Trabajo práctico Nro 2

Materia: Hidrodinámica de cuerpos de agua, 2017.

Alumno. Emiliano López.

1) a- La dinámica de la vorticidad está dada por

$$\partial_t \vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

Para el problema visto en clase donde suponemos una vorticidad 1D tal que $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$ y $\vec{\omega} = \omega(r, t)$

$$\vec{u} = (u_x, u_r, u_\phi)$$
$$\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = 0$$

Continuidad

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas está dada por:

$$\nabla \cdot u = \frac{1}{r}\partial_r(ru_r) + \frac{1}{r}\partial_\phi(u_\phi) + \partial_z(u_z)$$

Para el problema dado donde $u_x = \alpha x; u_r = -\alpha \frac{r}{2}; u_\phi = ?$

Calculamos

$$\nabla \cdot u = \partial_x[\alpha x] + \frac{1}{r}\partial_r[r(-\alpha \frac{r}{2})] + \frac{1}{r}\partial_\phi[u_\phi]$$

y observamos que satisface continuidad $\nabla \cdot u = 0$ ya que:

$$\partial_x[\alpha x] = \alpha$$
$$\partial_r\left[r\left(-\alpha\frac{r}{2}\right)\right] = -\alpha r$$
$$\partial_\phi[u_\phi] = 0$$

Aglutinando la ecuación nos queda:

$$\alpha + \frac{1}{r}(-\alpha)r = \alpha - \alpha = 0$$

Por lo que se satisface continuidad. Teniendo en cuenta que se considera un flujo incompresible, la conservación de la cantidad de movimiento también es nula.

Resolución de los términos de la Ec. de vorticidad

El operador ∇ en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial_r}\vec{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_\phi}\vec{\phi} + \frac{\partial}{\partial_z}\vec{z}$$

- Resolvemos $(\vec{u} \cdot \nabla)w$:

$$(\vec{u} \cdot \nabla)w = \left(u_x, u_r, u_\alpha\right) \cdot \left(\partial_x, \partial_r, \frac{1}{r}\partial_\phi\right)\omega\overrightarrow{e_x}$$

$$= \left(u_x\partial_x + u_r\partial_r + \frac{1}{r}\partial_\phi\right)\omega\overrightarrow{e_x}$$

ya que $\omega = \omega(r,t)$:

$$= u_r\frac{dw}{dr}\overrightarrow{e_x}$$

- Resolvemos $\vec{\omega} \cdot \nabla\vec{u}$

$$\vec{\omega} \cdot \nabla\vec{u} = \left(\omega, 0, 0\right) \cdot \left(\partial_x, \partial_r, \partial_\alpha\right)\vec{u}$$
$$= \omega\partial_x\vec{u}$$
$$= \omega\partial_x\left[\alpha x\overrightarrow{e_x} - \frac{\alpha r}{2}\overrightarrow{e_r}\right]$$
$$= \alpha\omega\overrightarrow{e_x}$$

- Resolvemos $\nu\nabla^2\vec{\omega}$

$$\nu\nabla^2\vec{\omega} = \nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{r\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\phi^2}\right]\overrightarrow{e_x}$$

El primer y último término se anulan ya que $\vec{\omega} = \omega(r, t)$, por lo tanto:

$$= \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \overrightarrow{e_x}$$

Combinando los últimos items resueltos en la ecuación de vorticidad, nos queda:

$$\partial_t \vec{\omega} + u_r \frac{d\omega}{dr} \overrightarrow{e_x} = \alpha\omega \overrightarrow{e_x} + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \overrightarrow{e_x}$$

Eliminando el término $\partial_t \vec{\omega}$ debido a que es un flujo estacionario y reemplazando $u_r = -\frac{\alpha r}{2}$ nos queda para la componente $\overrightarrow{e_x}$:

$$\frac{\alpha r}{2} \frac{d\omega}{dr} + \alpha\omega + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) = 0$$

$$\alpha \left(\omega + \frac{r}{2} \frac{d\omega}{dr} \right) + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) = 0$$

Teniendo en cuenta que el primer término es la regla del producto de derivar $\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 \omega)$, reacomodamos sacando como factor común $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \omega \right) + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = 0$$

Integrando lo que se encuentra entre corchetes obtenemos:

$$\frac{\alpha}{2} r^2 \omega + \nu r \frac{d\omega}{dr} = C_1$$

Haciendo $C_1 = 0$, reacomodando, nos queda

$$\nu r \frac{d\omega}{dr} = -\frac{\alpha}{2} r^2 \omega$$

Dividiendo ambos miembros por $r\omega$ y separando variables nos queda integrar

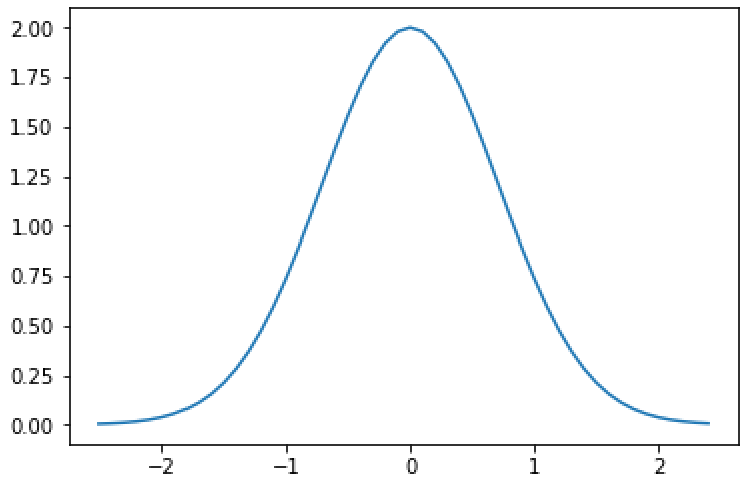
$$\int \frac{1}{\omega} d\omega = -\frac{\alpha}{2\nu} \int r dr$$

$$ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{-\alpha}{2\nu}\frac{r^2}{2}$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\alpha r^2/4\nu}$$

Visualizamos la distribución de vorticidad en el siguiente gráfico

In [2]:
```
%matplotlib inline
plt.figure()
r = np.arange(-2.5,2.5,0.1)
w0 = 2
w = w0 * np.exp(-(alpha*r**2)/(4*nu))
plt.plot(r,w)
plt.show()
```



Para obtener la componenente de la velocidad u_ϕ plateamos:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

$$= \overrightarrow{e_x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial r}u_\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}\right) + \overrightarrow{e_r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial x}\right) + \overrightarrow{e_\phi}\left(\frac{u_r}{u_x} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)$$

Debido a que la única componente no nula de la vorticidad es $\vec{\omega} = \omega\overrightarrow{e_x}$ y que $u_x = \alpha x$ y $u_r = -\frac{\alpha r}{2}$, nos queda:

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{e_x}\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\phi}{\partial r}$$

Igualando al resultado obtenido previamente (distribución gaussiana de vorticidad) tenemos:

$$\omega = \frac{1}{r}\frac{d(ru_\phi)}{dr} = \omega_0 e^{-\alpha r^2/4\nu}$$

Reorganizando nos queda la ecuación diferencial:

$$d(ru_\phi) = \omega_0 r e^{-\alpha r^2/4\nu} dr$$

Aplicando integración a ambos lados obtenemos:

$$u_\phi = \frac{\omega_0}{r}\int_0^r re^{-\alpha r^2/4\nu} dr$$

Aplicamos un cambio de variable para resolver la integral previa, haciendo:

$$u = -\frac{\alpha}{4\nu}r^2$$
$$du = -\frac{\alpha}{2\nu}r$$

Reemplazando, la integral queda del siguiente modo:

$$\frac{-2\nu}{\alpha}\int e^u du =$$

Volviendo al valor de $u = -\frac{\alpha}{4\nu}r^2$

$$\frac{-2\nu}{\alpha}\left[e^{-\frac{\alpha}{4\nu}r^2}\right]_0^r =$$
$$= \frac{-2\nu}{\alpha}\left[e^{-\frac{\alpha}{4\nu}r^2} - 1\right]$$

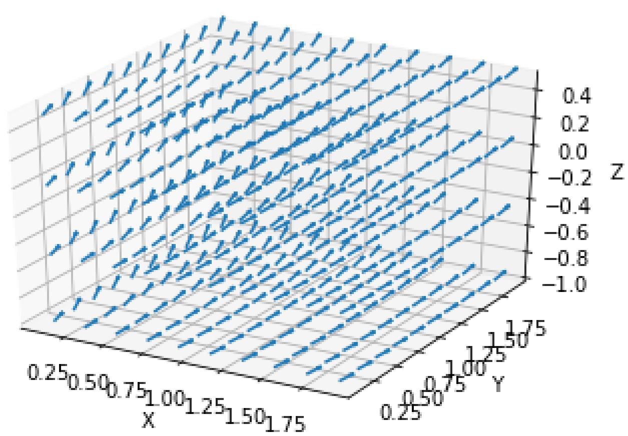
Incorporamos estos resultados en la ecuación de u_ϕ obtenemos:

$$u_\phi = \frac{2\nu\omega_0}{\alpha r}\left[1 - e^{-\alpha r^2/4\nu}\right]$$

1) b- Visualización

Teniendo las tres componenetes de velocidad u_x, u_r y u_ϕ visualizamos el campo vectorial haciendo las transformaciones a coordenadas cartesianas correspondientes. A continuación el código y su visualización correspondiente.

In [1]:
```
%matplotlib inline
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
import matplotlib
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

# Grilla espacial
x, y, z = np.meshgrid(np.arange(0.1, 2, 0.2),
                      np.arange(0.1, 2, 0.2),
                      np.arange(-1, 1, 0.5))
r = np.sqrt(x**2 + y**2)

# Parametros
alpha = 1
nu    = 0.25
w0    = 2

# Make the direction data for the arrows
ux    = alpha * x
ur    = -(alpha/2) * r
uphi  = ((2 * nu * w0) / (alpha * r)) * (1-np.exp(-
(alpha*r**2)/(4*nu)))

u = ux
v = r*np.sin(uphi)
w = r*np.cos(uphi)

ax.quiver(x, y, z, u, v, w, length=0.1, normalize=True)
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')

plt.show()
```



2) Vórtice potencial

El vórtice potencial es un ejemplo de flujo irrotacional cuya componente angular u_θ se define por:

$$u_\theta = \frac{C}{r}$$

a) Demostración de flujo irrotacional

Consideremos un sistema de coordenadas cilíndricas con el vector velocidad $\vec{u} = u_r \overrightarrow{e_r} + u_\theta \overrightarrow{e_\theta} + 0\overrightarrow{e_z}$.

Debido a que el flujo es considerado irrotacional, todos los componentes del vector de vorticidad deben ser cero. La vorticidad en coordenadas cilíndricas está dada por:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Debido a que el vórtice es 2D, la componente z de la velocidad y sus derivadas respecto a z son cero. Por lo tanto, para satisfacer la irrotacionalidad de un vórtice potencial solo nos queda la componente z de la vorticidad ($\overrightarrow{e_z}$):

$$\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0$$

Debido a que el flujo es axial simétrico, todas las derivadas respecto a θ deben ser cero, entonces:

$$\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0$$

Esta condición nos obliga a que $r u_\theta$ **deba** ser una constante, de aquí que la distribución de velocidad para un vórtice potencial está dada por:

$$u_\theta = \frac{C}{r}; u_r = 0; u_z = 0$$

b)

La constance C puede ser expresada en función de la circulación ($\Gamma = 2\pi K$), esto es:

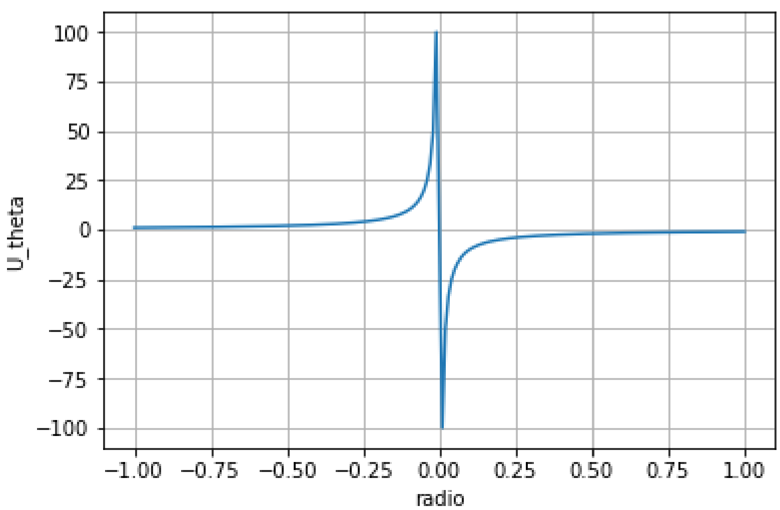
$$C = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

por lo que nos queda:

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

A continuación observamos la velocidad en función del radio. Observamos que en el origen la velocidad se hace infinita debido a la singularidad aunque esto no sucede en la realidad a causa de la viscocidad.

In [4]:
```
%matplotlib inline
plt.figure()
r = np.concatenate((np.arange(-1, 0, 0.01),
                    np.arange(0.01, 1.01, 0.01)), axis=0)
G = 1
utheta = -G/r
plt.plot(r,utheta)
plt.grid()
plt.xlabel('radio')
plt.ylabel('U_theta')
plt.show()
```



In [ ]: