Arbeitsblatt – Gleichungen höheren Grades

1. Lösen Sie folgenden quadratischen Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung!

(a) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

(c) $x^2 - 4 = 0$ (d) $x^2 - 2x + 4 = 0$

2. Lösen Sie folgenden quadratischen Gleichungen mittels p-q-Lösungsformel!

(a) $x^2 + 12x + 32 = 0$ (b) $x^2 - 9 = 0$ (c) $x^2 + 6x + 9 = 0$

(d) $2x^2 - 12x + 18 = 0$ (e) $x^2 + 3 = 0$ (f) $3x^2 + 6x - 24 = 0$

3. Lösen Sie folgende Gleichungen durch Faktorisierung der Summen (Ausklammern)!

(a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$ (b) $2x^4 - 10x^3 + 12x^2 = 0$

(c) $3x^3 + 24x^2 = 0$ (d) $-5x^4 - 10x^3 = 0$

4. Lösen Sie diese einfachen biquadratischen Gleichungen $x^4 + px^2 + q = 0$ durch die Substitution: $z = x^2$, $z^2 = x^4$!

(a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ (b) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

(c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (d) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

5. Lösen Sie diese allgemeinen biquadratischen Gleichungen $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ durch eine Umformung mit $p = \frac{B}{A}$ und $q = \frac{C}{A}$ und anschließende Substitution wie in Aufgabe 4!

(a) $2x^4 - 12x^2 + 18 = 0$ (b) $3x^4 - 27 = 0$

(c) $-0{,}5x^4 + 3x^2 - 2{,}5 = 0$ (d) $12x^4 - 48x^2 = 0$

6. Lösen Sie folgende Gleichungen durch Anwendung Ihres Wissens über biquadratische Gleichungen!

(a) $x^5 + 4x^3 + 4x = 0$ (b) $7x^6 - 21x^4 + 14x^2 = 0$

(c) $\sqrt{x^4 + 10x^2 + 26} - 1 = 0$ (d) $\frac{-4x^5 + 100x}{x} = 0$

7. Gegeben sei das folgende Polynom $y = f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$ vierten Grades.

(a) Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms!

(b) Geben Sie die Produktdarstellung des Polynoms an!

8. Bestimmen Sie die vier verschiedenen natürlichen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120$ und geben Sie eine Produktdarstellung für das Polynom an!

9. Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome und geben Sie die Produktdarstellung an!

(a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

10. Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen und machen Sie immer eine Probe!

I. Gleichungen mit einer Wurzel - Lösen durch einmaliges Quadrieren:

(a) $\sqrt{5 - 2x} = 1$ (b) $\sqrt{7x + 2} - 3 = 0$

(c) $0 = \sqrt{4 - 3x} - \sqrt{5}$ (d) $5 - \sqrt{5x - 4} = 1$

(e) $0 = 3 + \sqrt{4x+6}$ (f) $6 = \sqrt{2{,}5x - 3{,}25} + 10$

II. Gleichungen mit zwei Wurzeln – Lösen durch einmaliges Quadrieren:

(a) $\sqrt{x+3} = \sqrt{24-2x}$ (b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{-5x-4} = 0$

(c) $\sqrt{x^2+3x-7} = \sqrt{x^2-x+1}$ (d) $\sqrt{x^2-5x+8} = \sqrt{4-x}$

(e) $\sqrt{2x^2+3x+2} = \sqrt{x^2-x-2}$

III. Gleichungen mit zwei Wurzeln – Lösen durch zweimaliges Quadrieren:

(a) $\sqrt{x+1} + 7 = \sqrt{27+18x}$ (b) $\sqrt{3x-5} - 1 = 2 + \sqrt{x-6}$

(c) $\sqrt{5x+11} + \sqrt{2x-1} = 9$ (d) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{3x+12} = -1$

Lösungen – Gleichungen höheren Grades

1. Lösung mit quadratischer Ergänzung:

(a) $0 = x^2 - 4x + 4 = \left(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2\right) - 2^2 + 4 = (x-2)^2 - 4 + 4 = (x-2)^2 \qquad |\pm\sqrt{\ }$

$x - 2 = \pm 0 \qquad | + 2$

$x_{1/2} = 2$ (doppelte Lösung)

(b) $0 = x^2 + 2x - 8 = \left(x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2\right) - 1^2 - 8 = (x+1)^2 - 1 - 8 = (x+1)^2 - 9 \qquad |+9$

$(x+1)^2 = 9 \qquad | \pm\sqrt{\ }$

$x + 1 = \pm 3 \qquad | - 1$

$x_1 = -1 - 3 = -4 \qquad x_2 = -1 + 3 = 2$ (2 verschiedene Lösungen)

(c) $x^2 - 4 = 0 \qquad |+4$

$x^2 = 4 \qquad | \pm\sqrt{\ }$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$ (2 verschiedene Lösungen)

(d) $0 = x^2 - 2x + 4 = \left(x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2\right) - 1^2 + 4 = (x-1)^2 - 1 + 4 = (x-1)^2 + 3 \qquad |-3$

$(x-1)^2 = -3$ ist nicht lösbar.

2. Lösung mit p-q-Lösungsformel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

(a) $x^2 + 12x + 32 = 0 \quad \rightarrow \quad p = 12, \quad q = 32$

$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\frac{12^2}{4} - 32} = -6 \pm \sqrt{4}$

$x_1 = -6 - 2 = -8 \qquad x_2 = -6 + 2 = -4$ (2 verschiedene Lösungen)

(b) $x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad q = -9$

$x_{1/2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} + 9} = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$ (2 verschiedene Lösungen)

(c) $x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad p = 6, \quad q = 9$

$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - 9} = -3 \pm \sqrt{0} = -3$ (doppelte Lösung)

(d) $2x^2 - 12x + 18 = 0 \quad \xrightarrow{:2} \quad p = -6, \quad q = 9$

$x_{1/2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} - 9} = 3 \pm \sqrt{0} = 3$ (doppelte Lösung)

(e) $x^2 + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad q = 3$

$x_{1/2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - 3} = \pm\sqrt{-3}$ ist nicht lösbar.

(f) $3x^2 + 6x - 24 = 0 \quad \xrightarrow{:3} \quad p = 2, \quad q = -8$

$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} + 8} = -1 \pm \sqrt{9}$

$x_1 = -1 - 3 = -4 \qquad x_2 = -1 + 3 = 2$ (2 verschiedene Lösungen)

3. Lösung durch Faktorisierung/Ausklammern:

(a) $0 = x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x^2 - 2x + 1)$

1.Fall: $x_1 = 0$

2. Fall: $0 = x^2 - 2x + 1$

$x_{2/3} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - 1} = 1 \pm \sqrt{0} = 1$

(b) $0 = 2x^4 - 10x^3 + 12x^2 = 2x^2 \cdot (x^2 - 5x + 6)$

1.Fall: $2x^2 = 0$
$x_{1/2} = 0$

2. Fall: $0 = x^2 - 5x + 6$
$x_{3/4} = -\frac{(-5)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-5)^2}{4} - 6} = 2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25}$
$x_3 = 2{,}5 - 0{,}5 = 2$ $\quad x_4 = 2{,}5 + 0{,}5 = 3$

(c) $0 = 3x^3 + 24x^2 = 3x^2 \cdot (x + 8)$

1.Fall: $3x^2 = 0$
$x_{1/2} = 0$

2. Fall: $0 = x + 8$
$x_3 = -8$

(d) $0 = -5x^4 - 10x^3 = -5x^3 \cdot (x + 2)$

1.Fall: $-5x^3 = 0$
$x_{1/2/3} = 0$

2. Fall: $0 = x + 2$
$x_4 = -2$

4. Lösen durch Substitution $z = x^2$, $z^2 = x^4$:

(a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \;\rightarrow\; z^2 - 10z + 9 = 0 \;\rightarrow\; z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{16} = 5 \pm 4$
- $z_1 = 1$: $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$
- $z_2 = 9$: $\quad x_{3/4} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

(b) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0 \;\rightarrow\; z^2 + 6z + 5 = 0 \;\rightarrow\; z_{1/2} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2$
- $z_1 = -1$: keine Lösung in x
- $z_2 = -5$: keine Lösung in x

(c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \;\rightarrow\; z^2 - 13z + 36 = 0 \;\rightarrow\; z_{1/2} = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 6{,}5 \pm 2{,}5$
- $z_1 = 4$: $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
- $z_2 = 9$: $\quad x_{3/4} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

(d) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; z^2 - 3z - 4 = 0 \;\rightarrow\; z_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 1{,}5 \pm 2{,}5$
- $z_1 = -1$: keine Lösung in x
- $z_2 = 4$: $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

5. Lösen durch Substitution $z = x^2$, $z^2 = x^4$:

(a) $2x^4 - 12x^2 + 18 = 0 \;\xrightarrow{:2}\; x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \;\rightarrow\; z^2 - 6z + 9 = 0$
- $z_{1/2} = 3 \pm \sqrt{0} = 3$: $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

(b) $3x^4 - 27 = 0 \;\xrightarrow{:3}\; x^4 - 9 = 0 \;\rightarrow\; z^2 - 9 = 0$
- $z_1 = 0 - \sqrt{9} = -3$: keine Lösung in x
- $z_2 = 0 + \sqrt{9} = 3$: $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

(c) $-0{,}5x^4 + 3x^2 - 2{,}5 = 0 \;\xrightarrow{:(-0{,}5)}\; x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \;\rightarrow\; z^2 - 6z + 5 = 0$
- $z_1 = 3 - \sqrt{4} = 1$: $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$
- $z_2 = 3 + \sqrt{4} = 5$: $\quad x_{3/4} = \pm\sqrt{5}$

(d) $12x^4 - 48x^2 = 0 \;\xrightarrow{:12}\; x^4 - 4x^2 = 0 \;\rightarrow\; z^2 - 4z = 0$
- $z_1 = 2 - \sqrt{4} = 0$: $\quad x_{1/2} = 0$
- $z_1 = 2 + \sqrt{4} = 4$: $\quad x_{3/4} = \pm 2$

6. Anwendung biquadratischer Gleichungen:

(a) $x^5 + 4x^3 + 4x = x \cdot \left(x^4 + 4x^2 + 4\right) = 0$

1.Fall: $x_1 = 0$

2. Fall: $0 = x^4 + 4x^2 + 4$ (biquadratisch)

$0 = z^2 + 4z + 4$

$z_{1/2} = -2 \pm \sqrt{0} = -2$ keine weitere Lösung in x

(b) $7x^6 - 21x^4 + 14x^2 = 7x^2 \cdot \left(x^4 - 3x^2 + 2\right) = 0$

1.Fall: $7x^2 = 0$ 2. Fall: $0 = x^4 - 3x^2 + 2$ (biquadratisch)

$x_{1/2} = 0$

$0 = z^2 - 3z + 2$

$z_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 1{,}5 \pm 0{,}5$

$z_1 = 1$: $x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$z_2 = 2$: $x_{5/6} = \pm\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{x^4 + 10x^2 + 26} - 1 = 0$ $\quad | -1$

$\sqrt{x^4 + 10x^2 + 26} = 1$ | Quadrieren!

$x^4 + 10x^2 + 26 = 1$ $\quad | -1$

$x^4 + 10x^2 + 25 = 0$ (biquadratisch)

$z^2 + 10z + 25 = 0$

$z_{1/2} = -5 \pm \sqrt{0} = -5$ keine Lösung in x

(d) $\dfrac{-4x^5 + 100x}{x} = -4x^4 + 100 = 0$ $\quad | : (-4)$ wobei $x \neq 0$ sein muss.

$x^4 - 25 = 0$ $\quad | + 25$

$x^4 = 25$ $\quad | \pm \sqrt[4]{\ }$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{5}$

7. $y = f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$

(a) $0 = x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2 \cdot \left(x^2 + x - 2\right)$ liefert über die Zwischenstationen $0 = x^2$ und $0 = x^2 + x - 2$ die doppelte Lösung $x_{N1/2} = 0$ und die einfachen Lösungen $x_{N3} = 1$ und $x_{N4} = -2$.

(b) $x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x-1)(x+2)$

8. $f(x) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

Erraten einer ersten Nullstelle z.B. durch Wurzelsatz von Vieta, da dort: $120 = (-1)^4 x_1 x_2 x_3 x_4$ (wobei die 4 verschiedenen Nullstellen lt. Aufgabenstellung natürliche Zahlen sind)

- 1. NST: z.B. $x_1 = 2 \rightarrow$ Linearfaktor: $(x-2)$
- Polynomdivision: $(x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120) : (x-2) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$

Erraten einer zweiten Nullstelle von $f(x)$, die auch Nullstelle von $x^3 - 12x^2 + 47x - 60$ ist, z.B. durch Wurzelsatz von Vieta, da dort: $60 = (-1)^3 x_2 x_3 x_4$

- 2. NST: z.B. $x_2 = 3 \rightarrow$ Linearfaktor: $(x-3)$
- Polynomdivision: $(x^3 - 12x^2 + 47x - 60) : (x-3) = x^2 - 9x + 20$

Berechnen der letzten zwei Nullstellen durch Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 - 9x + 20 = 0$

- 3. NST: z.B. $x_3 = 4 \rightarrow$ Linearfaktor: $(x-4)$
- 4. NST: z.B. $x_4 = 5 \rightarrow$ Linearfaktor: $(x-5)$

Produktdarstellung: $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

9.(a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

Nach dem Wurzelsatz von Vieta gilt für das Absolutglied in $f(x)$: $-12=(-1)^3\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3$, d.h. $12=x_1\cdot x_2\cdot x_3$. Damit sind die ganzzahligen Teiler von 12, also -1, 1, -2, 2 -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12 und 12, gute Kandidaten für eine erste Nullstelle. Das Einsetzen in $f(x)$ liefert:

$$f(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-12=-6\neq 0,$$
$$f(+1)=(+1)^3+3\cdot(+1)^2-4\cdot(+1)-12=-12\neq 0,$$
$$f(-2)=(-2)^3+3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)-12=0.$$

Damit ist die erste Nullstelle $x_1=-2$. Durch Polynomdivision erhält man dann ein Polynom 2. Grades, dessen Nullstellen die fehlenden 2 Nullstellen von $f(x)$ sind:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3+3x^2-4x-12\right):\left(x+2\right)=x^2+x-6\\
\underline{-\left(x^3+2x^2\right)}\\
\qquad x^2-4x\\
\quad\ \underline{-\left(x^2+2x\right)}\\
\qquad\quad -6x-12\\
\qquad \underline{-(-6x-12)}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\rightarrow$ quadratische Gleichung: $0=x^2+x-6$ mit den Lösungen $x_2=2$ und $x_2=-3$.
Damit erhält man die Produktdarstellung: $f(x)=(x+2)(x-2)(x+3)$.

(b) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=0$

- Variante 1: Gemäß dem Binomischen Lehrsatz ist $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, was sofort der Produktdarstellung entspricht, d.h. es gibt hier mit 1 eine dreifache Nullstelle.
- Variante 2: Nach dem Wurzelsatz von Vieta gilt für das Absolutglied in $f(x)$: $-1=(-1)^3\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3$, d.h. $1=x_1\cdot x_2\cdot x_3$. Damit sind die ganzzahligen Teiler von 1, also -1 und +1, gute Kandidaten für eine erste Nullstelle. Das Einsetzen in $f(x)$ liefert:
$$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-1=-8\neq 0,$$
$$f(+1)=(+1)^3-3\cdot(+1)^2+3\cdot(+1)-1=0.$$
Damit ist die erste Nullstelle $x_1=1$. Durch Polynomdivision erhält man dann ein Polynom 2. Grades, dessen Nullstellen die fehlenden 2 Nullstellen von $f(x)$ sind:
$$\begin{array}{l}
\left(x^3-3x^2+3x-1\right):\left(x-1\right)=x^2-2x+1\\
\underline{-\left(x^3-x^2\right)}\\
\qquad -2x^2+3x\\
\quad \underline{-\left(-2x^2+2x\right)}\\
\qquad\qquad\quad x-1\\
\qquad\qquad \underline{-(x-1)}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$
$\rightarrow$ quadratische Gleichung: $0=x^2-2x+1$ mit der doppelten Lösung $x_{2/3}=1$. Damit hat man 1 als dreifache Nullstelle berechnet und obige Produktdarstellung erhalten.

10. Wurzelgleichungen (**<u>immer</u>** mit Probe!):

I. Gleichungen mit einer Wurzel - Lösen durch einmaliges Quadrieren:

(a) $\sqrt{5-2x}=1$ | Quadrieren!
$5-2x=1$ | -5
$-2\cdot x=-4$ | $:(-2)$
$x=2$

Probe: $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$
$1 = 1$ (wahre Aussage)

(b) $\sqrt{7x+2}-3=0$ | $+3$
$\sqrt{7x+2}=3$ | Quadrieren!
$7x+2=9$ | -2
$7\cdot x=7$ | $:7$
$x=1$

Probe: $\sqrt{7\cdot 1+2}-3=0$
$0 = 0$ (wahre Aussage)

(c) $0=\sqrt{4-3x}-\sqrt{5}$ | $+\sqrt{5}$
$\sqrt{4-3x}=\sqrt{5}$ | Quadrieren!
$4-3x=5$ | -4
$-3\cdot x=1$ | $:(-3)$
$x=-\frac{1}{3}$

Probe: $0=\sqrt{4-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}-\sqrt{5}$
$0 = 0$ (wahre Aussage)

(d) $5-\sqrt{5x-4}=1$ | -5
$-\sqrt{5x-4}=-4$ | Quadrieren!
$5x-4=16$ | $+4$
$5\cdot x=20$ | $:5$
$x=4$

Probe: $5-\sqrt{5\cdot 4-4}=1$
$1 = 1$ (wahre Aussage)

(e) $0=3+\sqrt{4x+6}$ | -3
$-3=\sqrt{4x+6}$ | Quadrieren!
$9=4x+6$ | -6
$3=4\cdot x$ | $:4$
$x=0{,}75$

Probe: $0=3+\sqrt{4\cdot 0{,}75+6}$
$0 = 6$ (falsche Aussage)
Aufgabe ist nicht lösbar.

(f) $6=\sqrt{2{,}5x-3{,}25}+10$ | -10
$-4=\sqrt{2{,}5x-3{,}25}$ | Quadrieren!
$16=2{,}5x-3{,}25$ | $+3{,}25$
$19{,}25=2{,}5\cdot x$ | $:2{,}5$
$x=7{,}7$

Probe: $6=\sqrt{2{,}5\cdot 7{,}7-3{,}25}+10$
$6 = 14$ (falsche Aussage)
Aufgabe ist nicht lösbar

II. Gleichungen mit zwei Wurzeln – Lösen durch einmaliges Quadrieren:

(a) $\sqrt{x+3}=\sqrt{24-2x}$ | Quadrieren!
$x+3=24-2x$ | $-3+2x$
$3\cdot x=21$ | $:3$
$x=7$

Probe: $\sqrt{7+3}=\sqrt{24-2\cdot 7}$
$\sqrt{10} = \sqrt{10}$ (wahre Aussage)

(b) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{-5x-4}=0$ | $+\sqrt{-5x-4}$
$\sqrt{3x+4}=\sqrt{-5x-4}$ | Quadrieren!
$3x+4=-5x-4$ | $+5x-4$
$8\cdot x=-8$ | $:8$
$x=-1$

Probe: $\sqrt{3\cdot(-1)+4}-\sqrt{-5\cdot(-1)-4}=0$
$0 = 0$ (wahre Aussage)

(c) $\sqrt{x^2+3x-7}=\sqrt{x^2-x+1}$ | Quadrieren!
$x^2+3x-7=x^2-x+1$ | $-x^2+x+7$
$4\cdot x=8$ | $:4$
$x=2$

Probe: $\sqrt{2^2+3\cdot 2-7}=\sqrt{2^2-2+1}$
$\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (wahre Aussage)

(d) $\sqrt{x^2-5x+8}=\sqrt{4-x}$ | Quadrieren!

$x^2-5x+8=4-x$ | $+\ x-4$

$x^2-4x+4=0$

$x_{1/2}=2\pm\sqrt{0}=2$

Probe: $\sqrt{2^2-5\cdot 2+8}=\sqrt{4-2}$

$\sqrt{2}\ =\ \sqrt{2}$ (wahre Aussage)

(e) $\sqrt{2x^2+3x+2}=\sqrt{x^2-x-2}$ |Quadrieren!

$2x^2+3x+2=x^2-x-2$ | $-x^2+x+2$

$x^2+4x+4=0$

$x_{1/2}=-2\pm\sqrt{0}=-2$

Probe:

$\sqrt{2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)+2}=\sqrt{(-2)^2-(-2)-2}$

$2\ =\ 2$ (wahre Aussage)

III. Gleichungen mit zwei Wurzeln – Lösen durch zweimaliges Quadrieren:

(a) $\sqrt{x+1}+7=\sqrt{27+18x}$ | 1. Quadrieren!

$x+1+14\sqrt{x+1}+49=27+18x$ | $-x-1-49$

$14\sqrt{x+1}=17x-23$ | 2. Quadrieren!

$196\cdot(x+1)=289x^2-782x+529$

$196x+196=289x^2-782x+529$ | $-196x-196$

$0=289x^2-978x+333$ | $:289$

$0=x^2-\frac{978}{289}x+\frac{3}{289}$

$x_{1/2}=\frac{489}{289}\pm\sqrt{\frac{142884}{289^2}}=\frac{489}{289}\pm\frac{378}{289}$

$x_1=\frac{111}{289}$ $\qquad x_1=\frac{867}{289}=3$

Probe 1: $\sqrt{\frac{111}{289}+1}+7=\sqrt{27+18\cdot\frac{111}{289}}$

$\frac{139}{17}\ =\ \frac{99}{17}$ (falsche Aussage)

d.h. $\frac{111}{289}$ ist keine Lösung.

Probe 2: $\sqrt{3+1}+7=\sqrt{27+18\cdot 3}$

$9\ =\ 9$ (wahre Aussage)

d.h. 3 ist eine Lösung.

(b) $\sqrt{3x-5}-1=2+\sqrt{x-6}$ | $+1$

$\sqrt{3x-5}=3+\sqrt{x-6}$ | 1. Quadrieren!

$3x-5=9+6\sqrt{x-6}+x-6$ | $-9-x+6$

$2x-8=6\sqrt{x-6}$ | 2. Quadrieren!

$4x^2-32x+64=36(x-6)$

$4x^2-32x+64=36x-216$ | $-36x+216$

$4x^2-68x+280=0$ | $:4$

$x^2-17x+70=0$

$x_{1/2}=8{,}5\pm\sqrt{2{,}25}=8{,}5\pm 1{,}5$

$x_1=7$ $\qquad x_2=10$

Probe 1: $\sqrt{3\cdot 7-5}-1=2+\sqrt{7-6}$

$3\ =\ 3$ (wahre Aussage)

d.h. 7 ist eine Lösung.

Probe 2: $\sqrt{3\cdot 10-5}-1=2+\sqrt{10-6}$

$4\ =\ 4$ (wahre Aussage)

d.h. 10 ist eine Lösung.

(c) $\sqrt{5x+11}+\sqrt{2x-1}=9 \quad | -\sqrt{2x-1}$

$\sqrt{5x+11}=9-\sqrt{2x-1} \quad$ | 1. Quadrieren!

$5x+11=81-18\sqrt{2x-1}+2x-1 \quad | -81-2x+1$

$3x-69=-18\sqrt{2x-1} \quad | :\ 3$

$x-23=-6\sqrt{2x-1} \quad$ | 2. Quadrieren!

$x^2-46x+529=36(2x-1)$

$x^2-46x+529=72x-36 \quad | -72x+36$

$x^2-118x+565=0$

$x_{1/2}=59\pm\sqrt{2916}=59\pm 54$

$x_1=5 \qquad x_2=113$

Probe 1: $\sqrt{5\cdot 5+11}+\sqrt{2\cdot 5-1}=9$

$9 = 9$ (wahre Aussage)

d.h. 5 ist eine Lösung.

Probe 2: $\sqrt{5\cdot 113+11}+\sqrt{2\cdot 113-1}=9$

$39 = 9$ (falsche Aussage)

d.h. 113 ist keine Lösung.

(d) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{3x+12}=-1 \quad | +\sqrt{3x+12}$

$\sqrt{2x+6}=\sqrt{3x+12}-1 \quad$ | 1. Quadrieren!

$2x+6=3x+12-2\sqrt{3x+12}+1 \quad | -3x-12-1$

$-x-7=-2\sqrt{3x+12} \quad$ | 2. Quadrieren!

$x^2+14x+49=4(3x+12)$

$x^2+14x+49=12x+48 \quad | -12x-48$

$x^2+2x+1=0$

$x_{1/2}=-1\pm\sqrt{0}=-1$

Probe: $\sqrt{2\cdot(-1)+6}-\sqrt{3\cdot(-1)+12}=-1$

$-1 = -1$ (wahre Aussage) d.h. -1 ist eine Lösung.