

Samenvatting: subatomaire fysica 2

Emile Segers

Year 2019-2020

Abstract

Dit is een samenvatting gebaseerd op de lessen subatomaire fysica 2 2020-2021. Dit is geen vervanging voor de cursus gegeven in dit vak. Het doel van deze samenvatting is een studiehulp te zijn bij de lessen van Dirk Ryckbosch. Gebruik dit dan ook enkel als hulp.

De schrijver van deze samenvatting is niet verantwoordelijk voor het maken van fouten op een examen of ergens anders. Indien je fouten vindt kan je me altijd contacteren op dit e-mailadres emile.segers8@gmail.com.

De voertaal van het examen subatomaire fysica 2 in 2020-2021 is Nederlands. Deze samenvatting zal dus ook grotendeels in het Nederlands geschreven worden.

Contents

1	Introductie en overzicht	3
1.1	High energy physics	3
1.2	Discovering the electron	4
1.3	Interacties	5
1.4	Deeltjes experimenten	6
1.5	Mandelstam-variables	6
1.6	Acceleratoren	7
1.7	Detectoren	8
1.8	Energie verlies	8
1.9	Deeltjes detectoren	9
1.10	Event reconstructie	10
1.11	Cross sectie	10
1.12	Differentiële cross sectie	11
1.13	Hoe meten we dit alles	12
2	Quantum getallen	12
2.1	Elekrische lading	13
2.2	Lepton getal	13
2.3	Baryon getal	13
2.4	Impuls moment	14
2.5	Strong isospin	14

2.6	Multiplicatieve kwantum getallen	15
2.7	Pariteit	16
2.8	C-pariteit	17
2.9	Pion pariteit	18
2.10	G -pariteit	20
3	Feynman diagrammen, processen en correcties	22
3.1	Schrödinger en co	22
3.2	Dirac	23
3.3	Spin	24
3.4	Spin toestanden	25
3.5	Intrinsieke pariteit	25
3.6	Spinoren	26
3.7	Fermi's gouden regel	26
3.8	Faseruimte	27
3.9	Feynman diagrammen	28
3.10	QED	28
3.11	Currents	28
3.12	Zwakke interactie	29
3.13	Charged current	29
3.14	Pariteit schende	29
3.15	Neutrale current	30
3.16	Mathematical interlude: groups	30
3.17	2D-rotatie $SO(2)$	31
3.18	3D rotatie $SO(3)$	32
3.19	Non-abelse interacties	32
4	DIS, nucleon structuur, PDF's	32
4.1	Diep inelastische verstrooing	32
4.2	Experimenten	34
4.3	Cross section	36
4.4	Structuur functies	38
4.5	(Anti)neutrino verstrooing	39
4.6	Gepolariseerde DIS	41
4.7	Spin physics	42
4.8	Nucleon spin fysica	42
4.9	Samenvatting van de structuur functies	46
5	QCD	47
5.1	Sterke interactie	47
5.1.1	@ Quark level	47
5.2	Symmetrie van de sterke wisselwerking	48
5.3	Kleur	50
5.4	Gluonen	50
5.5	Jets	50
5.6	Testen van QCD	52

5.7	Spin van het gluon	54
5.8	α_s	55
5.9	Lopende koppelingsconstante	55
5.9.1	QED	55
5.9.2	QCD	57
5.10	DIS: scaling violations	58
5.11	Splitting functies	58
5.12	DGLAP	60
5.13	Hadron colliders	60
6	Parity violation	61
6.1	Pariteit	61
6.1.1	Dirac fermionen	62
6.1.2	QED	62
6.2	Pariteit schenden in experimenten	64
6.3	Wu-experiment	64
6.4	Heliciteit	68
6.5	Chiraliteit	68
6.6	$f\bar{f}$ -annihilatie	69
6.7	Pion verval	70

1 Introductie en overzicht

Er worden min of meer 2 handboeken gevuld "Modern Particle Physics, Thomson, Cambridge" en "Introduction to Elementary Particle Physics, Bettini, Cambridge, 2008". De boeken zijn veel gestructureerd dan de cursus. De cursus volgt meer de chaotische structuur van de geschiedenis van de experimenten. Hierdoor krijg je ook meer inzicht hoe de experimenten verlopen en dat het niet altijd even logisch hoort te zijn. Op dit ogenblik weten we nog zeker niet alles en zien nog niet altijd de logica. Bij experimenten wordt er altijd in het duister getast. De bedoeling van deze master cursus is deels om de mensen in de war te brengen en kritisch na te denken.

De cursus bestaat uit 12 hoofdstukken waarbij je het meest uitkijkt naar het laatste hoofdstuk. Deze bespreekt de fysica die we nog niet kennen, met andere woorden niet het Standaard Model.

1.1 High energy physics

Hier wordt er gekeken naar de fundamentele constituenten van de materie en naar de interactie tussen hen. Met andere woorden kijken we naar materie deeltjes en naar krachten.

Dat er zowel 6 leptons als quarks zijn is waarschijnlijk geen toeval maar in principe hoeft dit niet. Er zijn bijna geen relaties tussen leptonen en quarks op dit moment. Enkel via de Coulomb kracht zullen deze met elkaar interageren. De leptonen en quarks worden opgedeeld in 3 generaties met als enig verschil

Table 1: Fundamentele materie

Leptons	ν_e	ν_μ	ν_τ	$q = 0$	neutrinos
	e^-	μ^-	τ^-	$q = -1$	charged leptons
quarks	u	c	t	$q = +2/3$	up-type
	d	s	b	$q = -1/3$	sown-type

tussen de generatie de massa. Waarbij het zwaarder deeltje zal kunnen vervallen naar het lichtere deeltje met zelfde kwantum getallen. Al deze deeltjes vermeld in tabel 1 zijn elementaire deeltjes met spin 1/2 en zijn dus fermionen. Met als gevolg dat deze de Dirac vergelijking volgen en we ze kunnen zien als punt deeltjes.

Leptonen kunnen vrij zijn. In tegenstelling zijn quarks nooit vrij. Deze binden tot composte deeltjes (hadrons):

- baryons: $|B\rangle = |q_1 q_2 q_3\rangle$
- anti-baryons: $|\bar{B}\rangle = |\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{q}_3\rangle$
- mesons: $|M\rangle = |q_1 q_2\rangle$
- anti-mesons: $|\bar{M}\rangle = |\bar{q}_1 \bar{q}_2\rangle$

De reden voor deze "confinement" is dat alle deeltjes wit moeten zijn. Het bewijs hiervoor is nog niet volledig uitgewerkt. Dit is een probleem van quantum chromo dynamics (=QCD). De laatste jaren zijn er ook penta- ($|P_c^+\rangle = |uudcc\bar{c}\rangle$) en tetraquarks ($|Z\rangle = |cc\bar{d}\bar{u}\rangle$) gevonden.

1.2 Discovering the electron

In 1897 heeft J.J. Thomson het electron voor het eerste keer ontdekt met volgende eigenschappen:

- $q_e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- $m_e = 0.9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- $s = \frac{1}{2}\hbar = 0.5 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Voor ons eigen gemak voeren we nieuwe eenheden in:

- $Q_e = -1$
- $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ (gebruik $E = mc^2$)
- $s = \frac{1}{2}$

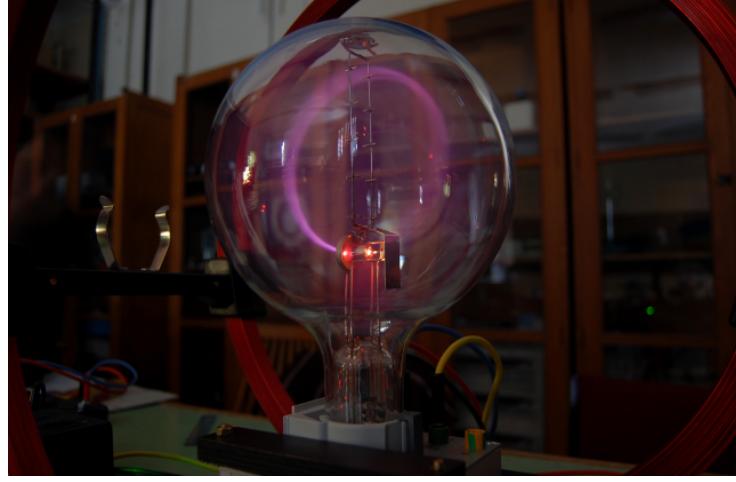


Figure 1: The discovery of the electron

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de natuurlijke eenheden $\hbar = c = 1$. Hierbij zeggen we dat $[T] = s$ en definiëren we de lengte zodat $c = 1$ en de massa zodat $\hbar = 1$. Zo krijgen we de volgende relaties:

$$\begin{aligned} [L] &= [T] \\ [M] &= [E] = [P] = [L^{-1}] \end{aligned} \tag{1}$$

De gevolgen hiervan zijn dat:

$$\begin{aligned} 1\text{MeV} &= 1.52 \cdot 10^{21} s^{-1} \\ 1\text{MeV}^{-1} &= 197\text{fm} \\ 1\text{ps}^{-1} &= 0.65\text{meV} \\ 1\text{m} &= 5.07 \cdot 10^6 \text{eV}^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

De enige die je hiervan onthoudt is de 2de. Deze komt uit $\hbar c = 197\text{MeV.fm}$. Voor de relativistische kinematica krijgen we:

$$\begin{aligned} \beta &= v \\ E^2 &= m^2 + |\vec{p}|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

1.3 Interacties

Er zijn op dit moment 5 krachten: elektrisch, magnetisch, zwak, sterk en gravitationeel. We zouden dit graag reduceren tot 1 fundamentele kracht in de "Theory of Everything" maar dit is nog niet gelukt. De koppelingsconstantes van deze krachten kan je vinden in tabel 2.

Table 2: Koppelingsconstantes

	rel. strength	works on	exch. part.
strong	1	quarks	gluons
EM	10^{-2}	q + charged leptons	photon
weak	10^{-7}	q + l + ν	W^+, W^-, Z^0

1.4 Deeltjes experimenten

Deze cursus zal vooral uitweiden over experimenten om grotere beelden te maken van de theorie. Wat staat er in de experimentele grafieken?

Het is belangrijk een hoge resolutie nodig om de kleine deeltjes te zien. Het is nodig om hoge center of mass energieën te hebben om nieuwe zware deeltjes te ontdekken.

$$E_{cm} = \sqrt{s} \quad (4)$$

In een collider met vaste targets is $s = E_{beam}$ voor colliding beams is $s = E_{beam}^2$.

1.5 Mandelstam-variables

$$\begin{aligned} a + b &\rightarrow c + d \\ s &= (p_a + p_b)^2 \\ s &= (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 \\ t &= (E_c - E_a)^2 - (\vec{p}_c - \vec{p}_a)^2 \\ u &= (E_d - E_a)^2 - (\vec{p}_d - \vec{p}_a)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

s is een Lorentz invariante grootheid en moet geconserveerd blijven tijdens de collisies. Naast de s variable bestaan ook t het overgebrachte 4-moment $a - c$ en u van $a - d$.

Dit is ooit een examenvraag geweest om te bewijzen dat $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$.

$$\begin{aligned} s &= p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b \\ t &= p_a^2 + p_c^2 - 2p_a \cdot p_c \\ u &= p_a^2 + p_d^2 - 2p_a \cdot p_d \\ &\downarrow \\ s + t + u &= p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b + p_a^2 + p_c^2 - 2p_a \cdot p_c + p_a^2 + p_d^2 - 2p_a \cdot p_d \\ &= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 + (2p_1^2 + 2p_a \cdot p_b - 2p_a \cdot p_c - 2p_a \cdot p_d) \\ &\downarrow \text{vergelijking (7) en behoud van momentum} \\ &= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$2p_1^2 + 2p_a \cdot p_b - 2p_a \cdot p_c - 2p_a \cdot p_d = 2p_1 \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = 0 \quad (7)$$

Hierbij kunnen we deze vergelijking gelijk stellen aan 0 omdat $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$.

Deze variabelen zijn makkelijk om de s, t en u kanalen in deze botsingen te beschrijven.

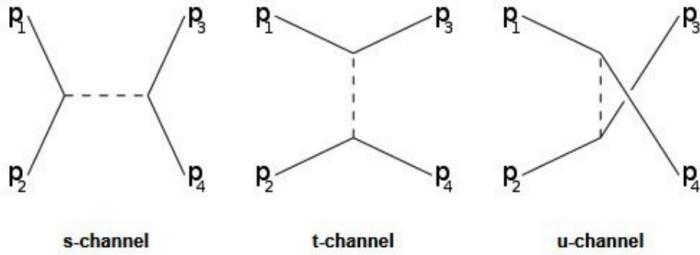
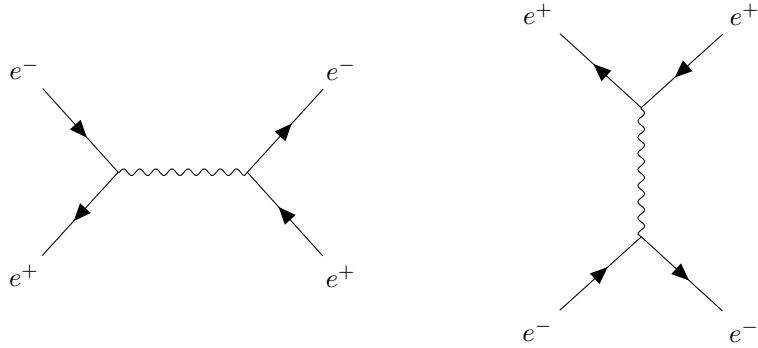


Figure 2: Mogelijke kanalen tijdens botsingen

Kijken we naar de werkzame doorsneden van deze kanalen zien we:

$$\begin{aligned} \sigma &\sim \frac{1}{E^2} \\ \text{s kanaal: } &\sim \frac{1}{s} \\ \text{t kanaal: } &\sim \frac{1}{t} \\ \text{u kanaal: } &\sim \frac{1}{u} \end{aligned} \tag{8}$$

Als voorbeeld $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$:



Het u kanaal is hier niet mogelijk omdat we met verschillende deeltjes werken. Het u kanaal is enkel mogelijk als we met gelijke deeltjes werken. De reden hiervoor is dat de vertex tussen e^- en e^+ niet bestaat.

1.6 Acceleratoren

Er zijn verschillende acceleratoren:

- lepton colliders: e^+e^- , wordt gelimiteerd door de synchroton straling

- assymetrische colliders: e^-p
- hadron colliders: $p\bar{p}$ of pp , nadeel dat deze botsingen veel complexer zijn

1.7 Detectoren

Deze bestaan uit een uienstructuur.

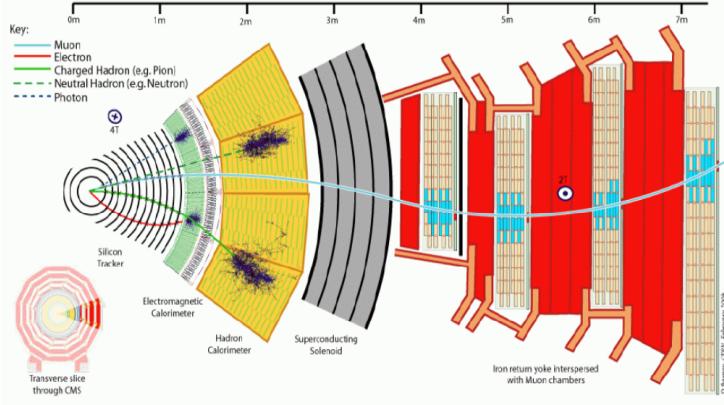


Figure 3: Detector

De verschillende lagen zijn in volgorde:

- centraal, tracker: deeltjes die afbuigen in EM veld
- magnetische calorimeter
- hadronische calorimeter
- magneten
- muon detectoren

1.8 Energie verlies

Een geladen deeltje zal met het bewegen door de detector energie verliezen. De Bethe-Bloch functie beschrijft het gemiddelde energieverlies voor door ionisatie.

$$-\frac{dE}{dx} = K \frac{\rho Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \beta^2 \right) \right] \quad (9)$$

In figuur 4 gegeven in de zone tussen 0.1 en 10. Dit is door coulomb interactie met atomen. De β^2 factor ook wel de relativistische rise is het gevolg van Brehm stralung waarbij deeltje worden afgebogen door het atoom en een hoog energetisch foton uitsturen.

De muonen bevinden zich meestal in de zone waar het energieverlies het laagste

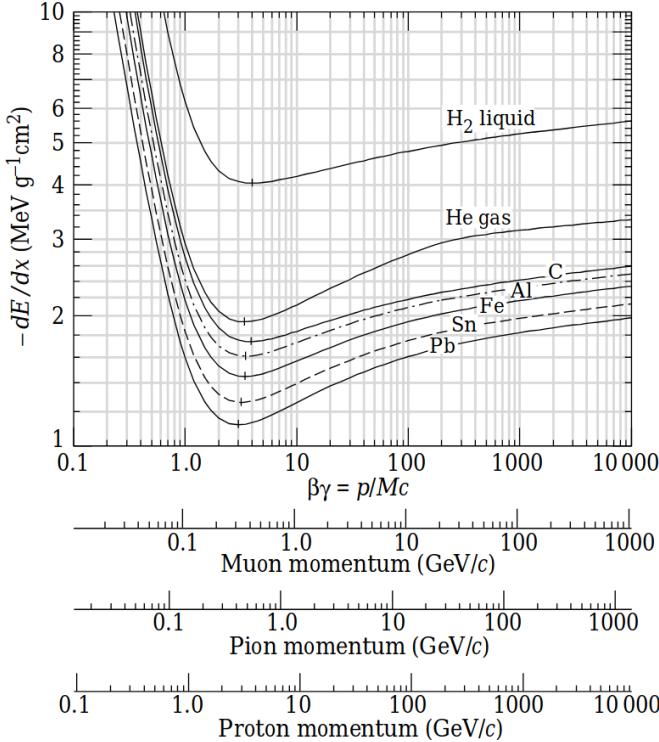


Figure 4: Bethe bloch functie

is en noemen we dan ook minimum ionising particles. Elektronen gaan heel veel fotonen afstralen en verliezen heel veel energie. Hadronen zullen naast het ioniseren ook sterke interacties ondergaan. Hierdoor verliezen we het originele deeltje en worden secondaire hadronen gemaakt.

1.9 Deeltjes detectoren

We gaan de verschillende deeltjes die gecreerd zijn tracken van de geladen deeltjes, zowel de richting als hun momentum. Dit wordt gedaan de hand van ionisatie. We doen ook aan calorimetrie wat een destructieve detectiemethode is. Ten laatste buiten de calorimeters worden de muonen gedetecteerd. De werking voor de verschillende detectoren gaat als volgt:

- Tracking detectoren: Een deeltje beweegt door een gebied met gas die de gasatomen ioniseert. In dit gas is een hoogspanningsveld aanwezig zodat de geladen atomen zullen driften richting de anode of kathode en zo een signaal bekomen. Door een nauw grid aan anodes en kathodes aan te leggen kan dit heel nauwkeurig gemeten worden. Dit kan ook met een halfgeleider en krijg je elektron-gat paren in plaats van electron-ion paren.

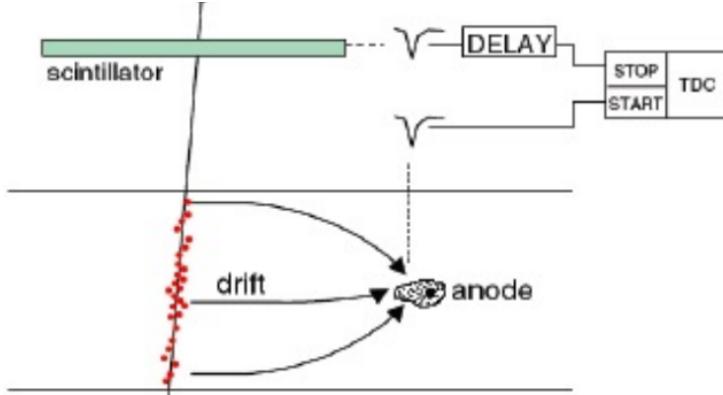


Figure 5: Tracking detector

- Calorimeter detectoren: Dit is meestal een kristal waar de energie van de deeltjes meestal omgezet worden in zichtbaar licht die kan gedetecteerd worden.

1.10 Event reconstructie

Als voorbeeld de top pair productie om aan te tonen dat de detectie niet zo makkelijk is als het lijkt.

$$\begin{aligned}
 pp &\rightarrow t\bar{t}X \\
 t &\rightarrow W^+ b \rightarrow \mu^+ \nu b \\
 \bar{t} &\rightarrow W^- b\bar{b} \rightarrow q\bar{q}'\bar{b} \\
 pp &\rightarrow b\bar{b}q\bar{q}'\nu\mu
 \end{aligned} \tag{10}$$

De X in deze productie zijn de overige 100 tot 1000den deeltjes die geproduceerd kunnen worden door 1 botsing. Hieruit moeten de correcte deeltjes uit gedetecteerd worden wat natuurlijk niet eenvoudig is. Hierboven hebben we een groot probleem bij het onderzoeken van de top quark dat deze een heel korte levensduur heeft. Uiteindelijk krijgen we hieruit 4 “jets” van de quarks, een μ en een deel missende energie waarnemen. Om de top quarks te reconstrueren gaan we proberen de b-jets proberen taggen. Door het gebruik van een hermetische detector zal het ook mogelijk zijn om de missende energie van de neutrino's te vinden. Dit kan natuurlijk enkel in de trasversale richting.

1.11 Cross sectie

De interactie rate per eenheid van tijd is gegeven door:

$$R_i = \sigma N_t \Phi_b \tag{11}$$

met σ de cross sectie, N_t het aantal targets in de beam sectie en Φ_b de beam flux. Kijken we nu bijvoorbeeld naar de protonen die door de detector tracken en kunnen in de elektromagnetische calorimeter botsen met andere deeltjes en verloren gaan. Dit kan gezien worden in de volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned} dI(z) &= -dR_i = -\sigma\Phi_b(z)dN_t \\ &= -\sigma \frac{I(z)}{A} n_t A dz \\ \Rightarrow \frac{dI(z)}{I(z)} &= -\sigma n_t dz \\ \Rightarrow I(z) &= I_0 e^{-n_t \sigma z} \end{aligned} \tag{12}$$

Uit de exponent die we juist hebben berekent kunnen we de absorptie lengte bepalen: $L_{abs} = 1/(n_t \sigma)$. Voor protonen met energieën van een aantal TeV zullen een L_{abs} van ongeveer 10cm hebben in detectoren. De luminositeit \mathcal{L} is gegeven door:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{R_i}{\sigma} = \Phi_b N_t = \frac{N_b N_t}{A} \\ [\mathcal{L}] &= [L^{-2} T^{-1}] \end{aligned} \tag{13}$$

Het handige aan \mathcal{L} is dat deze grootheid gekend is omdat we het aantal target deeltjes in de bundel en de flux van de bundel onder controle hebben. Dit samen met het aantal uitgaande deeltjes kunnen we zien wat de werkzame doorsnede is. De geïntegreerde luminositeit wordt ook veel gebruikt: $\int \mathcal{L} dt$.

1.12 Differentiële cross sectie

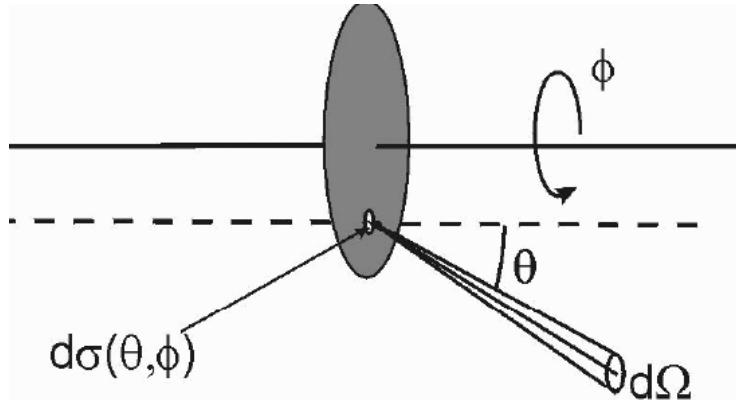


Figure 6: Differentiële cross sectie

De differentiële cross sectie is niets meer dan de cross sectie in functie van

de ruimtehoek.

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \\ 4\pi &= \int d\Omega \\ d\Omega &= d\phi d\cos\theta = d\phi \sin\theta d\theta\end{aligned}\tag{14}$$

Een botsing zal normaal de azimutale symmetrie behouden en krijgen we:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\cos\theta}\tag{15}$$

en is de ϕ afhankelijkheid irrelevant. Dit is niet het geval voor gepolariseerde bundels.

1.13 Hoe meten we dit alles

Uit de experimenten hebben we het aantal deeltjes onder een bepaalde hoek θ gedetecteerd over de breedte van de hoek waaronder we waarnemen omdat deze eindig is. Deze willen we zo klein mogelijk. Uit al deze detecties moeten de deeltjes waarin we geïnteresseerd zijn, afzondert worden van de background deeltjes. Dit wordt weergegeven in de onderstaande vergelijkingen.

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{\Delta N(\cos\theta)}{\Delta \cos\theta \cdot \mathcal{L}} \\ &= \frac{\Delta N_{selected}(\cos\theta) - \Delta N_{background}^{expected}(\cos\theta)}{\mathcal{L} \cdot \Delta \cos\theta \cdot \epsilon(\cos\theta)}\end{aligned}\tag{16}$$

met ϵ de selectie efficiëntie. ϵ en $\Delta N_{background}^{expected}$ zullen bepaald worden in Monte Carlo berekeningen. Hierbij is het heel belangrijk om de trade-off tussen efficiëntie en background te optimaliseren.

2 Quantum getallen

Er zijn verschillende quantum getallen die gebruikt worden. Deze kunnen opgesplitst worden in 2 groepen:

- Additieve quantum getallen:
 - baryon getal
 - elektrische lading
 - kleur
 - lepton getal
 - ...

Deze komen overeen met spontane transformaties

- Multiplicatieve kwantum getallen
 - pariteit
 - C-pariteit
 - ...

Komen overeen met discrete transformaties

2.1 Elektrische lading

We weten dat de elektrische lading behouden is.

$$\sum_{init} Q_i \sum_{final} Q_i \quad (17)$$

Dit wil zeggen dat de lichtste drager van de lading stabiel zal moeten zijn. Met een levensduur τ_e van het elektron groter dan $6.6 \cdot 10^{28}$ yr (90% CL) is dit ook het geval.

De antideeltjes hebben tegengestelde lading.

$$|Q_{e^+} + Q_{e^-}|/e < 4 \cdot 10^{-8} \quad (18)$$

2.2 Lepton getal

Het lepton getal \mathcal{L} is +1 voor de e^- , μ^- , τ^- en de neutrino's en -1 voor e^+ , μ^+ , τ^+ en de antineutrino's. Voor al de andere deeltjes is het lepton getal 0. Voor zover we weten is het lepton getal voor elke generatie behouden met een uitzondering van de neutrino oscillaties die dit niet behouden.

De som van de lepton getallen $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\mu + \mathcal{L}_\tau$ moet altijd behouden worden. Dit wil zeggen dat het lichtste neutrino moet stabiel zijn. Ergens weten we dat het lepton getal niet helemaal behouden kan zijn. Dit weten we zeker voor het baryon getal.

2.3 Baryon getal

Het baryon getal \mathcal{B} is +1 voor al de baryonen, -1 voor al de anti-baryonen en 0 voor de rest. In alles wat we ooit hebben gezien is het baryon getal behouden. Dit zegt ons terug dat het lichtste baryon, het proton, stabiel moet zijn. Met een levensduur τ_p van meer dan $2.1 \cdot 10^{29}$ yr (90% CL) is dat natuurlijk stabiel. In de theorieën waar \mathcal{B} niet behouden wordt, wordt \mathcal{M} ook niet behouden. Maar wat er wel zou behouden worden worden is $\mathcal{B} - \mathcal{L}$. Achter het behoud van deze 2 quantum getallen zit geen ijk principe. Dit zijn puur experimentele vaststellingen. We weten dat deze niet helemaal behouden kunnen worden als we denken aan de big bang. Hier ontstaat het universum uit pure energie. Deze splitst op in deeltje-antideeltje paren. M.a.w. moet er bij de big bang even veel

materie als anti-materie gecreerd zijn. Vandaag de dag nemen we deze anti-materie niet meer waar dus moet deze toch ergens verdwenen zijn.

De baryonen zijn opgesteld uit quarks en antiquarks. Dit geeft ons de nieuwe baryon getallen:

- $\mathcal{B} = +\frac{1}{3}$ voor quarks
- $\mathcal{B} = -\frac{1}{3}$ voor antiquarks
- $\mathcal{B} = 0$ voor de rest

2.4 Impuls moment

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (19)$$

Wat deze intrinsieke spin nu juist betekent hangt af van de omstandigheden. We weten wel dat het totaal angulair moment behouden is. De fundamentele reden hiervoor is dat alles wat we zien en alle theorieën die we uitschrijven invariant zijn voor rotatie in de ruimte. Het behoud van energie komt uit de tijd invariatie en het behoud van moment uit de de ruimtelijke invariantie.

$$\begin{aligned} \vec{L} + \vec{S} &= \vec{J} \\ |l - s| \leq j &\leq |l + s| \\ j_3 &= m = l_3 + m_3 \end{aligned} \quad (20)$$

De angulaire moment operator is gegeven door:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{L}}^2 &= l(l+1)\hbar^2 \\ \hat{L}_3 &= l_3\hbar \end{aligned} \quad (21)$$

Hierbij zijn de quantum getallen gegeven door $l = 0, 1, 2, \dots$ en $-l \leq l_3 \leq l$. De angulaire momenta zullen veel samengesteld worden. Al de mogelijke combinaties van composities en decomposities worden gedaan aan de hand van de Cleksch-Gordan coëfficiënten. Die de kans tussen de verschillende quantum getallen zal weergeven. Zie hiervoor de oefeninglessen om goed mee te leren werken. De algebra van de Cleksch-Gordan coëfficiënten komt uit de symmetriegroep $O(3)$, die isometrisch is met $SU(2)$.

2.5 Strong isospin

We zien dat de Lagrangiaan van de sterke en zwakke interactie ijk invariant met als groep $SU(2)$. Dit betekent dat het proton en neutron zijn voor de sterke wisselwerking identiek. Dit komt neer op het feit dat voor de sterke wisselwerking de up en down quark identiek zijn. Dit is niets anders dan het analogon voor een electron met spin up $|e^\uparrow\rangle$ en spin down $|e^\downarrow\rangle$. Het proton en neutron vormen samen een sterk isospin doublet, de nucleonen:

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (22)$$

Een aantal verschillende sterke isospin multipletten zijn weergegeven in tabel 3. Hieruit lijkt dit een goed kwantum getal te zijn, omdat binnen een multiplet de deeltjes op een kleine afwijking na dezelfde massa te hebben. Het verschil in massa's binnen een multiplet komen van andere interacties, vooral de elektromagnetische. Omdat de massa's niet perfect overeen komen wil dit zeggen dat dit geen perfect kwantum getal zal zijn.

Table 3: Strong isospin

	I	I_3	\mathcal{B}	S	Q	Mass (MeV)
p	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1	0	+1	938
n	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	940
π^+	1	+1	0	0	+1	140
π^0	1	0	0	0	0	135
π^-	1	-1	0	0	-1	140
η	0	0	0	0	0	547
Ξ^0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-2	-2	0	1315
Ξ^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-2	-1	1325

Naast de up en down quarks zijn er natuurlijk ook andere quarks ontdekt. Om deze toe te voegen is er een nieuw kwantumgetal toegevoegd, de hyperlading.

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2}, \quad Y = \mathcal{B} + S \quad (23)$$

Wetenschappers hadden de relatie tussen de sterke interactie en de elektromagnetische interactie ingezien. Later zijn er naast de lading, het baryon getal en de strangeness nog andere kwantum getallen voor de quarks gevonden. Deze zijn:

Strangeness	$S(s) = -1$	$S(\bar{s}) = +1$	$S(\dots) = 0$
charm	$C(c) = +1$	$C(\bar{c}) = -1$	$C(\dots) = 0$
Bottomness	$B(b) = -1$	$B(\bar{b}) = +1$	$B(\dots) = 0$
Topness	$T(t) = +1$	$T(\bar{t}) = -1$	$T(\dots) = 0$

en de hyperladig wordt uitgebreid tot:

$$Y = \mathcal{B} + S + C + B + T \quad (24)$$

Hier zitten de U en D niet in omdat deze verwerkt zijn in I_3 .

De sterke isospin zal behouden worden in de sterke interactie, I_3 is door zijn connectie met de lading Q behouden in elektromagnetische interactie. Deze zijn niet behouden in de zwakke interactie.

2.6 Multiplicatieve kwantum getallen

We kennen er 3:

- P pariteit
- C C pariteit
- T T pariteit

Het “CPT-theorema” is niets anders dan: Elke Lorentz invariante lokale kwantum velden theorie invariant is onder CPT. De veronderstellingen dat hieruit volgen lijken zeer logisch.

- Lorentz invariant
- Lokaliteit (geen interactie op afstand)
- Causaliteit (oorzaak voor effect)
- Het vacuum is de laagste energie toestand
- vlakke ruimte-tijd
- punt deeltjes

Als gevolg hebben we

$$\begin{aligned} m_X &\equiv m_{\bar{X}} \\ \Gamma_X &\equiv \Gamma_{\bar{X}} \end{aligned} \tag{25}$$

Dit is bewezen in de experimenten: $|m_p - m_{\bar{p}}| < 7 \cdot 10^{-10}$ (90% CL).

2.7 Pariteit

Spiegelen door de oorsprong.

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow -\vec{r} \\ \vec{p} &\rightarrow -\vec{p} \\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &\rightarrow -\vec{r} \times -\vec{p} = \vec{L} \end{aligned} \tag{26}$$

Hier kan je duidelijk het verschil zien tussen een vector, \vec{r} en \vec{p} , en een pseudo (axiale) vector, \vec{L} . Waarbij de vector van teken zal veranderen en de pseudo vector niet. Indien we 2 maal spiegelen door de oorsprong krijgen we de identiteit operator $P^2 = 1$ en kunnen we hieruit de eigenwaarden van P bepalen, ± 1 . $+1$ voor pseudo vectoren en -1 voor vectoren. De pariteit heeft de volgende eigenschappen:

De reden waarom een foton een negatieve pariteit heeft komt uit de Maxwell vergelijkingen. Je kan dit inzien als je het elektrisch veld tussen een electron en positron bekijkt. Als deze door de oorsprong worden gespiegeld zal het teken van het elektromagnetische veld ook omdraaien.

H-atoom	$(-1)^l$
γ	-1 uit Maxwell vgl.
$f\bar{f}, l=0$	-1 uit Dirac vgl.
f	+1 conventie
\bar{f}	-1 conventie
$f\bar{f}, l$	$(-1)(-1)^l = (-1)^{l+1}$
$b\bar{b}, l=0$	+1
$b\bar{b}, l$	$(-1)^l$

2.8 C-pariteit

Dit is het uitwisselen van de deeltjes met antideeltjes en omgekeerd. De eigen-toestanden van de C operator zijn enkel de neutrale deeltjes (lading 0). Als voorbeeld, de C operator inwerkend op een proton geeft een antiproton, wat niet dezelfde deeltjes zijn. De eigenschappen van de C operator zijn:

γ	-1
$n\gamma$	$(-1)^n$
$b\bar{b}$	$(-1)^l$
$b\bar{b}$	$(-1)^{l+s}$
$f\bar{f}$	$(-1)^{l+s}$

Bij het uitvoeren van de C operator op een boson-antiboson systeem en een fermion-antifermion systeem moeten we even nadenken. De spin-uitwisseling in 2 bosonen voor bijvoorbeeld π^0 boson zijn deeltjes die spinloos zijn, kunnen we zien dat er niets is verandert aan de spin golffuncties en is het dus mogelijk dat de pariteit enkel afhangt van l .

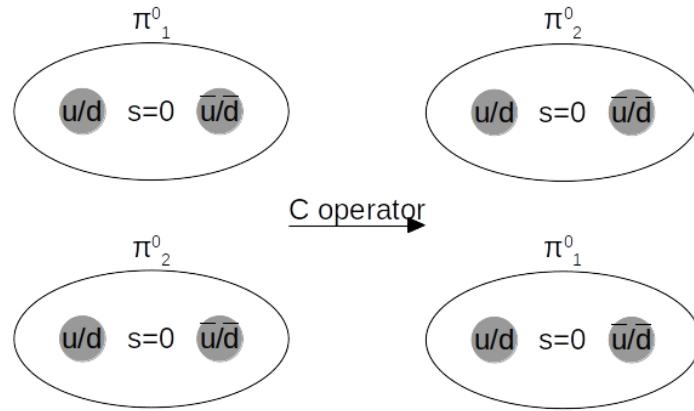


Figure 7: π^0 onder C operatie

Daarentegen kunnen de fermionen geen spin nul hebben. Als we kijken naar

de verschillende combinaties die 2 fermionen kunnen ondergaan (figuur 8), zien we dat de spin golffunctie symmetrisch is voor S oneven en antisymmetrisch voor S even. Dit geeft ons voor de spin verandering van 2 fermionen $(-1)^{s+1}$.

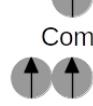
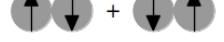
Combinaties	Totale spin S	Z component S_z
	1	+1
 + 	1	0
 - 	0	0
	1	-1

Figure 8: Fermion combinaties

2.9 Pion pariteit

Historisch gezien was het niet makkelijk om deeltjes uit elkaar te houden.

$$\begin{aligned} \mu^\pm &\simeq 105\text{MeV} \\ \pi^\pm &\simeq 140\text{MeV} \\ \pi^0 &\simeq 135\text{MeV} \end{aligned} \tag{27}$$

Deze deeltjes zijn ontdekt in kosmische straling. Het verschil tussen het muon en de pions is dat het muon een lepton is en dus enkel elektromagnetisch interacteert. Bij het onderzoek gaven de muonen in de gaskamer een mooie lijn van geïoniseerd gas en de pionen een knal. In de tijd kon geen onderscheid gemaakt worden tussen de massa van de 2 deeltjes. Wat wel makkelijk te herkennen was waren π^0 die vervallen in 2 fotonen. Door de energie van de 2 fotonen samen te tellen krijg je perfect een piek bij 135MeV. Omdat γ een spin 1 deeltje is en dat het pion vervalt in 2 γ 's weten we dat π^0 een boson moet zijn. Het moet een heeltallige spin hebben om te kunnen vervallen in 2 γ 's. Of er een relatie was tussen π^\pm en π^0 en dus ook een verschil tussen μ en π^\pm heeft een lange tijd geduurd. De spin van π^0 is bepaalt aan de hand van de vervallen $\gamma + \gamma$ en $e^+ + e^- + e^+ + e^-$ die uitgezet zijn in Dahling plots **dit is niet correct geschreven!**. Zo bekomen we experimenteel dat de totale spin voor de pionen $J = 0$ is.

Het bepalen van de pariteit van pionen kan gedaan worden aan de hand van het volgende experiment:

$$\pi^- + d \rightarrow n + n \tag{28}$$

Een π^- bundel kan bekomen worden door een protonenbundel in te sturen op een blok materie en door een spectroscoop de π^- deeltjes af te zonderen van de rest.

Deze laag energetische pionen verliezen in D_2O energie en kunnen ingevangen worden in deuterium. Deze hoog aangeslagen toestanden zenden X-stralen uit tot ze in de grondtoestand terug vallen.

$$s_d = 1; s_\pi = 0 \Rightarrow J = 1 \quad (29)$$

De reden waarom $L = 0$ is in dit geval is omdat het samengesteld systeem zich in de grondtoestand bevindt (S-state). De spin van het deuterium kan eigenlijk 0 of 1 zijn. De reden waarom het onmogelijk is om een $s_d = 0$ te hebben kunnen we vinden door de symmetrie van de golffunctie van het deuterium ($D = p + n$) te bekijken (behoud angulair moment).

Table 4: Symmetrie van deuterium golffunctie

$\psi_f \sim$	$\phi(r)$	$t(s)$	$\Psi(I)$
-	+	+	-
-	+	-	+

De golffunctie van het deuteron moet negatief zijn voor de omwisseling van het proton en neutron. Omdat we $L = 0$ hebben is het ruimtelijke orbitaal altijd symmetrisch. De spin kan zowel symmetrisch als antisymmetrisch zijn met de isospin het tegengestelde omdat anders de antisymmetrie van de symmetrie niet correct is. De verschillende spin en isospin op mengingen zijn gegeven door:

Table 5: Multipletten van deuterium

spin multiplet	isospin multiplet
$\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$	$np - pn$
$\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$	$nn, pp, np + pn$

Experimenteel zien we dat de nn en pp niet bestaan. Enkel het isospin singlet bestaat en s_d moet dus 1 zijn.

Nu we weten wat de spin is van de begin toestanden kunnen we dat ook doen voor de eind toestanden. De spin van neutronen is $1/2$ en hebben we dus 2 mogelijkheden voor de totale spin van 0 of 1. De symmetrie van het neutron-neutron paar is gegeven door $(-1)^{S+1}$, wat hetzelfde is als in tabel 4 voor het deuterium geval. We weten ook dat als we de 2 neutronen uitwisselen met elkaar dan weten we dat de volledige symmetrie van de golffunctie negatief moet zijn $\Rightarrow (-1)^{L+S+1} = -1$ (Pauli principe). Dit wil zeggen dat dat $L + S$ voor de neutronen even moet zijn. Er zijn 3 mogelijkheden om $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ van de neutronen gelijk aan 1 te krijgen.

- $L = 0, S = 1$
- $L = 1, S = 0, 1$
- $L = 2, S = 1$

Hiervan is uiteindelijk maar 1 combinatie waar $L + S$ even is: $L = 1, S = 1$, al de andere zijn oneven. Met andere woorden moeten de 2 neutronen hun spin parallel staan en in een P-golf rond elkaar bewegen. De uiteindelijke toestand van de neutronen kunnen neergeschreven worden als 3P_1 met een pariteit $(-1)^L = -1$. Nu kan je afvragen wat het verschil is tussen deze symmetrie en de eerder gegeven symmetrie $(-1)^{L+S+1}$. $(-1)^{L+S+1}$ is de symmetrie van de totale golffunctie van het neutron-neutron paar (altijd antisymmetrisch voor fermionen) en $(-1)^L$ is de symmetrie onder spiegeling rond de oorsprong. Omdat protonen en neutronen dezelfde intrinsieke pariteit hebben hangt de pariteit van deuterium enkel af van het baanmoment tussen p en n . Omdat $L_d = 0$ hebben we uiteindelijk dat $P_d = (-1)^0 = +1$. Met al deze gegevens kunnen we nu de pariteit van π^- bepalen. Uit behoud van pariteit kunnen we halen dat de pariteit van $\pi^- + d$ gelijk moet zijn aan -1 . Vul dit allemaal in en dan vinden we:

$$\begin{aligned} P_\pi \cdot P_d \cdot (-1)^{L_{\pi+d}} &\rightarrow p_\pi \cdot (+1) \cdot (+1) = -1 \\ \Rightarrow P_\pi &= -1 \end{aligned} \quad (30)$$

2.10 G -pariteit

De reden dat dit is ingevoerd is omdat de C operator enkel een goed kwantum getal voor $Q = 0$. Een uitbreiding van de C operator is de G operator die de tekortkomingen van de C operator zou moeten opvangen.

$$G = CR = C \exp(i\pi I_2) \quad (31)$$

De R operator is een rotatie over 180° over de isospin y -as. In figuur 9 kan je zien hoe deze operator zal inwerken op een π^+ .

Kijken we naar de eigenstaenden van de R operator zien we voor de ruimtelijke sferische golffunctie (rotatie 180° rond y -as, $\exp(i\pi L_y)$):

$$Y_l^0(\theta, \phi) \rightarrow Y_l^0(\pi - \theta, \pi - \phi) = (-1)^l Y_l^0 \quad (32)$$

Het equivalent kan gedaan worden voor de isospin golffunctie $I_3 = 0$:

$$\chi(I, 0) \rightarrow (-1)^I \chi(I, 0) \quad (33)$$

De eigenwaarde voor de R operator is dus $(-1)^I$. De reden waarom de z component van de isospin 0 mag genomen worden is omdat deze toch behouden wordt door de sterke wisselwerking en dus geen verschil zou maken als we die anders kiezen. Voegen we dit samen met dit voor de C operator krijgen we de eigenwaarde van de G operator:

$$G |\psi\rangle = (-1)^{l+s+I} |\psi\rangle \quad (34)$$

Terug voor π^0 hebben we:

- $C = +1$ door het verval $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ waarbij de pariteit van 2 gelijke deeltjes altijd positief zal zijn

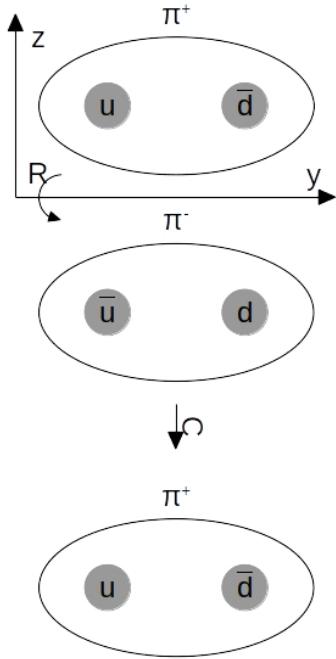


Figure 9: G operator inwerkend op een pion

- $R = (-1)^1 = -1$

Dit samen geeft $G|\pi\rangle = -|\pi\rangle$. Dit geld voor alle pionen omdat de sterke lading niet naar de lading kijkt. Hieruit kunnen we ook halen dat $G|n\pi\rangle = (-1)^n|n\pi\rangle$. Een mooi voorbeeld waar deze G operator te pas komt is bij de het verschil tussen $\rho(780\text{MeV})$ en $\omega(780\text{MeV})$. Deze hebben beide een immense verval breedte en kunnen zou dus niet uit elkaar gehouden worden. Het enige verschil is dat $I_\rho = 1$ en $I_\omega = 0$ met respectievelijk $G_\rho = +1$ en $G_\omega = -1$. Zo zien we dat ρ zal vervallen naar 2 pionen en ω naar 3. Zo is het mogelijk om deze bij een experiment uit elkaar te houden.

Meestal zullen mesonen als volgt voorgesteld worden: $I^G(J^{PC})$. Belangrijk om te weten is dat de G pariteit enkel behouden wordt door de sterke wisselwerking.

mogelijke examenvraag: aantal mesonen gegeven, leidt de isospin, spin, pariteit ($= (-1)^{L+1}$ extra - teken door tegengestelde intrinsieke pariteit)... af uit de toestand

3 Feynman diagrammen, processen en correcties

3.1 Schrödinger en co

In de klassieke mechanica hebben we:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + V = E \quad (35)$$

of voor een vrij deeltje:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = E \quad (36)$$

Overgaan naar kwantummechanica geeft:

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow \frac{\vec{\nabla}}{i} \\ E &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi &= i\frac{\partial\psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (37)$$

Relativiteit toevoegen geeft $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ of in invariante notatie $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$. Vervangen we dit in vergelijking (37) krijgen we de Klein-Gordon vergelijkingen.

$$-\partial^\mu\partial_\mu\psi - m^2\psi = 0 \quad (38)$$

Deze zijn door Schrödinger opgesteld voor dat hij de Schrödinger vergelijkingen heeft opgesteld. Dit omdat eerst geprobeerd is de vergelijkingen relativistisch op te lossen maar dit wou niet lukken en zijn dan eerst klassiek opgelost. Het probleem bij de Klein-Gordon vergelijkingen is dat $|\psi|^2$ geen probabiliteit meer is a.k.a deze is niet positief definit. De reden hiervoor is de tweede afgeleide naar de tijd. Dit komt er fysisch op neer dat deeltjes kunnen gecreëerd en geannihileerd kunnen worden. Schrijven we de Klein-Gordon vergelijking eenvoudiger:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2\psi - m^2\psi \quad (39)$$

vermenigvuldig dit met de canonische ψ^* en trek er het canonische toegevoegde van af.

$$\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} = \psi^*(\vec{\nabla}^2\psi - m^2\psi) - \psi(\vec{\nabla}^2\psi^* - m^2\psi^*) \quad (40)$$

Dit kan herschreven worden als volgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \quad (41)$$

Zo krijgen we iets dat afgeleid is naar de tijd dat moet gelijk zijn aan iets afgeleid naar de ruimte. Dit kan niets anders dan een continuïteit vergelijking.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \rho &= i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Voor een vrij deeltje (plane wave) is de golffunctie:

$$\psi(\vec{x}, t) = N e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \quad (43)$$

met N de normalisatieconstante. Vul dit in ρ in en krijgen we:

$$\begin{aligned} \rho &= 2|N|^2 E \\ E &= \pm \sqrt{p^2 + m^2} \end{aligned} \quad (44)$$

Belangrijk hier is dat E niet constant is en dus ook de densiteit aan deeltjes is niet constant. De E in de relativiteit komt van de Lorentz contractie. Naarmate de energie toeneemt zal door de normalisatie van de golfvergelijking het volume kleiner worden.

3.2 Dirac

Dirac wil de kwantummechanica en relativiteit toch samenvoegen. Hij zoekt naar een vergelijking die eerste orde is in t .

$$\hat{E}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m)\psi \quad (45)$$

En hij eist dat ψ voldoet aan de Klein-Gordon vergelijkingen. Zo gaan de niet te interpreteren densiteiten ρ weg. De enige manier om dit op te lossen is wanneer $\vec{\alpha}$ en β 4×4 matrices zijn. Dit omdat er aan anti-commutatie relaties zal moeten voldaan worden, wat niet kan met getallen. Dit geeft mee dat ψ 4 componenten zal hebben, “Dirac spinor”.

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

Nu is het mogelijk om de Dirac vergelijking (vergelijking (45)) herschreven worden in zijn covariante vorm:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (49)$$

met γ de eerder gedefineerde 4×4 matrices genormeerd naar de lichtsnelheid.

3.3 Spin

Het probleem dat Dirac vaststelt is dat het angulaire momentum $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ niet zal behouden worden in de relativistische kwantummechanica maar wel in de klassieke kwantummechanica.

Table 6: caption

$\hat{H}_{SE} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$	$[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = 0$	L conserved
$\hat{H}_D = \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m$	$[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$	L not conserved

In plaats van op te geven gaat hij kijken naar

$$\hat{S}_i \equiv \frac{1}{2} \sum_i \hat{\vec{S}}_i \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (50)$$

waarbij bewezen kan worden dat $[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = +i\vec{\alpha} \times \vec{p}$ is.

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = [\vec{\alpha} \times \vec{p}, \hat{\vec{S}}] + m[\beta, \hat{\vec{S}}] \quad (51)$$

De spin zal niet interageren met β en de commutatierelatie nul.

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = [\vec{\alpha} \times \vec{p}, \hat{\vec{S}}] \quad (52)$$

Aan de hand van Lie algebra zien we direct dat deze commutatie neerkomt op

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}] = i\vec{\alpha} \times \vec{p} \quad (53)$$

Voegen we dit allemaal samen kunnen we zien dat het totaal angulair momentum we zal behouden worden.

$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{J}}] = [\hat{H}_D, \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}] = 0 \quad (54)$$

Uit de Dirac vergelijkingen kunnen we direct halen dat de spin van deze deeltjes $\frac{1}{2}$ zijn en dat de Dirac deeltjes dus fermionen zijn.

Vullen we in vergelijking (49) de golffunctie in voor het vrije deeltje in:

$$\psi(\vec{x}, t) = (u(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}) \quad (55)$$

dan krijgen we met de vereenvoudigde dirac vergelijking

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)u = 0 \quad (56)$$

4 oplossingen:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + i p_y}{E+m} \end{pmatrix}, u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_x - i p_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix},, u^{(3)}, u^{(4)} \quad (57)$$

en hun energie:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(u^{(2)}) : E &= +|\sqrt{p^2 + m^2}| \\ u^{(3)}(u^{(4)}) : E &= -|\sqrt{p^2 + m^2}| \end{aligned} \quad (58)$$

De negatieve energieën kunnen geïnterpreteerd worden als de

- negatieve energie deeltje terug gaande in de tijd
- positieve energie anti-deeltje voorwaarts in de tijd

Na verder inzien lijkt het me niet nuttig om de dirac vergelijkingen verder uit te schrijven hier. Deze staan perfect uitgewerkt in Thomson. Voor dit deel schrijf ik enkel belangrijke mededelingen neer uit de les.

3.4 Spin toestanden

De heliciteit is niet triviaal voor een bewegent deeltje. Om dit te definiëren maken we gebruik van de heliciteit:

$$h \equiv \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p} \quad (59)$$

We doen dit omdat de z-as natuurlijk niet Lorentz invariant is. Door de spin te projecteren op het momentum van het deeltje wat natuurlijk wel invariant is wordt dit probleem opgelost. De deeltjes hebben dus zowel een spin als heliciteit met de heliciteit enerzijds parallel (rechts handig) of antiparallel (links handig) aan het momentum van het deeltje. Belangrijk om te weten is dat heliciteit nog steeds niet Lorentz invariant is.

3.5 Intrinsieke pariteit

Ik verwijst hier terug naar de Thomson p. 108. De uitkomsten voor de pariteit operator

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= -z \\ \psi' &= \hat{P}\psi \\ \hat{P}\psi' &= \psi \end{aligned} \quad (60)$$

zijn gegeven door:

$$\begin{aligned} i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi &= -i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ i\gamma^1 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\psi' &= -i\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t} \end{aligned} \quad (61)$$

Hieruit kunnen we halen dat $\gamma^0 \hat{P} \propto I$ en dat $\hat{P}^2 = I$. Dit wetende bekomen we dat $\hat{P} = \pm \gamma^0$. We hebben dus keuze welke operator we gebruiken. Conventioneel kiezen we $\hat{P} = +\gamma^0$ zodat

$$\begin{aligned} \hat{P}u_{1,2} &= +u_{1,2} \\ \hat{P}v_{1,2} &= -v_{1,2} \end{aligned} \quad (62)$$

Ryckbosch legt hier vooral de nadruk op de fysische concepten en niet op de wiskunde.

3.6 Spinoren

De adjunct spinor is gegeven door

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad -\psi_4^*) \quad (63)$$

$\bar{\psi}\psi$ is Lorentz invariant de stroom is gegeven door $j^\mu = \bar{\psi}^\mu \psi$ en de densiteit $\rho = \psi^\dagger \psi = 2E$.

3.7 Fermi's gouden regel

Nemen we een hamiltoniaan $\hat{H}_0 \phi_k = E_k \phi_k$ en laat deze perturberen met de interactie hamiltoniaan $\hat{H}'(\vec{x}, t)$ dan krijgen we volgens de gouden regel dat de Schrödinger vergelijking aanpast naar

$$i \frac{d\psi}{dt} = [\hat{H}_0 + \hat{H}'(\vec{x}, t)]\psi \quad (64)$$

Het is mogelijk om hieruit te bewijzen (zie Thomson p. 51 en verder, Interesseerd Ryckbosch minder) dat de breedte van toestand i naar toestand f gegeven is door

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i) \quad (65)$$

Hierbij zijn

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \langle f | \hat{H}' | i \rangle = \int \phi_f^*(\vec{x}) \hat{H}' \phi_f(\vec{x}) d^3 \vec{x} \text{(Eerste orde s.r.)} \\ &= \langle f | \hat{H}' | i \rangle + \sum_{k \neq i} \frac{\langle f | \hat{H}' | k \rangle \langle k | \hat{H}' | i \rangle}{E_i - E_k} \text{(Tweede orde s.r.)} \end{aligned} \quad (66)$$

$$\rho(E_i) = \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i}$$

In deze cursus gaat het vooral over de tweede orde storingsrekening gaan, vanwege 1 intermediaire toestand.

3.8 Faseruimte

Uit de gouden regel van Fermi kunnen we halen dat elke kwantumtoestand in de impulsruimte een volume van $(2\pi)^3$ zal innemen (Heisenberg).

$$d^3\vec{x}d^3\vec{p} = (2\pi)^3 \quad (67)$$

Hierbij is $d^3\vec{x}$ het volume en kunnen we $d^3\vec{p}$ afleiden. Bij dit afleiden gaan we ervan uit dat deze isotroop is verdeelt.

$$dn = 4\pi p^2 dp \times \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (68)$$

Door het normeren van de golffuncties in vergelijking (66) zal in de werkzame doorsnede het volume van de ruimte geen rol meer spelen. De p^2dp zal ons vertellen hoe gemakkelijk een transitie zal gebeuren en is dus zeer belangrijk. Een voorbeeld hiervan is gegeven door het muon verval

$$\mu \rightarrow e + \nu_e + \bar{\nu}_e \quad (69)$$

Het muon heeft een energie van 105MeV en vervallen in 3 deeltjes. Er zijn dus 2 vrijheidsgraden (behoud energie en impuls), p_1 en p_2 . De breedte wordt dan

$$\begin{aligned} \Gamma &\sim \int p_1^2 p_2^2 dp_1 dp_2 \\ &\sim [E]^5 \\ &\Downarrow \\ \Gamma_\mu &\sim m_\mu^5 \end{aligned} \quad (70)$$

Daarintegen vervalt een top quark enkel naar 2 deeltjes en heeft dus maar 1 vrijheidsgraad p .

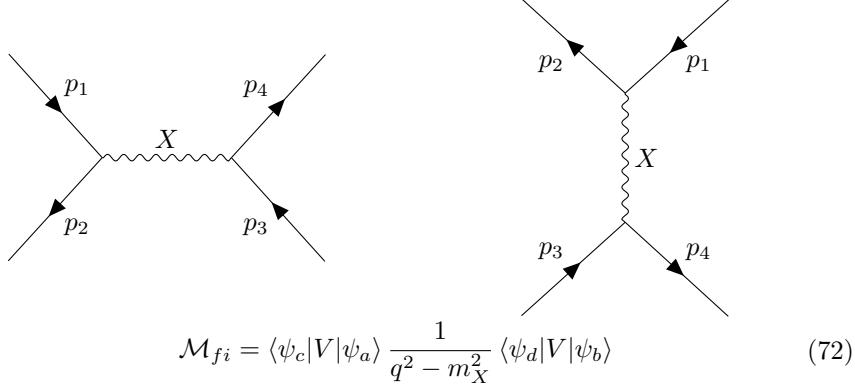
$$\begin{aligned} t &\rightarrow b + W \\ \gamma_t &\sim \int p^2 dp \\ &\sim m_t^3 \end{aligned} \quad (71)$$

De reden waarom we maar tot de 5de macht krijgen voor het muon en niet tot de 6de is omdat p_1 en p_2 van elkaar afhangen en een van de 2 integralen weg vallen.

Tot nu toe was alles niet relativistisch. Eens we overschakelen naar de relativistische equivalenten wordt alles veel moeilijker. Hier gaan we over op Lorentz invariante fase ruimte en alle problemen worden opgevangen in de normalisatie van de golffuncties. Meer hoeven we hier niet van te weten.

3.9 Feynman diagrammen

Een eenvoudig voorbeeld voor feynman diagrammen



De makkelijkste vorm van een vertex is als het een scalaire interactie is $\langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \propto g_a$. Bij de propagaotor zal er moeten gesommeerd worden over alle polarisatiestoestanden. De feynmanregels schrijf ik hier niet helemaal uit, ga hiervoor naar thomson p114 en verder.

3.10 QED

Hier wordt er enkel gebruik gemaakt van de elektromagnetische wisselwerking. Zie terug Thomson voor de regels. Het is belangrijk om te begrijpen dat de $\frac{1}{q^2}$ in de propagator van QED zal aangeven hoe gemakkelijk zal zijn om een foton van de ene naar de andere kant een impuls q zal meenemen.

3.11 Currents

De current density is niet meer dan $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ wat 4 vectoren zijn. Dit wordt ook wel een bi-linaire vorm genoemd. Omdat $\bar{\psi}$ en ψ elk bestaan uit 4 componenten bekomen we 16 mogelijke combinaties die we kunnen samennemen.

Table 7: current lineaire combinaties

interactie vorm	aantal componenten
$\bar{\psi} \psi$	scalar
$\bar{\psi} \gamma^5 \psi$	pseudoscalar
$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	vector
$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$	pseudovector
$\bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi$	tensor
	totaal
	16

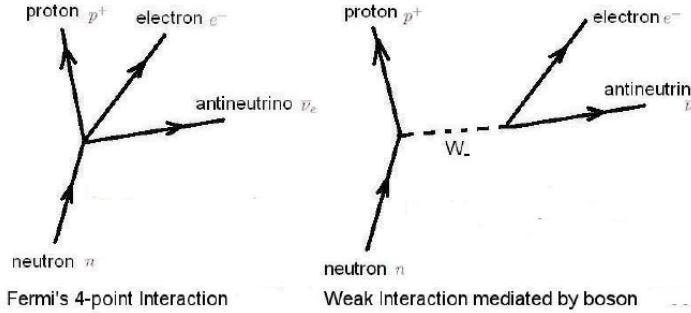


Figure 10: Feynman diagram van zwakke interactie

3.12 Zwakke interactie

Bij de zwakke interactie wordt er boson uitgewisseld. Eerder werd dit gezien als een puntinteractie. De relatie tussen de 2 is gegeven door

$$M_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\nu \gamma_\mu \psi_e \cdot \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n \quad (73)$$

Hiet komen we later in de cursus op terug.

3.13 Charged current

Bij het uitwisselen van een W^+ of W^- boson wordt er een hoeveelheid lading verplaatst tussen de verschillende deeltjes. Dit kan in principe enkel gebeuren binnen een generatie.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \\ \tau^- \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

Deze opleving tussen de verschillende generaties is beschreven door de CKM-matrix

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (75)$$

deze worden ook wel de flavour toestanden (d') en de massa toestanden(d) genoemd.

3.14 Pariteit schenden

Uit experimenten bleek dat het heilig boontje, de partiteit, niet behouden wordt bij de zwakke wisselwerking. Later is gezien dat de pariteit volledig zal schenden.

De nieuwe theorie die hier is ontwikkeld zegt dat in de operator van de zwakke wisselwerking zowel een vector gedeelte als pseudo-vector gedeelte zit, $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ die de links handige toestanden uit projecteert. Dit geeft de (V-A)-interactie

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\phi \quad (76)$$

De heliciteit en P_L hier zijn niet helemaal hetzelfde.

3.15 Neutrale current

Omdat we W^\pm hebben wil het zeggen dat we een triplet hebben en hebben we dus nog een boson zonder lading nodig, Z^0 . Deze zal de pariteit maar gedeeltelijk schenden.

3.16 Mathematical interlude: groups

Een groep is een set van operaties die moeten voldoen aan:

- inwendigheid: $R_i R_j$ is ook deel van de set
- identiteit: I bestaat met $R_i I = I R_i = R_I$
- inversie: R_I^{-1} moet bestaan met $R_I^{-1} R_i = R_i R_I^{-1} = I$
- associativiteit: $R_i(J_j R_k) = (R_i R_j) R_k$
- commutativiteit: $R_i R_j = R_j R_i$

Indien ze hier allemaal aan voldoen is dit een abelse groep. De meest gebruikte in de deeltjes fysica

Table 8: Meest gebruikte groepen

Groep		Matrices
$U(n)$	$n \times n$	unitair ($U^*U = 1$)
$SU(n)$	$n \times n$	unitair, determinant 1
$O(n)$	$n \times n$	orthogonaal ($OO = 1$)
$SO(n)$	$n \times n$	orthogonaal, determinant 1

De $SO(n)$ groep zijn de rotaties van de ruimte in n dimensies en $SU(2)$ is de spin van deeltjes wat homomorf is met $SO(2)$.

3.17 2D-rotatie $SO(2)$

Het roteren van de ruimte over een hoek ϕ is gegeven door:

$$\begin{aligned} R(\phi)\hat{e}_1 &= \hat{e}_1 \cos \phi + \hat{e}_2 \sin \phi \\ R(\phi)\hat{e}_2 &= -\hat{e}_1 \sin \phi + \hat{e}_2 \cos \phi \\ \text{of} \\ R(\phi)\hat{e}_i &= \hat{e}_j R(\phi)_i^j \\ R(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{77}$$

Laten we dit inwerken op een gewone vector $\vec{x} = \hat{e}_i x^i$ krijgen we:

$$\begin{aligned} \vec{x} \rightarrow \vec{x}' &\equiv R(\phi)\vec{x} = R(\phi)\hat{e}_i x^i = \hat{e}_j R(\phi)_i^j x^i \\ \vec{x}' &= \hat{e}_j x'^j \\ x'^j &= R(\phi)_i^j x^i \end{aligned} \tag{78}$$

De verschillende eigenschappen om een abelse groep te bekomen zijn makkelijk na te gaan.

Gaan we nog een stap verder, bekijken we de rotatie van infinitisimaal kleine hoeken.

$$R(d\phi) = 1 - id\phi J \tag{79}$$

met J onafhankelijk van $d\phi$. De reden voor de vorm van vergelijking (79) is door de kleine hoek benadering, cos gaat naar 1 en sin gaat naar de hoek zelf. Het bepalen van J kan snel gedaan worden: Draai de hoek ϕ infinitesimaal op:

$$R(\phi + d\phi) = R(\phi)R(d\phi) = R(\phi) - id\phi R(\phi)J \tag{80}$$

Of in taylor ontwikkeling:

$$R(\phi + d\phi) = R(\phi) + d\phi \frac{dR(\phi)}{d\phi} \tag{81}$$

Stel deze gelijk aan elkaar om een vergelijking voor $R(\phi)$ te bekomen.

$$\begin{aligned} \frac{dR(\phi)}{d\phi} &= -iR(\phi)J \\ \Rightarrow R(\phi) &= e^{-i\phi J} \end{aligned} \tag{82}$$

J is dus niets anders dan de generator van de $SO(2)$ groep (deze groep heeft er maar 1!). Het expliciet uitrekenen van J geeft

$$\begin{aligned} R(d\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & -d\phi \\ d\phi & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow J &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{83}$$

3.18 3D rotatie $SO(3)$

Deze worden in het algemeen voorgesteld in eulerhoeken α , β en γ . Deze rotaties commuteren niet en dit is dus geen abelse groep. Dit zal belangrijke gevolgen hebben. De matrix van deze rotatie is gegeven door

$$\begin{aligned} R_3(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_2(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \\ R_1(\psi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{84}$$

Wat we wel hebben is dat elke subgroep R_i isomorf is met $SO(2)$.

$$R_n(\psi) = e^{-i\psi J_n} \tag{85}$$

Dit geeft ons 3 generatoren voor de $SO(3)$ groep. Dit kan veralgemeend worden tot: $SU(n)$ heeft $n^2 - 1$ generatoren.

3.19 Non-abelse interacties

Enkel de elektromagnetische wisselwerking is Abels. Al de andere krachten zijn dit niet. De intermediare toestanden van deze niet Abelse interacties zullen zelf hun lading dragen. Hierdoor is het mogelijk dat deze aan zelf-interactie gaan doen.

De reden voor de korte dracht van de sterke en zwakke wisselwerking zijn niet hetzelfde. Bij de zwakke wisselwerking ligt dit aan de grote massa van het W en Z boson die snel vervallen. Bij de sterke wisselwerking is dit door de zelf-interactie tussen gluonen.

4 DIS, nucleon structuur, PDF's

4.1 Diep inelastische verstrooiing

Bij deze verstrooiing zal de kinetische energie van het lepton veel hoger zijn dan de massa van proton. Zo is het mogelijk om de inwendige structuur van het proton te gaan bekijken. De reden waarom we dit kunnen doen is omdat bij deze hoge energieën de golflengte van het foton veel kleiner zal zijn dan de grote van het proton. In dit geval werken we met een foton wat een groot voordeel is omdat we de vertices in dit diagram heel goed kunnen beschrijven en het lepton is een elementair deeltje. De enige onbekende in dit systeem is dus de inwendige structuur van het proton. De reden waarom het zo lang heeft geduurd voor we

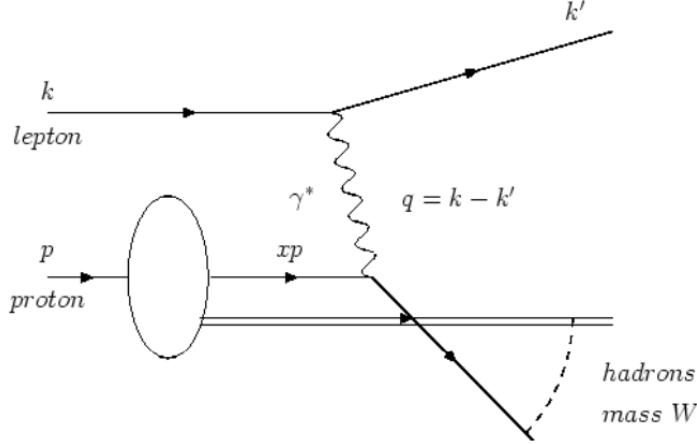


Figure 11: Diep inelastische verstrooing van een proton en een lepton

proton bundels zijn beginnen gebruiken is omdat niet alle massa in de valentie quarks van het proton zullen zitten wat het allemaal veel ingewikkelder maakt. Om met het LHC nauwkeurige metingen te kunnen uitvoeren moeten we veel meer statistiek (meer events) hebben.

De kinetiek van het proces schematisch weergegeven in figuur 11 kan makkelijk neergeschreven worden. Een parton (quark) van een proton met 4moment xp zal een energie q absorberen van het foton en een vrij deeltje worden.

$$\begin{aligned}
 \text{voor absorptie: } & (xp + q)^2 = m_{parton}^2 \approx 0 \\
 & = x^2 p^2 + 2xpq + q^2 \\
 & = 2xp + q^2 \\
 \Rightarrow x = -\frac{q^2}{2pq} & = \frac{Q^2}{2pq} \tag{86}
 \end{aligned}$$

Het enige deeltje dat in staat zal zijn om een foton met energie q te absorberen moet een impulsfractie x , zoals berekent in (86), hebben van het proton. Met andere woorden hebben we een filter op welke partonen we willen waarnemen. Deze fractie is Lorentz invariant en dimensieloos. Een andere Lorentz invariante grootheid in dit proces is $y = \frac{q \cdot p}{k \cdot p}$. Deze geeft de fractie van het electron dat gedragen wordt door het foton.

Verder uitgewerkt op een vast target hebben we als 4 momenta:

$$k = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} m_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k' = \begin{pmatrix} E' \\ 0 \\ E' \sin \theta \\ E' \cos \theta \end{pmatrix}, p_h = \begin{pmatrix} E_h \\ p_{xh} \\ p_{yh} \\ p_{zh} \end{pmatrix} \tag{87}$$

De aannames dat we hier hebben gedaan zijn:

- elektron beweegt langs de z-as
- door hoge energieën zien we het elektron als massaloos: $|E_e| = |p_{ze}|$
- het elektron verstrooit in het yz-vlak
- De hadronische finale toestand is de som van alle uitkomende deeltjes samen

De invariante massa van dit systeem is $W = \sqrt{E_H^2 - \vec{p}_h^2} \geq m_p$. Het is mogelijk maar zeldzaam dat de geabsorbeerde energie kan verdeeld worden onder alle andere partons om zo een proton uit te komen. Dit is een elastische verstrooiing en $W = m_p$. In alle andere gevallen breekt het parton los van de rest en hebben we een inelastische verstrooiing met $W > m_p$.

Dit systeem heeft 8 vrijheidsgraden (voor zowel k' als p_h 1 voor de energie en 3 voor de hoeken). Eén van deze vrijheidsgraden valt weg vanwege de massa van het elektron dat verwaarloost wordt, nog 4 vallen weg door het behoud van energie en impuls en ten laatste valt er nog 1 weg door azimutale symmetrie. Zo houden we uiteindelijk nog 2 vrijheidsgraden over. De 2 makkelijkst te kiezen variabelen zijn E' en θ . Het probleem hierbij is dat deze niet Lorentz invariant zijn. Deze variabelen kunnen wel omgevormd worden naar x en y die dit wel zijn.

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(k - k')^2 \approx 2EE'(1 - \cos\theta) \\ x &= -\frac{q^2}{2p \cdot q} = \frac{EE'(1 - \cos\theta)}{(E - E')m_p} \\ y &= -\frac{q \cdot p}{k \cdot p} = \frac{E - E'}{E} \end{aligned} \quad (88)$$

4.2 Experimenten

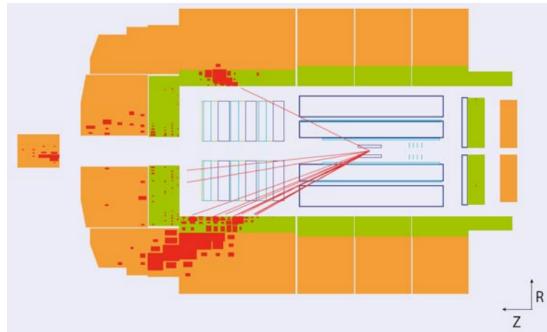


Figure 12: HERA experiment

De beste vaste target machines voor precisie zijn e^+e^- colliders. Op deze machines zijn ook voor het eerst de quarks gezien. In het CERN hadden ze eerst een proton collider gemaakt en dachten dat ze de boot gemist hebben. Wat ze gedaan hebben is de protonen op een target insturen en daar komen massas pionen uit. Als je deze lang genoeg meeneemt gaan die vervallen naar

muonen met een levensduur van de orde 10^{-8} s en zo verkrijgen we een muon bundel. Omdat dit tertiaire deeltjes zijn gaan de densiteit van de deeltjes veel lager liggen en zullen een vrij breed energiespectrum hebben. Hetzelfde kan gedaan worden voor neutrino's.

Er zijn ook colliders waar 2 deeltjes bundels op elkaar worden afgestuurd. Een voorbeeld van de waargenomen deeltjes is in figuur 12 gegeven van het HERA experiment. Hier is het duidelijk dat de elektronen van links zullen komen. Dit omdat de inkomende energie van het proton veel hoger is dan dat van het elektron en de uitgaande deeltjes van de collisie gaan wegens behoud van impuls via de linker kant de detector verlaten.

Als je zo een extravagant experiment zoals het LHC maakt is 1 van de eerste dingen die je doet het onderzoeken van het kinematisch bereik van dat experiment. In figuur 13 wordt Q^2 in functie van x geplot van verschillend colliders.

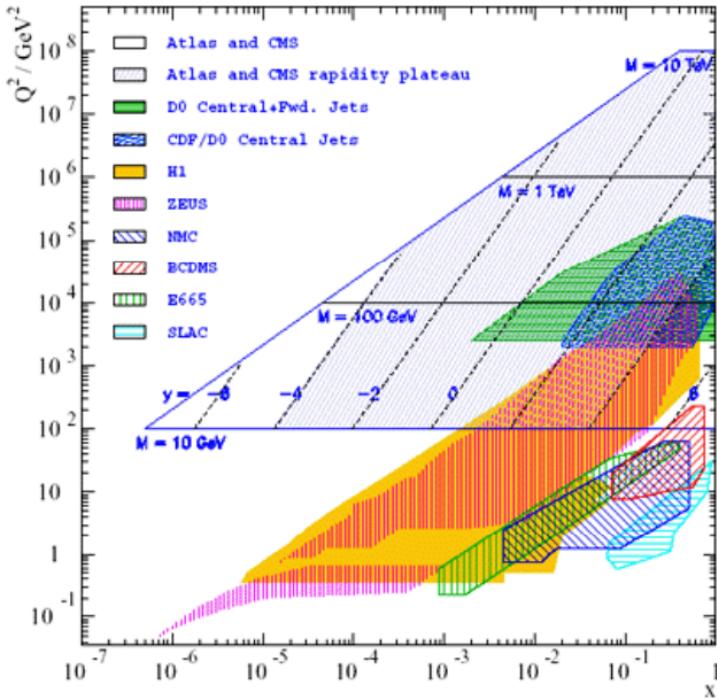


FIG. 1: Kinematic coverage of the DIS and collider $pp-p\bar{p}$ experiments. For pp and $p-\bar{p}$ colliders, the Bjorken x_1 and x_2 of the interacting quarks are related to the mass M of the Drell-Yan pair and its rapidity y as $x_{1,2} = M/\sqrt{S} \exp(\pm y)$ where S is the center of mass energy squared for the experiment.

Figure 13: Kinematisch bereik

4.3 Cross section

De werkzame doorsnede van deze DIS experimenten wordt gegeven door:

$$\frac{d^2\sigma^{e,N}}{dxdy} = \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4} [xy^2 F_1^{eN} + (1-y)F_2^{eN}] \quad (89)$$

met F_1 en F_2 de structuur functies. Het is logisch dat er in deze werkzame doorsnede een α^2 afhankelijkheid verwerkt zit omdat deze interactie verloopt via de elektromagnetische interactie en dus 2 vertices heeft die elk een α toedragen. En de waarschijnlijkheid dat we de impulsfractie x vinden van het parton wordt gegeven door die structuur functies F_1 en F_2 . Het zijn deze dus die alle informatie bevatten. We zien dat de structuur functies afhangen van zowel x als Q^2 , $F_i(x, Q^2)$. Zo weten we direct dat dit geen puntdeeltjes kunnen zijn omdat we anders geen afhankelijkheid zouden hebben van Q^2 .

Intermezzo: waar komt de massa van het proton nu vandaan? De structuur van protonen bestaat uit quarks en gluonen. In het echt is dit nog veel complexer dan zomaar die 3 quarks. De uiteindelijke reden daarvoor is dat het proton zeer klein is omdat de interactie tussen quarks zeer sterk is. De quarks worden op ongeveer 1fm van elkaar af. Het heisenberg principe zegt dat als we iets opluiten in een ruimte van 1fm dat het een nulpuntsenergie van 197MeV zal hebben. De bewegingsenergie/bindingssenergie van de 3 quarks samen is 600MeV. Het grootste gedeelte van de massa van het proton zal dus afhangen van de bewegings-/bindingssenergie van de quarks en niet van de quarks zelf. Deze bindingssenergie komt van de interactie tussen de quarks zelf aan de hand van uitwisseling van gluonen. Door het continu uitgewisselde gluonen splitsen continu in quark-antiquark paren. Dit is het equivalent van de lamb shift in elektronenwolken.

Het is nog nooit gelukt om de structuur functies wiskundig uit te rekenen, QCD is hier niet toe in staat. De enige manier om deze te bepalen is aan de hand van experimenten. In het quark parton model kunnen we F_2 uitschrijven

$$F_2^{eN}(x) = \sum_q xQ_q^2 [q^N(x) + \bar{q}^N(x)] \quad (90)$$

Hier sommeren we over alle quarks. $q^N(x)$ en $\bar{q}^N(x)$ zijn respectievelijk de waarschijnlijk om een quark of antiquark in het proton te vinden. Al dat we hier alle mogelijke quarks bekijken is het zo goed als onmogelijk een top quark met een massa van $\pm 100\text{GeV}$ tegen te komen in een proton van 1GeV . Er is een relatie tussen F_1 en F_2

$$\frac{2xF_1}{F_2} = \begin{cases} 1 & \text{spin } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{spin } 0 \end{cases} \quad (91)$$

Deze relatie is makkelijk aangetoond.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{puntdeeltje}, 1/2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + \frac{2Q^2}{4m^2c^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (92)$$

n het rood vinden we de Mott cross sectie $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_M$, de cross sectie voor het verstrooien van een spin 1/2 deeltje aan een spin 0 deeltje. Uit de Rutherford cross sectie komt uiteindelijk α^2/Q^4 . De \cos^2 in de Mott cross sectie komt uit het behoud van heliciteit en angulair moment. Als je een elektron hebt met spin 1/2 dan is zijn heliciteit de projectie van zijn spin op de bewegingsrichting. In het geval dat we een positieve heliciteit hebben liggen de bewegingsrichting en heliciteit in dezelfde richting. Onder een verstrooiing van 180° zal de spin van het deeltje niet verandert zijn maar het momentum wel. Dit zorgt ervoor dat de heliciteit en momentum antiparallel zijn wat wegens behoud van heliciteit niet kan. Dit wordt weergegeven in deze cos-term.

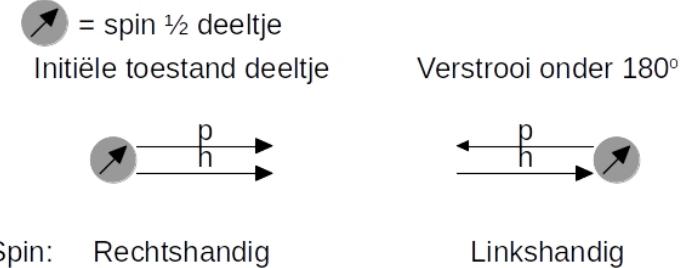


Figure 14: Visualisatie van spin 1/2 deeltje dat verstrooit onder een hoek van 180°

Het toevoegen van het groen gedeelte aan de Mott cross sectie is nodig als we verstrooien van een spin 1/2 deeltje aan een spin 1/2 deeltje. De eerste term in het groene gedeelte is afkomstig van de elektrische interactie en de tweede term van de magnetische interactie m.a.w. van de spin. Door deze term is het terug mogelijk om te verstrooien onder 180° . Voor het verstrooien van een elektron aan een quark moet aan vergelijking (92) nog de lading van het quark Q_a^2 vermenigvuldigd worden. De laatste stap is nu de cross sectie op te stellen van een spin 1/2 deeltje dat zich verstrooit van een proton.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M \sum_q Q_q^2 [1 + \frac{Q^2}{4m^2c^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}] q(x) \frac{dx}{dE'} \quad (93)$$

Dit komt neer op de waarschijnlijkheid om te verstrooien naar een quark in het groen en de waarschijnlijkheid om een quark te vinden in het rood. Nu kunnen we ad-hoc een aantal dingen uitwerken:

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}; \quad \nu = E - E' \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dE'} = \frac{x}{\nu} \quad (94)$$

en de massa van het de quark is gegeven door $m_q = xM_p$. Vullen we deze in

vergelijking (93) in.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M \sum_q Q_q^2 [1 + \frac{Q^2}{4x^2 M_p^2 c^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}] q(x) \frac{x}{\nu} \\ &\Downarrow \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M \left[\frac{1}{\nu} F_2 + \frac{2}{M^2 c^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (95)$$

Zo komen op de afgeleides na vergelijking (89) en vergelijking (95) overeen. Als $\theta = 0^\circ$ dan hebben we enkel F_2 en als $\theta = 180^\circ$ dan hebben we enkel F_1 . Specifiek voor 1/2 partons kunnen we vergelijking (89) herschrijven als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{e,N}}{dxdy} &= \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4} \left[y^2 \frac{F_2^{e,N}}{2} + (1-y) F_2^{e,N} \right] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4} \left[\frac{1 + (1-y)^2}{2} \right] F_2^{e,N} \end{aligned} \quad (96)$$

4.4 Structuur functies

Vervolgens kunnen we kijken hoe de structuur functie er uit ziet van het proton.

$$F_2^{e,p} = x (Q_u^2(u + \bar{u}) + Q_d^2(d + \bar{d} + s + \bar{s})) \quad (97)$$

Hier worden enkel de waarschijnlijkheden van de up, down en strange (anti)quarks in acht genomen omdat de overige zo goed als niet mogelijk zijn. Het proton en neutron zijn voor de sterke wisselwerking hetzelfde alleen dat een up quark verandert in een downquark. Dit geeft de isospin invarianties

$$\begin{aligned} u(x) &\equiv u^p(x) = d^n(x) & \bar{u}(x) &\equiv \bar{u}^p(x) = \bar{d}^n(x) \\ d(x) &\equiv d^p(x) = u^n(x) & \bar{d}(x) &\equiv \bar{d}^p(x) = \bar{u}^n(x) \\ s(x) &\equiv s^p(x) = s^n(x) & \bar{s}(x) &\equiv \bar{s}^p(x) = \bar{s}^n(x) \end{aligned} \quad (98)$$

Gebruiken we deze invariantie dan vinden we direct de structuur functie voor het neutron.

$$F_2^{e,n} = x (Q_d^2(u + \bar{u} + s + \bar{s}) + Q_u^2(d + \bar{d})) \quad (99)$$

Om de structuur functie van een nucleon te bepalen middelen we uit over de 2 structuurfuncties.

$$\begin{aligned} F_2^{e,N} &\equiv \frac{F_2^{e,p} + F_2^{e,n}}{2} \\ &= \frac{x}{2} ((Q_u^2 + Q_d^2)(u + \bar{u} + d + \bar{d}) + 2Q_d^2(s + \bar{s})) \\ &\approx \frac{x}{2} \left(\frac{5}{9}(u + \bar{u} + d + \bar{d}) \right) \end{aligned} \quad (100)$$

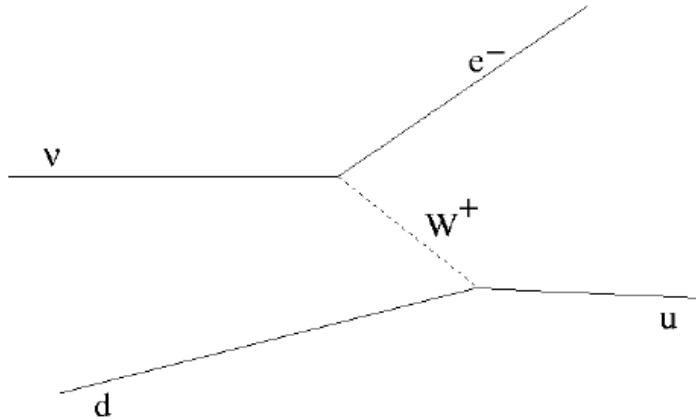


Figure 15: Feynman diagram van de neutrino verstrooing

4.5 (Anti)neutrino verstrooing

In principe is het mogelijk voor zowel charged (W^\pm) of neutral (Z^0) current verstrooing doen. Hierbij wordt een neutrino afgeschoten op een proton waar na interactie van de neutrino en het quark aan de hand van een W boson het geladen equivalent van de neutrino de verstrooing verlaten. De neutrino of antineutrino zal door het uitwisselen van respectievelijk ofwel het W^+ of W^- boson enkel met een aantal quarks kunnen interageren in het proton:

- ν -scattering: d, \bar{u}, s
- $\bar{\nu}$ -scattering: u, \bar{d}, \bar{s}

In een experiment kunnen de verschillende (anti)neutrino verstrooiingen uit elkaar gehouden worden omdat $\nu \rightarrow e^-$ en $\bar{\nu} \rightarrow e^+$. Naast de $F_2^{\nu,N} \propto x(q + \bar{q})$ krijgen we nu nog een extra structuur functie $xF_3^{\nu,N} \propto x(q - \bar{q})$.

$$\frac{d^2\sigma^\nu}{dxdy} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \left[\frac{F_2^\nu + xF_3^\nu}{2} + \frac{F_2^\nu - xF_3^\nu}{2}(1 - y^2) \right] \quad (101)$$

De eerste term tussen de haakjes zijn enkel de quarks en is onafhankelijk van de hoek waaronder wordt verstrooit en is isotroop. De tweede term zijn de antiquarks is de waarschijnlijkheid om er te hebben afhankelijk van de hoek waaronder verstrooit wordt. Waarom dit zo is wordt snel duidelijk als we de verstrooing bij 180° graden bekijken. Hier hebben we gebruik gemaakt van het feit dat de zwakke wisselwerking enkel bind aan linkshandige deeltjes.

Dezelfde redenering kan gedaan worden voor de antineutrinos en dan krijgen we:

$$\frac{d^2\sigma^{\bar{\nu}}}{dxdy} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \left[\frac{F_2^{\bar{\nu}} - xF_3^{\bar{\nu}}}{2} + \frac{F_2^{\bar{\nu}} + xF_3^{\bar{\nu}}}{2}(1 - y^2) \right] \quad (102)$$

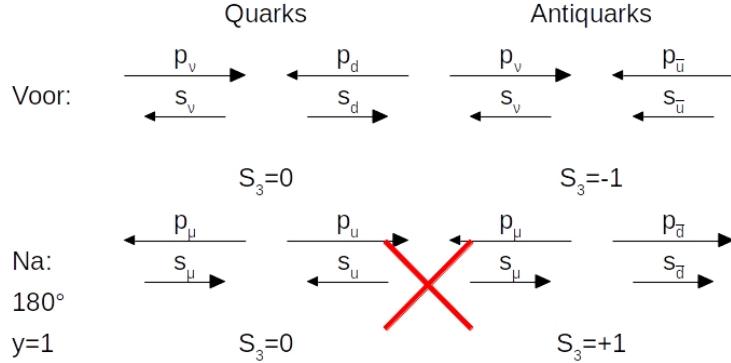


Figure 16: Neutrino verstrooiing bij 180°

Gebruiken we dit nu om de structuurfuncties van het proton en neutron op te stellen.

$$\begin{aligned}
 F_2^{\nu,p} &= 2x[d(x) + \bar{u}(x)] \\
 xF_3^{\nu,p} &= 2x[d(x) - \bar{u}(x)] \\
 F_2^{\nu,n} &= 2x[u(x) + \bar{d}(x)] \\
 xF_3^{\nu,n} &= 2x[u(x) - \bar{d}(x)] \\
 &\quad \Downarrow \\
 F_2^{\nu,N} &= F_2^{\bar{\nu},N} \\
 xF_3^{\nu,N} &= xF_3^{\bar{\nu},N} \\
 F_2^{\nu,N} &= x(u + \bar{u} + d + \bar{d}) \\
 xF_3^{\nu,N} &= x(u - \bar{u} + d - \bar{d})
 \end{aligned} \tag{103}$$

Het interessante is dat $xF_3^{\nu,N}$ ons het aantal quarks - het aantal antiquarks geeft m.a.w. de valentie quarks. Experimenteel hebben we kunnen zien dat F_2 zowel voor de elektromagnetische als de zwakke wisselwerking hetzelfde is. Dit is het beste bewijs dat we hebben voor de lading van een quark.

We zien dat xF_3 piekt bij een x waarde van 0.2. Omdat we 3 valentiequarks hebben in een proton of neutron zouden we eerder deze piek bij 0.3 verwachten. Dit komt door de verschillende gluons die worden uitgedeeld tussen de quarks. Je kan dit schematisch zien in figuur 18.

Toen voor het eerst de structuur functies werden onderzocht werd de scaling violation waargenomen. Of je nu naar puntdeeltjes kijkt met een hoge resolutie of lage resolutie zou je geen verschil mogen zien maar we zien dat dit niet zo is. Door de kortere waarneming hebben de zee quarks de tijd niet gehad om uit te middelen. De kans om een valentiequark te vinden is steeds moeilijker met hogere energieën.

Het mooie is dat we met QCD e Q^2 afhankelijkheid kan beschrijven. Jammer genoeg kan dit niet gezegd worden over de x afhankelijkheid. De scaling

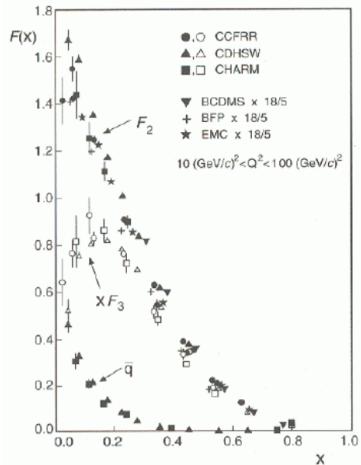


Figure 17: Vergelijking zwakke en EM structuurfunctie in experimenten

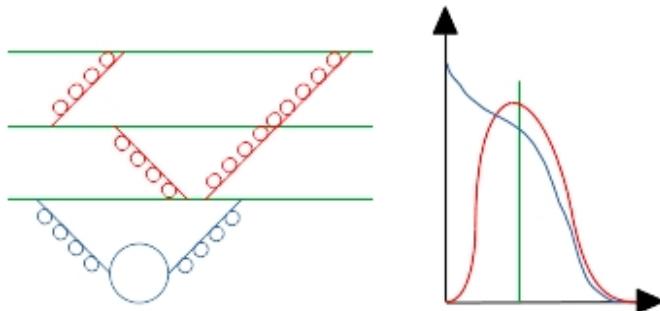


Figure 18: Schematische voorstelling van de quark verdeling

violation kan ook waargenomen worden. Uit de structuur functies kunnen de parton distributie functies afgeleid worden. Hier zien we dat de zee quarks zullen domineren bij lagere x waarden.

We zien dat er voor hoge x in het proton er meer \bar{d} aanwezig is dan \bar{u} . Dit is te verklaren door de pion wolk die rond het proton zal leven. Deze pionen kunnen alleen neutraal of positief geladen zijn wat zorgt voor de hogere densiteit aan \bar{d} . **Dit durft hij graag vragen op het examen les 5 10u00.**

4.6 Gepolariseerde DIS

Vanaf de jaren 80 zijn er ook longitudinaal gepolariseerde lepton en nucleon bundels gebruikt. Met deze experimenten kijken we naar de spin structuur van de nucleonen. We zien uit deze experimenten dat de spin van het proton niet

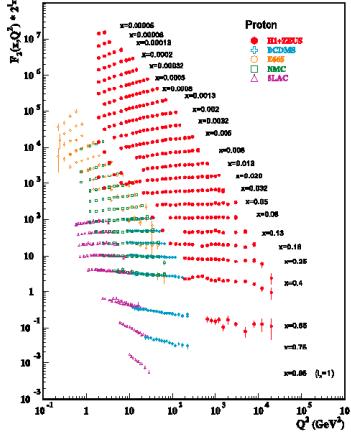


Figure 19: Scaling violations

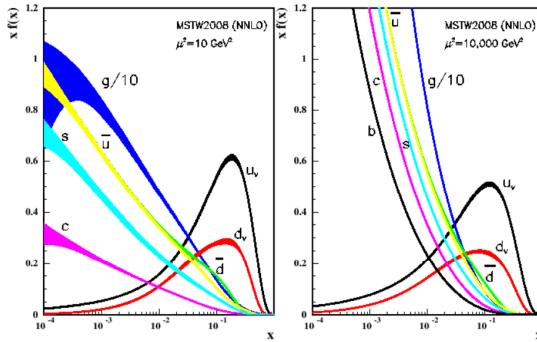


Figure 20: parton distributie functies

zal opgemaakt zijn uit de valentie quarks. Dit leide tot de zo genoemde “spin crisis”.

4.7 Spin physics

Als we kijken naar eender welk rond draaiend systeem zoals bijvoorbeeld het zonnestelsel, kunnen we zien dat het grootste deel van het angulaire momentum van deze systemen niet zal afhangen van de lichamen met de grootste massa.

4.8 Nucleon spin fysica

Uit de gepolariseerde experimenten verwachten we te zien dat $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta u + \Delta d)$ is. In het echt zien we dat $\Delta u + \Delta d \approx 0$ wat natuurlijk totaal onverwacht was.

In de werkelijkheid is het veel veel complexer.

$$\begin{aligned}
 S_z &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Delta\Sigma + \Delta G + L_q + L_g \\
 \Delta\Sigma &= (\Delta u_v + \Delta d_v) + (\Delta u_s + \Delta d_s + \Delta \bar{u} + \Delta \bar{d} + \Delta \bar{s}) \\
 \Delta\Sigma &= \text{Quark spin contributie} \\
 \Delta G &= \text{Gluon spin contributie} \\
 L_q &= \text{Orbitaal angulair moment van quarks} \\
 L_g &= \text{Orbitaal angulair moment van gluons}
 \end{aligned} \tag{104}$$

We verwachten wegens sferisch symmetrisch te zijn van de quarks dat al de bijdrages behalve $\Delta\Sigma$ 0 zouden zijn.

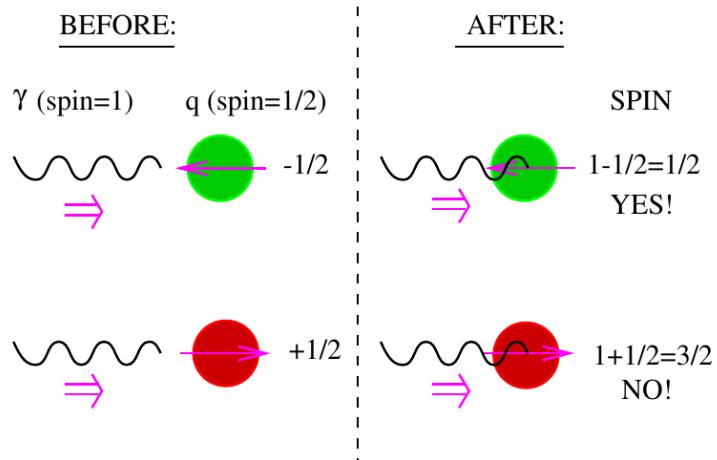


Figure 21: Foton absorptie bij gepolariseerde DIS

Hoe meten we nu de spin distributie in quarks? We polariseren het proton parallel of anti parallel aan de richting van het foton en dan kijken we welke quarks het foton zullen absorberen. De reden waarom we het proton polariseren en niet de bundel is omdat het polariseren en vooral het flippen van de bundel die moeilijk is. Nu vragen we ons af het foton zal hitten. We kunnen ons de conservatie van heliciteit voorstellen bij absorptie. We zien in figuur 21 dat de fotonen enkel geabsorbeerd worden door quarks met tegengestelde spin.

Steken we deze quarks nu in een nucleon en we nemen aan dat enkel de quarks contributies leveren aan de spin kunnen we door het veranderen van de polarisatie van het proton, kiezen we of we de quarks bekijken die ofwel positief of negatief bijdragen aan de spin van het proton. Door de onderste spin min de bovenste spin te doen in figuur 22 dan krijgen we de netto bijdrage van de quarks aan de spin.

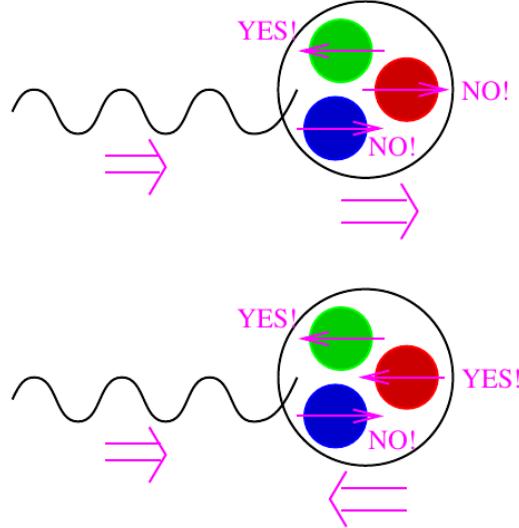


Figure 22: Absorptie van foton door quarks in nucleon

Zo krijgen we uiteindelijk een tensor uit deze experimenten

$$W^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}F_1(x, Q^2) + \frac{p^\mu p^\nu}{\nu}F_2(x, Q^2) + i\epsilon^{\mu\nu\delta\sigma}\frac{q_\delta}{\nu}(S_\sigma g_1(x, Q^2) + \frac{1}{\nu}(p \cdot q S_\sigma - S \cdot q p_\sigma)g_2(x, Q^2)) \quad (105)$$

Hierbij kennen we de ongepolariseerde structuur functies F_1 en F_2 al. Dit komt neer op de impuls densiteit van de quarks:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 [q^+(x) + q^-(x)] = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 q(x) \quad (106)$$

De nieuwigheid hier is zijn de gepolariseerde structuur functies g_1 en g_2 . Deze beschrijven de spin structuur van de spin van de quarks.

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 [q^+(x) - q^-(x)] = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \Delta q(x) \quad (107)$$

g_2 zal niet besproken worden in deze cursus. Deze is te ingewikkeld. Hoe meten we g_1 nu. Het is natuurlijk niet mogelijk om het virtueel foton te polariseren. Wat wel mogelijk is, is het polariseren van de elektronbundel. Als de verstrooiing onder een grote hoek gebeurd nemen zal er een groot deel van de spin van het elektron overgebracht zijn naar het proton en als het onder een kleine hoek verstrooit wordt bijna geen spin overgebracht. Dit kan weergegeven worden in

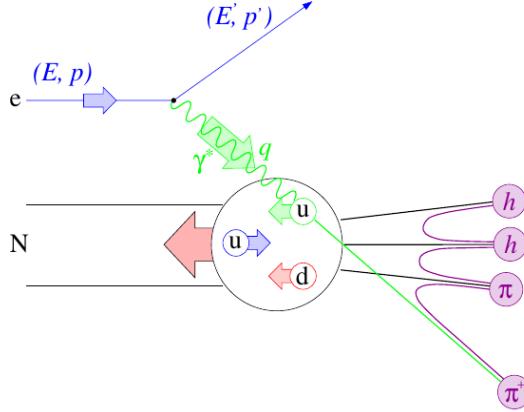


Figure 23: Onderzoek naar pin structuur

een polarisatie factor

$$D = \frac{y(2-y)}{y^2 + 2(1-y)(1+R)} \quad (108)$$

$$R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T}$$

Wat in deze experimenten zal gemeten worden is

$$A_{||} = \frac{\sigma^{\uparrow\downarrow} - \sigma^{\uparrow\uparrow}}{\sigma^{\uparrow\downarrow} + \sigma^{\uparrow\uparrow}} \quad (109)$$

$$= D.(A_1 + \eta A_2)$$

Eigenlijk willen willen weten wat A_1 is

$$A_1 = \frac{\sigma_{1/2} - \sigma_{3/2}}{\sigma_{1/2} + \sigma_{3/2}} \quad (110)$$

Zo bekomen we uiteindelijk een ratio

$$\frac{g_1}{F_1} = \frac{1}{1 + \gamma^2} \left(\frac{A_{||}}{D} - (\eta - \gamma) A_2 \right) \quad (111)$$

De uiteindelijke structuur functies die we komen kan je vinden in figuur 24a. Voor het polariseren van het neutron maken we gebruik van 3He als equivalent. We zien bij kleine x niets wat wil zeggen dat de zee quarks niet toedragen tot de spin. Alle polarisatie is te vinden bij de hogere x en zien we dat onze valentie quarks toch gepolariseerd zullen zijn. Bij het proton hebben we een positieve bijdrage en bij het neutron een negatieve bijdrage. Dit komt omdat de up quark positief zal bijdragen aan de spin en het down quark negatief. Het is momenteel nog niet gelukt om dit te bewijzen met QCD. In figuur 24b hebben we dit omgezet naar de bijdrages van de quarks zelf. Hieruit zien we dat de zee

quarks niet gepolariseerd zijn. We krijgen uiteindelijk te zien dat $\Delta\Sigma \approx 0.30$ is, of anders gezegd dragen de spin van de quarks maar $1/3$ mee aan de totale spin van het nucleon. Waar de rest vandaan komt is op dit moment nog niet duidelijk.

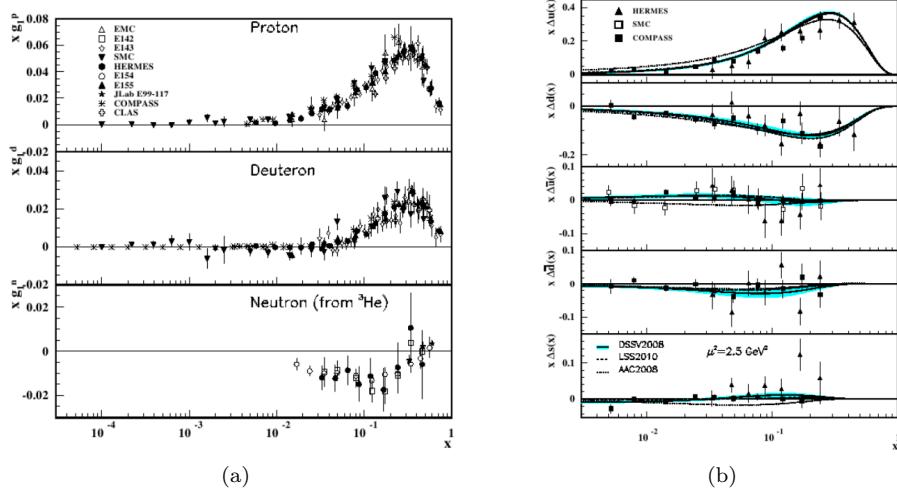


Figure 24: Resultaten uit polarisatie experimenten

4.9 Samenvatting van de structuur functies

Ten laatste voor dit hoofdstuk kijken we nog eens naar een overzicht van wat we nu allemaal weten van de structuur functies.

		Quark Polarization		
		U	L	T
Nucleon Polarization	U	f_1		h_1^\perp
	L		g_{1L}	h_{1L}^\perp
	T	f_{1T}^\perp	g_{1T}	h_1
<i>Boer-Mulders</i>				
<i>longi-transversity (worm-gear)</i>				
<i>transversity</i>				
<i>pretzelosity</i>				

Figure 25: Samenvatting van de structuur functies

5 QCD

5.1 Sterke interactie

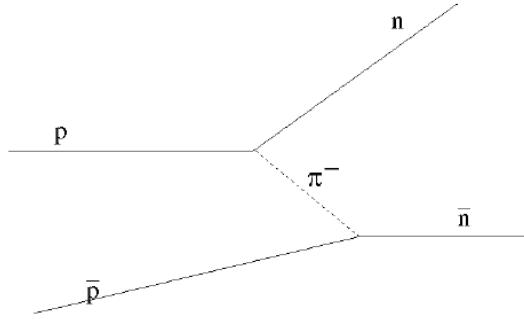


Figure 26: omvorming van protonen in neutronen

Historisch gezien is de sterke interactie ingevoerd om $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ te beschrijven. Hierbij werd gezegd dat deze nucleonen op vlak van kernkrachten gelijk zijn. en een sterk isospin doublet vormen.

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}: \text{strek isospin} \quad (112)$$

Dit is een SU(2) groep en heeft 3 generatoren en uitwisselings deeltjes

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \quad (113)$$

Dit werkt redelijk maar nu weten we natuurlijk dat dit niet correct is. Het grote probleem is dat deze uitwisselings deeltjes geen puntdeeltjes zijn. Wat tot technische problemen zal leiden. Normaal verwachten we ook dat bij deze sterke wisseling een vector boson het intermediair deeltje zou zijn met spin 1. De spin van de pionen is niet 1 maar 0 wat een groot probleem is. De reden waarom weten dat we een spin 1 deeltje nodig hebben als intermediair deeltje kunnen we halen uit het deuterium dat we eerder besproken hebben. We hebben gezien dat er tussen het spin triplet en singlet een energie verschil zit en de spin weldegelijk zal uitmaken bij deze sterke interactie. We moeten dus gaan zoeken naar meer detail. Dit is dan uiteraard vervangen door het beeld dat we nu hebben met het proton en neutron bestaand uit quarks en deze die dan interageren met elkaar met behulp van gluonen.

5.1.1 @ Quark level

Als we bij steeds hogere energie deze sterke interacties onderzoeken moeten we meer en meer rekening beginnen houden met de individuele bijdrages van de

quarks. Bij deze hogere energieën kwam er nog een ander probleem naar boven dat kon gezien worden aan de hand van $\Delta^{++} = |u^\dagger u^\dagger u^\dagger\rangle$. We zien dat deze golffunctie volledig symmetrisch is.

- Spaciaal: $l = 0$
- Flavour: allemaal u quarks
- Spin: zijn allemaal naar omhoog gericht

Wat tot dan totaal niet kon volgens Fermi. Om dit op te lossen wordt een nieuw kwantumgetal toegevoegd in de $SU(3)$ groep, kleur. Dit is het ontstaan van QCD. We zorgen dat de golffunctie van de kleur volledig antisymmetrisch is. De 3 nieuwe ladingen voor de kleur zijn

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \quad (114)$$

Omdat we $SU(3)$ hebben hebben we 8 generatoren wat neerkomt op 8 uitwisselende deeltjes.

5.2 Symmetrie van de sterke wisselwerking

Het bewijzen dat er juist 3 kleur lading zijn gebeurd als volgt. We kijken naar de verhouding van de werkzame doorsneden van e^+e^- verval naar hadronen en muonen.

$$R(\sqrt{s}) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_c \sum_q \int \left| \begin{array}{c} e^- \\ e^+ \\ \gamma \\ q \\ q' \end{array} \right|^2}{\int \left| \begin{array}{c} e^- \\ e^+ \\ \gamma \\ \mu^- \\ \mu^+ \end{array} \right|^2} = N_c \sum_q Q_q^2 \quad (115)$$

Het enige verschil tussen de 2 diagrammen naast de massa van de deeltjes is het ladingsverschil tussen de uitgaande deeltjes. We kunnen dus het aantal kleuren letterlijk waarnemen.

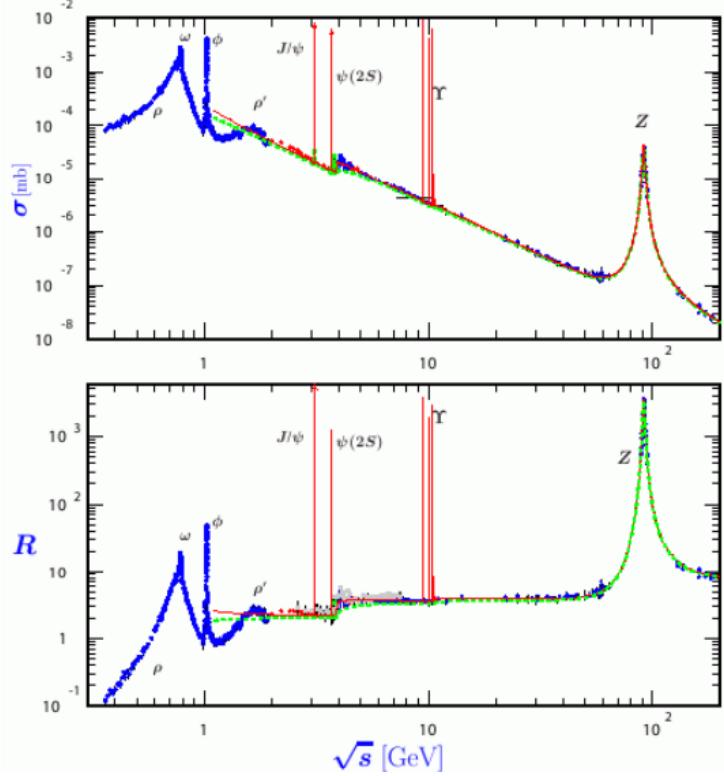


Figure 27: De resultaten van verschillende e^+e^- verstrooiingen

Indien het foton maar juist genoeg energie heeft om een specifiek quark-antiquark paar aan te maken zullen deze niet van elkaar weg bewegen en krijgen we een resonanties die in figuur 27 aan de hand van pieken waargenomen kunnen worden. Als je kijkt naar R is de stap achter ψ piek. Het verschil tussen de 2 stappen geeft ons nu juist de lading van de c quark. Omdat dit in stappen gaat is ook aangetoond dat de quarks elementaire deeltjes zijn. Anders zouden we niet die vlaktes zien. De groene curve is het equivalent van vergelijking (115). De rode curve is iets ingewikkelder. Hierbij zijn de radiatieve correcties van gluonen ook in acht genomen. De nieuwe vergelijking voor R gaat als volgt

$$R(\sqrt{s}) = N_c \sum_q Q_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \quad (116)$$

Zo is het mogelijk om de sterke koppelingsconstante in functie van de energie uit te zetten. Als $\sqrt{s} \geq 2m_\tau$ dan is het ook mogelijk om τ te produceren. Deze kunnen vervallen in hadronen zelf en zal nog een extra correctie aan R moeten toegevoegd worden.

5.3 Kleur

Met het invoeren van de kleuren is het probleem van Δ^{++} nu ook opgelost. De golffunctie hiervan kan nu zuiver antisymmetrisch gemaakt worden.

$$\begin{aligned}\psi_{kleur}(B) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [rgb - rbg + brg - bgr + gbr - grb] \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} c_i c_j c_k\end{aligned}\tag{117}$$

Het singlet in kleur ruimte zal van een $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ wat een singlet, 2 octetten en dictet zijn. Zo krijgen we uiteindelijk voor de kleur golffuncties van de (anti)baryonen en mesonen

$$\begin{aligned}\psi_{kleur}(B) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} c_i c_j c_k \\ \psi_{kleur}(\bar{B}) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} \bar{c}_i \bar{c}_j \bar{c}_k \\ \psi_{kleur}(M) &= \frac{1}{\sqrt{3}} |r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}\rangle\end{aligned}\tag{118}$$

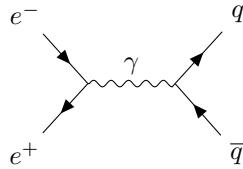
In de mesonen zien we dat we een volledig symmetrische kleur golffunctie hebben en wordt het anti symmetrisch zijn door andere golffuncties bepaalt.

5.4 Gluonen

Omdat de sterke interactie een $SU(3)$ groep is hebben we 8 uitwisselingsdeeltjes g_i , de gluonen. Omdat $SU(3)$ niet Abels is kunnen deze deeltjes aan zelf interacties doen. Ze dragen dus hun eigen kleur en antikleur. Wat ervoor zorgt dat deze sterke interactie enkel werkt over korte afstanden. Je zou dus kunnen denken voor een meson dat $3 \times 3 = 9$ maar dit is niet correct. De correcte rekening is $3 \otimes 3 = 1 \oplus 8$. Het singlet heeft hier geen kleur en doet dus niet aan zelf interacties.

5.5 Jets

De toestand van ons verstaan wat Jets nu precies doen is gecompliceerd. Nemen we de volgende interactie



Het overschot aan energie dat niet is gebruikt voor het maken van het quark-antiquark paar wordt gebruikt om de 2 quarks van elkaar weg te sturen. Dit uit elkaar gaan van de quarks zorgt ervoor dat ze gluonen zullen uitsturen die dan later combineren tot hadronen. Deze gekleurde intermediaire toestanden moeten op een of andere manier met elkaar spreken om als uiteindelijke toestanden niet gekleurde hadronen te bekomen. In dit hadronisatie process gaat veel informatie verloren. Om de originele partonen terug te bekomen moeten we aan Jet algoritmes doen. Dit is een iteratieve procedure die de volgende stappen herhaalt tot een bepaald criterium is behaald.

1. maak lijst van gedetecteerde objecten
2. je plaatst de meest waarschijnlijke paren samen
3. bereken de afstand tussen de 2
4. degene met de kleinste afstand tussen elkaar worden gecombineerd
5. ga door tot nog maar 1 paar over is of een voorwaarde is bereikt

De afstandsschalen tussen deze deeltjes kunnen als volgt berekent worden

$$\delta_{ij} = \sqrt{p_i^2 + p_j^2} = m_{invariant}$$

$$\delta_{ij} = \frac{2\min(E_i^2, E_j^2)(1 - \cos \theta_{ij})}{E_{visible}} \quad (119)$$

Je kan deze impulsen ook samenstellen wat we de “combinatie schema”.

$$p = p_i + p_j$$

$$E = E_i + E_j \quad (120)$$

Een mogelijk criterium is het aantal jets dat er in een systeem worden waargenomen. Waarbij de mogelijkheid op het aantal jets kan weergegeven als volgt.
 n -jets rates:

- 2 jets: $\propto \alpha_s^0 = 1$
- 3 jets: $\propto \alpha_s^1$
- 4 jets: $\propto \alpha_s^2$
- ...

Indien je een e^+e^- experiment uitvoert bij exact de massa van het Z boson. Hierdoor krijgen we een immense werkzame doorsnede aan deze deeltjes. Hier kunnen we dan weer de ratio tussen de hadron en muon verval kanalen bepalen.

$$R_Z = \frac{\Gamma(Z \rightarrow \text{hadrons})}{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-)} = R_Z^0(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots) \quad (121)$$

Op deze ratios zullen straling correcties die we niet kunnen berekenen. R_Z^0 kan in de elektro zwakke theorie uit gerekend worden. Zo is het weer mogelijk om bij het bepalen van de R_Z in experimenten zo de sterke wisselwerking constante te bepalen.

Hetzelfde als bij het Z boson kan nu ook gedaan worden bij de τ vervallen.

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \text{hadrons} + \nu_\tau)}{\Gamma(\tau \rightarrow e\nu_e \nu_\tau)} = R_\tau^0 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots\right) \quad (122)$$

Nog een andere manier om α_s te berekenen is DIS scaling violations. Door deze waarde via verschillende manieren en processen te kunnen meten, kunnen we uiteindelijk inzien dat we dicht bij de werkelijke waarde zullen komen.

5.6 Testen van QCD

We hebben nu in experimenten gevonden dat we 3 kleuren hebben of hoe hard verschillende quarks aan elkaar binden. Nu is het mogelijk om hier nog veel dieper op in te gaan. We kunnen bijvoorbeeld kijken naar de 4-jet evenementen en wat er nu allemaal kan gebeuren om deze 4 jets te maken. Dit komt neer op 4 verschillende diagrammen gegeven in figuur 28.

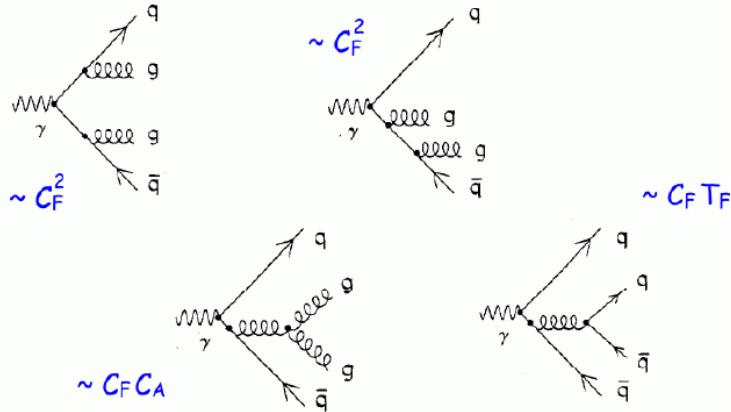


Figure 28: Mogelijke diagrammen om 4 jets te maken

Hiervan is de eerste jet heel makkelijk te onderscheiden van de andere 3 vanwege zijn topologie. De eerste heeft 2 jets die in de ene richting zullen gaan en 2 jets in de andere richting. De andere 3 configuraties hebben 1 jet die met ongeveer de helft van de impuls in de ene richting zal gaan en de overige 3 jets in de andere richting gaan. Wat er gebeurt in deze diagrammen kunnen gereduceerd worden tot 3 verschillende processen.

Deze zijn evenredig met de sterke koppelingsconstante en de kleurfactoren C_F , C_A en T_F . Deze kleurfactoren zijn niets anders dan het aantal kleurcombinaties dat er mogelijk zijn. Het is makkelijk in te zien dat die factoren zich ook

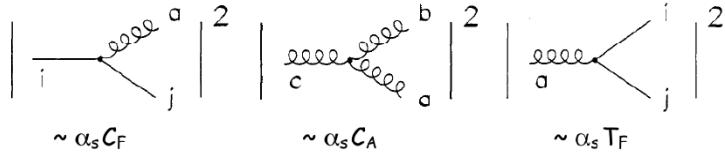


Figure 29: Gereduceerde diagram elementen

zullen tonen in de verschillende mogelijkheden om 4 jets te creëren. Dit kunnen we gebruiken om de symmetrieën tussen de kleuren onderzoeken. De kinematica van deze experimenten hangen dus af van de diagrammen. Als we hier nu C_A/C_F en T_F/C_F bepalen vinden we de groepen van de kleuren bepalen.

Table 9: Symmetrie van de kleurconstantes

Groep	C_A	C_F	T_F
$SU(3)$	3	4/3	1/2
$U(1)_3$	0	1	3
$SO(3)$	3	3	3
$SU(N)$	N	$(N^2 - 1)/2N$	1/2

In tabel 9 kan je de waarden terug vinden voor de kleurfactoren indien QCD een bepaalde groep zou hebben. Uit dit experiment, zoals bij het LEP (figuur 30) zien we dat het een goede aanname was dat we hiervoor $SU(3)$ gebruiken.

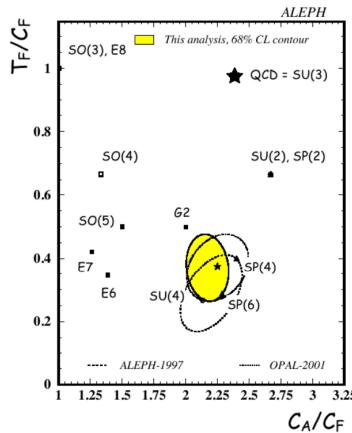


Figure 30: Lep resultaten voor 4 jet experimenten

Wat Ruckbosch vooral interessant vindt hier is dat je weet waarom C_A bij $U(1)_3$ 0 is. Dit komt omdat $U(1)$ een abelse groep is en zelf interactie niet mogelijk is.

5.7 Spin van het gluon

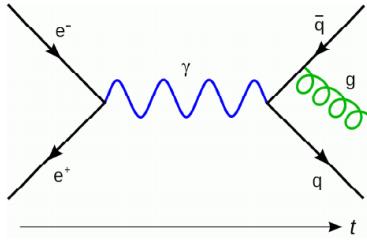


Figure 31: 3 jet evenementen

Hier drijven we de experimenten nog een beetje verder en kijken we naar 3-jet evenementen. In deze experimenten maken we weer een quark-antiquark paar aan waar er 1 van een gluon zal afstraalt. Hier zal een spin $1/2$ deeltje een vector boson met spin 1 aanmaken. Het behoud van angulair moment zorgt ervoor dat de hoekdistributie afhangt van het feit of het gluon nu een spin 0 of spin 1 deeltje is. Bij deze experimenten zoek je de jet met de hoogste energie die waarschijnlijk degene is die niets heeft afgestraald. Dan kan je kijken naar de hoekdistributie tussen de andere 2 en kan je een idee krijgen over de spin van het gluon. In de resultaten van deze experimenten (figuur 32) zien we dat deze de curve zal beschrijven voor een spin 1 deeltje en is het gluon dus een vector gluon.

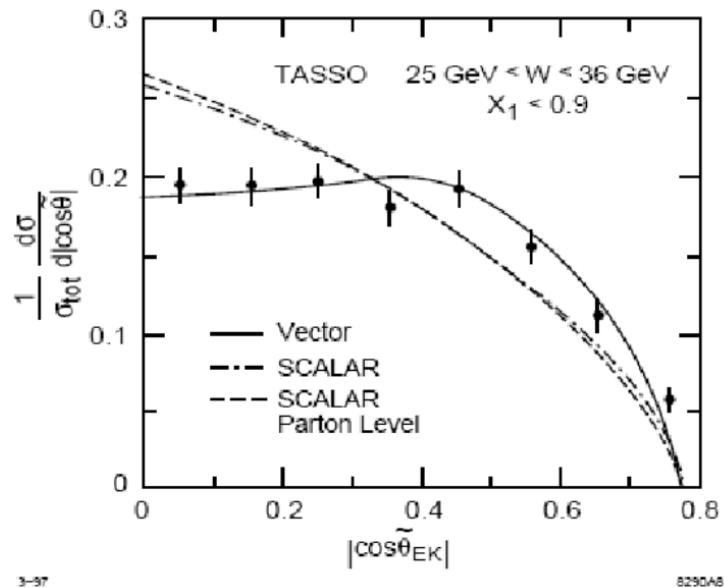


Figure 32: Onderzoek naar de spin van het gluon

5.8 α_s

Wat we al hebben gezien is de sterke koppelingsconstante bij de massa van het Z boson (figuur 33).

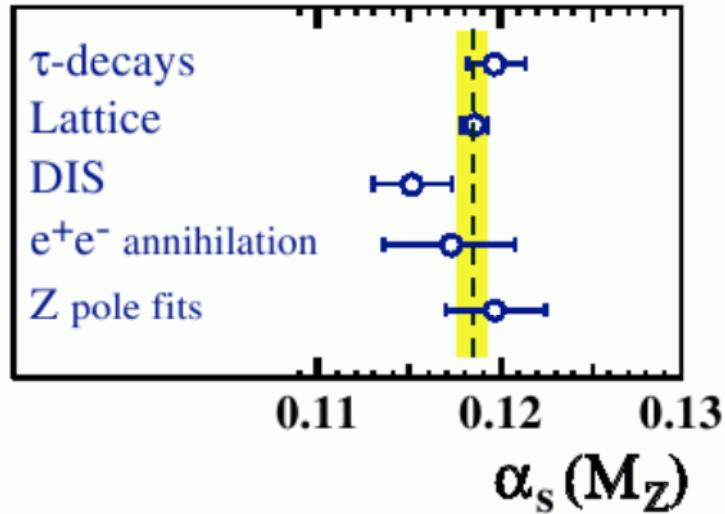


Figure 33: De sterke koppelingsconstante bij de massa van het Z boson

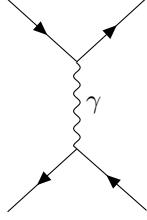
Indien we dit voor meerdere massa's en verschillende energieën uitvoeren krijgen we uiteindelijk te zien dat de sterke koppelingsconstante zal weglopen (figuur 34).

Het interessante bij deze grafiek is dat de meest accurate metingen voor QCD komen uit het onderzoek van een zwakke interactie. Hierbij is de vorm van de curve bepaald door QCD en gefit aan de waarde van het Z boson.

5.9 Lopende koppelingsconstante

5.9.1 QED

Bij QED wordt de effectieve lading van het elektron bepaalt door het proces:



$$P_0 = \frac{e_0^2}{q^2} \quad (123)$$

$$P = P_0 \pi(q^2) P_0 \quad (124)$$

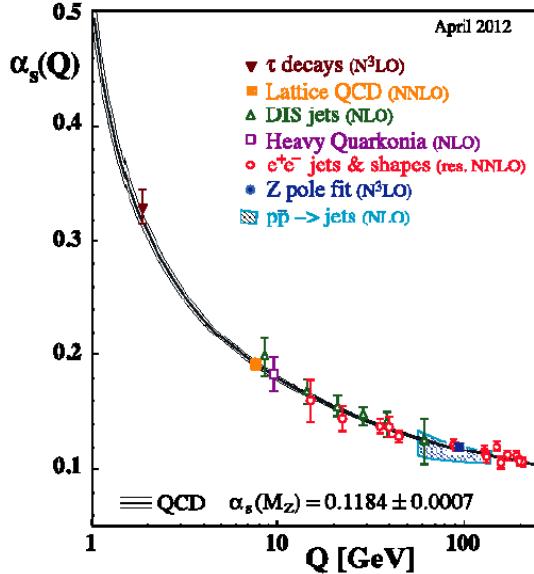


Figure 34: Lopende koppelingsconstante

Uiteindelijk krijgen voor alle ordes samen dat:

$$\begin{aligned}
 p &= P_0 \pi(q^2) P_0 + P_0 \pi(q^2) \pi(q^2) P_0 + \dots \\
 &= P_0 \frac{1}{1 - \pi(q^2) P_0} \\
 &= P_0 \frac{1}{1 - e_0^2 \prod(q^2)}
 \end{aligned} \tag{125}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van Taylor ontwikkelingen waarbij x natuurlijk kleiner moet zijn dan 1. Bij de laatste gelijkheid hebben we een zelf energie correctie geïsoleerd waar de lading is uit gehaald. We zien dus dat een foton omgeven zal zijn door een wolk van deeltje-antideeltje paren die hij zal aanmaken en opslorpen. Om de lading van het elektron nu te schrijven als de lading bij het eerste diagram vermenigvuldigd met de uitkomst uit vergelijking (125).

$$e^2(q^2) = \frac{e_0^2}{1 - e_0^2 \prod(q^2)} \tag{126}$$

De effectieve lading hangt dus af van op welke afstand we er gaan naar kijken. Schalen we dit nu naar ν , een basisschaal, dan krijgen we

$$e^2(\mu^2) = \frac{e_0^2}{1 - e_0^2 \prod(\mu^2)} \tag{127}$$

Zo bekomen we dat de elementaire lading gegeven kan worden door

$$e_0^2 = \frac{e^2(\mu^2)}{1 - e^2(\mu^2) \prod(\mu^2)} e^2(q^2) = \frac{e^2(\mu^2)}{1 - e^2(\mu^2) \cdot [\prod(q^2) - \prod(\mu^2)]} \quad (128)$$

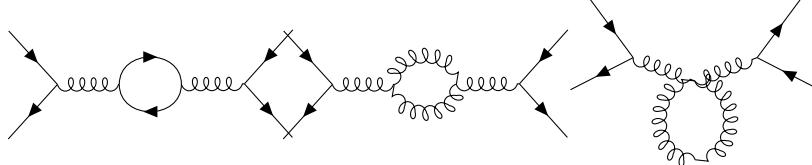
Het enige dat loopt in deze vergelijking is de $\prod q^2$ term. Het is mogelijk om in QCD $\prod(q^2) - \prod(\mu^2)$ uit te rekenen. Hiervoor wordt er verwezen naar het vak kwantumveldentheorie. Hetgeen we hier hebben is eigenlijk niets anders dan de EM koppelingsconstante

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \alpha(\mu^2) \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)} \quad (129)$$

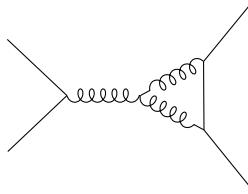
Wat we ook zullen waarnemen bij hoge energieën maar niet wat we gebruiken in het dagelijkse leven. Daar is $\alpha = \frac{1}{137}$. We zien dat bij hogere energieën de elektrische lading sterker zal worden. Dit omdat als we naar zo kleine afstanden van enkele fm beginnen te kijken, begint een nieuw fenomeen af te spelen. Een lading zal voortdurend fotonen afstralen en in lading-antilading paren omgaan. Het positieve gedeelte van het paar wordt gericht naar de negatieve lading. Met andere woorden wordt het vacuum rond de lading gepolariseerd. Het moment dat we binnentrekken dat gepolariseerde gebied beginnen te kijken zien we die shields van de gepolariseerde lading niet meer en zullen we de echte lading van het deeltje beginnen zien.

5.9.2 QCD

Dezezelfde denkwijze kunnen we nu toepassen op QCD. We krijgen naast de equivalenten diagrammen in QED ook nog andere mogelijkheden. In eerste orde hebben we nu:



Nog een andere mogelijkheid is



Het resultaat voor de lopende sterke koppelingsconstante zal naast deze extra diagrammen ook nog afhangen van het aantal flavours N_f en het aantal kleuren n_c . Zo krijgen we

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2) \frac{11n_c - 2n_f}{12\pi} \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)} \quad (130)$$

Hier is een belangrijke eigenschap dat boven zal komen. Het moment dat $11n_c > 2n_f$ dan zal de noemer altijd maar groter worden met grotere q waarden en wordt de sterke koppelingsconstante steeds kleiner als we op kleinere afstanden kijken. De reden voor deze verzwakking is juist hetzelfde als voor bij het elektron. Het quark straalt terug gluonen uit die quark-antiquark paren zal maken. Zo hebben we rond het quark een wolk van quark-antiquark paren die het vacuum rond het quark polariseren. Het verschil hier is dat gluonen zelf kluer hebben en kleur zullen wegnemen van het quark. Hoe dichter je dus bij het quark komt hoe meer kleur is weg gestraald en hoe minder kleur je zal waarnemen en hoe kleiner de koppeling zal worden. De factor waarmee kleur zal weggenomen worden door QCD is:

$$\lambda_{QCD} \equiv \mu \exp(-12\pi/(33 - 2n_f)\alpha_s(\mu^2)) \quad (131)$$

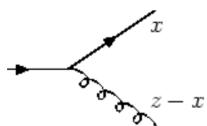
Dit alles noemen we de asymptotische vrijheid. Eens de quarks zo dicht bij elkaar zijn zullen ze elkaar niet meer voelen. Omgekeerd zal als een quark-antiquark paar van elkaar weg gaan trekken ze elkaar meer aan. Dit effect noemen we flux buizen. Typische schalen zijn hier terug $1\text{GeV}/fm$. Wat zijn de gevolgen nu van deze opsluiting?

5.10 DIS: scaling violations

Het meest spectaculaire gedeelte van deze opsluiting kunnen we zien in de scaling violations die we waarnemen. Initieel keken we enkel naar de diep inelastische verstrooiingen bij brave energieën van $1 - 10\text{GeV}^2$. Volgens deze experimenten was er geen afhankelijkheid van de F_2 in functie van Q^2 en werd bewezen dat dit punt deeltjes waren. Het moment dat we over een veel grotere range kijken, zie figuur 19, zien we dat hier toch een grote variatie aanwezig is. We zien dat bij lage x de waarschijnlijkheid om een quark waar te nemen afneemt met hogere Q^2 en voor grote x zal toenemen met hogere Q^2 . De reden hiervoor is een resolutie effect (figuur 35). Als een laag energetisch foton interageert ziet hij een puntlading waarmee hij zal interageren. Als met hoog energetische fotonen wordt gekeken naar een hadron zien ze nog steeds een puntdeeltje maar dat kleiner is en dat de mogelijkheid heeft gehad om een gluon af te stralen \rightarrow de quark heeft een kleinere impuls fractie dan het originele quark. Bij verhogende energieën is het steeds minder waarschijnlijk om een quark met een hoge impulsfractie tegen te komen.

5.11 Splitting functies

In QCD is het mogelijk om deze afsplitsing verder uit te werken. Dit zijn de zogenaamde splitting functies. Die geven de waarschijnlijkheid om een quark met



impulsfractie z op te splitten in een quark met impulsfractie x en een gluon met fractie $z - x$.

$$q(z) \rightarrow q(x) + g(z - x) \quad (132)$$

Figure 36: diagram van splitting functies

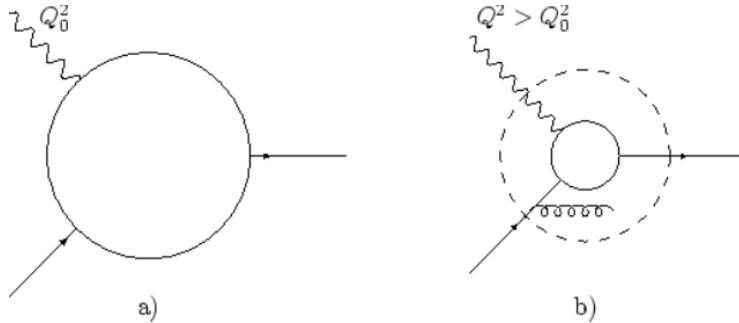


Figure 35: Resolutie effect bij DIS experimenten

Omdat in dit diagram een vertex aanwezig is, is er natuurlijk een afhankelijkheid naar α_s aanwezig. De kleurfactor C_F is hier ook aanwezig. Naast het splitten van het momentum over partons gegeven in vergelijking (132) zijn er nog andere manieren om dit momentum op te splitsen:

$$\begin{aligned} q(z) &\rightarrow q(x) + g(z-x) \\ q(z) &\rightarrow g(x) + q(z-x) \\ g(z) &\rightarrow g(x) + g(z-x) \\ g(z) &\rightarrow q(x) + \bar{q}(z-x) \end{aligned} \tag{133}$$

Bij deze verschillende manieren van opsplitsen zal natuurlijk ook gebruik gemaakt worden van de andere kleurfactoren.

Bij schaalberekening worden we dus uiteindelijk ook gevoelig voor de gluon distributies omdat deze ook weer quarks en antiquarks kunnen aanmaken.

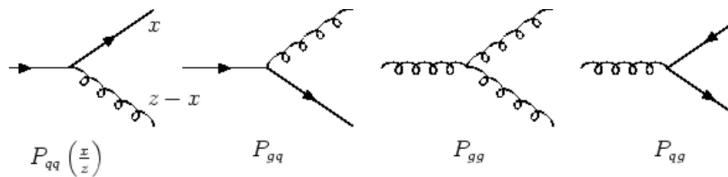


Figure 37: diagrammen van alle split mogelijkheden

Uit berekeningen in QCD krijgen we nu de verschillende mogelijkheden om

een soort van splitting tegen te komen:

$$\begin{aligned}
 P_{qq}(Z) &= \frac{4}{3} \frac{1+Z^2}{1-Z} \\
 P_{gq}(Z) &= \frac{4}{3} \frac{1+(1-Z)^2}{Z} \\
 P_{gg}(Z) &= 6 \left(\frac{1-Z}{Z} + \frac{Z}{1-Z} + Z(1-Z) \right) \\
 P_{qg}(Z) &= \frac{1}{2} (Z^2 + (1-Z)^2)
 \end{aligned} \tag{134}$$

met $Z = \frac{x}{z}$. Een belangrijke opmerking bij de laatste 2 diagrammen is dat de uitgaande deeltjes perfect symmetrisch moeten zijn met elkaar. Dit kunnen natuurlijk ook zien in hun vergelijkingen die symmetrisch zijn voor Z en $1-Z$. Misschien minder interessante opmerkingen maar zeker niet onopgemerkt. Voor de eerste waarschijnlijkheid zien we dat als de quark zo goed als alle impuls krijgt dat deze waarschijnlijkheid afneemt. Dit is uiteindelijk logisch omdat een laag energetisch gluon lange afstanden zou afleggen wat onmogelijk is in QCD. De equivalenten gebeuren natuurlijk ook in de andere waarschijnlijkheden.

5.12 DGLAP

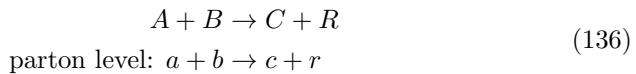
De verschillende waarschijnlijkheids distributies om te veranderen in een quarks, antiquarks of gluons kunnen nu gegeven worden door:

$$\begin{aligned}
 Q^2 \frac{dq_i(x, Q^2)}{dQ^2} &= \frac{dq_i(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[q_i(z, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) + g(z, Q^2) P_{qg} \left(\frac{x}{z} \right) \right] \\
 Q^2 \frac{d\bar{q}_i(x, Q^2)}{dQ^2} &= \frac{d\bar{q}_i(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\bar{q}_i(z, Q^2) P_{qg} \left(\frac{x}{z} \right) + g(z, Q^2) P_{gg} \left(\frac{x}{z} \right) \right] \\
 Q^2 \frac{dg_i(x, Q^2)}{dQ^2} &= \frac{dg_i(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\sum_i q_i(z, Q^2) P_{qg} \left(\frac{x}{z} \right) + \sum_i \bar{q}_i(z, Q^2) P_{gg} \left(\frac{x}{z} \right) + g(z, Q^2) P_{gg} \left(\frac{x}{z} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{135}$$

Opmerking: De α_s in deze vergelijkingen is nog steeds afhankelijk van Q^2 . Deze vergelijkingen kan je nu fitten aan wat we in de experimenten hebben gevonden en zien we dat deze theorie de experimenten zo goed als perfect kan volgen. Het probleem dat we hebben met QCD met de grote afstanden zullen in de DGLAP vergelijkingen weg geïntegreerd worden.

5.13 Hadron colliders

De parton distributie functies zullen hier heel belangrijk zijn omdat hier niet echt de hadron zullen verstrooien met elkaar maar eerder de partons.



De uiteindelijke cross sectie van deze verstrooiing is gegeven door:

$$\sigma(AB \rightarrow CR) = \int dx_a \int dx_b [[f_{a/A}(x_a)f_{b/B}(x_b) + f_{a/B}(x_a)f_{b/A}(x_b)] \times \sigma(ab \rightarrow cr, \hat{s})] \quad (137)$$

met $f_{...}$ de parton distributie functies die moeten gemeten worden. Er zijn meerdere diagrammen die kunnen bijdragen in de hadron verstrooiingen.

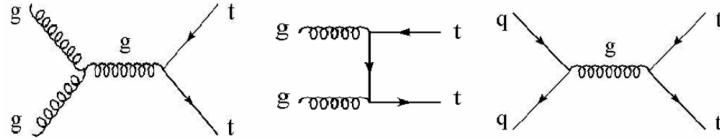


Figure 38: Diagrammen in de hadron collisies

Uit de parton distributie functies (figuur 20) kunnen we ook zien dat bij de hogere energieën het meer en meer waarschijnlijk zal zijn dat er verstrooit wordt aan een gluon in plaats van een (anti)quark. Als 2 voorbeelden hebben we het Tevatron en het LHC. Het Tevatron werkt bij ongeveer 1TeV en bestaat uit 80% uit het anniheren van een quark-antiquark paar tot een gluon en maar 20% uit gluon fusies. Daarintegen werkt het LHC bij 10TeV werkt bestaat uit 80% gluon fusies en 20% quark paar annihilaties.

6 Parity violation

We weten uit experimenten dat de zwakke interactie gegeven wordt door de groep $SU(2)$.

6.1 Pariteit

Kijken we eerst terug naar de definitie die we aan pariteit hebben gegeven in sectie 2.7. Dit is niets anders dan het systeem spiegelen door de oorsprong. Voor vectoren krijgen we dan

$$\begin{aligned} P(\vec{r}) &= -\vec{r} \\ P(\vec{p}) &= -\vec{p} \end{aligned} \quad (138)$$

en voor axiale vectoren

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ p(\vec{L}) &= \vec{L} \end{aligned} \quad (139)$$

De eigenwaarden van de toestanden die de pariteit volgen zijn ± 1 .

6.1.1 Dirac fermionen

Uit de dirac vergelijking was het mogelijk om 4 onafhankelijke oplossingen waren

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} & u_2 &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \\ v_2 &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & v_1 &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (140)$$

Hierbij stellen de u 's deeltjes voor en de v 's de antideeltjes. waarbij we hebben dat $v_1(E, \vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} = u_4(-E, -\vec{p})e^{-i(-\vec{p}\cdot\vec{x}-(-E)t)}$. v_1 is dus niets anders dan een deeltje dat terug gaat in de tijd met negatieve energie en impuls. Voeren we nu de pariteits operator uit op de dirac vergelijking dan krijgen we:

$$\begin{aligned} i\gamma^1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + \dots - m\psi &= -i\gamma^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \downarrow \psi &\rightarrow \hat{P}\psi \\ i\gamma^1 \hat{P} \frac{\partial\psi'}{\partial x'} + \dots - m\hat{P}\psi' &= -i\gamma^0 \hat{P} \frac{\partial\psi'}{\partial t'} \\ \downarrow t \rightarrow t, x \rightarrow -x &\Rightarrow \gamma^0 \\ -i\gamma^0 \gamma^1 \hat{P} \frac{\partial\psi'}{\partial x'} + \dots - m\gamma^0 \hat{P}\psi' &= -i\gamma^0 \gamma^0 \hat{P} \frac{\partial\psi'}{\partial t'} \\ \downarrow \gamma^0 \gamma^k &= -\gamma^k \gamma^0 \\ i\gamma^1 \gamma^0 \hat{P} \frac{\partial\psi'}{\partial x'} + \dots - m\gamma^0 \hat{P}\psi' &= -i\gamma^0 \gamma^0 \hat{P} \frac{\partial\psi'}{\partial t'} \\ \Updownarrow \\ i\gamma^1 \frac{\partial\psi'}{\partial x'} + \dots - m\psi' &= -i\gamma^0 \frac{\partial\psi'}{\partial t'} \end{aligned} \quad (141)$$

Uit de onderste 2 vergelijkingen die gelijk zijn aan elkaar zien we dat $\gamma^0 \hat{P}$ niet anders is dan de eenheidsoperator. Hieruit is $\hat{P} = +\gamma^0$ of $\hat{P} = -\gamma^0$. Bij conventie hebben we genomen dat $\hat{P} = +\gamma^0$ en krijgen we voor de inwerking van de pariteit op de dirac oplossingen:

$$\begin{aligned} \gamma^0 u_1 &= +u_1 & \gamma_0 u_2 &= +u_2 \\ \gamma^0 v_1 &= -v_1 & \gamma_0 v_2 &= -v_2 \end{aligned} \quad (142)$$

De positieve deeltjes hebben dus een positieve pariteit en de negatieve deeltjes een negatieve pariteit.

6.1.2 QED

Dit heeft natuurlijk gevlogen voor de wiskunde die we al eerder hebben aangehaald. Kijken we eerst wat dit zal doen bij QED. Als voorbeeld bekijken we een

elektron muon verstrooing $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Het matrix element hiervan is

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} j_e \cdot j_\mu \quad (143)$$

met $j_e^\mu = \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)$ en $j_\mu^\nu = \bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)$.

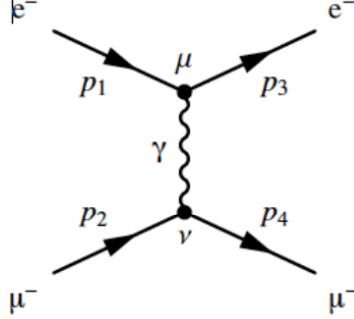


Figure 39: Feynman diagram van $e^- \mu^-$ botsing

Het transformeren van het matrix element gaat nu als volgt:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \gamma^0 u \\ \bar{u} &= u^\dagger \gamma^0 \rightarrow (\gamma^0 u)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = \bar{u} \gamma^0 \\ &\downarrow \\ j_e^\mu &= \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_3)\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 u(p_1) \end{aligned} \quad (144)$$

Bekijken we de tijd en ruimte componenten apart:

- Tijd component:

$$\begin{aligned} j_e^0 &\rightarrow \bar{u} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 u = \bar{u} \gamma^0 u = j_e^0 \\ \gamma^0 \gamma^0 &= I \end{aligned} \quad (145)$$

- Ruimte component:

$$\begin{aligned} j_e^k &\rightarrow \bar{u} \gamma^0 \gamma^k \gamma^0 u = \bar{u} \gamma^k \gamma^0 \gamma^0 u = -j_e^k \\ \gamma^k \gamma^0 &= -\gamma^0 \gamma^k \end{aligned} \quad (146)$$

Zo krijgen we uiteindelijk voor het scalar product van de stromen dat

$$j_e \cdot j_\mu = j_e^0 j_\mu^0 - j_e^k j_\mu^k \rightarrow j_e^0 j_\mu^0 - (-j_e^k)(-j_\mu^k) = j_e \cdot j_\mu \quad (147)$$

Met andere woorden QED behoudt de pariteit. Omdat QCD juist dezelfde stromen hebben met enkel andere voorfactoren en propagatoren kunnen we zeggen dat QCD pariteit ook zal behouden.

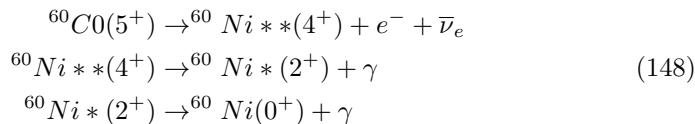
6.2 Pariteit schenden in experimenten

Als we terug kijken in de geschiedenis ontstaat er een θ/τ probleem. Hierbij werden er bij $\pm 500\text{MeV}$ 2 mesonen onontdekt die ongeveer dezelfde massa hebben maar ze zien aan de hand van hun vervalmodi dat het andere deeltjes zijn, $\theta^+ \rightarrow 2\pi$ en $\tau^+ \rightarrow 3\pi$. We verwachten dat θ veel sneller zou vervallen dan τ en dus een veel breedere piek zou hebben. Uit meer precieze metingen bleek dat dit één en hetzelfde deeltje waren met juist dezelfde massa en levensduur. Dit zorgt natuurlijk voor problemen. De 2 deeltjes hebben een tegengestelde pariteit en zouden volgens het behoud van pariteit onmogelijk hetzelfde deeltje kunnen zijn. Lee en Yang komen met het voorstel dat de pariteit niet behouden zou zijn bij zwakke vervalen en dat $\theta^+ = \tau^+ \equiv K^+$. Zij vragen aan C.S. Wu om dit experimenteel na te gaan. Zij heeft dit gedaan door het onderzoek van β -verval van gepolariseerde ^{60}Co waaruit volgt dat de pariteit niet behouden is. Waaruit de V-A theorie zal volgen

6.3 Wu-experiment

De cross sectie is niets meer dan een waarschijnlijkheid/getal. Dit kan ofwel een scalar of een pseudoscalar zijn. Indien de cross sectie niet van teken verandert is het een scalar en is P behouden. Indien de cross sectie wel van teken verandert is het een pseudoscalar en zal de P niet behouden zijn. De vraag is nu natuurlijk waarom we dit nog niet hebben gezien? Op dat moment is er alleen nog maar onderzoek gedaan op het nucleair β verval. Hierbij worden alleen \vec{p}_N , \vec{p}_e en \vec{p}_ν onderzocht. Eender welke gemixte combinatie die je maakt van deze variabelen (bv. $\vec{p}_N \cdot (\vec{p}_e \times \vec{p}_\nu) = 0$) zal 0 zijn (deze vectors zijn co planair). Dit is niet genoeg om dit te zoeken. Om de pariteit te onderzoeken moeten we gebruik maken van een axiale vector. De enige die we ter onze beschikking hebben is \vec{J} die je kan vastleggen door nucleus te polariseren.

In het experiment van madam Wu werd dit gedaan met ^{60}Co waarbij de volgende vervalen zullen plaatsvinden.



Met het β verval zijn we bezig met ordes van 1MeVfm , dit is $0.5\hbar c$. Het is dus heel moeilijk om orbitaal impuls moment weg te halen met het β verval. Het is makkelijker in het β verval om de impuls te verliezen via spin. $e^- + \bar{\nu}_e$ moet een spin van ofwel 1 (gamov teller verval) of 0 (fermi verval) hebben. Voor het cobalt zo veel mogelijk momentum te verliezen moeten alle spins van de inkomende en uitgaande deeltjes parallel liggen. In deze experimenten liggen de cobalt atomen stil. Wanneer deze vervalt naar nikkel zal het nikkel ook zo goed als stil liggen. Dit wil dus zeggen dat $\hat{p}_e = -\hat{p}_{\bar{\nu}_e}$. Het tweede verval maakt gebruik van de elektromagnetische wisselwerking en zal de pariteit dus behouden worden. Hierbij heeft het foton een welbepaalde distributie omdat hij 2 eenheden aan

angulair moment zal moeten wegnemen. Een foton met een welbepaalt angulair moment zal een welbepaalde hoekdistributie hebben, $W_\gamma = W_\gamma(\theta)$ met θ de hoek tussen het moment van het foton en de rischting van het magnetisch verld dat is aangelegd. Zo is het mogelijk om de polarisatie van nikkel te controleren. Een belangrijke opmerking: omdat EM pariteit behoudt moeten we hetzelfde waarnemen onder een hoek van 180° .

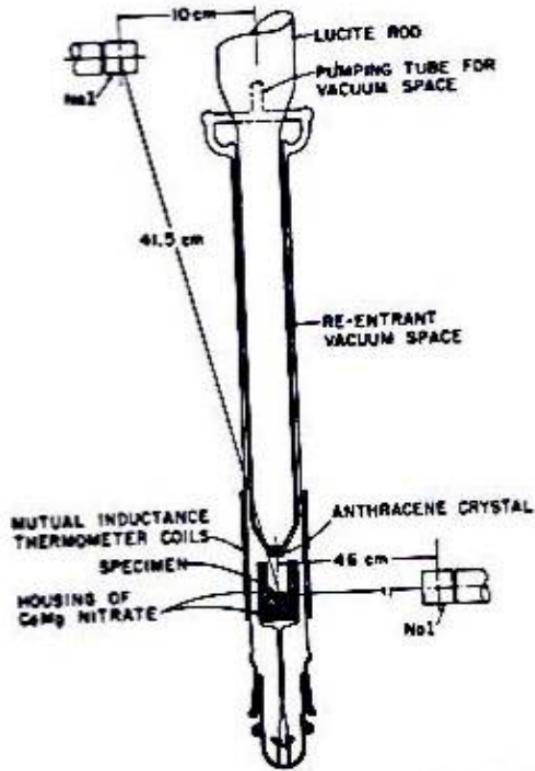


Figure 40: De experimentele opstelling van he Wu experiment

In figuur 40 vindt je de opstelling van het Wu experiment. Hierbij is het zwarte blokje de bron waar CoMg nitraat in zit en dat gepolariseerd wordt met een magneet spoel. Er zijn 2 natrium jodide detectoren (γ detectoren), 1 geplaatst rechts van de bron (90°) en 1 links bovenaan het experiment (0° of 180°). Het verschil tussen de 2 detectoren zal de polarisatie van nikkel geven. Er is een derde kleine detector juist boven de detector die het elektron meet en ziet of deze parallel of antiparallel wordt uitgestuurd.

Als we de polarisatie van de kern weten uit de γ anisotropie dan gaan we op zoek naar een afhankelijkheid van het elektron met de hoek.

$$W_e \propto 1 + P\beta_e \cos \theta \quad (149)$$

Indien er een θ afhankelijkheid is en $\alpha \neq 0$ dan zal de pariteit niet behouden

zijn. De resultaten van dit experiment kunnen gevonden worden in figuur 41. In de eerste plot kan je voor (a) de counts vinden van de γ detector onder 90° en (b) de counts voor de γ detector bij 0° . Als we het magneet veld uit zetten en Co laten opwarmen (de polarisatie laten verdwijnen) en de counts van de detectoren plotten in functie van de tijd kunnen we zien dat de polarisatie ook zal verdwijnen in de γ detectoren en kunnen we de polarisatie van de kernen meten wat we in de tweede plot zien. Deze plots zullen hetzelfde blijven als het magneet veld wordt omgedraaid m.a.w. de pariteit is behouden voor EM. Dit zal niet zo zijn als we naar de polarisatie van de elektronen kijken. Als het magneet veld wordt omgedraaid krijgen we ook een omdraaiing van de elektron pariteit en is de pariteit dus niet behouden.

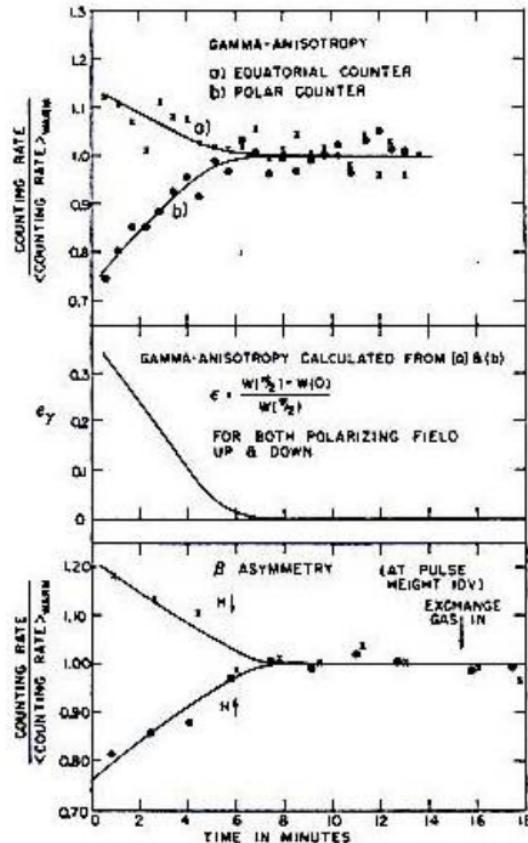


Figure 41: Resultaten van het Wu experiment

We kunnen schematisch zien wat er gebeurt met de spins van de deeltjes als het magneet veld wordt omgedraaid.

Hier wordt aangetoond dat $\alpha \approx 1$ is en de consistent is met een pariteit die maximaal geschonden zal worden. Uit de resultaten van dit experiment hebben

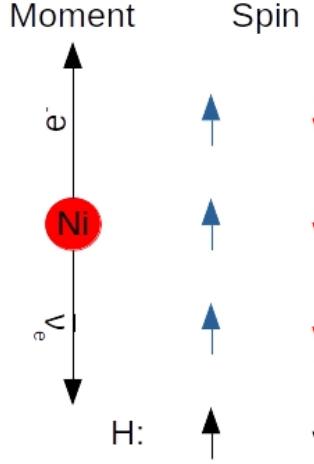


Figure 42: Schematische voorstelling van de spin in functie van het magnetisch veld

Feynmann en Gell-Mann de V-A interactie opgesteld. In deze theorie is het elektron altijd links handig en het antineutrino rechts handig.

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu(1 - \gamma^5) \quad (150)$$

Er wordt naast de vector operator ook nog een axiale vector component toegevoegd $\gamma^\mu\gamma^5$. Om te zien hoe dit nu de pariteit juist schendt, kijken we terug naar de axiale stroom van de deeltjes.

$$\begin{aligned} j^\mu &\propto \bar{u}(p')\gamma^\mu\gamma^5u(p) \\ \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (151)$$

Onder de pariteit operator verandert deze axiale stroom als volgt:

$$j^\mu = \bar{u}\gamma^\mu\gamma^5u \rightarrow \bar{u}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0u = -\bar{u}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^5u \quad (152)$$

Het product van 2 van die axiale stromen zal nog steeds behouden zijn:

$$j_1 \cdot j_2 = j_1^0 j_2^0 - j_1^k j_2^k \rightarrow (-j_1^0)(-j_2^0) - j_1^k j_2^k = j_1 \cdot j_2 \quad (153)$$

Hetgene dat niet behouden is is de combinatie van de 2 stromen.

$$\begin{aligned} j^\mu &\propto \bar{u}(p')(g_V\gamma^\mu + g_A\gamma^\mu\gamma^5)u(p) = g_V j_V^\mu + g_A j_A^\mu \\ j_V^\mu &= \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \\ j_A^\mu &= \bar{u}(p')\gamma^\mu\gamma^5u(p) \end{aligned} \quad (154)$$

Het matrix element van deze gecombineerde stroom is

$$\mathcal{M} \propto j_1 \cdot j_2 = g_V^2 j_1^V \cdot j_2^V + g_A^2 j_1^A \cdot j_2^A + g_V g_A (j_1^V \cdot j_2^A + j_1^A \cdot j_2^V) \quad (155)$$

De pariteit operator hierop uitwerkend geeft:

$$j_1 \cdot j_2 = g_V^2 j_1^V \cdot j_2^V + g_A^2 j_1^A \cdot j_2^A - g_V g_A (j_1^V \cdot j_2^A + j_1^A \cdot j_2^V) \quad (156)$$

Hier is duidelijk te zien dat de pariteit niet is behouden voor de gemengde stroom. Deze schendende component is evenredig met $\propto \frac{g_V g_A}{g_V^2 + g_A^2}$ en is maximaal als $|g_V| = |g_A|$. De uiteindelijke V-A theorie geeft de volgende stroom:

$$j^\mu \propto \bar{u}(p') \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p) \quad (157)$$

6.4 Heliciteit

Keren we terug naar de handigheid wat hier belangrijk zal zijn.

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (158)$$

Dit is niets meer dan de spin geprojecteerd op de bewegingsrichting. De eigenwaardes van de heliciteit voor spin 1/2 deeltjes zijn $\pm \frac{1}{2}$. De heliciteit zal commuteren met de dirac hamiltoniaan, $[\hat{H}_D, \hat{h}] = 0$. Belangrijk is wel dat de heliciteit niet Lorentz invariant is.

6.5 Chiraliteit

Een grootheid dat nauw verwant is met de heliciteit is de chiraliteit. Die gegeven worden door de volgende projectie operatoren:

$$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} \quad P_R = \frac{1+\gamma^5}{2} \quad (159)$$

Deze projecteren ofwel links- of rechtshandige deeltjes. Die zullen wel Lorentz invariant zijn. Omdat de γ^5 niet commuteert met de massa term van de hamiltoniaan zullen deze niet geconserveerd zijn voor massieve deeltjes. Wat deze nu juist uit projecteren is ofwel de linkshandige of rechtshandige component van een deeltje.

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u & u_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u \\ \bar{u}_L &= \bar{u}\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) & \bar{u}_R &= \bar{u}\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \end{aligned} \quad (160)$$

Met deze info kan een relatie gevonden worden tussen de heliciteit en deze projectie operatoren.

$$\begin{aligned} u_\uparrow &= \frac{1}{2}(1 + \kappa)u_R + \frac{1}{2}(1 - \kappa)u_L \\ \kappa &= \frac{p}{E + m} \end{aligned} \quad (161)$$

6.6 $f\bar{f}$ -annihilatie

De annihilatie van een fermion-antifermion in een boson wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \bar{v}\gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u &= \bar{v}\gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)^2 u \\ &= \bar{v} \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u \\ &= \bar{v}_R \gamma^\mu u_L \end{aligned} \quad (162)$$

Hier hebben we dus aangetoond dat we de V-A interactie kunnen zien als een vector interactie die bindt met linkschirale (\approx linkshandig) deeltjes en rechtschirale (\approx rechtshandige) antideeltjes. De heliciteit fractie is chirale toestanden kunnen gevonden worden door:

	e^-/f	e^+/\bar{f}	ν	$\bar{\nu}$
links handig	$\frac{1}{2}(1+\kappa)$	$\frac{1}{2}(1-\kappa)$	1	0
rechts handig	$\frac{1}{2}(1-\kappa)$	$\frac{1}{2}(1+\kappa)$	0	1

De polarisatie van $e^- = -\kappa \approx -\beta$. Het experiment om de polarisatie van het elektron te bepalen is interessant om te bekijken. De resultaten van deze experimenten wordt de polarisatie geplot in functie van β wat evenredig moet zijn.

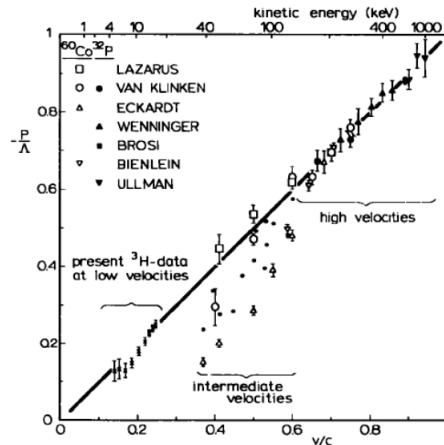


Figure 43: Resultaten van polarisatie experimenten van het elektron

Bij hoge energie werd deze relatie mooi gevuld maar zagen dat dit niet het geval was bij lagere energieën. De vraag dat hier dus op komt is nu of de pariteit enkel wordt geschonden bij hoge energie en niet bij lage energie? Meneer Van Klinken onderzoekt nu deze polarisatie bij lage energie wat een heel leerrijk experiment was, zeker de manier waarop deze is opgesteld.

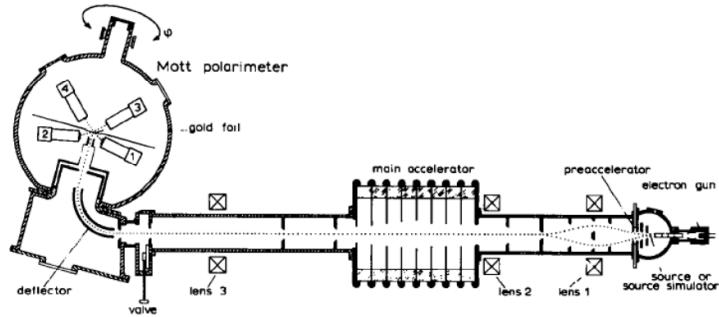


Figure 44: Experimentele opstelling voor onderzoek naar elektron polarisatie bij lage energie

Figuur 44 geeft een schematische voorstelling van het Van Klinken experiment. Hierbij worden elektronen aangemaakt in een elektronenbundel. Waar we enkel de elektronen behouden in een bepaalde chirale toestand. Vervolgens kunnen we deze elektronen versnellen (dit omdat de polarisatie dan makkelijker te bepalen is). De versnelde elektronen buigen we nu af naar de Mott polarimeter. De vraag is nu waarom we de elektronen afbuigen. Dit is door de manier waarop de polarimeter zal werken.

Intermezzo: werking van de Mott polarimeter

Deze zal gebruik maken van de Mott scattering wat niets anders is dan een elastische eN -scattering. Het elektron wordt dus verstrooit in het Coulombveld en voelt een magnetisch veld $\propto -\vec{v} \times \vec{E}$. Dit komt overeen met het angulair moment. Het elektron zal van de kern deflecteren met $V \propto \vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Het interessante is dat we de polarisatie van de spin enkel zullen kunnen waarnemen als de spin parallel staat op het magneetveld en dus loodrecht op zijn impuls staat.

De Mott polarisatie is dus enkel gevoelig voor transversale polarisatie. Het is dus nodig om de spin of bewegingsrichting met 90° te draaien. Bij de afbuiging van deze elektronen moeten we dus enkel de bewegingsrichting aanpassen en niet de spin. We kunnen dus niet gebruik maken van magneten om deze afbuiging uit te voeren. In dit experiment maken we gebruik van een elektrostatische deflector die met elektrische velden werkt om de elektronen af te buigen en deze laat de spin gerust. Uit deze experimenten was het ook mogelijk om netjes te zien dat deze de relatie tussen polarisatie en β volgen.

6.7 Pion verval

Kijken we naar het verval van het pion naar ofwel het elektron of het muon met hun respectievelijke antineutrino zien we dat er geen verschil is tussen de 2 bij het anniheren van het $d\bar{u}$ paar naar het W boson. Het verschil zal hem ook niet zitten in de vertex waar het W boson vervalt in de leptonen. In deze vertexen staan voor de elektromagnetische wisselwerking geen andere ladingen en dus elementen. Het verschil van deze diagrammen zal dus zitten in de faseruimte

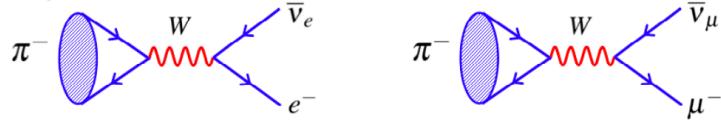


Figure 45: Diagrammen van een pion verval

van deze processen. De faseruimte voor het verval naar elektronen zal veel groter zijn dan het verval naar muonen ($\Gamma_e \gg \Gamma_\mu$). Dit omdat het elektron veel minder weegt dan het muon en meer faseruimte over heeft. We verwachten dus dat het pion zo goed als altijd zou vervallen naar een elektron. Dit is niet wat we in de werkelijkheid zien waar zo goed als alle pionen vervallen in muonen. Dit vreemde gedrag kan makkelijk begrepen worden met behulp van de chiraliteitsoperator.

Gaan we uit van een stilstaand pion dat verwalt naar een muon en een een antineutrino. Hun impuls zal dus tegengesteld zijn.



Figure 46: Schematische voorstelling van het pion verval naar muonen

Het antineutrino is massaloos en moet dus rechts handig zijn en is zijn spin dus gelijk aan zijn impuls richting. Omdat de totale spin van het pion 0 is moet de spin van het muon tegengesteld zijn en is dus ook rechtshandig. De zwakke interactie zal dit deeltje aanmaken met een linkse chiraliteit. De kan om een rechtshandig deeltje te bekomen kunnen we nu vinden door de eerder bepaalde relaties tussen chiraliteit en heliciteit, vergelijking (161). Het matrix element van dit verval wordt dus:

$$\mathcal{M} \propto \left(1 - \frac{p_l}{E_l + m_l} \right) \quad (163)$$

De breuk kunnen we aan de hand van 4 vector kinematica herschrijven. De 4 impulsen van deze deeltjes zijn:

$$\begin{aligned} p_\pi &= (m_\pi, 0, 0, 0) \\ p_l &= (E_l, 0, 0, p_l) \\ p_{\bar{\nu}} &= (p_l, 0, 0, -p_l) \end{aligned} \quad (164)$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt dat het pion stil staat, dat het antineutrino stil staat en dat de impuls van het antineutrino en lepton tegengesteld zijn. Uit

behoud van 4 impuls is het mogelijk om de E_l te berekenen.

$$\begin{aligned}
p_\pi &= p_l + p_{\bar{\nu}} \\
p_\pi - p_l &= p_{\bar{\nu}} \\
(p_\pi - p_l)^2 &= p_{\bar{\nu}}^2 \\
m_\pi^2 + m_l^2 - 2m_\pi E_l &= 0 \\
E_l &= \frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi}
\end{aligned} \tag{165}$$

Uit de massa energie relatie krijgen we p_l .

$$\begin{aligned}
E_l^2 &= p_l^2 + m_l^2 \\
p_l^2 &= \left(\frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_l} \right)^2 - m_l^2 \\
p_l &= \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}
\end{aligned} \tag{166}$$

Dit kunnen we nu allemaal invullen in de originele breuk.

$$\begin{aligned}
\frac{p_l}{E_l + m_l} &= \frac{\frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}}{\frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi} + m_l} \\
&= \frac{\frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}}{\frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi} + \frac{2m_\pi m_l}{2m_\pi}} \\
&= \frac{(m_\pi + m_l)(m_\pi - m_l)}{(m_\pi + m_l)^2} \\
&= \frac{(m_\pi - m_l)}{(m_\pi + m_l)}
\end{aligned} \tag{167}$$

Zo kunnen we inzien dat het matrix element proportioneel wordt als volgt:

$$\mathcal{M} \propto \frac{m_l}{m_\pi + m_l} \tag{168}$$

Voor de stromen van dit verval hebben we voor de leptonische stroom

$$j_l^\nu = \frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{u}(p_l) \frac{1}{2} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) v(p_{\bar{\nu}}) \tag{169}$$

en de pion stroom voor een gebonden hadron is er maar 1 relevante 4 vector p_π

$$j_\pi^\mu = \frac{g_W}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} f_\pi p_\pi^\mu \tag{170}$$

Ten laatste zal er ook nog een propagator term zijn $\frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}$. Het matrix element wordt nu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_W}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} f_\pi p_\pi^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} \frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{u}(p_l) \frac{1}{2} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) v(p_{\bar{\nu}}) \\
 &= \frac{g_W^2}{4m_W^2} g_{\mu\nu} f_\pi p_\pi^\mu \bar{u}(p_l) \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v(p_{\bar{\nu}}) \\
 &= \frac{g_W^2}{4m_W^2} f_\pi m_\pi \bar{u}(p_l) \gamma^0 \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v(p_{\bar{\nu}}) \\
 &= \frac{g_W^2}{4m_W^2} f_\pi m_\pi \bar{u}^\dagger(p_l) \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v(p_{\bar{\nu}}) \\
 &= \frac{g_W^2}{4m_W^2} f_\pi m_\pi \bar{u}^\dagger(p_l) v_\uparrow(p_{\bar{\nu}})
 \end{aligned} \tag{171}$$

Het belangrijke dat hier onthouden moet worden is dat voor de leptonen het matrix element mooi kan uitgeschreven worden maar dat dit niet lukt voor het pion. De "blob" van het pion wordt samengebracht in een factor f_π . Uiteindelijk bekomen we een links chiraal deeltje dat bindt met een rechtshandig antideeltje door de zwakke wisselwerking. Om de waarschijnlijkheid hiervan te bekijken moeten we kijken wat de fractie aan rechtse heliciteit is van het links chirale deeltje door het behoud van angulair moment. Zoals we eerder hebben uitgerekend zien we dan dat het matrix element herschreven kan worden tot

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_W^2}{4m_W^2} f_\pi m_\pi \sqrt{E_l + m_l} \sqrt{p} \left(1 - \frac{p}{E_l + m_l} \right) \\
 &= \left(\frac{g_W^2}{4m_W^2} \right)^2 f_\pi m_l \sqrt{m_\pi^2 - m_l^2}
 \end{aligned} \tag{172}$$

Het uiteindelijke matrix element moet gekwadrateerd worden en krijgen we

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= |\mathcal{M}|^2 = 2G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2) \\
 \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g_W^2}{8m_W^2}
 \end{aligned} \tag{173}$$

Hier niet zo belangrijk maar we hebben de Lorentz invariante faseruimte nog nodig $\frac{4\pi}{32\pi^2 m_\pi^2} p$. Samen met het matrix element geeft dit de verval breedte

$$\Gamma = \frac{4\pi}{32\pi^2 m_\pi^2} p \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{G_F^2}{8\pi m_\pi^3} f_\pi^2 (m_l(m_\pi^2 - m_l^2))^2 \tag{174}$$

Het belangrijke dat we moeten inzien is dat de ratio tussen de 2 verval modes van het pion afhangen van de massa's van de deeltjes.

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e(m\pi^2 - m_e^2)}{m_\mu(m\pi^2 - m_\mu^2)} \right) = 1.26 \times 10^{-4} \tag{175}$$