Trabajo práctico Nro 4

Materia: Hidrodinámica de cuerpos de agua

Alumno: Emiliano López

Ejercicio 1

A continuación obtenemos la eciación de equilibrio que satisface la deformación de la superficie libre de líquidos sujetos a rotación.

En un cuerpo rígido en rotación la velocidad absoluta está dada por $\overrightarrow{v_a} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, donde ω es la velocidad angular y r el vector posición. En el caso de los fluidos sumamos una velocidad de traslación, esto es:

$$\overrightarrow{u_a} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1}$$

definimos un operador

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_a = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right) \tag{2}$$

y lo utilizamos replanteando la Ec. 1:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_a = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\vec{r} \tag{3}$$

Del mismo modo para la aceleración:

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \left(\frac{d}{dt}\right)\overrightarrow{u_a} &= \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times\right)\overrightarrow{u_a} \\
&= \frac{d}{dt}\overrightarrow{u_a} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{u_a} \\
&= \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{u} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \underbrace{\frac{d\vec{u}}{dt}}_{ac.\ traslación} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{ac.\ angular} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{u}}_{ac.\ coriolis} + \underbrace{\vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r})}_{ac.\ centrifuga}
\end{aligned}$$

El término de la aceleración angular se anula, por lo que la aceleración de un conjunto de partículas está dado por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} + 2\vec{w} \times \vec{u} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Incorporamos estos resultados a la ecuación de Navier-Stokes:

$$\underbrace{\frac{d\vec{u}}{dt}}_{(\partial_t + \vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} + \nu\nabla^2\vec{u}$$

$$(\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} - \left[2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right] + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{4}$$

Ahora, vamos a **traducir** la ecuación previa simplificando sus términos. Si expresamos

$$\left|\vec{\Omega}\right| = |\vec{\omega}|\, sen\phi$$

Siendo ϕ la velocidad angular a la que rotan planos sobre la superficie de la tierra y $\omega = 2\pi/T$, siendo $T = 24$hs.

Traducimos

- $2\vec{\omega} \times \vec{u} = 2\vec{\Omega} \times \vec{u}$
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$

Ahora resolvemos esta última ecuación utilizando notación indicial:

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \varepsilon_{ijk}\Omega_j\varepsilon_{klm}\Omega_l r_m \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Omega_l\Omega_j r_m \\
&= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\Omega_l\Omega_j r_m \\
&= \delta_{il}\delta_{jm}\Omega_l\Omega_j r_m - \delta_{im}\delta_{jl}\Omega_l\Omega_j r_m \\
&= \Omega_i\Omega_m r_m - \Omega_l\Omega_l r_j \\
&= \vec{\Omega}(\underbrace{\vec{\Omega} \cdot \vec{r}}_{=0}) - \vec{r}(\underbrace{\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}}_{\Omega^2}) \\
&= -\vec{r}\Omega^2
\end{aligned} \tag{5}$$

Operamos este resultado del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (x, y, 0) \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\partial_x r &= \frac{x}{r} \\
\partial_y r &= \frac{y}{r}
\end{aligned}$$

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Ahora bien,

$$\nabla r^2 = 2r\nabla r$$

por lo tanto

$$\nabla\left(\frac{r^2}{2}\right) = r\nabla r = \vec{r}$$

Luego, podemos reescribir el resultado de la Ec. 5 del siguiente modo:

$$\vec{r}\Omega^2 = \nabla\left(\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right)$$

Con estos resultados reescribirmos la ecuación de movimiento (Ec. 4):

$$\begin{aligned}(\partial_t + \vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + 2\vec{\Omega}\times\vec{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \underbrace{\vartheta}_{=gz} - \nabla\left(\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right) + \nu\nabla^2\vec{u} \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla\underbrace{\left[p + \rho g z - \rho\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right]}_{P=\ presión\ modificada} + \nu\nabla^2\vec{u}\end{aligned}$$

Quedando finalmente:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{6}$$

1.a) Obtener la velocidad de rotación

El ejercicio refiere a un caso estático, donde no existe traslación. Por lo tanto:

- $\vec{u} = 0$
- $0 = -\frac{1}{\rho}\nabla P; \Rightarrow P = cte$

De manera que la Ec. 6 se reduce a:

$$p - \rho g z - \rho\frac{\Omega^2 r^2}{2} = cte \tag{7}$$

donde:

- $z = z_\omega$
- $p = p_0 = 0$
- $z_\omega(r=0) = z_{\omega_0}; \Rightarrow z_\omega = z_\omega - z_{\omega_0}$

Reescribiendo la Ec. 7 nos queda:

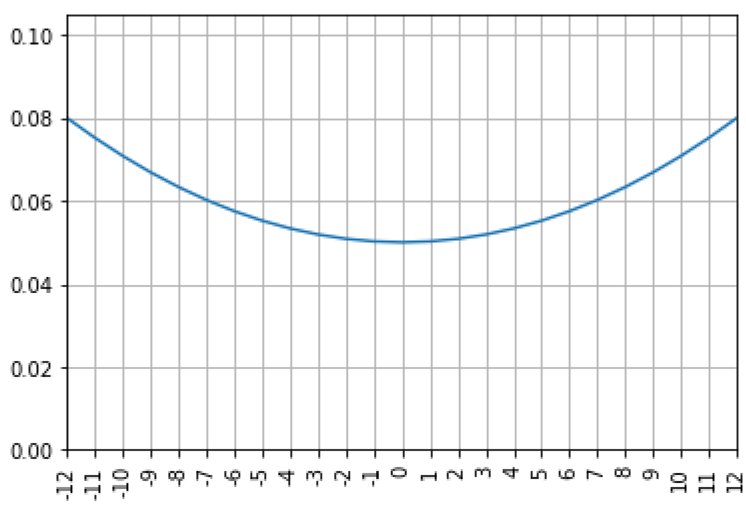
$$z_{\omega} = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + z_{\omega_0} \tag{8}$$

De la figura se observa que:

- $r = [-12, 12]$ cm; $r = [-0.12, 0.12]$ m;
- $z_{\omega_0} = 5$ cm; $z_{\omega_0} = 0.05$ m
- $z(r = \pm 12) = 8$ cm; $z(r = \pm 0.12) = 0.08$ cm

$$\begin{aligned}\Omega = \sqrt{\frac{(z_{\omega} - z_{\omega_0})2g}{r^2}} &= 6.3933\left[\frac{1}{s}\right] \\ &= 6.3933\left[\frac{1}{s}\right] * \frac{60[s]}{1[min]} * \frac{[rev]}{[2\pi Rad]} \\ &\approx 600[RPM]\end{aligned}$$

In [77]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
dr = 0.01
r = np.arange(-0.12,0.12+dr, dr)
zw0, zr12, g = 0.05, 0.08, 9.81
Omega = np.sqrt(((zr12-zw0)*2*9.81)/(r[-1]**2))
z = (Omega**2 * r**2)/(2*g) + zw0
plt.plot(r,z)
plt.xlim(-0.12,0.12)
plt.ylim(0,0.105)
plt.xticks(r,[i for i in range(-12,13)],rotation='vertical')
plt.grid()
```

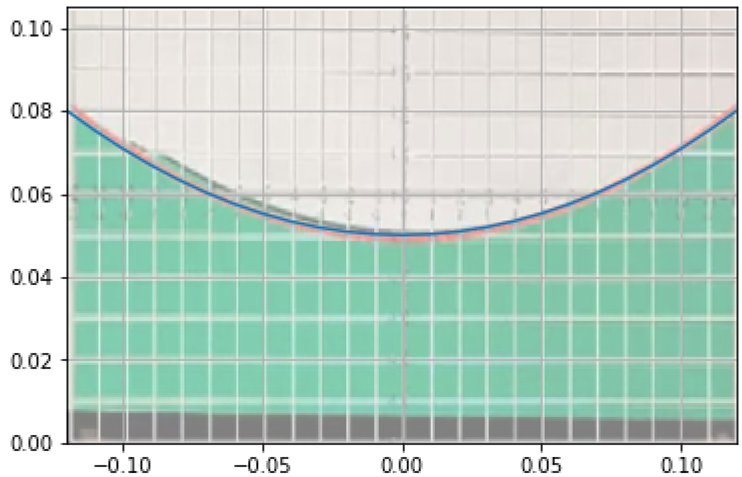


1.b) Superposición de gráfica a la figura

A continuación se superpone a la figura de la guía la parábola calculada previamente.

In [157]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.image as image
background = image.imread('background.png')
fig, ax= plt.subplots()
myaximage = ax.imshow(background, aspect="auto",
                      extent=(-0.13,0.14,-0.015,0.104),
                      alpha=0.5,
                      zorder=-1)
zw0, zr12, g, dr= 0.05, 0.08, 9.81,0.01
r = np.arange(-0.12,0.12+dr, dr)
Omega = np.sqrt(((zr12-zw0)*2*9.81)/(r[-1]**2))
z = (Omega**2 * r**2)/(2*g) + zw0
ax.plot(r,z)
ax.set_xlim(-0.12,0.12)
ax.set_ylim(0,0.105)
ax.grid()
```



Ejercicio 2

El movimiento en la capa de Ekman esta dado por:

$$i2\Omega w = iG + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{1}$$

cuyas condiciones de borde son:

- $w = 0, z = 0$
- $w = 0, z \rightarrow \infty$

La Ec. 1 es una ecuación diferencial ordinaria de 2do órden no homogénea del tipo:

$$y'' + py' + gy = f(x) \tag{2}$$

Este tipo de ecuaciones diferenciales se resuelven, inicialmente haciéndola homogenea ($f(x) = 0$), asumiendo que la solución tiene la forma $y = e^{kx}$.

Haciendo $A = \frac{2\Omega}{\nu}$ y reacomodando la Ec. (1). nos queda:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - iAw = \frac{iG}{\nu} \tag{3}$$

De modo que sus derivadas son: $w_h = e^{kx}$; $w_h' = ke^{kx}$; $w_h'' = k^2 e^{kx}$

Reemplazando esto en la Ec. 3 homogénea ($G = 0$) obtenemos:

$$k^2 e^{kz} - iAe^{kx} = 0$$
$$e^{kz}(k^2 - iA) = 0$$

De manera tal que las raices de la ecuación característica son

$$k = \pm\sqrt{iA}$$

Con estos resultados, obtenemos la solución homogénea de la Ec. 3:

$$w_h = c_1 e^{\sqrt{iA}z} + c_2 e^{-\sqrt{iA}z}$$

Expresando $\sqrt{iA} = \sqrt{\frac{A}{2}} + i\sqrt{\frac{A}{2}} = (1+i)\sqrt{\frac{A}{2}}$ nos queda:

$$w_h(z) = c_1 e^{(1+i)\sqrt{\frac{A}{2}}z} + c_2 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{A}{2}}z} \tag{4}$$

Resuelta la homogénea, planteamos ahora la solución particular:

$$w_p = Dz^2 + Ez + F$$
$$w_p' = 2Dz + E$$
$$w_p'' = 2D$$

Incorporando estos resultados a la Ec. 3,

$$2D - iA(Dz^2 + Ez + F) = \frac{iG}{\nu}$$
$$2D - iADz^2 + iAEz + iAF = \frac{iG}{\nu}$$

Por lo tanto, con los valores $D = 0$; $E = 0$; $F = \frac{G}{A\nu}$ obtenemos la **solución general** $w = w_h + w_p$:

$$w(z) = c_1 e^{(1+i)\sqrt{\frac{A}{2}}z} + c_2 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{A}{2}}z} + \frac{G}{A\nu} \tag{5}$$

Aplicamos las condiciones de borde obtenemos que $c_1 = 0$ y $c_2 = -\frac{G}{A\nu}$ y finalmente nos queda:

$$
\begin{aligned}
w(z) &= -\frac{G}{A\nu} e^{-(1+i)\sqrt{\frac{A}{2}}z} + \frac{G}{A\nu} \\
&= \frac{G}{A\nu}\left[1 - e^{-(1+i)\sqrt{\frac{A}{2}}z}\right]
\end{aligned} \tag{6}
$$

Volviendo a $A = \frac{2\Omega}{\nu}$ y haciendo $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega}$ obtenemos:

$$
w = \frac{G}{2\Omega}\left[1 - e^{-(1+i)z/\delta_E}\right] \tag{7}
$$

Reformulando el término del exponencial:

$$
\begin{aligned}
e^{-(1+i)z/\delta_E} &= e^{-z/\delta_E} e^{-iz/\delta_E} \\
&= e^{-z/\delta_E}\left[cos(z/\delta_E) - isen(z/\delta_E)\right] \\
&= e^{-z/\delta_E} cos(z/\delta_E) - ie^{-z/\delta_E} sen(z/\delta_E)
\end{aligned}
$$

Incorporando esto en la Ec. 7 nos queda:

$$
w = \frac{G}{2\Omega}\left[\underbrace{1 - e^{-z/\delta_E} cos(z/\delta_E)}_{aporta\ a\ u} - \underbrace{ie^{-z/\delta_E} sen(z/\delta_E)}_{aporta\ a\ v}\right] \tag{8}
$$

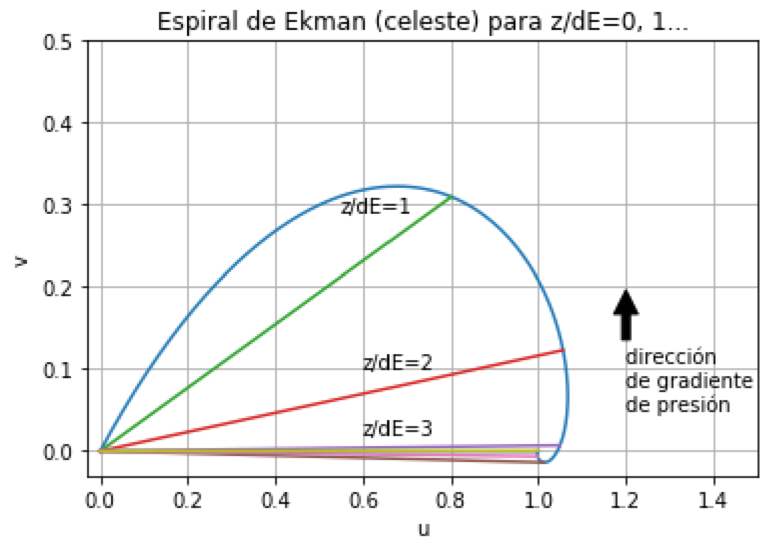
Por lo tanto, los componentes u y v de la velocidad nos quedan:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{G}{2\Omega}\left[1 - e^{-z/\delta_E} cos(z/\delta_E)\right] \\
v &= \frac{G}{2\Omega}\left[e^{-z/\delta_E} sen(z/\delta_E)\right]
\end{aligned}
$$

a) y b)

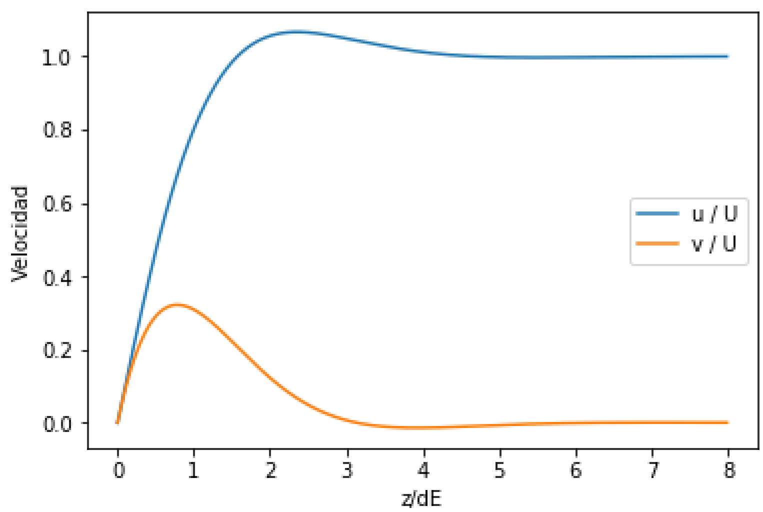
In [1]:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

sin, cos, exp = np.sin, np.cos, np.exp
nu = 0.00001
G = 1
omega = 2*np.pi/(24*60*60) # velocidad angular de la tierra
dE = np.sqrt(nu/omega)
# a)
z = np.arange(0,3,0.01)
u = (G/(2*omega)) * (1-exp(-z/dE)*cos(z/dE))
v = (G/(2*omega)) * (exp(-z/dE)*sin(z/dE))
# b) Normalizo
u1 = u/(G/(2*omega))
v1 = v/(G/(2*omega))
plt.plot(u1,v1)
# Para z/dE = 0, 1, 2...
zdE = np.arange(0,8,1)
uu = (G/(2*omega)) * (1-exp(-zdE)*cos(zdE))
vv = (G/(2*omega)) * (exp(-zdE)*sin(zdE))

uu1 = uu/(G/(2*omega))
vv1 = vv/(G/(2*omega))
i=1
for x,y in zip(uu1,vv1):
    plt.plot([0,x],[0,y])
    i+=1
plt.xlabel("u")
plt.ylabel("v")
plt.title("Espiral de Ekman (celeste) para z/dE=0, 1...")
plt.annotate('dirección \nde gradiente \nde presión',
             xy=(1.2, 0.2), xytext=(1.2, 0.05),
            arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05))
plt.annotate('z/dE=1', xy=(0,0), xytext=(0.55, 0.29))
plt.annotate('z/dE=2', xy=(0,0), xytext=(0.6, 0.1))
plt.annotate('z/dE=3', xy=(0,0), xytext=(0.6, 0.02))
plt.ylim(-0.03,0.5)
plt.xlim(-0.03,1.5)
plt.grid()
plt.show()
```



c) Gráfico u/U y v/U en función de la fracción de elevación $z/\delta E$

In [33]:
```
%matplotlib inline

zdE = np.arange(0,8,0.01)
uu  =  (1-exp(-zdE)*cos(zdE))
vv  =  (exp(-zdE)*sin(zdE))
plt.plot(zdE, uu, label="u / U")
plt.plot(zdE, vv, label="v / U")
plt.xlabel("z/dE")
plt.ylabel("Velocidad")
plt.legend()
plt.show()
```



e) Cálculo del flujo total normal a un plano arbitrario

$\int_0^{\infty}(u+iv)dz$

$$
\begin{aligned}
flujo &= \frac{G}{2\Omega}\int_0^{\infty}\left[1 - e^{-z/\delta_E}cos(z/\delta_E) - ie^{-z/\delta_E}sen(z/\delta_E)\right]dz \\
&= \frac{G}{2\Omega}\left[\int_0^{\infty}dz - \int_0^{\infty}e^{-z/\delta_E}cos(z/\delta_E)dz - i\int_0^{\infty}e^{-z/\delta_E}sen(z/\delta_E)dz\right] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

La integral del segundo y último término dan el siguiente resultado (por tabla):

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}e^{-z/\delta_E}cos(z/\delta_E)dz &= \frac{\delta_E e^{-z/\delta_E}[sen(z/\delta_E) - cos(z/\delta_E)]}{2} \\
\int_0^{\infty}e^{-z/\delta_E}sen(z/\delta_E)dz &= \frac{-\delta_E e^{-z/\delta_E}[sen(z/\delta_E) + cos(z/\delta_E)]}{2}
\end{aligned}
$$

Con estos resultados la Ec. 9 queda expresada:

$$
flujo = \frac{G}{2\Omega}\left[z - \frac{\delta_E e^{-z/\delta_E}[sen(z/\delta_E) - cos(z/\delta_E)]}{2} + i\frac{\delta_E e^{-z/\delta_E}[sen(z/\delta_E) + cos(z/\delta_E)]}{2}\right]_0^{\infty}
$$