

POLITECHNIKA LUBELSKA

WYDZIAŁ PODSTAW TECHNIKI

Kierunek: MATEMATYKA

Specjalność: Matematyka w finansach i ubezpieczeniach



Praca licencjacka

Twierdzenia Rosenkrantza w optymalizacji Guildensterna. Ubezpieczenia
w królestwie Danii

*Rosenkrantz theorem in Guildenstern optimisation. Insurance in the
kingdom of Denmark*

Praca wykonana pod kierunkiem:

prof. dr. hab. Diego de la Vega

Autor:

Andy Larkin

nr albumu: 1991

Lublin 2013

Spis treści

Wstęp

Na początku zwrócę uwagę na sposób cytowania literatury [?], lub [?, ?]. A teraz ubogaceni w tą wiedzę – czytajcie dalej.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi kon-

sekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wiel-

kiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Rozdział 1

Twierdzenie Rosenkrantza i jego rola we współczesnej nauce

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

1.1. Podstawy teoretyczne

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek

prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Definicja 1.1. Kulą domkniętą w przestrzeni metrycznej (X, ρ) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i o promieniu r nazywamy zbiór $\{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$.

A przy okazji to zerknijcie na rysunek ?? na stronie ??.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Twierdzenie 1.1 (Pitagorasa i odwrotne do tw. Pitagorasa). *Niech \mathbf{x} oraz \mathbf{y} będą elementami przestrzeni \mathbb{L} z iloczynem skalarnym.*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{y} \text{ są ortogonalne.}$$

Dowód. Załóżmy, że zachodzi równość podana w twierdzeniu. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\ \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

a więc \mathbf{x} oraz \mathbf{y} są ortogonalne.

Założmy teraz, że wektory te są ortogonalne. Wtedy

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

zatem równość z powyższego twierdzenia oczywiście zachodzi. □

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami

Tabela 1.1: Opis podstawowego ataku

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
S	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
Z^0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
Z^1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	...
Z^2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...
...	...										

Źródło: Opracowanie własne

zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak

owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

1.2. Zastosowania twierdzenia

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami

zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

1.2.1. Zastosowania w promach kosmicznych

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności?

Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

1.2.2. Zastosowania w kopalniach węgla kamiennego

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Twierdzenie 1.2. *Niech \mathbb{V} przestrzeń unitarna, \mathbb{U} jej podprzestrzeń i niech \mathbf{f} będzie dowolnym elementem z \mathbb{V} . Element $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$ jest optymalny dla \mathbf{f} wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$ jest ortogonalny do podprzestrzeni¹ \mathbb{U}*

W przestrzeniach euklidesowych ortogonalność elementów niezerowych oznacza zwykłą prostopadłość, twierdzenie ma łatwą do zapamiętania interpretację geometryczną, podaną na rysunku ??.

Dowód twierdzenia ??. Przypuśćmy, że $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{U}$ jest taki, że $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$ nie jest ortogonalny do \mathbb{U} . Pokażę istnienie elementu $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$ który lepiej niż \mathbf{h}_0 aproksymuje \mathbf{f} .

¹ Tzn. dla dowolnego $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$ wektor $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$ jest ortogonalny do \mathbf{h}

Skoro $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$ nie jest ortogonalny do \mathbb{U} to istnieje $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$ dla którego

$$\alpha = \langle \mathbf{f} - \mathbf{h}_0, \mathbf{h} \rangle \neq 0.$$

Zdefiniujmy $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$ wzorem

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0 + \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}.$$

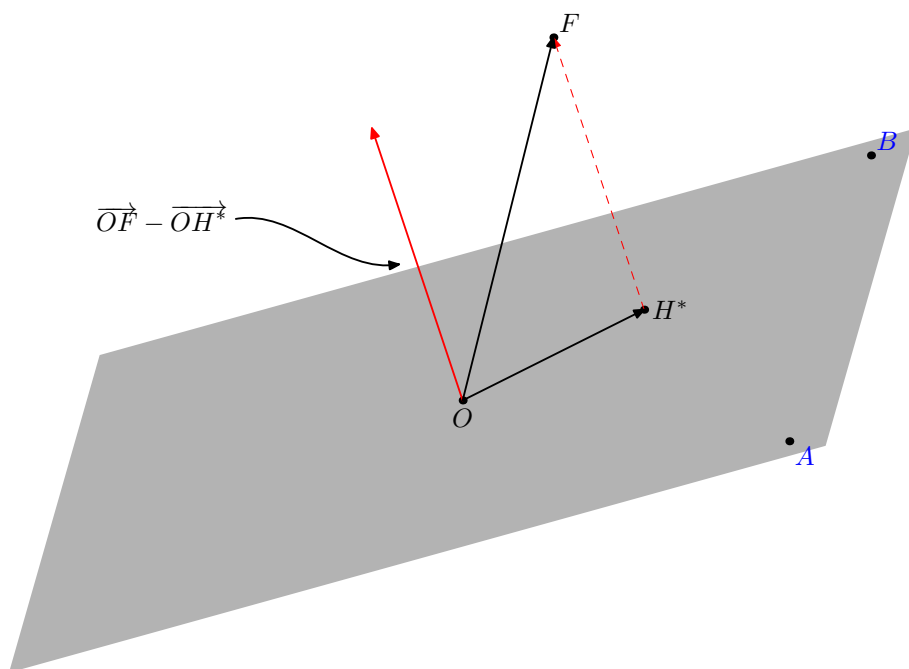
Wyliczamy

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{h}_1\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}_0) - \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\mathbf{h}\|^2} < \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2.$$

Oznacza to, że jeśli $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$ miałby być elementem optymalnym dla \mathbf{f} to na pewno $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$ jest ortogonalny do \mathbb{U} . Niech więc \mathbf{h}^* będzie taki, że $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$ jest ortogonalny do \mathbb{U} . Wykażę teraz, że jest to element optymalny dla \mathbf{f} . Niech bowiem $\mathbf{g} \in \mathbb{U}$. Wtedy korzystając z tw. ??

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}^*) + (\mathbf{h}^* - \mathbf{g})\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2 + \|\mathbf{h}^* - \mathbf{g}\|^2 \geq \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2.$$

□



Rysunek 1.1: Interpretacja tw. ?? przy aproksymowaniu wektorów trójwymiarowych zaczepionych w O wektorami z dwuwymiarowej podprzestrzeni OAB

Źródło: Opracowanie własne

Ponieważ ortogonalność elementu do całej podprzestrzeni \mathbb{U} jest równoważna jego ortogonalności do każdego elementu z dowolnie wybranej bazy przestrzeni \mathbb{U} , więc powyższe twierdzenie prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 1.1. Niech \mathbb{U} będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej \mathbb{V} i niech układ

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$$

będzie bazą \mathbb{U} . Niech $\mathbf{f} \in \mathbb{V}$ i niech

$$\mathbf{h}^* = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n$$

będzie elementem optymalnym dla \mathbf{f} . Wtedy współczynniki α_i spełniają równanie

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Okazuje się, że macierz główna układu (??) – zwana *macierzą Grama* – jest w przypadku liniowo niezależnego układu $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ nieosobliwa. W interesującej nas sytuacji wektory te stanowią bazę, więc są liniowo niezależne. Wynika stąd, że układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie, co daje nam wygodną metodę rachunkową i dodatkowo następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności aproksymacji.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Rozdział 2

Optimalizacja Guildensterna w praktycznych rachunkach, który to tytuł jest na tyle długi, że nie będzie się ładnie mieścił w paginie, więc w paginie go skrócimy

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

2.1. Szokujące porównanie

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Twierdzenie 2.1. *Zadanie aproksymacji elementu przestrzeni unitarnej elementem jej skończenie wymiarowej podprzestrzeni ma jednoznaczne rozwiązanie.*

Bazy ortogonalne

Z postaci jaką ma macierz Grama widać, że szczególnie łatwe rozwiązanie zadania aproksymacji uzyskamy, gdy baza podprzestrzeni \mathbb{U} jest ortogonalna. Wtedy bowiem uzyskamy

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle}{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i \rangle}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

a w przypadku bazy ortonormalnej nawet

$$\alpha_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Pozostaje pytanie, jak w użytecznych dla aproksymacji przypadkach uzyskać bazę ortogonalną bądź ortonormalną. Otóż z bazy ortogonalnej uzyskać bazę ortonormalną jest bardzo łatwo – każdy wektor bazy dzielimy przez jego normę. Metodę uzyskania bazy ortonormalnej z dowolnej bazy otrzymamy analizując dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.2. *Dla dowolnego układu $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ liniowo niezależnych wektorów z przestrzeni unitarnej istnieje układ ortogonalny $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ rozpinający tę samą podprzestrzeń wektorową.*

Dowód (metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta). Dowód przeprowadzimy następującą konstrukcją. Na początku \mathbf{g}_1 definiujemy jako \mathbf{f}_1 .

Przypuśćmy, że określiliśmy już element $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$, dla $i \leq n$. Wtedy określamy

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j.$$

Z konstrukcji widać, że każdy element \mathbf{g}_i jest kombinacją liniową elementów typu \mathbf{f}_j a więc należy do podprzestrzeni generowanej przez wektory \mathbf{f}_j . Ale przestrzeń ta jest n -wymiarowa. Zatem gdyby wektory \mathbf{g}_i były między sobą liniowo niezależne, to oznaczałoby, że generują identyczną przestrzeń liniową co wektory \mathbf{f}_j . Zatem dla zakończenia dowodu wystarczy wykazanie ortogonalności układu $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$, gdyż układ wektorów ortogonalnych na pewno jest liniowo niezależny.

Dowód ortogonalności układu $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ prowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę elementów w układzie. Dla jednego wektora jest to oczywistość. Przepuśćmy, że własność ortogonalności ma układ $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$, dla pewnego $i \leq n$. Pokażemy, że $\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_i \rangle = 0$, dla $k < i$.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k \rangle &= \left\langle \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \right\rangle = \\ &= \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \rangle = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle}{\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle} \langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Widać więc jasno jak można w standardowych przypadkach z dowolnej bazy skonstruować bazę ortogonalną po to, by w przyszłości w tych przestrzeniach łatwo rozwiązywać zadania aproksymacji. Okazuje się, że często bazy takie stanowią ciągi o łatwej do zapamiętania rekurencyjnej strukturze. Wykorzystywane one są nie tylko w aproksymacji, ale także w całkiem innych zagadnieniach, jak kwadratury (numeryczne całkowanie). Wymienimy kilka podstawowych przypadków. Dla jednolitości zapisu przyjmiemy umowę, że wielomian z numerem „-1” jest równy zero, do bazy oczywiście wchodzi tylko niezerowe wielomiany, tzn. począwszy od numeru 0.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak

owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek

prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

2.2. A nie, to ja się pomyliłem

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Tabela 2.1: Natężenie śmiertelności obliczone za pomocą wybranych modeli parametrycznych

	Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
	Wiek	μ_t	μ_t	e_t	μ_t	e_t
10	0,00014	0,00019	-0,00005	0,00009	0,00005	
11	0,00012	0,00021	-0,00009	0,00012	0,00000	
12	0,00015	0,00022	-0,00007	0,00015	0,00000	
13	0,00018	0,00024	-0,00006	0,00018	0,00000	
14	0,00027	0,00026	0,00001	0,00021	0,00006	
15	0,00032	0,00029	0,00003	0,00025	0,00007	
16	0,00033	0,00031	0,00002	0,00029	0,00004	
17	0,00047	0,00034	0,00013	0,00034	0,00013	
18	0,00065	0,00037	0,00028	0,00039	0,00026	

kontynuacja na następnej stronie...

kontynuacja...

	Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
	Wiek	μ_t	μ_t	e_t	μ_t	e_t
19	0,00066	0,00040	0,00026	0,00045	0,00021	
20	0,00072	0,00044	0,00028	0,00051	0,00021	
21	0,00068	0,00048	0,00020	0,00057	0,00011	
22	0,00072	0,00052	0,00020	0,00064	0,00008	
23	0,00071	0,00056	0,00015	0,00071	0,00000	
24	0,00067	0,00061	0,00006	0,00079	-0,00012	
25	0,00066	0,00067	-0,00001	0,00087	-0,00021	
26	0,00072	0,00073	-0,00001	0,00096	-0,00024	
27	0,00070	0,00079	-0,00009	0,00106	-0,00036	
28	0,00076	0,00086	-0,00010	0,00115	-0,00039	
29	0,00077	0,00094	-0,00017	0,00126	-0,00049	
30	0,00094	0,00102	-0,00008	0,00137	-0,00043	
31	0,00097	0,00111	-0,00014	0,00148	-0,00051	
32	0,00102	0,00121	-0,00019	0,00160	-0,00058	
33	0,00107	0,00131	-0,00024	0,00172	-0,00065	
34	0,00118	0,00143	-0,00025	0,00185	-0,00067	
35	0,00142	0,00156	-0,00014	0,00199	-0,00057	
36	0,00134	0,00169	-0,00035	0,00213	-0,00079	
37	0,00151	0,00184	-0,00033	0,00228	-0,00077	
38	0,00175	0,00200	-0,00025	0,00243	-0,00068	
39	0,00205	0,00218	-0,00013	0,00259	-0,00054	
40	0,00213	0,00237	-0,00024	0,00276	-0,00063	
41	0,00254	0,00258	-0,00004	0,00293	-0,00039	
42	0,00267	0,00281	-0,00014	0,00311	-0,00044	
43	0,00273	0,00306	-0,00033	0,00329	-0,00056	
44	0,00308	0,00333	-0,00025	0,00348	-0,00040	
45	0,00353	0,00362	-0,00009	0,00368	-0,00015	
46	0,00382	0,00394	-0,00012	0,00388	-0,00006	
47	0,00435	0,00428	0,00007	0,00409	0,00026	
48	0,00481	0,00466	0,00015	0,00431	0,00050	
49	0,00514	0,00507	0,00007	0,00453	0,00061	
50	0,00592	0,00552	0,00040	0,00476	0,00116	

kontynuacja na następnej stronie...

kontynuacja...

	Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
	Wiek	μ_t	μ_t	e_t	μ_t	e_t
51	0,00639	0,00601	0,00038	0,00500	0,00139	
52	0,00686	0,00654	0,00032	0,00524	0,00162	
53	0,00755	0,00711	0,00044	0,00549	0,00206	
54	0,00819	0,00774	0,00045	0,00575	0,00244	
55	0,00873	0,00842	0,00031	0,00601	0,00272	
56	0,00961	0,00916	0,00045	0,00628	0,00333	
57	0,01051	0,00997	0,00054	0,00656	0,00395	
58	0,01143	0,01085	0,00058	0,00685	0,00458	
59	0,01196	0,01180	0,00016	0,00714	0,00482	

Źródło: Opracowanie własne

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

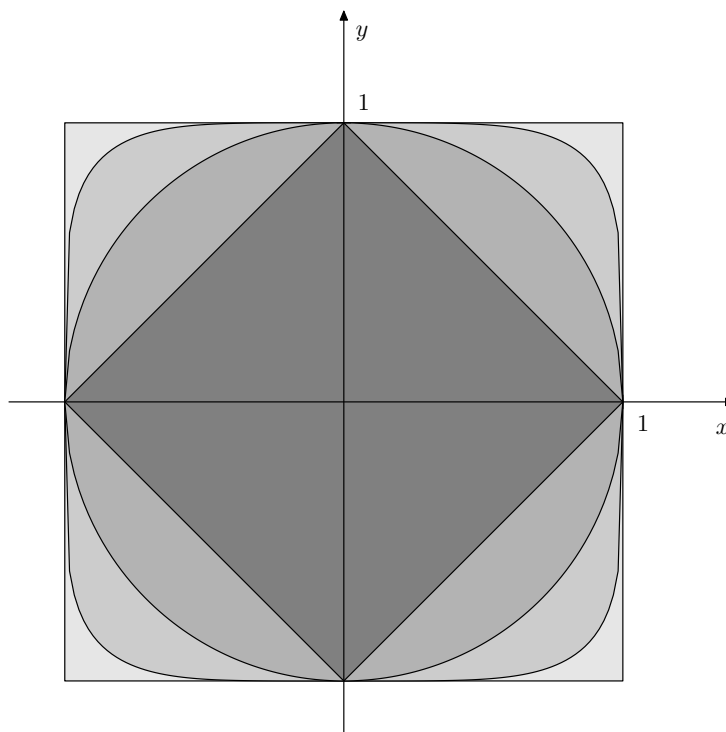
Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wiel-

Tabela 2.2: Szalenie pracochłonne wyliczenia

<i>co liczone</i>		<i>wynik</i>
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 5$	0,036783
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 20$	0,027285
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 40$	0,025807
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 100$	0,024935
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 1000$	0,024417
.....		
$\int_0^W \exp\left(-\frac{B}{s^2}\right) ds$		0,024360

Źródło: Opracowanie własne

**Rysunek 2.1:** Różne kule w \mathbb{R}^2

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [?]

kiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

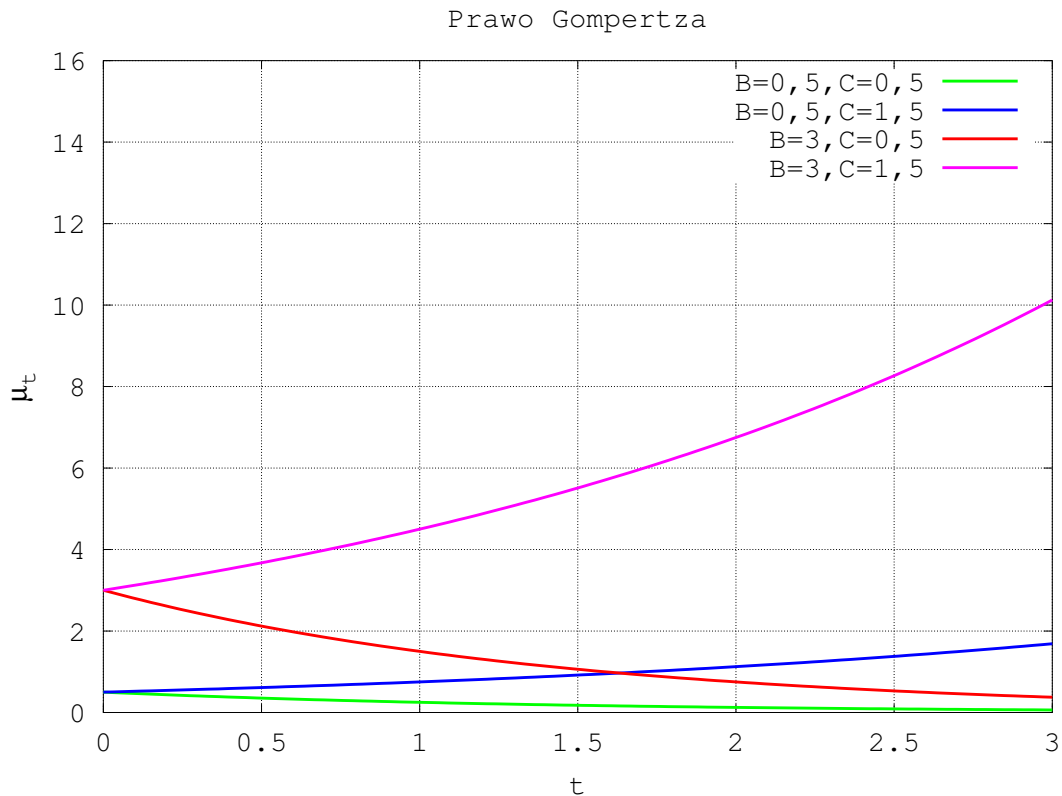
Następujący fragment programu w *Octave*

```

1 t=linspace(0,3,100);
2 m1=0.5*0.5.^t;
3 m2=0.5*1.5.^t;
4 m3=3*0.5.^t;
5 m4=3*1.5.^t;
6 plot(t,m1,"linewidth",6,"-2;B=0,5,C=0,5;",t,m2,"linewidth",6,\
7      "-3;B=0,5,C=1,5;",t,m3,"linewidth",6,"-1;B=3,C=0,5;",t,m4,\
8      "linewidth",6,"-4;B=3,C=1,5;");
9
10 grid on;
11 xlabel("t");
12 ylabel("\mu_t");
13 title("Prawo Gompertza");
14 axis([0 3 0 16]);
15
16 print('gom.pdf','-F:15');
```

wygenerował rysunek ?? . Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Na rysunku ?? możemy zauważyć dwa trójkąty równoboczne. Wielkie mi odkrycie. Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku



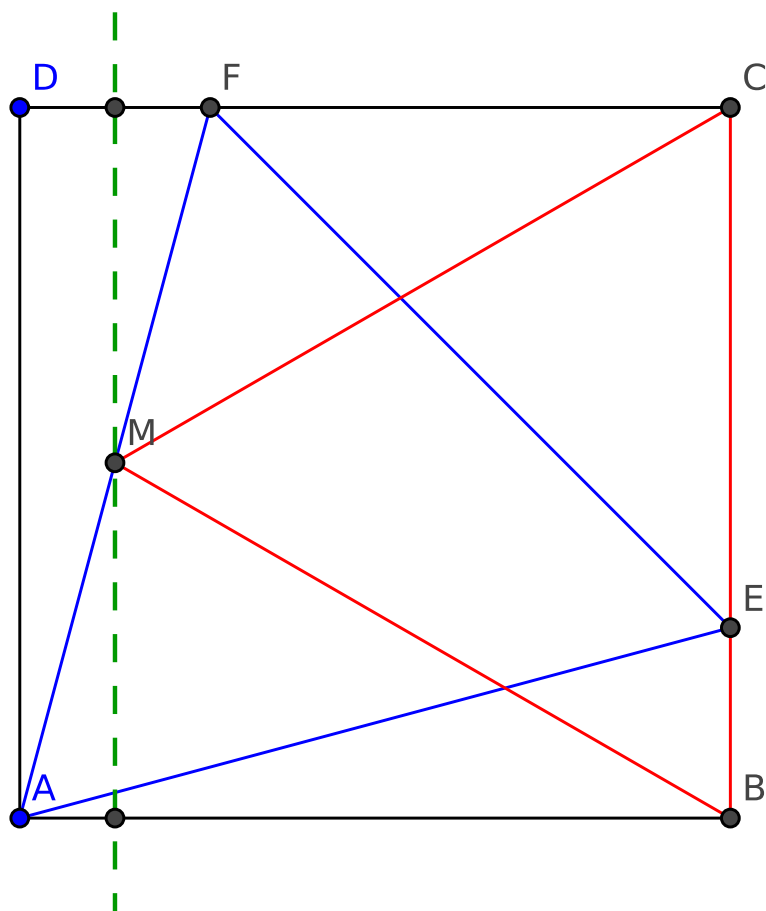
Rysunek 2.2: Natężenie śmiertelności μ_t w modelu Gompertza

Źródło: Opracowanie własne

fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami



Rysunek 2.3: Kwadracik, ilustrujący rozwiązanie zadania

Źródło: [?]

zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak

owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek

prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Podsumowanie i wnioski

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak

owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Bibliografia

- [1] T. Beth, F. C. Piper, *The Stop-and-Go Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '84, LNCS vol. 209, pp. 88–92, Springer-Verlag, 1985
- [2] W. Chambers, D. Gollmann, *Clock-Controlled Shift Registers: A Review* IEEE J. Selected Areas Comm., 7(4): 525–533, May 1989 P. R. Geffe, *How to Protect Data with Ciphers That Are Really Hard to Break* Electronics, Jan. 4, pp. 99–10, 1973
- [3] Jovan Dj. Golič, Luke O'Connor, *Embedding and Probabilistic Correlation Attacks on Clock-Controlled Shift Registers* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, pp. 230–243, Springer-Verlag, 1995
- [4] Matthias Krause, Stefan Lucks, Erik Zenner, *Improved Cryptanalysis of the Self-Shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP 2001, LNCS vol. 2119, pp. 21–35, Springer-Verlag, 2001.
- [5] W. Meier, O. Staffelbach, *The Self-shrinking Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, pp. 205–214, Springer-Verlag, 1995.
- [6] Miodrag Mihaljevic, *A Faster Cryptanalysis of the Self-shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP '96, LNCS vol. 1172, pp. 182–188, Springer-Verlag, 1996.
- [7] W. Otto, *Ubezpieczenia majątkowe. Część I Teoria ryzyka*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [8] T. R. N. Rao, Chung-Huang Yang, Kencheng Zeng, *An Improved Linear Syndrome Algorithm in Cryptanalysis With Applications* Advances in Cryptology – CRYPTO '90, LNCS vol. 537, pp. 34–47, Springer-Verlag, 1991.
- [9] Erik Zenner, *On the Efficiency of the Clock Control Guessing Attack* Information Security and Cryptology – ICISC 2002, LNCS vol. 2587, pp. 200–212, Springer-Verlag, 2003.
- [10] R. Dutak, W. Wzekly, *Matematyka ubezpieczeń majątkowych*, Uniwersytet Paragwajski, <http://www.math.uni.up/gracias/seniores>, stan w dniu 5.03.2012 r.

Spis rysunków

Spis tabel

Załączniki

1. Płyta CD z niniejszą pracą w wersji elektronicznej.
2. Oświadczenie o oryginalności pracy i możliwości jej wykorzystania.

Streszczenie (Summary)

Twierdzenia Rosenkrantza w optymalizacji Guildensterna. Ubezpieczenia w królestwie Danii

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Rosenkrantz theorem in Guildenstern optimisation. Insurance in the kingdom of Denmark

Nor again is there anyone who loves or pursues or desires to obtain pain of itself, because it is pain, but because occasionally circumstances occur in which toil and pain can procure him some great pleasure. To take a trivial example, which of us ever undertakes laborious physical exercise, except to obtain some advantage from it? But who has any right to find fault with a man who chooses to enjoy a pleasure that has no annoying consequences, or one who avoids a pain that produces no resultant pleasure? On the other hand, we denounce with righteous indignation and dislike men who are so beguiled and demoralized by the charms of pleasure of the moment, so blinded by desire, that they cannot foresee the pain and trouble that are bound to ensue.