

Politechnika Łódzka

Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki

Katedra Mikroelektroniki i Technik Informatycznych

## **PRACA DYPLOMOWA INŻYNIERSKA**

Aplikacja webowa wspomagająca proces zapamiętywania

Autor: Emil Jasiński

Numer albumu: 164357

Kierujący pracą:  
dr inż. Wojciech Tylman

Łódź, luty, 2014



## Spis treści

<b>Wstęp</b> . . . . .	5
<b>Rozdział 1. Cel i zakres pracy</b> . . . . .	7
1.1. Podstawy teoretyczne . . . . .	7
1.2. Zastosowania twierdzenia . . . . .	11
1.2.1. Zastosowania w promach kosmicznych . . . . .	11
1.2.2. Zastosowania w kopalniach węgla kamiennego . . . . .	12
<b>Rozdział 2. Optymalizacja Guildensterna w praktycznych rachunkach, który to tytuł jest na tyle długi, że nie będzie się ładnie mieścił w paginie, więc w paginie go skrócimy</b> . . . . .	17
2.1. Szokujące porównanie . . . . .	17
2.2. A nie, to ja się pomyliłem . . . . .	22
<b>Podsumowanie i wnioski</b> . . . . .	31
<b>Bibliografia</b> . . . . .	33
<b>Spis rysunków</b> . . . . .	35
<b>Spis tabel</b> . . . . .	37
<b>Załączniki</b> . . . . .	39
<b>Streszczenie (Summary)</b> . . . . .	41



## Wstęp

W obecnych czasach z każdej strony do naszego mózgu dociera masa zbędnych informacji. Część bez naszej woli jak na przykład świecący billboard reklamowy, na który mimowolnie spoglądamy jadąc samochodem, a na część decydujemy się sami gdy naszą pierwszą decyzją po przebudzeniu jest włączenie telewizora lub komputera.

Coraz więcej informacji jest nam również potrzebne w życiu zawodowym. Wpis o znajomości jednego języka obcego w CV nie wyróżnia nas już na tle innych ubiegających się o pracę. Niektóre profesje, jak na przykład zawód programisty wymagają nieustannego podnoszenia swoich kwalifikacji. Taki nadmiar informacji, którego nie jesteśmy w stanie przetworzyć nazywa się przeciążeniem informacyjnym i może skutkować pogorszeniem się naszego samopoczucia i uczuciem przytłoczenia.

Rozwiązaniem na ten rosnący problem społeczny jest wygospodarowanie każdego dnia czasu na spacer czy słuchanie muzyki, która nas odpręża. Ulgę naszemu organizmowi może też przynieść skrócenie czasu poświęconego na naukę. Okazuje się, że istnieje wiele sposobów na ułatwienie zdobywania nowej wiedzy są to między innymi:

- umiejętność szybkiego czytania
- mnemotechnika
- metoda SuperMemo

Ostatnia z wymienionych metod oraz aplikacja implementująca algorytm o tej samej nazwie jest przedmiotem tej pracy.

Projekt aplikacji przedstawionej w rozdziale "Projekt aplikacji wspomagającej zapamiętywanie" powstał by w jak największym stopniu spełnić wymagania potencjalnych użytkowników. Założono, że użytkownik może chcieć korzystać z aplikacji na swoim smartphonie, tablecie czy komputerze, bez dostępu do internetu gdy nie jest to niezbędne. Przy dodatkowym założeniu, że projekt nie wymaga dużej mocy obliczeniowej czy dostępu do natywnych elementów systemu operacyjnego, zdecydowano się na wykorzystanie zbioru standardów oferowanych przez HTML w wersji piątej.



## Rozdział 1

### Cel i zakres pracy

Celem pracy jest zaprojektowanie aplikacji, której pierwsza część pozwoli użytkownikowi utworzyć bazę wiedzy w postaci pytanie - odpowiedź. Druga część służy do prezentowania odpowiedzi. Użytkownik ma na tym etapie zastanowić się nad odpowiedzią. Gdy zna już odpowiedź lub uznaje, że przypomnienie sobie odpowiedzi trwa zbyt długo, przechodzi do części prezentacji odpowiedzi z formularzem, w którym sami oceniamy swój poziom zapamiętania tego pytania. Jest to sposób przyjęty w konkurencyjnych aplikacjach wykorzystujących algorytm SuperMemo. Zakres pracy przedstawia się następująco:

- Test przeglądarek internetowych pod kątem obsługi HTML5
- Opis użytych technologii ze standardu HTML5
- Przegląd cech Visual Studio i Asp.Net, które ułatwiają pisanie nowoczesnych aplikacji webowych
- Historia algorytmu SuperMemo
- Implementacja algorytmu SuperMemo w wersji drugiej
- Zaprojektowanie aplikacji wykorzystującej algorytm
- Testy aplikacji

#### 1.1. Podstawy teoretyczne

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,

tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Definicja 1.1.** Kulą domkniętą w przestrzeni metrycznej  $(X, \rho)$  o środku w punkcie  $x_0 \in X$  i o promieniu  $r$  nazywamy zbiór  $\{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$ .

**A przy okazji to zerknijcie na rysunek 2.1 na stronie 25.**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 1.1** (Pitagorasa i odwrotne do tw. Pitagorasa). *Niech  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{y}$  będą elementami przestrzeni  $\mathbb{L}$  z iloczynem skalarnym.*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{y} \text{ są ortogonalne.}$$

*Dowód.* Załóżmy, że zachodzi równość podana w twierdzeniu. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\ \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

a więc  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{y}$  są ortogonalne.

Założmy teraz, że wektory te są ortogonalne. Wtedy

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

zatem równość z powyższego twierdzenia oczywiście zachodzi.  $\square$

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego



**Tabela 1.1:** Opis podstawowego ataku

$A$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\dots$
$S$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\dots$
$Z^0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\dots$
$Z^1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$\dots$
$Z^2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$										

*Źródło:* Opracowanie własne

korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do

niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## 1.2. Zastosowania twierdzenia

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić

go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### **1.2.1. Zastosowania w promach kosmicznych**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność

nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### 1.2.2. Zastosowania w kopalniach węgla kamiennego

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 1.2.** *Niech  $\mathbb{V}$  przestrzeń unitarna,  $\mathbb{U}$  jej podprzestrzeń i niech  $\mathbf{f}$  będzie dowolnym elementem z  $\mathbb{V}$ . Element  $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$  jest optymalny dla  $\mathbf{f}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do podprzestrzeni<sup>1</sup>  $\mathbb{U}$*

W przestrzeniach euklidesowych ortogonalność elementów niezerowych oznacza zwykłą prostopadłość, twierdzenie ma łatwą do zapamiętania interpretację geometryczną, podaną na rysunku 1.1.

---

<sup>1</sup> Tzn. dla dowolnego  $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$  wektor  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbf{h}$

*Dowód twierdzenia 1.2.* Przypuśćmy, że  $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{U}$  jest taki, że  $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$  nie jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Pokażę istnienie elementu  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$  który lepiej niż  $\mathbf{h}_0$  aproksymuje  $\mathbf{f}$ .

Skoro  $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$  nie jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$  to istnieje  $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$  dla którego

$$\alpha = \langle \mathbf{f} - \mathbf{h}_0, \mathbf{h} \rangle \neq 0.$$

Zdefiniujmy  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$  wzorem

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0 + \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}.$$

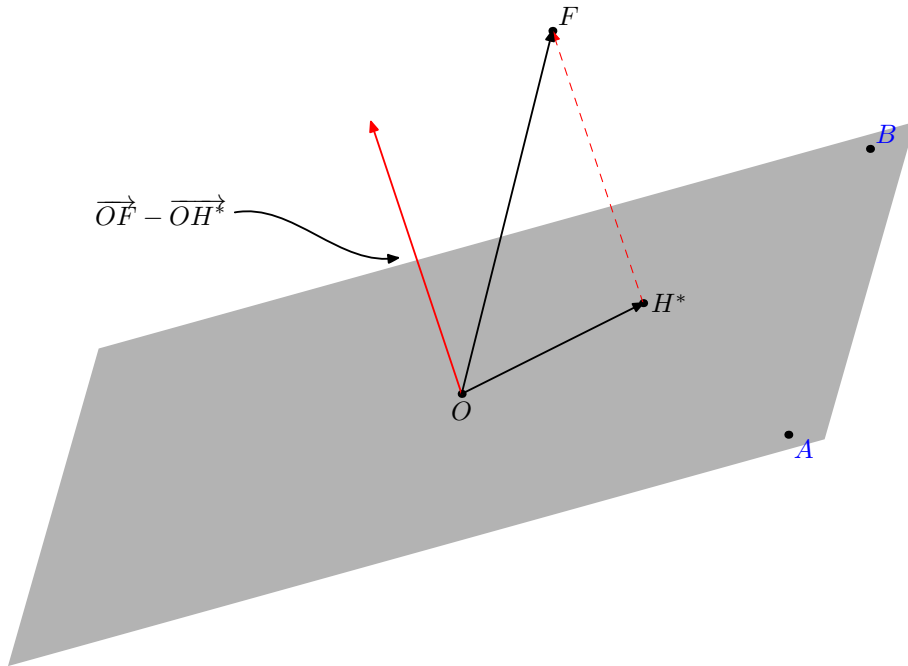
Wyliczamy

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{h}_1\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}_0) - \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\mathbf{h}\|^2} < \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2.$$

Oznacza to, że jeśli  $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$  miałby być elementem optymalnym dla  $\mathbf{f}$  to na pewno  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Niech więc  $\mathbf{h}^*$  będzie taki, że  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Wykażę teraz, że jest to element optymalny dla  $\mathbf{f}$ . Niech bowiem  $\mathbf{g} \in \mathbb{U}$ . Wtedy korzystając z tw. 1.1

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}^*) + (\mathbf{h}^* - \mathbf{g})\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2 + \|\mathbf{h}^* - \mathbf{g}\|^2 \geq \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2.$$

□



**Rysunek 1.1:** Interpretacja tw. 1.2 przy aproksymowaniu wektorów trójwymiarowych zaczepionych w  $O$  wektorami z dwuwymiarowej podprzestrzeni  $OAB$

*Źródło:* Opracowanie własne

Ponieważ ortogonalność elementu do całej podprzestrzeni  $\mathbb{U}$  jest równoważna jego ortogonalności do każdego elementu z dowolnie wybranej bazy przestrzeni  $\mathbb{U}$ , więc powyższe twierdzenie prowadzi do następującego wniosku.

*Wniosek 1.1.* Niech  $\mathbb{U}$  będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej  $\mathbb{V}$  i niech układ

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$$

będzie bazą  $\mathbb{U}$ . Niech  $\mathbf{f} \in \mathbb{V}$  i niech

$$\mathbf{h}^* = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots \alpha_n \mathbf{f}_n$$

będzie elementem optymalnym dla  $\mathbf{f}$ . Wtedy współczynniki  $\alpha_i$  spełniają równanie

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Okazuje się, że macierz główna układu (1.1) – zwana *macierzą Grama* – jest w przypadku liniowo niezależnego układu  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$  nieosobliwa. W interesującej nas sytuacji wektory te stanowią bazę, więc są liniowo niezależne. Wynika stąd, że układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie, co daje nam wygodną metodę rachunkową i dodatkowo następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności aproksymacji.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## Rozdział 2

# Optymalizacja Guildensterna w praktycznych rachunkach, który to tytuł jest na tyle długi, że nie będzie się ładnie mieścił w paginie, więc w paginie go skrócimy

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### 2.1. Szokujące porównanie

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 2.1.** *Zadanie aproksymacji elementu przestrzeni unitarnej elementem jej skończenie wymiarowej podprzestrzeni ma jednoznaczne rozwiązanie.*

## Bazy ortogonalne

Z postaci jaką ma macierz Grama widać, że szczególnie łatwe rozwiązanie zadania aproksymacji uzyskamy, gdy baza podprzestrzeni  $U$  jest ortogonalna. Wtedy bowiem uzyskamy

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle}{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i \rangle}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

a w przypadku bazy ortonormalnej nawet

$$\alpha_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Pozostaje pytanie, jak w użytecznych dla aproksymacji przypadkach uzyskać bazę ortogonalną bądź ortonormalną. Otóż z bazy ortogonalnej uzyskać bazę ortonormalną jest bardzo łatwo – każdy wektor bazy dzielimy przez jego normę. Metodę uzyskania bazy ortonormalnej z dowolnej bazy otrzymamy analizując dowód następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.2.** *Dla dowolnego układu  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  liniowo niezależnych wektorów z przestrzeni unitarnej istnieje układ ortogonalny  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  rozpinający tę samą podprzestrzeń wektorową.*

*Dowód (metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta).* Dowód przeprowadzimy następującą konstrukcją. Na początku  $\mathbf{g}_1$  definiujemy jako  $\mathbf{f}_1$ .

Przypuśćmy, że określiliśmy już element  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$ , dla  $i \leq n$ . Wtedy określamy

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j.$$

Z konstrukcji widać, że każdy element  $\mathbf{g}_i$  jest kombinacją liniową elementów typu  $\mathbf{f}_j$  a więc należy do podprzestrzeni generowanej przez wektory  $\mathbf{f}_j$ . Ale przestrzeń ta jest  $n$ -wymiarowa. Zatem gdyby wektory  $\mathbf{g}_i$  były między sobą liniowo niezależne, to oznaczałoby, że generują identyczną przestrzeń liniową co wektory  $\mathbf{f}_j$ . Zatem dla zakończenia dowodu wystarczy wykazanie ortogonalności układu  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ , gdyż układ wektorów ortogonalnych na pewno jest liniowo niezależny.

Dowód ortogonalności układu  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  prowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę elementów w układzie. Dla jednego wektora jest to oczywistość. Przepuśćmy, że własność ortogonalności ma układ  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$ , dla pewnego  $i \leq n$ . Pokażemy, że  $\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_i \rangle = 0$ , dla  $k < i$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k \rangle &= \left\langle \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \right\rangle = \\ &= \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \rangle = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle}{\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle} \langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle = 0. \end{aligned}$$





Widać więc jasno jak można w standardowych przypadkach z dowolnej bazy skonstruować bazę ortogonalną po to, by w przyszłości w tych przestrzeniach łatwo rozwiązywać zadania aproksymacji. Okazuje się, że często bazy takie stanowią ciągi o łatwej do zapamiętania rekurencyjnej strukturze. Wykorzystywane one są nie tylko w aproksymacji, ale także w całkiem innych zagadnieniach, jak kwadratury (numeryczne całkowanie). Wymienimy kilka podstawowych przypadków. Dla jednolitości zapisu przyjmiemy umowę, że wielomian z numerem „ $-1$ ” jest równy zero, do bazy oczywiście wchodzi tylko niezerowe wielomiany, tzn. począwszy od numeru 0.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia,

które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do

niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność

nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## 2.2. A nie, to ja się pomyliłem

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Tabela 2.1:** Natężenie śmiertelności obliczone za pomocą wybranych modeli parametrycznych

Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
Wiek	$\mu_t$	$\mu_t$	$e_t$	$\mu_t$	$e_t$
10	0,00014	0,00019	-0,00005	0,00009	0,00005
11	0,00012	0,00021	-0,00009	0,00012	0,00000

kontynuacja na następnej stronie. . .

kontynuacja. . .

Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
Wiek	$\mu_t$	$\mu_t$	$e_t$	$\mu_t$	$e_t$
12	0,00015	0,00022	-0,00007	0,00015	0,00000
13	0,00018	0,00024	-0,00006	0,00018	0,00000
14	0,00027	0,00026	0,00001	0,00021	0,00006
15	0,00032	0,00029	0,00003	0,00025	0,00007
16	0,00033	0,00031	0,00002	0,00029	0,00004
17	0,00047	0,00034	0,00013	0,00034	0,00013
18	0,00065	0,00037	0,00028	0,00039	0,00026
19	0,00066	0,00040	0,00026	0,00045	0,00021
20	0,00072	0,00044	0,00028	0,00051	0,00021
21	0,00068	0,00048	0,00020	0,00057	0,00011
22	0,00072	0,00052	0,00020	0,00064	0,00008
23	0,00071	0,00056	0,00015	0,00071	0,00000
24	0,00067	0,00061	0,00006	0,00079	-0,00012
25	0,00066	0,00067	-0,00001	0,00087	-0,00021
26	0,00072	0,00073	-0,00001	0,00096	-0,00024
27	0,00070	0,00079	-0,00009	0,00106	-0,00036
28	0,00076	0,00086	-0,00010	0,00115	-0,00039
29	0,00077	0,00094	-0,00017	0,00126	-0,00049
30	0,00094	0,00102	-0,00008	0,00137	-0,00043
31	0,00097	0,00111	-0,00014	0,00148	-0,00051
32	0,00102	0,00121	-0,00019	0,00160	-0,00058
33	0,00107	0,00131	-0,00024	0,00172	-0,00065
34	0,00118	0,00143	-0,00025	0,00185	-0,00067
35	0,00142	0,00156	-0,00014	0,00199	-0,00057
36	0,00134	0,00169	-0,00035	0,00213	-0,00079
37	0,00151	0,00184	-0,00033	0,00228	-0,00077
38	0,00175	0,00200	-0,00025	0,00243	-0,00068
39	0,00205	0,00218	-0,00013	0,00259	-0,00054
40	0,00213	0,00237	-0,00024	0,00276	-0,00063
41	0,00254	0,00258	-0,00004	0,00293	-0,00039
42	0,00267	0,00281	-0,00014	0,00311	-0,00044
43	0,00273	0,00306	-0,00033	0,00329	-0,00056
44	0,00308	0,00333	-0,00025	0,00348	-0,00040

kontynuacja na następnej stronie. . .

kontynuacja...

Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
Wiek	$\mu_t$	$\mu_t$	$e_t$	$\mu_t$	$e_t$
45	0,00353	0,00362	-0,00009	0,00368	-0,00015
46	0,00382	0,00394	-0,00012	0,00388	-0,00006
47	0,00435	0,00428	0,00007	0,00409	0,00026
48	0,00481	0,00466	0,00015	0,00431	0,00050
49	0,00514	0,00507	0,00007	0,00453	0,00061
50	0,00592	0,00552	0,00040	0,00476	0,00116
51	0,00639	0,00601	0,00038	0,00500	0,00139
52	0,00686	0,00654	0,00032	0,00524	0,00162
53	0,00755	0,00711	0,00044	0,00549	0,00206
54	0,00819	0,00774	0,00045	0,00575	0,00244
55	0,00873	0,00842	0,00031	0,00601	0,00272
56	0,00961	0,00916	0,00045	0,00628	0,00333
57	0,01051	0,00997	0,00054	0,00656	0,00395
58	0,01143	0,01085	0,00058	0,00685	0,00458
59	0,01196	0,01180	0,00016	0,00714	0,00482

Źródło: Opracowanie własne

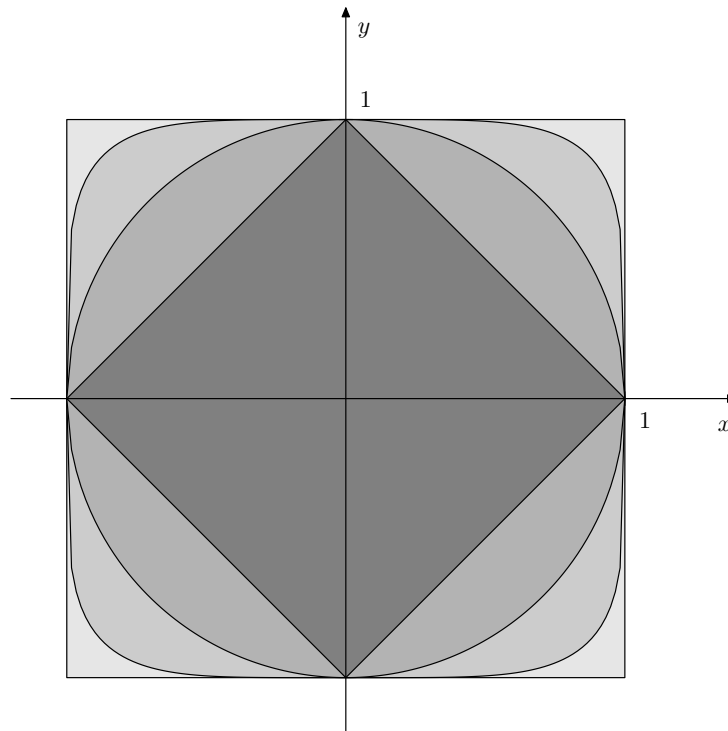
Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia,

**Tabela 2.2:** Szalenie pracochłonne wyliczenia

<i>co liczone</i>		<i>wynik</i>
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 5$	0,036783
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 20$	0,027285
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 40$	0,025807
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 100$	0,024935
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 1000$	0,024417
.....		
$\int_0^W \exp\left(-\frac{B}{s^2}\right) ds$		0,024360

Źródło: Opracowanie własne

**Rysunek 2.1:** Różne kule w  $\mathbb{R}^2$ 

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [7]

które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Następujący fragment programu w *Octave*

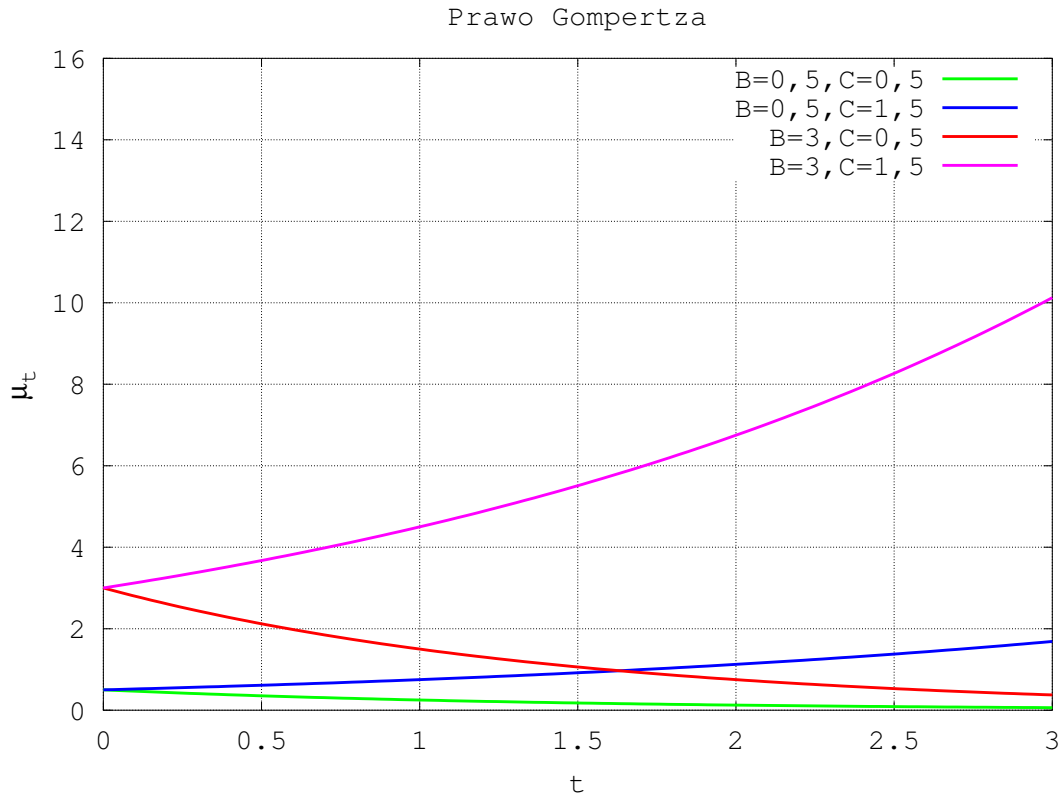
```

1 t=linspace(0,3,100);
2 m1=0.5*0.5.^t;
3 m2=0.5*1.5.^t;
4 m3=3*0.5.^t;
5 m4=3*1.5.^t;
6 plot(t,m1,"linewidth",6,"-2;B=0,5,C=0,5;",t,m2,"linewidth",6,\
7      "-3;B=0,5,C=1,5;",t,m3,"linewidth",6,"-1;B=3,C=0,5;",t,m4,\
8      "linewidth",6,"-4;B=3,C=1,5;");
9
10 grid on;
11 xlabel("t");
12 ylabel("\\mu_t");
13 title("Prawo_Gompertza");
14 axis([0 3 0 16]);
15
16 print('gom.pdf','-F:15');
```

wygenerował rysunek 2.2. Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci



urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

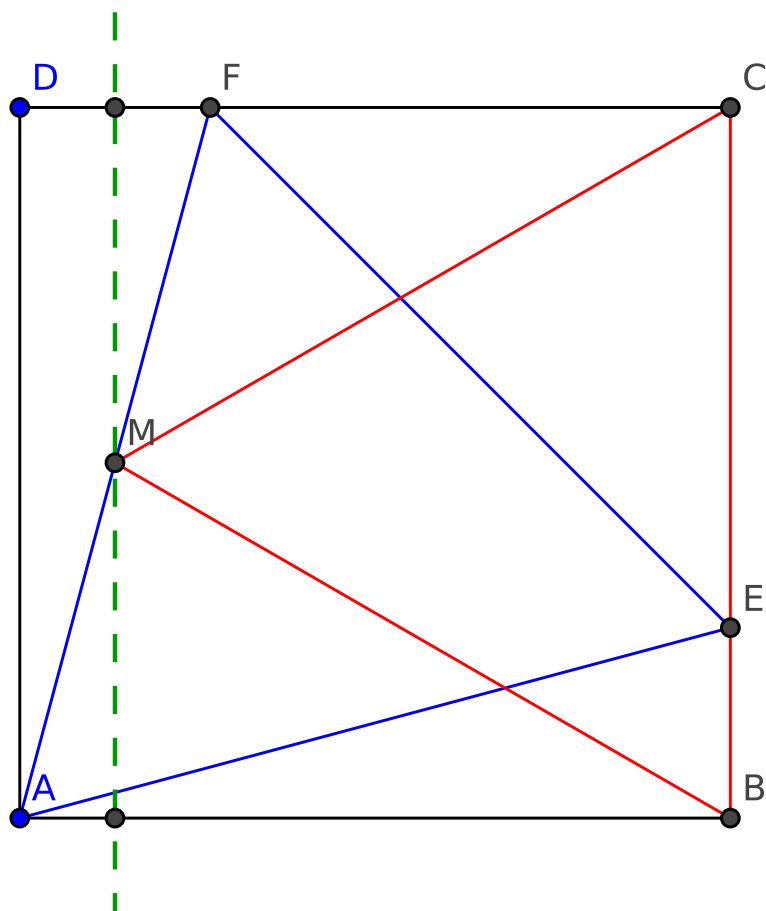


**Rysunek 2.2:** Natężenie śmiertelności  $\mu_t$  w modelu Gompertza

*Źródło:* Opracowanie własne

Na rysunku 2.3 możemy zauważyć dwa trójkąty równoboczne. Wielkie mi odkrycie. Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego



Rysunek 2.3: Kwadracik, ilustrujący rozwiązanie zadania

Źródło: [4]

korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,

tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić

go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## Podsumowanie i wnioski

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia,

które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## Bibliografia

- [1] T. Beth, F. C. Piper, *The Stop-and-Go Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '84, LNCS vol. 209, pp. 88–92, Springer-Verlag, 1985
- [2] W. Chambers, D. Gollmann, *Clock-Controlled Shift Registers: A Review* IEEE J. Selected Areas Comm., 7(4): 525–533, May 1989 P. R. Geffe, *How to Protect Data with Ciphers That Are Really Hard to Break* Electronics, Jan. 4, pp. 99–10, 1973
- [3] Jovan Dj. Golić, Luke O'Connor, *Embedding and Probabilistic Correlation Attacks on Clock-Controlled Shift Registers* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, pp. 230–243, Springer-Verlag, 1995
- [4] Matthias Krause, Stefan Lucks, Erik Zenner, *Improved Cryptanalysis of the Self-Shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP 2001, LNCS vol. 2119, pp. 21–35, Springer-Verlag, 2001.
- [5] W. Meier, O. Staffelbach, *The Self-shrinking Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, pp. 205–214, Springer-Verlag, 1995.
- [6] Miodrag Mihaljevic, *A Faster Cryptanalysis of the Self-shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP '96, LNCS vol. 1172, pp. 182–188, Springer-Verlag, 1996.
- [7] W. Otto, *Ubezpieczenia majątkowe. Część I Teoria ryzyka*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [8] T. R. N. Rao, Chung-Huang Yang, Kencheng Zeng, *An Improved Linear Syndrome Algorithm in Cryptanalysis With Applications* Advances in Cryptology – CRYPTO '90, LNCS vol. 537, pp. 34–47, Springer-Verlag, 1991.
- [9] Erik Zenner, *On the Efficiency of the Clock Control Guessing Attack* Information Security and Cryptology – ICISC 2002, LNCS vol. 2587, pp. 200–212, Springer-Verlag, 2003.
- [10] R. Dutak, W. Wzekly, *Matematyka ubezpieczeń majątkowych*, Uniwersytet Paragwajski, <http://www.math.uni.up/gracias/seniores>, stan w dniu 5.03.2012 r.





## Spis rysunków

1.1.	Interpretacja tw. ?? przy aproksymowaniu wektorów trójwymiarowych zaczepionych w $O$ wektorami z dwuwymiarowej podprzestrzeni $OAB$ . . . . .	14
2.1.	Różne kule w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	25
2.2.	Natężenie śmiertelności $\mu_t$ w modelu Gompertza . . . . .	27
2.3.	Kwadracik, ilustrujący rozwiązanie zadania . . . . .	28



## Spis tabel

1.1.	Opis podstawowego ataku . . . . .	9
2.1	Natężenie śmiertelności obliczone za pomocą wybranych modeli parametrycznych . . . .	23
2.2.	Szalenie pracochłonne wyliczenia . . . . .	25



## **Załączniki**

1. Płyta CD z niniejszą pracą w wersji elektronicznej.
2. Oświadczenie o oryginalności pracy i możliwości jej wykorzystania.



## Streszczenie (Summary)

### Aplikacja webowa wspomagająca proces zapamiętywania

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### **TYTUŁ ANGIELSKI**

*Nor again is there anyone who loves or pursues or desires to obtain pain of itself, because it is pain, but because occasionally circumstances occur in which toil and pain can procure him some great pleasure. To take a trivial example, which of us ever undertakes laborious physical exercise, except to obtain some advantage from it? But who has any right to find fault with a man who chooses to enjoy a pleasure that has no annoying consequences, or one who avoids a pain that produces no resultant pleasure? On the other hand, we denounce with righteous indignation and dislike men who are so beguiled and demoralized by the charms of pleasure of the moment, so blinded by desire, that they cannot foresee the pain and trouble that are bound to ensue.*