Vorkurs Mathematik
Übungen zu Polynomgleichungen

1 Aufgaben

Lineare Gleichungen

Aufgabe 1.1 Ein Freund von Ihnen möchte einen neuen Mobilfunkvertrag abschließen. Es gibt zwei verschiedene Angebote:

- Anbieter 1: monatl. Grundgebühr: 10€, Minutenpreis: $0,10$€ (alle Netze).
- Anbieter 2: monatl. Grundgebühr: 5€, Minutenpreis: $0,20$€ (alle Netze).

Abgesehen davon, dass es vielleicht bessere Angebote irgendwo in diesem Universum gibt: Ab wieviel Gesprächsminuten pro Monat sollte Ihr Freund sich für Anbieter 1 entscheiden?

Aufgabe 1.2 Berechnen sie den Schnittpunkt der Geraden die durch $y = 3x + 2$ und $y = -2x + 1$ gegeben sind.

Quadratische Gleichungen

Aufgabe 1.3 Hat das Polynom $x^2 + 2$ eine Nullstelle?
Wieviele (verschiedene!) Nullstellen hat $x^2 - 4x + 4$?
Verwenden Sie einmal die p-q-Formel und einmal die Diskriminante.

Aufgabe 1.4 Berechnen sie die Nullstellen von

a)	$2x^2 + 7x + 3$	c)	$x^2 - 2x - 15$
b)	$3x^2 + 7x - 6$	d)	$x^2 - 2x$

Aufgabe 1.5 Faktorisieren Sie

a)	$x^2 - 3x + 2$	c)	$x^2 + x$
b)	$x^2 + 3x + 2$	d)	$x^2 + 1$

Tipp: Prüfen Sie vorher (mittels Diskriminante) ob das Polynom wirklich in lineare Faktoren zerfällt.

Polynomgleichungen dritten grades

Aufgabe 1.6 Berechnen sie die Nullstellen von

a)	$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$	c)	$x^3 - 4x^2 + 4x$
b)	$x^3 + 6x^2 - x - 6$	d)	$x^3 - 1$

Polynomgleichungen aus rationalen Gleichungen

In den folgenden Aufgaben müssen die rationalen Gleichungen durch Multiplikation mit dem Hauptnenner in Polynomgleichungen umgeformt werden.
Beim Multiplizieren mit dem Hauptnenner gehen *keine* Lösungen verloren, *es können aber neue Lösungen entstehen*. Es gibt also möglicherweise Lösungen der *neuen Polynomgleichung*, die nicht Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind! Machen Sie also mit allen Lösungen der Polynomgleichung eine Probe in der Ausgangsgleichung!

Beispiel: Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $\frac{x+2}{2x-1} = \frac{4x-1}{x}$.

[Ausgangsgleichung]	$\frac{4x-1}{x} = \frac{x+2}{2x-1} \qquad \mid \cdot x \cdot (2x-1)$
[Polynomgleichung]	$\Rightarrow \quad (4x-1)(2x-1) = (x+2)x$
	$\Leftrightarrow \quad 8x^2 - 6x + 1 = x^2 + 2x \qquad \mid -x^2 - 2x$
	$\Leftrightarrow \quad 7x^2 - 8x + 1 = 0$
[Normalform]	$\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{1}{7} = 0$
[p-q-Formel]	$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = -(-\frac{4}{7}) \pm \sqrt{\frac{16}{49} - \frac{7}{49}} = \frac{4}{7} \pm \frac{3}{7}$
	$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{7} \qquad x_2 = 1$

Probe: Einsetzten der Lösungen in den Hauptnenner. Falls sich 0 ergibt, so ist die Lösung unzulässig, weil dann in der Ausgangsgleichung durch Null geteilt werden würde.

$$x_1 \cdot (2x_1 - 1) = \frac{1}{7} \cdot (2\frac{1}{7} - 1) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad x_2 \cdot (2x_2 - 1) = 1 \cdot (2-1) \neq 0.$$

Also sind $\frac{1}{7}$ und 1 tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung.

Aufgabe 1.7 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\frac{2x+1}{x-3} + \frac{3x-5}{x+3} = \frac{2x^2+2x+18}{x^2-9}.$$

Tipp: Der Hauptnenner ist $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$ und hat nur Grad 2!

Aufgabe 1.8 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} = -\frac{2x+1}{x^2-4x+3}.$$

Tipp: Der Hauptnenner ist $(x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3$ und hat nur Grad 2!

Aufgabe 1.9 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\frac{2x+3}{x-1} + \frac{4x+5}{x+1} = \frac{6x^2+6x-2}{x^2-1}.$$

Tipp: Welche Punkte sind *keine* Lösung?

2 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1.1
Aufstellen der Linearen Gleichung
Die monatlichen Gesamtkosten beider Mobilverträge sind lineare Polynome in der Variable x, die für die monatlich „vertelefonierten“ Minuten steht:

- Anbieter 1: monatl. Kosten: $f(x) = 10 + 0,1 \cdot x$.
- Anbieter 2: monatl. Kosten: $g(x) = \ \ 5 + 0,2 \cdot x$.

Offensichtlich ist Anbieter 2 billiger, wenn man nur „wenig“ telefoniert. Dies kann man prüfen in dem man die Monatskosten ausrechnet, die entstehen wenn man gar nicht telefoniert: $f(0) = 10 > 5 = g(0)$.
Lösen der Linearen Gleichung
Ab wieviel Monats-Telefonier-Minuten lohnt es sich aber zu Anbieter 1 zu wechseln? Gesucht ist der Punkt x an dem gilt: $f(x) = g(x)$, dieser Wert berechnet sich wie folgt:

$$\begin{array}{rrcll} & g(x) & = & f(x) & \\ \Leftrightarrow & 5 + 0,2 \cdot x & = & 10 + 0,1 \cdot x & \| - 5 \quad - (0,1 \cdot x) \\ \Leftrightarrow & 0,1 \cdot x & = & 5 & \\ \Leftrightarrow & x & = & 5 \cdot 10 = 50 & \end{array}$$

Antwort
Ab 50 telefonierten Gesprächsminuten (und mehr) pro Monat lohnt es sich den Vertrag bei Anbieter 1 abzuschließen.

Lösung zu Aufgabe 1.2
Der Schnittpunkt der beiden Graden liegt bei dem x-Wert, der für beide Geraden den selben y-Wert liefert. Entsprechend setzen wir die beiden Werte gleich, um x zu bestimmen:

$$\begin{array}{rlcrl} & 3x{+}2 & = & -2x{+}1 & | + 2x \quad - 2 \\ \Leftrightarrow & 5x & = & -1 & | : 5 \\ \Leftrightarrow & x & = & -\frac{1}{5} & \end{array}$$

Um den zugehörigen y-Wert auszurechnen setzen wir x in $y = 3x + 2$ ein:

$$y = 3 * (-\frac{1}{5}) + 2 = \frac{7}{5}$$

Lösung: Der Schnittpunkt beider Graden liegt bei $(x, y) = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$.

Lösung zu Aufgabe 1.3
$x^2 + 2$ Diskriminante: $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$ (keine Lösung).
$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ Diskriminante: $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ (exakt eine Lösung).

Lösung zu Aufgabe 1.4

Ausgangspolynom			Faktorisierung	Nullstellen
a)	$2x^2{+}7x{+}3$	=	$2(x + 1/2)(x + 3)$	$-1/2, \quad -3$
b)	$3x^2{+}7x{-}6$	=	$3(x - 2/3)(x + 3)$	$2/3, \quad -3$
c)	$x^2{-}2x{-}15$	=	$(x - 5)(x + 3)$	$5, \quad -3$
d)	$x^2{-}2x$	=	$x(x - 2)$	$0, \quad 2$

Lösung zu Aufgabe 1.5

Ausgangspolynom			Faktorisierung	Nullstellen
a)	x^2-3x+2	$=$	$(x-1)(x-2)$	$1, \quad 2$
b)	x^2+3x+2	$=$	$(x+1)(x+2)$	$-1, \quad -2$
c)	x^2+x	$=$	$x(x+1)$	$0, \quad -1$
d)	x^2+1		keine	keine

Das Polynom x^2+1 hat die Diskriminante -4. es hat also keine Nullstellen und ist damit nicht faktorisierbar.

Lösung zu Aufgabe 1.6

Ausgangspolynom			Faktorisierung	Nullstellen
a)	x^3+2x^2-5x-6	$=$	$(x+1)(x-2)(x+3)$	$-1, \quad 2, \quad -3$
b)	$x^3+6x^2-x\ -6$	$=$	$(x+1)(x-1)(x+6)$	$-1, \quad 1, \quad -6$
c)	x^3-4x^2+4x	$=$	$x(x-2)^2$	$0, \quad 2$
d)	x^3-1	$=$	$(x-1)(x^2+x+1)$	1

Das Polynom x^2+x+1 hat negative Diskriminante $((1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0)$. Es ist also nicht weiter faktorisierbar.

Lösung zu Aufgabe 1.7

Man beachte das $(x-3)(x+3)=x^2-9$ gilt. Der Hauptnenner ist hier also $(x-3)(x+3)$

$$\frac{2x+1}{x-3}+\frac{3x-5}{x+3} = \frac{2x^2+2x+18}{x^2-9} \qquad \| \cdot (x-3)(x+3)$$

Polynomgleichung

$$\begin{array}{llllcll}
\Rightarrow & (2x+1)(x+3) & +(3x-5)(x-3) & & = & 2x^2+2x+18 & \\
\Leftrightarrow & 2x^2+7x+3 & +3x^2-14x & +15 & = & 2x^2+2x+18 & \\
\Leftrightarrow & & 5x^2\ -7x & +18 & = & 2x^2+2x+18 & \| -2x^2-2x-18 \\
\Leftrightarrow & & 3x^2\ -9x & & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & & x^2\ -3x & & = & 0 & \text{[Normalform]} \\
\Leftrightarrow & & & x_{1/2} & = & -(-\frac{3}{2}) \pm \sqrt{\frac{9}{4}-0} & \text{[}p\text{-}q\text{-Formel]} \\
\Leftrightarrow & & & x_{1/2} & = & \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2} &
\end{array}$$

Statt die p-q-Formel zu verwenden kann man auch am Schluss Faktorisieren: $x^2-3x=x(x-3)$. So sieht man auch, dass die Lösungen der Polynomgleichung $x_1=0$ und $x_2=3$ lauten. Die Probe (Einsetzen in den Hauptnenner) liefert:

$$(x_1-3)(x_1+3)=(-3)\cdot(3)=9\neq 0 \qquad \text{und} \qquad (x_2-3)(x_2+3)=(3-3)(3+3)=0.$$

Lösung: Also ist nur 0 eine zulässige Lösung der Ausgangsgleichung.

Lösung zu Aufgabe 1.8

Man beachte das $(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$ gilt. Der Hauptnenner ist hier also $(x-1)(x-3)$

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-3} = -\frac{2x+1}{x^2-4x+3} \qquad \| \cdot (x-1)(x-3)$$

Polynomgleichung

$$\begin{array}{lllcll}
\Rightarrow & 3(x-3) & -2(x-1) & = & -(2x+1) & \\
\Leftrightarrow & 3x-9 & -2x\quad +2 & = & -2x-1 & \\
\Leftrightarrow & & x\quad -7 & = & -2x-1 & \| +2x+7 \\
\Leftrightarrow & & 3x & = & 6 & \| :3 \\
\Leftrightarrow & & x & = & 2 &
\end{array}$$

Lösungen der Polynomgleichung $x_1 = 2$. Die Probe (Einsetzen in den Hauptnenner) liefert:

$$(x_1 - 1)(x_1 - 3) = (2-1) \cdot (2-3) = (1)(-1) \neq 0$$

Lösung: Also ist 2 eine zulässige Lösung der Ausgangsgleichung.

Lösung zu Aufgabe 1.9
Man beachte das $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ gilt. Der Hauptnenner ist hier also $(x-1)(x+1)$

$$\frac{2x+3}{x-1} + \frac{4x+5}{x+1} = \frac{6x^2+6x-2}{x^2-1} \qquad \| \cdot (x-1)(x+1)$$

Polynomgleichung

$$\begin{array}{lllrcll}
\Rightarrow & (2x+3)(x+1) & +(4x+5)(x-1) & & = & 6x^2+6x-2 & \\
\Leftrightarrow & 2x^2+5x+3 & 4x^2 \ +x & -5 & = & 6x^2+6x-2 & \\
\Leftrightarrow & & 6x^2{+}6x & -2 & = & 6x^2+6x-2 & \| -6x^2-6x+2 \\
\Leftrightarrow & & & 0 & = & 0 &
\end{array}$$

Hier erhalten wir am Schluß eine wahre Aussage ("*Null gleich Null*" gilt stets!), die nicht von x abhängt. Dies bedeutet, dass die Polynomgleichung für *jedes* x erfüllt ist, d.h. diese Polynomgleichung gilt stets[1]. Die Lösungsmenge der Polynomgleichung ist also ganz $\mathbb{R}$.

Welche Lösungen sind zulässig für die Ausgangsgleichung?
Antwort: Alle außer den Nullstellen des Hauptnenners:

$$(x-1)(x+1) = 0$$

Dies sind die Werte $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Die Ausgangsgleichung gilt also für alle x, außer $x = 1$ und $x = -1$. **Lösung:** Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

[1]Eine andere Polynomgleichung, die stets erfüllt ist ist z.B. $x^2 + 1 = x^2 + 1$