Samenvatting: subatomaire fysica 2

Emile Segers

Year 2019-2020

Abstract

Dit is een samenvatting gebasseerd op de lessen subatomaire fysica 2 2020-2021. Dit is geen vervanging voor de cursus gegeven in dit vak. Het doel van deze samenvatting is een studiehulp te zijn bij de lessen van Dirk Ryckbosch. Gebruik dit dan ook enkel als hulp.

De schrijver van deze samenvatting is niet verantwoordelijk voor het maken van fouten op een examen of ergens anders. Indien je fouten vindt kan je me altijd contacteren op dit e-mailaddres emile.segers8@gmail.com.

De voertaal van het examen subatomaire fysica 2 in 2020-2021 is Nederlands. Deze samenvatting zal dus ook grotendeels in het Nederlands geschreven worden.

Contents

1 Introductie en overzicht

Er worden min of meer 2 handboeken gevolgd "Modern Particle Physics, Thomson, Cambridge" en "Introduction to Elementary Particle Physics, Bettini, Cambridge, 2008". De boeken zijn veel gestructureerd dan de cursus. De cursus volgt meer de chaotische structuur van de geschiedenis van de experimenten. Hierdoor krijg je ook meer inzicht hoe de experimenten verlopen en dat het niet altijd even logisch hoort te zijn. Op dit ogenblik weten we nog zeker niet alles en zien nog niet altijd de logica. Bij experimenten wordt er altijd in het duister getast. De bedoeling van deze master cursus is deels om de mensen in de war te brengen en kritisch na te denken.
De cursus bestaat uit 12 hoofdstukken waarbij je het meest uitkijkt naar het

laatste hoofdstuk. Deze bespreekt de fysica die we nog niet kennen, met andere woorden niet het Standaard Model.

1.1 High energy physics

Hier wordt er gekeken naar de fundamentele constituenten van de materie en naar de interactie tussen hen. Met andere woorden kijken we naar materie deeltjes en naar krachten.

Table 1: Fundamentele materie

Leptons	ν_e	ν_μ	ν_τ	$q = 0$	neutrinos
	e^-	μ^-	τ^-	$q = -1$	charged leptons
quarks	u	c	t	$q = +2/3$	up-type
	d	s	b	$q = -1/3$	sown-type

Dat er zowel 6 leptons als quarks zijn is waarschijnlijk geen toeval maar in principe hoeft dit niet. Er zijn bijna geen relaties tussen leptonen en quarks op dit moment. Enkel via de Coulomb kracht zullen deze met elkaar interageren. De leptonen en quarks worden opgedeeld in 3 generaties met als enig verschil tussen de generatie de massa. Waarbij het zwaarder deeltje zal kunnen vervallen naar het lichtere deeltje met zelfde kwantum getallen. Al deze deeltjes vermeld in tabel 1 zijn elementaire deeltjes met spin 1/2 en zijn dus fermionen. Met als gevolg dat deze de Dirac vergelijking volgen en we ze kunnen zien als punt deeltjes.
Leptonen kunnen vrij zijn. In tegenstelling zijn quarks nooit vrij. Deze binden tot composiet deeltjes (hadrons):

- baryons: $|B\rangle = |q_1 q_2 q_3\rangle$
- anti-baryons: $|\overline{B}\rangle = |\overline{q}_1 \overline{q}_2 \overline{q}_3\rangle$
- mesons: $|M\rangle = |q_1 q_2\rangle$
- anti-mesons: $|\overline{M}\rangle = |\overline{q}_1 \overline{q}_2\rangle$

De reden voor deze "confinement" is dat alle deeltjes wit moeten zijn. Het bewijs hiervoor is nog niet volledig uitgewerkt. Dit is een probleem van quantum chromo dynamics (=QCD). De laatste jaren zijn er ook penta- ($|P_c^+\rangle = |uudc\overline{c}\rangle$) en tetraquarks ($|Z\rangle = |c\overline{c}d\overline{u}\rangle$) gevonden.

1.2 Discovering the electron

In 1897 heeft J.J. Thomson het electron voor het eerste keer ontdekt met volgende eigenschappen:

- $q_e = -1.602 \cdot 10^{-19}$C
- $m_e = 0.9 \cdot 10^{-31}$kg

- $s = \frac{1}{2}\hbar = 0.5 \cdot 10^{-34}$J.s

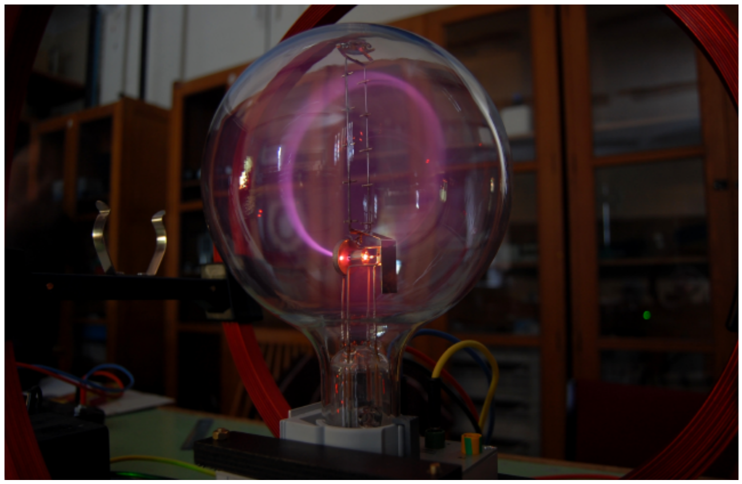


Figure 1: The discovery of the electron

Voor ons eigen gemak voeren we nieuwe eenheden in:

- $Q_e = -1$
- $m_e = 0.511$MeV (gebruik $E = mc^2$)
- $s = \frac{1}{2}$

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de natuurlijke eenheden $\hbar = c = 1$. Hierbij zeggen we dat $[T] = s$ en definiëren we de lengte zodat $c = 1$ en de massa zodat $\hbar = 1$. Zo krijgen we de volgende relaties:

$$\begin{aligned} [L] &= [T] \\ [M] = [E] = [P] &= [L^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

De gevolgen hiervan zijn dat:

$$\begin{aligned} 1\text{MeV} &= 1.52 \cdot 10^{21} s^{-1} \\ 1\text{MeV}^{-1} &= 197\text{fm} \\ 1\text{ps}^{-1} &= 0.65\text{meV} \\ 1\text{m} &= 5.07 \cdot 10^{6}\text{eV}^{-}1 \end{aligned} \tag{2}$$

De enige die je hiervan onthoudt is de 2de. Deze komt uit $\hbar c = 197$MeV.fm. Voor de relativistische kinematica krijgen we:

$$\begin{aligned} \beta &= v \\ E^2 &= m^2 + |\vec{p}|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

1.3 Interacties

Er zijn op dit moment 5 krachten: elektrisch, magnetisch, zwak, sterk en gravitationeel. We zouden dit graag reduceren tot 1 fundamentele kracht in de "Theory of Everything" maar dit is nog niet gelukt. De koppelingsconstantes van deze krachten kan je vinden in tabel 2.

Table 2: Koppelingsconstantes

	rel. strength	works on	exch. part.
strong	1	quarks	gluons
EM	10^{-2}	q + charged leptons	photon
weak	10^{-7}	q + l + ν	W^+, W^-, Z^0

1.4 Deeltjes experimenten

Deze cursus zal vooral uitweiden over experimenten om grotere beelden te maken van de theorie. Wat staat er in de experimentele grafieken?
Het is belangrijk een hoge resolutie nodig om de kleine deeltjes te zien. Het is nodig om hoge center of mass energieën te hebben om nieuwe zware deeltjes te ontdekken.

$$E_{cm} = \sqrt{s} \tag{4}$$

In een collider met vaste targets is $s = E_{beam}$ voor colliding beams is $s = E^2_{beam}$.

1.5 Mandelstam-variables

$$\begin{aligned} a + b &\to c + d \\ s &= (p_a + p_b)^2 \\ s &= (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 \\ t &= (E_c - E_a)^2 - (\vec{p}_c - \vec{p}_a)^2 \\ u &= (E_d - E_a)^2 - (\vec{p}_d - \vec{p}_a)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

s is een Lorentz invariante grootheid en moet geconserveerd blijven tijdens de collisies. Naast de s variable bestaan ook t het overgebrachte 4-moment $a - c$ en u van $a - d$.
Dit is ooit een examenvraag geweest om te bewijzen dat $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 +$

$m_c^2 + m_d^2$.

$$
\begin{aligned}
s &= p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b \\
t &= p_a^2 + p_c^2 - 2p_a \cdot p_c \\
u &= p_a^2 + p_d^2 - 2p_a \cdot p_d \\
&\downarrow \\
s + t + u &= p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b + p_a^2 + p_c^2 - 2p_a \cdot p_c + p_a^2 + p_d^2 - 2p_a \cdot p_d \\
&= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 + (2p_1^2 + 2p_a \cdot p_b - 2p_a \cdot p_c - 2p_a \cdot p_d) \\
&\downarrow \text{vergelijking (7) en behoud van momentum} \\
&= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
2p_1^2 + 2p_a \cdot p_b - 2p_a \cdot p_c - 2p_a \cdot p_d = 2p_1 \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = 0 \tag{7}
$$

Hierbij kunnen we deze vergelijking gelijk stellen aan 0 omdat $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$.
Deze variabelen zijn makkelijk om de s, t en u kanalen in deze botsingen te beschrijven.

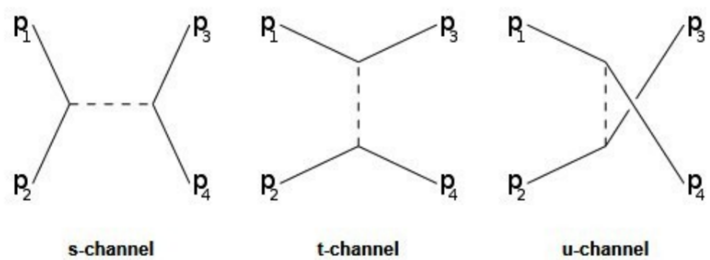
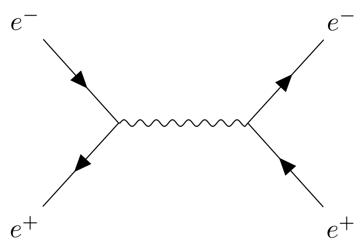


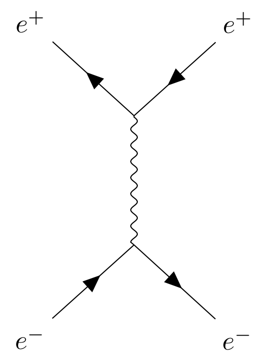
Figure 2: Mogelijke kanalen tijdens botsingen

Kijken we naar de werkzame doorsnedes van deze kanalen zien we:

$$
\begin{aligned}
\sigma &\sim \frac{1}{E^2} \\
\text{s kanaal: } &\sim \frac{1}{s} \\
\text{t kanaal: } &\sim \frac{1}{t} \\
\text{u kanaal: } &\sim \frac{1}{u}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Als voorbeeld $e^+ + e^- \to e^+ + e^-$:





Het u kanaal is hier niet mogelijk omdat we met verschillende deeltjes werken. Het u kanaal is enkel mogelijk als we met gelijke deeltjes werken. De reden hiervoor is dat de vertex tussen e^- en e^+ niet bestaat.

1.6 Acceleratoren

Er zijn verschillende acceleratoren:

- lepton colliders: e^+e^-, wordt gelimiteerd door de synchroton straling
- assymetrische colliders: e^-p
- hadron colliders: $p\overline{p}$ of pp, nadeel dat deze botsingen veel complexer zijn

1.7 Detectoren

Deze bestaan uit een uienstructuur.

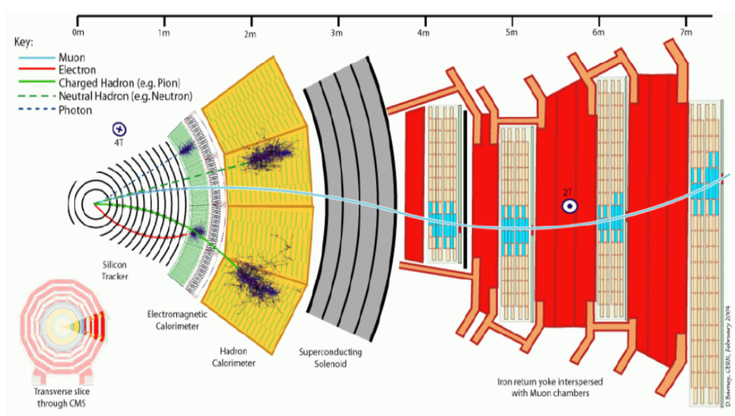


Figure 3: Detector

De verschillende lagen zijn in volgorde:

- centraal, tracker: deeltjes die afbuigen in EM veld

- magnetische calorimeter
- hadronische calorimeter
- magneten
- muon detectoren

1.8 Energie verlies

Een geladen deeltje zal met het bewegen door de detector energie verliezen. De Bethe-Bloch functie beschrijft het gemiddelde energieverlies voor door ionisatie.

$$-\frac{dE}{dx} = K\frac{\rho Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e c^2\gamma^2\beta^2}{I} - \beta^2\right)\right] \tag{9}$$

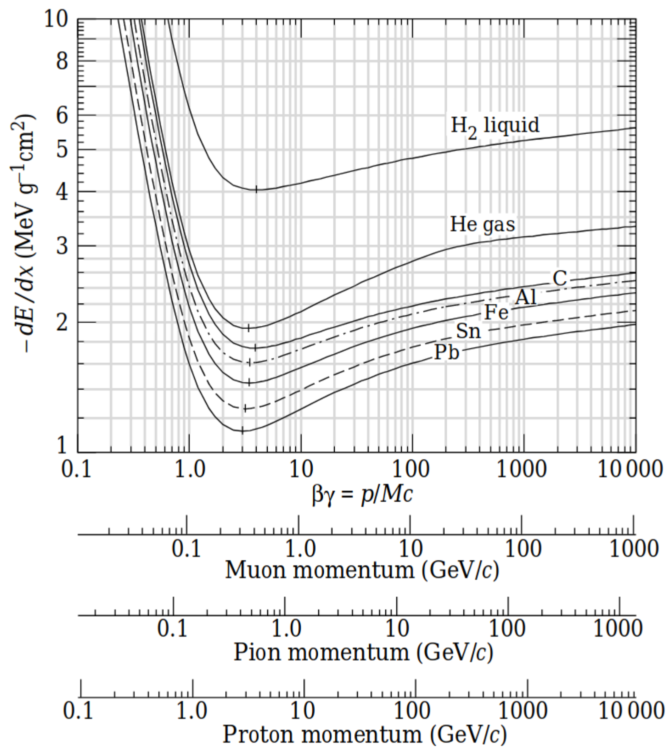


Figure 4: Bethe bloch functie

In figuur 4 gegeven in de zone tussen 0.1 en 10. Dit is door coulomb interactie met atomen. De β^2 factor ook wel de relativistische rise is het gevolg van Brehm stralung waarbij deeltje worden afgebogen door het atoom en een hoog energetisch foton uitsturen.

De muonen bevinden zich meestal in de zone waar het energieverlies het laagste is en noemen we dan ook minimum ionising particles. Elektronen gaan heel veel fotonen afstralen en verliezen heel veel energie. Hadronen zullen naast het ioniseren ook sterke interacties ondergaan. Hierdoor verliezen we het originele deeltje en worden secondaire hadronen gemaakt.

1.9 Deeltjes detectoren

We gaan de verschillende deeltjes die gecreerd zijn tracken van de geladen deeltjes, zowel de richting als hun momentum. Dit wordt gedaan de hand van ionisatie. We doen ook aan calorimetrie wat een destructieve detectiemethode is. Ten laatste buiten de calorimeters worden de muonen gedetecteerd. De werking voor de verschillende detectoren gaat als volgt:

- Tracking detectoren: Een deeltje beweegt door een gebied met gas die de gasatomen ioniseerd. In dit gas is een hoogspanningsveld aanwezig zodat de geladen atomen zullen driften richting de anode of kathode en zo een signaal bekomen. Door een nauw grid aan anodes en kathodes aan te leggen kan dit heel nauwkeurig gemeten worden. Dit kan ook met een halfgeleider en krijg je elektron-gat paren in plaats van electron-ion paren.

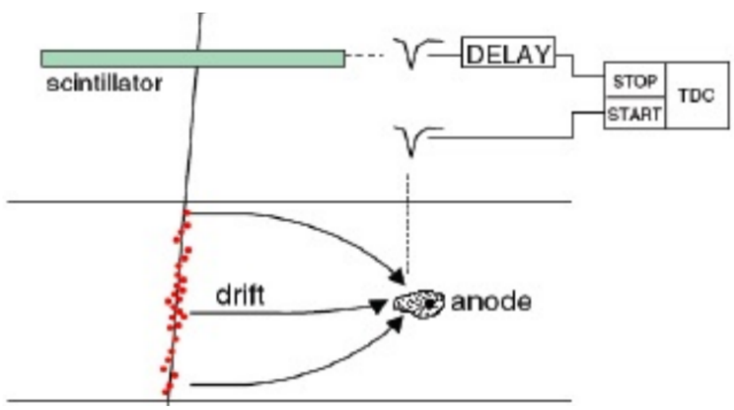


Figure 5: Tracking detector

- Calorimeter detectoren: Dit is meestal een kristal waar de energie van de deeltjes meestal omgezet worden in zichtbaar licht die kan gedetecteerd worden.

1.10 Event reconstructie

Als voorbeeld de top pair productie om aan te tonen dat de detectie niet zo makkelijk is als het lijkt.

$$\begin{aligned} pp \rightarrow & t\bar{t}X \\ & t \rightarrow W^+b \rightarrow \mu^+\nu b \\ & \bar{t} \rightarrow W^-b\bar{b} \rightarrow q\bar{q}'\bar{b} \\ pp \rightarrow & b\bar{b}q\bar{q}'\nu\mu \end{aligned} \tag{10}$$

De X in deze oductie zijn de overige 100 tot 1000den deeltjes die geproduceerd kunnen worden door 1 botsing. Hieruit moeten de correcte deeltjes uit gedetecteerd worden wat natuurlijk niet eenvoudig is. Hierboven hebben we een groot probleem bij het onderzoeken van de top quark dat deze een heel korte levensduur heeft. Uiteindelijk krijgen we hieruit 4 “jets” van de quarks, een μ en een deel missende energie waarnemen. Om de top quarks te reconstrueren gaan we proberen de b-jets proberen taggen. Door het gebruik van een hermetische detector zal het ook mogelijk zijn om de missende energie van de neurtrino’s te vinden. Dit kan natuurlijk enkel in de trasversale richting.

1.11 Cross sectie

De interactie rate per eenheid van tijd is gegeven door:

$$R_i = \sigma N_t \Phi_b \tag{11}$$

met σ de cross sectie, N_t het aantal targets in de beam sectie en Φ_b de beam flux. Kijken we nu bijvoorbeeld naar de protonen die door de detector tracken en kunnen in de elektromagnetische calorimeter botsen met andere deeltjes en verloren gaan. Dit kan gezien worden in de volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned} dI(z) = -dR_i &= -\sigma\Phi_b(z)dN_t \\ &= -\sigma\frac{I(z)}{A}n_t A dz \\ \Rightarrow \frac{dI(z)}{I(z)} &= -\sigma n_t dz \\ \Rightarrow I(z) &= I_0 e^{-n_t\sigma z} \end{aligned} \tag{12}$$

Uit de exponent die we juist hebben berekent kunnen we de absorptie lengte bepalen: $L_{abs} = 1/(n_t\sigma)$. Voor protonen met energieën van een aantal TeV zullen een L_{abs} van ongeveer 10cm hebben in detectoren. De luminositeit $\mathcal{L}$ is gegeven door:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{R_i}{\sigma} = \Phi_b N_t = \frac{N_b N_t}{A} \\ [\mathcal{L}] &= [L^{-2}T^{-1}] \end{aligned} \tag{13}$$

Het handige aan $\mathcal{L}$ is dat deze grootheid gekend is omdat we het aantal target deeltjes in de bundel en de flux van de bundelonder controle hebben. Dit samen met het aantal uitgaande deeltjes kunnen we zien wat de werkzame doorsnede is. De geintegreerde luminositeit wordt ook veel gebruikt: $\int \mathcal{L} dt$.

1.12 Differentiële cross sectie

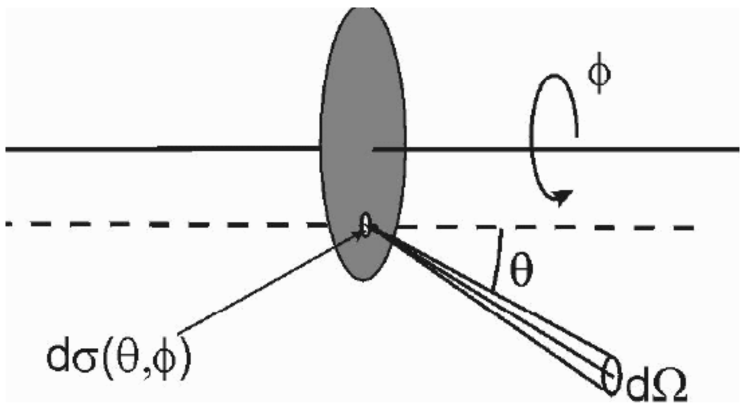


Figure 6: Differentiële cross sectie

De differentiële cross sectie is niets meer dan de cross sectie in functie van de ruimtehoek.

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega \\ 4\pi &= \int d\Omega \\ d\Omega &= d\phi d\cos\theta = d\phi \sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{14}$$

Een botsing zal normaal de azimutale symmetrie behouden en krijgen we:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \to \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \tag{15}$$

en is de ϕ afhankelijkheid irrelevant. Dit is niet het geval voor gepolariseerde bundels.

1.13 Hoe meten we dit alles

Uit de experimenten hebben we het aantal deeltjes onder een bepaalde hoek θ gedetecteerd over de breedte van de hoek waaronder we waarnemen omdat deze eindig is. Deze willen we zo klein mogelijk. Uit al deze detecties moeten de deeltjes waarin we geïnteresseerd zijn, afzondert worden van de background deeltjes. Dit wordt weergegeven in de onderstaande vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{\Delta N(\cos\theta)}{\Delta\cos\theta\cdot\mathcal{L}} \\ &= \frac{\Delta N^{selected}(\cos\theta) - \Delta N^{expected}_{background}(\cos\theta)}{\mathcal{L}\cdot\Delta\cos\theta\cdot\epsilon(\cos\theta)} \end{aligned} \tag{16}$$

met ϵ de selectie efficiëntie. ϵ en $\Delta N^{expected}_{background}$ zullen bepaald worden in Monte Carlo berekeningen. Hierbij is het heel belangrijk om de trade-off tussen efficiëntie en background te optimaliseren.

2 Quantum getallen

Er zijn verschillende quantum getallen die gebruikt worden. Deze kunnen opgesplitst worden in 2 groepen:

- Additieve quantum getallen:
  - baryon getal
  - elektrische lading
  - kleur
  - lepton getal
  - ...

  Deze komen overeen met spontane transformaties

- Multiplicatieve kwantum getallen
  - pariteit
  - C-pariteit
  - ...

  Komen overeen met discrete transformaties

2.1 Elekrische lading

We weten dat de elektrische lading behouden is.

$$\sum_{init} Q_i \sum_{final} Q_i \tag{17}$$

Dit wil zeggen dat de lichtste drager van de lading stabiel zal moeten zijn. Met een levensduur τ_e van het elektron groter dan $6.6\cdot10^{28}$yr (90% CL) is dit ook het geval.
De antideeltjes hebben tegengestelde lading.

$$|Q_{\epsilon^+} + Q_{\epsilon^-}|/e < 4\cdot10^{-8} \tag{18}$$

2.2 Lepton getal

Het lepton getal $\mathcal{L}$ is $+1$ voor de e^-, μ^-, τ^- en de neutrino's en -1 voor e^+, μ^+, τ^+ en de antineutrino's. Voor al de andere deeltjes is het lepton getal 0. Voor zover we weten is het lepton getal voor elke generatie behouden met een uitzondering van de neutrino oscillaties die dit niet behouden.
De som van de lepton getallen $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\mu + \mathcal{L}_\tau$ moet altijd behouden worden. Dit wil zeggen dat het lichtste neutrino moet stabiel zijn. Ergens weten we dat het lepton getal niet helemaal behouden kan zijn. Dit weten we zeker voor het baryon getal.

2.3 Baryon getal

Het baryon getal $\mathcal{B}$ is $+1$ voor al de baryonen, -1 voor al de anti-baryonen en 0 voor de rest. In alles wat we ooit hebben gezien is het baryon getal behouden. Dit zegt ons terug dat het lichtste baryon, het proton, stabiel moet zijn. Met een levensduur τ_p van meer dan $2.1 \cdot 10^{29}$yr (90% CL) is dat natuurlijk stabiel. In de theorieën waar $\mathcal{B}$ niet behouden wordt, wordt $\mathcal{M}$ ook niet behouden. Maar wat er wel zou behouden worden worden is $\mathcal{B} - \mathcal{L}$. Achter het behoud van deze 2 quantum getallen zit geen ijk principe. Dit zijn puur experimentele vaststellingen. We weten dat deze niet helemaal behouden kunnen worden als we denken aan de big bang. Hier ontstaat het universum uit pure energie. Deze splitst op in deeltje-antideeltje paren. M.a.w. moet er bij de big bang even veel materie als anti-materie gecreerd zijn. Vandaag de dag nemen we deze anti-materie niet meer waar dus moet deze toch ergens verdwenen zijn.
De baryonen zijn opgesteld uit quarks en antiquarks. Dit geeft ons de nieuwe baryon getallen:

- $\mathcal{B} = +\frac{1}{3}$ voor quarks
- $\mathcal{B} = -\frac{1}{3}$ voor antiquarks
- $\mathcal{B} = 0$ voor de rest

2.4 Impuls moment

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{19}$$

Wat deze intrinsieke spin nu juist betekent hangt af van de omstandigheden. We weten wel dat het totaal angulair moment behouden is. De fundamentele reden hiervoor is dat alles wat we zien en alle theorieën die we uitschrijven invariant zijn voor rotatie in de ruimte. Het behoud van energie komt uit de tijd invariatie en het behoud van moment uit de de ruimtelijke invariantie.

$$\begin{aligned} \vec{L} + \vec{S} &= \vec{J} \\ |l - s| \leq &j \leq |l + s| \\ j_3 = m &= l_3 + m_3 \end{aligned} \tag{20}$$

De angulaire moment operator is gegeven door:

$$\hat{\vec{L}}^2 = l(l+1)\hbar^2$$
$$\hat{L}_3 = l_3\hbar \tag{21}$$

Hierbij zijn de quantum getallen gegeven door $l = 0, 1, 2...$ en $-l \leq l_3 \leq l$. De angulaire momenta zullen veel samengesteld worden . Al de mogelijke combinaties van composities en decomposities worden gedaan aan de hand van de Cleksch-Gordan coëfficiënten. Die de kans tussen de verschillende quantum getallen zal weergeven. Zie hiervoor de oefeninglessen om goed mee te leren werken. De algebra van de Cleksch-Gordan coëfficiënten komt uit de symmetriegroep O(3), die isometrisch is met SU(2).

2.5 Strong isospin

We zien dat de Lagrangiaan van de sterke en zwakke interactie ijkinvariant met als groep SU(2). Dit betekent dat het proton en neutron zijn voor de sterke wisselwerking identiek. Dit komt neer op het feit dat voor de sterke wisselwerking de up en down quark identiek zijn. Dit is niets anders dan het analogon voor een electron met spin up $|e^{\uparrow}\rangle$ en spin down $|e^{\downarrow}\rangle$. Het proton en neutron vormen samen een sterk isospin doublet, de nucleonen:

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{22}$$

Een aantal verschillende sterke isospin multipletten zijn weergegeven in tabel 3. Hieruit lijkt dit een goed kwantum getal te zijn, omdat binnen een multiplet de deeltjes op een kleine afwijking na dezelfde massa te hebben. Het verschil in massa's binnen een multiplet komen van andere interacties, vooral de elektromagnetische. Omdat de massa's niet prefect overeen komen wil dit zeggen dat dit geen perfect kwantum getal zal zijn.

Table 3: Strong isospin

	I	I_3	$\mathcal{B}$	S	Q	Mass (MeV)
p	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1	0	$+1$	938
n	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	940
π^+	1	$+1$	0	0	$+1$	140
π^0	1	0	0	0	0	135
π^-	1	-1	0	0	-1	140
η	0	0	0	0	0	547
Ξ^0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-2	-2	0	1315
Ξ^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-2	-1	1325

Naast de up en down quarks zijn er natuurlijk ook andere quarks ontdekt. Om deze toe te voegen is er een nieuw kwantumgetal toegevoegd, de hyperlading.

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2}, \quad Y = \mathcal{B} + S \tag{23}$$

Wetenschappers hadden de relatie tussen de sterke interactie en de elektromagnetische interactie ingezien. Later zijn er naast de lading, het baryon getal en de strangeness nog andere kwantum getallen voor de quarks gevonden. Deze zijn:

Strangeness	$S(s) = -1$	$S(\bar{s}) = +1$	$S(...) = 0$
charm	$C(c) = +1$	$C(\bar{c}) = -1$	$C(...) = 0$
Bottomness	$B(b) = -1$	$B(\bar{b}) = +1$	$B(...) = 0$
Topness	$T(t) = +1$	$T(\bar{t}) = -1$	$T(...) = 0$

en de hyperladig wordt uitgebreid tot:

$$Y = \mathcal{B} + S + C + B + T \tag{24}$$

Hier zitten de U en D niet in omdat deze verwerkt zijn in I_3.
De sterke isospin zal behouden worden in de sterke interactie, I_3 is door zijn connectie met de lading Q behouden in elektromagnetische interactie. Deze zijn niet behouden in de zwakke interactie.

2.6 Multiplicatieve kwantum getallen

We kennen er 3:

- P pariteit
- C C pariteit
- T T pariteit

Het "CPT-theorema" is niets anders dan: Elke Lorentz invariante lokale kwantum velden theorie invariant is onder CPT. De veronderstellingen dat hieruit volgen lijken zeer logisch.

- Lorentz invariant
- Lokaliteit (geen interactie op afstand)
- Causaliteit (oorzaak voor effect)
- Het vacuum is de laagste energie toestand
- vlakke ruimte-tijd
- punt deeltjes

Als gevolg hebben we

$$\begin{aligned} m_X &\equiv m_{\overline{X}} \\ \Gamma_X &\equiv \Gamma_{\overline{X}} \end{aligned} \tag{25}$$

Dit is bewezen in de experimenten: $|m_p - m_{\overline{p}}| < 7 \cdot 10^{-10}$ (90% CL).

2.7 Pariteit

Spiegelen door de oorsprong.

$$\begin{aligned} \vec{r} &\to -\vec{r} \\ \vec{p} &\to -\vec{p} \\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &\to -\vec{r} \times -\vec{p} = \vec{L} \end{aligned} \tag{26}$$

Hier kan je duidelijk het verschil zien tussen een vector, $\vec{r}$ en $\vec{p}$, en een pseudo (axiale) vector, $\vec{L}$. Waarbij de vector van teken zal veranderen en de pseudo vector niet. Indien we 2 maal spiegelen door de oorsprong krijgen we de identiteit operator $P^2 = 1$ en kunnen we hieruit de eigenwaarden van P bepalen, ± 1. $+1$ voor pseudo vectoren en -1 voor vectoren. De pariteit heeft de volgende eigenschappen:

H-atoom	$(-1)^l$	
γ	-1	uit Maxwell vgl.
$f\overline{f}, l = 0$	-1	uit Dirac vgl.
f	$+1$	conventie
$\overline{f}$	-1	conventie
$f\overline{f}, l$	$(-1)(-1)^l = (-1)^{l+1}$	
$b\bar{b}, l = 0$	$+1$	
$b\bar{b}, l$	$(-1)^l$	

De reden waarom een foton een negatieve pariteit heeft komt uit de Maxwell vergelijkingen. Je kan dit inzien als je het elektrisch veld tussen een electron en positron bekijkt. Als deze door de oorsprong worden gespiegeld zal het teken van het elektromagnetische veld ook omdraaien.

2.8 C-pariteit

Dit is het uitwisselen van de deeltjes met antideeltjes en omgekeerd. De eigentoestanden van de C operator zijn enkel de neutrale deeltjes (lading 0). Als voorbeeld, de C operator inwerkend op een proton geeft een antiproton, wat niet dezelfde deeltjes zijn. De eigenschappen van de C operator zijn:

γ	-1
$n\gamma$	$(-1)^n$
$b\bar{b}$	$(-1)^l$
$b\bar{b}$	$(-1)^{l+s}$
$f\overline{f}$	$(-1)^{l+s}$

Bij het uitvoeren van de C operator op een boson-antiboson systeem en een fermion-antifermion systeem moeten we even nadenken. De spin-uitwisseling in 2 bosonen voor bijvoorbeeld π^0 boson zijn deeltjes die spinloos zijn, kunnen we

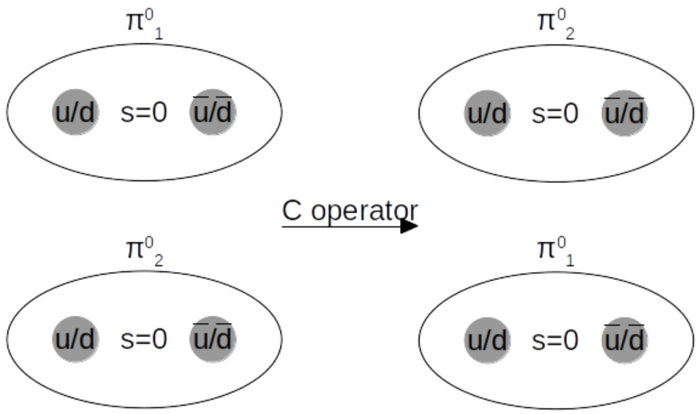


Figure 7: π^0 onder C operatie

zien dat er niets is verandert aan de spin golffuncties en is het dus mogelijk dat de pariteit enkel afhangt van l.

Daarentegen kunnen de fermionen geen spin nul hebben. Als we kijken naar de verschillende combinaties die 2 fermionen kunnen ondergaan (figuur 8), zien we dat de spin golffunctie symmetrisch is voor S oneven en antisymmetrisch voor S even. Dit geeft ons voor de spin verrandering van 2 fermionen $(-1)^{s+1}$.

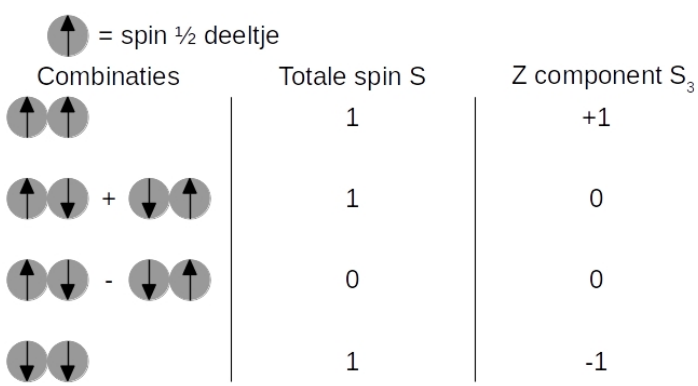


Figure 8: Fermion combinaties

2.9 Pion pariteit

Historisch gezien was het niet makkelijk om deeltjes uit elkaar te houden.

$$\begin{aligned} \mu^{\pm} &\simeq 105\text{MeV} \\ \pi^{\pm} &\simeq 140\text{MeV} \\ \pi^{0} &\simeq 135\text{MeV} \end{aligned} \tag{27}$$

Deze deeltjes zijn ontdekt in kosmische straling. Het verschil tussen het muon en de pions is dat het muon een lepton is en dus enkel elektromagnetisch interageerd. Bij het onderzoek gaven de muonen in de gaskamer een mooie lijn van geïoniseerd gas en de pionen een knal. In de tijd kon geen onderscheid gemaakt worden tussen de massa van de 2 deeltjes. Wat wel makkelijk te herkennen was waren π^0 die vervallen in 2 fotonen. Door de energie van de 2 fotonen samen te tellen krijg je perfect een piek bij 135MeV. Omdat γ een spin 1 deeltje is en dat het pion vervalt in 2 γ's weten we dat π^0 een boson moet zijn. Het moet een heeltallige spin hebben om te kunnen vervallen in 2 γ's. Of er een relatie was tussen $\pi^{\pm}$ en π^0 en dus ook een verschil tussen μ en $\pi^{\pm}$ heeft een lange tijd geduurd. De spin van π^0 is bepaalt aan de hand van de vervallen $\gamma+\gamma$ en $e^{+}+e^{-}+e^{+}+e^{-}$ die uitgezet zijn in Dahling plots dit is niet correct geschreven!. Zo bekomen we experimenteel dat de totale spin voor de pionen $J=0$ is.
Het bepalen van de pariteit van pionen kan gedaan worden aan de hand van het volgende experiment:

$$\pi^{-}+d \rightarrow n+n \tag{28}$$

Een π^- bundel kan bekomen worden door een protonenbundel in te sturen op een blok materie en door een spectroscoop de π^- deeltjes af te zonder van de rest. Deze laag energetische pionen verliezen in D_2O energie en kunnen ingevangen worden in deuterium. Deze hoog aangeslagen toestanden zenden X-stralen uit tot ze in de grondtoestand terug vallen.

$$s_d=1;\ s_\pi=0 \Rightarrow J=1 \tag{29}$$

De reden waarom $L=0$ is in dit geval is omdat het samengesteld systeem zich in de grondtoestand bevindt (S-state). De spin van het deuterium kan eigenlijk 0 of 1 zijn. De reden waarom het onmogelijk is om een $s_d=0$ te hebben kunnen we vinden door de symmetrie van de golffunctie van het deuterium ($D=p+n$) te bekijken (behoud angulair moment).

Table 4: Symmetrie van deuterium golffunctie

$\psi_f \sim$	$\phi(r)$	$t(s)$	$\Psi(I)$
$-$	$+$	$+$	$-$
$-$	$+$	$-$	$+$

De golffunctie van het deuteron moet negatief zijn voor de omwisseling van het proton en neutron. Omdat we $L=0$ hebben is het ruimtelijke orbitaal altijd symmetrisch. De spin kan zowel symmetrisch als antisymmetrisch zijn met de isospin het tegengestelde omdat anders de antisymmetrie van de symmetrie niet correct is. De verschillende spin en isospin op mengingen zijn gegeven door:

Table 5: Multipletten van deuterium

spin multiplet	isospin multiplet
$\uparrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow$, $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$	$np - pn$
$\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$	nn, pp, $np + pn$

Experimenteel zien we dat de nn en pp niet bestaan. Enkel het isospin singlet bestaat en s_d moet dus 1 zijn.
Nu we weten wat de spin is van de begin toestanden kunnen we dat ook doen voor de eind toestanden. De spin van neutronen is $1/2$ en hebben we dus 2 mogelijkheden voor de totale spin van 0 of 1. De symmetrie van het neutron-neutron paar is gegeven door $(-1)^{S+1}$, wat hetzelfde is als in tabel 4 voor het deuterium geval. We weten ook dat als we de 2 neutronen uitwisselen met elkaar dan weten we dat de volledige symmetrie van de golffunctie negatief moet zijn $\Rightarrow (-1)^{L+S+1} = -1$ (Pauli principe). Dit wil zeggen dat dat $L + S$ voor de neutronen even moet zijn. Er zijn 3 mogelijkheden om $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ van de neutronen gelijk aan 1 te krijgen.

- $L = 0$, $S = 1$
- $L = 1$, $S = 0, 1$
- $L = 2$, $S = 1$

Hiervan is uiteindelijk maar 1 combinatie waar $L + S$ even is: $L = 1$, $S = 1$, al de andere zijn oneven. Met andere woorden moeten de 2 neutronen hun spin parallel staan en in een P-golf rond elkaar bewegen. De uiteindelijke toestand van de neutronen kunnen neergeschreven worden als $^3P_1$ met een pariteit $(-1)^L = -1$. Nu kan je je afvragen wat het verschil is tussen deze symmetrie en de eerder gegeven symmetrie $(-1)^{L+S+1}$. $(-1)^{L+S+1}$ is de symmetrie van de totale golffunctie van het neurtron-neutron paar (altijd antisymmetrisch voor fermionen) en $(-1)^L$ is de symmetrie onder spiegeling rond de oorsprong.
Omdat protonen en neutronen dezelfde intrisieke pariteit hebben hangt de pariteit van deuterium enkel af van het baanmoment tussen p en n. Omdat $L_d = 0$ hebben we uiteindelijk dat $P_d = (-1)^0 = +1$.
Met al deze gegevens kunnen we nu de pariteit van π^- bepalen. Uit behoud van pariteit kunnen we halen dat de pariteit van $\pi^- + d$ gelijk moet zijn aan -1. Vul dit allemaal in en dan vinden we:

$$\begin{aligned} P_\pi \cdot P_d \cdot (-1)^{L_{\pi+d}} &\rightarrow p_\pi \cdot (+1) \cdot (+1) = -1 \\ &\Rightarrow P_\pi = -1 \end{aligned} \tag{30}$$

2.10 G-pariteit

De reden dat dit is ingevoerd is omdat de C operator enkel een goed kwantum getal voor $Q = 0$. Een uitbreiding van de C operator is de G operator die de tekortkomingen van de C operator zou moeten opvangen.

$$G = CR = C \exp(i\pi I_2) \tag{31}$$

De R operator is een rotatie over 180° over de isospin y-as. In figuur 9 kan je zien hoe deze operator zal inwerken op een π^+.

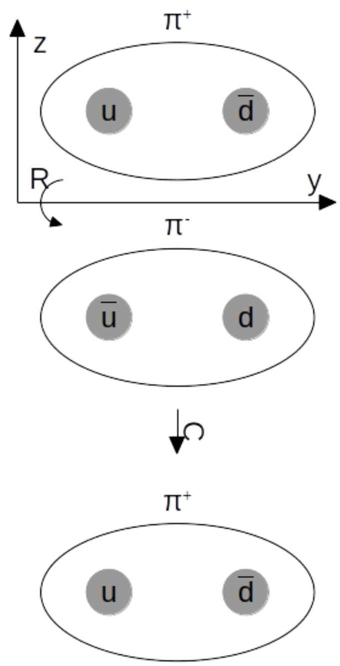


Figure 9: G operator inwerkend op een pion

Kijken we naar de eigentoestanden van de R operator zien we voor de ruimtelijke sferische golffunctie (rotatie 180° rond y-as, $\exp(i\pi L_y)$):

$$Y_l^0(\theta, \phi) \rightarrow Y_l^0(\pi - \theta, \pi - \phi) = (-1)^l Y_l^0 \tag{32}$$

Het equivalent kan gedaan worden voor de isospin golffunctie $I_3 = 0$:

$$\chi(I, 0) \rightarrow (-1)^I \chi(I, 0) \tag{33}$$

De eigenwaarde voor de R operator is dus $(-1)^I$. De reden waarom de z component van de isospin 0 mag genomen worden is omdat deze toch behouden wordt door de sterke wisselwerking en dus geen verschil zou maken als we die anders kiezen. Voegen we dit samen met dit voor de C operator krijgen we de eigenwaarde van de G operator:

$$G|\psi\rangle = (-1)^{l+s+I}|\psi\rangle \tag{34}$$

Terug voor π^0 hebben we:

- $C = +1$ door het verval $\pi^0 \to 2\gamma$ waarbij de pariteit van 2 gelijke deeltjes altijd positief zal zijn
- $R = (-1)^1 = -1$

Dit samen geeft $G|\pi\rangle = -|\pi\rangle$. Dit geld voor alle pionen omdat de sterke lading niet naar de lading kijkt. Hieruit kunnen we ook halen dat $G|n\pi\rangle = (-1)^n|n\pi\rangle$. Een mooi voorbeeld waar deze G operator te pas komt is bij de het verschil tussen ρ(780MeV) en ω(780MeV). Deze hebben beide een immense verval breedte en kunnen zou dus niet uit elkaar gehouden worden. Het enige verschil is dat $I_\rho = 1$ en $I_\omega = 0$ met respectievelijk $G_\rho = +1$ en $G_\omega = -1$. Zo zien we dat ρ zal vervallen naar 2 pionen en ω naar 3. Zo is het mogelijk om deze bij een experiment uit elkaar te houden.
Meestal zullen mesonen als volgt voorgesteld worden: $I^G(J^{PC})$. Belangrijk om te weten is dat de G pariteit enkel behouden wordt door de sterke wisselwerking.

mogelijke examenvraag: aantal mesonen gegeven, leidt de isospin, spin, pariteit ($= (-1)^{L+1}$ extra - teken door tegengestelde intrinsieke pariteit)... af uit de toestand

3 Feynman diagrammen, processen en correcties

3.1 Schrödinger en co

In de klassieke mechanica hebben we:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + V = E \tag{35}$$

of voor een vrij deeltje:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = E \tag{36}$$

Overgaan naar kwantummechanica geeft:

$$\begin{aligned} \vec{p} &\to \frac{\vec{\nabla}}{i} \\ E &\to i\frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi &= i\frac{\partial\psi}{\partial t} \end{aligned} \tag{37}$$

Relativiteit toevoegen geeft $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ of in invariante notatie $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$. Vervangen we dit in vergelijking (37) krijgen we de Klein-Gordon vergelijkingen.

$$-\partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 \psi = 0 \tag{38}$$

Deze zijn door Schrödinger opgesteld voor dat hij de Schrödinger vergelijkingen heeft opgesteld. Dit omdat eerst geprobeerd is de vergelijkingen relativistisch op te lossen maar dit wou niet lukken en zijn dan eerst klassiek opgelost. Het probleem bij de Klein-Gordon vergelijkingen is dat $|\psi|^2$ geen probabiliteit meer is a.k.a deze is niet positief definiet. De reden hiervoor is de tweede afgeleide naar de tijd. Dit komt er fysisch op neer dat deeltjes kunnen gecreëerd en geannihileerd kunnen worden. Schrijven we de Klein-Gordon vergelijking eenvoudiger:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 \psi - m^2 \psi \tag{39}$$

vermenigvuldig dit met de canonische ψ^* en trek er het canonische toegevoegde van af.

$$\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \psi^* (\vec{\nabla}^2 \psi - m^2 \psi) - \psi (\vec{\nabla}^2 \psi^* - m^2 \psi^*) \tag{40}$$

Dit kan herschreven worden als volgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \tag{41}$$

Zo krijgen we iets dat afgeleid is naar de tijd dat moet gelijk zijn aan iets afgeleid naar de ruimte. Dit kan niets anders dan een continuïteit vergelijking.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ \rho = i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \end{aligned} \tag{42}$$

Voor een vrij deeltje (plane wave) is de golffunctie:

$$\psi(\vec{x}, t) = N e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \tag{43}$$

met N de normalisatieconstante. Vul dit in ρ in en krijgen we:

$$\begin{aligned} \rho &= 2|N|^2 E \\ E &= \pm \sqrt{p^2 + m^2} \end{aligned} \tag{44}$$

Belangrijk hier is dat E niet constant is en dus ook de densiteit aan deeltjes is niet constant. De E in de relativiteit komt van de Lorentz contractie. Naarmate de energie toeneemt zal door de normalisatie van de golfvergelijking het volume kleiner worden.

3.2 Dirac

Dirac wil de kwantummechanica en relativiteit toch samenvoegen. Hij zoekt naar een vergelijking die eerste orde is in t.

$$\hat{E}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m)\psi \tag{45}$$

En hij eist dat ψ voldoet aan de Klein-Gordon vergelijkingen. Zo gaan de niet te interpreteren densiteiten ρ weg. De enige manier om dit op te lossen is wanneer $\vec{\alpha}$ en β 4×4 matrices zijn. Dit omdat er aan anti-commutatie relaties zal moeten voldaan worden, wat niet kan met getallen. Dit geeft mee dat ψ 4 componenten zal hebben, "Dirac spinor".

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{48}$$

Nu is het mogelijk om de Dirac vergelijking (vergelijking (45)) herschreven worden in zijn covariante vorm:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \tag{49}$$

met γ de eerder gedefineerde 4×4 matrices genormeerd naar de lichtsnelheid.

3.3 Spin

Het probleem dat Dirac vaststelt is dat het angulaire momentum $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ niet zal behouden worden in de relativistische kwantummechanica maar wel in de klassieke kwantummechanica.

In plaats van op te geven gaat hij kijken naar

$$\hat{S}_i \equiv \frac{1}{2}\hat{\sum}_i \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \tag{50}$$

Table 6: caption

$\hat{H}_{SE} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$	$[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = 0$	L conserved
$\hat{H}_D = \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m$	$[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$	L not conserved

waarbij bewezen kan worden dat $[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = +i\vec{\alpha} \times \vec{p}$ is.

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = [\vec{\alpha} \times \vec{p}, \hat{\vec{S}}] + m[\beta, \hat{\vec{S}}] \tag{51}$$

De spin zal niet interagreren met β en de commutatierelatie nul.

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = [\vec{\alpha} \times \vec{p}, \hat{\vec{S}}] \tag{52}$$

Aan de hand van Lie algebra zien we direct dat deze commutatie neerkomt op

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = i\vec{\alpha} \times \vec{p} \tag{53}$$

Voegen we dit allemaal samen kunnen we zien dat het totaal angulair momentum we zal behouden worden.

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{J}}] = [\hat{H}_D, \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}] = 0 \tag{54}$$

Uit de Dirac vergelijkingen kunnen we direct halen dat de spin van deze deeltjes $\frac{1}{2}$ zijn en dat de Dirac deeltjes dus fermionen zijn.
Vullen we in vergelijking (49) de golffunctie in voor het vrije deeltje in:

$$\psi(\vec{x}, t) = (u(E, \vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \tag{55}$$

dan krijgen we met de vereenvoudigde dirac vergelijking

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)u = 0 \tag{56}$$

4 oplossingen:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+i_{p_y}}{E+m} \end{pmatrix}, u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_x-i_{p_y}}{E+m} \ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix},, u^{(3)}, u^{(4)} \tag{57}$$

en hun energie:

$$\begin{gathered} u^{(1)}(u^{(2)}) : E = +|\sqrt{p^2+m^2}| \\ u^{(3)}(u^{(4)}) : E = -|\sqrt{p^2+m^2}| \end{gathered} \tag{58}$$

De negatieve energieën kunnen geïnterpreteerd worden als de

- negatieve energie deeltje terug gaande in de tijd
- positieve energie anti-deeltje voorwaarts in de tijd

Na verder inzien lijkt het me niet nuttig om de dirac vergelijkingen verder uit te schrijven hier. Deze staan perfect uitgewerkt in Thomson. Voor dit deel schrijf ik enkel belangrijke mededelingen neer uit de les.

3.4 Spin toestanden

De heliciteit is niet triviaal voor een bewegent deeltje. Om dit te definiëren maken we gebruik van de heliciteit:

$$h \equiv \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p} \tag{59}$$

We doen dit omdat de z-as natuurlijk niet Lorentz invariant is. Door de spin te projecteren op het momentum van het deeltje wat natuurlijk wel invariant is wordt dit probleem opgelost. De deeltjes hebben dus zowel een spin als heliciteit met de heliciteit enerzijds parallel (rechts handig) of antiparallel (links handig) aan het momentum van het deeltje. Belangrijk om te weten is dat heliciteit nog steeds niet Lorentz invariant is.

3.5 Intrinsieke pariteit

Ik verwijs hier terug naar de Thomson p. 108. De uitkomsten voor de pariteit operator

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= -z \\ \psi' &= \hat{P}\psi \\ \hat{P}\psi' &= \psi \end{aligned} \tag{60}$$

zijn gegeven door:

$$\begin{aligned} i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi &= -i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ i\gamma^1 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\psi' &= -i\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t} \end{aligned} \tag{61}$$

Hieruit kunnen we halen dat $\gamma^0 \hat{P} \propto I$ en dat $\hat{P}^2 = I$. Dit wetende bekomen we dat $\hat{P} = \pm\gamma^0$. We hebben dus keuze welke operator we gebruiken. Conventioneel kiezen we $\hat{P} = +\gamma^0$ zodat

$$\begin{aligned} \hat{P}u_{1,2} &= +u_{1,2} \\ \hat{P}v_{1,2} &= -v_{1,2} \end{aligned} \tag{62}$$

Ryckbosch legt hier vooral de nadruk op de fysische concepten en niet op de wiskunde.

3.6 Spinoren

De adjunct spinor is gegeven door

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & -\psi_3^* & -\psi_4^* \end{pmatrix} \tag{63}$$

$\overline{\psi}\psi$ is Lorentz invariant de stroom is gegeven door $j^\mu = \overline{\psi}^\mu \psi$ en de densiteit $\rho = \psi^\dagger\psi = 2E$.

3.7 Fermi's gouden regel

Nemen we een hamiltoniaan $\hat{H}_0\phi_k = E_k\phi_k$ en laat deze perturberen met de interactie hamiltoniaan $\hat{H}'(\vec{x},t)$ dan krijgen we volgens de gouden regel dat de Schrödinger vergelijking aanpast naar

$$i\frac{d\psi}{dt} = [\hat{H}_0 + \hat{H}'(\vec{x},t)]\psi \tag{64}$$

Het is mogelijk om hieruit te bewijzen (zie Thomson p. 51 en verder, Interesseerd Ryckbosch minder) dat de breedte van toestand i naar toestand f gegeven is door

$$\Gamma_{fi} = 2\pi|T_{fi}|^2\rho(E_i) \tag{65}$$

Hierbij zijn

$$\begin{aligned} T_{fi} = \left\langle f|\hat{H}'|i\right\rangle &= \int \phi_f^*(\vec{x})\hat{H}'\phi_f(\vec{x})d^3\vec{x}(\text{Eerste orde s.r.}) \\ &= \left\langle f|\hat{H}'|i\right\rangle + \sum_{k\neq i}\frac{\left\langle f|\hat{H}'|k\right\rangle\left\langle k|\hat{H}'|i\right\rangle}{E_i - E_k}(\text{Tweede orde s.r.}) \\ \rho(E_i) &= \left|\frac{dn}{dE_f}\right|_{E_i} \end{aligned} \tag{66}$$

In deze cursus gaat het vooral over de tweede orde storingsrekening gaan, vanwege 1 intermediare toestand.

3.8 Faseruimte

Uit de gouden regel van Fermi kunnen we halen dat elke kwantumtoestand in de impulsruimte een volume van $(2\pi)^3$ zal innemen (Heisenberg).

$$d^3\vec{x}d^3\vec{p} = (2\pi)^3 \tag{67}$$

Hierbij is $d^3\vec{x}$ het volume en kunnen we $d^3\vec{p}$ afleiden. Bij dit afleiden gaan we ervan uit dat deze isotroop is verdeelt.

$$dn = 4\pi p^2 dp \times \frac{V}{(2\pi)^3} \tag{68}$$

Door het normeren van de golffuncties in vergelijking (66) zal in de werkzame doorsnede het volume van de ruimte geen rol meer spelen. De p^2dp zal ons vertellen hoe gemakkelijk een transitie zal gebeuren en is dus zeer belangrijk. Een voorbeeld hiervan is gegeven door het muon verval

$$\mu \to e + \nu_e + \nu_\mu \tag{69}$$

Het muon heeft een energie van 105MeV en vervallen in 3 deeltjes. Er zijn dus 2 vrijheidsgraden (behoud energie en impuls), p_1 en p_2. De breedte wordt dan

$$\begin{aligned}\Gamma &\sim \int p_1^2 p_2^2 dp_1 dp_2 \\ &\sim [E]^5 \\ &\Downarrow \\ \Gamma_\mu &\sim m_\mu^5\end{aligned} \tag{70}$$

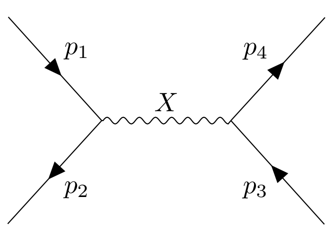
Daarintegen vervalt een top quark enkel naar 2 deeltjes en heeft dus maar 1 vrijheidsgraad p.

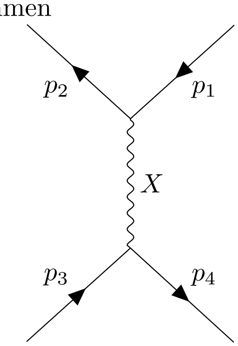
$$\begin{aligned}t &\rightarrow b + W \\ \gamma_t &\sim \int p^2 dp \\ &\sim m_t^3\end{aligned} \tag{71}$$

De reden waarom we maar tot de 5de macht krijgen voor het muon en niet tot de 6de is omdat p_1 en p_2 van elkaar afhangen en een van de 2 integralen weg vallen.
Tot nu toe was alles niet relativistisch. Eens we overschakelen naar de relativistische equivalenten wordt alles veel moeilijker. Hier gaan we over op Lorentz invariante fase ruimte en alle problemen worden opgevangen in de normalisatie van de golffuncties. Meer hoeven we hier niet van te weten.

3.9 Feynman diagrammen

Een eenvoudig voorbeeld voor feynman diagrammen





$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \frac{1}{q^2 - m_X^2} \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle \tag{72}$$

De makkelijkste vorm van een vertex is als het een scalaire interactie is $\langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \propto g_a$. Bij de propagaotor zal er moeten gesommeerd worden over alle polarisatietoestanden. De feynmanregels schrijf ik hier niet helemaal uit, ga hiervoor naar thomson p114 en verder.

3.10 QED

Hier wordt er enkel gebruik gemaakt van de elektromagnetische wisselwerking. Zie terug Thomson voor de regels. Het is belangrijk om te begrijpen dat de $\frac{1}{q^2}$ in de propagator van QED zal aangeven hoe gemakkelijk zal zijn om een foton van de ene naar de andere kant een impuls q zal meenemen.

3.11 Currents

De current density is niet meer dan $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ wat 4 vectoren zijn. Dit wordt ook wel een bi-linaire vorm genoemd. Omdat $\overline{\psi}$ en ψ elk bestaan uit 4 componenten bekomen we 16 mogelijke combinaties die we kunnen samennemen.

Table 7: current lineaire combinaties

	interactie vorm	aantal componenten
$\overline{\psi}\psi$	scalar	1
$\overline{\psi}\gamma^5\psi$	pseudoscalar	1
$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$	vector	4
$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	pseudovector	4
$\overline{\psi}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi$	tensor	6
	totaal	16

3.12 Zwakke interactie

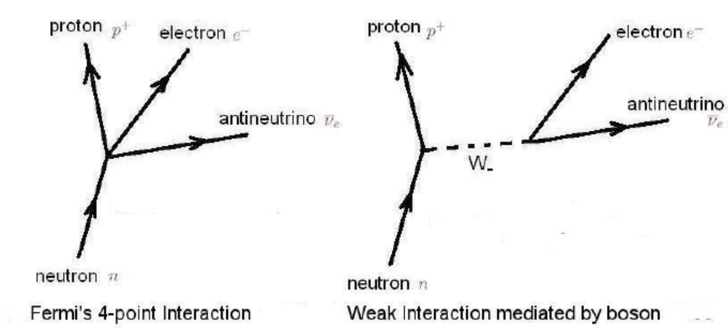


Figure 10: Feynman diagram van zwakke interactie

Bij de zwakke interactie wordt er boson uitgewisseld. Eerder werd dit gezien als een puntinteractie. De relatie tussen de 2 is gegeven door

$$M_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_{\overline{\nu}}\gamma_\mu\psi_e \cdot \overline{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n \tag{73}$$

Hiet komen we later in de cursus op terug.

3.13 Charged current

Bij het uitwisselen van een W^+ of W^- boson wordt er een hoeveelheid lading verplaatst tussen de verschillende deeltjes. Dit kan in principe enkel gebeuren binnen een generatie.

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \\ \tau^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \tag{74}$$

Deze opmenging tussen de verschillende generaties is beschreven door de CKM-matrix

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{75}$$

deze worden ook wel de flavour toestanden (d') en de massa toestanden(d) genoemd.

3.14 Pariteit schende

Uit experimenten bleek dat het heilig boontje, de partiteit, niet behouden wordt bij de zwakke wisselwerking. Later is gezien dat de pariteit volledig zal schenden. De nieuwe theorie die hier is ontwikkeld zegt dat in de operator van de zwakke wisselwerking zowel een vector gedeelte als pseudo-vector gedeelte zit, $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ die de links handige toestanden uit projecteerd. Dit geeft de (V-A)-interactie

$$\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\phi \tag{76}$$

De heliciteit en P_L hier zijn niet helemaal hetzelfde.

3.15 Neutrale current

Omdat we $W^\pm$ hebben wil het zeggen dat we een triplet hebben en hebben we dus nog een boson zonder lading nodig, Z^0. Deze zal de pariteit maar gedeeltelijk schenden.

3.16 Mathematical interlude: groups

Een groep is een set van operaties die moeten voldoen aan:

- inwendigheid: R_iR_j is ook deel van de set
- identiteit: I bestaat met $R_iI = IR_i = R_I$
- inversie: R_I^{-1} moet bestaan met $R_I^{-1}R_i = R_iR_I^{-1} = I$

- associativiteit: $R_i(J_jR_k) = (R_iR_j)R_k$
- commutativiteit: $R_iR_j = R_jR_i$

Indien ze hier allemaal aan voldoen is dit een abelse groep. De meest gebruikte in de deeltjes fysica

Table 8: Meest gebruikte groepen

Groep		Matrices
$U(n)$	$n \times n$	unitair ($U^*U = 1$)
$SU(n)$	$n \times n$	unitair, determinant 1
$O(n)$	$n \times n$	orthogonaal ($OO = 1$)
$SO(n)$	$n \times n$	orthogonaal, determinant 1

De $SO(n)$ groep zijn de rotaties van de ruimte in n dimensies en $SU(2)$ is de spin van deeltjes wat homomorf is met $SO(2)$.

3.17 2D-rotatie $SO(2)$

Het roteren van de ruimte over een hoek ϕ is gegeven door:

$$\begin{aligned} R(\phi)\hat{e}_1 &= \hat{e}_1 \cos\phi + \hat{e}_2 \sin\phi \\ R(\phi)\hat{e}_2 &= -\hat{e}_1 \sin\phi + \hat{e}_2 \cos\phi \\ &\text{of} \\ R(\phi)\hat{e}_i &= \hat{e}_j R(\phi)^j_i \\ R(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{77}$$

Laten we dit inwerken op een gewone vector $\vec{x} = \hat{e}_i x^i$ krijgen we:

$$\begin{aligned} \vec{x} \to \vec{x}' \equiv R(\phi)\vec{x} &= R(\phi)\hat{e}_i x^i = \hat{e}_j R(\phi)^j_i x^i \\ \vec{x}' &= \hat{e}_j x'^j \\ x'^j = R(\phi)^j_i x^i \end{aligned} \tag{78}$$

De verschillende eigenschappen om een abelse groep te bekomen zijn makkelijk na te gaan.
Gaan we nog een stap verder , bekijken we de rotatie van infinitisimaal kleine hoeken.

$$R(d\phi) = 1 - id\phi J \tag{79}$$

met J onafhankelijk van $d\phi$. De reden voor de vorm van vergelijking (79) is door de kleine hoek benadering, cos gaat naar 1 en sin gaat naar de hoek zelf. Het bepalen van J kan snel gedaan worden: Draai de hoek ϕ infinitesimaal op:

$$R(\phi + d\phi) = R(\phi)R(d\phi) = R(\phi) - id\phi R(\phi)J \tag{80}$$

Of in taylor ontwikkeling:

$$R(\phi + d\phi) = R(\phi) + d\phi \frac{dR(\phi)}{d\phi} \tag{81}$$

Stel deze gelijk aan elkaar om een vergelijking voor $R(\phi)$ te bekomen.

$$\begin{aligned} \frac{dR(\phi)}{d\phi} &= -iR(\phi)J \\ \Rightarrow R(\phi) &= e^{-i\phi J} \end{aligned} \tag{82}$$

J is dus niets anders dan de generator van de $SO(2)$ groep (deze groep heeft er maar 1!). Het expliciet uitrekenen van J geeft

$$\begin{aligned} R(d\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & -d\phi \\ d\phi & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow J &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{83}$$

3.18 3D rotatie $SO(3)$

Deze worden in het algemeen voorgesteld in eulerhoeken α, β en γ. Deze rotaties commuteren niet en dit is dus geen abelse groep. Dit zal belangrijke gevolgen hebben. De matrix van deze rotatie is gegeven door

$$\begin{aligned} R_3(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_2(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \\ R_1(\psi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{84}$$

Wat we wel hebben is dat elke subgroep R_i isomorf is met $SO(2)$.

$$R_n(\psi) = e^{-i\psi J_n} \tag{85}$$

Dit geeft ons 3 generatoren voor de $SO(3)$ groep. Dit kan veralgemeend worden tot: $SU(n)$ heeft $n^2 - 1$ generatoren.

3.19 Non-abelse interacties

Enkel de elektromagnetische wisselwerking is Abels. Al de andere krachten zijn dit niet. De intermediare toestanden van deze niet Abelse interacties zullen zelf hun lading dragen. Hierdoor is het mogelijk dat deze aan zelf-interactie gaan

doen.
De reden voor de korte dracht van de sterke en zwakke wisselwerking zijn niet hetzelfde. Bij de zwakke wisselwerking ligt dit aan de grote massa van het W en Z boson die snel vervallen. Bij de sterke wisselwerking is dit door de zelf-interactie tussen gluonen.

4 DIS, nucleon structuur, PDF's

4.1 Diep inelastische verstrooiing

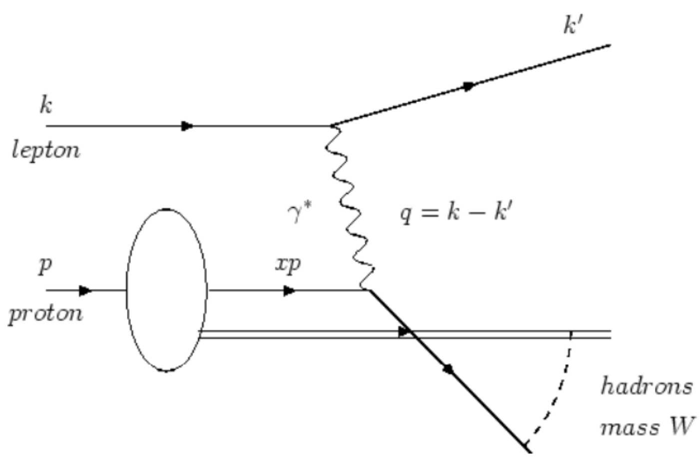


Figure 11: Diep inelastische verstrooiing van een proton en een lepton

Bij deze verstrooiing zal de kinetische energie van het lepton veel hoger zijn dan de massa van proton. Zo is het mogelijk om de inwendige structuur van het proton te gaan bekijken. De reden waarom we dit kunnen doen is omdat bij deze hoge energieën de golflengte van het foton veel kleiner zal zijn dan de grote van het proton. In dit geval werken we met een foton wat een groot voordeel is omdat we de vertices in dit diagram heel goed kunnen beschrijven en het lepton is een elementair deeltje. De enige onbekende in dit systeem is dus de inwendige structuur van het proton. De reden waarom het zo lang heeft geduurd voor we proton bundels zijn beginnen gebruiken is omdat niet alle massa in de valentie quarks van het proton zullen zitten wat het allemaal veel ingewikkelder maakt. Om met het LHC nauwkeurige metingen te kunnen uitvoeren moeten we veel meer statistiek (meer events) hebben.
De kinetiek van het proces schematisch weergegeven in figuur 11 kan makkelijk neergeschreven worden. Een parton (quark) van een proton met 4moment xp

zal een energie q absorberen van het foton en een vrij deeltje worden.

$$\begin{aligned} \text{voor absorptie: } (xp+q)^2 &= m_{parton}^2 \approx 0 \\ &= x^2p^2 + 2xpq + q^2 \\ &= 2xp + q^2 \\ \Rightarrow x &= -\frac{-q^2}{2pq} = \frac{Q^2}{2pq} \end{aligned} \tag{86}$$

Het enige deeltje dat in staat zal zijn om een foton met energie q te absorberen moet een impulsfractie x, zoals berekent in (86), hebben van het proton. Met andere woorden hebben we een filter op welke partonen we willen waarnemen. Deze fractie is Lorentz invariant en dimensieloos. Een andere Lorentz invariante grootheid in dit proces is $y = \frac{q \cdot p}{k \cdot p}$. Deze geeft de fractie van het electron dat gedragen wordt door het foton.
Verder uitgewerkt op een vast target hebben we als 4 momenta:

$$k = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} m_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k' = \begin{pmatrix} E' \\ 0 \\ E' \sin\theta \\ E' \cos\theta \end{pmatrix}, p_h = \begin{pmatrix} E_h \\ p_{xh} \\ p_{yh} \\ p_{zh} \end{pmatrix} \tag{87}$$

De aannames dat we hier hebben gedaan zijn:

- elektron beweegt langs de z-as
- door hoge energieën zien we het elektron als massaloos: $|E_e| = |p_{ze}|$
- het elektron verstrooit in het yz-vlak
- De hadronische finale toestand is de som van alle uitkomende deeltjes samen

De invariante massa van dit systeem is $W = \sqrt{E_H^2 - \vec{p}_h^2} \geq m_p$. Het is mogelijk maar zeldzaam dat de geabsorbeerde energie kan verdeelt worden onder alle andere partons om zo een proton uit te komen. Dit is een elastische verstrooiing en $W = m_p$. In alle andere gevallen breekt het parton los van de rest en hebben we een inelastische verstrooiing met $W > m_p$.
Dit systeem heeft 8 vrijheidsgraden (voor zowel k' als p_h 1 voor de energie en 3 voor de hoeken). Eén van deze vrijheidsgraden valt weg vanwege de massa van het elektron dat verwaarloost wordt, nog 4 vallen weg door het behoud van energie en impuls en ten laatste valt er nog 1 weg door azimutale symmetrie. Zo houden we uiteindelijk nog 2 vrijheidsgraden over. De 2 makkelijkst te kiezen variabelen zijn E' en θ. Het probleem hierbij is dat deze niet Lorentz invariant zijn. Deze variabelen kunnen wel omgevormd worden naar x en y die dit wel zijn.

$$\begin{array}{ccccc} Q^2 & = & -(k-k')^2 & \approx & 2EE'(1-\cos\theta) \\ x & = & -\frac{q^2}{2p \cdot q} & = & \frac{EE'(1-\cos\theta)}{(E-E')m_p} \\ y & = & -\frac{q \cdot p}{k \cdot p} & = & \frac{E-E'}{E} \end{array} \tag{88}$$

4.2 Experimenten

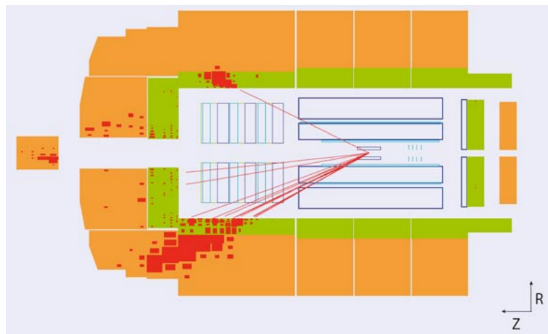


Figure 12: HERA experiment

De beste vaste target machines voor precisie zijn e^+e^- colliders. Op deze machines zijn ook voor het eerst de quarks gezien. In het CERN hadden ze eerst een proton collider gemaakt en dachten dat ze de boot gemist hebben. Wat ze gedaan hebben is de protonen op een target insturen en daar komen massas pionen uit. Als je deze lang genoeg meeneemt gaan die vervallen naar muonen met een levensduur van de orde 10^{-8}s en zo verkrijgen we een muon bundel. Omdat dit tertiaire deeltjes zijn gaat de densiteit van de deeltjes veel lager liggen en zullen een vrij breed energiespectrum hebben. Hetzelfde kan gedaan worden voor neutrino's.
Er zijn ook colliders waar 2 deeltjes bundels op elkaar worden afgestuurd. Een voorbeeld van de waargenomen deeltjes is in figuur 12 gegeven van het HERA experiment. Hier is het duidelijk dat de elektronen van links zullen komen. Dit omdat de inkomende energie van het proton veel hoger is dan dat van het elektron en de uitgaande deeltjes van de collisie gaan wegens behoud van impuls via de linker kant de detector verlaten.
Als je zo een extravagant experiment zoals het LHC maakt is 1 van de eerste dingen die je doet het onderzoeken van het kinematisch bereik van dat experiment. In figuur 13 wordt Q^2 in functie van x geplot van verschillend colliders.

4.3 Cross section

De werkzame doorsnede van deze DIS experimenten wordt gegeven door:

$$\frac{d^2\sigma^{e,N}}{dxdy} = \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4}[xy^2F_1^{eN} + (1-y)F_2^{eN}] \tag{89}$$

met F_1 en F_2 de structuur functies. Het is logisch dat er in deze werkzame doorsnede een α^2 afhankelijkheid verwerkt zit omdat deze interactie verloopt via de elektromagnetische interactie en dus 2 vertices heeft die elk een α toedragen. En de waarschijnlijkheid dat we de impulsfractie x vinden van het parton wordt gegeven door die structuur functies F_1 en F_2. Het zijn deze dus die alle

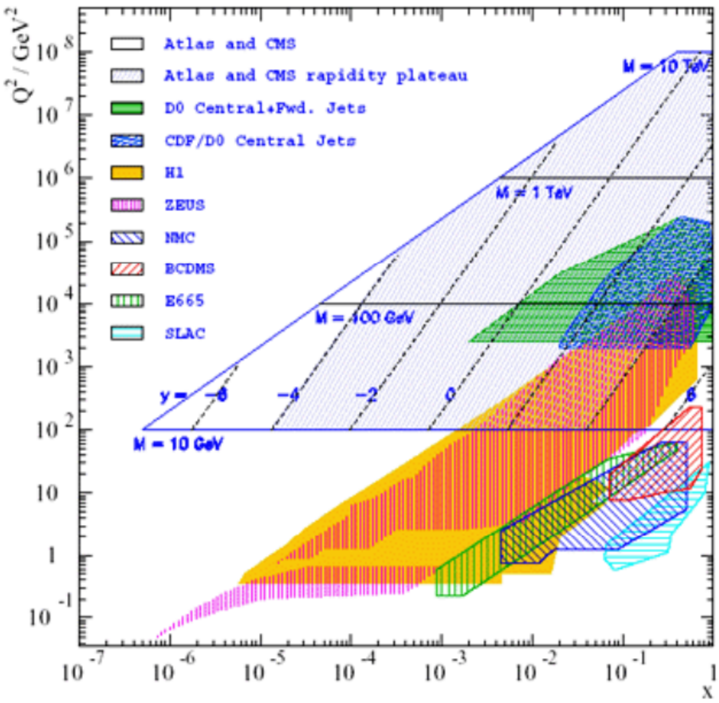


FIG. 1: Kinematic coverage of the DIS and collider pp-$p\bar{p}$ experiments. For pp and $p-\bar{p}$ colliders, the Bjorken x_1 and x_2 of the interacting quarks are related to the mass M of the Drell-Yan pair and its rapidity y as $x_{1,2} = M/\sqrt{S}\exp(\pm y)$ where S is the center of mass energy squared for the experiment.

Figure 13: Kinematisch bereik

informatie bevatten. We zien dat de structuur functies afhangen van zowel x als Q^2, $F_i(x, Q^2)$. Zo weten we direct dat dit geen puntdeeltjes kunnen zijn omdat we anders geen afhankelijkheid zouden hebben van Q^2.