1.2 Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten lassen sich einfach in die kartesische umrechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \ . \end{aligned}$$

Bei gegebenen r und φ sind die kartesischen Koordinaten x und y eindeutig definiert. Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist der Winkel φ nicht eindeutig definiert. Die Gleichung $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ hat unendlich viele Lösungen. Sogar wenn man sich auf das Intervall $[0;360)$ beschränkt, gibt es immer noch 2 Lösungen zur Auswahl. An dieser Stelle muss man überlegen, in welchem Quadranten der betrachtete Punkt liegt, um sich für einen richtigen Winkel entscheiden zu können.

12.1.3 Kurvengleichungen

Eine Kurve kann als eine Punktmenge aufgefasst werden. Die Vorschrift zur Bildung einer Kurve wird in Form einer Gleichung mit den Variablen x und y (wenn man ein kartesisches Koordinatensystem verwendet) bzw. r und φ (bei der Verwendung der Polarkoordinaten) angegeben.

Ist diese Gleichung nach einer der Variablen aufgelöst, spricht man von einer expliziten Form der Kurvengleichung. Zum Beispiel

$$f(x) = y = x^2\,.$$

Ist die Gleichung nicht nach einer Variablen aufgelöst, spricht man von einer impliziten Form der Kurvengleichung. Zum Beispiel:

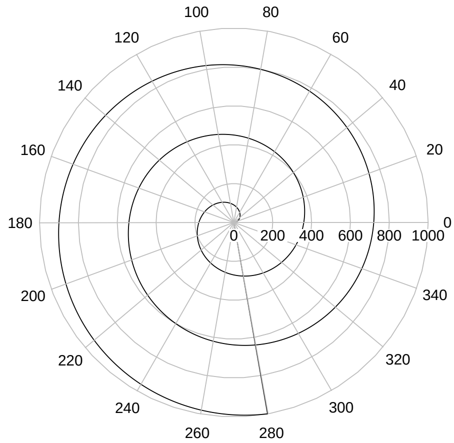
$$K(x,y) : x^2 + y^2 - 25 = 0\,.$$

Mit Hilfe von Polarkoordinaten lassen sich verschiedene Kurvengleichungen darstellen. Zum Beispiel:

- Spiralen:

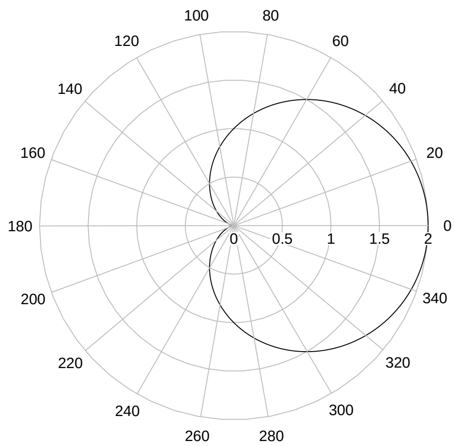
$$\begin{aligned} K_1 &: r = \varphi \\ K_2 &: r = e^{\varphi} \\ K_3 &: r = \varphi^{-1}\,. \end{aligned}$$

Folgende Abbildung stellt die Archimedische Spirale K_1 für $\varphi \geq 0$ dar:



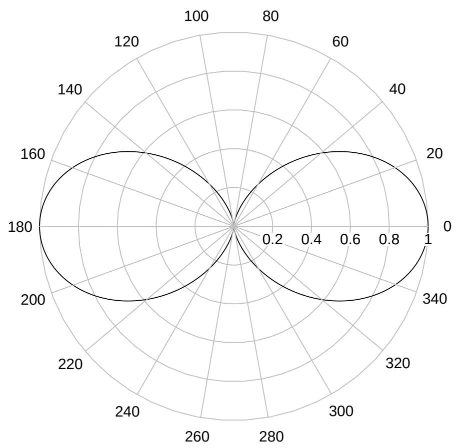
- Kardioiden:

$$K_4 : r = 1 + \cos\varphi \; .$$



- Lemniskaten:

$$K_5 : r = \cos^2\varphi \; .$$



12.2 Beispiele

Beispiel 12.2.1 Wie lauten die kartesischen Koordinaten des Punktes $P(4\sqrt{2}; 225°)$? Prüfen Sie Ihr Ergebnis an einer Skizze nach!

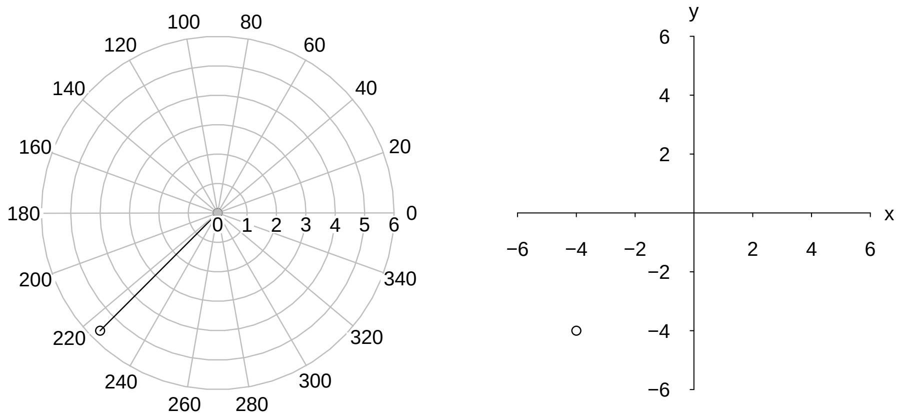
Lösung:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ &= 4\sqrt{2} \cdot \cos(225°) \\ &= 4\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r \cdot \sin\varphi \\ &= 4\sqrt{2} \cdot \sin(225°) \\ &= 4\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Der Punkt P hat die kartesischen Koordinaten

$$P(-4; -4) \; .$$



Beispiel 12.2.2 Welche Polarkoordinaten besitzt der Punkt $P(-2; 3)$? Prüfen Sie Ihr Ergebnis an einer Skizze nach!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{13} \approx 3{,}61
\end{aligned}
$$

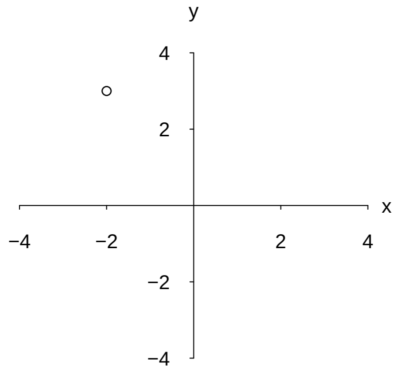
$$\tan \varphi = \frac{3}{-2} = -1{,}5$$

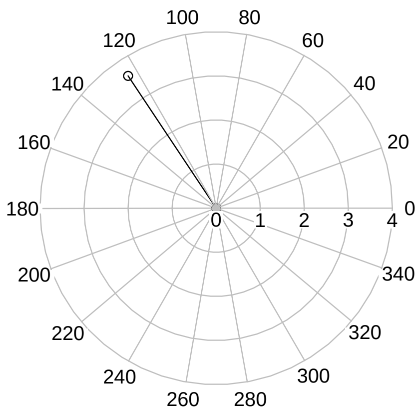
Daraus folgen zwei Winkel

$$\varphi_1 \approx 123{,}69^\circ \quad \text{und} \quad \varphi_2 \approx 303{,}69^\circ \, .$$

Da aber der Punkt P im zweiten Quadranten liegt, kommt nur φ_1 in Frage. Die Polarkoordinaten des Punktes lauten somit

$$P(3{,}61; 123{,}69^\circ) \, .$$





Beispiel 12.2.3 Ein Kreis mit dem Radius 5 um den Ursprung hat in kartesischen Koordinaten folgende Gleichung:

$$K(x,y) : x^2 + y^2 - 25 = 0 \; .$$

Wie lautet diese Kreisgleichung in Polarkoordinaten?

Lösung: Für die Umrechnung der Kurvengleichung wird für x der Ausdruck $r \cdot \cos\varphi$ und für y der Ausdruck $r \cdot \sin\varphi$ eingesetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned} (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 - 25 &= 0 \\ r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 25 &= 0 \\ r^2\left(\cos^2\varphi + sin^2\varphi\right) - 25 &= 0 \; . \end{aligned}$$

Beachtet man, dass $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist, dann erhält man

$$\begin{aligned} r^2 - 25 &= 0 \\ r &= 5 \; . \end{aligned}$$

Also lautet die Kreisgleichung

$$K : r = 5\ .$$

Beispiel 12.2.4 Wie lautet die Kurvengleichung

$$K : r = 2 \sin \varphi$$

in kartesischen Koordinaten?

Lösung: Für r können Sie sofort $\sqrt{x^2 + y^2}$ einsetzen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \sin \varphi\ .$$

Weiterhin können Sie aus der Formel $y = r \cdot \sin \varphi$ leicht den Ausdruck $\sin \varphi$ herleiten:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{y}{r} \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ . \end{aligned}$$

Daraus erhalten Sie

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 &= 2y \\ x^2 + y^2 &= 2y \\ x^2 + y^2 - 2y &= 0\ . \end{aligned}$$

Die Kurvengleichung in kartesischen Koordinaten lautet beispielsweise

$$K(x,y) : x^2 + y^2 - 2y = 0\ .$$

12.3 Übungen

Übung 12.3.1 *(5/5 Min.)*

a) Welche Polarkoordinaten besitzen die Punkte $A\,(3;2)$, $B\,(-7;-9)$?

b) Wie lauten die kartesischen Koordinaten der Punkte $C\,(5;30°)$, $D\,(2{,}5;270°)$?

→ *Lösung auf Seite 155*

Übung 12.3.2 *(7 Min.)* Wie lautet die folgende Kurvengleichung in Polarkoordinaten?

$$K(x;y) : \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^2-y^2\right) = 0\ .$$

→ *Lösung auf Seite 156*

Ubung 12.3.3 *(7 Min.)* Wie lautet die folgende Kurvengleichung in kartesischen Koordination?

$$K : r = \frac{a}{b\cos\varphi + c\sin\varphi}$$

→ *Lösung auf Seite 157*

Ubung 12.3.4 *(7 Min.)* Wie lautet die Kurvengleichung in kartesischen Koordinaten?

$$K : r^2 = 2e^2\cos 2\varphi$$

→ *Lösung auf Seite 158*

12.4 Tests

Test 12.4.1 *(5 Min.)* Welche Polarkoordinaten besitzt der Punkt

$$A\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ?$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $r=\sqrt{3};\ \varphi=60^\circ$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $r=\sqrt{3};\ \varphi=30^\circ$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $r=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \varphi=60^\circ$

→ *Lösung auf Seite 202*

Test 12.4.2 *(8 Min.)* Wie groß ist der Abstand des Punktes $\left(7;\frac{3\pi}{4}\right)$ in Polarkoordinaten von der x- bzw. y-Achse?

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ $y=-\frac{7\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x=-\frac{7\sqrt{2}}{2}$ $y=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

→ *Lösung auf Seite 203*

Test 12.4.3 *(8 Min.)* Welche Winkel besitzen die Punkte einer Kurve mit der angegebenen Kurvengleichung und dem Radius $r={}^3\!/_2$?

$$r=1+\cos\varphi$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\varphi_{1,2}=\pm 60^\circ$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\varphi_{1,2}=\pm 30^\circ$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $\varphi_{1,2}=\pm 120^\circ$

→ *Lösung auf Seite 204*

Test 12.4.4 *(12 Min.)* Was sind die Schnittpunkte der angegebenen Kurven?

$$\begin{aligned} r &= 4 \cdot (1 + \cos\varphi) \\ r \cdot (1 - \cos\varphi) &= 3 \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ $\varphi_{1,2} = \pm 60°$ $r_{1,2} = 6$

$\boxed{2}$ $\varphi_{1,2} = \pm 120°$ $r_{1,2} = 2$

$\boxed{3}$ $\varphi_{1,2} = \pm 60°$, $\varphi_{3,4} = \pm 120°$ $r_{1,2} = 6$, $r_{3,4} = 2$

→ *Lösung auf Seite 205*

13 Hinweise und Lösungen zu den Übungen

13.1 Umstellen von Gleichungen

Übung 1.3.1

Tipp: Um leichter nach $\boldsymbol{\mu}$ umstellen zu können, empfiehlt es sich, die Gleichung so umzuformen, dass $\boldsymbol{\mu}$ im Zähler steht:

$$P_{\text{Ü}} \cdot \left(\frac{d}{4} + \boldsymbol{\mu} h\right) = \frac{F}{d\pi}$$

Tipp: Bringen Sie alle Terme, in denen $\boldsymbol{\mu}$ nicht vorkommt, auf die andere Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{4} + \boldsymbol{\mu} h &= \frac{F}{d\pi P_{\text{Ü}}} \\ \boldsymbol{\mu} h &= \frac{F}{d\pi P_{\text{Ü}}} - \frac{d}{4} \end{aligned}$$

Tipp: Es ist immer ratsam, die Terme so weit wie möglich zu vereinfachen (in diesem Fall durch Bilden des Hauptnenners). Schließlich muss noch durch h dividiert werden:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} h &= \frac{F}{d\pi P_{\ddot{U}}} \cdot \frac{4}{4} - \frac{d}{4} \cdot \frac{d\pi P_{\ddot{U}}}{d\pi P_{\ddot{U}}} \\ &= \frac{4F - d^2\pi P_{\ddot{U}}}{4d\pi P_{\ddot{U}}} \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{4F - d^2\pi P_{\ddot{U}}}{4d\pi P_{\ddot{U}} h}\end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{4F - d^2\pi P_{\ddot{U}}}{4d\pi P_{\ddot{U}} h}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 10*

Übung 1.3.2

Tipp: Formen Sie die Summen in den Nennern zu Produkten um, indem Sie die jeweils R mit $j\omega C$ erweitern:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i_1} &= \frac{\frac{u_1}{R \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}}}{R \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{\frac{u_1}{\frac{Rj\omega C + 1}{j\omega C}}}{\frac{Rj\omega C + 1}{j\omega C}}\end{aligned}$$

Tipp: Vereinfachen lässt sich dieser Ausdruck, indem man den Doppelbruch im Zähler eliminiert durch Multiplikation mit dem Kehrwert des Nenners (siehe Division von Brüchen im Theorieteil):

$$\boldsymbol{i_1} = \frac{\frac{u_1 j\omega C}{Rj\omega C + 1}}{\frac{Rj\omega C + 1}{j\omega C}}$$

Tipp: Beseitigen Sie nun den letzten Doppelbruch und fassen Sie schließlich das Ergebnis zusammen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i_1} &= \frac{u_1 j\omega C \cdot j\omega C}{(Rj\omega C + 1)(Rj\omega C + 1)} \\ &= \frac{u_1 (j\omega C)^2}{(Rj\omega C + 1)^2}\end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\boldsymbol{i_1} = \frac{u_1(j\omega C)^2}{(Rj\omega C + 1)^2}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 10*

Übung 1.3.3

Tipp: Stellen Sie die Gleichung so um, dass auf der linken Seite nur noch zwei Terme mit $\boldsymbol{x}$ allein im Zähler stehen:

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{x}}{\varrho_{\mathrm{Ag}}} + \frac{10}{\varrho_{\mathrm{Sx}}} - \frac{\boldsymbol{x}}{\varrho_{\mathrm{Sx}}} &= \frac{10}{\varrho_0}\\ \frac{\boldsymbol{x}}{\varrho_{\mathrm{Ag}}} - \frac{\boldsymbol{x}}{\varrho_{\mathrm{Sx}}} &= \frac{10}{\varrho_0} - \frac{10}{\varrho_{\mathrm{Sx}}}\end{aligned}$$

Tipp: Klammern Sie nun $\boldsymbol{x}$ aus, damit $\boldsymbol{x}$ nur noch an einer Stelle in der Gleichung steht:

$$\boldsymbol{x}\left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{Ag}}} - \frac{1}{\varrho_{\mathrm{Sx}}}\right) = \frac{10}{\varrho_0} - \frac{10}{\varrho_{\mathrm{Sx}}}$$

Tipp: Nun müssen Sie nur noch durch den Term dividieren, der als Faktor vor $\boldsymbol{x}$ auftritt und anschließend die Doppelbrüche beseitigen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= 10\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_{\mathrm{Sx}}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varrho_{\mathrm{Ag}}} - \frac{1}{\varrho_{\mathrm{Sx}}}}\\ \boldsymbol{x} &= 10\frac{\varrho_{\mathrm{Sx}} - \varrho_0}{\varrho_0 \cdot \varrho_{\mathrm{Sx}}} \cdot \frac{1}{\frac{\varrho_{\mathrm{Sx}} - \varrho_{\mathrm{Ag}}}{\varrho_{\mathrm{Ag}} \cdot \varrho_{\mathrm{Sx}}}}\\ \boldsymbol{x} &= 10\frac{(\varrho_{\mathrm{Sx}} - \varrho_0)}{\varrho_0 \cdot \varrho_{\mathrm{Sx}}} \cdot \frac{\varrho_{\mathrm{Ag}} \cdot \varrho_{\mathrm{Sx}}}{\varrho_{\mathrm{Sx}} - \varrho_{\mathrm{Ag}}}\end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\boldsymbol{x} = 10\frac{\varrho_{\mathrm{Ag}}}{\varrho_0}\frac{(\varrho_{\mathrm{Sx}} - \varrho_0)}{(\varrho_{\mathrm{Sx}} - \varrho_{\mathrm{Ag}})}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 11*

Übung 1.3.4

Tipp: Wieder sollte die Gleichung so umgestellt werden, dass $\boldsymbol{R_1}$ nur an einer Stelle in der Gleichung steht. Dazu sollten Sie zunächst die Brüche beseitigen:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{R_2}{\boldsymbol{R_1}+R_2}U_1 - \frac{\boldsymbol{R_1}R_2}{\boldsymbol{R_1}+R_2}I_2 \\ U_2(\boldsymbol{R_1}+R_2) &= R_2U_1 - \boldsymbol{R_1}R_2I_2 \\ U_2\boldsymbol{R_1}+U_2R_2 &= R_2U_1 - \boldsymbol{R_1}R_2I_2 \end{aligned}$$

Tipp: Sortieren Sie nun die Gleichung, indem Sie alle Terme mit $\boldsymbol{R_1}$ auf eine Seite bringen:

$$U_2\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_1}R_2I_2 = R_2U_1 - U_2R_2$$

Tipp: Klammern Sie anschließend $\boldsymbol{R_1}$ sowie R_2 aus:

$$\boldsymbol{R_1}(U_2 + R_2I_2) = R_2(U_1 - U_2)$$

Tipp: Die Gleichung kann nun leicht umgestellt und vereinfacht werden:

$$\boldsymbol{R_1} = \frac{R_2(U_1-U_2)}{U_2+R_2I_2}$$

Die Lösung lautet dann:

$$\boldsymbol{R_1} = \frac{R_2(U_1-U_2)}{U_2+R_2I_2}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 11*

13.2 Potenzen und Wurzeln

Übung 2.3.1

Tipp: Wenden Sie das Gesetz über die Division bzw. Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten an. Dann ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} &\frac{(a^{-4}b^{-5})^2}{(x^{-1}y^3)^2} \cdot \frac{(a^{-2}x)^{-3}}{(b^3y^2)^{-3}} \\ =\ &\frac{(a^{-4})^2 \cdot (b^{-5})^2}{(x^{-1})^2 \cdot (y^3)^2} \cdot \frac{(a^{-2})^{-3} \cdot x^{-3}}{(b^3)^{-3} \cdot (y^2)^{-3}} \end{aligned}$$

Tipp: Nun kann das Gesetz über das Potenzieren von Potenzen verwendet werden, um den Ausdruck später zu vereinfachen:

$$\frac{a^{-8}b^{-10}}{x^{-2}y^{6}} \cdot \frac{a^{6}x^{-3}}{b^{-9}y^{-6}}$$

Tipp: Die Terme können nun leicht multipliziert werden

$$\frac{a^{-8}b^{-10}a^{6}x^{-3}}{x^{-2}y^{6}b^{-9}y^{-6}}$$

Tipp: Wenn nötig sollte der Bruch nun wieder sortiert werden, um anschließend die Gesetze für Potenzen mit gleicher Basis anzuwenden:

$$\begin{aligned} & \frac{a^{-8}a^{6}b^{-10}x^{-3}}{b^{-9}x^{-2}y^{6}y^{-6}} \\ = \; & a^{-8+6} \cdot b^{-10-(-9)} \cdot x^{-3-(-2)} \cdot y^{-6-(-6)} \\ = \; & a^{-2} \cdot b^{-1} \cdot x^{-1} \cdot 1 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\frac{1}{a^{2}bx}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 15*

Übung 2.3.2

Tipp: Schreiben Sie die Wurzeln als Exponenten um:

$$\left(vw^{3}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(n^{5}v^{8}w^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(nv^{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tipp: Da die Wurzeln gleiche Exponenten für verschiedene Basen sind, kann der Ausdruck umgeformt werden zu:

$$\left(v^{1}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(w^{3}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(n^{5}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(v^{8}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(w^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(n^{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(v^{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tipp: Nun können die doppelten Potenzen zu einfachen Potenzen vereinfacht werden:

$$v^{\frac{1}{6}} \cdot w^{\frac{3}{6}} \cdot n^{\frac{5}{4}} \cdot v^{\frac{8}{4}} \cdot w^{-\frac{2}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{3}{2}}$$

Tipp: Fassen Sie nun die Ausdrücke zusammen, indem Sie das Gesetz zur Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis verwenden:

$$\begin{aligned} & v^{\frac{1}{6}+\frac{8}{4}+\frac{3}{2}} \cdot w^{\frac{3}{6}-\frac{2}{4}} \cdot n^{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}} \\ = \; & v^{\frac{2}{12}+\frac{24}{12}+\frac{18}{12}} \cdot w^{\frac{6}{12}-\frac{6}{12}} \cdot n^{\frac{5}{4}+\frac{2}{4}} \\ = \; & v^{\frac{44}{12}} \cdot w^{0} \cdot n^{\frac{7}{4}} \\ = \; & v^{\frac{11}{3}} \cdot n^{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\sqrt[3]{v^{11}} \cdot \sqrt[4]{n^7}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 16*

Übung 2.3.3

Tipp: Schreiben Sie den Ausdruck so um, dass jede Basis nur einen Exponenten hat:

$$\frac{a^{\frac{x}{2}} \cdot a^{\frac{2x}{3}} \cdot b^{2x}}{a^{\frac{x}{6}} \cdot b^{3x}}$$

Tipp: Nun kann die Anwendung der Gesetze für gleiche Basis erfolgen:

$$\begin{aligned} & a^{\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}} \cdot b^{2x-3x} \\ = \; & a^{\frac{3x}{6}+\frac{4x}{6}-\frac{x}{6}} \cdot b^{2x-3x} \\ = \; & a^{\frac{6x}{6}} \cdot b^{-x} \\ = \; & a^{x} \cdot b^{-x} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 16*

13.3 Binomialkoeffizienten, binomische Formeln und binomischer Lehrsatz

Übung 3.3.1

Tipp: Wenden Sie die Definition des Binomialkoeffizienten an:

$$\binom{90}{87} = \frac{90!}{87!\,3!}$$

Tipp: Nutzen Sie die Definition der Fakultät um kürzen zu können:

$$\frac{90!}{87!\,3!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot \ldots \cdot 1}{87 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Tipp: Kürzen Sie soweit wie möglich. Beachten Sie dabei, dass ein Teil des Zählers im Nenner enthalten ist.

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot \ldots \cdot 1}{87 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 30 \cdot 89 \cdot 44$$

Die Lösung lautet

$$117\,480\ .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 20*

Übung 3.3.2

Tipp: Wenden Sie die Definition des binomischen Lehrsatzes an:

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k}\, b^k$$

Tipp: Schreiben Sie die Summanden einzeln auf:

$$\binom{4}{0} a^{4-0}\, b^0 + \binom{4}{1} a^{4-1}\, b^1 + \binom{4}{2} a^{4-2}\, b^2 + \binom{4}{3} a^{4-3}\, b^3 + \binom{4}{4} a^{4-4}\, b^4$$

Die Lösung lautet:

$$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 20*

Übung 3.3.3

Tipp: Gestalten Sie die Nenner einfacher, indem Sie z.B. Variablen ausklammern und die Nenner als Produkte darstellen. Kürzen Sie sofern möglich:

$$\frac{4a^2}{(2a-b)(2a+b)} + \left(b^2 - \frac{2ab}{1}\right)\frac{a}{b(b-2a)^2}$$

Tipp: Versuchen Sie den zweiten Summanden zu vereinfachen, indem Sie ausklammern und kürzen. Vergleichen Sie dafür, wo ähnliche Ausdrücke im zweiten Summanden enthalten sind:

$$\begin{aligned} & \frac{4a^2}{(2a-b)(2a+b)} + b(b-2a)\frac{a}{b(b-2a)^2} \\ = & \frac{4a^2}{(2a-b)(2a+b)} + \frac{a}{(b-2a)} \end{aligned}$$

Tipp: Machen Sie die Brüche gleichnamig. Beachten Sie dabei, dass der Nenner des zweiten Terms schon fast mit einem Teil des ersten Terms übereinstimmt:

$$\begin{aligned} & \frac{4a^2}{(2a-b)(2a+b)} - \frac{a}{2a-b} \\ = & \frac{4a^2}{(2a-b)(2a+b)} - \frac{a(2a+b)}{(2a-b)(2a+b)} \end{aligned}$$

Tipp: Führen Sie die Rechenoperationen aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\begin{aligned} & \frac{4a^2 - a(2a+b)}{(2a-b)(2a+b)} \\ = & \frac{2a^2 - ab}{(2a-b)(2a+b)} \\ = & \frac{a(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\frac{a}{2a+b}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 20*

Übung 3.3.4

Tipp: Um einen geeigneten Nenner zu finden, wendet man die Gesetze für binomische Formeln an und formt die Nenner entsprechend um:

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{b^2}{a^2(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a^2}$$

Tipp: Nun können die Brüche gleichnamig gemacht werden, um die Zähler zu addieren bzw. subtrahieren.

$$\begin{aligned}\frac{a^2(a-b)}{(a+b)^2a^2(a-b)} \quad &+ \quad \frac{a^2(a+b)}{(a+b)(a-b)a^2(a+b)} \\ &- \quad \frac{b^2(a+b)}{a^2(a+b)(a-b)(a+b)}-\frac{(a+b)^2(a-b)}{a^2(a+b)^2(a-b)}\end{aligned}$$

$$=\frac{a^2(a-b)+a^2(a+b)-b^2(a+b)-(a+b)^2(a-b)}{(a+b)^2a^2(a-b)}$$

Tipp: In Teilen des Zählers kann nun $(a+b)$ ausgeklammert werden:

$$\frac{a^2(a-b)+(a+b)\left[a^2-b^2-(a+b)(a-b)\right]}{(a+b)^2a^2(a-b)}$$

Tipp: Die letzte Klammer des Zählers ergibt 0, wenn man die dritte binomische Formel anwendet:

$$\begin{aligned}&\frac{a^2(a-b)+(a+b)\overbrace{\left[a^2-b^2-\left(a^2-b^2\right)\right]}^{=0}}{(a+b)^2a^2(a-b)} \\ = \quad &\frac{a^2(a-b)}{(a+b)^2a^2(a-b)}\end{aligned}$$

Tipp: Anschließend muss nur noch gekürzt werden.

Die Lösung lautet:

$$\frac{1}{(a+b)^2}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 21*

Übung 3.3.5

Tipp: Verwenden Sie Ihr erworbenes Wissen über Potenzen und Wurzeln. Der erste Ausdruck lässt sich durch Ausmultiplizieren und der zweite durch Anwenden der binomischen Formeln vereinfachen:

$$\begin{aligned}
& \left(1+\left(\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{2}} x^{-\frac{2}{3}}\right)\right)^{-3}-\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4+2a^2x^2+x^4} \\
= & \left(1+\left(a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)\right)^{-3}-\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4+2a^2x^2+x^4}
\end{aligned}$$

Tipp: Benutzen Sie für den zweiten Term die Umkehrung der binomischen Formeln und wenden Sie weiter Potenzgesetze an:

$$\begin{aligned}
& \left(1+\left(a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-x^{0}\right)\right)^{-3}-\frac{1}{a^2}\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^2} \\
= & \left(1+a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1\right)^{-3}-\frac{1}{a^2}\left(a^2+x^2\right) \\
= & \left(a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3}-\frac{1}{a^2}\left(a^2+x^2\right)
\end{aligned}$$

Tipp: Der erste Term kann weiter nur durch Potenzgesetze vereinfacht werden. Um den zweiten Term vom ersten zu subtrahieren, sollte man zuerst den zweiten Term ausmultiplizieren, falls dies noch nicht geschehen ist:

$$\begin{aligned}
& \left(a^{-\frac{6}{3}}x^{-\frac{-6}{3}}\right)-\left(\frac{a^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right) \\
= & \left(a^{-2}x^{2}\right)-\left(\frac{a^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right) \\
= & \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

Damit ist die Lösung leicht erkennbar.

Die Lösung lautet

$$-1\,.$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 21*

13.4 Polynomdivision

Übung 4.3.1

Tipp: Da die Polynome bereits sortiert sind, können Sie direkt mit der Division beginnen. Dividieren Sie $2x^4$ durch x und multiplizieren Sie das Ergebnis mit dem Divisor. Achten Sie von Anfang an darauf, Potenzen mit gleichem Exponenten unter einander zu schreiben. Dies erleichtert später die Übersicht:

$$
\begin{array}{rlll}
 & (2x^4 & & -x^2) \quad : (x-5) = 2x^3 \\
- & (2x^4 & -10x^3) & \\ \cline{1-3}
\end{array}
$$

Tipp: Ermitteln Sie den entstehenden Rest, der noch dividiert werden muss und führen Sie das Verfahren erneut aus.

$$
\begin{array}{rllllll}
 & (2x^4 & & -\ x^2) & & & : (x-5) = 2x^3+10x^2+49x+245+\frac{1225}{x-5} \\
- & (2x^4 & -\ 10x^3) & & & & \\ \cline{1-3}
(=) & & 10x^3 & -\ x^2 & & & \\
 & - & (10x^3 & -\ 50x^2) & & & \\ \cline{2-4}
 & (=) & & 49x^2 & & & \\
 & & - & (49x^2 & -\ 245x) & & \\ \cline{3-5}
 & & (=) & & 245x & & \\
 & & & - & (245x & -1225) & \\ \cline{4-6}
 & & & (=) & & 1225 &
\end{array}
$$

Die Lösung lautet:

$$
2x^3+10x^2+49x+245+\frac{1225}{x-5}
$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 26*

Übung 4.3.2

Tipp: Ermitteln Sie eine Nullstelle. Meist ist das Absolutglied (in diesem Fall 8) ein Vielfaches der Nullstellen. Eine Möglichkeit wäre die Zahl 1, da $1 \cdot 8 = 8$. Die Probe ergibt: $1^3 + 1^2 - 10 + 8 = 0$. $x_{01} = 1$ ist also eine geeignete Nullstelle.

Tipp: Dividieren Sie nun das Polynom durch $(x - x_{01})$ und fahren Sie mit der Polynomdivision fort:

$$
\left(x^3+x^2-10x+8\right) : (x-1)
$$

<u>*Tipp:*</u> Ermitteln Sie das erste Glied des Ergebnisses, indem Sie x^3 durch x dividieren und multiplizieren Sie dieses mit dem Divisor:

$$\begin{array}{rl} & \left(x^3+x^2-10x+8\right) : (x-1) = x^2 \\ - & \left(x^3-x^2\right) \end{array}$$

<u>*Tipp:*</u> Ermitteln Sie den Rest und dividieren Sie diesen wie unter dem vorherigen Tipp beschrieben. Setzen Sie diese Schritte solange fort, bis kein teilbarer Rest mehr übrig bleibt.

$$\begin{array}{rlllll} & (x^3 & + \; x^2 & -10x & +8) & : (x-1) = x^2+2x-8 \\ - & (x^3 & + \; x^2) & & & \\ \hline (=) & & (2x^2 & -10x) & & \\ - & & (2x^2 & - \; 2x) & & \\ \hline (=) & & & (- \; 8x & +8) & \\ - & & & (- \; 8x & +8) & \\ \hline (=) & & & & 0 & \end{array}$$

<u>*Tipp:*</u> Berechnen Sie nun die anderen Nullstellen, indem Sie die p-q-Formel für x^2+2x-8 anwenden:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8} \\ &= -1 \pm \sqrt{9} \\ &= -1 \pm 3 \end{aligned}$$

$$x_2 = +2 \qquad x_2 = -4$$

Die Nullstellen lauten:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -4 \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 26*

Übung 4.3.3

Tipp: Sortieren Sie zunächst den Divisor entsprechend der Exponenten (größte Potenz zuerst). Dividieren Sie dann $3x^4$ durch $-x^2$. Lassen Sie sich nicht davon irritieren, dass der Divisor drei Glieder hat, sondern gehen Sie wie gewohnt vor. Ermitteln Sie dann den Rest und wiederholen Sie das Verfahren so oft wie nötig.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & (3x^4 & & -\ 3x^2 & -54x & -54) \ : (-x^2+2x+3) = -3x^2-6x-18 \\
- & (3x^4 & -6x^3 & -\ 9x^2) & & \\
\hline
(=) & & 6x^3 & +\ 6x^2 & -54x & \\
 & - & (6x^3 & -12x^2 & -18x) & \\
\hline
 & (=) & & 18x^2 & -36x & -54 \\
 & & - & (18x^2 & -36x & -54) \\
\hline
 & & (=) & & & 0
\end{array}$$

Die Lösung lautet:

$$-3x^2 - 6x - 18$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 27*

Übung 4.3.4

Tipp: Sortieren Sie nach Variable und Potenz. Dann erhalten Sie:

$$\left(a^3 + a^2b + ab^2 - 3b^3\right) : (a - b)$$

Tipp: Teilen Sie a^3 durch a und multiplizieren Sie das Ergebnis mit dem Divisor und ermitteln Sie den Rest. Ermitteln Sie dann den Rest und gehen Sie schließlich in gewohnter Weise erneut so vor.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & (a^3 & +\ a^2b & +\ ab^2 & -3b^3) & : (a-b) = a^2+2ab+3b^2 \\
- & (a^3 & -\ a^2b) & & & \\
\hline
(=) & & 2a^2b & +\ ab^2 & & \\
 & - & (2a^2b & -2ab^2) & & \\
\hline
 & (=) & & 3ab^2 & -3b^3 & \\
 & & - & (3ab^2 & -3b^3) & \\
\hline
 & & (=) & & 0 &
\end{array}$$

Die Lösung lautet:

$$a^2 + 2ab + 3b^2$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 27*

13.5 Lineare Funktionen

Übung 7.3.1

a) *Tipp:* Verwenden Sie eine geeignetet Formel, die die gegebenen Angaben berücksichtigt:

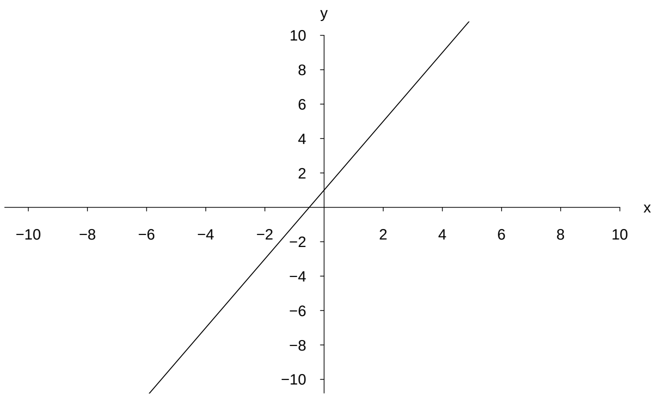
$$y = m\,(x - x_0) + y_0 \ .$$

Tipp: Setzen Sie die Angaben in die Formel ein:

$$y = 2(x - 0) + 1 \ .$$

Die Lösung lautet

$$y = 2x + 1 \ .$$



→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

b) *Tipp:* Kontrollieren Sie zunächst, ob die Zuordnung der Punkte die Definition einer Funktion erfüllen kann.

Hinweis: Es handelt sich um keine Funktion, da dem x-Wert 0 unendlich viele (anstatt einem eindeutigen) y-Werte zugeordnet werden.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

c) *Tipp:* Stellen Sie zuerst eine Funktionsgleichung auf, die die Gerade $y = x$ um 2 verschiebt. Die Wirkung der einzelnen Parameter kann im Kapitel über die allgemeinen Funktionseigenschaften nachgelesen werden. Diese Funktion lautet:

$$y = (x - 2)\ .$$

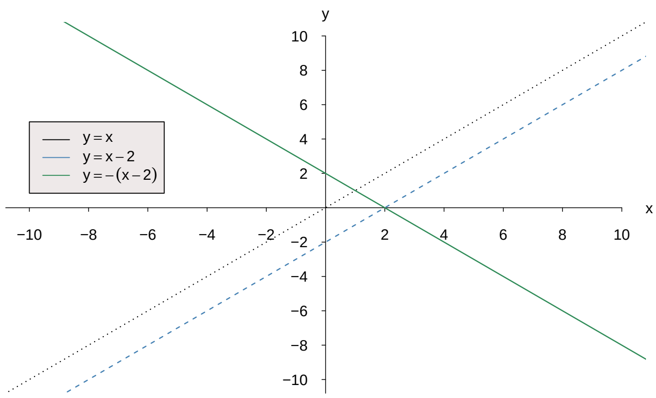
Tipp: Der Parameter a in einer Funktion $y = a \cdot f(bx + c)$ sorgt für eine Spiegelung an der x-Achse. Die gesuchte Funktion hat also die Form

$$y = a \cdot (x - 2)\ .$$

Tipp: Da angegeben ist, dass die Spiegelung ohne Stauchung bzw. Streckung erfolgen soll, kann a leicht bestimmt werden. Somit ist $a = -1$.

Die Funktion lautet:

$$y = -1 \cdot (x - 2)\ .$$



→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

Übung 7.3.2

a) *Tipp:* Berechnen Sie den Anstieg der gesuchten Geraden mit Hilfe der Formel

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \,.$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot m_2 &= -1 \\ m_2 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Tipp: Verwenden Sie nun die Formel, die eine Gerade durch die Steigung und einen Punkt definiert:

$$y = -\frac{1}{4}(x-0) + 3 \,.$$

Die Lösung lautet

$$y = -\frac{1}{4}x + 3 \,.$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

b) *Tipp:* Setzen Sie die Funktionsgleichungen gleich:

$$4x - 2 = -\frac{1}{4}x + 3 \,.$$

Tipp: Lösen Sie die Gleichung nach x auf:

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{4}x &= 3 + 2 \\ \frac{16}{4}x + \frac{1}{4}x &= 5 \\ \frac{17}{4}x &= 5 \\ x &= \frac{20}{17} \end{aligned}$$

Tipp: Setzen Sie den x-Wert in eine Gleichung ein, um den y-Wert zu berechnen:

$$\begin{aligned} y &= 4 \cdot \frac{20}{17} - 2 \\ &= \frac{80}{17} - 2 \\ &= \frac{80}{17} - \frac{34}{17} \\ &= \frac{46}{17}\,. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt lautet

$$S\left(\frac{20}{17}; \frac{46}{17}\right)\,.$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

Tipp: Verwenden Sie die Abstandsformel

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

Tipp: Setzen Sie nun die nötigen Angaben in die Formel ein:

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{\left(\frac{20}{17}-0\right)^2+\left(\frac{46}{17}-3\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{20}{17}\right)^2+\left(\frac{46}{17}-\frac{51}{17}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{20}{17}\right)^2+\left(\frac{-5}{17}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{400}{289}+\frac{25}{289}} \\
&= \sqrt{\frac{425}{289}} \\
&= \sqrt{\frac{25}{17}} \\
d &= \frac{5\cdot\sqrt{17}}{17}
\end{aligned}$$

Der Abstand zwischen den Punkten beträgt

$$\frac{5\cdot\sqrt{17}}{17}\,.$$

Hinweis: Durch die Aufgaben a) bis c) haben Sie zugleich den Abstand zwischen dem Punkt $P_1(0;3)$ und der Geraden $y=4x-2$ berechnet.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

Übung 7.3.3

a) *Tipp:* Stellen Sie zunächst die Ungleichung nach x um:

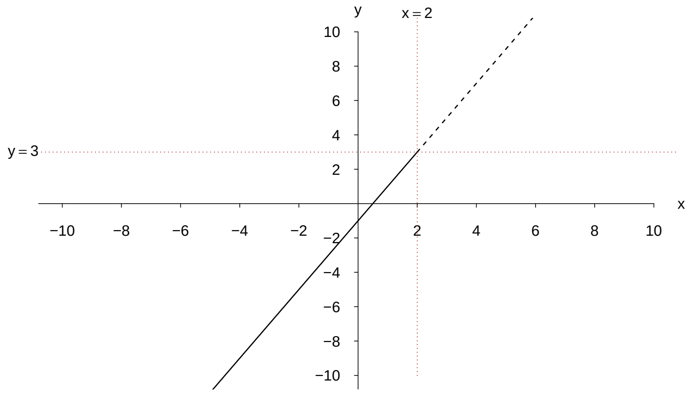
$$\begin{aligned}
2x &\leq 4 \\
x &\leq 2\,.
\end{aligned}$$

Tipp: Formulieren Sie nun das Ergebnis in Mengenschreibweise.

Die Lösung lautet

$$\mathfrak{L} = \{x \,|\, x \leq 2\} \ .$$

Es wurde also untersucht, für welchen Definitionsbereich die Funktion $f(x) = 2x - 1$ kleiner oder gleich dem y-Wert 3 ist. Dieser Sachverhalt wird auch in der Grafik dargestellt:



→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

b) *Tipp:* Beseitigen Sie zuerst die Brüche:

$$\begin{aligned} \frac{4(x+4)}{12} - \frac{3(x-3)}{12} &> \frac{6(x+4)}{12} \\ 4(x+4) - 3(x-3) &> 6(x+4) \ . \end{aligned}$$

Tipp: Stellen Sie nun die Ungleichung nach x um:

$$\begin{aligned} 4x + 16 - 3x + 9 &> 6x + 24 \\ 4x - 3x - 6x &> 24 - 16 - 9 \\ -5x &> -1 \ . \end{aligned}$$

Hinweis: Bitte beachten Sie, dass das multiplizieren bzw. dividieren mit einer negativen Zahl zu einer Umkehrung des Verhältniszeichens führt. Somit ergibt sich

$$x < \frac{1}{5} \ .$$

Tipp: Stellen Sie das Ergebnis nun in Mengenschreibweise dar.

Die Lösung lautet

$$\mathfrak{L} = \left\{ x \,|\, x < \frac{1}{5} \right\} .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

c) *Tipp:* Verwenden Sie die binomischen Formeln und fassen Sie dann die Ausdrücke zusammen:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 - \left(x^2 + 4x + 4\right) &< 3(2 - x) \\ x^2 - 6x + 9 - x^2 - 4x - 4 &< 6 - 3x \\ -10x + 5 &< 6 - 3x \,. \end{aligned}$$

Tipp: Stellen Sie die Ungleichung nach x um.

$$\begin{aligned} -7x &< 1 \\ x &> -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Tipp: Notieren Sie die Lösung in Mengenschreibweise.

Das Ergebnis lautet

$$\mathfrak{L} = \left\{ x \,|\, x > -\frac{1}{7} \right\} .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 48*

Übung 7.3.4

a) *Tipp:* Fassen Sie die Terme mit x auf einer Seite zusammen:

$$\begin{aligned} -ax + 2ax &\geq 10 - 5 \\ ax &\geq 5 \,. \end{aligned}$$

Tipp: Untersuchen Sie die drei möglichen Fälle $a = 0$, $a > 0$ und $a < 0$.

$$\begin{array}{lll}
(1)\; a = 0 & & 0 \cdot x \geq 5 \;\; \text{Unwahre Aussage} \\
& & \mathfrak{L}_1 = \emptyset \\
(2)\; a > 0 & & x \geq \dfrac{5}{a} \\
& & \mathfrak{L}_2 = \left\{ x \,|\, x \geq \dfrac{5}{a} \right\} \;\text{für}\;\; a > 0 \\
(3)\; a < 0 & & x \leq \dfrac{5}{a} \\
& & \mathfrak{L}_3 = \left\{ x \,|\, x \leq \dfrac{5}{a} \right\} \;\text{für}\;\; a < 0
\end{array}$$

Tipp: Fassen Sie nun die einzelnen Lösungsmengen der drei Fälle zusammen.

Die Lösung lautet

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} x \mid x \leq \dfrac{5}{a} & \text{für} \quad a < 0 \\ \emptyset & \text{für} \quad a = 0\,. \\ x \mid x \geq \dfrac{5}{a} & \text{für} \quad a > 0 \end{cases}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 49*

b) *Tipp:* Verwenden Sie die binomischen Formeln, um zusammenzufassen:

$$\begin{aligned}
a^2x^2 + 2abx + b^2 - \left(a^2x^2 - 2abx + b^2\right) &\leq 5 \\
a^2x^2 + 2abx + b^2 - a^2x^2 + 2abx - b^2 &\leq 5 \\
4abx &\leq 5 \\
abx &\leq \frac{5}{4}\,.
\end{aligned}$$

Tipp: Nehmen Sie nun die Fallunterscheidungen für $ab = 0$, $ab > 0$ und $ab < 0$ vor.

(1) $ab = 0$ Das bedeutet, dass a oder b null sein müssen.

$\mathfrak{L}_1 = \mathbb{R}$ für $a = 0 \vee b = 0$

(2) $ab > 0$ Beide Parameter müssen positiv/negativ sein

$x \leq \frac{5}{4ab}$

$\mathfrak{L}_2 = \left\{ x \,|\, x \leq \frac{5}{4ab} \right\}$ für $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

(3) $ab < 0$ Genau ein Parameter muss negativ sein

$x \geq \frac{5}{4ab}$

$\mathfrak{L}_3 = \left\{ x \,|\, x \geq \frac{5}{4ab} \right\}$ für $(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$

Tipp: Fassen Sie die Ergebnisse der Fallunterscheidungen zusammen.

Die Lösung lautet

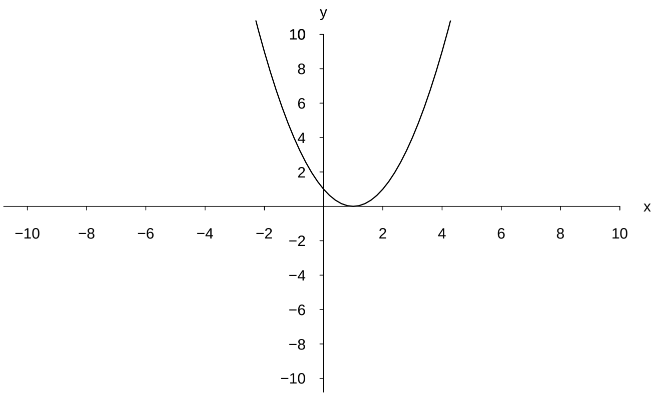
$$\mathfrak{L} = \begin{cases} x \mid x \geq \dfrac{5}{4ab} & \text{für} \quad ab < 0 \\ \mathbb{R} & \text{für} \quad ab = 0 \\ x \mid x \leq \dfrac{5}{4ab} & \text{für} \quad ab > 0 \end{cases}.$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 49*

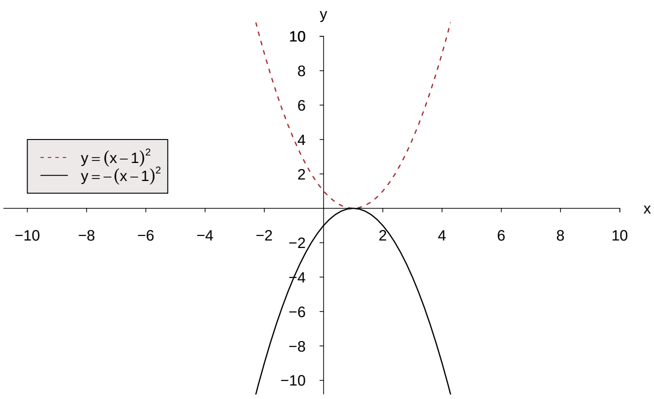
13.6 Quadratische Funktionen

Übung 8.3.1

a) *Tipp:* Gehen Sie von einer Normalparabel aus und zeichnen Sie zuerst $(x-1)^2$. Dabei handelt es sich um eine nach rechts verschobene Parabel.

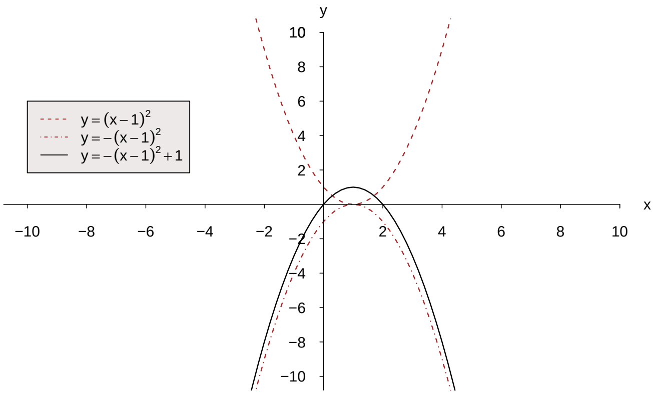


Tipp: Zeichnen Sie nun $-(x-1)^2$, indem Sie die Funktion an der x-Achse spiegeln.



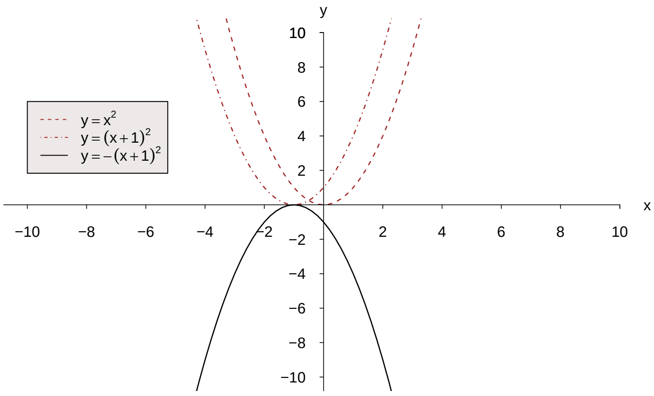
Tipp: Nun wird die Funktion $-(x-1)^2$ um eine Einheit nach oben verschoben.

Nachfolgende Grafik zeigt die Lösung:

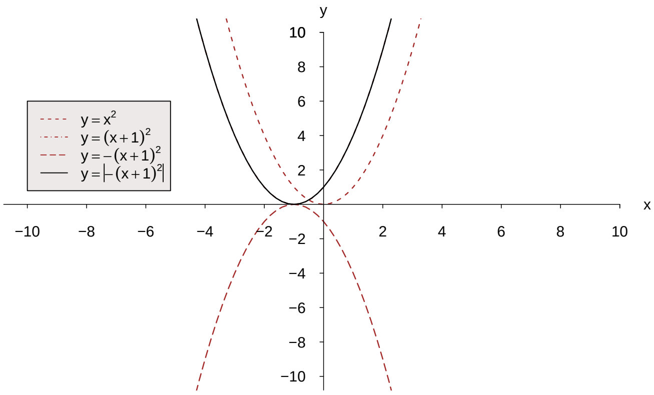


→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

b) *Tipp:* Zeichnen Sie die Funktion $-(x+1)^2$ schrittweise:

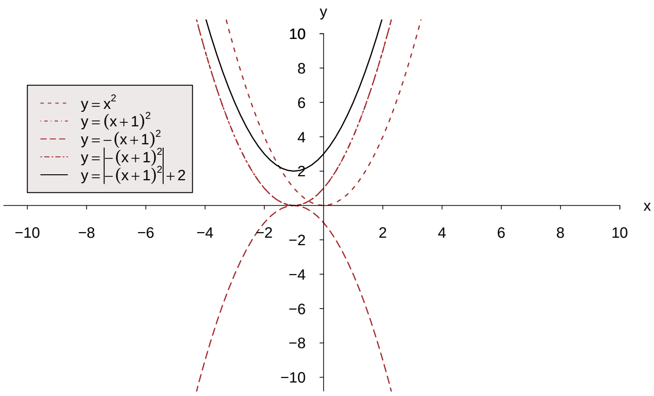


Tipp: Spiegeln Sie den Bereich der Funktion, der unterhalb der x-Achse liegt, an der x-Achse.



Tipp: Nun muss die erhaltene Funktion noch um 2 Einheiten nach oben verschoben werden.

Die Grafik zeigt die richtige Lösung der Aufgabe:



→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

c) *Tipp:* Um die Funktion exakt zeichnen zu können, muss sie durch quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktsform gebracht werden.

In der Funktion steckt eine binomische Formel der Art $x^2 + 2ax + a^2$. Es muss nun ermittelt werden, wie groß a ist:

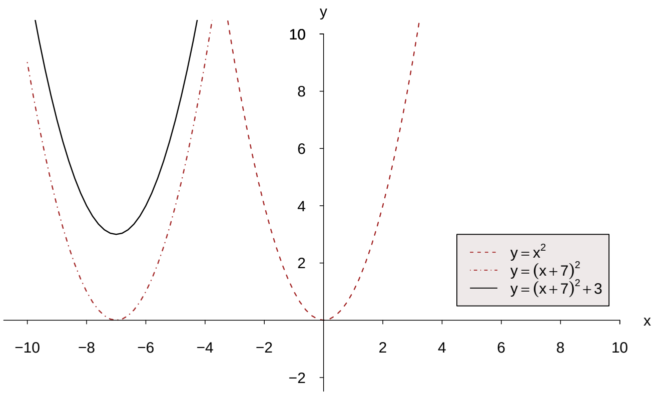
$$\begin{aligned} y &= x^2 + 14x + 52 \\ &= x^2 + 2 \cdot 7x + 7^2 + 3\,. \end{aligned}$$

Tipp: Nachdem $a = 7$ ermittelt wurde, kann das Wissen über binomische Formeln angewendet werden:

$$y = (x + 7)^2 + 3 .$$

Tipp: Zeichnen Sie die Funktion. indem Sie die Normalparabel um 7 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach oben verschieben.

Die Lösung wird in der Grafik dargestellt:



→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

d) *Tipp:* Bringen Sie die Funktion durch quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktform. Klammern Sie dazu zunächst 5 aus:

$$y = 5\left(x^2 - 6x + \frac{2}{5}\right) .$$

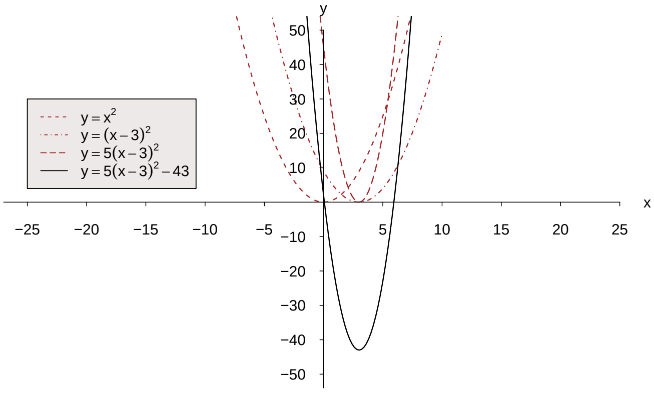
Hinweis: Wenn Sie 5 nicht ausklammern möchten, müssen Sie berücksichtigen, dass die binomische Formel die Form $5x^2 - 2\sqrt{5}ax + a^2$ hat. Dies macht die Lösung komplizierter.

Tipp: Ermitteln Sie nun in der Klammer die binomische Formel:

$$\begin{aligned} y &= 5\left(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 8\frac{3}{5}\right) \\ &= 5\left(x^2 - 6x + 9\right) - 5 \cdot 8\frac{3}{5} \\ &= 5(x-3)^2 - 43 . \end{aligned}$$

Tipp: Zeichnen Sie nun die Funktion, indem Sie ihr Wissen über Parameter bei Funktionen anwenden.

Die grafische Lösung ist in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

Übung 8.3.2

a) *Tipp:* Die Nullstellen sind dadurch definiert, dass der y-Wert Null ist. Deshalb muss die Funktion Null gesetzt werden:

$$5x^2 - 10x + 5 = 0\ .$$

Tipp: Formen Sie die Gleichung so um, dass die p-q-Formel angewendet werden kann:

$$x^2 - 2x + 1 = 0\ .$$

Tipp: Wenden Sie nun die p-q-Formel an.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} \\ &= 1 \pm \sqrt{1-1} \\ &= 1 \pm \sqrt{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Die Funktion hat nur eine Nullstelle bei

$$x_0 = 1.$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

b) *Tipp:* Die Funktion ist auf ungewöhnliche Weise dargestellt, doch es ist nicht notwendig das Produkt auszumultiplizieren. Setzen Sie die Funktion stattdessen gleich Null:

$$(x+5) \cdot (x-2) = 0\,.$$

Tipp: Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Deswegen reicht es aus, die Faktoren einzeln Null zu setzen.

$$\begin{aligned} x + 5 &= 0 \qquad & x - 2 &= 0 \\ x &= -5 & x &= 2 \end{aligned}$$

Die Funktion hat zwei Nullstellen in den Punkten

$$P_1(-5;0) \text{ und } P_2(2;0).$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

c) *Tipp:* Da a und m unbekannt sind, handelt es sich bei diesem Beispiel um eine Funktionsschar. Gehen Sie dennoch wie gewohnt vor, indem Sie die Funktion Null setzen:

$$ax^2 - \left(a^2m - m\right)x - am^2 = 0\ .$$

Tipp: Nun muss die Gleichung so umgeformt werden, dass die p-q-Formel anwendbar ist:

$$\begin{aligned} ax^2 - m\left(a^2 - 1\right)x - am^2 &= 0 \\ x^2 - \frac{m\left(a^2-1\right)}{a}x - m^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tipp: Wenden Sie die p-q-Formel an und vereinfachen Sie bereits in den Zwischenschritten so weit wie möglich, um optimal zusammenfassen zu können.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{\frac{m\left(a^2-1\right)}{a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{m(a^2-1)}{a}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{m\left(a^2-1\right)}{2a} \pm \sqrt{\frac{m^2\left(a^2-1\right)^2}{(2a)^2} + m^2} \\ &= \frac{m\left(a^2-1\right)}{2a} \pm \sqrt{\frac{m^2\left(a^2-1\right)^2 + 4a^2m^2}{4a^2}} \\ &= \frac{m\left(a^2-1\right)}{2a} \pm \sqrt{\frac{m^2\left(a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2\right)}{4a^2}} \\ &= \frac{m\left(a^2-1\right)}{2a} \pm \sqrt{\frac{m^2\left(a^4 + 2a^2 + 1\right)}{4a^2}} \\ &= \frac{m\left(a^2-1\right)}{2a} \pm \sqrt{\frac{m^2\left(a^2+1\right)^2}{4a^2}} \end{aligned}$$

Tipp: Da wegen der quadratischen Ausdrücke gesichert ist, dass der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, kann nun die Wurzel gezogen werden.

$$x_{1,2} = \frac{m\left(a^2-1\right)}{2a} \pm \frac{m\left(a^2+1\right)}{2a}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m\,(a^2-1)}{2a} + \frac{m\,(a^2+1)}{2a} \\ &= \frac{m\,(a^2-1) + m\,(a^2+1)}{2a} \\ &= \frac{m\,(a^2-1+a^2+1)}{2a} \\ &= \frac{m \cdot 2a^2}{2a} \\ &= m \cdot a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m\,(a^2-1)}{2a} - \frac{m\,(a^2+1)}{2a} \\ &= \frac{m\,(a^2-1) - m\,(a^2+1)}{2a} \\ &= \frac{m\,(a^2-1-a^2-1)}{2a} \\ &= \frac{m \cdot (-2)}{2a} \\ &= -\frac{m}{a} \end{aligned}$$

Die Funktionsschar besitzt Nullstellen in den Punkten

$$P_1(ma; 0) \text{ und } P_2(-\tfrac{m}{a}; 0).$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

Übung 8.3.3

a) *Tipp:* Setzen Sie beide Funktionen gleich, da ein Schnittpunkt den gleichen y-Wert in beiden Funktionen annimmt.

$$4x^2 + 10x - 3 = 5x + 2$$

Tipp: Formen Sie die Gleichung um, so dass die p-q-Formel angewendet werden kann:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 10x - 5x - 3 - 2 &= 0 \\ 4x^2 + 5x - 5 &= 0 \\ x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Tipp: Mit Hilfe der p-q-Formel können die x-Werte der Schnittpunkte (also die Schnittstellen) ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-\frac{5}{4}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{5}{4}}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} \\
&= -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{5}{4}} \\
&= -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{80}{64}} \\
&= -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{105}{64}} \\
&= -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{105}}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{105}}{8} = \frac{-5+\sqrt{105}}{8} &\approx\ & 0{,}66 \\
x_2 &= -\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{105}}{8} = \frac{-5-\sqrt{105}}{8} &\approx\ & -1{,}91
\end{aligned}
$$

Tipp: Nun müssen noch die y-Werte der Punkte ermittelt werden, indem man die x-Werte in eine der Funktionen einsetzt. Es bietet sich an, dazu die Geradengleichung zu verwenden.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{-5+\sqrt{105}}{8}\right) &= 5 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{8}\right) + 2 \\
&= \frac{-25+5\sqrt{105}}{8} + \frac{16}{8} \\
&= \frac{-9+5\sqrt{105}}{8} \\
&\approx 5{,}28
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{-5-\sqrt{105}}{8}\right) &= 5\cdot\left(\frac{-5-\sqrt{105}}{8}\right)+2 \\
&= \frac{-25-5\sqrt{105}}{8}+\frac{16}{8} \\
&= \frac{-9-5\sqrt{105}}{8} \\
&\approx -7{,}53
\end{aligned}$$

Die Funktionen schneiden sich näherungsweise in den Punkten

$$P_1(0{,}66; 5{,}28) \text{ und } P_2(-1{,}91; -7{,}53).$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

b) *Tipp:* Setzen Sie die Funktionen gleich:

$$4x^2+10x-3 = x^2+x+3\,.$$

Tipp: Formen Sie die Gleichungen um und wenden Sie die p-q-Formel an.

$$\begin{aligned}
4x^2-x^2+10x-x-3-3 &= 0 \\
3x^2+9x-6 &= 0 \\
x^2+3x-2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2} \\
&= -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{8}{4}} \\
&= -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{17}{4}} \\
&= -\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3+\sqrt{17}}{2} &\approx& \quad 0{,}56 \\ x_2 &= \frac{-3-\sqrt{17}}{2} &\approx& \quad -3{,}56 \end{aligned}$$

Tipp: Es müssen noch die y-Werte der Schnittpunkte berechnet werden. Setzen Sie dazu die x-Werte in eine der Funktionen ein.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right) &= \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right) + 3 \\ &= \frac{\left(-3+\sqrt{17}\right)^2}{4} + \frac{-6+2\sqrt{17}}{4} + \frac{12}{4} \\ &= \frac{9-6\sqrt{17}+17}{4} + \frac{-6+2\sqrt{17}}{4} + \frac{12}{4} \\ &= \frac{9+17-6+12-6\sqrt{17}+2\sqrt{17}}{4} \\ &= \frac{32-4\sqrt{17}}{4} \\ &\approx 3{,}88 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) &= \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) + 3 \\ &= \frac{\left(-3-\sqrt{17}\right)^2}{4} + \frac{-6-2\sqrt{17}}{4} + \frac{12}{4} \\ &= \frac{9+6\sqrt{17}+17}{4} + \frac{-6-2\sqrt{17}}{4} + \frac{12}{4} \\ &= \frac{9+17-6+12+6\sqrt{17}-2\sqrt{17}}{4} \\ &= \frac{32+4\sqrt{17}}{4} \\ &\approx 12{,}12 \end{aligned}$$

Die Parabeln scheiden ungefähr in den Punkten

$$P_1(0{,}56; 3{,}88) \text{ und } P_2(-3{,}56; 12{,}12).$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

c) *Tipp:* Gehen Sie trotz des Parameters a wie gewohnt vor, indem Sie die Funktionsvorschriften gleich setzen:

$$4x^2 + 10x - 3 = 3x^2 + (10 - 2a)x - 2 + 2a \,.$$

Tipp: Formen Sie die Gleichung um und wenden Sie die p-q-Formel an.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 3x^2 + 10x - 10x + 2ax - 3 + 2 - 2a &= 0 \\ x^2 + 2ax - 1 - 2a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{2a}{2} \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1} \\ &= -a \pm \sqrt{(a+1)^2} \end{aligned}$$

Achtung: Es muss gesichert sein, dass der Term unter der Wurzel positiv ist. Dies ist wegen des quadratischen Ausdrucks in diesem Fall gesichert.

$$x_{1,2} = -a \pm (a+1)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -a + (a+1) \\ &= -a + a + 1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= -a - (a+1) \\ &= -a - a - 1 \\ &= -2a - 1 \end{aligned}$$

Tipp: Nun müssen die y-Werte ermittelt werden.

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2a-1) &= 4(-2a-1)^2+10(-2a-1)-3 \\ &= 4\left(4a^2+4a+1\right)-20a-10-3 \\ &= 16a^2+16a+4-20a-10-3 \\ &= 16a^2-4a-9 \end{aligned}$$

Die Parabel schneidet die Parabelschar in den Punkten

$$P_1(1;11) \text{ und } P_2(-2a-1;16a^2-4a-9).$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

Übung 8.3.4

a) *Tipp:* Stellen Sie die Ungleichung so um, dass die p-q-Formel anwendbar ist.

$$\begin{aligned} x^2+2x^2+3x+3x-2-7 &< 0 \\ 3x^2+6x-9 &< 0 \\ x^2+2x-3 &< 0 \end{aligned}$$

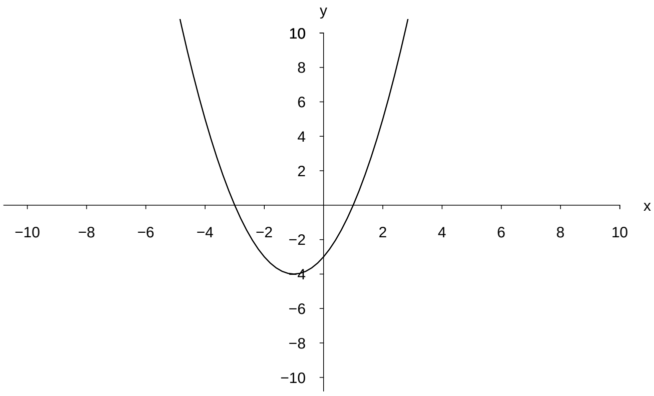
Tipp: Wenden Sie die p-q-Formel nun an, um die Nullstellen der Funktion $f(x)=x^2+2x-3$ zu ermitteln.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+3} \\ &= -1 \pm \sqrt{1+3} \\ &= -1 \pm \sqrt{4} \\ &= -1 \pm 2 \\ x_1 = 1 & \qquad x_2 = -3 \end{aligned}$$

<u>*Tipp:*</u> Nehmen Sie eine quadratische Ergänzung vor, um die Funktion besser zeichnen zu können.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x - 3 \\ &= x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 4 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

<u>*Tipp:*</u> Zeichnen Sie die Funktion und notieren Sie die Lösungsmenge.



Die Lösung lautet

$$\mathfrak{L} = (-3; 1) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{L} = \{x \mid -3 < x < 1\}$$

Hinweis: Bitte beachten Sie, dass die Nullstellen nicht Teil der Lösungsmenge sind.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

b) <u>*Tipp:*</u> Beseitigen Sie zuerst die Brüche:

$$\begin{aligned} \frac{3x(x+2)}{15} - \frac{x+3}{15} &> \frac{5x+25}{15} \\ 3x(x+2) - x - 3 &> 5x + 25 \,. \end{aligned}$$

Tipp: Stellen Sie die Ungleichung so um, dass Sie die Nullstellen berechnen können.

$$\begin{aligned} 3x^2+6x-x-3 &> 5x+25 \\ 3x^2+6x-x-5x-3-25 &> 0 \\ 3x^2-28 &> 0 \\ x^2-\frac{28}{3} &> 0 \end{aligned}$$

Tipp: Nun können die Nullstellen ermittelt werden.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2+\frac{28}{3}} \\ &= 0 \pm \sqrt{\frac{28}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{28}{3}} &\approx& \quad 3{,}06 \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{28}{3}} &\approx& \quad -3{,}06 \end{aligned}$$

Tipp: Setzen Sie nun z.B. einen Wert zwischen $-\sqrt{\frac{28}{3}}$ und $\sqrt{\frac{28}{3}}$ ein um zu ermitteln, ob die Funktion $x^2-\frac{28}{3}$ zwischen oder außerhalb der Nullstellen größer Null ist. Wir wählen den Testwert 0:

$$f(0) = 0^2-\frac{28}{3} = -\frac{28}{3}\ .$$

Die Funktion ist also außerhalb der Nullstellen größer Null.

Die Lösung lautet demnach

$$\mathfrak{L} = (-\infty; -\sqrt{\frac{28}{3}}) \ \cup \ (\sqrt{\frac{28}{3}}; +\infty)$$

bzw.

$$\mathfrak{L} = \{x \mid x < -\sqrt{\frac{28}{3}} \ \vee \ x > \sqrt{\frac{28}{3}}\} .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

c) *Tipp:* Stellen Sie die Ungleichung um, sodass Sie leicht die Nullstellen ermitteln können. Prüfen Sie genau, wie Sie dies möglichst leicht erreichen können.

$$\begin{aligned}(2x+8)\cdot(2x-8) &= (2x)^2 - 8^2 \\ 4x^2 - 64 &< 4x \\ 4x^2 - 64 - 4x &< 0 \\ x^2 - x - 16 &< 0\end{aligned}$$

Hinweis: Anstatt auszumultiplizieren kann leicht eine binomische Formel angewendet werden. Dadurch kann während der Berechnung Zeit gespart werden, was auch in Klausuren von großem Vorteil sein kann. Sollten Sie mit den binomischen Formeln noch Probleme haben, können Sie diese im entsprechenden Kapitel erneut üben.

Tipp: Ermitteln Sie nun die Nullstellen.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 16} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{0{,}25 + 16} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{16{,}25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2} + \sqrt{16{,}25} &\approx& \quad 4{,}53 \\ x_2 &= \frac{1}{2} - \sqrt{16{,}25} &\approx& \quad -3{,}53\end{aligned}$$

Tipp: Ermitteln Sie, ob die Funktion $f(x) = x^2 - x - 16$ zwischen oder außerhalb der Nullstellen negativ ist. Sie können diese Untersuchung mit einem der beiden Verfahren aus den Teilaufgaben a) und b) durchführen. Zum Beispiel können Sie den Testwert 0 einsetzen:

$$f(0) = 0^2 - 0 - 16 = -16 \ .$$

Die Funktion ist also zwischen den Nullstellen negativ.

Die Lösung lautet

$$\mathfrak{L} = \{x \mid -3{,}53 < x < 4{,}53\} \ .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 64*

13.7 Potenz- und Wurzelfunktionen, Wurzelgleichungen

Übung 9.3.1

Tipp: Als erstes empfiehlt es sich, den Definitionsbereich zu bestimmen. Dabei muss gelten

$$\begin{array}{rrcr} x-1 \geq 0, & x+1 \geq \ \ 0 & \text{und} & 2x+1 \geq \ \ 0 \\ x \geq 1, & x \geq -1 & \text{und} & x \geq -\frac{1}{2} \end{array}$$

Somit lautet der Definitionsbereich

$$x \in [1; +\infty) \ .$$

Tipp: Nun sollte man die Gleichung auf beiden Seiten quadrieren. Dabei ist besonders zu beachten, dass auf der linken Seite eine binomische Formel entsteht.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)^2 &= \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \\ x - 1 + 2\sqrt{x^2-1} + x + 1 &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Tipp: Nun ist die Gleichung so umzuformen, dass auf einer Seite die Wurzel steht und auf der anderen die restlichen Terme:

$$\sqrt{x^2-1} = 0{,}5$$

Tipp: Nun lässt sich die Gleichung noch einmal auf beiden Seiten quadrieren:

$$x^2 - 1 = 0{,}25$$

Die Lösung lautet ausschließlich

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}\ ,$$

da die andere denkbare Lösung $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ entfällt. Diese ist kein Teil des Definitionsbereiches.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 74*

Übung 9.3.2

Tipp: Bestimmen Sie zunächst den Definitionsbereich für x:

$$3x+4 \geq 0, \quad 2x-5 \geq 0 \quad \text{und} \quad 3x-5 \geq 0$$

Damit lautet der Definitionsbereich

$$x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)\ .$$

Tipp: Anschließend sollten Sie die Gleichung wieder auf beiden Seiten quadrieren. Wiederum ergibt sich auf der linken Seite eine binomische Formel.

$$75x + 100 - 30\sqrt{3x+4}\sqrt{2x-5} + 18x - 45 = 48x - 80$$

Tipp: Nun können Sie die Gleichung so umformen, dass die Wurzel auf einer Seite steht und der Rest auf der anderen:

$$-30\sqrt{6x^2-7x-20} = -45x - 135$$

Tipp: Jetzt können Sie die Gleichung noch einmal quadrieren und die entstandene quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 - \frac{82}{15}x - \frac{161}{15} = 0$$

DIe Lösung lautet

$$x = 7\ .$$

Die Lösung $x = -1\frac{8}{15}$ entfällt auf Grund der Unvereinbarkeit mit dem Definitionsbereich.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 74*

Übung 9.3.3

Tipp: Bestimmen Sie zunächst wie gewohnt den Definitionsbereich für x. Auf Grund des Quadrates bleibt der Term a^2 unter der Wurzel immer positiv.

$$x + 5a^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x - 3a^2 \geq 0$$

Damit gilt für den Definitionsbereich

$$x \in \left[3a^2, +\infty\right)\ .$$

Tipp: Nun kann die Gleichung auf beiden Seiten quadriert werden. Dabei ist auf die rechte Seite zu achten, da dort eine binomische Formel auftritt.

$$x + 5a^2 = 16a^2 - 8a\sqrt{x - 3a^2} + x - 3a^2$$

Tipp: Analog zu den vorherigen Übungen wird die Gleichung nun so umgeformt, dass die Wurzel auf einer Seite der Gleichung isoliert ist:

$$a = \sqrt{x - 3a^2}\ .$$

Tipp: Anschließend wird der Ausdruck noch einmal quadriert und die Formel nach x umgestellt:

$$a^2 = x - 3a^2\ .$$

Die Lösung lautet

$$x = 4a^2\ .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 75*

Übung 9.3.4

Tipp: Bestimmen Sie zunächst den Definitionsbereich für x:

$$x - 4ab \geq 0 \quad 9x + 4ab \geq 0 \quad \text{und} \quad x - ab \geq 0\ .$$

Der Definitionsbereich lautet somit

$$x \in [4ab; +\infty)\ .$$

Tipp: Die Gleichung wird nun auf beiden Seiten quadriert. Dabei ist wiederum das Auftreten einer binomischen Formel auf der linken Seite der Gleichung zu beachten.

$$x - 4ab + 2\sqrt{x - 4ab}\sqrt{9x + 4ab} + 9x + 4ab = 16x - 16ab$$

Tipp: In gewohnter Vorgehensweise wird die Wurzel auf einer Seite der Gleichung isoliert:

$$\sqrt{9x^2 - 32abx - 16a^2b^2} = 3x - 8ab\ .$$

Tipp: Jetzt müssen Sie die Gleichung nur noch ein weiteres Mal quadrieren und schließlich nach x auflösen.

Die Lösung lautet

$$x = 5ab\ .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 75*

13.8 Exponential- und Logarithmusfunktionen und -gleichungen

Übung 10.3.1

Tipp: Wenden Sie die Potenzgesetze an und formen Sie die Gleichung entsprechend um:

$$2^{2x}\left(2^3 + 3\right) = 22\ .$$

Tipp: Vereinfachen Sie nun die Gleichung:

$$2^{2x} = 2\ .$$

Tipp: Bei gleicher Basis müssen die Exponenten gleich sein, also muss gelten:

$$2x = 1 \; .$$

Die Lösung lautet somit

$$x = \frac{1}{2} \; .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 84*

Übung 10.3.2

Tipp: Wenden Sie zunächst wieder die Potenzgesetze an:

$$a^{\frac{3x-7}{2}} = a^{\frac{4x-3}{3}} \; .$$

Tipp: Bei gleicher Basis müssen auch die Exponenten gleich sein:

$$\frac{3x-7}{2} = \frac{4x-3}{3}$$

Nun muss die Gleichung nur noch nach x umgestellt werden.

Die Lösung lautet

$$x = 15 \; .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 84*

Übung 10.3.3

Tipp: Wenden Sie zunächst das entsprechende Potenzgesetz an und formen Sie die Gleichung um:

$$4^x \left(4^3 - 13 \cdot 4\right) = 2^{3x} \left(2^{-1} - 2^{-3}\right) \; .$$

Tipp: Vereinfachen Sie anschließend den Term:

$$32 \cdot 4^x = 2^{3x} \; .$$

Tipp: An dieser Stelle können Sie die Gleichung entweder logarithmieren oder weiter vereinfachen. ($32 = 2^5$ und $4 = 2^2$)

$$\begin{aligned} &a) \quad x \lg 4 + \lg 32 = 3x \lg 2 \\ &b) \quad 2^{5+2x} = 2^{3x} \,. \end{aligned}$$

Beide Rechenwege führen zur Lösung

$$x = 5 \,.$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 84*

Übung 10.3.4

Tipp: Da die Basis auf beiden Seiten der Gleichung verschieden ist, sollten Sie zuerst logarithmieren:

$$\frac{2x+1}{x+2} \lg 32 = \frac{6x-1}{4x-1} \lg 4 \,.$$

Tipp: Die Gleichung sollten Sie nun so umformen, dass die Logarithmen auf einer Seite stehen und Brüche auf der anderen:

$$\frac{2x+1}{x+2} \cdot \frac{4x-1}{6x-1} = 0{,}4 \,.$$

Nun können Sie die Gleichung leicht umformen und vereinfachen:

$$5{,}6x^2 - 2{,}4x - 0{,}2 = 0$$

Die entstandene quadratische Gleichung können Sie nun in gewohnter Weise lösen. Abschließend sollten Sie die Probe nicht vergessen.

Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}5 \\ x_2 &= -\frac{1}{14} \,. \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 84*

Übung 10.3.5

Tipp: Stellen Sie die Gleichung so um, dass alle logarithmischen Ausdrücke auf einer Seite stehen:

$$\lg(2x+3) - \lg(x+1) = 1 \; .$$

Tipp: Wenden Sie nun das betreffende Logarithmengesetz an, um die beiden Ausdrücke zusammenzufassen:

$$\lg\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = 1 \; .$$

Tipp: Da es sich um einen dekadischen Logarithmus handelt, folgt

$$\frac{2x+3}{x+1} = 10^1 = 10 \; .$$

Tipp: Nun müssen Sie die Gleichung nur noch nach x auflösen.

Die Lösung lautet

$$x = -\frac{7}{8} \; .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 84*

Übung 10.3.6

Tipp: Fassen Sie zunächst die beiden Logarithmus-Ausdrücke zusammen:

$$\log_x\left(4\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \; .$$

Tipp: Lösen Sie nun den Logarithmus auf:

$$4\sqrt{2} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \; .$$

Tipp: Nun können Sie die Gleichung auf beiden Seiten quadrieren.

Als Lösung erhalten Sie

$$x = 32 \; .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 85*

Übung 10.3.7

Tipp: Untersuchen Sie zuerst den Definitionsbereich der Gleichung, beide Logarithmen müssen existieren. Deshalb gilt

$$\boldsymbol{D} = \{x \in \Re | x > 9\} \; .$$

Tipp: Formen Sie die Gleichung nun mit den passenden Logarithmengesetzen um und versuchen Sie dabei eine Vereinfachung herbeizuführen:

$$\frac{1}{2} \lg\big((2x-1)(x-9)\big) = 1 \; .$$

Tipp: Lösen Sie nun den Logarithmus auf:

$$2x^2 - 19x + 9 = 10^2 \; .$$

Tipp: Die somit entstandene Gleichung lässt sich nun leicht mit Hilfe der p-q-Formel auflösen.

Sie erhalten die beiden Lösungen

$$x_1 = 13 \quad \text{und} \quad x_2 = -3{,}5 \; .$$

Da $x_2 = -3{,}5 \notin \boldsymbol{D}$, ist dieser Wert eine Scheinlösung und entfällt.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 85*

Übung 10.3.8

Tipp: Formen Sie die Gleichung zunächst um:

$$3\big(\lg(x)\big)^{\frac{1}{2}} - \lg(x) = 2 \; .$$

Tipp: In dieser Situation bietet sich eine Substitution der Form $z = \lg(x)$ an:

$$3 \cdot \sqrt{z} - z = 2 \, .$$

Tipp: Stellen Sie die Gleichung nun so um, dass der Wurzelausdruck auf einer Seite isoliert ist:

$$3 \cdot \sqrt{z} = 2 + z \, .$$

Tipp: Nun können Sie die Gleichung quadrieren und erhalten

$$\begin{aligned} 9z &= z^2 + 4z + 4 \\ z_1 = 4 & \qquad z_2 = 1 \, . \end{aligned}$$

Tipp: Schließlich müssen Sie die Ausdrücke resubstituieren und erhalten

$$4 = \lg(x) \quad \text{und} \quad 1 = \lg(x) \, .$$

Die Lösungen lauten

$$x_1 = 10000 \quad \text{und} \quad x_2 = 10 \, .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 85*

13.9 Trigonometrische Funktionen

Übung 11.3.1

Tipp: Ersetzen Sie zunächst $\tan x$ durch $\frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x = 0 \, .$$

Tipp: Klammern Sie nun $\sin x$ aus:

$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right) = 0 \, .$$

Tipp: Bei einem Produkt, das gleich 0 ist, muss einer der Faktoren ebenfalls 0 sein:

$$\sin x = 0 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{\cos x} + 1 = 0 \, .$$

Tipp: Nun können Sie beide Gleichungen separat lösen:

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x = -1 \, .$$

Die Lösungen lauten:

$$x_1 = 0 \, , \quad x_2 = \pi \, , \quad x_3 = 2\pi \, .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 94*

Übung 11.3.2

Tipp: Wenden Sie den trigonometrischen Satz des Pythagoras an: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\left(1 - \sin^2 x\right) - 2 \sin x + 2 = 0 \, .$$

Tipp: Nun können Sie die Gleichung vereinfachen und $\sin x = u$ substituieren:

$$-u^2 - 2u + 3 = 0 \, .$$

Tipp: Lösen Sie anschließend die quadratische Gleichung und resubstituieren Sie die trigonometrische Funktion.

$$\sin x = -3 \quad \text{und} \quad \sin x = 1 \, .$$

Die Lösung heißt

$$x = \frac{\pi}{2} \, .$$

Hinweis: Der Ausdruck $\sin x = -3$ ist nicht lösbar, da der Wertebereich der Sinusfunktion $[-1{,}1]$ ist.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 95*

Übung 11.3.3

Tipp: Nutzen Sie die Formel $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$. Für $\sin^2(2x)$ gilt dann:

$$\sin^2(2x) = (2\sin x \cos x)^2 \ .$$

Es folgt für die Ausgangsgleichung somit

$$\begin{aligned} & \sin^4 x + \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \\ = \ & \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \ . \end{aligned}$$

Tipp: Wenden Sie nun die erste binomische Formel an:

$$\begin{aligned} & \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \\ = \ & \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 \ . \end{aligned}$$

Tipp: Jetzt können Sie den trigonometrischen Pythagoras nutzen:

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = (1)^2 \ .$$

Die Lösung lautet schließlich

$$1 \ .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 95*

Übung 11.3.4

Tipp: Mit Hilfe des trigonometrischen Satzes des Pythagoras erhalten Sie

$$\left(1 - \cos^2 x\right)^2 - \cos^4 x \ .$$

Tipp: Nun können Sie die zweite binomische Formel anwenden:

$$1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x - \cos^4 x \ .$$

Tipp: Nun wenden Sie nochmals den trigonometrischen Satz des Pythagoras an:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos^2 x \ .$$

Tipp: Nun können Sie noch -1 ausklammern und das Additionstheorem für $\cos(2x)$ anwenden:

$$-\left(-\sin^2 x + \cos^2 x\right) \ .$$

Als Lösung erhalten Sie

$$-\cos(2x) \ .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 95*

13.10 Funktionen in Polarkoordinaten

Übung 12.3.1

a) *Tipp:* Nutzen Sie die gegebenen Formeln für die Umrechnung und setzen Sie die Werte ein:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Tipp: Der Winkel φ_A liegt im 1. Quadranten, der Winkel φ_B befindet sich im 3. Quadranten.

Die Lösung lautet

$$A(3{,}61; 33{,}69°)$$

$$B(11{,}4; 232{,}13°)$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 104*

b) *Tipp:* Die Werte für r und φ müssen nur in die entsprechenden Formeln eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

Die Lösung ist demnach

$$C(4{,}33; 2{,}5)$$
$$D(0; -2{,}5)$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 104*

Übung 12.3.2

Tipp: Zur Umrechnung einer Kurvengleichung werden die folgenden Formeln verwendet:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \,. \end{aligned}$$

Diese können Sie in die gegebene Kurvengleichung einsetzen:

$$\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2 - \left(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right) \;.$$

Tipp: Klammern Sie nun r aus beiden Ausdrücken aus:

$$\begin{aligned} \left(r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\right)^2 - r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) &= 0 \\ r^4\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)^2 - r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Tipp: Beachten Sie, dass $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ und $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$ ist, dann erhalten Sie folgende Vereinfachung:

$$r^4 - r^2\cos 2\varphi = 0\,.$$

Tipp: Teilen Sie die ganze Gleichung durch r^2 und stellen Sie diese dann nach r um.

Die Lösung lautet

$$K : r = \sqrt{\cos 2\varphi}\,.$$

→ Zur Aufgabe auf Seite 104

Übung 12.3.3

Tipp: Die Formeln

$$\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}$$

können Sie nach $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ umstellen. Beachtet man noch, dass $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ist, dann erhalten Sie

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \end{aligned}$$

Nun können Sie diese Ausdrücke in die ursprüngliche Formel einsetzen:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{b\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + c\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}\,.$$

Tipp: Nun können Sie die beiden Terme im Nenner zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{a}{\frac{bx+cy}{\sqrt{x^2+y^2}}} \\
&= \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{bx+cy}\ .
\end{aligned}$$

Tipp: Nun können Sie die Gleichung auf beiden Seiten mit $bx + cy$ multiplizieren. Anschließend können Sie die Gleichung durch $\sqrt{x^2+y^2}$ teilen und alles auf eine Seite der Gleichung bringen.

Die Lösung lautet

$$K(x,y) : bx + cy - a = 0\ .$$

→ Zur Aufgabe auf Seite 104

Übung 12.3.4

Tipp: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\
r^2 &= 2e^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\ .
\end{aligned}$$

Tipp: Aus den Formeln $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$ können Sie $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ herleiten. Diesen Schritt haben Sie bereits in Aufgabe 3 geübt. Nun setzen Sie die Ausdrücke in die gegebene Gleichung ein:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 &= 2e^2\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\right) \\
x^2+y^2 &= 2e^2 \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ .
\end{aligned}$$

Tipp: Die Gleichung können Sie jetzt mit $x^2 + y^2$ multiplizieren und anschließend alle Terme auf eine Seite bringen.

Die Lösung lautet demnach

$$K(x,y) : \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2e^2\left(x^2 - y^2\right) = 0 \; .$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 104*

14 Hinweise und Lösungen zu den Tests

14.1 Umstellen von Gleichungen

Test 1.4.1

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\quad g = y \cdot \left(\dfrac{R_3 \cdot R_2}{R_4} - \dfrac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{C_4 \cdot R_3}\right)$

Falsch! Diese Antwort ist leider falsch.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\quad g = \dfrac{y \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C_4}{C_4 \cdot {R_3}^2 \cdot R_2 - R_4 \cdot R_0 \cdot 10 \cdot x^2}$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\quad g = \dfrac{C_4 \cdot R_3^2 \cdot R_2 - R_4 \cdot R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{y \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C_4}$

Falsch! Sie haben vermutlich einen Fehler beim Beseitigen der Doppelbrüche gemacht.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\quad g = \dfrac{y}{\frac{R_3 \cdot R_2}{R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{C_4 \cdot R_3}}$

Richtige Lösung! Diese Lösung ist zwar nicht falsch, jedoch sollten noch die Doppelbrüche beseitigt werden, um auf die Form $\boxed{\mathbf{2}}$ zu kommen.

Der Lösungsweg lautet

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{g^2 \cdot R_3 \cdot R_2}{g \cdot R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2 \cdot g}{C_4 \cdot R_3} \\
y &= \frac{g \cdot R_3 \cdot R_2}{R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2 \cdot g}{C_4 \cdot R_3} \\
y &= g \cdot \left(\frac{R_3 \cdot R_2}{R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{C_4 \cdot R_3} \right) \\
g &= \frac{y}{\frac{R_3 \cdot R_2}{R_4} - \frac{R_0 \cdot 10 \cdot x^2}{C_4 \cdot R_3}} \\
&= \frac{y \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot C_4}{C_4 \cdot {R_3}^2 \cdot R_2 - R_4 \cdot R_0 \cdot 10 \cdot x^2}
\end{aligned}
$$

→ Zur Aufgabe auf Seite 11

Test 1.4.2

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f_L = \left((m_1 - \sqrt[3]{a^5} - u_t) \cdot \beta \right)^2$

Falsch! Sie müssen beachten, dass bei der Division der Gleichung durch β dieser Parameter in den Nenner der Gleichung gelangt.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f_L = \left(\frac{m_1 - \sqrt[3]{a^5} - u_t}{\beta} \right)^2$

Falsch! Wenn Sie den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{f_L}}$ umkehren, dann müssen Sie dies auch mit der anderen Seite machen.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f_L = \left(\frac{\beta}{m_1 - \sqrt[3]{a^5} - u_t} \right)^2$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f_L = \left((m_1 + \sqrt[3]{a^5} + u_t) \cdot \beta \right)^2$

Falsch! Sie haben zusätzlich zu dem Fehler in $\boxed{\mathbf{1}}$ auch einen Vorzeichenfehler gemacht.

Der Lösungsweg lautet

$$\begin{aligned}
m_1 - \sqrt[3]{\alpha^5} - u_t &= \beta \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{f_L}} \right) \\
\frac{m_1 - \sqrt[3]{\alpha^5} - u_t}{\beta} &= \frac{1}{\sqrt{f_L}} \\
\sqrt{f_L} &= \frac{\beta}{m_1 - \sqrt[3]{\alpha^5} - u_t} \\
f_L &= \left(\frac{\beta}{m_1 - \sqrt[3]{\alpha^5} - u_t} \right)^2
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 11*

Test 1.4.3

$\boxed{\mathbf{1}}$ $c = U_d \cdot \dfrac{1}{-\frac{U_a - U_b}{f} + \frac{U_c}{A}}$

Falsch! Der Ausdruck $\frac{U_c}{A} - \frac{U_d}{C}$ muss mit f multipliziert werden. Sie haben aber den genannten Ausdruck durch f geteilt.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $c = U_d \cdot \dfrac{1}{-\frac{U_a - U_b}{f} + \frac{U_c}{A}}$

Richtige Lösung! Sie sollten allerdings noch die Doppelbrüche beseitigen, um auf die Form $\boxed{\mathbf{3}}$ zu kommen.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $c = \dfrac{U_d \cdot f \cdot A}{(U_b - U_a) \cdot A + U_c \cdot f}$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{4}}$ $c = \dfrac{(U_a - U_d) \cdot f}{(U_a - U_b) \cdot A}$

Falsch! Vermutlich haben Sie einen Fehler beim Bilden des gemeinsamen Nenners gemacht:

$$\frac{U_c}{A} - \frac{U_d}{C} \neq \frac{U_c - U_d}{A \cdot C}.$$

Der Lösungsweg lautet

$$\begin{aligned}
f \cdot \left(\frac{U_c}{A} - \frac{U_d}{C}\right) &= U_a - U_b \\
\frac{U_c}{A} - \frac{U_d}{C} &= \frac{U_a - U_b}{f} \\
-\frac{U_d}{C} &= \frac{U_a - U_b}{f} - \frac{U_c}{A} \\
\frac{U_d}{C} &= -\frac{U_a - U_b}{f} + \frac{U_c}{A} \\
\frac{1}{C} &= \frac{1}{U_d}\left(-\frac{U_a - U_b}{f} + \frac{U_c}{A}\right) \\
C &= U_d \cdot \frac{1}{(-\frac{U_a - U_b}{f} + \frac{U_c}{A})} \\
&= \frac{U_d \cdot f \cdot A}{(U_b - U_a) \cdot A + U_c \cdot f}
\end{aligned}$$

→ Zur Aufgabe auf Seite 12

Test 1.4.4

1 $r_2 = \left(\dfrac{Q_1 \cdot r_1 \cdot d \cdot r_3}{-4 \cdot \phi \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_1 \cdot d \cdot r_3 + Q_1 \cdot d \cdot r_3 + r_0 \cdot Q_1 \cdot r_1}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{r_0 A}{d}\right)^2 - B$

Richtige Lösung! Sie haben die Aufgabe richtig gelöst.

2 $r_2 = \left(-\dfrac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} + \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{r_0}{d \cdot r_3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{r_0 A}{d}\right)^2 + B$

Falsch! Diese Lösung ist leider nicht korrekt.

Der Lösungsweg lautet

$$\begin{aligned}
\frac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} &= \frac{1}{r_1} - \frac{r_0}{d}\frac{A}{\sqrt{r_2+B}} + \frac{r_0}{d\cdot r_3} \\
\frac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} - \frac{1}{r_1} - \frac{r_0}{d\cdot r_3} &= -\frac{r_0}{d}\frac{A}{\sqrt{r_2+B}} \\
-\frac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{r_0}{d\cdot r_3} &= \frac{r_0}{d}\frac{A}{\sqrt{r_2+B}} \\
\left(-\frac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{r_0}{d\cdot r_3}\right)\cdot\frac{d}{r_0 A} &= \frac{1}{\sqrt{r_2+B}} \\
\frac{1}{\left(-\frac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{r_0}{d\cdot r_3}\right)}\cdot\frac{r_0 A}{d} &= \sqrt{r_2+B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{1}{\left(-\frac{4\phi\pi\varepsilon}{Q_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{r_0}{d\cdot r_3}\right)^2}\cdot\left(\frac{r_0 A}{d}\right)^2 - B \\
r_2 &= \left(\frac{Q_1\cdot r_1\cdot d\cdot r_3}{-4\cdot\phi\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r_1\cdot d\cdot r_3 + Q_1\cdot d\cdot r_3 + r_0\cdot Q_1\cdot r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{r_0 A}{d}\right)^2 - B
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 12*

14.2 Potenzen und Wurzeln

Test 2.4.1

1 $y = \alpha^{k-m-f+l-4}\cdot\beta^{k-\frac{7}{2}}\cdot\mu^{\frac{3}{2}}\cdot\psi^{m+2}\cdot\gamma^{-5}\cdot\Omega$

Falsch! Sie haben in der Aufgabenstellung die Division übersehen.

2 $y = \alpha^{\frac{k-3}{(m+f)(l-1)}}\cdot\beta^{\frac{k-3}{2}}\cdot\mu\cdot\psi^{m+2}\cdot\gamma^{-5}\cdot\Omega$

Falsch! Wenn zwei Ausdrücke mit gleicher Basis multipliziert bzw. dividiert werden, dann werden die Potenzen miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert. Sie haben aber multipliziert bzw. dividiert.

3 $y = \alpha^{k-m-f-l-2}\cdot\beta^{k-\frac{5}{2}}\cdot\mu^{\frac{5}{2}}\cdot\psi^{m+2}\cdot\gamma^{-5}\cdot\Omega^{-1}$

Richtige Lösung!

$\boxed{4}$ $y = \alpha^{k+m+f+l-4} \cdot \beta^{k-\frac{5}{2}} \cdot \mu^{\frac{5}{2}} \cdot \psi^{m+2} \cdot \gamma^{-5} \cdot \Omega^{-1}$

Falsch! Sie haben vergessen, dass der positive Exponent im Nenner negativ wird, wenn man den entsprechenden Ausdruck in den Zähler schreibt. Statt $a^{k-3} \cdot a^{-(m+f)}$ wurde mit $a^{k-3} \cdot a^{+(m+f)}$ gerechnet.

Der Lösungsweg lautet

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\alpha^{k-3} \cdot \beta^{k-3} \cdot \mu^2 \cdot \psi^{m+2}}{\alpha^{m+f} \cdot \gamma^5} : \frac{\Omega \cdot \alpha^{l-1}}{\beta^{\frac{1}{2}} \cdot \mu^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\alpha^{k-3} \cdot \beta^{k-3} \cdot \mu^2 \cdot \psi^{m+2}}{\alpha^{m+f} \cdot \gamma^5} \cdot \frac{\beta^{\frac{1}{2}} \cdot \mu^{\frac{1}{2}}}{\Omega \cdot \alpha^{l-1}} \\
&= \alpha^{k-3} \cdot \alpha^{-(m+f)} \cdot \alpha^{-(l-1)} \cdot \beta^{k-3} \cdot \beta^{\frac{1}{2}} \cdot \mu^2 \cdot \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \psi^{m+2} \cdot \gamma^{-5} \cdot \Omega^{-1} \\
&= \alpha^{k-m-f-l-2} \cdot \beta^{k-\frac{5}{2}} \cdot \mu^{\frac{5}{2}} \cdot \psi^{m+2} \cdot \gamma^{-5} \cdot \Omega^{-1}
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 16*

Test 2.4.2

$\boxed{1}$ $r = \pm\sqrt{\frac{y^{m+1}}{a^{pq}}}$

Sie haben die Aufgabe richtig gelöst!

$\boxed{2}$ $r = \pm\sqrt{\frac{y}{a^{pq}}}$

Falsch! Falls Sie diese Lösung erhalten haben, wurde bei der Multiplikation von y mit y^m einen Fehler gemacht.

$\boxed{3}$ $r = \pm\sqrt[2n]{\frac{y^{m+1}}{a^{pq}}}$

Falsch! Die Expenenten von r^{n+1} und r^{n-1} werden nicht addiert, sondern aufgrund des Potenzgesetzes voneinander subtrahiert.

$\boxed{4}$ $\frac{r^n-r}{r^n+r} = \frac{a^{pq}}{y^{m+1}}$

Falsch! Folgende Fehler wurden gemacht:

$$r^{n-1} \neq r^n - r^n; r^{n-1} \neq r^n + r^n$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 17*

Test 2.4.3

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y = \dfrac{b^2}{a^4}$

Falsch! Diese Antwort ist falsch, weil Sie die Division nicht berücksichtigt haben.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y = \dfrac{a^8}{b^4}$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y = \dfrac{a^2}{b}$

*Falsch!*Sie haben fälschlicherweise Potenzen mit verschiedener Basis gekürzt.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y = a \cdot b^2$

Falsch! Sie haben folgende Fehler gemacht:

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}} &\neq (ab)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \\ \frac{(ab)^{\frac{1}{3}}}{a} &\neq \frac{b^{\frac{1}{3}}}{1} \end{aligned}$$

Der Lösungsweg lautet

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a^{0,5}}{b^{\frac{1}{4}}}\right)^{24}}} : \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{b\cdot a}}{a}\right)^{81}}} \\
y &= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^{12}}{b^6}}} : \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(\frac{(b\cdot a)^{\frac{1}{3}}}{a}\right)^{81}}} \\
y &= \sqrt[3]{\frac{a^{\frac{12}{2}}}{b^{\frac{6}{2}}}} : \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{(b\cdot a)^{27}}{a^{81}}}} \\
y &= \sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}} : \sqrt[3]{\frac{(b\cdot a)^{\frac{27}{3}}}{a^{\frac{81}{3}}}} \\
y &= \frac{a^{\frac{6}{3}}}{b^{\frac{3}{3}}} : \sqrt[3]{\frac{(b\cdot a)^9}{a^{27}}} \\
y &= \frac{a^2}{b} : \frac{(b\cdot a)^{\frac{9}{3}}}{a^{\frac{27}{3}}} \\
y &= \frac{a^2}{b} : \frac{(b\cdot a)^3}{a^9} \\
y &= \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a^9}{b^3\cdot a^3}
\end{aligned}
$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 17*

Test 2.4.4

$\boxed{1}$ $h^{\frac{131}{84}} = \alpha^{\frac{33}{7}}\beta^{-24}x^{19}\lambda^{-\frac{3}{4}}$

$h = \alpha^{\frac{2772}{917}} \cdot \beta^{-\frac{2016}{131}} \cdot x^{\frac{1596}{131}} \cdot \lambda^{-\frac{63}{131}}$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha^4\cdot\beta^5}}{\sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{h^7}}} = \frac{\sqrt[3]{(x\cdot\beta)^6\cdot\sqrt[7]{\frac{h^4}{\alpha^5}}}}{\sqrt[5]{(x\cdot\beta)^{125}}} \neq \frac{\alpha^4\cdot\beta^5}{\sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{h^7}}} = \frac{(x\cdot\beta)^6\cdot\sqrt[7]{\frac{h^4}{\alpha^5}}}{\sqrt[5]{(x\cdot\beta)^{125}}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $h^{-\frac{131}{84}} = \alpha^{\frac{11}{7}} \cdot \beta^{\frac{74}{3}} \cdot x^{23} \cdot \lambda^{-\frac{3}{4}}$

$h = \alpha^{-\frac{924}{917}} \cdot \beta^{-\frac{2072}{131}} \cdot x^{-\frac{1932}{131}} \cdot \lambda^{\frac{63}{131}}$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $h^{\frac{131}{84}} = \alpha^{\frac{3}{8}} \cdot \beta^{\frac{16}{5}} \cdot x^{54} \cdot \lambda^{-\frac{13}{4}}$

$h = \alpha^{\frac{63}{262}} \cdot \beta^{\frac{1344}{655}} \cdot x^{\frac{4536}{131}} \cdot \lambda^{-\frac{273}{131}}$

Falsch! Sie haben einen Fehler in Ihrer Rechnung.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $h^{\frac{131}{84}} = \alpha^{\frac{33}{21}} \cdot \beta^{\frac{16}{5}} \cdot x^{23} \cdot \lambda^{-\frac{13}{4}}$

$h = \alpha^{\frac{924}{917}} \cdot \beta^{\frac{1344}{655}} \cdot x^{\frac{1932}{131}} \cdot \lambda^{-\frac{273}{131}}$

Falsch! Sie haben einen Fehler in Ihrer Rechnung.

Der Lösungsweg lautet

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^{\frac{4}{3}} \cdot \beta^{\frac{5}{3}}}{\frac{\lambda^{\frac{3}{4}}}{h^{\frac{7}{4}}}} &= \frac{\sqrt[3]{(x\cdot\beta)^6 \cdot \frac{h^{\frac{4}{7}}}{\alpha^{\frac{5}{7}}}}}{(x\cdot\beta)^{\frac{125}{5}}} \\
\frac{\alpha^{\frac{4}{3}} \cdot \beta^{\frac{5}{3}}}{\frac{\lambda^{\frac{3}{4}}}{h^{\frac{7}{4}}}} &= \frac{(x\cdot\beta)^{\frac{6}{3}} \cdot \left(\frac{h^{\frac{4}{7}}}{\alpha^{\frac{5}{7}}}\right)^{\frac{1}{3}}}{(x\cdot\beta)^{\frac{125}{5}}} \\
\frac{\alpha^{\frac{4}{3}} \cdot \beta^{\frac{5}{3}}}{\frac{\lambda^{\frac{3}{4}}}{h^{\frac{7}{4}}}} &= \frac{(x\cdot\beta)^2 \cdot \frac{h^{\frac{4}{21}}}{\alpha^{\frac{5}{21}}}}{(x\beta)^{25}} \\
\frac{\alpha^{\frac{4}{3}} \cdot \beta^{\frac{5}{3}}}{\lambda^{\frac{3}{4}} \cdot h^{-\frac{7}{4}}} &= \frac{(x\cdot\beta)^2 \cdot h^{\frac{4}{21}} \cdot \alpha^{-\frac{5}{21}}}{(x\cdot\beta)^{25}} \\
\frac{\alpha^{\frac{4}{3}} \cdot \beta^{\frac{5}{3}} \cdot (x\beta)^{25}}{\lambda^{\frac{3}{4}} \cdot (x\beta)^2 \cdot \alpha^{-\frac{5}{21}}} &= h^{\frac{4}{21}} \cdot h^{-\frac{7}{4}} \\
\left(\alpha^{\frac{4}{3}}\alpha^{\frac{5}{21}}\right) \cdot \left(\beta^{\frac{5}{3}}\beta^{25}\beta^{-2}\right) \cdot \left(x^{25}x^{-2}\right) \cdot \lambda^{-\frac{3}{4}} &= h^{\frac{4}{21}} h^{-\frac{7}{4}} \\
\alpha^{\frac{11}{7}} \cdot \beta^{\frac{74}{3}} \cdot x^{23} \cdot \lambda^{-\frac{3}{4}} &= h^{-\frac{131}{84}} \\
h = \alpha^{-\frac{924}{917}} \cdot \beta^{-\frac{2072}{131}} \cdot x^{-\frac{1932}{131}} \cdot \lambda^{\frac{63}{131}} &
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 17*

14.3 Binomialkoeffizienten und Binomische Formeln

Test 3.4.1

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y = \dfrac{n+1}{n-1} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n-1}}$

Falsch! Bitte beachten Sie:

$$\binom{n}{n-1} \cdot \frac{(n^2+2n+1)\,(n+1)}{(n^3-n)\,(n-1)} \neq \frac{n}{n-1} \cdot \frac{(n^2+2n+1)\,(n+1)}{(n^3-n)\,(n-1)} \;,$$
$$\text{wobei gilt:} \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n \;.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y = \dfrac{n+1}{n-1}$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y = \dfrac{n+1}{n-1} \cdot \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$

Falsch! Sie müssen bitte beachten, dass

$$(n^2-1) \cdot (n-1) \neq (n-1)^3 \;.$$

Die dritte binomische Formel liefert

$$n^2 - 1 = n^2 - 1^2 = (n-1)(n+1) \;.$$

Der Lösungsweg lautet

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\binom{n}{n-1} \cdot \frac{(n^2+2n+1)\,(n+1)}{(n^3-n)\,(n-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+1)^2\,(n+1)}{n\,(n^2-1)\,(n-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+1)^2\,(n+1)}{n(n-1)(n+1)(n-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(n-1)^2}} \\ &= \frac{n+1}{n-1} \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 22*

Test 3.4.2

1 $h = \pm\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\beta-\mu)\left(\frac{\mu}{5}-1\right)}} - 2$

Falsch! In Ihrer Lösung sind drei Fehler enthalten. Bitte beachten Sie:

$$\frac{\beta^2-\mu^2}{\beta-\mu} \neq \beta-\mu$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \neq (\alpha-\beta)^2$$

$$\frac{h^2}{4}+h+4 \neq (h+2)^2$$

2 $h = \pm 2\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\beta-\mu)\left(\frac{\mu}{5}-1\right)}} - 4$

Falsch! Sie haben Sie folgenden Sachverhalt nicht berücksichtigt:

$$(\beta^2-\mu^2) \neq (\beta-\mu)^2$$

$\boxed{3}$ $h = \pm 2\sqrt{\dfrac{5\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(\beta+\mu)\,(\mu-5)}} - 4$

Richtige Lösung!

Der Lösungsweg lautet

$$
\begin{aligned}
\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\mu)}{(0{,}25h^2+2h+4)\,(0{,}04\mu^2-1)} &= \frac{(\beta^2-\mu^2)}{(\alpha+\beta)(0.2\mu+1)} \\
(\alpha-\beta)(\beta-\mu)(\alpha+\beta)(0.2\mu+1) &= \left(\beta^2-\mu^2\right)\left(0{,}25h^2+2h+4\right)\left(0{,}04\mu^2-1\right) \\
\left(\alpha^2-\beta^2\right)(\beta-\mu)\left(\frac{\mu}{5}+1\right) &= (\beta-\mu)(\beta+\mu)\left(\frac{h^2}{4}+2h+4\right)\left(\frac{\mu^2}{25}-1\right) \\
\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\frac{\mu}{5}+1\right) &= (\beta+\mu)\left(\frac{h}{2}+2\right)^2\left(\frac{\mu}{5}-1\right)\left(\frac{\mu}{5}+1\right) \\
\left(\alpha^2-\beta^2\right) &= (\beta+\mu)\left(\frac{h}{2}+2\right)^2\left(\frac{\mu}{5}-1\right) \\
\left(\frac{h}{2}+2\right)^2 &= \frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(\beta+\mu)\left(\frac{\mu}{5}-1\right)} \\
&= \frac{5\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(\beta+\mu)(\mu-5)} \\
h &= \pm 2\sqrt{\frac{5\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(\beta+\mu)(\mu-5)}} - 4
\end{aligned}
$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 22*

Test 3.4.3

$\boxed{1}$ $A = 455 \qquad B = 1365$

Richtige Lösung!

$\boxed{2}$ $A = 1365 \quad B = 455$

Falsch! $\binom{15}{4} = 1365$ und $\binom{15}{12} = 455$. Für A bzw. B muss $\binom{15}{3}$ bzw. $\binom{15}{11}$ berechnet werden.

$\boxed{3}$ $A = 330 \qquad B = 72\,600$

Falsch! Für A bzw. B muss $\binom{15}{3}$ bzw. $\binom{15}{11}$ berechnet werden, Sie haben aber $\binom{11}{4}$ bzw. $\binom{12}{3}$ bestimmt.

Der Lösungsweg lautet

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$(x+y)^{15} = \binom{15}{0}x^{15} + \cdots + \binom{15}{3}x^{12}y^3 + \cdots + \binom{15}{11}x^4y^{11} + \ldots$$

$$A = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{3\cdot 2\cdot 12!} = 5\cdot 7\cdot 13 = 455$$

$$B = \binom{15}{11} = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11!}{11!\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2} = 1365$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 22*

Test 3.4.4

1 $y = \frac{1}{(\alpha^2-\gamma^2)}\sqrt{\frac{\alpha^5+8\alpha^4\gamma^4+\gamma^5}{\alpha^2-(\gamma^2+2\gamma+1)}}$

Falsch! Sie sollten das Kapitel Potenzen und Wurzeln nochmals wiederholen.

2 $y = \frac{1}{\alpha-\gamma}\sqrt{\frac{1}{(\alpha-\gamma-1)}}$

Richtige Antwort!

3 $y = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}+2\alpha^2\gamma^2\sqrt{2}+\gamma\sqrt{\gamma}}{(\alpha^2-\gamma^2)\cdot(\alpha-(\gamma+2))}$

Falsch! Wir empfehlen Ihnen, das Kapitel Potenzen und Wurzeln nochmals zu wiederholen. Außerdem sollen Sie beachten:

$$\sqrt{\alpha+\beta+\gamma} \neq \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\,.$$

Der Lösungsweg lautet

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{\frac{\alpha^3+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+\gamma^3+\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2}{(\alpha^2-\gamma^2)^2\cdot(\alpha^2-(\gamma^2+2\gamma+1))}} \\
&= \sqrt{\frac{(\alpha^3+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+\gamma^3)+(\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2)}{([\alpha-\gamma][\alpha+\gamma])^2\cdot\left(\alpha^2-(\gamma+1)^2\right)}} \\
&= \sqrt{\frac{(\alpha+\gamma)^3+(\alpha+\gamma)^2}{[\alpha-\gamma]^2\cdot[\alpha+\gamma]^2\cdot(\alpha-(\gamma+1))\cdot(\alpha+(\gamma+1))}} \\
&= \sqrt{\frac{(\alpha+\gamma)^2\,(1+(\alpha+\gamma))}{[\alpha-\gamma]^2\cdot[\alpha+\gamma]^2\cdot(\alpha-(\gamma+1))\cdot(\alpha+(\gamma+1))}} \\
&= \sqrt{\frac{(\alpha+\gamma)^2\,(1+\alpha+\gamma)}{[\alpha-\gamma]^2\,[\alpha+\gamma]^2\cdot(\alpha-\gamma-1)\cdot(\alpha+\gamma+1)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{[\alpha-\gamma]^2\cdot(\alpha-\gamma-1)}} \\
&= \frac{1}{\alpha-\gamma}\sqrt{\frac{1}{(\alpha-\gamma-1)}}
\end{aligned}
$$

→ Zur Aufgabe auf Seite 22

14.4 Polynomdivision

Test 4.4.1

1 $x_1 = 1\,,\quad x_2 = -2\,,\quad x_3 = -3$

Falsch! Sie haben sich bei der Bestimmung von x_2 und x_3 verrechnet.

2 $x_1 = 1\,,$ Der Rest der Polynomdivision ist 8.

Falsch! Dies ist falsch, bei der Polynomdivision haben Sie sich verrechnet. Der Vorzeichenwechsel beim Substrahieren der Ausdrücke wurde vergessen.

3 $x_1 = 1\,,\quad x_2 = 6\;\;,\quad x_3 = -1$

Richtige Lösung!

Lösung:

Zunächst muss **eine** Nullstelle x_1 bestimmt werden.

Bei akademischen Beispielen mit ganzzahligem Absolutglied sind die Nullstellen oft ganzzahlige Teiler von $\frac{a_0}{a_n}$. Mit diesen ganzzahligen Teilern wird dann die Division durch das Binom $(x - x_1)$ durchgeführt. Beträgt der Rest der Division 0, wurde diese eine Nullstelle x_1 gefunden.

Hier in unserem Polynom $P_3(x) = x^3-6x^2-x+6$ ergibt sich $\frac{6}{1} = 6$, die ganzzahligen Teiler davon sind ± 1, ± 2, ± 3 und ± 6. Eine erste mögliche Nullstelle ist die 1. Wird dieser x_1-Wert eingesetzt, ergibt sich (zum Beispiel aus der Quersumme der Koeffizienten) $P_3(1) = 0$, $x_1 = 1$ ist also eine geeignete Nullstelle.

Die Division durch $(x - x_1)$ liefert dann:

$$\begin{array}{r}
(+x^3 - 6x^2 - x + 6) \\
-\,(x^3 - x^2) \\
\hline
0x^3 - 5x^2 - x + 6 \\
-\,(-5x^2 + 5x) \\
\hline
0x^2 - 6x + 6 \\
-(-6x + 6) \\
\hline
0
\end{array} \quad : (x-1) = \underbrace{x^2 - 5x - 6}_{=P_2(x) \text{ Restpolynom}}$$

Nun lassen sich mit der p-q-Formel die zwei restlichen Nullstellen vom Rest-Polynom $P_2(x) = x^2 - 5x - 6$ bestimmen:

$$x^2 - 5x - 6 \ = 0 \ \rightarrow \ x_{2,3} = 2{,}5 \pm \sqrt{(2{,}5)^2 + 6} \ \rightarrow \ x_2 = 6 \quad \text{und} \quad x_3 = -1$$

→ Zur Aufgabe auf Seite 27

Test 4.4.2

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2a^3b^{x+2} + 3a^2b^{2x-1}$, $\quad R = 0$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{2}}$ $2a^3$, $\quad R = b^{x+2} + 2a^2b^3 - 2a^3b^{x+5} + 3a^4b^{2x-1} - 3a^2b^{2x+2}$

Falsch! Bei der Berechnung des ersten Summanden des Quotienten müssen Sie beachten, dass die Multiplikation dieses Terms mit dem Divisor den kompletten ersten Term vom Dividenden ergeben muss.

Der erste Summand ist

$$\left(2a^5b^{x+2}\right) : a^2 = 2a^3b^{x+2}$$

3 $2a^3b^{x+2} + 3a^2b^{2x-1}\ , \qquad R = 2a^3b^{x+2} - 2a^3b^{x+5} - 3a^2b^{2x-1}$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Beachten Sie bitte:

$$\begin{aligned} 2a^3b^{x+2} \cdot \left(-b^3\right) &= -2a^3b^{x+5} \\ 3a^2b^{2x-1} \cdot \left(-b^3\right) &= -3a^2b^{2x-2} \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rl} \left(2a^5b^{x+2} - 2a^3b^{x+5} + 3a^4b^{2x-1} - 3a^2b^{2x+2}\right) & : (a^2 - b^3) = 2a^3b^{x+2} + 3a^2b^{2x-1} \\ -\left(2a^5b^{x+2} - 2a^3b^{x+5}\right) & \\ \hline +3a^4b^{2x-1} - 3a^2b^{2x+2} & \\ -\left(3a^4b^{2x-1} - 3a^2b^{2x+2}\right) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 27*

Test 4.4.3

1 $5\lambda^7 + 5\lambda^6 + 5\lambda^5 + 5\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda + 1\ , \qquad R = 0$

Falsch! Sie haben den Vorzeichenwechsel beim Subtrahieren der Ausdrücke vergessen.

2 $5\lambda^7 - 5\lambda^6 + 5\lambda^5 - 5\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda - 1\ , \qquad R = 0$

Richtige Lösung!

3 $5\lambda^8 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3\ , \qquad R = \lambda$

Falsch!

Sie haben nicht beachtet, dass man das erste Teilergebnis mit dem Divisor multipliziert und das Ergebnis vom Dividenden subtrahiert!

Lösung:

$$\begin{array}{l}
(+5\lambda^8 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 1) \quad : (\lambda + 1) = \underbrace{5\lambda^7 - 5\lambda^6 + 5\lambda^5 - 5\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda - 1}_{=Q} \\
-(5\lambda^8 + 5\lambda^7) \\
\hline
-5\lambda^7 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 1 \\
-(-5\lambda^7 - 5\lambda^6) \\
\hline
+5\lambda^6 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 1 \\
-(5\lambda^6 + 5\lambda^5) \\
\hline
-5\lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 1 \\
-(-5\lambda^5 - 5\lambda^4) \\
\hline
+2\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - 1 \\
-(2\lambda^4 + 2\lambda^3) \\
\hline
+\lambda^2 - 1 \\
-(\lambda^2 + \lambda) \\
\hline
-\lambda - 1 \\
-(-\lambda - 1) \\
\hline
0
\end{array}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 28*

Test 4.4.4

1 $\alpha^2\beta^x - \lambda^{y+6}\beta^{x-10}\,, \quad R = \lambda^{y+12}\beta^{x-2}$

Richtige Lösung!

2 $\alpha^2\beta^x - \lambda^{y+6}\beta^{x-10}\,, \quad R = 0$

Falsch! Diese Antwort ist leider nicht korrekt.

3 $\alpha^2\lambda^{y-1}\beta^x - \lambda^y\beta^x\,, \quad R = \lambda^{y+12}\beta^{x-2}$

Falsch! Das ist leider das falsche Ergebnis.

Lösung:

$$\begin{array}{ll}
(+\alpha^4\beta^{x+4}-\alpha^2\lambda^{y+6}\beta^{x-6}+\alpha^2\lambda^6\beta^{x+8}) & :(\alpha^2\beta^4+\lambda^6\beta^8)=\alpha^2\beta^x-\lambda^{y+6}\beta^{x-10}+ \\
-(\alpha^4\beta^{x+4}+\alpha^2\lambda^6\beta^{x+8}) & +\lambda^{y+12}\beta^{x-2}:\left(\alpha^2\beta^4+\lambda^6\beta^8\right) \\
\hline
-\alpha^2\lambda^{y+6}\beta^{x-6} & \\
-(-\alpha^2\lambda^{y+6}\beta^{x-6}-\lambda^{y+12}\beta^{x-2}) & \\
\hline
\lambda^{y+12}\beta^{x-2} & \\
\text{Rest der Division} &
\end{array}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 28*

14.5 Lineare Funktionen

Test 7.4.1

$\boxed{1}$ **a)** $y = 3x - 5$ **b)** $y = \frac{5}{3}x - \frac{22}{3}$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Sie haben bei der Lösung den Zusammenhang zwischen zwei senkrechten Geraden nicht richtig benutzt.

$\boxed{2}$ **a)** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ **b)** $y = \frac{3}{5}x - \frac{26}{5}$

Richtige Lösung!

$\boxed{3}$ **a)** $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ **b)** $y = -\frac{3}{5}x - \frac{14}{5}$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Sie haben bei der Lösung den Zusammenhang zwischen zwei senkrechten Geraden nicht richtig benutzt.

Lösung:

a) Die Steigung der Geraden, die durch die Punkte $B(-2;3)$ und $C(-5;-6)$ verläuft, wird mit m_2 bezeichnet und folgendermaßen berechnet:

$$m_2 = \frac{(-6)-(3)}{(-5)-(-2)} = 3$$

Die gesuchte Gerade hat die Steigung m_1. Da beide Geraden zueinander senkrecht stehen, gilt die Beziehung:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-1}{m_2} \\ m_1 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Da zusätzlich ein Punkt der Geraden mit $A(-1;-2)$ bekannt ist, kann man deren Gleichung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} y-(-2) &= -\frac{1}{3}\big(x-(-1)\big) \\ y &= -\frac{1}{3}x-\frac{7}{3} \end{aligned}$$

b) Um die Steigung der Geraden $5x+3y-8=0$ zu finden, wird die Gleichung so umgestellt:

$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}\,.$$

Die Steigung dieser Geraden lautet:

$$m_3=-\frac{5}{3}\,.$$

Die gesuchte Gleichung hat dann die Steigung $\frac{3}{5}$ und verläuft durch den Punkt $D(2;-4)$. Man kann die Gleichung der Geraden so schreiben:

$$\begin{aligned} y-(-4) &= \frac{3}{5}(x-2) \\ y &= \frac{3}{5}x-\frac{26}{5}\,. \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 49*

Test 7.4.2

$\boxed{1}$ **a)** Die Geraden sind parallel. **b)** Es gibt keinen Schnittpunkt.

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Sie sollten die Steigungen der beiden Geraden zuerst bestimmen. Dann können Sie erkennen, dass die beiden Geraden nicht parallel zueinander verlaufen.

$\boxed{2}$ **a)** Die Geraden sind nicht parallel. **b)** $S\left(\frac{1}{5}; -\frac{18}{5}\right)$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Beim Gleichsetzen der beiden Gleichungen haben Sie sich verrechnet.

$\boxed{3}$ **a)** Die Geraden sind nicht parallel. **b)** $S(1; -2)$

Richtige Lösung!

Lösung:

Zunächst erhalten Sie für die Anstiege:

$$\begin{aligned} 2x - y - 4 &= 0 \rightarrow\ y = 2x - 4 \rightarrow\ m_1 = 2 \\ 6x - 2y &= 10\ \rightarrow\ y = 3x - 5 \rightarrow\ m_2 = 3 \end{aligned}$$

Da die Steigungen der zwei Geraden nicht gleich sind, liegen sie nicht parallel.

Um den Schnittpunkt der beiden Geraden zu finden, muss man deren Gleichungen gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 3x - 5 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Damit haben Sie die x-Komponente des Schnittpunkts bestimmt. Um die y-Komponente auch zu berechnen, setzt man diesen x-Wert in einer der gegebenen Geradengleichung ein und stellt nach y um.

$$y = 2(1) - 4 = -2$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 49*

Test 7.4.3

$\boxed{1}$ $|a| = \frac{1}{2}\sqrt{233}$ $|b| = 5\sqrt{5}$ $|c| = \frac{1}{2}\sqrt{421}$

Falsch! Diese Lösung ist falsch. Sie haben einen Vorzeichenfehler gemacht. Schauen Sie sich bitte die Formel zum Berechnen des Abstands zweier Punkte an.

$\boxed{2}$ $|a| = \frac{1}{2}\sqrt{145}$ $|b| = \sqrt{37}$ $|c| = \frac{1}{2}\sqrt{109}$

Richtige Antwort!

$\boxed{3}$ $|a| = \frac{1}{2}\sqrt{85}$ $|b| = \sqrt{74}$ $|c| = \frac{1}{2}\sqrt{365}$

Falsch! Diese Lösung ist leider falsch. Sie haben sich bei der Bestimmung der Mittelpunkte verrechnet.

Lösung:

Der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten $A(x_1; y_1)$ und $B(x_2; y_2)$ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt P_{m_1} zwischen den Punkten A und B besitzt die Koordinaten

$$\begin{aligned} x_{m_1} &= \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} \\ y_{m_1} &= \frac{0+2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$P_{m_1}\left(\frac{9}{2}; 1\right)$$

Die Koordinaten von P_{m_2} zwischen B und C ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
x_{m_2} &= \frac{8+3}{2} = \frac{11}{2} \\
y_{m_2} &= \frac{2+6}{2} = 4 \\
& P_{m_2}\left(\frac{11}{2}; 4\right)
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten von P_{m_3} zwischen C und A sind

$$
\begin{aligned}
x_{m_3} &= \frac{3+1}{2} = 2 \\
y_{m_3} &= \frac{0+6}{2} = 3 \\
& P_{m_3}(2; 3)
\end{aligned}
$$

Die drei Seitenhalbierenden a, b und c besitzen dann die Länge

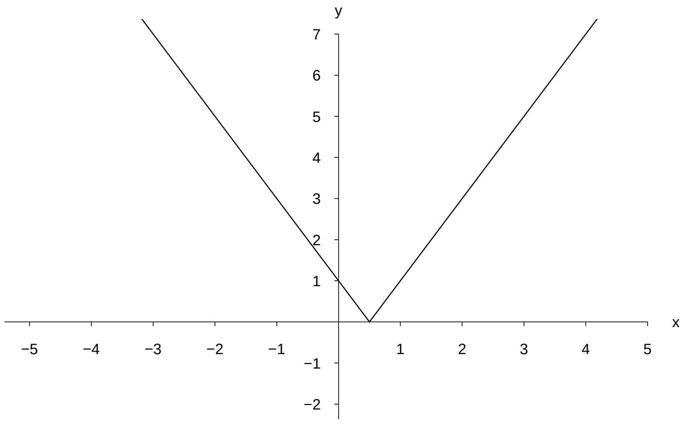
$$
\begin{aligned}
|a| &= \sqrt{(x_A - x_{m_2})^2 + (y_A - y_{m_2})^2} = \sqrt{(1 - \frac{11}{2})^2 + (0-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{145} \\
|b| &= \sqrt{(x_B - x_{m_3})^2 + (y_B - y_{m_3})^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{37} \\
|c| &= \sqrt{(x_C - x_{m_1})^2 + (y_C - y_{m_1})^2} = \sqrt{(3 - \frac{9}{2})^2 + (6-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{109}
\end{aligned}
$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 50*

Test 7.4.4

$\boxed{1}$ $y = |2x - 1|$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Das Diagramm dieser Funktion sieht so aus:

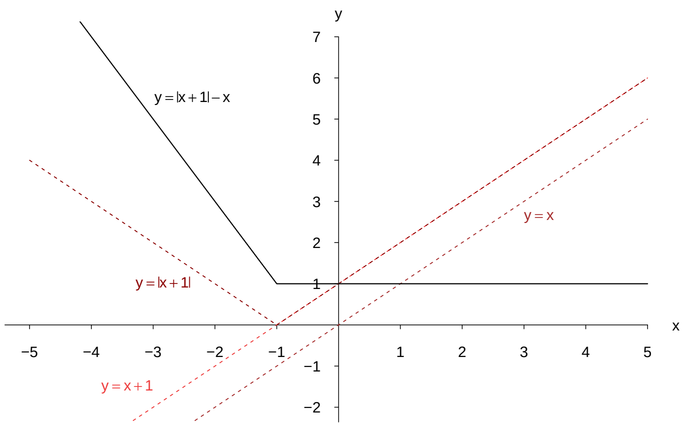


$\boxed{\mathbf{2}}$ $y = |x - 1| + x$

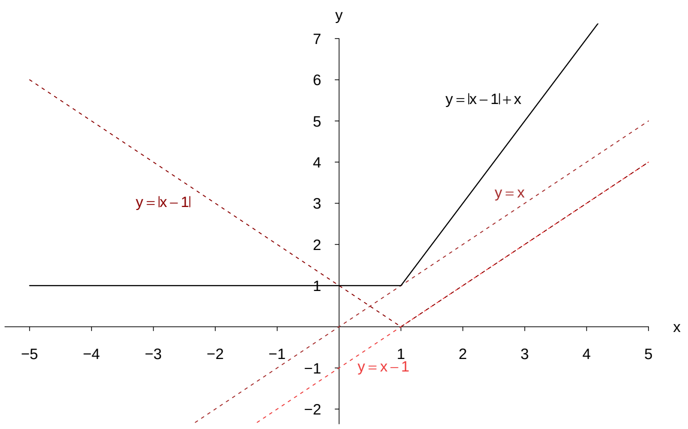
Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y = |x + 1| - x$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Das Diagramm dieser Funktion sieht so aus:



Lösung:

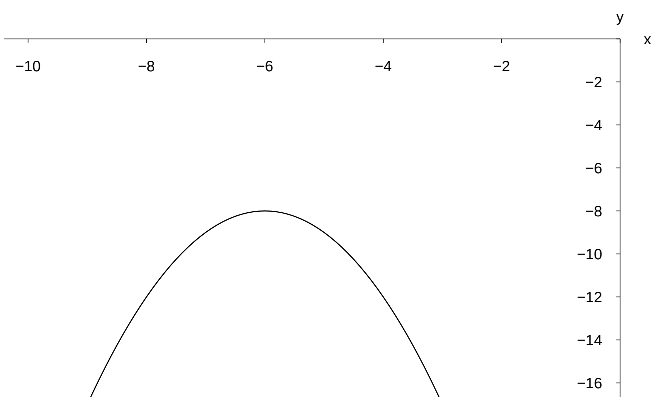


→ *Zur Aufgabe auf Seite 50*

14.6 Quadratische Funktionen

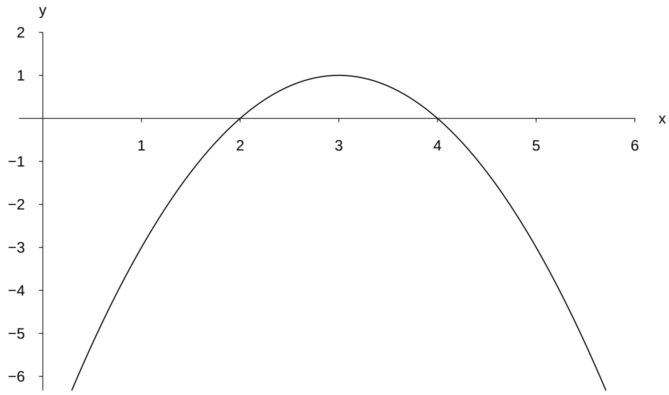
Test 8.4.1

$\boxed{1}$ $y = -(x+6)^2 - 8\,,$ Keine Nullstellen



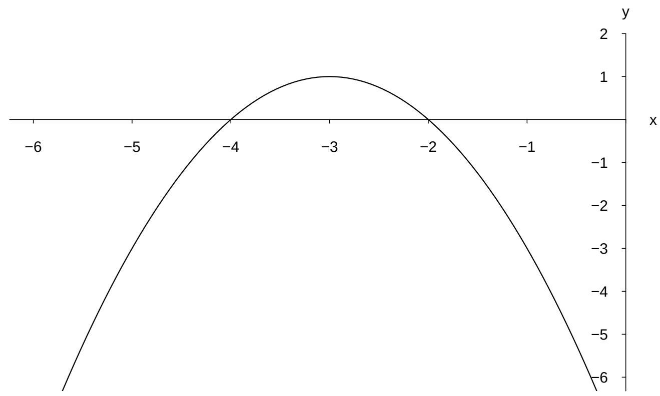
Falsch! Setzen Sie einen beliebigen x-Wert sowohl in der umgeformten Schreibweise als auch in der originalen Form ein und vergleichen Sie die y-Werte. In der Regel werden Sie schon beim ersten Test feststellen, dass Ihre Umformung nicht richtig sein kann. Sie sollten aber beachten, dass man nicht nur einen x-Wert (wie z.B. 0) probieren darf, sondern mit mehreren Werten getestet werden muss.

$\boxed{2}$ $y = -(x-3)^2 + 1\,,$ $x_{01} = 2\,,$ $x_{02} = 4$



Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y = -(x+3)^2 + 1\ ,\quad x_{01} = -2\ ,\quad x_{02} = -4$



Falsch! Setzen Sie einen beliebigen x-Wert sowohl in der umgeformten Schreibweise als auch in der originalen Form ein und vergleichen Sie die y-Werte. In der Regel werden Sie schon beim ersten Test feststellen, dass Ihre Umformung nicht richtig sein kann. Sie sollten aber beachten, dass man nicht nur einen x-Wert (wie z.B. 0) probieren darf, sondern mit mehreren Werten getestet werden muss.

Lösung:

Mit der quadratischen Ergänzung ergibt sich

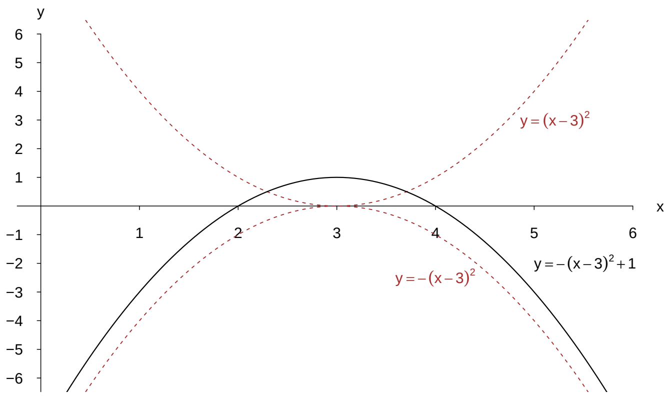
$$\begin{aligned} y &= -x^2+6x-8 \\ &= -\left(x^2-6x\right)-8 \\ &= -\left(x^2-6x+9-9\right)-8 \\ &= -\left(x^2-6x+9\right)-(-9)-8 \\ &= -(x-3)^2+1 \end{aligned}$$

Die Nullstellen werden mit der p-q-Formel berechnet:

$$\begin{aligned} -x^2+6x-8 &= 0 \\ x^2-6x+8 &= 0 \\ x_{01,02} &= \frac{-(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2-8} \end{aligned}$$

$$x_{01}=2 \qquad x_{02}=4$$

Skizze:



→ *Zur Aufgabe auf Seite 65*

Test 8.4.2

$\boxed{1}$ $y=(x-5)^2-1$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Weil ein Teil des gegeben Funktionsgraphen an der x-Achse gespiegelt wurde, muss es sich beim gegebenen Graphen um eine Betragsfunktion handeln.

2 $y = |(x-5)^2 - 3| + 1$

Falsch! Diese Antwort ist falsch, da offenbar bei dieser Funktion eine Verschiebung in positiver y-Richtung auftritt.

3 $y = |(x-5)^2 - 3| - 1$

Richtige Lösung!

Lösung:

Als erstes sieht man, dass das Bild aus der Normalparabel durch Verschiebung des Scheitelpunkts entstanden ist (schwarze Kurve). Die zugehörige Funktion zu diesem Diagramm lautet

$$y = (x-5)^2 - 3 \ .$$

Weiterhin kann man erkennen, dass es sich um eine zusammengesetzte Funktion einer Betragsfunktion handeln muss. Es ist zu beachten, dass der Betrag bei einer Funktion alle negativen Teile des Graphen an der x-Achse spiegelt.

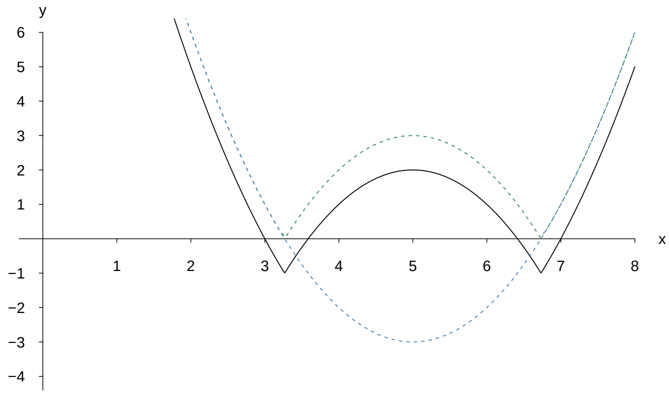
Im gegebenen Diagramm sieht man weiterhin, dass einige Punkte des Diagramms trotz der Betragsfunktion im negativen y-Bereich liegen. Man kann feststellen, dass die Betragsfunktion selbst um eine Einheit in negativer y-Richtung verschoben wurde.

Mit der Betragsfunktion geht die blaue Kurve in die grüne Kurve über:

$$y = \left|(x-5)^2 - 3\right| \ .$$

Um das gewünschte Diagramm zu erhalten, muss diese Funktion um eine Einheit in negativer y-Richtung verschoben werden (schwarze Kurve):

$$y = \left|(x-5)^2 - 3\right| - 1 \ .$$



→ *Zur Aufgabe auf Seite 65*

Test 8.4.3

$\boxed{1}$ $\mathbf{L} = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right)$

Richtige Lösung!

$\boxed{2}$ $\mathbf{L} = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right)$

Falsch! Diese Antwort ist falsch, weil Sie bei der Bestimmung der Teillösungsmenge im Fall $x < 1$ einen Fehler gemacht haben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Ungleichung in diesem Fall noch einmal.

$\boxed{3}$ $\mathbf{L} = \left[\frac{3-\sqrt{37}}{2}, \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right]$

Falsch! Sie haben die Komplementärmenge der Lösungsmenge gewählt. Prüfen Sie Ihre Vorgehensweise bei der Untersuchung der entstehenden quadratischen Ungleichungen.

Lösung:

Offenbar ist die Ungleichung für alle reellen $x-$Werte erklärt, es gibt keine Einschränkungen in der Definitionsmenge. Die Lösungsmenge kann wie folgt ermittelt werden.

1. Schritt: Festlegung der notwendigen Fälle

Wir betrachten die Fälle: 1.Fall $x < 1$, da für $x - 1 < 0$ der Betragsterm als "Minusklammer" berücksichtigt wird: $|x-1| = -(x-1)$ **und 2.Fall** $x \geq 1$, da für $x - 1 \geq 0$ die Betragsstriche wegfallen: $|x-1| = +(x-1) = x-1$. Beide Fälle können parallel und unabhängig voneinander abgearbeitet werden.

2. Schritt: Umstellung der Ungleichung (beispielsweise) im 1. Fall

Die Ungleichung kann jetzt ohne Betrag geschrieben werden als

$$\begin{aligned} -x^2+3x+8 &\le -(x-1)+x \\ -x^2+3x+8 &\le -x+1+x \\ 0 &\le x^2-3x-7 \end{aligned}$$

3. Schritt: Bestimmung der Lösungsmenge im 1.Fall

Die eben erhaltene quadratische Ungleichung $0 \le x^2-3x-7$ kann so interpretiert werden: Für welche $x-$Werte (mit $x<1$) hat die (nach oben geöffnete) Normalparabel $y=f(x)=x^2-3x-7$ **keine negativen** $y-$**Werte**?

Dazu nutzen wir die Nullstellen mit der $p-q-$Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-(-7)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{28}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Die Lösungsmenge ist für $x<1$ (wegen der nach oben geöffneten Normalparabel) $\mathbf{L}_1 = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{37}}{2}\right]$

4. Schritt: Umstellung der Ungleichung im 2.Fall

Die Ungleichung kann jetzt ohne Betrag geschrieben werden als

$$\begin{aligned} -x^2+3x+8 &\le +(x-1)+x \\ -x^2+3x+8 &\le x-1+x \\ 0 &\le x^2-x-9 \end{aligned}$$

5. Schritt: Bestimmung der Lösungsmenge im 2.Fall

Die eben erhaltene quadratische Ungleichung $0 \le x^2-x-9$ kann analog zum 1. Fall erneut interpretiert werden: Für welche $x-$Werte (mit $x \ge 1$) hat die (nach oben geöffnete) Normalparabel $y=f(x)=x^2-x-9$ **keine negativen** $y-$**Werte**?

Dazu nutzen wir wieder die Nullstellen mit der $p-q-$Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-(-9)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{36}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Die Lösungsmenge ist offenbar $\mathbf{L}_2 = \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right)$

6. Schritt: Bestimmung der Lösungsmenge der Aufgabe

Die Lösungsmenge ist $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right)$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 66*

Test 8.4.4

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x_1 = \dfrac{(a+b)^2}{a-b}\,, \qquad x_2 = a+b$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$a^2 + b^2 \neq (a+b)^2\,.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x_1 = a + \sqrt{a^2 - a + b}\,, \qquad x_2 = a - \sqrt{a^2 - a + b}$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$a^2 + b^2 \neq (a+b)(a-b)$$

Die dritte binomische Formel lautet:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\,.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x_1 = \dfrac{a^2+b^2}{a-b}\,, \qquad x_2 = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

Richtige Lösung!

Lösung: Mit $P = -\frac{2a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$ und $q = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2}$ kann man die Gleichung so schreiben:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Als erstes fällt auf, dass mit Hilfe der p-q-Formel die Lösungen der Gleichung gefunden werden sollten.

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{1,2} &= -\frac{-\frac{2a\cdot\left(a^2+b^2\right)}{a^2-b^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{2a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2}}{2}\right)^2 - \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2-b^2}} \\
x_{1,2} &= +\frac{a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\left(-\frac{a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\right)^2 - \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2-b^2}} \\
x_{1,2} &= +\frac{a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2\cdot\left(a^2+b^2\right)^2}{\left(a^2-b^2\right)^2} - \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2}} \\
x_{1,2} &= +\frac{a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2\cdot\left(a^2+b^2\right)^2 - \left(a^2+b^2\right)^2 . \,(a^2-b^2)}{\left(a^2-b^2\right)^2}} \\
x_{1,2} &= +\frac{a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)^2\left[a^2-a^2+b^2\right]}{\left(a^2-b^2\right)^2}} \\
x_{1,2} &= +\frac{a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)^2\left[b^2\right]}{\left(a^2-b^2\right)^2}} \\
x_{1,2} &= +\frac{a\cdot(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \pm \frac{(a^2+b^2)\,b}{a^2-b^2} \\
x_{1,2} &= +\frac{a\cdot(a^2+b^2)\ \pm\ (a^2+b^2)\,b}{a^2-b^2} \\
x_{1,2} &= +\frac{(a^2+b^2)\ \ (a\pm\ b)}{a^2-b^2}
\end{aligned}
$$

Im Nenner wird nun die dritte binomische Formel verwendet:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= +\frac{(a^2+b^2)\,(a\pm\ b)}{(a-b)\cdot(a+b)}\\[2ex]
x_1 &= +\frac{(a^2+b^2)\,(a+\ b)}{(a-b)\cdot(a+b)}\\
x_1 &= \frac{a^2+b^2}{a-b}\\[2ex]
x_2 &= +\frac{(a^2+b^2)\,(a-\ b)}{(a-b)\cdot(a+b)}\\
x_2 &= \frac{a^2+b^2}{a+b}
\end{aligned}
$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 66*

14.7 Potenz- und Wurzelfunktionen

Test 9.4.1

1 $x = 6 \qquad x \geq 4$

Falsch! Sie sollten beachten, dass der Wurzelexponent 4 ist!

2 $x = 8 \qquad x \geq 4$

Falsch! Sie sollten beachten, dass $2^4 \neq 2 \cdot 4$ ist!

3 $x = 12 \qquad x \geq 4$

Richtige Lösung!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[4]{2x-8}+5 &= 7\\
\sqrt[4]{2x-8} &= 2\\
\left(\sqrt[4]{2x-8}\right)^4 &= 2^4\\
2x-8 &= 16\\
x &= 12
\end{aligned}
$$

Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} 2x - 8 &\geq 0 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 75*

Test 9.4.2

1 $x = 6$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Bei Ihren Berechnungen haben Sie vermutlich die Funktion y_1 nicht richtig von der Aufgabenstellung abgeschrieben.

2 $x = 7$

Falsch! Sie haben die falsche Antwort gewählt. Beim Quadrieren der Funktion y_1 haben Sie die zweite binomische Formel nicht korrekt eingesetzt.

3 $x = \frac{23}{7}$

Richtige Lösung!

Lösung:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ \sqrt{x^2+3} - 1 &= \sqrt{x^2+2x-10} \\ \left(\sqrt{x^2+3} - 1\right)^2 &= \left(\sqrt{x^2+2x-10}\right)^2 \\ x^2 + 3 - 2\sqrt{x^2+3} + 1 &= x^2 + 2x - 10 \\ -2\sqrt{x^2+3} &= 2x - 14 \\ -\sqrt{x^2+3} &= x - 7 \\ \left(-\sqrt{x^2+3}\right)^2 &= (x-7)^2 \\ x^2 + 3 &= x^2 - 14x + 49 \\ 14x &= 46 \\ x &= \frac{23}{7} \approx 3{,}29 \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 75*

Test 9.4.3

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y = (x^3 - 1)^2$

Richtige Antwort!

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{y}}$

Falsch! Sie sollten diese Gleichung nach y umstellen!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y = (x^2 - 1)^3$

Falsch! Sie haben leider die falsche Antwort gewählt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} \\
y^3 &= 1 - \sqrt{x} \\
y^3 - 1 &= -\sqrt{x} \\
\left(y^3 - 1\right)^2 &= \left(-\sqrt{x}\right)^2 \\
\left(y^3 - 1\right)^2 &= x \\
f^{-1}(x) = y &= \left(x^3 - 1\right)^2
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 76*

Test 9.4.4

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x_{1,2} = -\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x_1 = -2 \qquad x_2 = -3$

Falsch! Diese Antwort ist leider falsch.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Ich komme bei dieser Aufgabe nicht weiter!

Hinweis: Sie sollten als erstes versuchen die Wurzeln der beiden Seiten der Gleichung zu beseitigen. Nun sollten die Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln vereinfacht werden. Dabei sollte die zweite- bzw. dritte binomische Formel eingesetzt werden. Am Ende kann man die gesuchten x-Werte mit Hilfe der p-q-Formel bestimmen.

Lösung:

$$\begin{aligned}
(x-3)\sqrt{x^2+5x+6} &= (x+2)\left(\sqrt{x^4-18x^2+81}\right) \\
\left((x-3)\sqrt{x^2+5x+6}\right)^2 &= (x+2)^2\left(\sqrt{x^4-18x^2+81}\right)^2 \\
(x-3)^2\left(x^2+5x+6\right) &= (x+2)^2\left(x^4-18x^2+81\right) \\
(x-3)^2(x+2)(x+3) &= (x+2)^2\left(x^2-9\right)^2 \\
(x-3)^2(x+2)(x+3) &= (x+2)^2(x-3)^2(x+3)^2 \\
(x+2)(x+3) &= 1 \\
x^2+5x+6 &= 1 \\
x^2+5x+5 &= 0 \\
x_{1,2} &= -\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-5} \\
&= -\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 76*

14.8 Exponential- und Logarithmusfunktionen und -gleichungen

Test 10.4.1

$\boxed{1}$ $x = 30$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$\log_a b = c \not\leftrightarrow b = c\cdot a$$

Es gilt:

$$\log_a b = c \rightarrow b = a^c$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x = \frac{5}{6}$

Falsch! Folgende Regel sollte man beachten:

$$\log_a b = c \nrightarrow b = \frac{c}{a}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x = 2^{243}$

Richtige Lösung!

Lösung:

$$\begin{aligned} \log_3(\log_2 x) &= 5 \\ \log_2 x &= 3^5 = 243 \\ x &= 2^{243} \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 85*

Test 10.4.2

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A = 1$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$\log_a (b^c) \neq (\log_a b)^c$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A = -2$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$\log_a (b^c) \neq (\log_a b)^c$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $A = -1$

Richtige Lösung!

Lösung:

$$\begin{aligned} \log_5(125) &= \log_5 \left(5^3\right) \\ &= 3 \log_5 5 \\ &= 3 \cdot 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\log_2\left(\sqrt{2}\right) &= 4\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 4\cdot\frac{1}{2}\log_2 2 \\ &= 2\cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_3\left(\frac{1}{27}\right) &= \log_3\left(\frac{1}{3^3}\right) \\ &= \log_3\left(3^{-3}\right) \\ &= -3\cdot\log_3 3 \\ &= -3\cdot 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_7\sqrt[3]{49} &= \log_7\left(49^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\log_7 49\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[\log_7\left(7^2\right)\right] \\ &= \frac{2}{3}\log_7 7 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$A = 3 - 2 + \left[(-3)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right] = -1$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 85*

Test 10.4.3

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x_1 \approx 12{,}188$; $x_2 \approx 13{,}076$

Falsch! Sie haben folgenden Fehler gehabt:

$$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b} \neq \lg(a-b)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x_1 \approx 180{,}393$; $x_2 \approx 0{,}866$

Falsch! Sie haben die Probe nicht richtig durchgeführt, denn x_2 erfüllt die Gleichung nicht (Scheinlösung).

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x = 10^{\frac{17}{4}}$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$\begin{aligned} \log 8x &\neq 8 \log x \\ \log(a+b) &\neq \log a + \log b \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $x \approx 180{,}384$

Richtige Lösung!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lg(8x) - \lg\left(1+\sqrt{x}\right) &= 2 \\
\lg\left(\frac{8x}{1+\sqrt{x}}\right) &= 2 \\
\frac{8x}{1+\sqrt{x}} &= 10^2 \\
&= 100 \\
8x &= 100\left(1+\sqrt{x}\right) \\
8x - 100 &= 100\sqrt{x} \\
(8x-100)^2 &= 10000 \cdot x \\
64x^2 - 1600x + 10000 &= 10000 \cdot x \\
64x^2 - 11600x + 10000 &= 0 \\
x^2 - 181{,}25 \cdot x + 156{,}25 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-181{,}25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{181}{2}\right)^2 - 156{,}25}$$

$$x_1 \approx 180{,}384 \qquad x_2 \approx 0{,}866$$

Wenn Sie nun eine Probe durchführen und beide Lösungen in die Gleichung einsetzen, dann sehen Sie, dass x_2 keine Lösung ist.

→ *Zur Aufgabe auf Seite 86*

Test 10.4.4

$\boxed{1}$ $x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$; $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

Falsch! Sie sollten beachten:

$$\log_3 a - \log_3 b = \log_3\left(\frac{a}{b}\right) \neq \log_3(a-b)$$

$\boxed{2}$ $x = 9$

Falsch! Diese Antwort ist falsch. Dabei haben Sie folgende Fehler gemacht:

$$\log_3\left(x^2-1\right) \neq \log_3\left(x^2\right) - \log_3 1$$
$$\log_3(x+3) \neq \log_3 x + \log_3 3$$

$\boxed{3}$ $x_1 = 5$; $\quad x_2 = -2$

Richtige Lösung!

Der Lösungsweg lautet

$$\begin{aligned}
\log_3\left(x^2-1\right) &= 1+\log_3(x+3)\\
\log_3\left(x^2-1\right)-\log_3(x+3) &= 1\\
\log_3\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right) &= 1\\
\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right) &= 3^1 = 3\\
x^2-1 &= 3\cdot(x+3)\\
x^2-1 &= 3x+9\\
x^2-3x-10 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -2$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 86*

14.9 Trigonometrische Funktionen

Test 11.4.1

$\boxed{1}$ 0,5

Falsch! Achten Sie bitte auf folgende Formel:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$\boxed{2}$ $\frac{123}{100}$

Falsch! Der Betrag von $\sin a$ und $\cos a$ kann nicht größer als 1 sein. Sie haben die Umstellung der folgenden Formel nicht korrekt durchgeführt.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

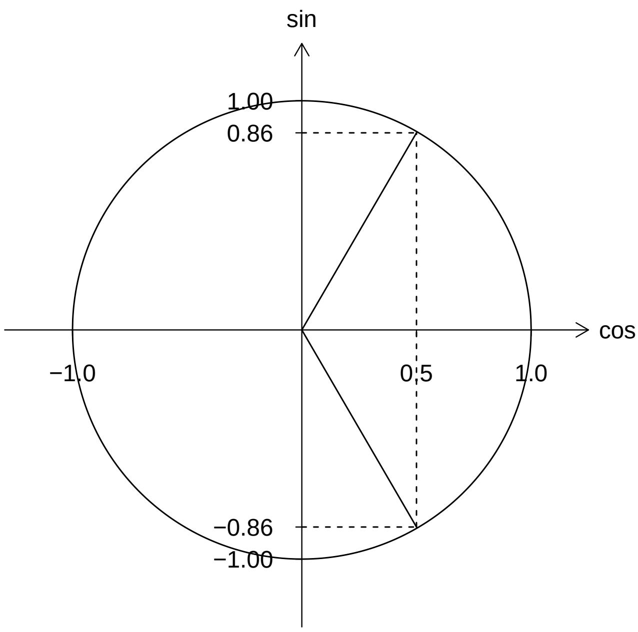
$\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Richtige Antwort!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sin^2 a + \cos^2 a &= 1 \\
\sin a &= \pm\sqrt{1-\cos^2 a} \\
\sin\frac{\pi}{3} &= \pm\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}} \\
&= \pm\sqrt{1-(0{,}5)^2} \\
&= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\approx \pm 0{,}87
\end{aligned}$$

Das „±“-Zeichen steht deswegen da, weil, wie es auf dem Einheitskreis skizziert wurde, cos von zwei unterschiedlichen Winkeln 0,5 beträgt.



→ *Zur Aufgabe auf Seite 95*

Test 11.4.2

$\boxed{1}$ a-b-r-t-w

Falsch! Das ist die falsche Lösung.

$\boxed{2}$ h-t-w-b-e-r-l-i-n

Richtige Lösung!

$\boxed{3}$ i-j-l-n-r-t

Falsch! Diese Antwort ist leider nicht korrekt.

Lösung:

Die Umstellung von Grad zu Radiant kann mit Hilfe dieser Formel berechnet werden:

$$\frac{\text{Winkel in Rad}}{\pi} \cdot 180°$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 95*

T 11.4.3

$\boxed{1}$ c-d-e

Falsch! Leider ist diese Antwort nicht komplett.

$\boxed{2}$ a-b-c-d-e

Richtige Lösung! Alle Aussagen sind richtig.

$\boxed{3}$ a-c-e

Falsch! Es fehlen weitere Lösungen.

Lösung:

(a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

(b) $\dfrac{1}{\sin x \cot x} = \dfrac{1}{\sin x \frac{\cos x}{\sin x}} = \dfrac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$

(c) $\sin x + (\cos x \cdot \cot x) = \sin x + \cos x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin x}$

(d) $\dfrac{\tan x \;-\; \sin x \;\cdot\; \cos x}{\tan x} = \dfrac{\tan x}{\tan x} - \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{\tan x} = 1 - \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

(e) $\dfrac{1}{\cos x} - (\sin x \cdot \tan x) = \dfrac{1}{\cos x} - \left(\sin x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow$

$= \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 96*

Test 11.4.4

$\boxed{\mathbf{1}}$ Keine der angegebenen Aussagen ist richtig.

Falsch!

$\boxed{\mathbf{2}}$ Alle der angegebenen Aussagen sind richtig.

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ a-d-e

Falsch! Es fehlen weitere Lösungen.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha = A \quad &\rightarrow \quad \cos^{-1} A = \arccos A = \alpha \\
\cos^{-1}\frac{1}{2} = B \quad &\rightarrow \quad \cos B = \frac{1}{2} \rightarrow B = 60^\circ \\
\sin(60^\circ) \quad &= \quad \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha = A \quad &\rightarrow \quad \sin^{-1} A = \arcsin A = \alpha \\
\sin\frac{\pi}{4} \quad &= \quad \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha = A &\rightarrow \sin^{-1} A = \arcsin A = \alpha \\
\sin^{-1} 1 = A &\rightarrow \sin A = 1 \rightarrow A = 90^\circ \\
\sin^{-1}(-1) = B &\rightarrow \sin B = -1 \rightarrow B = -90^\circ \\
A + B &= 90^\circ + (-90^\circ) = 0
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha = A &\rightarrow \cos^{-1} A = \arccos A = \alpha \\
\cos^{-1} 1 = A &\rightarrow \cos A = 1 \rightarrow A = 0^\circ \\
\cos^{-1}(-1) = B &\rightarrow \cos B = -1 \rightarrow B = 180^\circ \\
A + B &= 0^\circ + 180^\circ = 180^\circ = \pi
\end{aligned}$$

e) Aus der angegebenen Tabelle sollte man wissen:

$$\begin{aligned}
\cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \\
3x &= 60^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\
x &= 20^\circ \pm k \cdot 120^\circ \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 96*

14.10 Funktionen in Polarkoordinaten

Test 12.4.1

$\boxed{\mathbf{1}}$ $r = \sqrt{3}; \quad \varphi = 60^\circ$

Falsch! Sie sollten beachten, dass

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \longleftrightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $r = \sqrt{3}; \quad \varphi = 30^\circ$

Richtige Lösung!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $r = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi = 60°$

Falsch! Bei der Berechnung vom Wert r haben Sie sich verrechnet.

Lösung:

Weil $x^2 + y^2 = r^2$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= r^2 \\ \frac{9}{4} + \frac{3}{4} &= r^2 \\ \frac{12}{4} = 3 &= r^2 \\ r &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ \frac{3}{2} &= \sqrt{3}\cos\varphi \\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \varphi \\ \varphi &= 30° \end{aligned}$$

$$A(\sqrt{3}{,}30°)$$

→ Zur Aufgabe auf Seite 105

Test 12.4.2

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Falsch! Sie haben den Radius des Punktes ($r = 7$) vergessen.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x = \frac{7\sqrt{2}}{2} \quad y = -\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Falsch! Sie sollten beachten, dass

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x = -\frac{7\sqrt{2}}{2} \quad y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Richtige Lösung!

Lösung:

Der gegebene Punkt hat die Koordinaten $r = 7$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 7 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ x &\approx -4{,}94 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 7 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ y &\approx 4{,}94 \end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 105*

Test 12.4.3

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\varphi_{1,2} = \pm 60°$

Richtige Antwort!

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\varphi_{1,2} = \pm 30°$

Falsch! Diese Antwort ist nicht richtig. Sie sollten dabei beachten, dass

$$\cos(\pm 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\varphi_{1,2} = \pm 120^\circ$

Falsch! Diese Antwort ist nicht richtig. Sie sollten dabei beachten:

$$\cos(\pm 120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lösung:

Es gilt:

$$r = 1 + \cos\varphi$$

$$\begin{aligned}
\text{Für} \quad r &= \frac{3}{2} \\
\text{gilt} \quad \frac{3}{2} &= 1 + \cos\varphi \\
\frac{1}{2} &= \cos\varphi \\
\varphi_{1,2} &= \pm 60^\circ = \pm\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

→ *Zur Aufgabe auf Seite 105*

Test 12.4.4

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\varphi_{1,2} = \pm 60^\circ\ ; \quad r_{1,2} = 6$

Falsch! Diese Antwort ist zwar nicht falsch, aber noch nicht komplett!

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\varphi_{1,2} = \pm 120^\circ\ ; \quad r_{1,2} = 2$

Falsch! Diese Antwort ist zwar nicht falsch, aber noch nicht komplett!

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\varphi_{1,2} = \pm 60^\circ\ , \quad \varphi_{3,4} = \pm 120^\circ\ ; \qquad r_{1,2} = 6\ , \quad r_{3,4} = 2$

Richtige Lösung!

Lösung:

Die erste Kurve hat die Gleichung:

$$r = 4 \cdot (1 + \cos\varphi)$$

Die zweite Kurve:

$$\begin{aligned} r \cdot (1 - \cos\varphi) &= 3 \\ r &= \frac{3}{1 - \cos\varphi} \end{aligned}$$

Um den Schnittpunkt der beiden Kurven zu finden, soll man die beiden Gleichungen gleich setzen. Anders ausgedrückt haben die beiden Kurven an ihrem Schnittpunkt ein gemeinsames r.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (1 + \cos\varphi) &= \frac{3}{1 - \cos\varphi} \\ (1 + \cos\varphi) \cdot (1 - \cos\varphi) &= \frac{3}{4} \\ 1^2 - \cos^2\varphi &= \frac{3}{4} \\ 1 - \cos^2\varphi &= \frac{3}{4} \\ \sin^2\varphi &= \frac{3}{4} \\ \sin\varphi &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sin\varphi &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi_{1,2} &= \pm 60^\circ = \pm\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Wie man auf den Einheitskreis sieht, gibt es zwei Winkel, deren Sinus den Betrag

$$+\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

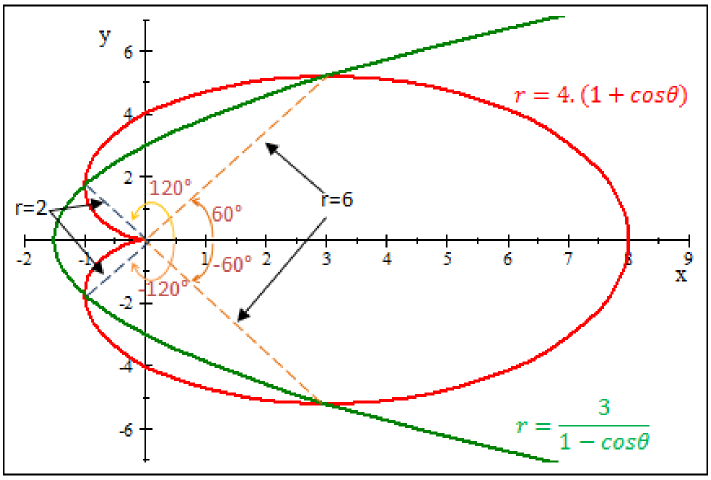
aufweist. Deswegen existieren noch zwei weitere Schnittwinkel.

$$\varphi_{3,4} = \pm 120^\circ$$

Wir haben die Winkel der Schnittpunkte herausgefunden. Um den Radius des Schnittpunktes auch zu berechnen, setzen wir die berechneten Winkel in eine der beiden angegebenen Kurven ein:

$$\begin{aligned} r &= 4 \cdot (1 + \cos(\pm 60°)) \\ r &= 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ r_{1,2} &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 4 \cdot (1 + \cos(\pm 120°)) \\ r &= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ r_{3,4} &= 2 \end{aligned}$$



→ *Zur Aufgabe auf Seite 106*