# 1 Lineare Gleichungssysteme

Video:

## 1.1 Einsetzungsverfahren

### Einführung

Das **Einsetzungsverfahren** ist ein Verfahren, mit dem du ein lineares Gleichungssystem lösen kannst. Du gehst immer in folgenden Schritten vor:

1. Stelle eine der Gleichungen nach einer der Variablen um.
2. Setze den umgestellten Term in die andere Gleichung ein.
3. Die Gleichung, die man erhält, besitzt nur noch eine Variable. Stelle nun nach dieser um.
4. Setze den erhaltenen Wert in die Gleichung ein, die man zu Beginn umgestellt hat, um den zweiten Wert zu erhalten.
5. Gib die Lösungsmenge an.

**Beispiel:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | I: | $3x - 6y = 0$ | |
| | II: | $2x + 2 = 6$ | |
| Stelle eine der Gleichungen nach einer der Variablen um: | II: | $2x + 2y = 6$ | $\mid -2y$ |
| | | $2x = 6 - 2y$ | $\mid :2$ |
| | | $x = 3 - y$ | |
| Setze den umgestellten Term in die andere Gleichung ein: | in I: | $3 \cdot (3 - y) - 6y = 0$ | |
| Die Gleichung, die man erhält, besitzt nur eine Variable. Stelle nach dieser Variablen um: | | $9 - 3y - 6y = 0$ | |
| | | $9 - 9y = 0$ | $\mid -9$ |
| | | $-9y = -9$ | $\mid : (-9)$ |
| | | $y = 1$ | |
| Setze den erhaltenen Wert in die Gleichung ein, die man zu Beginn umgestellt hat, um den zweiten Wert zu erhalten: | in II: | $x = 3 - \mathbf{1}$ | |
| | | $x = 2$ | |
| Gib die Lösungsmenge an: | Lösungsmenge: | $\mathbb{L} = \{(2 \mid 1)\}$ | |

### Einstiegsaufgabe

Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

I: $x + 2y = 1$

II: $2x + 2y = 0$

## 1.1 Einsetzungsverfahren

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

**1.** Gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

a) I: $x + 2{,}5y = 1$
II: $y = 3x$

b) I: $6x - 2y = 12$
II: $x = -0{,}5y + 5$

c) I: $2x + 4y = 6$
II: $y = 2x - 1$

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

**2.** Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren und gib die Lösungsmenge an. Stelle dazu zunächst nach einer Variablen um.

a) I: $x + y = 1$
II: $x - y = 2$

b) I: $2x - y = 3$
II: $2x + 2y = 0$

c) I: $3x - 4y = 6$
II: $-2x - 5y = 1$

**3.** Stelle ein passendes Gleichungssystem auf und löse es mit dem Einsetzungsverfahren. Formuliere einen Antwortsatz.

Oma Elke kauft 3 kg Trauben und 4 kg Kirschen. Sie muss dafür 30,00 € bezahlen. Greta zahlt für 5 kg Trauben und 2 kg Kirschen insgesamt einen Preis von 27,60 €.

Berechne für die Trauben und die Kirschen jeweils den Preis pro Kilogramm.

**4.** Löse das lineare Gleichungssystem und gib die Lösungsmenge an.

a) I: $y = -x + 15$
II: $y = -1x + 6$

b) I: $-2x + 2y = 6$
II: $3x - 3y = -9$

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

**5.** Überlege, wie du erkennen kannst, ob ein lineares Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen hat.
Formuliere hierfür einen Merksatz.

## 1.2 Gleichsetzungsverfahren

Video:

### Einführung

Das **Gleichsetzungsverfahren** ist ein weiteres Verfahren, mit dem du ein lineares Gleichungssystem lösen kannst. Du gehst immer in folgenden Schritten vor:

- **Umstellen:**
  1. Stelle beide Gleichungen nach einer Variablen um. Beachte, dass du sie jeweils nach derselben Variablen umstellst.
- **Gleichsetzen:**
  2. Setze die beiden Terme, welche die andere Variable enthalten, gleich. Du erhältst eine Gleichung mit nur dieser Variablen.
  3. Stelle die Gleichung um und berechne den ersten Wert.
- **Einsetzen:**
  4. Setze den Wert in eine der umgestellten Gleichungen ein, um den zweiten Wert zu ermitteln.
  5. Gib die Lösungsmenge an.

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} &\text{I:} && 2x - 4y = 2 \\ &\text{II:} && 2x - 6y = -2 \end{aligned}$$

**Umstellen:**

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad 2x - 4y &= 2 && \mid +4y \\ 2x &= 2 + 4y && \mid :2 \\ x &= 1 + 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II:}\quad 2x - 6y &= -2 && \mid +6y \\ 2x &= -2 + 6y && \mid :2 \\ x &= -1 + 3y \end{aligned}$$

**Gleichsetzen:**

$$\begin{aligned} \text{I = II:}\quad 1 + 2y &= -1 + 3y && \mid -3y \mid -1 \\ -y &= -2 && \mid \cdot (-1) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

**Einsetzen:**

in I: $x = 1 + 2 \cdot 2 = 5$

**Lösungsmenge:** $\mathbb{L} = \{(5 \mid 2)\}$

### Einstiegsaufgabe

Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren.

I: $x - 4y = -4$

II: $x + y = 1$

## 1.2 Gleichsetzungsverfahren

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

**1.** Gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

a) I: $y = 2x$
II: $y = -x + 3$

b) I: $x = \frac{1}{3}y + 2$
II: $x = -0{,}5x + 5$

c) I: $y = -x + 5$
II: $y = x + 1$

**2.** Stelle die Gleichungen nach x um.

a) $5 = x + y$ b) $25x - 15y = 5$ c) $7x - 0{,}5y = 35$

**3.** Stelle die Gleichungen nach y um.

a) $3y - 3x = 6$ b) $-y + 5x = 3$ c) $2{,}5x + 0{,}5y = -1$

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

**4.** Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren und gib die Lösungsmenge an.

a) I: $6x - 24 = 12y$
II: $18x - 18y = 9$

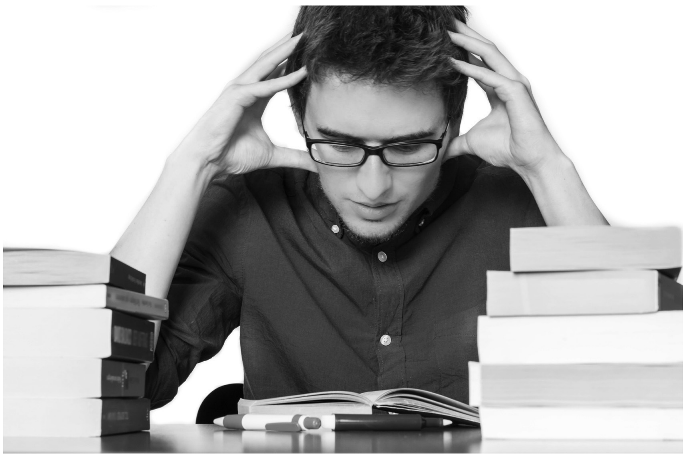
b) I: $30x - 15y = 45$
II: $-3x + y = -15$

c) I: $y + 12x = 36$
II: $1y - 2x = -1$

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

**5.** Stelle jeweils ein lineares Gleichungssystem auf und löse es im Anschluss.

a) Die Summe zweier Zahlen ist 35. Das Dreifache der ersten Zahl ist das Vierfache der zweiten Zahl.
b) Addiert man zum Doppelten der ersten Zahl 4, so erhält man das Fünffache der zweiten Zahl. Addiert man das Doppelte der ersten und das Fünffache der zweiten Zahl, so erhält man 16.
c) In einer Herberge gibt es Dreibett- und Fünfbettzimmer. Es sind insgesamt 20 Zimmer, in denen 80 Jugendliche untergebracht werden können.
d) Mirkos Vater ist 24 Jahre älter als Mirko. Vor 5 Jahren war er viermal so alt wie Mirko. Berechne das Alter der beiden.



# 1 Lineare Gleichungssysteme

## 1.1 Einsetzungsverfahren

### Einstiegsaufgabe

Seite 5

I: $x = 1 - 2y$

in II: $2 \cdot (1 - 2y) + 2y = 0$
$2 - 2y = 0$
$y = 1$

In I: $x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$

$\mathbb{L} = \{(-1\,|\,1)\}$

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

Seite 6

**1.** a) II in I: $x + 2{,}5 \cdot 3x = 1$
$8{,}5x = 1$
$x = \frac{2}{17}$

in II: $y = 3 \cdot \frac{2}{17} = \frac{6}{17}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{2}{17}\middle|\frac{6}{17}\right)\right\}$

b) II in I: $6 \cdot (-0{,}5y + 5) - 2y = 12$
$-5y + 30 = 12$
$y = 3{,}6$

in II: $x = -0{,}5 \cdot 3{,}6 + 5 = 3{,}2$

$\mathbb{L} = \{(3{,}2\,|\,3{,}6)\}$

c) II in I: $2x + 4 \cdot (2x - 1) = 6$
$10x - 4 = 6$
$x = 1$

in II: $y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$\mathbb{L} = \{(1\,|\,1)\}$

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

Seite 6

**2.** a) I: $x = 1 - y$

in II: $(1 - y) - y = 2$
$1 - 2y = 2$
$y = -\frac{1}{2}$

in I: $x = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{3}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right)\right\}$

b) I: $y = 2x - 3$

in II: $2x + 2 \cdot (2x - 3) = 0$
$6x - 6 = 0$
$x = 1$

in I: $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$\mathbb{L} = \{(1\,|\,-1)\}$

c) II: $x = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}y$

in I: $3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}y\right) - 4y = 6$
$-\frac{3}{2} - \frac{23}{2}y = 6$
$y = -\frac{15}{23}$

in II: $x = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{15}{23}\right) = \frac{26}{23}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{26}{23}\middle|-\frac{15}{23}\right)\right\}$

**3.** x: Preis pro kg Trauben in €  y: Preis pro kg Kirschen in €

I: $3x + 4y = 30$
II: $5x + 2y = 27{,}6$  umstellen: II: $y = 13{,}8 - 2{,}5x$

II in I: $3x + 4 \cdot (13{,}8 - 2{,}5x) = 30$
$-7x + 55{,}2 = 30$
$x = 3{,}6$

in II: $y = 13{,}8 - 2{,}5 \cdot 3{,}6 = 4{,}8$

Antwort: Ein kg Trauben kostet 3,60 €. Ein kg Kirschen kostet 4,80 €.

## Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3 — Seite 6

**4.** a) II in I: $-1x + 6 = -x + 15 \quad | + x$

$6 = 15$ falsche Aussage: $\mathbb{L} = \{\ \}$

b) I: $y = 3 + x$

II in I: $3x - 3(3 + x) = -9$

$-9 = -9$ wahre Aussage: $\mathbb{L} = \{(x|x + 3)|x \text{ beliebig}\}$

**5.** Erhält man beim Lösen eines Gleichungssystems eine falsche Aussage, so besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.
Erhält man beim Lösen eines Gleichungssystems (mit zwei Gleichungen und zwei Variablen) eine wahre Aussage, so besitzt das System unendlich viele Lösungen.

# 1.2 Gleichsetzungsverfahren

## Einstiegsaufgabe — Seite 7

I: $x = -4 + 4y$

II: $x = 1 - y$

I = II: $-4 + 4y = 1 - y$

$y = 1$ in II: $x = 1 - 1 = 0$ $\mathbb{L} = \{(0|1)\}$

## Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1 — Seite 8

**1.** a) I = II: $2x = -x + 3$

$x = 1$ in I: $y = 2 \cdot 1 = 2$ $\mathbb{L} = \{(1|2)\}$

b) I = II: $\frac{1}{3}y + 2 = -0{,}5y + 5$

$\frac{5}{6}y = 3$

$y = 3{,}6$ in II: $-0{,}5 \cdot 3{,}6 + 5 = 3{,}2$ $\mathbb{L} = \{(3{,}2|3{,}6)\}$

c) I = II: $-x + 5 = x + 1$

$x = 2$ in I: $y = -2 + 5 = 3$ $\mathbb{L} = \{(2|3)\}$

**2.** a) $5 = x + y \quad | -y$

$5 - y = x$

$x = 5 - y$

b) $25x - 15y = 5 \quad | + 15y$

$25x = 5 + 15y \quad | : 25$

$x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}y$

c) $7x - 0{,}5y = 35 \quad | + 0{,}5y$

$7x = 35 + 0{,}5y \quad | : 7$

$x = 5 + \frac{1}{14}y$

**3.** a) $3y - 3x = 6 \quad | + 3x$

$3y - 3x = 6 \quad | : 3$

$y = 2 + x$

b) $-y + 5x = 3 \quad | -5x$

$-y = 3 - 5x \quad | \cdot (-1)$

$y = -3 + 5x$

c) $2{,}5x + 0{,}5y = -1 \quad | -2{,}5x$

$0{,}5y = -1 - 2{,}5x \quad | \cdot 2$

$y = -2 - 5x$

## Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2 — Seite 8

**4.** a) I: $x = 2y + 4$

II: $x = 0{,}5 + y$

I = I: $2y + 4 = 0{,}5 + y$

$y = -3{,}5$

in II: $x = 0{,}5 - 3{,}5 = -3$

$\mathbb{L} = \{(-3|-3{,}5)\}$

b) I: $y = -3 + 2x$

II: $y = -15 + 3x$

I = II: $-3 + 2x = -15 + 3x$

$x = 12$

in I: $y = -3 + 24 = 21$

$\mathbb{L} = \{(12|21)\}$

c) I: $y = 36 - 12x$

II: $y = -1 + 2x$

I = II: $36 - 12x = -1 + 2x$

$x = \frac{37}{14}$

in II: $y = -1 + \frac{37}{7} = \frac{30}{7}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{37}{14}\middle|\frac{30}{7}\right)\right\}$

**5.** a) x: erste Zahl, y: zweite Zahl

I: $x + y = 35$ I: $x = 35 - y$

II: $3x = 4y$ II: $x = \frac{4}{3}y$

$$\text{I} = \text{II}: \quad 35 - y = \frac{4}{3}y$$
$$35 = \frac{7}{3}y$$
$$y = 15 \qquad \text{in I: } x = 35 - 15 = 20$$

Antwort: Die gesuchten Zahlen sind 20 und 15.

b) x: erste Zahl, y: zweite Zahl

I: $2x + 4 = 5y$ I: $2x = 5y - 4$

II: $2x + 5y = 16$ II: $2x = 16 - 5y$

$$\text{I} = \text{II}: \quad 5y - 4 = 16 - 5y$$
$$10y = 20$$
$$y = 2 \qquad \text{in I: } x = 6 : 2 = 3$$

Antwort: Die gesuchten Zahlen sind 3 und 2.

c) x: Anzahl der Dreibettzimmer, y: Anzahl der Fünfbettzimmer

I: $x + y = 20$ I: $y = 20 - x$

II: $3x + 5y = 80$ II: $y = 16 - \frac{3}{5}x$

$$\text{I} = \text{II}: \quad 20 - x = 16 - \frac{3}{5}x$$
$$-\frac{2}{5}x = -4$$
$$x = 10 \qquad \text{in I: } y = 20 - 10 = 10$$

Antwort: Es gibt in der Jugendherberge zehn Dreibettzimmer und zehn Fünfbettzimmer.

d) x: Alter von Mirko, y: Alter von Mirkos Vater

I: $x + 24 = y$ I: $y = x + 24$

II: $4(x - 5) = y - 5$ II: $y = 4x - 15$

$$\text{I} = \text{II}: \quad x + 24 = 4x - 15$$
$$-3x = -39$$
$$x = 13 \qquad \text{in I: } y = 13 + 24 = 37$$

Antwort: Mirko ist 13 Jahre alt, sein Vater ist 37 Jahre alt.

## 1.3 Additionsverfahren

**Einstiegsaufgabe** Seite 9

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 4x - 6y = 0 \\ \text{II:} & -4x + 2y = 4 \\ \hline \text{I + II:} & -4y = 4 \\ & y = -1 \end{array}$$

y in II: $-2x + (-1) = 2$

$x = -1{,}5$

$\mathbb{L} = \{(-1{,}5 \,|\, -1)\}$