

# Numeriske beregninger

## Kompendium

Jan B. Aarseth

Revidert 2014 Leif Rune Hellevik



---

# INNHOLD

<b>INNHOLD</b>	<b>i</b>
<b>FORORD</b>	<b>v</b>
<b>1 STARTVERDIPROBLEMER FOR ODL</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUKSJON . . . . .	1
1.1.1 TAYLORS METODE . . . . .	3
1.1.2 REDUKSJON AV HØYERE ORDENS LIGNINGER . . . . .	6
1.2 DIFFERANSER. NOTASJON . . . . .	10
1.2.1 BEHANDLING AV LEDDET $\frac{d}{dx} \cdot [p(x) \frac{d}{dx} u(x)]$ . . . . .	16
1.3 EULERS METODE . . . . .	18
1.4 HEUNS METODE . . . . .	23
1.5 RUNGE - KUTTA AV ORDEN 4. . . . .	27
1.6 STABILITET. STIVE LIGNINGER . . . . .	40
1.6.1 STABILITET AV EKSPLISITTE RK-METODER . . . . .	40
1.6.2 STIVE DIFFERENSIALLIGNINGER . . . . .	44
1.6.3 IMPLISITTE METODER . . . . .	51
1.7 LITT OM RK-METODER MED VARIABEL SKRITTELNGDE . . . . .	56
<b>2 SKYTETEKNIKK VED RANDVERDIPROBLEMER</b>	<b>59</b>
2.1 LINEÆRE LIGNINGER . . . . .	59
2.2 IKKE - LINEÆRE LIGNINGER . . . . .	71
2.3 LITT OM LIKEDANNHETSLØSNINGER . . . . .	75
2.4 SKYTING MED TO STARTBETINGELSER . . . . .	90
2.4.1 LINEÆRE LIGNINGER . . . . .	90
2.4.2 EKSEMPEL PÅ IKKE-LINEÆRE LIGNINGER . . . . .	98
<b>3 DIFFERANSEMETODER FOR ODL</b>	<b>103</b>
3.1 TRIDIAGONALE ALGEBRAISKE LIGNINGSSYSTEM . . . . .	103
3.2 VARMELEDNING . . . . .	106
3.2.1 KJØLERIBBE MED KONSTANT TVERRSNITT . . . . .	106
3.2.2 RIBBE MED VARIABELT TVERRSNITT . . . . .	113

3.3	TO-PUNKTSMETODE . VARMEVEKSLER. . . . .	121
3.4	LINEARISERING AV IKKE - LINÆRE ALG. LIGNINGER . . . . .	133
3.4.1	METODEN MED ETTERSLEP . . . . .	134
3.4.2	NEWTON-LINEARISERING . . . . .	135
3.4.3	EKSEMPLER PÅ STOPPKRITERIER . . . . .	139
3.4.4	LIGNINGER PÅ DELTA-FORM . . . . .	141
3.4.5	KVASILINEARISERING . . . . .	142
3.5	LØSNING AV BLASIUS MED DIFFERANSEMETODE . . . . .	145
3.6	DERIVERTE RANDBETINGELSER . . . . .	149
3.7	ITERASJONSMETODER VED LØSNING AV ODL . . . . .	152
<b>4</b>	<b>MATEMATISKE EGENSKAPER FOR PDL</b>	<b>157</b>
4.1	MODELLIGNINGER . . . . .	157
4.2	1. ORDENS PDL . . . . .	158
4.3	KLASSIFISERING AV 2. ORDENS PDL . . . . .	163
4.4	RANDBETINGELSER FOR 2. ORDENS PDL . . . . .	166
4.4.1	Hyberbolsk ligning . . . . .	166
4.4.2	Elliptisk ligning . . . . .	167
4.4.3	Parabolsk ligning . . . . .	167
4.5	VELFORMULERT PROBLEM. OPPSUMMERING . . . . .	169
4.6	PARTIKULÆRLØSNINGER AV LINEÆRE PDL . . . . .	171
<b>5</b>	<b>DIFFUSJONSPROBLEMER</b>	<b>175</b>
5.1	DIFFERANSER. NOTASJON . . . . .	175
5.2	DIFFUSJONSLIGNINGEN . . . . .	177
5.2.1	INTRODUKSJON . . . . .	177
5.2.2	IKKE-STASJONÆR COUETTE STRØMNING . . . . .	178
5.2.3	PK-KRITERIET: KRITERIET OM POSITIVE KO-EFFISIENTER . . . . .	182
5.3	STABILITETSANALYSE MED VON NEUMANNS METODE . . . . .	184
5.3.1	BRUK AV VON NEUMANN KRITERIET . . . . .	186
5.4	FLERE SKJEMA FOR PARABOLSKE LIGNINGER . . . . .	189
5.4.1	RICHARDSON-SKJEMAET (1910) . . . . .	189
5.4.2	DUFORT-FRANKEL SKJEMAET (1953) . . . . .	191
5.4.3	CRANK - NICOLSON SKJEMAET . $\theta$ - SKJEMAET . . . . .	192
5.4.4	VON NEUMANN GENERELLE STABILITETSBE-TINGELSE . . . . .	199
5.5	TRUNKERINGSFEIL, KONSISTENS OG KONVERGENS . . . . .	201
5.6	EKSEMPLER MED RADIELL SYMMETRI . . . . .	204
<b>6</b>	<b>KONVEKSJONSPROBLEMER</b>	<b>217</b>
6.1	INNLEDNING . . . . .	217
6.2	1. ORDENS SENTRALDIFFERANSESKJEMA . . . . .	218
6.3	OPPSTRØMSDIFFERANSER . . . . .	221
6.4	DEN MODIFISERTE LIGNINGEN . . . . .	223
6.5	LAX-WENDROFFS EKSPLISITTE METODE . . . . .	226
6.6	DIFFUSJON- OG DISPERSJONSFEIL . . . . .	230

6.7 WENDROFFS IMPLISITTE SKJEMA . . . . .	235
6.8 GEOMETRISK UTLEDNING AV CFL-BETINGELSEN . . . . .	242
6.9 BØLGELIGNINGEN . . . . .	244
6.10 ADVEKSJON-DIFFUSJONSIGNINGEN . . . . .	252
<b>7 STASJONÆRE PROBLEMER</b>	<b>263</b>
7.1 INNLEDNING . . . . .	263
7.2 NUMERISK LØSNING VED DIREKTE METODE . . . . .	266
7.2.1 UTNYTTELSE AV SYMMETRI . . . . .	269
7.2.2 DERIVERTE RANDBETINGELSER . . . . .	274
7.3 ITERASJONSMETODER . . . . .	280
7.3.1 EKSEMPLER . . . . .	280
7.3.2 KONVERGENSKRITERIER . . . . .	294
<b>A MATEMATISK BAKGRUNNSTOFF</b>	<b>303</b>
A.1 BRUK AV KOMPLEKSE TALL . . . . .	303
A.2 LINEARITET . . . . .	307
A.2.1 Lineær og ikke-lineær fjær . . . . .	307
A.2.2 Matematisk pendel . . . . .	308
A.3 KORT OM FOURIER-REKKER . . . . .	311
A.3.1 NOEN STANDARDBETEGNELSER . . . . .	311
A.3.2 Litt om dispersjon . . . . .	311
A.3.3 REKKEUTVIKLING AV KONTINUERLIGE FUNKSJONER . . . . .	312
A.3.4 Eksempler på rekkeutviklinger . . . . .	313
A.3.5 Fourier-rekker for diskrete funksjoner . . . . .	316
A.4 KORT OM LINEÆRE DIFFERANSELIGNINGER . . . . .	318
A.5 LITT NUMERISK LINEÆR ALGEBRA . . . . .	325
A.5.1 Vektor - og matrisenormer . . . . .	325
A.5.2 Lineære ligninger . . . . .	327
<b>B GRUNNLIGNINGER</b>	<b>335</b>
<b>C GRENSESIKT</b>	<b>347</b>
C.1 GRENSESIKT-LIGNINGER . . . . .	347
C.2 BLASIUS LIGNING . . . . .	350
C.3 FALKNER-SKAN LIGNINGEN . . . . .	353
<b>D VANNTANK</b>	<b>355</b>
D.1 TANK MED KONSTANT VEGGYKKELSE . . . . .	355
D.2 TANK MED VARIABEL VEGGYKKELSE . . . . .	364
<b>E JEFFREY - HAMEL STRØMNING</b>	<b>375</b>
E.1 BRUK AV KOMPLEKSE TALL . . . . .	375
E.1.1 LIGNINGER I POLARE KOORDINATER . . . . .	375
<b>F LØSNING AV BLASIUS OG FALKNER-SKAN LIGN.</b>	<b>385</b>

<b>G ANALYTISKE LØSNINGER</b>	<b>397</b>
G.1 INNLEDNING . . . . .	397
G.2 ENKEL MATEMATISK PENDEL . . . . .	399
G.3 STOR NEDBØYNING AV KRAGBJELKE . . . . .	402
G.4 LIGNINGEN $y''(x) = a \cdot y^2(x)$ . . . . .	405
G.5 RIBBE MED VARIABELT TVERRSNITT . . . . .	408
G.6 IKKE-STASJONÆR COUETTE-STRØMNING . . . . .	411
G.7 VARMELEDNING I EN ENDELIG STAV . . . . .	414
G.8 OPPSTART AV STRØMNING I RØR . . . . .	416
G.9 AVKJØLING AV KULE . . . . .	418
G.10 PERIODISKE LØSN. AV ADVEKSJONDIFFUSJONSIGN. .	422
<b>H PROGRAMMET DIFFAF</b>	<b>427</b>
<b>I BANDMATRISER</b>	<b>431</b>
<b>J DET AVGRENSA 3-LEGEME PROBLEMET</b>	<b>451</b>
J.1 Romskip i jord-måne systemet. . . . .	456
<b>K OPPSTART AV VARMEVEKSLER</b>	<b>459</b>
K.1 Innføring av dimensjonsløse størrelser . . . . .	460
<b>Bibliografi</b>	<b>469</b>

---

# FORORD

Dette er eit kompendium meint for bruk i faget “TKT 4140 Numeriske beregninger med datalab”. Den noverande utgåva er ei oppgradering av eit kompendium utvikla over mange år av amanuensis emeritus Jan B. Aarseth. Dei fleste endringar er av layout-messig karakter (farging av eksemplar, likningar osb.), men det viktigste er nok at kompendiumet no er skrive i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X og at ein med på kjøpet har fått eit register som har blitt etterlyst av studentar. Denne oppgraderinga er i all hovudsak gjort av studentane Eirik Løland Eide, Eirik Mørkved Helsingør og Frode Kjøsnes, i eit prosjekt støtta av IKTiSU.  
Min ambisjon er å endra og forbetra kompendiumet i takt med endringar i kursinhald og utvikling av faget elles. Difor vil også tilbakemeldingar om feil og forslag til forbeteringar bli tatt i mot med takk.

Trondheim, 15. januar 2014

Leif Rune Hellevik



# KAPITTEL 1

---

## STARTVERDIPROBLEMER FOR ORDINÆRE DIFFERENSIALLIGNINGER

### 1.1 INTRODUKSJON

Med et startverdiproblem (initialverdiproblem) for en ordinær differensialligning (ODL), mener vi et problem der alle grensebetingelsene (randbetingelserne) er gitt for en og samme verdi av den uavhengige variable. For en 1. ordens ligning får vi eksempelvis:

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x, y) \\y(x_0) &= a\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

mens vi for en 2. ordens ligning får:

$$y''(x) = f(x, y, y')\tag{1.1.2a}$$

$$y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b\tag{1.1.2b}$$

En 1. ordens ODL, som vist i (1.1.1), vil alltid være et startverdiproblem. For (1.1.2) derimot, kan vi f.eks. spesifisere følgende randbetingelser:

$$y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b$$

Med disse randbetingelsene framstiller (1.1.2) et randverdiproblem. I mange anvendelser er randverdiproblemer mer vanlig enn startverdiproblemer. Men løsningsteknikken for startverdiproblemer kan ofte kan brukes til å løse randverdiproblemer.

Både fra et analytisk og numerisk synspunkt er startverdiproblemer enklere å løse enn randverdiproblemer, og metoder for løsning av startverdiproblemer

er bedre utviklet enn for randverdiproblemer.

Dersom vi skal løse et startverdiproblem av typen (1.1.1), må vi først være sikker på at det har en løsning. I tillegg vil vi forlange at denne løsningen er entydig. En tilstrekkelig betingelse for dette er at både  $f(x, y)$  og  $\frac{\partial f}{\partial y}$  er kontinuerlige i og rundt  $x_0$ . For (1.1.2) blir betingelsen at  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  og  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  er kontinuerlige i og rundt  $x_0$ , og tilsvarende for ligninger av høyere orden.

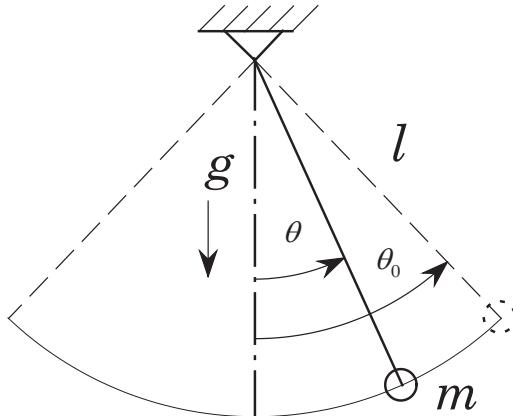
Et eksempel:

$$y' = y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0$$

Her er  $f = y^{\frac{1}{3}}$  og  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$ .  $f$  er kontinuerlig i  $x = 0$ , men det er ikke  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Det kan vises at denne diff. ligningen har to løsninger:  $y = 0$  og  $y = (\frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}}$ . Forhåpentligvis fremstiller ikke denne ligningen et fysisk problem.

Et mer aktuelt problem er vist nedenfor.



Figur 1.1

Figuren viser en matematisk pendel der bevegelsen beskrives av følgende ligning:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (1.1.3a)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{d\tau}(0) = 0 \quad (1.1.3b)$$

Innfører en dimensjonsløs tid  $t$  gitt ved  $t = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \tau$  slik at (1.1.3) kan skrives:

$$\ddot{\theta}(t) + \sin(\theta(t)) = 0 \quad (1.1.4a)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (1.1.4b)$$

Prikk betyr derivasjon m.h.p den dimensjonløse tiden  $t$ . For små utslag kan vi sette  $\sin(\theta) \approx \theta$ , slik at (1.1.4) blir:

$$\ddot{\theta}(t) + \theta(t) = 0 \quad (1.1.5a)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0 \quad (1.1.5b)$$

Forskjellen mellom (1.1.4) og (1.1.5) er at den siste er lineær, mens den første er ikke-lineær. Den analytiske løsningen av (1.1.4) er gitt i appendiks G.2.

En  $n$ ’te ordens lineær, ordinær differensialligning kan skrives på formen:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \quad (1.1.6)$$

der  $y^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  henviser til den  $k$ ’te deriverte og  $y^{(0)}(x) = y(x)$ .

Dersom en eller flere av koeffisientene  $a_k$  også er funksjon av minst en  $y^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , er differensialligningen ikke-lineær. (Se appendiks A.2 for flere detaljer). Fra (1.1.6) følger at (1.1.4) er ikke-lineær og (1.1.5) er lineær.

Analytiske løsninger av ikke-lineære diff.-ligninger er sjeldne, og bortsett fra noen spesielle typer, finnes det ingen generell fremgangsmåte for å finne slike løsninger. Derfor må ikke-lineære ligninger vanligvis løses numerisk. I mange tilfeller gjelder dette også for lineære ligninger. Eksempelvis finnes det ikke noen metode for å løse den generelle, lineære 2. ordens ligningen gitt ved:

$$a_2(x) \cdot y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x)$$

Fra et numerisk synspunkt, er hovedforskjellen mellom lineære ligninger og ikke-lineære det mangfoldet av løsninger som kan oppstå ved løsning av de sistnevnte. I en lineær diff.-ligning vil det fremgå fra selve ligningen om det finnes spesielle kritiske punkt der løsningen skifter karakter, mens dette ofte ikke er tilfelle for ikke-lineære ligninger.

Eksempelvis har ligningen  $y'(x) = y^2(x)$ ,  $y(0) = 1$  løsningen  $y(x) = \frac{1}{1-x}$  slik at  $y(x) \rightarrow \infty$  for  $x \rightarrow 1$ , noe som ikke fremgår fra selve diff. ligningen.

### 1.1.1 TAYLORS METODE

Taylors formel for rekkeutvikling av en funksjon  $f(x)$  rundt er gitt ved:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \text{restledd}$$

La oss bruke denne formelen til å finne de første leddene i rekkeutviklingen for  $\theta(t)$  rundt  $t = 0$  fra diff.-ligningen gitt i (1.1.5):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) + \theta(t) &= 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Vi setter:  $\theta(t) \approx \theta(0) + t \cdot \dot{\theta}(0) + \frac{t^2}{2} \ddot{\theta}(0) + \frac{t^3}{6} \dddot{\theta}(0) + \frac{t^4}{24} \theta^{(4)}(0)$

Med bruk av startbetingelsene  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$  får vi:

$$\theta(t) \approx \theta_0 + \frac{t^2}{2} \ddot{\theta} + \frac{t^3}{6} \dddot{\theta}(0) + \frac{t^4}{24} \theta^{(4)}(0)$$

Fra diff.ligningen:  $\ddot{\theta}(t) = -\theta(t) \rightarrow \ddot{\theta}(0) = -\theta(0) = -\theta_0$

Ved derivasjon:  $\ddot{\theta}(t) = -\dot{\theta}(t) \rightarrow \ddot{\theta}(0) = -\dot{\theta}(0) = -\theta_0$

$$\theta^{(4)}(t) = -\ddot{\theta}(t) \rightarrow \theta^{(4)}(0) = -\ddot{\theta}(0) = \theta_0$$

Innsatt i uttrykket for  $\theta(t)$ :  $\theta(t) \approx \theta_0 \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) = \theta_0 \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}\right)$

Tar vi med  $n$  ledd, vil vi få:

$$\theta(t) \approx \theta_0 \cdot \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)$$

Lar vi  $n \rightarrow \infty$ , ser vi at parentesen gir rekka for  $\cos(t)$ . I dette tilfellet har vi funnet den eksakte løsningen  $\theta(t) = \theta_0 \cos(t)$  av diff.-ligningen. Fordi denne ligningen er lineær, greier vi i dette tilfellet å finne en sammenheng mellom koeffisientene slik at vi kjenner igjen rekkeutviklingen for  $\cos(t)$ .

La oss så forsøke den samme prosedyren på den ikke-lineære versjonen (1.1.4)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) + \sin(\theta(t)) &= 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Vi starter på samme måte:  $\theta(t) \approx \theta(0) + \frac{t^2}{2} \ddot{\theta}(0) + \frac{t^3}{6} \dddot{\theta}(0) + \frac{t^4}{24} \theta^{(4)}(0)$

Fra diff.-ligningen  $\ddot{\theta} = -\sin(\theta) \rightarrow \ddot{\theta}(0) = -\sin(\theta_0)$  som ved fortløpende derivasjon gir:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta}(0) = 0 \\ \theta^{(4)} &= \sin(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 - \cos(\theta) \cdot \ddot{\theta} \rightarrow \theta^{(4)}(0) = -\ddot{\theta}(0) \cos(\theta(0)) = \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) \end{aligned}$$

Innsatt ovenfor:  $\theta(t) \approx \theta_0 - \frac{t^2}{2} \sin(\theta_0) + \frac{t^4}{24} \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)$

Vi kan ta med flere ledd, men nå blir derivasjonen mer komplisert og det er vanskelig å finne noen sammenheng mellom koeffisientene. Når vi først har funnet en tilnærmelse for  $\theta(t)$ , kan vi finne en tilnærmelse for  $\dot{\theta}(t)$  ved derivasjon:  $\dot{\theta}(t) \approx -t \sin(\theta_0) + \frac{t^3}{8} \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)$

La oss se hvordan vi kan gjøre rekkeutviklingen ved bruk av **Maple**.

> **ode:=diff(theta(t),t,t)+sin(theta(t))=0;**

$$ode := \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) + \sin(\theta(t)) = 0$$

```
> inits:=theta(0)=theta[0], D(theta)(0)=0;
```

$$inits := \theta(0) = \theta_0, D(\theta)(0) = 0$$

```
> dsolve(ode,inits,theta(t),type=series);
```

$$\theta(t) = \theta_0 - \frac{1}{2} \sin(\theta_0)t^2 + \frac{1}{24} \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)t^4 + O(t^6)$$

Rekkeutviklinger er ofte nyttige rundt startpunktet når vi løser startverdi-problemer. Teknikken også kan brukes på ikke-lineære ligninger.

Symbolske matematikkprogram som **Maple** og **Mathematica** gjør dette enkelt.

Vi avslutter med en av de tidligst kjente diff.-ligninger som Newton løste med rekkeutvikling i 1671.

$$y'(x) = 1 - 3x + y + x^2 + xy, \quad y(0) = 0$$

Rekkeutvikling rundt  $x = 0$ :

$$y(x) \approx x \cdot y'(0) + \frac{x^2}{2} y''(0) + \frac{x^3}{6} y'''(0) + \frac{x^4}{24} y^{(4)}(0)$$

Fra diff.-ligningen:  $y'(0) = 1$

Ved fortløpende derivasjon:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -3 + y' + 2x + xy' + y \rightarrow y''(0) = -2 \\ y'''(x) &= y'' + 2 + xy'' + 2y' \rightarrow y'''(0) = 2 \\ y^{(4)}(x) &= y''' + xy'' + 3y'' \rightarrow y^{(4)}(0) = -4 \end{aligned}$$

Innsatt ovenfor:  $y(x) \approx x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}$

Newton gav følgende løsning:  $y(x) \approx x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{45}$

Nå kan du undersøke om Newton regnet rett. I dag er det mulig å gi løsningen på lukket form med kjente funksjoner:

$$\begin{aligned} y(x) = & 3\sqrt{2\pi e} \cdot \exp\left[x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right] \cdot \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\ & + 4 \cdot \left[1 - \exp\left[x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right]\right] - x \end{aligned}$$

Legg merke til kombinasjonen  $\sqrt{2\pi e}$ . Se Hairer et al. [16], avsnitt 1.2, for flere detaljer om klassiske differensialligninger.

### 1.1.2 REDUKSJON AV HØYERE ORDENS LIGNINGER

Når vi skal løse startverdiproblemer, må vi vanligvis skrive disse som sett av 1. ordens ligninger fordi de fleste programmpakker krever dette.

Eksempel:  $y''(x) + y(x) = 0$ ,  $y(0) = a_0$ ,  $y'(0) = b_0$

Denne ligningen kan vi for eksempel skrive som et system på følgende måte:

$$\begin{aligned}y'(x) &= g(x) \\g'(x) &= -y(x) \\y(0) &= a_0, \quad g(0) = b_0\end{aligned}$$

Et annet eksempel:

$$\begin{aligned}y'''(x) + 2y''(x) - (y'(x))^2 + 2y(x) &= x^2 \\y(0) = a_0, \quad y'(0) = b_0, \quad y''(0) &= c_0\end{aligned}$$

$$\text{Setter } y'(x) = g(x), \quad y''(x) = g'(x) = f(x)$$

Systemet kan da skrives:

$$\begin{aligned}y'(x) &= g(x) \\g'(x) &= f(x) \\f'(x) &= -2f(x) + (g(x))^2 - 2y(x) + x^2\end{aligned}$$

med startbetingelser  $y(0) = a_0$ ,  $g(0) = b_0$ ,  $f(0) = c_0$

Dette er greit nok for litt håndregning, men når vi bruker ferdige program-pakker, trengs en mer systematisk fremgangsmåte. La oss bruke ligningen ovenfor som et eksempel.

Starter med å døpe om  $y$  til  $y_1$ . Vi får da følgende prosedyre:

$$\begin{aligned}y' &= y'_1 = y_2 \\y'' &= y''_1 = y'_2 = y_3\end{aligned}$$

Systemet kan da skrives:

$$\begin{aligned}y'_1(x) &= y_2(x) \\y'_2(x) &= y_3(x) \\y'_3(x) &= -2y_3(x) + (y_2(x))^2 - 2y_1(x) + x^2\end{aligned}$$

med startbetingelser  $y_1(0) = a_0$ ,  $y_2(0) = b_0$ ,  $y_3(0) = c_0$

Den generelle fremgangsmåten for å redusere en høyere ordens ligning til et system av 1. ordens ligninger blir da som følger:

Gitt følgende ligning:

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(x_0) &= a_1, y'(x_0) = a_2, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = a_m \\ \text{der } y^{(m)} &\equiv \frac{d^m y}{dx^m} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Med  $y = y_1$  setter vi:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ y'_{m-1} &= y_m \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$y_1(x_0) = a_1, y_2(x_0) = a_2, \dots, y_m(x_0) = a_m$$

### Eksempel 1.1

Skriv følgende ligning som et system:

$$\begin{aligned} y''' - y'y'' - (y')^2 + 2y &= x^3 \\ y(0) = a, y'(0) = b, y''(0) &= c \end{aligned}$$

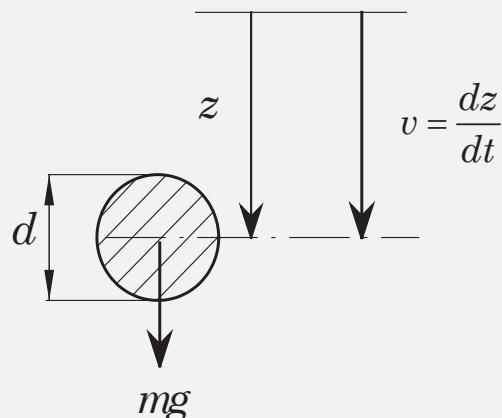
Skriver først:

$$y''' = y'y'' + (y')^2 - 2y + x^3$$

Ved bruk av (1.1.8):

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= y_2 y_3 + (y_2)^2 - 2y_1 + x^3 \\ y_1(0) = a, y_2(0) &= b, y_3 = c \end{aligned}$$

### Eksempel 1.2 Kule i fritt fall



Figur 1.2

Figuren viser en kule med diameter  $d$  og masse  $m$  som faller vertikalt i en fluid. Bruk av Newtons 2. lov i  $z$ -retning gir:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - m_f g - \frac{1}{2} m_f \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} \rho_f v |v| A_k C_D \quad (1.1.9)$$

der de enkelte leddene har følgende betydning:

$m = \rho_k V$  der  $\rho_k$  er kulas tetthet og  $V$  er kulas volum

$m_f = \rho_f V$  der  $\rho_f$  er fluidets tetthet

$m_f g = \text{oppdrift}$

$C_D = \text{dragkoeffisienten}$

$A_k = \text{kulas arealprosjeksjon} = \frac{\pi}{4} d^2$

$\frac{1}{2} m_f = \text{hydrodynamisk masse (addert masse)}$

Utrykket for den hydrodynamiske massen er utledet i White [22], side 539–40. Innfører følgende forkortelser:

$$\rho = \frac{\rho_f}{\rho_k}, \quad A = 1 + \frac{\rho}{2}, \quad B = (1 - \rho)g, \quad C = \frac{3\rho}{4d} \quad (1.1.10)$$

Ligning (1.9) kan da skrives:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{A} (B - C \cdot v |v| C_d) \quad (1.1.11)$$

$C_D$  finnes eksperimentelt som funksjon av Reynoldstallet  $Re = \frac{\nu d}{\nu}$  der  $\nu$  er den kinematiske viskositeten.

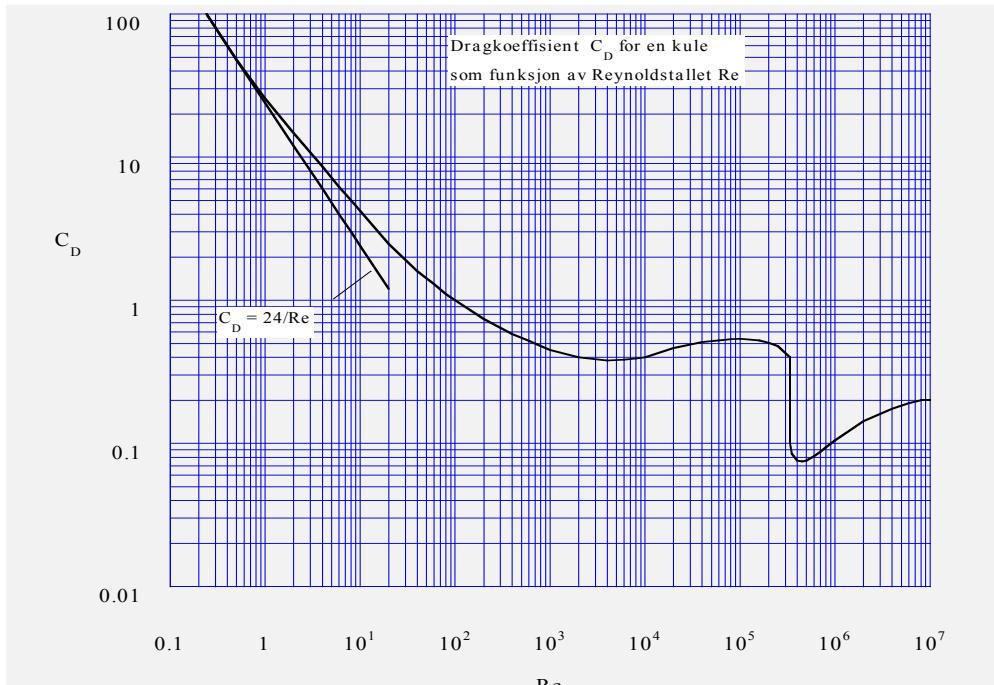
Figur 1.3 viser  $C_D$  som funksjon av  $Re$ . Matlab-programmet **CDkule** er en kurvetilpasning av figur 1.3. Verdiene er ikke så nøyaktige som antall siffer i programmet kan gi inntrykk av. Blant annet er beliggenheten og størrelsen av dumpen i diagrammet sterkt avhengig av graden av turbulens i fristrømmen og ruheten av kula. I luft kan vi ofte neglisjere oppdriftsleddet og hydrodynamisk masse, noe vi ikke kan gjøre for bevegelse i en væske.

Dersom vi innfører  $v = \frac{dz}{dt}$  i (1.1.11), får vi en 2. ordens ODL:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{A} \left( B - C \cdot \frac{dz}{dt} \Big| \frac{dz}{dt} \Big| C_d \right) \quad (1.1.12)$$

For (1.1.12)må vi spesifisere to initialbetingelser.

Eksempelvis:  $v = v_0$  og  $z = z_0$  for  $t = 0$



Figur 1.3

```

function CD = CDkule(Re)
% Computes the drag-coefficient of a sphere as a function
% of the Reynolds number Re. Curve fitted after fig. A-56
% in Evett & Liu:% "Fluid Mechanics & Hydraulics",
% Schaum's Solved Problems McGraw-Hill 1989

if (Re <=0.0)
    CD = 0.0;
    return
end
if (Re > 8.0e6)
    CD = 0.2;
    return
end
x0 = log10(Re);
if (Re> 0.0 & Re <=0.5)
    CD = 24.0/Re;
    return
end
if (Re> 0.5 & Re <=100.0)
    p = [4.22 -14.05 34.87 0.658];
    CD = polyval(p,1.0/Re);
    return
end
if (Re > 100.0 & Re <=1.0e4)
    p = [-30.41 43.72 -17.08 2.41];
    CD = polyval(p,1.0/x0);
    return
end
if (Re > 1.0e4 & Re <=3.35e5)
    p = [-0.1584 2.031 -8.472 11.932];
    CD = polyval(p,x0);
    return
end

```

```

if (Re > 3.35e5 & Re <=5.0e5)
    x1 = log10(Re/4.5e5);
    CD = 91.08*x1^4 + 0.0764;
    return
end
if (Re > 5.0e5 & Re <=8.0e6)
    p = [-0.06335 1.1905 -7.332 14.93];
    CD = polyval(p,x0);
    return
end

```

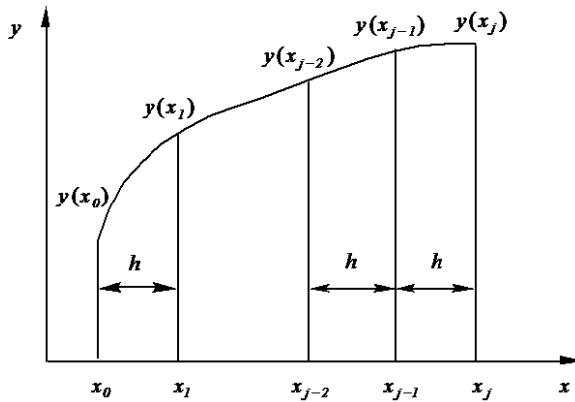
( Evett & Liu: Fluid Mechanics & Hydraulics”,[10])

I tillegg ligger det en modifisert versjon av **CDkule**, kalt **cdkule2**, i mappa *Kapittel 1* under mappa *Disketten*.

Den sistnevnte versjonen er basert på nyere data, men forskjellen er liten for de eksemplene som finnes i kompendiet.

## 1.2 DIFFERANSER. NOTASJON

Vi skal se på enkle metoder for løsning av initialverdiproblemer. Senere skal vi se at disse metodene også kan brukes til å løse randverdiproblemer for ODL.



Figur 1.4

$$x_j = x_0 + jh$$

der  $h = \Delta x$  antas konstant dersom intet annet er spesifisert.

Foroverdifferanser:

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

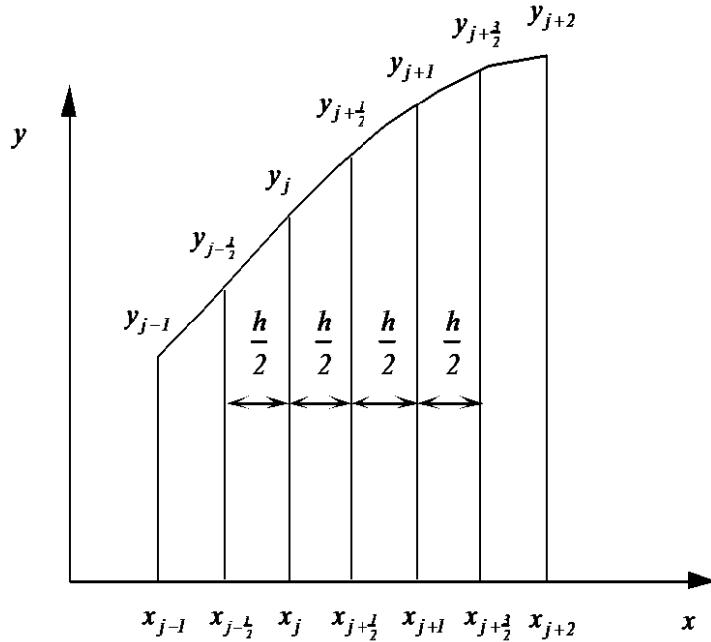
Bakoverdifferanser:

$$\nabla y_j = y_j - y_{j-1} \quad (1.2.1)$$

Sentraldifferanser

$$\delta y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j$$

De lineære differanseoperatorene  $\Delta$ ,  $\nabla$  og  $\delta$  er nyttige når vi skal utlede mer kompliserte uttrykk.



Figur 1.5

**Eksempel 1.3**

$$\delta^2 y_j = \delta(\delta y_j) = \delta(y_{1+\frac{1}{2}} - y_{1-\frac{1}{2}}) = y_{j+1} - y_j - (y_j - y_{j-1}) = y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}$$

Vi kommer stort sett til å skrive ut formlene i sin helhet istedenfor å bruke operatorer.

Vi skal finne differanseformler og trenger igjen **Taylors teorem**:

$$\begin{aligned} y(x) = & y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \\ & \cdots + \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n + R_n \end{aligned} \quad (1.2.2a)$$

Restleddet  $R_n$  er gitt ved:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad (1.2.2b)$$

$$\text{der } \xi \in (x_0, x)$$

Ved bruk av (1.2.2) får vi:

$$\begin{aligned} y(x_{j+1}) \equiv & y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) + \\ & \cdots + \frac{h^n y^{(n)}(x_j)}{n!} + R_n \end{aligned} \quad (1.2.3a)$$

der restleddet  $R_n = O(h^{n+1})$ ,  $h \rightarrow 0$

Fra (1.2.3)fås også:

$$y(x_{j-1}) \equiv y(x_j - h) = y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \dots + \frac{h^k(-1)^k y^{(k)}(x_j)}{k!} + \dots \quad (1.2.3b)$$

Vi vil her og senere anta at  $h$  er positiv.

Løser (1.2.3a) med hensyn på  $y'$ :

$$y'(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} + O(h) \quad (1.2.4a)$$

Løser (1.2.3b) med hensyn på  $y'$ :

$$y'(x_j) = \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h} + O(h) \quad (1.2.4b)$$

Ved addisjon av (1.2.3a) og (1.2.3b):

$$y''(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2} + O(h^2) \quad (1.2.4c)$$

Subtraherer (1.2.3b) fra (1.2.3a):

$$y'(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h} + O(h^2) \quad (1.2.4d)$$

**Notasjon:** Lar  $y(x_j)$  alltid betegne funksjonen  $y(x)$  innsatt for  $x_j$ .  $y_j$  brukes derimot både for den numeriske og den analytiske verdien. Hvilkjen som er ment, framgår av sammenhengen.

(1.2.4) gir da følgende differanseuttrykk:

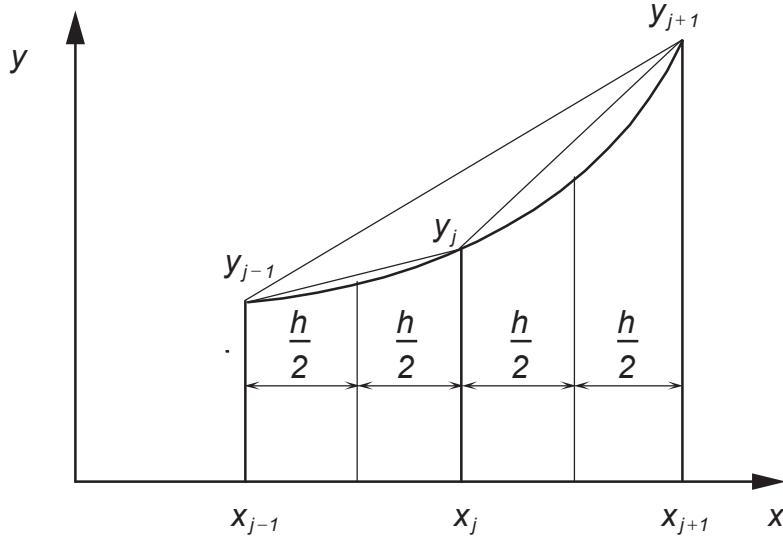
$$y'_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} ; \text{trunkeringsfeil } O(h) \quad (1.2.5a)$$

$$y'_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h} ; \text{trunkeringsfeil } O(h) \quad (1.2.5b)$$

$$y''_j = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} ; \text{trunkeringsfeil } O(h^2) \quad (1.2.5c)$$

$$y'_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} ; \text{trunkeringsfeil } O(h^2) \quad (1.2.5d)$$

(1.2.5a) er foroverdifferanse, (1.2.5b) er bakoverdifferanse, mens (1.2.5c) og (1.2.5d) er sentraldifferanser.



Figur 1.6

Uttrykkene i (1.2.5) lar seg enkelt utlede fra figur 1.6.

(1.2.5a) følger direkte.

(1.2.5c)

$$y''_j(x_j) = \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) \cdot \frac{1}{h} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}$$

(1.2.5d)

$$y'_j = \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{y_j + y_{j-1}}{h} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}$$

For å finne trunkeringsfeilen, må vi bruke Taylorutviklingen.

Utledningen ovenfor kan gjøres mer systematisk.

Setter

$$y'(x_j) = a \cdot y(x_{j-1}) + b \cdot y(x_j) + c \cdot y(x_{j+1}) + O(h^m) \quad (1.2.6a)$$

der vi skal bestemme konstantene  $a$ ,  $b$  og  $c$  sammen med feilreddet.

For enkelthets skyld bruker vi notasjonen  $y_j \equiv y(x_j)$ ,  $y'_j \equiv y'(x_j)$  osv. Fra Taylorutviklingen i (1.2.3a) og (1.2.3b):

$$\begin{aligned} a \cdot y_{j-1} + b \cdot y_j + c \cdot y_{j+1} &= \\ a \cdot \left[ y_j - hy'_j + \frac{h^2}{2} y''_j + \frac{h^3}{6} y'''_j(\xi) \right] + b \cdot y_j + \\ c \cdot \left[ y_j - hy'_j + \frac{h^2}{2} y''_j + \frac{h^3}{6} y'''_j(\xi) \right] \end{aligned}$$

Sammentrukket:

$$\begin{aligned} a \cdot y_{j-1} + b \cdot y_j + c \cdot y_{j+1} &= \\ (a+b+c)y_j + (c-a)hy'_j &+ \\ (a+c)\frac{h^2}{2}y''_j + (c-a)\frac{h^3}{6}y'''(\xi) & \end{aligned}$$

Bestemmer  $a$ ,  $b$  og  $c$  slik at  $y'_j$  får størst mulig nøyaktighet:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ (c - a) \cdot h &= 1 \\ a + c &= 1 \end{aligned} \tag{1.2.6b}$$

Løsningen blir (1.2.6b):

$$a = -\frac{1}{2h}, \quad b = 0 \quad \text{og} \quad c = \frac{1}{2h} \quad \text{som innsatt i (1.2.6a) gir:}$$

$$y'_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\xi) \tag{1.2.7}$$

Sammenligner vi (1.2.7) med (1.2.6a), ser vi at feilreddet  $O(h^m) = -\frac{h^2}{6}y'''(\xi)$  som betyr at  $m = 2$ . (1.2.7) er ikke uventet identisk med (1.2.4d).

La oss bruke denne metoden til å finne en foroverdifferanseformel for  $y'(x_j)$  med nøyaktighet  $O(h^2)$ . 2. ordens nøyaktighet krever minst tre ukjente koefisienter. Derav:

$$y'(x_j) = a \cdot y_j + b \cdot y_{j+1} + c \cdot y_{j+2} + O(h^m) \tag{1.2.8a}$$

Den videre prosedyren blir som i det foregående eksemplet:

$$\begin{aligned} a \cdot y_j + b \cdot y_{j+1} + c \cdot y_{j+2} &= \\ a \cdot y_j + b \cdot \left[ y_j + hy'_j + \frac{h^2}{2}y''_j + \frac{h^3}{6}y'''(\xi) \right] &+ \\ c \cdot \left[ y_j + 2hy'_j + 2h^2y''_j + \frac{8h^3}{6}y'''(\xi) \right] & \\ = (a+b+c) \cdot y_j + (b+2c) \cdot hy'_j & \\ + h^2 \left( \frac{b}{2} + 2c \right) \cdot y''_j + \frac{h^3}{6}(b+8c) \cdot y'''(\xi) & \end{aligned}$$

Bestemmer  $a, b$  og  $c$  slik at  $y'_j$  får størst mulig nøyaktighet:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ (b + 2c) \cdot h &= 1 \\ \frac{b}{2} + 2c &= 0 \end{aligned} \tag{1.2.8b}$$

Løsningen av (1.2.8b) blir:

$$a = -\frac{3}{2h}, \quad b = \frac{2}{h} \quad \text{og} \quad c = -\frac{1}{2h} \quad \text{som innsatt gir i (1.2.8) gir:}$$

$$y'_j = \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''(\xi) \quad (1.2.9)$$

Feilreddet  $O(h^m) = \frac{h^2}{3}y'''(\xi)$  viser at  $m = 2$ .

Tabellene nedenfor er beregnet av programmet **diffaf** som er beskrevet i appendiks H. Programmet benytter samme teknikk som vist ovenfor.

$\frac{dy_i}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} - \frac{1}{2}y''(\xi)\Delta x$
$\frac{dy_i}{dx} = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2\Delta x} + \frac{1}{3}y'''(\xi) \cdot (\Delta x)^2$
$\frac{dy_i}{dx} = \frac{-11y_i + 18y_{i+1} - 9y_{i+2} - y_{i+3}}{6\Delta x} - \frac{1}{4}y^{(4)}(\xi) \cdot (\Delta x)^3$
$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{(\Delta x)^2} - y'''(\xi) \cdot \Delta x$
$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}}{(\Delta x)^2} + \frac{11}{12}y^{(4)}(\xi) \cdot (\Delta x)^2$

Tabell 1.1: Foroverdifferanser

$\frac{dy_i}{dx} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} + \frac{1}{2}y''(\xi)\Delta x$
$\frac{dy_i}{dx} = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2\Delta x} + \frac{1}{3}y'''(\xi) \cdot (\Delta x)^2$
$\frac{dy_i}{dx} = \frac{11y_i - 18y_{i-1} + 9y_{i-2} - y_{i-3}}{6\Delta x} + \frac{1}{4}y^{(4)}(\xi) \cdot (\Delta x)^3$
$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{(\Delta x)^2} + y'''(\xi) \cdot \Delta x$
$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}}{(\Delta x)^2} + \frac{11}{12}y^{(4)}(\xi) \cdot (\Delta x)^2$

Tabell 1.2: Bakoverdifferanser

$\frac{dy_i}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{6}y'''(\xi)(\Delta x)^2$
$\frac{dy_i}{dx} = \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{1}{30}y^{(5)}(\xi) \cdot (\Delta x)^4$
$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{12}y^{(4)}(\xi) \cdot (\Delta x)^2$
$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12(\Delta x)^2} + \frac{1}{90}y^{(6)}(\xi) \cdot (\Delta x)^4$
$\frac{d^3y_i}{dx^3} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(\Delta x)^3} + \frac{1}{4}y^{(5)}(\xi) \cdot (\Delta x)^2$

Tabell 1.3: Sentraldifferanser

### 1.2.1 BEHANDLING AV LEDDET $\frac{d}{dx} \cdot [p(x) \frac{d}{dx} u(x)]$

Dette leddet dukker ofte opp i differensialligninger og det kan være lurt å behandle leddet som det står istedenfor først å utføre derivasjonen.

#### Sentraldifferanser

Vi benytter sentraldifferanser med henvisning til figur 1.5:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \cdot \frac{d}{dx} u(x) \right] \Big|_i &\approx \frac{[p(x) \cdot u'(x)]|_{i+\frac{1}{2}} - [p(x) \cdot u'(x)]|_{i-\frac{1}{2}}}{h} \\ &= \frac{p(x_{i+\frac{1}{2}}) \cdot u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p(x_{i-\frac{1}{2}}) \cdot u'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} \end{aligned}$$

Fortsetter med sentraldifferanser:

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad u'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

som innsatt ovenfor gir det endelige uttrykket:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \cdot \frac{d}{dx} u(x) \right] \Big|_i \approx \frac{p_{i-\frac{1}{2}} \cdot u_{i-1} - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}) \cdot u_i + p_{i+\frac{1}{2}} \cdot u_{i+1}}{h^2} + feilledd \quad (1.2.10a)$$

$$\text{der feilleddet} = -\frac{h^2}{24} \cdot \frac{d}{dx} \left( p(x) \cdot u'''(x) + [p(x) \cdot u'(x)]'' \right) + O(h^3) \quad (1.2.10b)$$

Dersom ikke  $p(x_{i+\frac{1}{2}})$  og  $p(x_{i-\frac{1}{2}})$  kan finnes direkte, brukes:

$$p(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2}(p_{i+1} + p_i), \quad p(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2}(p_i + p_{i-1}) \quad (1.2.11)$$

For  $p(x) = \text{konstant} = 1$  får vi det vanlige uttrykket:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

### Foroverdifferanser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \cdot \frac{du}{dx} \right] \Big|_i &\approx \frac{p(x_{i+\frac{1}{2}}) \cdot u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p(x_i) \cdot u'(x_i)}{\frac{h}{2}} \\ &\approx \frac{p(x_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - p(x_i) \cdot u'(x_i)}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

som gir:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \cdot \frac{du}{dx} \right] \Big|_i = \frac{2 \cdot [p(x_{i+\frac{1}{2}}) \cdot (u_{i+1} - u_i) - h \cdot p(x_i) \cdot u'(x_i)]}{h^2} + feilledd \quad (1.2.12a)$$

$$feilledd = -\frac{h}{12} [3p''(x_i) \cdot u'(x_i) + 6p'(x_i) \cdot u''(x_i) + 4p(x_i) \cdot u'''(x_i)] + O(h^2) \quad (1.2.12b)$$

Vi har beholdt ledet  $u'(x_i)$  fordi (1.2.12) vanligvis benyttes ved randen og  $u'(x_i)$  kan være foreskrevet her.

For  $p(x) = \text{konstant} = 1$  får vi uttrykket:

$$u''_i = \frac{2 \cdot [u_{i+1} - u_i - h \cdot u'(x_i)]}{h^2} - \frac{h}{3} u'''(x_i) + O(h^2) \quad (1.2.13)$$

### Bakoverdifferanser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_i &\approx \frac{p(x_i) \cdot u'(x_i) - p(x_{i-\frac{1}{2}}) \cdot u'(x_{i-\frac{1}{2}})}{\frac{h}{2}} \\ &\approx \frac{p(x_i) \cdot u'(x_i) - p(x_{i-\frac{1}{2}}) \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

som gir:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_i = \frac{2 \cdot [h \cdot p(x_i) u'(x_i) - p(x_{i-\frac{1}{2}}) \cdot (u_i - u_{i-1})]}{h^2} + feilledd \quad (1.2.14a)$$

$$feilredd = \frac{h}{12} [3p''(x_i) \cdot u'(x_i) + 6p'(x_i) \cdot u''(x_i) + 4p(x_i) \cdot u'''(x_i)] + O(h^2) \quad (1.2.14b)$$

Dette er det samme feilreddet som i (1.2.12b) bortsett fra fortegnet. Også her har vi beholdt ledet  $u'(x_i)$  fordi (1.2.14b) vanligvis benyttes ved randen og  $u'(x_i)$  kan være foreskrevet her.

For  $p(x) = konstant = 1$  får vi uttrykket:

$$u''_i = \frac{2 \cdot [h \cdot u'(x_i) - (u_i - u_{i-1})]}{h^2} + \frac{h}{3} u'''(x_i) + O(h^2) \quad (1.2.15)$$

### 1.3 EULERS METODE

Differensialligningen er gitt ved:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Innsatt fra (1.2.4a) i (1.3.1):

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + O(h^2)$$

eller:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (1.3.2)$$

(1.3.2) er en differanseligning og skjemaet kalles **Eulers metode**. (1768)  
(1.3.2) grafisk framstilt:

Eulers metode kalles også polygonmetoden. Bakgrunnen for dette navnet framgår av figuren. Eulers metode er en 1. ordens metode da uttrykket for  $y'(x)$  er av orden  $h$ ; dvs.: 1. orden av  $h$ . Vi sier at metoden har en global feil av orden  $h$  og en lokal av orden  $h^2$ . (Se C&K [5], avsnitt 8.1)

#### Eksempel 1.4 Kule med konstant $C_D$

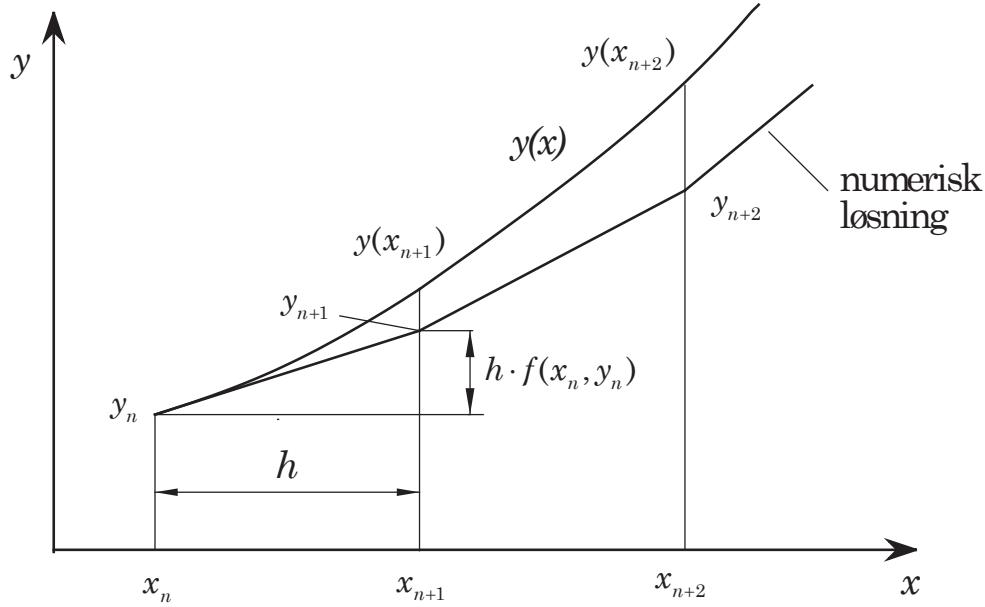
Skriver (1.1.11) og (1.1.12) som system på følgende måte:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= g - \alpha v^2 \end{aligned} \quad (1.3.3a)$$

$$\text{der } \alpha = \frac{3\rho_f}{4\rho_k \cdot d} \cdot C_D \quad (1.3.3b)$$

Analytisk løsning med  $z(0) = 0$  og  $v(0) = 0$ :

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot \tanh(\sqrt{\alpha g} \cdot t), \quad z(t) = \frac{\ln(\cosh(\sqrt{\alpha g} \cdot t))}{\alpha} \quad (1.3.4a)$$



Figur 1.7

$$\text{Terminalhastigheten } v_t \text{ finnes av } \frac{dv}{dt} = 0 \text{ som gir } v_t = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad (1.3.4b)$$

Bruker data for en golfball:

$$d = 41\text{mm}, \rho_k = 1275 \text{ kg/m}^3, \rho_k = 1.22 \text{ kg/m}^3 \text{ og velger dessuten } C_D = 0.4 \text{ som gir } \alpha = 7 \cdot 10^{-3}$$

Fra (1.3.4b):

$$v_t = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} = 37.44 \text{ m/s med de gitte data.}$$

Dersom vi bruker Taylors metode fra avsnitt 1.1.1, får vi følgende uttrykk med bruk av fire ledd i rekkeutviklingen:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2}gt^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\alpha gt^2\right) \\ v(t) &= gt \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\alpha gt^2\right) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Eulerskjemaet (1.3.2) anvendt på den andre ligningen i (1.3.3):

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t \cdot (g - \alpha \cdot v_n^2), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.3.6)$$

$$\text{med } v(0) = 0$$

Utfører beregningen til vi har oppnådd 99 % av terminalhastigheten, som med de gitte data gir en beregningstid på ca. 10 sek.

Nedenfor er vist listingen av programmet **eulv** ( $\Delta t = 0.5s$ ) som i tillegg til tabellen også plotter hastigheten  $v$  sammen med hastigheten  $v_a$  fra den analytiske løsningen. Har dessuten tatt med verdier fra Taylorutviklingen (1.3.5) som gir nøyaktige verdier opptil  $t = 1.0$  med bare to ledd.

```
% ===== Eulv1 =====
% The program computes the velocity of a golf ball
% falling vertically in air. The equation
% of motion is integrated using the basic Euler- method
% =====
clear all; close all; clc;
FS = 20;
set(0,'DefaultLineLineWidth',3,'DefaultAxesFontName','Helvetica');
set(0,'DefaultAxesFontSize',FS);

nu = 1.5e-5 ; % Kinematical viscosity [m^2/s]
rho = 1.22 ; % Density of air [kg/m^3]
rho_s = 1275.0; % Density of sphere [kg/m^3]
d = 0.041 ; % Diameter of ball [m]
tend = 2.0 ; % Max. time [s]
g = 9.81 ; % Gravity [N/kg]

% Using Cd = 0.4;
alfa = 7.0e-3;
tend = 10;
TaylorMax=2
dt = 0.5; % Timestep [s]

nsteps = round(tend/dt) + 1;
v = zeros(nsteps,1); t = v; % allocate space
v(1)= 0.0 ; t(1) = 0.0;
fprintf('      t(s)      v(m/s)      Re \n\n');

for k = 1:nsteps - 1
t(k+1) = k*dt;
v(k+1) = v(k) + dt*(g - alfa*v(k)^2);
end

fprintf(' %10.2f  %10.3f %15.3e \n',t,v);

% Analytical solution
k1 = sqrt(g/alfa); k2 = sqrt(alfa*g);
va = k1*tanh(k2*t);

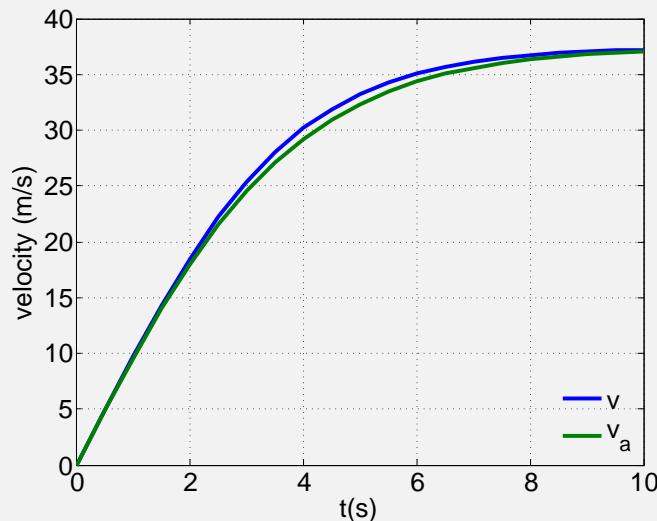
% Taylor solution
vt=g.*t.*(1-alfa*t.^2+2*alfa^2*g^2*t.^4/15);

if (tend<TaylorMax)
plot(t,v,t,va,t,vt);
hl=legend('v','v_a','v_t','Location','SouthEast');
else
plot(t,v,t,va);
hl=legend('v','v_a','Location','SouthEast');
end
set(hl,'box','off');
grid on

% Title and labels
title(sprintf('Eulers metode med \\\Delta t = %4.2f',dt));
xlabel('t(s)'); ylabel('velocity (m/s)');
```

( Evett & Liu: Fluid Mechanics & Hydraulics”, [10])

t(s)	v(m/s)	$v_a$ (m/s)	v(taylor)
0.00	0.000	0.000	0.000
0.50	4.905	4.877	4.877
1.00	9.726	9.591	9.585
1.50	14.300	14.001	13.957
2.00	18.489	18.001	17.824
2.50	22.198	21.530	
3.00	25.378	24.566	
3.50	28.029	27.124	
4.00	30.184	29.241	
4.50	31.900	30.967	
5.00	33.244	32.357	
5.50	34.281	33.466	
6.00	35.073	34.343	
6.50	35.672	35.033	
7.00	36.124	35.573	
7.50	36.461	35.994	
8.00	36.713	36.322	
8.50	36.901	36.575	
9.00	37.040	36.772	
9.50	37.143	36.924	
10.00	37.219	37.041	



Figur 1.8: Eulers metode med  $\Delta t = 0.5$ .

Både tabellen og figuren viser at vi får akseptable resultater selv med et så stort skritt som  $\Delta t = 0.5s$ .

Eulers metode kan selvfølgelig også brukes for et system.

La oss se på et simultant sett av  $p$  ligninger:

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \\ &\vdots \\ y'_p &= f_p(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \end{aligned} \tag{1.3.7a}$$

med initialbetingelser:

$$y_1(x_0) = a_1, \quad y_2(x_0) = a_2, \dots, \quad y_p(x_0) = a_p \tag{1.3.7b}$$

eller på vektorform:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{a} \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

der  $\mathbf{y}'$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{y}$ , og  $\mathbf{a}$  er kolonnevektorer med  $p$  komponenter.  
Eulerskjemaet (1.3.2) anvendt på (1.3.8) blir:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \cdot \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \tag{1.3.9}$$

For et system av tre ligninger:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= -y_1 y_3 \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

(1.3.9) gir i dette tilfellet:

$$\begin{aligned} (y_1)_{n+1} &= (y_1)_n + h \cdot (y_2)_n \\ (y_2)_{n+1} &= (y_2)_n + h \cdot (y_3)_n \\ (y_3)_{n+1} &= (y_3)_n - h \cdot (y_1)_n \cdot (y_3)_n \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

med  $y_1(x_0) = a_1$ ,  $y_2(x_0) = a_2$ , og  $y_3(x_0) = a_3$

I avsnitt 1.1.2 har vi sett hvordan vi kan redusere en diff. ligning av høyere orden til et system av 1. ordens ligninger.

I (1.3.3) har vi ligningen  $\frac{d^2z}{dt^2} = g - \alpha \cdot (\frac{dz}{dt})^2$  som vi har redusert til et system

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= g - \alpha \cdot v^2 \end{aligned}$$

som gir følgende Euler-skjema:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \Delta t \cdot v_n \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t \cdot [g - \alpha(v_n)^2] \\ \text{med } z_0 &= 0, \quad v_0 = 0 \end{aligned}$$

Koden for dette skjemaet er bare en ekstra linje i **eulv**:

```

for k = 1:nsteps - 1
  t(k+1) = k*dt;
  z(k+1) = z(k) + dt*v(k);
  v(k+1) = v(k) + dt*(g - alfa*v(k)^2);
end

```

Programmet **ekule** løser (1.1.12) med variabel  $C_D$  beregnet fra programmet **CDkule**.

## 1.4 HEUNS METODE

Fra (1.2.4a) eller (1.2.5a):

$$y''(x_n, y_n) = f'(x_n, y(x_n, y_n)) \approx \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} \quad (1.4.1)$$

Taylorutviklingen (1.2.3a) gir:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'[x_n, y(x_n)] + \frac{h^2}{2}y''[x_n, y(x_n)] + O(h^3)$$

Innsatt fra (1.4.1):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] \quad (1.4.2)$$

Denne formelen kalles trapesformelen da den reduseres til beregning av et integral med trapesmetoden dersom  $f(x, y)$  bare er funksjon av  $x$ . Da  $y_{n+1}$  forekommer på begge sider av likhetstegnet, er dette en implisitt formel som betyr at vi må løse et ikke-lineært algebraiske ligningsystem dersom funksjonen  $f(x, y)$  er ikke-lineær. En måte å gjøre skjemaet eksplisitt på, er å bruke Euler-skjemaet i (1.3.2) til å beregne  $y(x_{n+1})$  på høyre siden av (1.4.2).

Det resulterende skjemaet betegnes ofte som Heuns metode.

Skjemaet for Heuns metode blir da:

$$y_{n+1}^p = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (1.4.3a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^p)] \quad (1.4.3b)$$

Indeks  $p$  står for *predikert*.

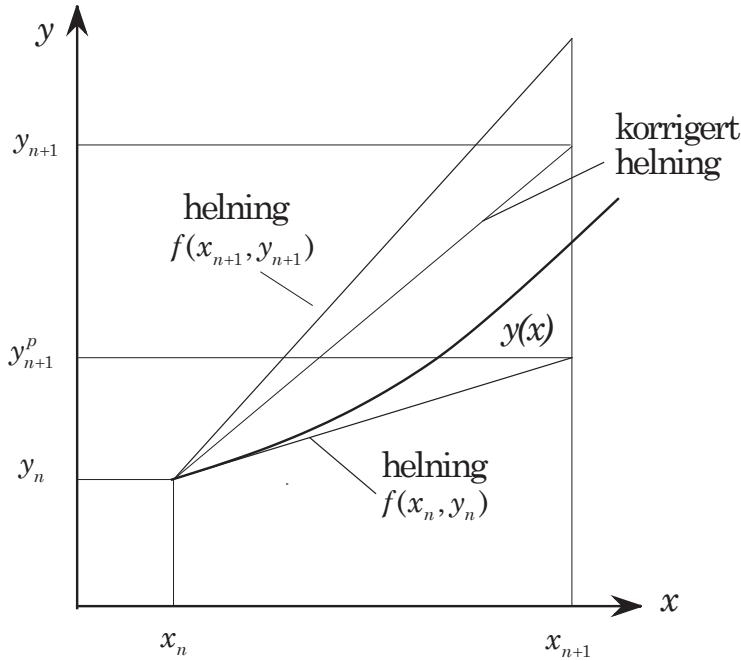
(1.4.3a) er da prediktoren og (1.4.3b) korrektoren.

Dette er en 2. ordens metode.( Se C&K [5] , avsnitt 8.2, for flere detaljer.) Figur 1.9 viser en grafisk framstilling av (1.4.3).

I prinsippet kan vi lage en iterasjonsprosess der vi etter å brukt korrektoren, bruker de korrigerte verdiene til å beregne en ny prediktor osv. Dette vil nok føre til en mer nøyaktig løsning av differanseskjemaet, men ikke nødvendigvis av differensiellligningen. Vi nøyer oss derfor med en gangs bruk av korrektoren. For et system får vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}^p &= \mathbf{y}_n + h \cdot \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} \cdot [\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^p)] \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Merk at  $y_{n+1}^p$  er en temporær størrelse som det ikke er nødvendig å bevare etter at skrittet er utført.



Figur 1.9

Dersom vi bruker (1.4.4) på eksemplet i (1.3.10) får vi:

$$\begin{aligned} \text{Prediktor: } & (y_1)_{n+1}^p = (y_1)_n + h \cdot (y_2)_n \\ & (y_2)_{n+1}^p = (y_2)_n + h \cdot (y_3)_n \\ & (y_3)_{n+1}^p = (y_3)_n - h \cdot (y_1)_n \cdot (y_3)_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Korrektør: } & (y_1)_{n+1} = (y_1)_n + 0.5h \cdot [(y_2)_n + (y_2)_{n+1}^p] \\ & (y_2)_{n+1} = (y_2)_n + 0.5h \cdot [(y_3)_n + (y_3)_{n+1}^p] \\ & (y_3)_{n+1} = (y_3)_n - 0.5h \cdot [(y_1)_n \cdot (y_3)_n + (y_1)_{n+1}^p \cdot (y_3)_{n+1}^p] \end{aligned}$$

### Eksempel 1.5 Newtons ligning

La oss bruke Heuns metode til å løse Newtons ligning i avsnitt 1.1.1:

$$y'(x) = 1 - 3x + y + x^2 + xy, \quad y(0) = 0 \quad (1.4.5a)$$

med analytisk løsning:

$$\begin{aligned} y(x) = & 3\sqrt{2\pi e} \cdot \exp\left(x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] \\ & + 4 \cdot \left[ 1 - \exp\left(x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) \right] - x \end{aligned} \quad (1.4.5b)$$

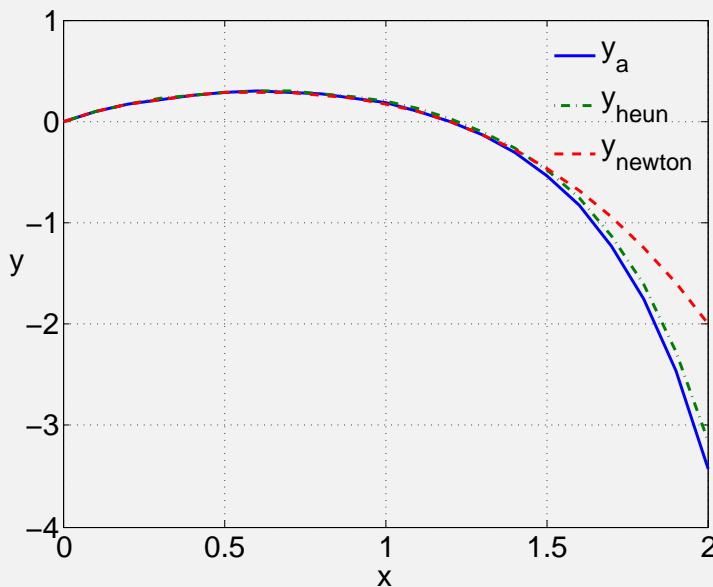
Her blir  $f(x, y) = 1 - 3x + y + x^2 + xy = 1 + x(x-3) + (1+x)y$

Utsnitt av programmet **newton** med  $x \in [0, 2]$  og  $\Delta x = 0.1$ :

```

xend = 2;
dx = 0.1;
steps = round(xend/dx) + 1;
y(1)= 0.0 ; x(1) = 0.0;
for n = 1:steps - 1
    x(n+1) = n*dx;
    xn = x(n);
    fn = 1 + xn*(xn-3) + y(n)*(1 + xn);
    yp = y(n) + dx*fn; % Predictor
    xnp1 = x(n+1);
    fnp1 = 1 + xnp1*(xnp1-3) + yp*(1 + xnp1);
    y(n+1) = y(n) + 0.5*dx*(fn + fnp1);
end

```



Figur 1.10: Heuns metode for Newtons ligning med  $\Delta x = 0.1$ .

I tillegg til løsningen med Heuns metode, har vi plottet den analytiske løsningen fra (1.4.5b) samt Newtons rekkeløsning fra avsnitt 1.1.1. Vi ser at rekkeløsningen er god opp til ca.  $x = 1.4$ .

La oss deretter bruke Heuns metode på eksempel 1.2.

Ligningsystemet er:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= g - \alpha v^2\end{aligned}$$

som ved bruk av Heuns metode i (1.4.4) blir:

Prediktor: 
$$\begin{aligned}z_{n+1}^p &= z_n + \Delta t v_n \\ v_{n+1}^p &= v_n + \Delta t \cdot (g - \alpha v_n^2)\end{aligned}\quad (1.4.6a)$$

Korrektor: 
$$\begin{aligned}z_{n+1} &= z_n + 0.5 \Delta t \cdot (v_n + v_{n+1}^p) \\ v_{n+1} &= v_n + 0.5 \Delta t \cdot [2g - \alpha [v_n^2 + (v_{n+1}^p)^2]]\end{aligned}\quad (1.4.6b)$$

med startverdier  $z_0 = z(0) = 0$ ,  $v_0 = v(0) = 0$

Merk at vi ikke bruker prediktoren  $z_{n+1}^p$  da ligningsystemet ikke inneholder variabelen  $z$  på høyre side.

Nedenfor er vist listingen av programmet **heunzv** med tilhørende utskrift ( $\Delta t = 0.5$ ).

```
clear
% Using Cd = 0.4;
g = 9.81; % Gravity [N/kg]
tend = 10;
alfa = 7.0e-3;
dt = 0.5; % Timestep
steps = round(tend/dt) + 1;
v = zeros(steps,1); t = v; z = v; % allocate space
v(1)= 0.0 ; t(1) = 0.0; z(1) = 0;
for n = 1:steps - 1
    t(n+1) = n*dt;
    % --- Predictor
    % Predictor for z not used in this case.
    vp = v(n) + dt*(g - alfa*v(n)^2);
    % --- Corrector
    z(n+1) = z(n) + 0.5*dt*(v(n) + vp);
    v(n+1) = v(n) + 0.5*dt*(2*g - alfa*(v(n)^2 + vp^2));
end
% Analytical solution
k1 = sqrt(g/alfa); k2 = sqrt(alfa*g);
va = k1*tanh(k2*t);
za = log(cosh(k2*t))/alfa;
fprintf(' t(s) v(m/s) va(m/s) z(m) za(m) \n\n');
fprintf(' %6.2f %8.3f %8.3f %8.2f %8.2f\n',[t v va z za']);
```

t(s)	v(m/s)	va(m/s)	z(m)	za(m)	ztaylor
0.00	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
0.50	4.863	4.877	1.23	1.22	1.22
1.00	9.562	9.591	4.86	4.85	4.85
1.50	13.957	14.001	10.79	10.76	10.75
2.00	17.943	18.001	18.83	18.78	18.72
2.50	21.459	21.530	28.74	28.69	28.46

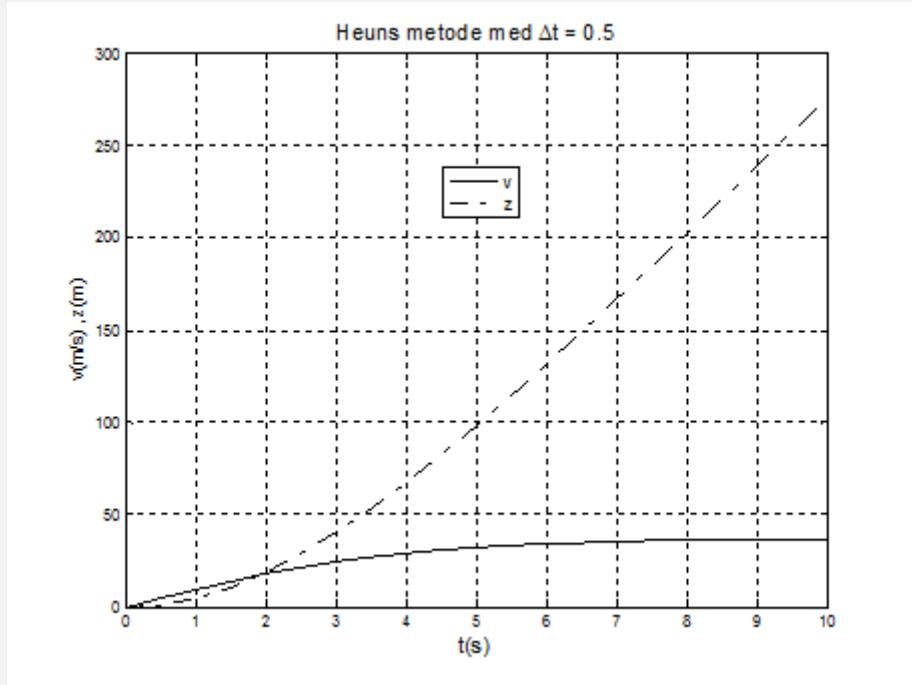
```

3.00    24.486   24.566   40.29   40.23
3.50    27.038   27.124   53.24   53.17
4.00    29.153   29.241   67.34   67.28
4.50    30.880   30.967   82.40   82.35
5.00    32.273   32.357   98.23   98.19
5.50    33.388   33.466   114.69  114.66
6.00    34.272   34.343   131.63  131.62
6.50    34.970   35.033   148.97  148.97
7.00    35.518   35.573   166.61  166.63
7.50    35.946   35.994   184.49  184.52
8.00    36.280   36.322   202.56  202.61
8.50    36.540   36.575   220.77  220.83
9.00    36.742   36.772   239.10  239.17
9.50    36.899   36.924   257.52  257.60
10.00   37.021   37.041   276.00  276.09

```

&gt;&gt;

I tillegg til den analytiske løsningen, har vi tatt med Taylorutviklingen i (1.3.5). Vi ser at forskjellen mellom den numeriske løsningen og den analytiske er liten, selv med et såpass grovt nett.



Figur 1.11

## 1.5 RUNGE - KUTTA AV ORDEN 4.

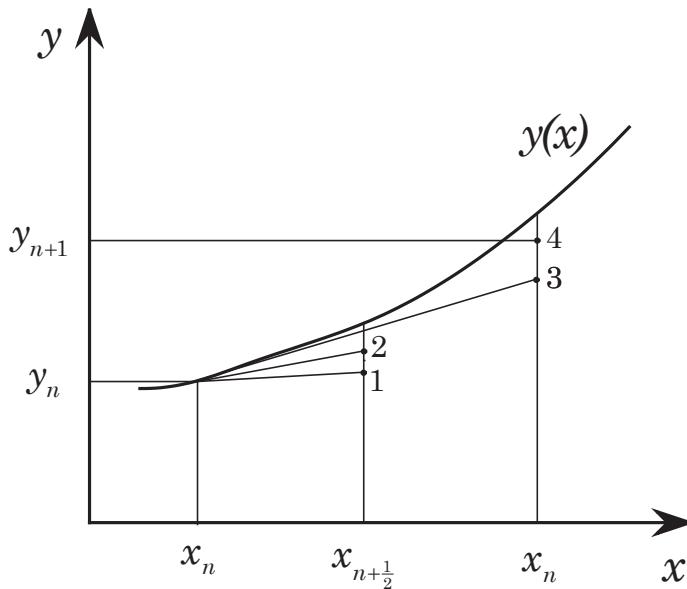
Eulers metode og Heuns metode tilhører Runge-Kutta familien av eksplisitte metoder, og er henholdsvis Runge-Kutta av 1. og 2. orden, sistnevnte med en gangs bruk av korrektor. Eksplisitte Runge-Kutta metoder er enkeltskritt-kjema som forsøker å kopiere Taylor-utviklingen av differensialligningen til en gitt orden.

Det klassiske Runge-Kutta skjemaet av 4. orden ( RK4 ) er gitt ved:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Vi ser at vi egentlig bruker Eulers metode 4 ganger og finner en vektet helning. Den lokale feilen er av  $O(h^5)$ , mens den globale er av . Det henvises til C&K [5], avsnitt 8.2.

Figur 1.12 viser en grafisk framstilling av RK4-skjemaet i (1.5.1).



Figur 1.12

I detalj:

1. I pkt.  $(x_n, y_n)$  kjenner vi helningen  $k_1$  og denne brukes idet vi går fram et skritt  $h/2$  der helningen  $k_2$  beregnes.
2. Med denne helningen starter vi pånytt i  $(x_n, y_n)$ , går fram et skritt  $h/2$  og beregner en ny helning  $k_3$ .
3. Med denne helningen starter vi pånytt i  $(x_n, y_n)$ . Men nå går vi fram et helt skritt  $h$  og helningen  $k_4$  beregnes.
4. De fire helningene midles med vekttall  $1/6, 2/6, 2/6$  og  $1/6$  og med denne middelhelningen beregnes sluttverdien  $y_{n+1}$ .

Hver av skrittene ovenfor er et Euler-skritt.

(1.5.1) anvendt på ligningsettet i(1.3.10) blir:

$$\begin{aligned}(y_1)_{n+1} &= (y_1)_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ (y_2)_{n+1} &= (y_2)_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ (y_3)_{n+1} &= (y_3)_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)\end{aligned}\quad (1.5.2)$$

der

$$\begin{aligned}k_1 &= y_2 & k_2 &= y_2 + \frac{h l_1}{2} \\ l_1 &= y_3 & l_2 &= y_3 + \frac{h m_1}{2} \\ m_1 &= -y_1 y_3 & m_2 &= (y_1 + \frac{h k_1}{2})(y_3 + \frac{h m_1}{2}) \\ k_3 &= y_2 + \frac{h l_2}{2} & k_4 &= y_2 + h l_3 \\ l_3 &= y_3 + \frac{h m_2}{2} & l_4 &= y_3 + h m_3 \\ m_3 &= -(y_1 + \frac{h k_2}{2})(y_3 + \frac{h m_2}{2}) \\ m_4 &= -(y_1 + h k_3)(y_3 + h m_3)\end{aligned}\quad (1.5.3)$$

Fordelen med å skrive ut formlene direkte som vist i eksemplet, er at programmet blir kompakt. Bakdelen er at vi må skrive et nytt program dersom vi velger et annet løsningskjema. Den vanlige framgangsmåten er derfor at vi skriver et subprogram for hvert skjema som igjen kaller et subprogram for funksjonen  $f(x, y)$ . Et slikt program, **rk4c**, er vist nedenfor. Vi har tatt med to versjoner av **RK4**; subprogrammene **rk4c** og **rk4**. Subprogrammet **rk4c**, der **c** står for classical, følger direkte formlene i lign. (1.5.1). **rk4** bruker også formlene i (1.5.1), men i noe omskrevet form slik at kravet til mellomlagring er mindre enn i **rk4c.rk4** er brukt i programmet **rkn**. Legg merke til at subprogrammene bare løser ligningsystemet for et enkeltskritt  $h$ . Inkrementering av den uavhengige variable må derfor skje utenfor subprogrammene. **rkn** derimot, brukt i eksempel 1.6, inkrementerer internt.

```
function ynew = rk4c(fname,x,y,h)
% The classical RK4-scheme.
% RK4C performs one integration step with steplength h.
% Input:
%     x -- The independent variable. Must be
%          given an initial value.
%     y -- Vector containing the current values
%          of the dependent variables
%     h -- The step size
% Output:
%     ynew -- Vector containing the y-values
%            at the end of the integration step.

k1 = zeros(size(y)); k2 = k1; k3 = k1;
k4 = k1; ytemp = k1; ynew = k1;
hhalf = 0.5*h;

k1 = feval(fname,x,y); % 1. stage
ytemp = y + h*k1/2;
k2 = feval(fname,x+hhalf,ytemp); % 2. stage
ytemp = y + h*k2/2;
k3 = feval(fname,x+hhalf,ytemp); % 3. stage
```

```

ytemp = y + h*k3;
k4 = feval(fname,x+h,ytemp);      % 4. stage
ynew = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4 )/6.0;

```

### Noen bemerkninger.

I klassiske programmeringspråk som f.eks. Fortran, består vanligvis et program av et hovedprogram og en rekke subprogram, der subprogrammene ikke kan eksekveres som frittstående program. I Matlab derimot, kan program som starter med kommandoen *function*, eksekveres som et selvstendig program. Dette betyr at slike program kan opptre som selvstendige program og dessuten opptre som tradisjonelle subprogram.

La oss bruke **rk4c** til å løse (1.1.11). Som et system av to ligninger:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{A}(B - C \cdot v|v|C_D)\end{aligned}$$

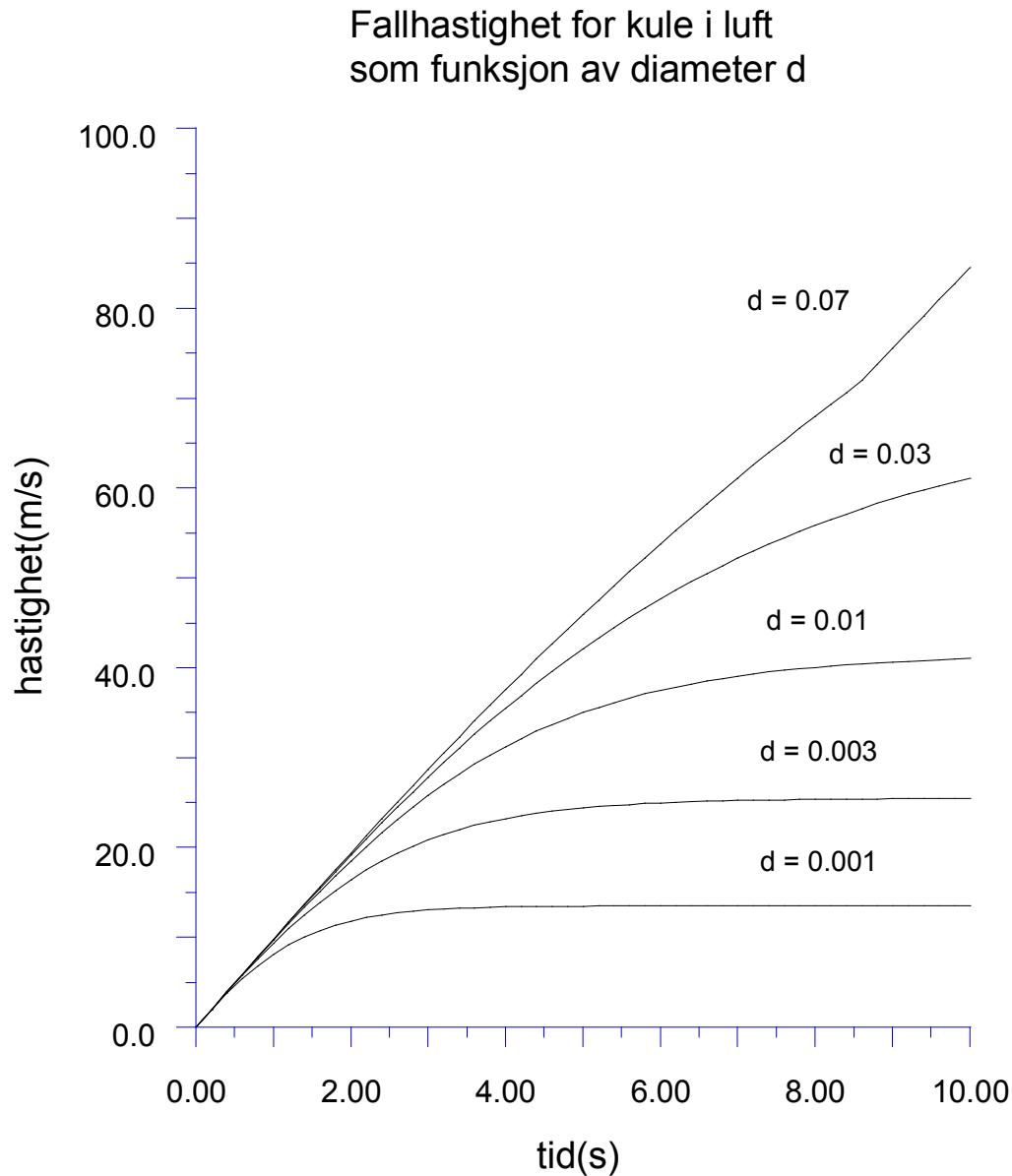
med initialbetingelser gitt ved:

$$z(0) = z_0, \quad v(0) = v_0$$

Systemet er programmert i **fcnkule** og beregningen er gjort av programmet **rkule**. Utskrift av beregningen er vist nedenfor. Resultatene for forskjellige verdier av kule-diameteren er vist i figur 1.13.

PROGRAM RKULE			
Kinematical viscosity . nu	= 1.500e-005	m^2/s	
Density of fluid ..... rof	= 1.220e+000	kg/m^3	
Density of sphere ..... rol	= 7.850e+003	kg/m^3	
Diameter of sphere .... d	= 1.000e-002	m	
Timestep ..... dt	= 1.000e-001	s	
Max. time ..... tend	= 2.000e+000	s	
t(s)	z(m)	v(m/s)	Re
0.10	4.903e-002	9.806e-001	6.537e+002
0.20	1.961e-001	1.960e+000	1.307e+003
0.30	4.410e-001	2.938e+000	1.959e+003
0.40	7.836e-001	3.913e+000	2.609e+003
0.50	1.224e+000	4.885e+000	3.257e+003
0.60	1.761e+000	5.853e+000	3.902e+003
0.70	2.394e+000	6.816e+000	4.544e+003
0.80	3.123e+000	7.772e+000	5.182e+003
0.90	3.948e+000	8.722e+000	5.815e+003
1.00	4.868e+000	9.665e+000	6.443e+003
1.10	5.881e+000	1.060e+001	7.066e+003
1.20	6.987e+000	1.152e+001	7.683e+003
1.30	8.185e+000	1.244e+001	8.293e+003
1.40	9.475e+000	1.334e+001	8.896e+003
1.50	1.085e+001	1.424e+001	9.491e+003

1.60	1.232e+001	1.512e+001	1.008e+004
1.70	1.388e+001	1.598e+001	1.066e+004
1.80	1.552e+001	1.684e+001	1.122e+004
1.90	1.724e+001	1.767e+001	1.178e+004
2.00	1.905e+001	1.850e+001	1.233e+004



Figur 1.13

### Eksempel 1.6 Euler, Heun og RK4 i ett program

Vi kan skrive et felles program for de tre skjemaene nevnt ovenfor og dette er gjort i programmet **rkn** som kan kalles på følgende måte:

```
[t,y] = rkn(odefun,tspan,y0,h,method,p1,p2, ...)
```

#### En kortfattet beskrivelse

*odefun* er navnet på ligningsystemet som skal løses,  $tspan = [t_0 \ t_{end}]$  er lengden av integrasjonsintervallet der  $t_0$  er startpunktet og  $t_{end}$  er stoppunktet. inneholder startverdiene av de avhengige variable ved  $t = t_0$ .  $h$  er skrittstørrelsen som kan velges vilkårlig  $> 0$ . *method* er en streng der 'rk1' betyr Euler-skjema, 'rk2' betyr Heun-skjema og 'rk4' betyr RK4.  $p1, p2, \dots$  er et vilkårlig antall parametere som kan settes inn om nødvendig. Etter at programmet er kjørt, får vi tilbake en vektor  $t$  og en matrise  $y$ . Den første kolonna av  $y$  inneholder verdiene for  $y_1 = y$ , den neste kolonna verdiene for  $y_2 = y'$  osv.

Programmet ovenfor bruker fast skrittstørrelse, mens alle versjonene som følger med Matlab bruker variabel skrittstørrelse. Vi kommer selvfølgelig til også å bruke Matlab-versjonene i dette kurset uten å gå detaljert inn på hvordan de virker. La oss bruke **rkn** på eksempel 1.5.

Systemet er:

$$\frac{dz}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g - \alpha \cdot v^2$$

Vi setter  $z = y_1$  og  $v = y_2$  slik at systemet blir:

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = g - \alpha \cdot (y_2)^2$$

Startverdier:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

Funksjonen *odefun* ovenfor kan da skrives:

```
function dydt = odefun(t,y,g,a)
dydt = zeros(length(y),1);
dydt(1) = y(2);
dydt(2) = g - a*y(2)^2;
```

Her har vi satt  $p1 = g$  og  $p2 = a = \alpha$   
Kan også skrives mer kompakt:

```
function dydt = odefun(t,y,g,a)
dydt = [y(2); g - a*y(2)^2];
```

Programmet **rkneks13** er vist under.

```

program rkneks13
clear
tspan = [0 6.3];
y0 = [0 ; 0];
dt = 0.49;
g = 9.81; a = 0.007;
[t,ye] = rkn(@odefun,tspan,y0,dt,'rk1',g,a);
[t,yh] = rkn(@odefun,tspan,y0,dt,'rk2',g,a);
[t,yrk] = rkn(@odefun,tspan,y0,dt,'rk4',g,a);
fprintf(' %8.4f %9.4f %9.4 %9.4f\n',[t ye(:,1) yh(:,1) yrk(:,1)]);

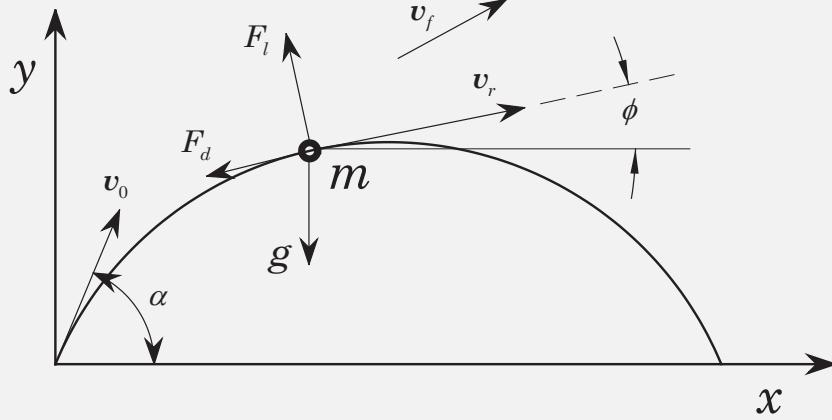
```

Vi integrerer fra  $t = 0$  til  $t = 6.3$  og har valgt  $\Delta t = 0.49$ . Merk at  $\Delta t = 0.49$  ikke går opp i 6.3. Derfor vil det siste skrittet være forskjellig fra de andre. Vi har bare skrevet ut den første kolumnen, dvs.  $z$ -verdiene, for hver av metodene.

t	Euler	Heun	RK4	Analytisk
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4900	0.0000	1.1777	1.1745	1.1745
0.9800	2.3554	4.6722	4.6599	4.6599
1.4700	7.0273	10.3725	10.3470	10.3470
1.9600	13.9018	18.1082	18.0685	18.0686
2.4500	22.8009	27.6694	27.6173	27.6174
2.9400	33.5010	38.8264	38.7661	38.7661
3.4300	45.7551	51.3482	51.2846	51.2847
3.9200	59.3134	65.0150	64.9537	64.9537
4.4100	73.9403	79.6277	79.5735	79.5735
4.9000	89.4249	95.0119	94.9685	94.9686
5.3900	105.5865	111.0188	110.9888	110.9889
5.8800	122.2751	127.5241	127.5090	127.5092
6.3000	136.9275	141.9865	141.9884	141.9885

Vi har med hensikt valgt et forholdsvis grovt nett. Som tabellen viser, er det en vesentlig forskjell på nøyaktigheten mellom Euler-skjemaet og Heun-skjemaet, dvs.: mellom en 1. ordens metode og en 2. ordens. Vi ser at Euler-skjemaet henger etter ved at her er  $z$ -verdien fremdeles lik 0 for  $t = 0.49$ .

Dessuten ser vi at RK4-verdiene er nesten identisk med de analytiske.

**Eksempel 1.7 Partikkelbevegelse i to dimensjoner**


Figur 1.14

$v$  er absolutthastigheten,  $v_f$  = fluidens hastighet,  $v_r = v - v_f$  er relativhastigheten,  $\alpha$  = elevasjonsvinkel,  $v_0$  er starhastigheten og  $\phi$  er vinkelen mellom  $x$ -aksen og  $v_r$ .

$\mathbf{F}_L$  er løftekraften p.g.a partikkelenes rotasjon (Magnus-effekten) og står loddrørt på  $v_r$ . Med den gitte retningen roterer partikkelen (legemet) mot urviseren. (backspin). Rotasjon med urviseren (topspin) er typisk for tennis og bordtennis.  $\mathbf{F}_D$  er fluidmotstanden mot bevegelsen og er parallell med  $v_r$ . Disse kreftene er gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_D &= \frac{1}{2} \rho_f A C_D v_r^2 \\ \mathbf{F}_L &= \frac{1}{2} \rho_f A C_L v_r^2\end{aligned}\quad (1.5.4)$$

$C_D$  er drag-koeffisienten,  $C_L$  er løft-koeffisienten,  $A$  er arealet av partikkelenes projeksjon i fartsretningen og  $\rho_f$  er fluidens densitet.

Newton's lov i  $x$ - og  $y$ -retning gir:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\rho_f \frac{A}{2m} v_r^2 (C_D \cdot \cos(\phi) + C_L \sin(\phi)) \quad (1.5.5a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \rho_f \frac{A}{2m} v_r^2 (C_L \cdot \cos(\phi) - C_D \sin(\phi)) - g \quad (1.5.5b)$$

Fra figuren:

$$\cos(\phi) = \frac{v_{rx}}{v_r}, \quad \sin(\phi) = \frac{v_{ry}}{v_r}$$

Antar dessuten at partikkelen er en kule, slik at  $C = \rho_f \frac{A}{2m} = \frac{3\rho_f}{4\rho_k d}$  som i eksempel 1.2. Her er  $d$  kulas diameter og  $\rho_k$  kulas densitet.

(1.5.5) blir nå:

$$\frac{dv_x}{dt} = -C \cdot v_r (C_D \cdot v_{rx} + C_L \cdot v_{ry}) \quad (1.5.6a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = C \cdot v_r (C_L \cdot v_{rx} - C_D \cdot v_{ry}) - g \quad (1.5.6b)$$

Med  $\frac{dx}{dt} = v_x$  og  $\frac{dy}{dt} = v_y$  fås følgende system av 1. ordens ligninger:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_x}{dt} &= -C \cdot v_r (C_D \cdot v_{rx} + C_L \cdot v_{ry}) \\ \frac{dv_y}{dt} &= C \cdot v_r (C_L \cdot v_{rx} - C_D \cdot v_{ry}) - g \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Innfører følgende notasjon:

$$x = y_1, \quad y = y_2, \quad v_x = y_3, \quad v_y = y_4$$

slik at (1.5.7) blir:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_3 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_4 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -C \cdot v_r (C_D \cdot v_{rx} + C_L \cdot v_{ry}) \\ \frac{dy_4}{dt} &= C \cdot v_r (C_L \cdot v_{rx} - C_D \cdot v_{ry}) - g \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Her er:  $v_{rx} = v_x - v_{fx} = y_3 - v_{fx}$ ,  $v_{ry} = v_y - v_{fy} = y_4 - v_{fy}$ ,  
 $v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}$

Initialbetingelser for  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x = y &= 0 & \rightarrow y_1 = y_2 = 0 \\ v_x = v_0 \cos(\alpha) &\rightarrow y_3 = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y = v_0 \sin(\alpha) &\rightarrow y_4 = v_0 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

### Glatt kule uten løft

Bruker en ball med følgende data:

$$\text{Diameter } d = 41\text{mm, masse } m = 46\text{g som gir } \rho_k = \frac{6m}{\pi d^3} = 1275\text{kg/m}^3 \quad (1.5.9)$$

Bruker utgangshastighet  $v_0 = 50$  m/s og løser (1.5.8) med **rk4c**.

Beregningen er gitt i Matlab-programmet **sballrk4c**.  $C_D$  beregnes av programmet **CDkule**. Andre data er gitt i programmet.

Resultat fra beregningen for forskjellige verdier av  $\alpha$  er vist i figur 1.15

Uten luftmotstand får vi som kjent  $x_{maks}$  for  $\alpha = 45^\circ$ . I dette tilfellet fås  $x_{maks}$  for  $\alpha \approx 45^\circ$ .

### Beregning av nedslagspunktet.

Da vi bruker en beregningsrutine med konstant tidskritt, må vi interpolere for å finne tiden når ballen treffer bakken, dvs. for  $y = 0$ .

Bruker indeks 1 på det siste punktet før ballen treffer bakken og indeks 2 på det første punktet etter at ballen har passert  $y = 0$ .

Bruker først lineær interpolering:

$$y = y_1 + \dot{y}_1 \cdot \tau, \quad \tau = t - t_1 \text{ og med } \tau = \tau_0^l \text{ for } y = 0 \text{ får vi: } \tau_0^l = -\frac{y_1}{\dot{y}_1} \quad (1.5.10)$$

Dersom vi antar konstant akselerasjon  $a$  mellom tidspunktene  $t_1$   $t_2$ , kan vi finne en forbedret verdi fra den velkjente kastligningen:

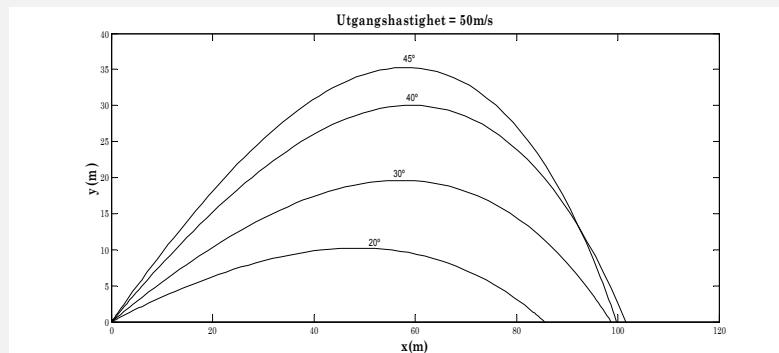
$$\begin{aligned} y &= y_1 + \dot{y}_1 \cdot \tau + \frac{1}{2}a \cdot \tau^2 \\ a &= \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \dot{y}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

$a$  er her den midlere akselerasjonen.

Med  $\tau = \tau_0$  for  $y = 0$  får vi fra (1.5.11):

$$\tau_0 = -[y_1 + \frac{1}{2}a \cdot (\tau_0^l)^2]/\dot{y}_1 = \tau_0^l(1 - \frac{1}{2}\frac{a\tau_0^l}{\dot{y}_1}) \quad (1.5.12)$$

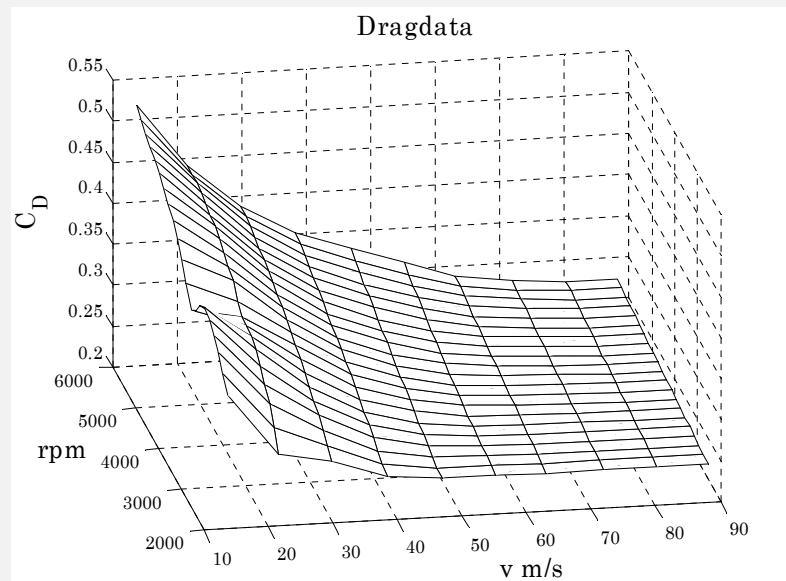
Merk at istedenfor å løse 2. gradsligningen, har vi satt inn fra (1.5.10) i det kvadratiske leddet  $\tau^2$  da  $\tau^2 \ll \tau$ . I programmet vil verdiene ved tiden  $t_2$  være kjente. Verdiene for tiden  $t_1$  beregnes ved å integrere baklengs ett tidskritt. Dersom vi bruker **ode45** til å løse ligningsystemet, er det ikke nødvendig å utføre interpoleringen da **ode45** har innebygd løsningsrutiner for nullpunktsbestemmelse. (Events). Dette er vist i programmet **sball45v1**.



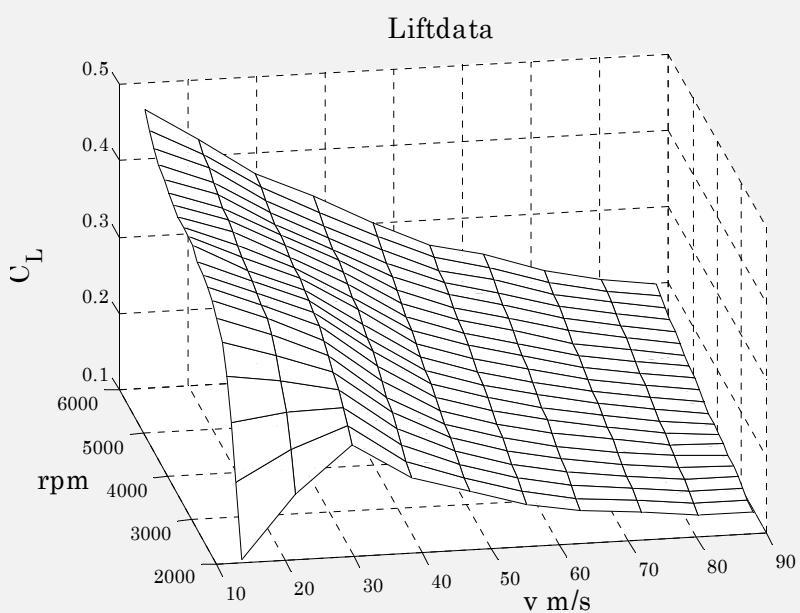
Figur 1.15

### Golfball

Bruker en golfball med dimensjon og vekt som gitt i (1.5.9). I dette tilfellet må vi ta med løft. Dessuten vil drag-data for en golf ball være helt forskjellig fra den glatte kula. Figurene 1.13a,b nedenfor viser drag-og løft-data målt i vindtunnel av P. W. Bearman og J. K. Harvey [2].  $C_D$  og  $C_L$  er nå også funksjon av ballens rotasjonshastighet, her uttrykt ved antall omdreininger pr. minutt (o/min rpm).

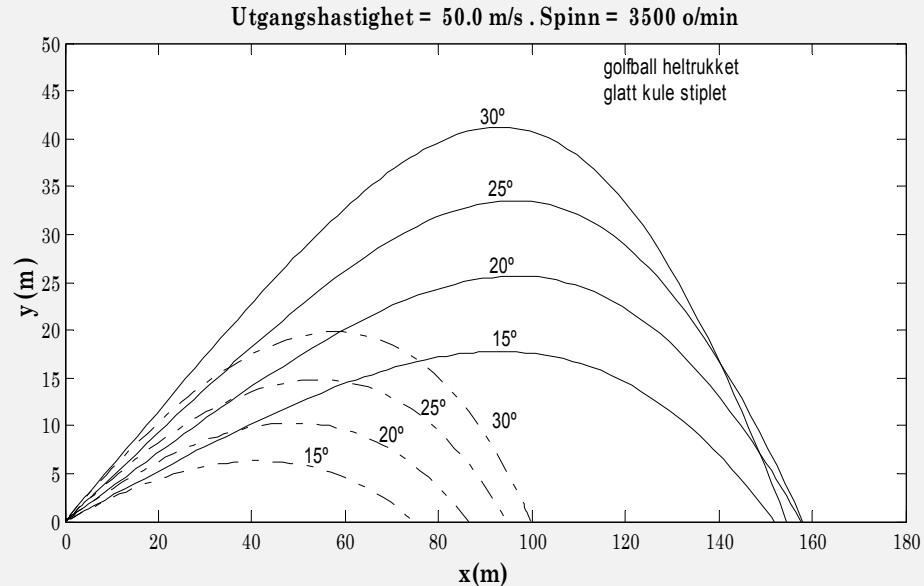


Figur 1.16



Figur 1.17

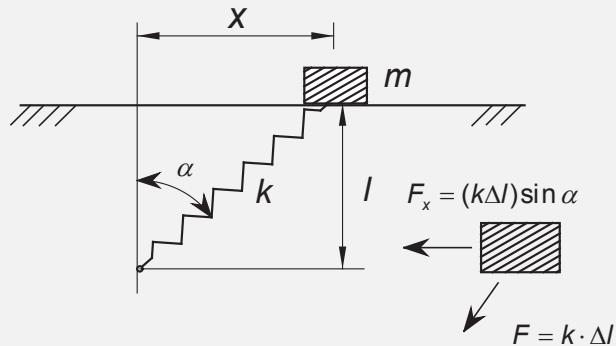
Velger et eksempel med  $\text{o/min} = 3500$  og utgangshastighet  $v_0 = 50\text{m/s}$ .



Figur 1.18

Figuren er beregnet med programmet **sball45v2** og **golf45v2**. Vi ser at golfballen går mye lenger enn den glatte kula, hovedsakelig p.g.a. løftet, men også p.g.a. mindre drag.

### Eksempel 1.8 Ikke-lineær svingning



Figur 1.19

Figuren viser en masse  $m$  som kan bevege seg friksjonsfritt på et horisontalt underlag. En lineær fjær med fjærkonstant  $k$  er festet til massen. Fjæra har lengde  $l$  i ustrukket tilstand (når massen er i origo).

$$\text{Newtons lov gir: } -F_x = m \frac{d^2x}{d\tau^2}$$

Av figuren får vi:

$$F_x = k \sin(\alpha) \cdot \Delta l, \quad \Delta l = \sqrt{x^2 + l^2} - l \quad \text{og} \quad \sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

Innsatt ovenfor gir dette følgende svingeligning:

$$m \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + l^2}} \cdot (\sqrt{x^2 + l^2} - l) = 0 \quad (1.5.13)$$

Innfører dimensjonsløse størrelser:

$$u = \frac{x}{l} = \tan(\alpha), \quad \omega^2 = \frac{k}{2m}, \quad t = \omega \cdot \tau \quad (1.5.14)$$

(1.5.14) innsatt i (1.5.13) gir:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot (\sqrt{1+u^2} - 1) = 0 \quad (1.5.15)$$

Bruker følgende startbettingelser:  $u(0) = -u_0$ ,  $u_0 > 0$ ,  $\frac{du}{dt}(0) = 0$   
Det er ingen begrensninger på størrelsen av  $u_0$ .

### Små utslag

Dette betyr  $|u| \leq u_0 \ll 1$ . Med denne antagelsen blir (1.5.15):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u^3 = 0 \quad (1.5.16a)$$

$$u(0) = -u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0 \quad (1.5.16b)$$

Legg merke til at (1.5.16) er fremdeles ikke-lineær selv for små utslag.  
Dette i motsetning til f.eks. den matematiske pendelen der begrensning til små utslag gir en lineær ligning.

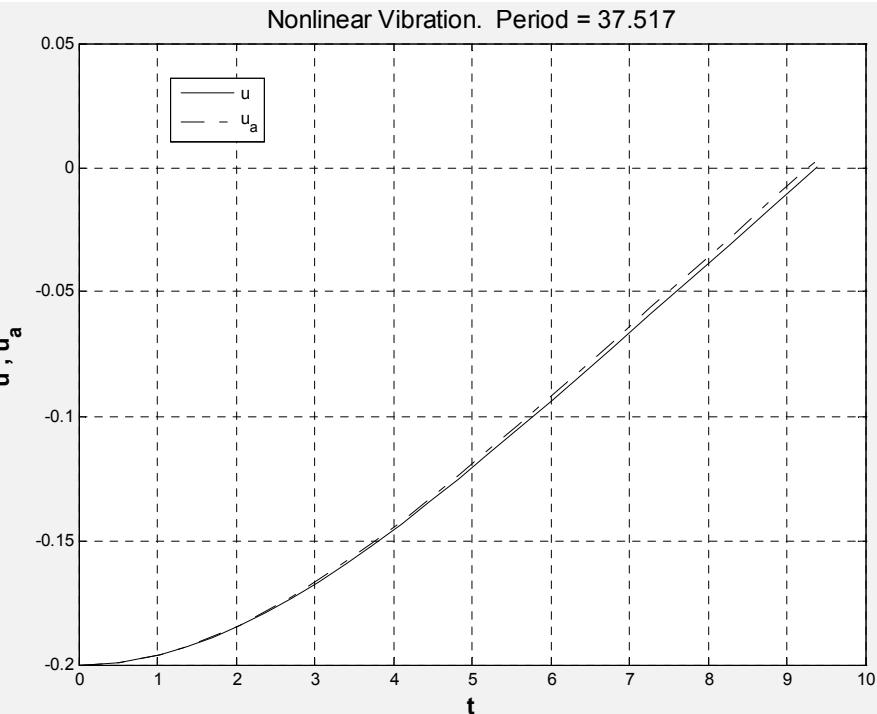
(1.5.16) lar seg løse analytisk med bruk av elliptiske funksjoner. (Se appendiks G, innledning).

For (1.5.16) er hele perioden gitt ved:

$$T = \frac{4}{u_0} \cdot K\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7.416292..}{u_0} \quad (1.5.17)$$

der  $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}}$  er det fullstendige elliptiske integral av 1. slag.

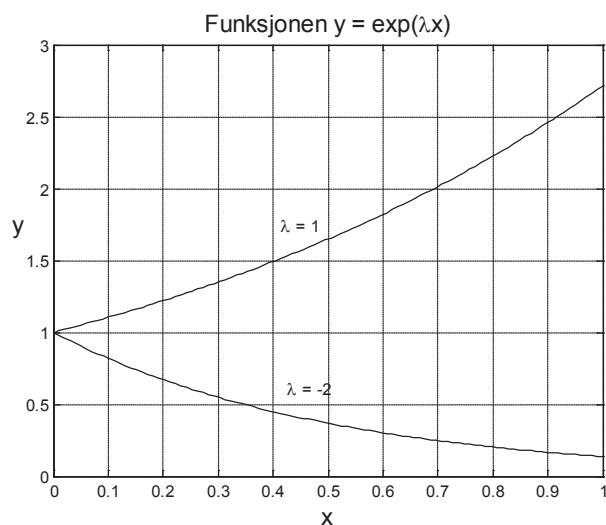
Matlab-programmet **nonlinvib** løser (1.5.15) og (1.5.16) for en gitt verdi av  $u_0$ . Figuren viser et tilfelle med  $u_0 = 0.2$ . Løsningen av (1.5.16) er betegnet  $u_a$ . Beregningen er stoppet når  $u = 0$  (origo) slik at figuren gjelder for en kvart periode. Avvik i perioden er bare 1.16% for det viste tilfellet, mens det øker til 19.7% for  $u_0 = 1.0$ .



Figur 1.20

## 1.6 STABILITET. STIVE LIGNINGER

### 1.6.1 STABILITET AV EKSPLISITTE RK-METODER



Figur 1.21

La oss se på følgende modell-ligning:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda \cdot y(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

med analytisk løsning:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \text{ er en konstant} \tag{1.6.2}$$

Figuren ovenfor viser  $y(x)$  med  $\lambda = 1$  og  $\lambda = -2$

### Eulers metode

Bruk av Eulers metode på (1.6.1) gir:

$$y_{n+1} = (1 + \lambda h) y_n, \quad h = \Delta x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.6.3}$$

Skriver ut (1.6.3):

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 + \lambda h) y_0 \\ y_2 &= (1 + \lambda h) y_1 = (1 + \lambda h)^2 y_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

som gir:

$$y_n = (1 + \lambda h)^n y_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.6.4}$$

Se også eksempel A.8, del A.4, appendiks A.

Den analytiske forsterkningsfaktoren  $G_a$  for dette eksemplet er gitt ved:

$$G_a = \frac{y(x_{n+1})}{y(x_n)} = \exp[\lambda(x_{n+1} - x_n)] = e^{\lambda h} = 1 + \lambda h + (\lambda h)^2/2 \dots \tag{1.6.5}$$

1. For  $\lambda > 0$

I dette tilfellet er det ingen problemer med å bruke (1.6.4). Men det er klart at vi må bruke mindre og mindre  $h$  for en gitt nøyaktighet for økende  $x$ -verdi. Vi må derfor operere på et intervall  $0 \leq x \leq x_{max}$

2. For  $\lambda < 0$

Setter  $\lambda = -\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , slik at (1.6.4) blir:

$$y_n = (1 - \alpha h)^n y_0 \tag{1.6.6}$$

Da  $y_n$  skal avta med økende  $n$ , må vi ha:

$$|1 - \alpha h| < 1 \rightarrow -1 < 1 - \alpha h < 1 \text{ som gir:}$$

$$0 < \alpha h < 2, \quad \alpha > 0 \tag{1.6.7}$$

Vi sier at skjemaet er absolutt stabilt (A-stabilt) når (1.6.7) er oppfylt.

Eksempelvis må  $h < 0.02$  for  $\alpha = 100$ .

Vi ser at Euler-skjemaet i (1.6.3) også kan skrives:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= G \cdot y_n \\ G &= \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \lambda h \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

$G$  kalles den *numeriske* forsterkningsfaktoren. Her blir  $G > 1$  for  $\lambda > 0$  og  $G < 1$  for  $\lambda < 0$ . (Sammenlign med (1.6.5)).

(1.6.4) kan nå skrives:

$$y_n = G^n y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6.9)$$

For en avtagende løsning ( $\lambda < 0$ ) må vi ha:

$$|G| < 1 \text{ som før} \quad (1.6.10)$$

Fra (1.6.9) ser vi at løsningen vil oscillere dersom  $G < 0$ , noe vi vil unngå.  $G > 0$  betyr  $1 - \alpha h > 0$  som er det samme som  $\alpha h < 1$

Har da fått følgende resultat:

Euler-skjemaet brukt på modell-ligningen er absolutt stabilt for  $0 < \alpha h < 2$ ,  $\alpha > 0$ . Vi får oscillasjoner i intervallet  $1 < \alpha h < 2$ ,  $\alpha > 0$ . Eksempelvis vil vi for  $\alpha = 10$  ha stabilitet i intervallet  $0 < h < 0.2$  samt oscillasjoner i intervallet  $0.1 < h < 0.2$ . Dette er ikke noe strengt krav. Kravet til rimelig nøyaktighet krever en adskillig mindre  $h$  enn dette.

### Heuns metode

Bruk av Heuns metode på (1.6.1) med  $\lambda = -\alpha$ ,  $\alpha > 0$  gir:

$$\begin{aligned} \text{Prediktor: } y_{n+1}^p &= y_n + h \cdot f_n = (1 - \alpha h) \cdot y_n \\ \text{Korrektor: } y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot (f + f_{n+1}^p) = [1 - \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2] \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

eller:

$$G = \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 \quad (1.6.12)$$

Stabilitetsbetingelsen er:

$$|G| < 1 \quad (1.6.13)$$

Grenseverdi:

$$G = 1 = 1 - \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 \rightarrow \alpha h = 2$$

Stabilitetsbetingelsen blir da:

$$0 < \alpha h < 2 \quad (1.6.14)$$

Dette er den samme betingelsen som for Euler-skjemaet.  
Her er alltid  $G > 0$  slik at vi ikke får oscillasjoner.

Selv om Heun-skjemaet er et 2. ordens skjema, har det samme stabilitetsområdet som Euler-skjemaet. Nå vet vi at Eulers metode er Runge-Kutta av orden 1 og Heuns metode er Runge-Kutta av orden 2.

La oss undersøke om høyere ordens RK-skjema har større stabilitetsområde.

Den analytiske løsningen av modell-ligningen (1.6.1) er gitt ved:

$$y(x) = e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} + \cdots \quad (1.6.15)$$

Dersom vi erstatter  $\lambda x$  med  $\lambda h$ , får vi den tilsvarende løsningen av differanseligningen der Eulers metode (RK1) tilsvarer de to første leddene, Heuns metode (RK2) de tre første, RK3 de fire første leddene og RK4 de fem første. Vi skriver da:

$$G = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\lambda h)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots, 5 \quad (1.6.16)$$

La oss konsentrere oss om løsningene som avtar, dvs.  $\lambda < 0$ . Dette betyr at  $|G| < 1$ . Vi har funnet fra (1.6.7) at  $0 < \alpha h < 2$ ,  $\alpha > 2$  eller

$$-2 < \lambda h < 0 \quad (1.6.17)$$

for både Eulers og Heuns metode.

Hva med RK3? Her blir  $G = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!}$  med  $|G| < 1$ .

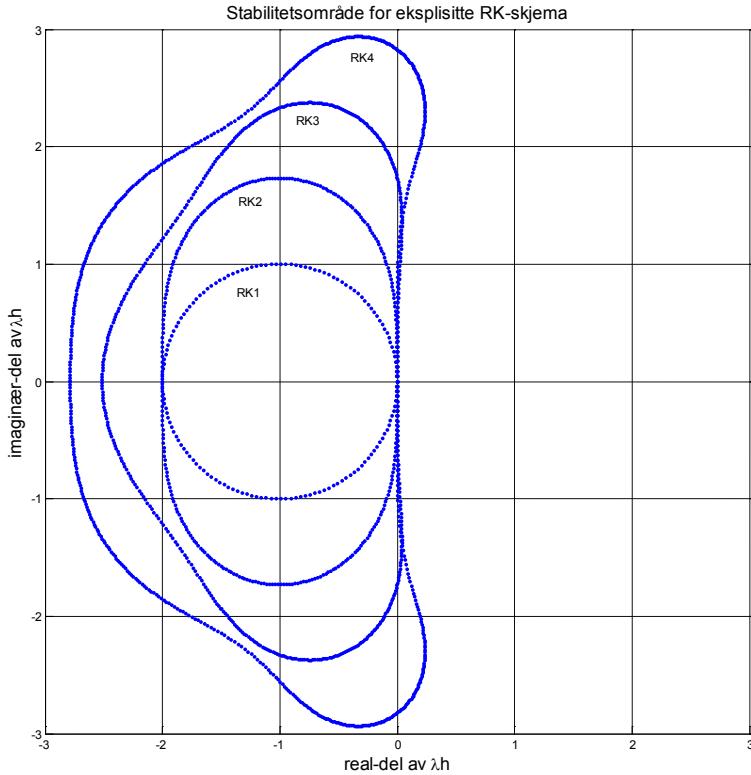
Grenseverdiene finnes ved å sette  $G = \pm 1$  som for reelle røtter blir:

$$-2.5127 < \lambda h < 0 \quad (1.6.18)$$

For RK4 får vi tilsvarende:  $G = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}$  som med  $G = 1$  gir for de reelle røttene:

$$-2.7853 < \lambda h < 0 \quad (1.6.19)$$

Vi kan da fastslå at når det angår stabilitet, er det ikke mye å hente ved å gå til høyere orden med eksplisitte Runge-Kutta metoder. Ovenfor har vi antatt at  $\lambda$  er reell. For høyere ordens ligninger og system generelt, kan  $\lambda$  være kompleks. Dersom vi tar med de komplekse røttene, blir stabilitetsområdene som vist i figuren nedenfor.



Figur 1.22

Vi ønsker selvfølgelig at skjemaet er absolutt stabilt i hele det venstre halvplanet. Et slikt skjema kalles strengt absolutt stabilt eller rett og slett L-stabilt, der L henviser til *left* (venstre). Det finnes ingen *eksplisitte* metoder som er L-stabile, hverken RK-metoder eller andre metoder. Vi må da se på implisitte metoder der vi gir noen enkle eksempler i avsnitt 1.6.3

### 1.6.2 STIVE DIFFERENSIALLIGNINGER

Ser deretter på en lineær 2. ordens ligning med konstante koeffisenter:

$$y''(x) = \lambda_1 y'(x) + \lambda y(x) \quad (1.6.20a)$$

$$\text{med løsning: } y(x) = C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{\beta_2 x} \quad (1.6.20b)$$

$\beta_1$  og  $\beta_2$  bestemmes fra den karakteristiske ligningen:

$$\beta^2 - \lambda_1 \beta - \lambda = 0 \quad (1.6.21a)$$

$$\text{med løsning: } \beta_{1,2} = \frac{\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda}}{2} \quad (1.6.21b)$$

Kan også skrive (1.6.20) som et system med  $y'(x) = v(x)$ :

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(x) \\ v(x) \end{bmatrix} \quad (1.6.22)$$

$\beta_1$  og  $\beta_2$  finnes nå som egenverdiene av koeffisientmatrisa i (1.6.22):

$$\det \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \lambda & \lambda_1 - \beta \end{bmatrix} = 0 \text{ som gir } \beta^2 - \lambda_1\beta - \lambda = 0 \text{ som i (1.6.21a)}$$

La oss nå bruke Eulers metode på systemet i (1.6.22)

Vi får:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hv_n \\ v_{n+1} &= (1 + \lambda_1 h)v_n + \lambda h y_n \end{aligned}$$

$$\text{eller som system: } \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ \lambda h & 1 + \lambda_1 h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad (1.6.23)$$

Løsningen av (1.6.23) kan skrives:

$$y_n = A_1 \sigma_1^n + A_2 \sigma_2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6.24)$$

der  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  er egenverdiene av koeffisientmatrisa i (1.6.23) og er konstanter som bestemmes fra startbetingelsene. (Se appendiks A.4).

Egenverdiene finnes fra  $\det \begin{bmatrix} 1 - \sigma & h \\ \lambda h & 1 + \lambda_1 h - \sigma \end{bmatrix} = 0$  som utmultiplisert gir den karakteristiske ligningen:

$$\sigma^2 - (\lambda h_1 + 2)\sigma + 1 + \lambda_1 h - \lambda h^2 = 0 \quad (1.6.25a)$$

$$\text{med løsning: } \sigma_{1,2} = 1 + \frac{h}{2} \left[ \lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda} \right] \quad (1.6.25b)$$

Som i (1.6.8), kan vi også her innføre forsterkningsfaktoren  $G$  som nå blir en matrise. Skriver (1.6.23) på følgende måte:

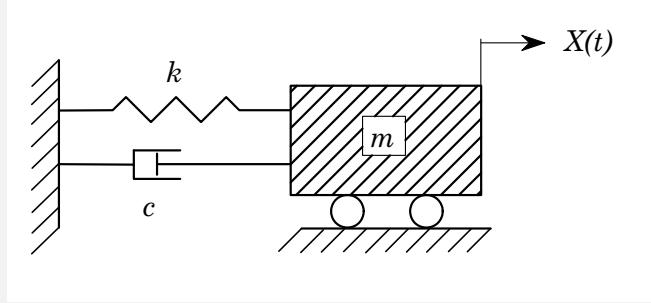
$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{Y}^n \quad (1.6.26a)$$

$$\text{der } \mathbf{Y}^{n+1} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}^{n+1}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ \lambda h & 1 + \lambda_1 h \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{Y}^n = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}^n \quad (1.6.26b)$$

I egenverdirommet blir forsterkningsmatrisa en diagonalmatrise:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ \lambda h & 1 + \lambda_1 h \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

$\beta_1$  og  $\beta_2$  i (1.6.21b) kan være reelle (positive og negative) og komplekse. Dersom realdelen av begge røttene er negative, vil løsningen  $\rightarrow 0$  når  $x \rightarrow \infty$ . Det samme må da gjelde for  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  ovenfor.

**Eksempel 1.9 Dynamisk system med sterk dempning**


Figur 1.23

Figuren viser en masse koplet til en fjær og en demper. Differensialligningen for systemet er gitt ved:

$$m \frac{d^2X}{d\tau^2} + c + \frac{dX}{d\tau} + kX = 0 \quad (1.6.27a)$$

$$\text{Velger følgende startbetingelser: } X(0) = X_0, \frac{dX}{d\tau}(0) = 0 \quad (1.6.27b)$$

Innfører dimensjonsløse størrelser:

$$x = \frac{X}{X_0}, \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}, t = \omega_e \tau, \zeta = \frac{c}{2m\omega_e} \quad (1.6.28)$$

(1.6.28) innført i (1.6.27) gir følgende ligning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.6.29a)$$

$$\text{med startbetingelser: } x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad (1.6.29b)$$

Analytisk løsning av (1.6.29) for  $\zeta > 1$  (overkritisk tilfelle):

$$x(t) = A \cdot e^{\beta_1 t} + B \cdot e^{\beta_2 t} \quad (1.6.30a)$$

$$\text{der } \beta_1 \text{ og } \beta_2 \text{ finnes fra (1.6.21): } \beta_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}, \beta_2 = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.6.30b)$$

For  $\zeta \gg 1$  får vi følgende tilnærmelser:

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} \approx \zeta - \frac{1}{2\zeta}, \beta_1 \approx -\frac{1}{2\zeta}, \beta_2 \approx -2\zeta + \frac{1}{2\zeta}, A \approx 1 + \frac{1}{4\zeta^2}, B = -\frac{1}{4\zeta^2} \quad (1.6.30c)$$

som gir følgende tilnærmede løsning av (1.6.30):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

der

$$x_1(t) \approx \left(1 + \frac{1}{4\zeta^2}\right) \cdot e^{-\frac{t}{2\zeta}}, x_2(t) \approx -\frac{1}{4\zeta^2} \cdot e^{2\zeta t} \quad (1.6.31)$$

La oss velge  $\zeta = 100$  og anta at  $0 \leq t \leq 20$ .

Innsatt i (1.6.31):

$$x_1(t) = 1.000025 \cdot e^{-0.0005t}, \quad x_2(t) = -0.000025 \cdot e^{-200t} \quad (1.6.32a)$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1.000025, \quad x_2(0) = -2.5 \cdot 10^{-5} \\ x_1(20) &= 0.9049, \quad x_2(20) = -1.7 \cdot 10^{-1742} \end{aligned} \quad (1.6.32b)$$

For  $t = 20$  er  $x_2$  i praksis lik 0. Allerede for  $t = 0.0345$  er  $x_2$  redusert fra  $-2.5 \cdot 10^{-5}$  til ca.  $-2.5 \cdot 10^{-8}$ .

Vi er nå interessert i å se hvordan Eulers metode takler denne ligningen. Løsningen av den tilhørende differanseligningen fra Eulers metode er gitt i (1.6.24):

$$x_n = A_1 \sigma_1^n + A_2 \sigma_2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6.33)$$

med  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  fra (1.6.25b):  $\sigma_{1,2} = 1 + \frac{h}{2} [\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda}]$   
som innsatt for  $\lambda_1 = -2\zeta$  og  $\lambda = -1$  gir:

$$\sigma_1 = 1 + h \cdot [-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}], \quad \sigma_2 = 1 - h \cdot [-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}] \quad (1.6.34)$$

Vi kan rekkeutvikle (1.6.34) for store  $\zeta$ -verdier, men velger å sette inn direkte  $\zeta = 100$  som gir:

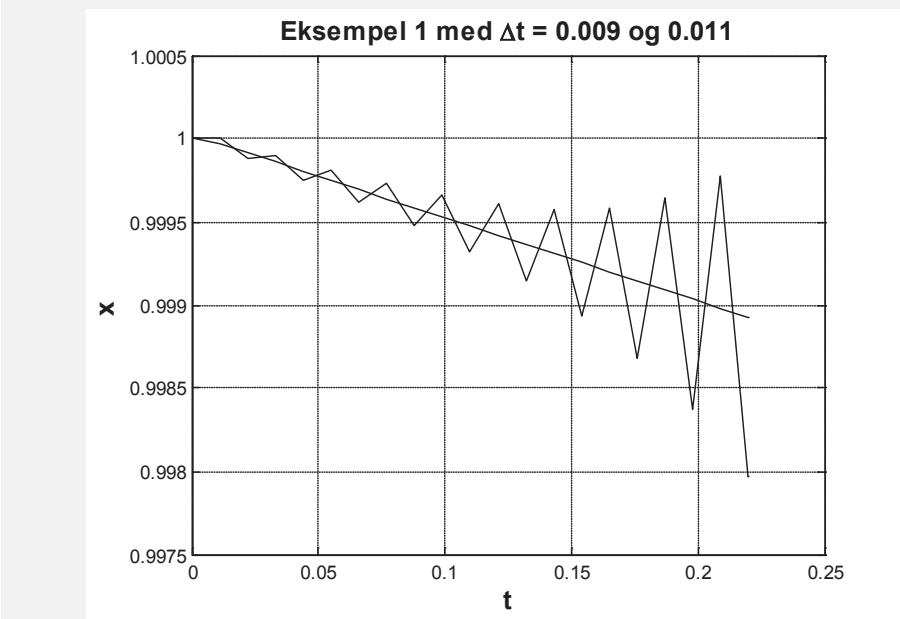
$$\sigma_1 \approx 1 - 0.005 \cdot h, \quad \sigma_2 \approx 1 - 200 \cdot h \quad (1.6.35)$$

Stabilitetsbetingelsen er nå:

$$|\sigma_1| < 1, \quad |\sigma_2| < 1$$

Fra (1.6.35) ser vi at den siste er den kritiske, slik at vi får:

$$|1 - 200h| < 1 \rightarrow h < 0.01 \quad (1.6.36)$$

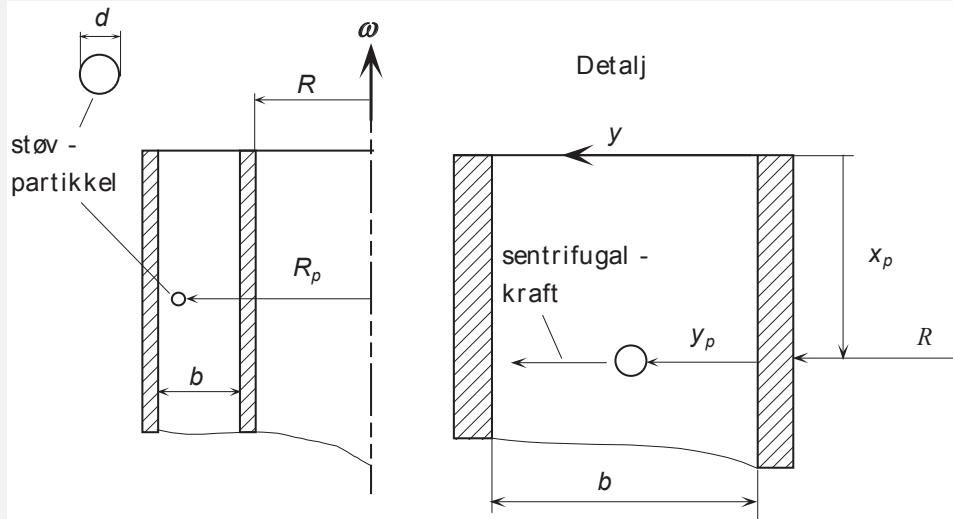


Figur 1.24

Figuren viser at vi får kraftig økende oscillasjoner allerede for  $h \equiv \Delta t = 0.011$ , mens vi for  $\Delta t = 0.009$  får en løsning med relativ feil  $\approx 5.0 \cdot 10^{-6}$  for  $t = 0.22$ . For Eulers metode er ikke betingelsen  $h < 0.01$  noe strengt krav. Dersom vi for eksempel ønsker å bestemme  $x_2$ , må vi bruke adskillig mindre skritt lengde enn 0.01. Saken stiller seg helt annerledes dersom vi vil bruke RK4. Vi aksepterer at vi må bruke liten skritt lengde for å bestemme  $x_2$ . Men etter  $t = 0.0345$  er  $x_2$  blitt så liten at vi derfra bare er interessert i  $x_1$ . Med en skritt lengde på 0.01 betyr dette at vi må bruke ca. 2000 skritt på intervallet  $[0, 20]$  på å beregne  $x_1$  som er en glatt funksjon på dette intervallet. Nå er riktig nok stabilitets-intervallet noe større for RK4, men likevel er ca 1400 skritt mer enn vi kan akseptere. Vi har her et typisk eksempel på en *stiv ligning*. I vårt tilfelle har vi stor forskjell mellom de to tidskalaene der den ene løsningen, her  $x_2$ , dør raskt ut, men likevel bestemmer skritt lengden for beregningen av den langsomst varierende komponenten; her  $x_1$ . Alle eksplisitte RK-metoder har denne type problemer med stive ligninger og blir derfor kostbare i bruk. For å vise dette, kan vi f.eks. løse (1.6.29) med bruk av Matlabs **ode45**. Nedenfor er vist utsnitt fra en utskrift der beregningen er utført på intervallet  $0 \leq t \leq 20$ . Beregningen er utført med relativ feiltoleranse  $= 10^{-5}$  og absolutt feiltoleranse  $10^{-8}$ . Vi ser at **ode45** velger en skritt lengde på ca. 0.02, mye mindre enn det som er nødvendig for å oppnå kravene til nøyaktighet. (Beregningen er utført med parameteren refine = 1)

t	x	$\dot{x}$
19.7790	9.0586e-001	-4.5294e-003
19.7934	9.0579e-001	-4.5291e-003
19.8078	9.0573e-001	-4.5287e-003
19.8254	9.0565e-001	-4.5283e-003
19.8452	9.0556e-001	-4.5279e-003
19.8633	9.0548e-001	-4.5274e-003
19.8779	9.0541e-001	-4.5271e-003
19.8915	9.0535e-001	-4.5269e-003
19.9073	9.0528e-001	-4.5265e-003
19.9265	9.0519e-001	-4.5260e-003
19.9461	9.0510e-001	-4.5256e-003
19.9622	9.0503e-001	-4.5252e-003
19.9758	9.0497e-001	-4.5249e-003
19.9901	9.0490e-001	-4.5246e-003
20.0000	9.0486e-001	-4.5244e-003

Antall skritt = 1223

**Eksempel 1.10 Støvutskiller**

Figur 1.25

Eksemplet beskriver en (noe forenklet) centrifuge for støvutskilling. Sentrifugan består av en indre roterende sylinder med radius  $R$  samt en ytre stasjonær sylinder med radius  $R + b$ . Gassen som skal renses, kommer inn ovenfra og fyller spalten mellom sylinderne. Sentrifugalkrafta sørger for at partiklene blir utskilt fra gassen.

Figuren er en forenklet versjon av en modell som har vært laget. På den virkelige modellen var sylinderne erstattet av kjegler og partiklenes bevegelse var tre-dimensjonal. Data nedenfor er hentet fra denne modellen.

$$\begin{aligned}\omega &= 100\pi/\text{s} & \mu_{gass} &= 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} & d &= 10^{-6} \text{ m} \\ b &= 0.01 \text{ m} & \rho_p &= 2500 \text{ kg/m}^3 & R &= 0.01 \text{ m} \\ C_D &= \frac{24}{Re} \quad \text{for } Re \approx 1 \text{ der } Re = \frac{\dot{y}_p d}{\nu} = \frac{\dot{y}_p d \rho_g}{\mu_g} & A_p &= \frac{\pi}{4} d^2\end{aligned}$$

Vi utfører en forenklet analyse av partikkelenes bevegelse.

Bruker Newtons 2. lov i  $y$ -retning:

$$m\ddot{y}_p = m\omega^2(R + y_p) - \frac{1}{2}\rho_g \dot{y}_p^2 A_p C_D$$

Ordnet:

$$\ddot{y}_p = -\frac{18\mu_g}{d^2 \rho_p} \dot{y}_p + \omega^2 y_p + \omega^2 R$$

Eksempel på initialbetingelser:

$$y_p = \dot{y}_p = 0 \text{ for } t = 0$$

Innsatt for de gitte data:

$$\ddot{y}_p = -129600 \cdot \dot{y}_p + 98696 \cdot y_p + 9869.6 \quad (1.6.37)$$

Homogenløsning:

$$y_p^h = Ae^{\beta_1 t} + Be^{\beta_2 t}$$

der  $\beta_1 = 0.76153 \approx 0.8$  og  $\beta_2 = -129600.762 \approx -129600$  fra (1.6.21b) Partikulær løsning:

$$y_p^{part} = -0.1$$

Initialbetingelsene ovenfor gir følgende verdier for  $A$  og  $B$ :

$$A = \frac{1}{10 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)} = 0.099999 \approx 0.1, \quad B = -\frac{\beta_1}{\beta_2} A = 5.876 \cdot 10^{-7} \approx 6.0 \cdot 10^{-7}$$

Totalt:

$$y_p \approx 0.1 \cdot (e^{0.8t} + 6 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-129600 \cdot t}) - 0.1 \quad (1.6.38)$$

Vi ser at leddet  $e^{-129600t}$  dør ut svært fort. Dersom vi neglisjerer dette leddet, blir løsningen:  $y_p \approx 0.1(e^{0.8t} - 1)$ . Dette tilsvarer å neglisjere  $\ddot{y}_p$ -leddet i den opprinnelige differensialligningen, dvs.: Vi går fra en 2. ordens ODL til en 1. ordens.

Vi har igjen en løsning der det er stor forskjell mellom tidskalaene.

Fra (1.6.25b):

$$\sigma_{1,2} = 1 + \frac{h}{2} \left[ \lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda} \right]$$

som innsatt for  $\lambda_1 = -129600$  og  $\lambda = 98696$  gir:

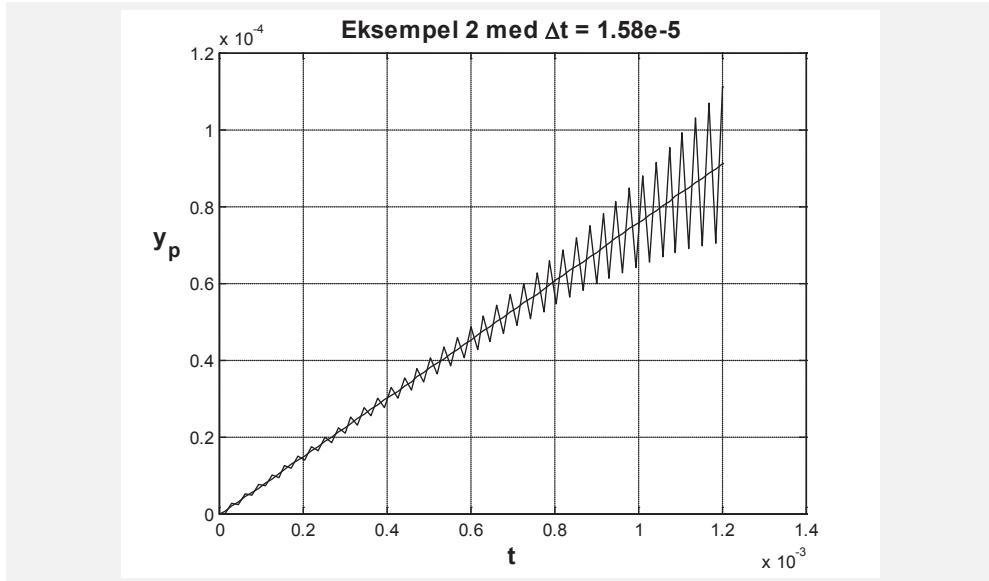
$$\sigma_1 \approx 1 + h \cdot 0.762, \quad \sigma_2 \approx 1 - h \cdot 129601 \quad (1.6.39)$$

Stabilitetsbetingelsen er som før:  $|\sigma_1| < 1, |\sigma_2| < 1$

Fra (1.6.39) ser vi at den siste er den kritiske, slik at vi får:

$$|1 - 129601 \cdot h| < 1 \rightarrow h < 1.543 \cdot 10^{-5} \quad (1.6.40)$$

Selv om løsningsintervallet er mye mindre enn i eksempel 1.4, er stabilitetsintervallet tilsvarende mindre, slik at vi også i dette tilfellet har et eksempel på en stiv differensialligning.



Figur 1.26

Figuren viser at vi får kraftig økende oscillasjoner allerede for  $h \equiv \Delta t = 1.58 \cdot 10^{-5}$ , mens vi for  $\Delta t = 1.5 \cdot 10^{-5}$  får en løsning med relativ feil  $\approx 5.0 \cdot 10^{-6}$  for  $t = 1.2 \cdot 10^{-3}$ . Med samme krav til nøyaktighet som i eksempel 1.4, bruker **ode45** 4096 skritt i dette tilfellet.

### 1.6.3 IMPLISITTE METODER

#### Baklengs Euler

Vi har nå sett at de eksplisitte RK-metodene har problemer med stive differentialslikeninger. La oss se på en 1. ordens diff-ligning:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.6.41}$$

Istedentfor foroverdifferanser for den deriverte, bruker vi nå bakoverdifferanser som fra tabell 1.2 blir:

$$\begin{aligned} y'(x_n) &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h), \text{ som innsatt i (1.6.41) gir:} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned}$$

eller ordnet:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{1.6.42}$$

Skjemaet i (1.6.42) kalles av naturlige grunner *baklengsEuler-skjema* og er som forlengs Euler en 1. ordens metode. Vi ser dessuten at dette er en

implisitt metode da diff-ligningen i (1.6.41) generelt er ikke-lineær og skjemaet kan derfor bare generelt løses eksplisitt m.h.p.  $y_{n+1}$  for lineære ligninger.

Vi bruker nå dette skjemaet på modell-ligningen gitt i (1.6.1):

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \lambda \cdot y_{n+1} \text{ som løst m.h.p. } y_{n+1} \text{ blir:}$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - \lambda h} \rightarrow y_n = \frac{1}{(1 - \lambda h)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6.43a)$$

Forsterkningsfaktoren  $G$  er nå:

$$G = \frac{1}{1 - \lambda h} \quad (1.6.43b)$$

For negative  $\lambda$ :  $\lambda = -\alpha$ ,  $\alpha > 0$ :

$$y_n = \frac{1}{(1 - \alpha h)^n} = G^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6.44)$$

Da nevneren alltid er positiv, er skjemaet i dette tilfellet alltid stabilt for negative  $\lambda$ . For positive  $\lambda$ -verdier får vi problemer når  $\lambda h \rightarrow 1$ . Dette gjenspeiler problemet med nøyaktighet av løsningen for store verdier av positive  $\lambda$  da løsningen i dette tilfellet er  $y(x) = e^{\lambda h}$ .

Legg merke til at vi var istrand til å løse m.h.p.  $y_{n+1}$  fordi ligningen er lineær.  
La oss se på en ikke-lineær ligning:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \tan(y(x)) \\ y(0) &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

med løsning:

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{e^x}{2}\right)$$

Baklengs Euler-skjema:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \tan(y_{n+1})$$

Vi ser at vi ikke kan løse m.h.p.  $y_{n+1}$  analytisk i dette tilfellet.

### Trapesmetoden

Trapesmetoden er lett og slett korrektoren i Heuns metode. For (1.6.41) blir korrektoren:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (1.6.45)$$

Anvendt på modell-ligningen i (1.6.1):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [\lambda \cdot y_n + \lambda \cdot y_{n+1}]$$

som løst m.h.p.  $y_{n+1}$  blir:

$$y_{n+1} = \left( \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} \right) \cdot y_n \quad (1.6.46a)$$

Forsterkningsfaktoren:

$$G = \left( \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} \right) \quad (1.6.46b)$$

Vi er først og fremst interessert i negative  $\lambda$ -verdier:  $\lambda = -\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , slik at  $G$  blir:

$$G = \frac{2 - \alpha h}{2 + \alpha h}$$

Betingelsen  $|G| < 1$  er nå alltid oppfylt. Kan ha oscillasjoner for  $G < 0 \rightarrow \alpha h > 2$

### Baklengs Euler brukt på eksempel 1 og 2

Vi starter med modell-ligningen i (1.6.20):

$y''(x) = \lambda_1 y'(x) + \lambda y(x)$  og skriver den som et system:

$$\begin{aligned} y'(x) &= v(x) \\ v'(x) &= \lambda_1 v(x) + \lambda y(x) \end{aligned}$$

Dette er et lineært, algebraisk system som kan løses m.h.p.  $y_{n+1}$  og  $v_{n+1}$ :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 h & h \\ \lambda h & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_n \\ v_n \end{bmatrix}, \quad B = 1 - \lambda_1 h - \lambda h^2 \quad (1.6.47)$$

Forsterkningsmatrisa:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 h & h \\ \lambda h & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \lambda_1 h}{B} & \frac{h}{B} \\ \frac{\lambda h}{B} & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \quad (1.6.48)$$

Beregner egenverdiene  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  av  $\mathbf{G}$  på vanlig måte:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G} - \sigma \mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1 - \lambda_1 h}{B} - \sigma & \frac{h}{B} \\ \frac{\lambda h}{B} & \frac{1}{B} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \text{ som gir:} \\ \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_1 h - 2 \pm h \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda}}{\lambda h^2 + \lambda_1 h - 1} \right) \end{aligned} \quad (1.6.49)$$

### TILFELLE 1

Her er  $\lambda_1 = -2\zeta$ ,  $\lambda = -1$  som innsatt i (1.6.49) gir:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1 + h \cdot (\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})}{1 + 2\zeta h + h^2}$$

Vi ser at  $|\sigma_1|$  og  $|\sigma_2| < 1$  for  $\zeta > 1$ . Spesielt for  $\zeta = 100$ :

$$\sigma_1 \approx \frac{1 + 200h}{1 + 200h + h^2}, \quad \sigma_2 \approx \frac{1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot h}{1 + 200h + h^2}$$

## TILFELLE 2

Her er  $\lambda_1 = -129600$ ,  $\lambda = 98696$  som innsatt i (1.6.49) gir:

$$\sigma_1 \approx \frac{1 - 0.7615h}{1 + 129600h - 98696h^2}, \quad \sigma_2 \approx \frac{1 + 129601 \cdot h}{1 + 129600h - 98696h^2}$$

Vi ser at  $|\sigma_1| < 1$  mens  $|\sigma_2|$  er litt større enn 1. Dette er i overenstemmelse med den analytiske løsningen i (1.6.38).

Vi har sett at implisitte metoder er overlegne de eksplisitte metodene for stive ligninger. Dette er ikke begrenset til de skjemaene vi har betraktet, men gjelder generelt. Et problem med de implisitte skjemaene, er at vi i det generelle tilfellet må løse ikke-linære algebraiske ligninger, slik at et skritt for en implisitt metode er mer kostbar enn for en eksplisitt metode. Metodene vi har nevnt ovenfor, er enkle spesialtilfeller av mer effektive. Vi har presentert dem som RK-metoder, men de tilhører også en familie av flerverdi-metoder som er knyttet til navnene Adams og Moulton. Baklengs Eulers metode er f.eks. en 1. ordens Adams-Moulton-metode.

Adams-Moulton-formeler utvidet til løsere for stive ligninger, kalles «backward differentiation formulas» (BDF), og mange kjente ligningsløsere bruker disse formlene. Matlabprogrammet **ode15s** er basert på BDF-formler.

Eksemplene vi har brukt ovenfor, kommer fra lineære ligninger med konstante koeffisienter. I disse tilfellene kan vi bruke metodene ovenfor til å avgjøre om ligningen er stiv under forutsetning av ligningen også er homogen. I et mer generelt tilfelle, må vi også la koeffisientene være variable, samt også å ta hensyn til en eventuell partikulær løsning. En mer pragmatisk måte er å først bruke **ode45**, titte på utskriften og skifte til f.eks. **ode15s** dersom løseren bruker uforholdsmessige små skritt når løsningen er glatt.

### Eksempel 1.11 Eksempel på en singulær differensialligning

Ligningene i eksempel 1.4 og 1.5 er av typen

$$\varepsilon y'' + f(y, y', x) = 0 \tag{1.6.50}$$

der  $\varepsilon$  er liten.

Når  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vil  $y''$  forsvinne og bare en randbetingelse kan oppfylles. En slik differanseligning kalles singulær. (En diff.-ligning kan være singulær på flere

måter). I forbindelse med startverdiproblemer, har vi sett at denne typen ligninger fører til stive diff.-ligninger når koeffisienten foran den høyeste deriverte blir liten. La oss se på denne typen ligninger i forbindelse med randverdiproblemer.

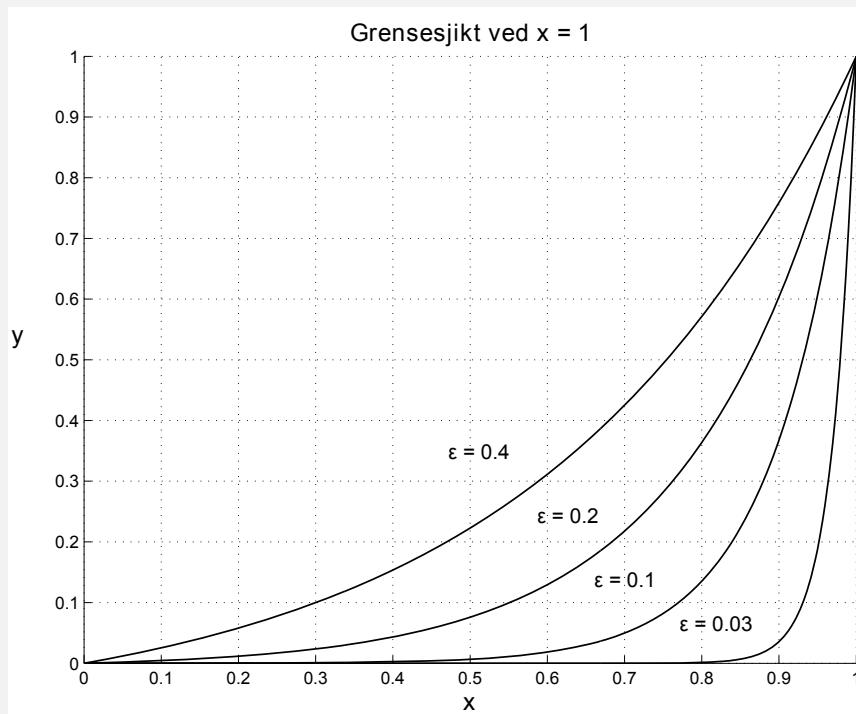
En enkel versjon av (1.6.50):

$$\varepsilon y'' - y' = 0 \quad (1.6.51)$$

med randbetingelsene  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$

(1.6.51) har den analytiske løsningen

$$y(x) = \frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1} \quad (1.6.52)$$



Figur 1.27

Figuren viser (1.6.52) for noen verdier av  $\varepsilon$ . For  $\varepsilon \rightarrow 0$  får vi et grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $y = 1$ . Ligning (1.6.51) oppfører seg som grensesjikt-ligningene i strømningsmekanikken. I de virkelige

grensesjikt-ligningene er  $\varepsilon = \frac{1}{Re}$  som indikerer at det kan være et sjikt nær en vegg for store Reynoldstall. Ligninger av grensesjikttypen er vanskelig å behandle numerisk nær rendene der sjiktet (sjiktene) opptrer. Vi må her bruke fint nett og/eller analytiske transformasjoner for å få tilstrekkelig opplosning. Legg også merke til at vi har  $x/\varepsilon$  i løsningen. For små verdier av  $\varepsilon$  betyr dette at ligningen oppfører seg som om randa  $x = 1$  har forskjøvet seg til  $x = 1/\varepsilon$ . Dette har betydning ved skyteteknikk, se kapittel 2, der vi forsøker å løse randverdiproblemer ved bruk av startverdimetoder.

## 1.7 LITT OM RK-METODER MED VARIABEL SKRITTLENGDE

De RK-skjemaene vi har beskrevet, har alle vært med konstant skritt lengde. Det er innlysende at det vil være fornuftig med et skjema der skritt lengden varierer, slik at det bruker små skritt der løsningen er bratt og store skritt der løsningen er slakk.

En fremgangsmåte er å bruke to skjema, ett av orden  $p$  og ett av orden  $p + 1$ , estimere den lokale feilen ut fra disse to beregningene, og slik finne om det er nødvendig å minske skritt lengden, eventuelt øke den. Dersom vi bruker RK4 som eksempel, trenger vi 4 funksjonsberegninger pr. skritt mens RK5 behøver 6 funksjonsberegninger pr. skritt. Dessuten bruker RK5 andre delskritt enn RK4.

I perioden 1957 til rundt 1980 ble det arbeidet intenst med dette problemet, knyttet til navn som f. eks. Merson, Zonneveld, England og Fehlberg. Ett av disse skjemaene (Fehlberg 1969-70) ble spesielt populært da det ble brukt i et Fortran-program kalt RKF45, skrevet av Watts og Shampine i 1975-76. (Listing av RKF45, skrevet i Fortran 66, finnes i Forsythe [7])

Dette skjemaet utfører 6 funksjonsberegninger pr. skritt. Fire av disse verdiene kombineres med ett sett av koeffisienter som gir en 4. ordens metode. Deretter kombineres alle seks verdiene med et annet sett av koeffisienter som gir en 5. ordens metode. Ut fra dette fås et feilestimat som kan brukes til skritt kontroll.

Fehlberg optimaliserte sine koeffisienter for en 4. ordens metode. Men da man hadde for hånden verdier for en 5. ordens metode, forsøkte man å bruke disse verdiene i den videre beregningen (lokal ekstrapolering).

Dormand og Prince (1980) gav et slikt sett av koeffisienter som er mye brukt, blant annet i Matlabprogrammet ODE45 (som egentlig burde kalles ODE54).

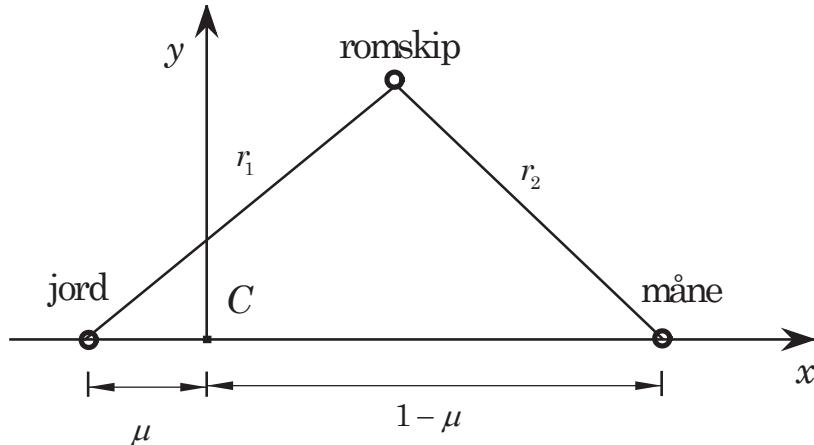
Et av problemene som oppstår med disse programmene brukt på glatte løsninger, er at skritt lengden blir så stor at det er vanskelig å lage et skikkelig plott. På de tidlige versjonene brukte man derfor å spesifisere en minste og en største skritt lengde som programmet kunne bruke. Det viste seg at programmene opererte dårlig når de ikke fikk bruke sin naturlig skritt lengde. Det ble derfor utviklet interpolerings-rutiner som interpolerer mellom de beregnede verdiene med samme nøyaktighet som de beregnede. De aller fleste programmene som brukes idag, har slike interpoleringsmuligheter.

F.eks., dersom du bruker Matlabprogrammet ODE45 uten å forandre på de forhåndsatte parametrene, blir ca. 3/4 av punktene beregnet ved interpolering. (Styres av parameteren *refine*, se Matlablefsa).

Flere detaljer finne i Shampine [11] og Hairer et. al [16].

La oss sammenligne Euler-skjemaet, vanlig RK4 og ODE45 ved å bruke dem på bevegelsen av et romfartøy i jord-måne-systemet. Detaljert utledning er

gitt i appendiks J.



Figur 1.28

Figuren viser et koordinatsystem med origo i massesenteret for jord-måne-systemet og som roterer med jorda og månen.

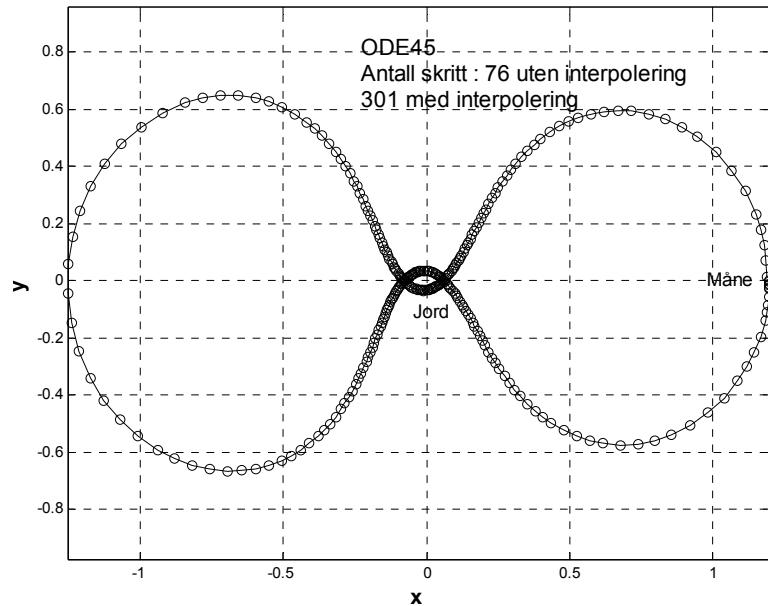
Ligningene for romfartøyets bevegelse er gitt ved (fra lign. (J.0.21)):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x + 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - \left[ \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] \cdot y \\ \text{der } -x_1 &= \mu = \frac{1}{82.45}, \quad x_2 = 1 - \mu = 0.98787\end{aligned}$$

Astronomen Robert R. Newton gjorde en rekke baneberegninger ved å starte romfartøyet på bortsiden av månen, nær overflata, med en liten hastighet i negativ  $y$ -retning. Ett av disse banene ble brukt av Fehlberg og finnes ofte gjengitt i litteraturen som et test-eksempel.

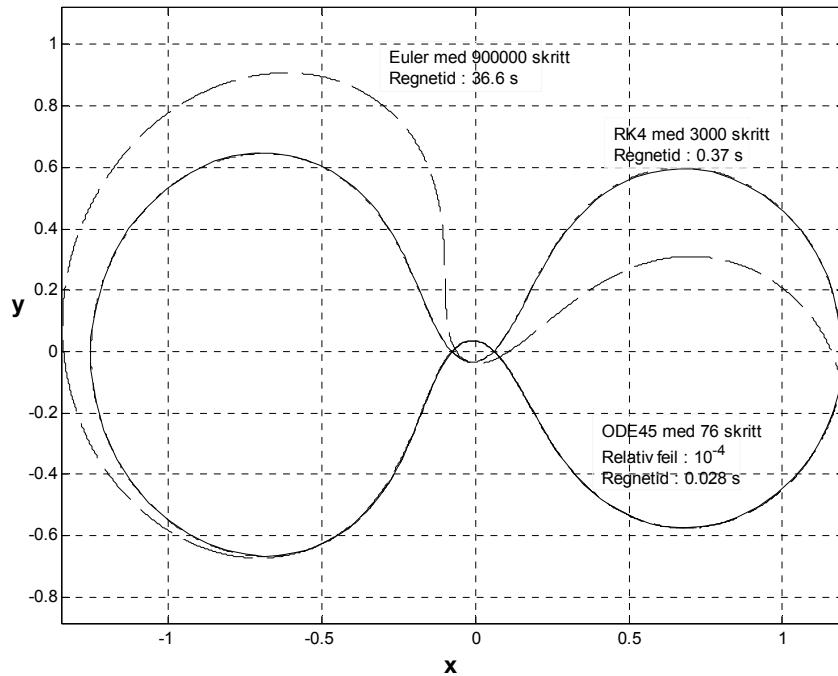
Startverdier:

$$x_0 = 1.2, \quad \dot{y}_0 = -1.049357509830343$$



Figur 1.29

Et program, **orbitode**, som finnes i mappa *demos* under Matlab, utfører samme beregningen som vist ovenfor.



Figur 1.30

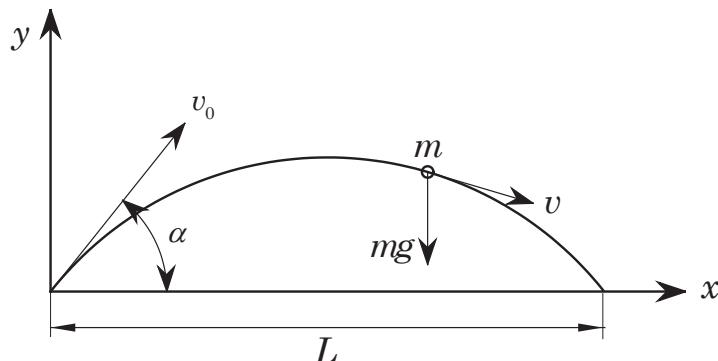
Vi ser at regnetiden med bruk av Euler-skjemaet er rundt 37 sekunder med 900000 skritt, mens ODE45 utfører den samme beregningen på 0.028 sekunder med bruk av 76 skritt .

# KAPITTEL 2

## SKYTETEKNIKK VED RANDVERDIPROBLEMER

### 2.1 LINEÆRE LIGNINGER

Skyteteknikk er en metode til å transformere et randverdiproblem for en ODL til et ekvivalent initialverdiproblem. Betegnelsen ”skyteteknikk” stammer fra problemstillingen skissert i figur 2.1 nedenfor.



Figur 2.1

Finn den vinkelen \$\alpha\$ som gir en gitt skytelengde \$x = L\$. Dette er et randverdiproblem der en betingelse er gitt for \$x = 0\$ og en for \$x = L\$. Ved å variere \$\alpha\$, virker det innlysende at dette problemet kan løses når \$L \leq L\_{maks}\$. Vi skal bruke tankegangen ovenfor på problemer som ikke har noe med prosjektiler å gjøre.

La oss se på et eksempel:

$$y'' = y(x) \quad (2.1.1)$$

med initialbetingelser:

$$y(0) = 0, y'(0) = s$$

(2.1.1) har følgende analytiske løsning:

$$y(x) = s \cdot \sinh(x) \quad (2.1.2)$$

Vi vil få en ny kurve  $y(x)$  for hver s-verdi vi velger. Figur 2.3 viser et eksempel med  $s = 0.2$  og  $0.7$ .

Vi ønsker egentlig å løse (2.1.1) med følgende randbetingelser:

$$y(0) = 0, y(1) = 1 \quad (2.1.3)$$

Fra (2.1.2) ser vi at dette problemet kan løses ved å velge  $s = s^*$  slik at  $y(1) = s^* \cdot \sinh(1)$  eller

$$s^* = \frac{1}{\sinh(1)} \quad (2.1.4)$$

I dette tilfellet er vi istrad til å finne den analytiske løsningen av både initial- og randverdiproblemet. Når dette ikke er mulig, blir fremgangsmåten i vårt tilfelle å velge verdier av s helt til betingelsen  $y(1) = 1$  er oppfylt. For vilkårlige verdier av s blir da  $y(1)$  en funksjon av s.

La oss se på et randverdiproblem for en 2. ordens *lineær* differensiellligning:

$$y''(x) = p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) + r(x) \quad (2.1.5a)$$

med randbetingelser:

$$y(\alpha) = \alpha, \quad y(\beta) = \beta \quad (2.1.5b)$$

Skriver (2.1.5) som et system:

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x) \\ g'(x) &= p(x) \cdot g(x) + q(x) \cdot y(x) + r(x) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

med randbetingelser gitt i (2.1.5b)

Velger randbetingelsen  $y(\alpha) = \alpha$  som initialbetingelse. Trenger også en initialbetingelse for  $y'(\alpha) \equiv g(\alpha)$ . Denne mangler, og for å kunne løse (2.1.6) som et initialverdiproblem, må vi tippe en verdi for  $y'(\alpha)$  slik at randbetingelsen  $y(\beta) = \beta$  blir oppfylt. Da (2.1.5) er en 2. ordens lineær differensiellligning, er det tilstrekkelig å beregne to verdier for  $s = g(\alpha) \equiv y'(\alpha)$ . Den rette verdien finnes ved lineær interpolering. Merk at  $y(x)$  alltid er proposjonal med  $s$  når ligningen er lineær og homogen.

Setter

$$\phi(s) = y(b; s) - \beta \quad (2.1.7)$$

der

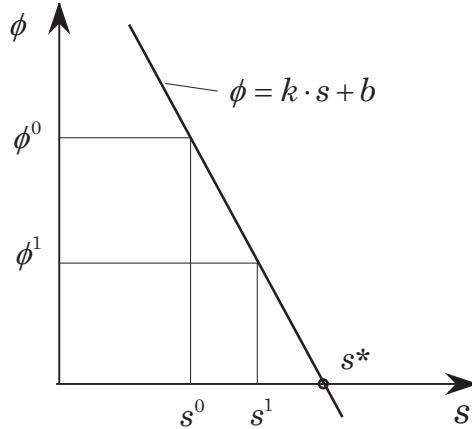
$$s = g(\alpha) \equiv y'(\alpha)$$

Den rette verdien  $s = s^*$  er funnet når

$$\phi(s^*) = 0 \quad (2.1.8)$$

Fremgangsmåten blir: Vi tipper to verdier  $s^0$  og  $s^1$  og beregner de tilhørende verdiene  $\phi^0$  og  $\phi^1$  fra (2.1.7) ved å løse ligningsystemet i (2.1.6). Egentlig bør vi skrive  $s^{(0)}$  og  $s^{(1)}$ , men bruker  $s^0$  og  $s^1$  når misforståelser (forhåpentligvis) ikke er mulig.

Den korrekte verdien for  $s$  finnes ved lineær interpolering som vist i figur 2.2.



Figur 2.2

$$\phi = k \cdot s + b, \quad k = \frac{\phi^1 - \phi^0}{s^1 - s^0}, \quad b = \frac{s^1 \cdot \phi^0 - \phi^1 \cdot s^0}{s^1 - s^0}$$

$\phi = 0$  for  $s^* = -\frac{b}{k}$  som gir:

$$s^* = s^1 + \delta s, \delta s = -\phi^1 \cdot \left( \frac{s^1 - s^0}{\phi^1 - \phi^0} \right) \rightarrow s^* = \frac{\phi^1 s^0 - \phi^0 s^1}{\phi^1 - \phi^0} \quad (2.1.9)$$

La oss gå tilbake til eksemplet i (2.1.1):

$$\begin{aligned} y'' &= y(x) \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

med analytisk løsning:

$$y(x) = \frac{\sinh(x)}{\sinh(1)}$$

Skriver først (2.1.10) som et system:

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x) \\ g'(x) &= y(x) \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Setter

$$\phi(s) = y(1; s) - 1 \quad (2.1.12)$$

der  $s = y'(0) = g(0)$   
 Randbetingelser:  $y(0) = 0, y(1) = 1$

Den rette verdien  $s = s^*$  er funnet når (2.1.8) er oppfylt.

Velger  $s^0 = 0.2$  og  $s^1 = 0.7$ .

Med disse verdiene for  $s$  og med  $\Delta x = 0.1$ , gir (2.1.10) med bruk av RK4 følgende tabell:

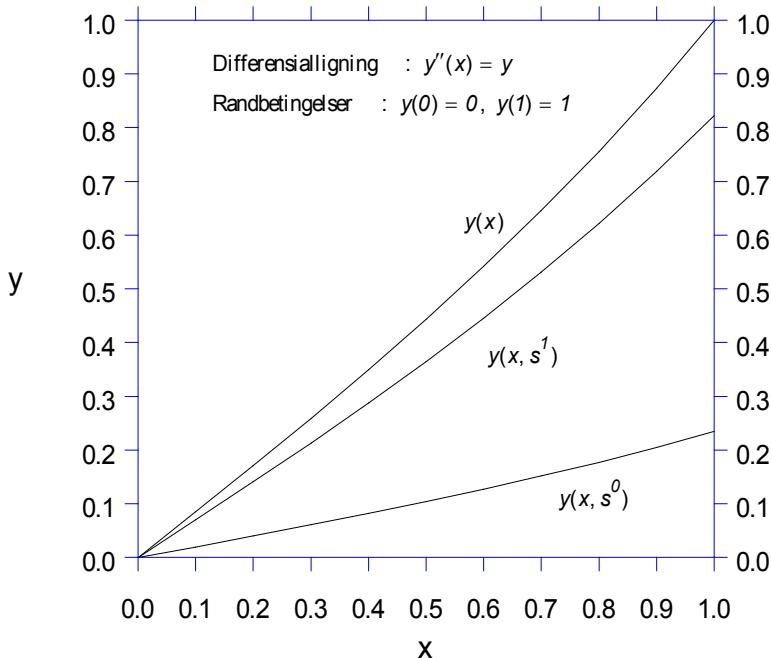
$m$	$s^m$	$\phi(s^m)$
0	0.2	-0.7650
1	0.7	-0.1774

$m$  som øvre indeks brukes her og senere som nummerteller, f.eks. iterasjonsnummer.

Innsatt for tabellverdier i (2.1.9):  $s^* = 0.8510$

Ved å bruke denne verdien for  $s = y'(0)$  får vi  $\phi(0.8510) = 0.0001$

Korrekt verdi:  $y'(0) = \frac{1}{\sinh(1)} = 0.8509$



Figur 2.3

Framstillingen ovenfor er valgt fordi den lett kan generaliseres til løsning av ikke-lineære differensialligninger. Dersom vi bare er interessert i 2. ordens *lineære* ligninger, kan framstillingen forenkles. I det lineære tilfellet kan man løse følgende to startverdi-delproblemer:

$$y_0''(x) = p(x) \cdot y_0'(x) + q(x) \cdot y_0(x) + r(x) \quad (2.1.13a)$$

med randbetingelser

$$y_0(a) = \alpha \text{ og } y_0'(a) = 0 \quad (2.1.13b)$$

$$y_1''(x) = p(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x) \quad (2.1.14a)$$

med randbetingelser

$$y_1(a) = 0 \text{ og } y_1'(a) = 1 \quad (2.1.14b)$$

Legg merke til at betingelsen  $y'(\alpha) = 0$  i (2.1.13b) tilsvarer  $s^0 = 0$  og betingelsen  $y'(\alpha) = 1$  i (2.1.14b) tilsvarer  $s^1 = 1$ .

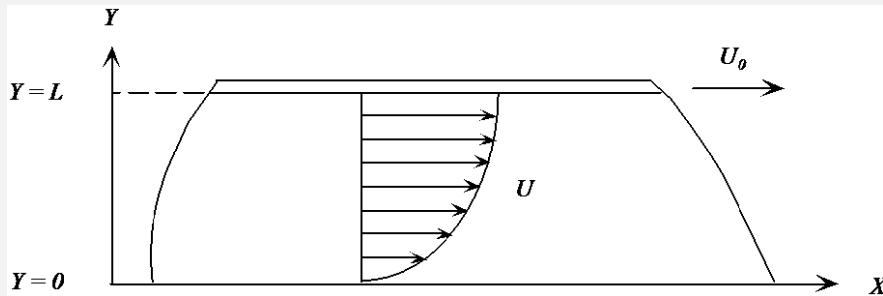
La  $y_0(x)$  være løsningen av (2.1.13) og  $y_1(x)$  løsningen av (2.1.14). Den fullstendige løsningen av randverdiproblemet i (2.1.5) er da gitt ved:

$$y(x) = y_0(x) + \left[ \frac{\beta - y_0(b)}{y_1(b)} \right] \cdot y_1(x) = y_0(x) - \left[ \frac{\phi^0}{\phi^1 + \beta} \right] \cdot y_1(x) \quad (2.1.15)$$

med  $s^0 = 0$  og  $s^1 = 1$ .

### Eksempel 2.1 Couette - Poiseuille strømning

Dette er en strømning mellom to parallelle plater. Den ene plata beveger seg mens den andre er i ro. Dessuten har vi en foreskrevet trykkgradient.



Figur 2.4

Plata ved  $Y = L$  beveger seg med konstant hastighet  $U_0$ . Hastigheten  $V$  i  $Y$ -retning = 0 og trykkgradienten  $\frac{\delta p}{\delta x}$  er foreskrevet.

Kontinuitet:  $\frac{\partial U}{\partial X} = 0$  da  $V = 0$  som impliserer at  $U = U(Y)$ . Bevegelsesligningen i  $Y$ -retning forenkler seg til  $\frac{\partial p}{\partial Y} = -\rho g$  Bevegelsesligningen i  $X$ -retning:

$$\rho U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\partial p}{\partial X} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \rightarrow \frac{d^2 U}{dY^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dX}$$

Randbetingelser:  $U(0) = 0$ ,  $U(L) = U_0$ .

Innfører dimensjonsløse variable:  $u = \frac{U}{U_0}$ ,  $y = \frac{Y}{L}$ ,  $P = -\frac{1}{U_0} \left( \frac{dp}{dX} \right) \frac{L^2}{\mu}$

Får da følgende ligning:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -P \quad (2.1.16a)$$

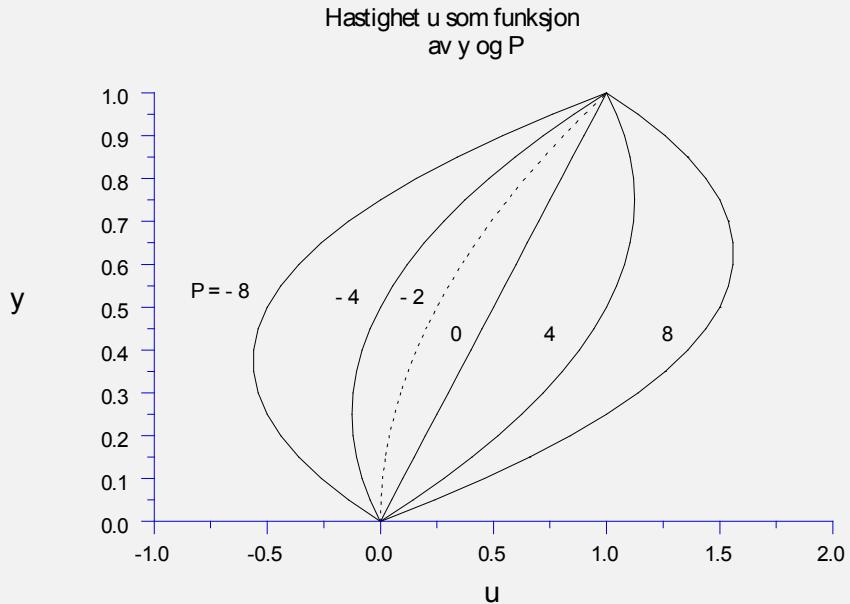
med randbetingelser:

$$u = 0 \text{ for } y = 0, \quad u = 1 \text{ for } y = 1 \quad (2.1.16b)$$

Den analytiske løsningen av (2.1.16) er:

$$u = y \cdot \left[ 1 + \frac{P}{2} (1 - y) \right] \quad (2.1.17)$$

For  $P \leq -2$  får vi tilbakestrømning. Figur 2.5 viser hastighetsfordelingen for forskjellige verdier av  $P$ .



Figur 2.5

Skriver (2.1.16) som et ligningssystem:

$$\begin{aligned} u'(y) &= u_1(y) \\ u'_1(y) &= -P \end{aligned} \quad (2.1.18a)$$

med randbetingelser:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \quad (2.1.18b)$$

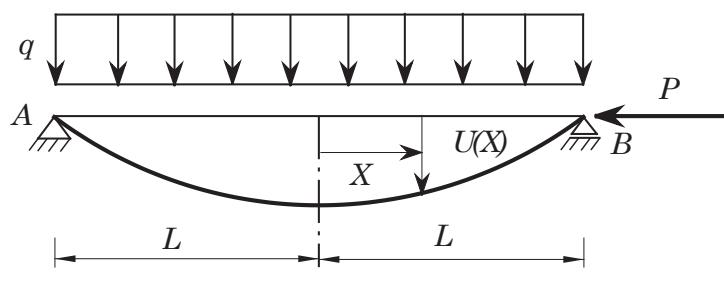
Vi må bestemme  $s = u'(0) = u_1(0)$  slik at randbetingelsen  $u(1) = 1$  blir oppfylt. Dette kan uttrykkes på følgende måte:

$$\phi(s) = u(1; s) - 1, \text{ slik at } \phi(s) = 0 \text{ når } s = s^*$$

Vi tipper to verdier  $s^0$  og  $s^1$  og beregner den rette  $s$  ved lineær interpolering, se ligning (2.1.9). En tabell over slike beregninger for forskjellige verdier av  $P$ , er vist nedenfor. Beregningen er utført ved bruk av Matlab-programmet **cpskyt**.

$P$	$\Delta y$	$s^0$	$s^1$	$\phi^0$	$\phi^1$	$s^*$	$s_{analy}$
12	0.1	1.0	1.5	-6.0	-5.5	7.000	7.0
8	0.1	1.0	1.5	-4.0	-3.5	5.000	5.0
4	0.1	1.0	1.5	-2.0	-1.5	3.000	3.0
0	0.1	1.0	1.5	0	0.5	1.000	1.0
-4	0.1	1.0	1.5	2.0	2.5	-1.000	-1.0
-8	0.1	1.0	1.5	4.0	4.5	-3.000	-3.0

### Eksempel 2.2 Bjelkesøyle med konstant tverrsnitt



Figur 2.6

Figuren viser en bjelkesøyle påkjent av en jevnt fordelt last  $q$  pr. lengdeenhet samt en horisontal kraft  $P$ .

Differensial-ligningen for utbøyningen  $U(X)$  er gitt ved:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{P}{EI}U = -\frac{q}{2EI}(L^2 - X^2), \quad P > 0 \quad (2.1.19a)$$

Randbetingelser:

$$U(-L) = U(L) = 0 \quad (2.1.19b)$$

$EI$  er bjelkestivheten. Antar små utbøyninger. (Lineær ligning).

Alternativt kan vi benytte  $\frac{dU}{dX}(0) = 0$  p.g.a symmetri.

Dimensjonsløse variable:

$$x = \frac{x}{L}, \quad u = \frac{P}{qL^2} \cdot U, \quad \theta^2 = \frac{PL^2}{EI} \quad (2.1.20)$$

som innført i (2.1.19) gir:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \theta^2 \cdot u = \theta^2 \frac{(1 - x^2)}{2}, \quad -1 < x < 1 \quad (2.1.21a)$$

med randbetingelser:

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (2.1.21b)$$

(2.1.21) kan løses analytisk:

$$u(x) = \frac{1}{\theta^2} \cdot \left[ \frac{\cos(\theta x)}{\cos(\theta)} - 1 \right] - \frac{(1-x^2)}{2} \quad (2.1.22)$$

Knekklasta for dette tilfellet er gitt ved  $P_k = \frac{\pi EI}{4L^2}$  slik at

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.1.23)$$

### Numerisk løsning

Vi ønsker å løse (2.1.21) ved bruk av skyteteknikk. Velger nå å bruke fremgangsmåten i forbindelse med lign. (2.1.15). Må da løse følgende to system:

$$\begin{aligned} u_0''(x) &= -\theta^2 \cdot \left[ u_0(x) + \frac{(1-x^2)}{2} \right] \\ u_0(-1) &= 0, \quad u_0'(-1) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

$$\begin{aligned} u_1''(x) &= -\theta^2 \cdot u_1(x) \\ u_1(-1) &= 0, \quad u_1'(-1) = 1 \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Den fullstendige løsningen er da gitt ved:

$$u(x) = u_0(x) - \frac{u_0(1)}{u_1(1)} \cdot u_1(x) \quad (2.1.26)$$

Skriver (2.1.24) og (2.1.25) som ligningsystem.

**System 1** Med  $u_0 = y_1$  og  $u_0' = y_2$ :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\theta^2 \cdot \left[ y_1 + \frac{(1-x^2)}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.1.27a)$$

med startbetingelser

$$y_1(-1) = 0, \quad y_2(-1) = 0 \quad (2.1.27b)$$

**System 2** Med  $u_1 = y_1$  og  $u_1' = y_2$ :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\theta^2 y_1 \end{aligned} \quad (2.1.28a)$$

med startbetingelser

$$y_1(-1) = 0, \quad y_2(-1) = 1 \quad (2.1.28b)$$

Begge system integreres fra til  $x = -1$  til  $x = 1$  slik at  $u_0(1)$  og  $u_1(1)$  kan finnes. Den fullstendige løsningen er da gitt av (2.1.26). Matlab-programmet **beamcol** viser hvordan dette kan gjøres. Vi har brukt **rk4c** i dette tilfellet. Intervallet er delt i 20 deler og tabellen viser at over-enstemmelsen er god mellom numerisk og analytisk løsning. Dessuten ser vi at symmetribetingelsen er oppfylt. Beregningen er gjort for lastparameteren  $\theta = 1$

x	u-comput.	u-analyt.
-1.000	0.0000e+000	0.0000e+000
-0.900	5.5485e-002	5.5485e-002
-0.800	1.0948e-001	1.0948e-001
-0.700	1.6058e-001	1.6058e-001
-0.600	2.0754e-001	2.0754e-001
-0.500	2.4924e-001	2.4924e-001
-0.400	2.8471e-001	2.8471e-001
-0.300	3.1315e-001	3.1315e-001
-0.200	3.3392e-001	3.3392e-001
-0.100	3.4657e-001	3.4657e-001
0.000	3.5081e-001	3.5082e-001
0.100	3.4657e-001	3.4657e-001
0.200	3.3392e-001	3.3392e-001
0.300	3.1315e-001	3.1315e-001
0.400	2.8471e-001	2.8471e-001
0.500	2.4924e-001	2.4924e-001
0.600	2.0754e-001	2.0754e-001
0.700	1.6058e-001	1.6058e-001
0.800	1.0948e-001	1.0948e-001
0.900	5.5485e-002	5.5485e-002
1.000	0.0000e+000	0.0000e+000

### Eksempel 2.3 Bjelkesøyle med variabelt tverrsnitt

Vi henviser til samme figuren som i eksempel 2.2. Forskjellen er at nå lar vi bjelken ha variabelt tverrsnitt der 2. arealmoment  $I$  er funksjon av  $X$ . Med  $I_0$  som 2. arealmomet for  $X = 0$ , lar vi  $I$  variere på følgende måte:

$$I(X) = \frac{I_0}{1 + (X/L)^n}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (2.1.29)$$

Dersom vi for eksempel betrakter et rektangulært tverrsnitt med høyde  $h$  og konstant bredde  $b$ , vil høyden  $h$  variere som følger:

$$h(X) = \frac{h_0}{[1 + (X/L)^n]^{1/3}} \quad (2.1.30)$$

der  $h_0$  er høyden for  $X = 0$ . Fra lign(2.1.19) i eksempel 2.2:

$$\frac{d^2U}{dX^2} + \frac{P}{EI}U = -\frac{q}{2EI}(L^2 - X^2) \quad (2.1.31a)$$

$$U(-L) = U(L) = 0, \frac{dU(0)}{dX} = 0 \quad (2.1.31b)$$

La oss først beregne momentfordelingen  $M(X)$  i bjelken.

Nå har vi:

$$\frac{d^2U}{dX^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.1.32)$$

Ved å bruke (2.1.32) i (2.1.31) og derivere to ganger, får vi:

$$\frac{d^2M}{dX^2} + \frac{P}{EI}M = -q \quad (2.1.33)$$

Innfører dimensjonsløse variable

$$x = \frac{X}{L}, m = \frac{M}{qL^2} \text{ og setter } P = \frac{EI_0}{L^2} \quad (2.1.34)$$

slik at (2.1.33) blir:

$$m''(x) + (1 + x^n) \cdot m(x) = -1 \quad (2.1.35a)$$

med randbetingelser:

$$m(-1) = m(1) = 0, m'(0) = 0 \quad (2.1.35b)$$

I motsetning til ligningene i eksempel 2.2, finnes det ikke en brukbar analytisk løsning av (2.1.35), selv om ligningen er lineær.

Dersom du f. eks. har programmet *Maple* for hånden, kan du forsøke følgende:

$$\begin{aligned} eq := & \text{diff}(m(x), x, x) + (1 + x^2) * m(x) + 1; \\ & \text{dsolve}(eq, m(x)); \end{aligned}$$

Når momentfordelingen er funnet, finnes nedbøyningen  $u(x)$  fra:

$$u(x) = m(x) - \frac{1}{2}(1 - x^2) \quad (2.1.36)$$

Den dimensjonelle nedbøyningen  $U$  er gitt ved:

$$U = \frac{qL^4}{EI_0}u \quad (2.1.37)$$

Ved å sette (2.1.36) inn i (2.1.35), finner vi diff.ligningen for  $u(x)$ :

$$u''(x) + (1 + x^n) \cdot u(x) = -\frac{1}{2}(1 - x^2) \cdot (1 + x^n) \quad (2.1.38)$$

Ved å benytte oss av symmetrien, løser vi nå (2.1.38) med randbetingelsene  $m(1) = 0, m'(0) = 0$  ved bruk av skyteteknikk, og beregner deretter  $u(x)$  fra (2.1.36). Nå bruker vi **ode45** som løser istedenfor **rk4c**.

Skriver (2.1.35) som et system med  $m(x) = y_1(x)$  og  $m'(x) = y_2(x)$ :

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -[1 + (1 + x^n) \cdot y_1] \end{aligned} \quad (2.1.39a)$$

Randbetingelser:

$$y_2(0) = y_1(1) = 0 \quad (2.1.39b)$$

Da  $y_2(0) \equiv m'(0)$  er gitt, må vi tippe  $m(0) \equiv y_1(0)$  slik at betingelsen  $m(1) \equiv y_1(1) = 0$  blir oppfylt. Eller uttrykt på standard-måten:

Velger  $s = y_1(0)$  og setter  $\phi(s) = y_1(1; s)$ . Bestemmer  $s = s^*$  slik at betingelsen  $\phi(s^*) \equiv y_1(1; s^*) = 0$  blir oppfylt. Da ligningen er lineær, finnes  $s^*$  fra (2.1.9):

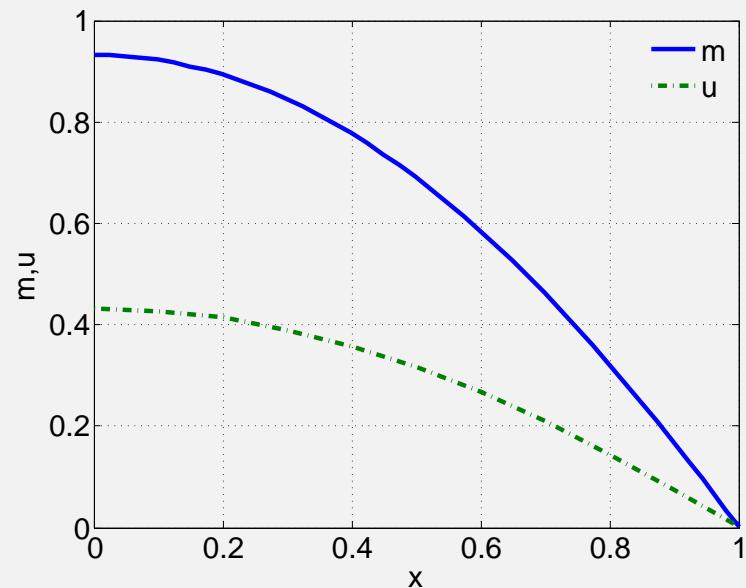
$$s^* = \frac{\phi^1 s^0 - \phi^0 s^1}{\phi^1 - \phi^0} \quad (2.1.40a)$$

Ved å velge  $s^0 = 0$  og  $s^1 = 1$ :

$$s^* = \frac{\phi^0}{\phi^0 - \phi^1} \quad (2.1.40b)$$

Vær klar over at valget i (2.1.40b) ikke alltid er fornuftig selv om det er rett i prinsippet når ligningen er lineær. Dersom løsningen er av typen  $e^{\alpha x}$  der  $\alpha$  er stor samtidig som  $x$  er stor, kan vi risikere å komme utenfor tallområdet selv for dobbelpresisjon som er ca  $10^{308}$ . I tilfellet ovenfor er ikke dette noe problem, slik at (2.1.40b) kan brukes. Beregningen er utført av programmet **momentdis** med tabell og plott på neste side av både momentet og forskyvningen for  $n = 2$ .

<b>x</b>	<b>m</b>	<b>u</b>
0.000	9.3205e-001	4.3205e-001
0.050	9.2964e-001	4.3089e-001
0.100	9.2239e-001	4.2739e-001
0.150	9.1032e-001	4.2157e-001
0.200	8.9342e-001	4.1342e-001
0.250	8.7170e-001	4.0295e-001
0.300	8.4516e-001	3.9016e-001
0.350	8.1382e-001	3.7507e-001
0.400	7.7769e-001	3.5769e-001
0.450	7.3681e-001	3.3806e-001
0.500	6.9122e-001	3.1622e-001
0.550	6.4097e-001	2.9222e-001
0.600	5.8614e-001	2.6614e-001
0.650	5.2681e-001	2.3806e-001
0.700	4.6311e-001	2.0811e-001
0.750	3.9519e-001	1.7644e-001
0.800	3.2323e-001	1.4323e-001
0.850	2.4745e-001	1.0870e-001
0.900	1.6810e-001	7.3104e-002
0.950	8.5503e-002	3.6753e-002
1.000	7.7259e-012	7.7259e-012



Figur 2.7: Moment  $m$  og nedbøyning  $u$ .

## 2.2 IKKE - LINEÆRE LIGNINGER

Gitt randverdiproblemet

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{3}{2}y^2 \\ y(0) &= 4, \quad y(1) = 1 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

(2.2.1) har to løsninger som tilfredsstiller de gitte randbetingelsene:

Løsning I:

$$y_I = \frac{4}{(1+x)^2} \tag{2.2.2}$$

Løsning II kan uttrykkes ved elliptiske Jacobi-funksjoner ; se appendiks G, del G.3. Begge løsningene er tegnet i figur 2.8. Skriver (2.2.1) som et ligningsystem med  $y \rightarrow y_1$  og  $y' = y'_1 = y_2$ :

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= y_2(x) \\ y'_2(x) &= \frac{3}{2}[y_1(x)]^2 \end{aligned} \tag{2.2.3a}$$

Randbetingelser:

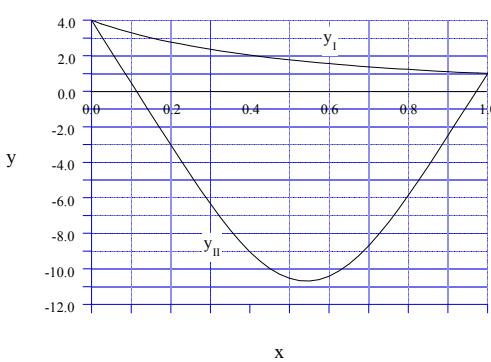
$$y_1(0) = 4, \quad y_1(1) = 1 \tag{2.2.3b}$$

Vi bestemmer  $s = y'(0) = y_2(0)$  slik at randbetingelsen  $y_1(1) = 1$  blir oppfylt. Setter følgelig:

$$\phi(s^m) = y_1(1; s^m) - 1, \quad m = 0, 1, \dots \tag{2.2.4a}$$

Slik at

$$y_1(1) \rightarrow 1 \text{ for } \phi(s^m) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \tag{2.2.4b}$$



Figur 2.8: De to løsningene  $y_I$  og  $y_{II}$  av differensialligningen (2.2.1).

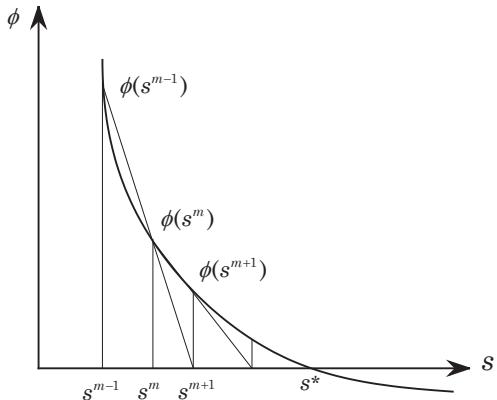
Da ligningen er ikke-lineær, må vi utføre en iterasjonsprosess som indikert i (2.2.4). Oppgava blir da å bestemme nullpunktet(ene)  $s^*$  i funksjonen  $\phi(s) = 0$ . Vi velger å bruke sekantmetoden for dette formålet. (Se C&K [5], avsnitt 3.3) Iterasjonsprosessen vist i figur 2.9 starter med at vi tipper to verdier  $s^0$  og  $s^1$  og legger en sekant gjennom  $\phi(s^0)$  og  $\phi(s^1)$ . Skjæringspunktet med s-aksen,  $s^{(2)}$ , kan da beregnes.

For en vilkårlig iterasjon  $m$ :

$$s^{m+1} = s^m + \delta s \tag{2.2.5}$$

der

$$\delta s = s^{m+1} - s^m = -\phi(s^m) \cdot \left[ \frac{s^m - s^{m-1}}{\phi(s^m) - \phi(s^{m-1})} \right], \quad m = 1, 2, \dots$$



Figur 2.9

Iterasjonsprosessen blir da som følger når  $\phi(s^{m-1})$  og  $s^m$  antas kjent:

1. Beregn  $\phi(s^{m-1})$  og  $\phi(s^m)$  ved å løse (2.2.3) sammen med (2.2.4).
2. Beregn  $\delta s$  og  $s^{m+1}$  fra (2.2.5)
- 3.

$$\text{Sett } \begin{cases} s^{m-1} \leftarrow s^m \\ s^m \leftarrow s^{m+1} \\ \phi(s^{m-1}) \leftarrow \phi(s^m) \end{cases}$$

Gjenta skritt 1–3 inntil vi har fått konvergens.

Eksempel på konvergenskriterier:  
Kontroll av absolutt feil:

$$|\delta s| < \varepsilon_1 \quad (2.2.6a)$$

Kontroll av relativ feil:

$$\left| \frac{\delta s}{s^{m+1}} \right| < \varepsilon_2 \quad (2.2.6b)$$

(2.2.6a) og (2.2.6b) kombineres ofte med:

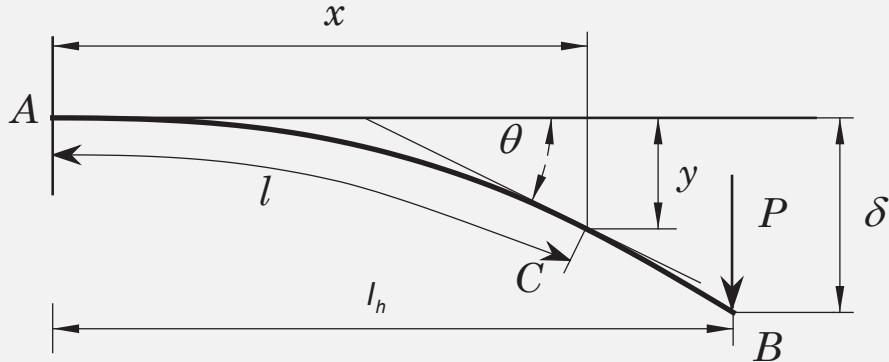
$$|\phi(s^{m+1})| < \varepsilon_3 \quad (2.2.6c)$$

Vi bruker nå den foreskrevne prosessen til å løse (2.2.3). Velger start-verdier  $s^0 = -3.0$  og  $s^1 = -6.0$ . Figur 2.8 viser at vi sannsynligvis vil finne løsningen  $y_1$  med disse startverdiene. Velger  $\Delta x = 0.1$  og bruker RK4. Får følgende tabell:

$m$	$s^{m-1}$	$\phi(s^{m-1})$	$s^m$	$\phi(s^m)$	$s^{m+1}$	$\phi(s^{m+1})$
1	- 3.0	26.8131	- 6.0	6.2161	- 6.9054	2.9395
2	- 6.0	6.2161	- 6.9054	2.9395	- 7.7177	0.6697
3	- 6.9054	2.9395	- 7.7177	0.6697	- 7.9574	0.09875
4	- 7.7177	0.6697	- 7.9574	0.09875	- 7.9989	0.0004

Etter fire iterasjoner er  $s = y'(0) = -7.9989$ , mens den analytiske verdien er -8.0.

Sekantmetoden er enkel og effektiv. Vi slipper dessuten å finne det analytiske uttrykket(ene) for den(de) deriverte som i Newton-Raphsons metode. Bakdelen er at vi må ha to startverdier for å komme igang. Med kjennskap til fysikken i problemet, er dette vanligvis en overkommelig vanskelighet.

**Eksempel 2.4 Stor nedbøyning av kragbjelke**

Figur 2.10

Figur 2.10 viser en kragbjelke som er fast innspent ved  $A$  og påkjent av en vertikal last  $P$  på enden  $B$ . Vi vil tillate store nedbøyninger og bruker derfor buelengden  $l$  og hellingssvinkelen  $\theta$  som variable. Alle lengder er gjort dimensjonsløse ved divisjon med bjelkelengden  $L$ . Buelengden  $l$  går derfor fra  $l = 0$  i  $A$  til  $l = 1$  i  $B$ . Differensiell ligningen for den elastiske linja er gitt ved:

$$\kappa = \frac{d\theta}{L \cdot dl} = \frac{M}{EI} \quad (2.2.7)$$

der  $\kappa$  er krumningen,  $M$  er momentet og  $EI$  bjelkestivheten. Tar momentet om  $C$ :  $M = P \cdot L(l_h - x)$  som innsatt i (2.2.7) gir:

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{PL^2}{EI}(l_h - x) \quad (2.2.8)$$

Fra figuren finner vi følgende geometriske relasjoner:

$$\frac{dx}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{dl} = \sin \theta \quad (2.2.9)$$

Deriverer (2.2.8) m.h.p. 1 og setter inn fra (2.2.9):

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{PL^2}{EI} \cos \theta = 0 \quad (2.2.10)$$

Innfører parameteren  $\alpha$  definert ved:

$$\alpha^2 = \frac{PL^2}{EI} \quad (2.2.11)$$

Vi må da løse følgende differensiell ligninger:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \alpha^2 \cos \theta = 0 \quad (2.2.12a)$$

$$\frac{dy}{dl} = \sin \theta \quad (2.2.12b)$$

med følgende randbetingelser:

$$y(0) = 0, \theta(0) = 0, \frac{d\theta}{dl}(1) = 0 \quad (2.2.12c)$$

De to første randbetingelsene betyr at bjelken er fast innspent i  $A$ , mens den siste betyr at momentet forsvinner i  $B$ . Den analytiske løsningen av dette problemet er gitt i appendiks G, del G.3.

### Numerisk løsning

Skriver (2.2.12) som et system av første ordens ligninger. Med  $\theta = z_1$ ,  $\theta' = z_2$  og  $y = z_3$  får vi:

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_2 \\ z'_2 &= -\alpha^2 \cos z_1 \\ z'_3 &= \sin z_1 \end{aligned} \quad (2.2.13a)$$

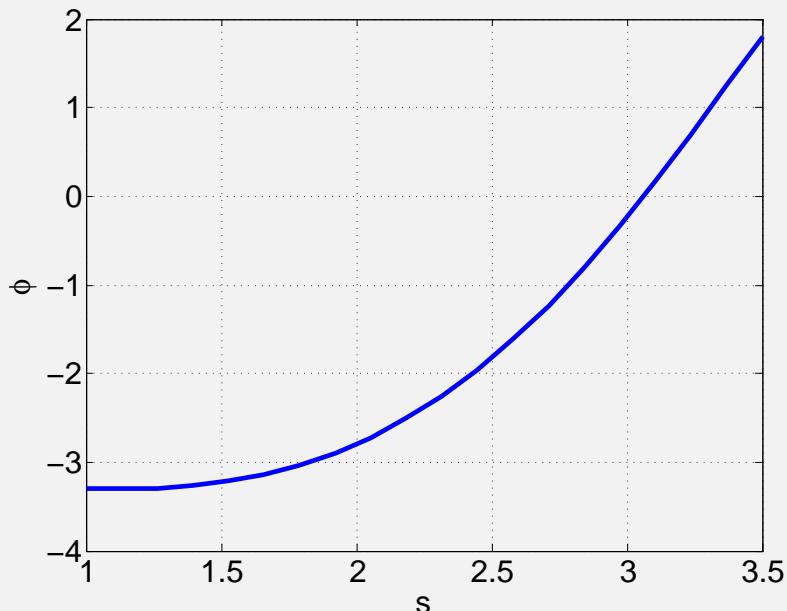
Randbetingelser:

$$z_1(0) = 0, z_2(1) = 0, z_3(0) = 0 \quad (2.2.13b)$$

Vi må tippe  $\theta'(0)$  slik at betingelsen  $\frac{d\theta}{dl}(1) = 0$  blir oppfylt. Setter  $s = \theta'(0)$  og  $\phi(s) = \theta'(1; s)$ . Må da bestemme  $s = s^*$  slik at  $\phi(s^*) = 0$ . eller med z-variable:  $s = z_2(0)$ . Bestem  $s = s^*$  slik at  $\phi(s^*) = z_2(1; s^*) = 0$  Dessuten finner vi:

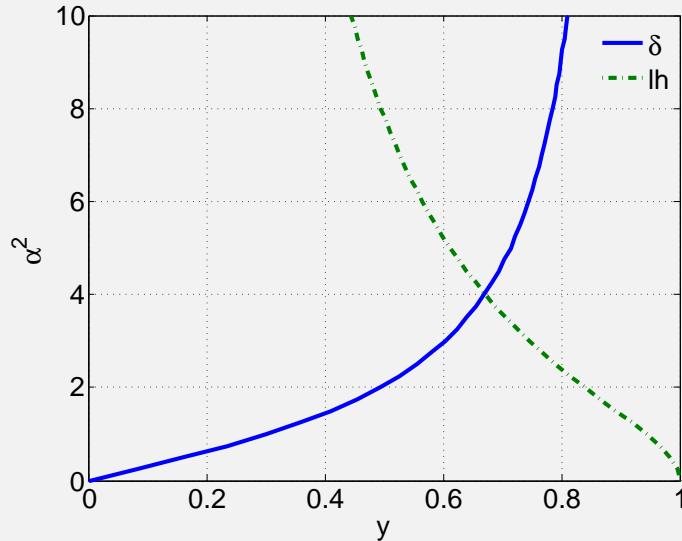
$$l_h = \frac{s^*}{\alpha^2} \quad (2.2.14)$$

Bruker sekantmetoden og må da bestemme startverdier  $s^0$  og  $s^1$  for å starte iterasjonsprosessen. Dette gjøres ved å fremstille funksjonen  $\phi(s)$  grafisk. Et eksempel fra Matlab- programmet **cantlevplot** er vist i figur 2.11



Figur 2.11: Plot av funksjonen  $\phi(s)$  for  $\alpha^2 = 5$  for identifikasjon av nullpunkt.

Vi ser av figuren at vi har et nullpunkt  $s^* \approx 3.05$ . Merk at vi vil få forskjellige nullpunkt når  $\alpha$  forandres. Figur 2.12 viser endenedbøyningen  $\delta$  og horisontallengden  $l_h$  som funksjon av  $\alpha^2$ . Figuren er beregnet med Matlab-programmene **cantilev 1** og **2**.



Figur 2.12: Bjelke med stor nedbøyning ( $\delta$ ) og endring i horisontal lengde ( $l_h$ ).

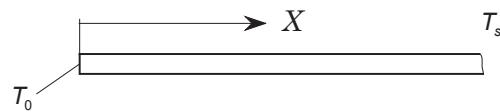
## 2.3 LITT OM LIKEDANNHETSLØSNINGER

Den endimensjonale, ikke-stasjonære varmeledningsligningen er gitt ved:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (2.3.1)$$

der  $\tau$  er tiden,  $T = T(X, \tau)$  og  $\alpha$  den termiske diffusiviteten. (Se appendiks B for utledning)

Figuren viser en stav med halvuendelig utstrekning der  $0 \leq X < \infty$ . Opprinnelig har staven en temperatur  $T_s$ , men ved tiden  $\tau = 0$  forandres temperaturen på enden  $X = 0$  til  $T_0$  og holdes deretter konstant. Vi ønsker å beregne temperaturfordelingen i staven som funksjon av tiden  $\tau$ .



Figur 2.13

Problemet kan beskrives matematisk på følgende måte: Initialbetingelse:

$$T(X, \tau) = T_s, \quad \tau < 0 \quad (2.3.2a)$$

Randbetingelser:

$$T(0, \tau) = T_0, \quad T(\infty, \tau) = T_s \quad (2.3.2b)$$

La oss skalere (2.3.1) ved å innføre følgende dimensjonsløse variable:

$$u = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad t = \frac{\tau \cdot \alpha}{L^2} \quad (2.3.3)$$

der  $L$  er en karakteristisk lengde. (2.3.3) innsatt i (2.3.1) gir følgende ligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty \quad (2.3.4)$$

Initialbetingelse:

$$u(x, t) = 1, \quad t < 0 \quad (2.3.5a)$$

Randbetingelser:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) = 1 \quad (2.3.5b)$$

Det spesielle valget av  $t$  i (2.3.3) er gjort for å fjerne koeffisienten foran det siste leddet i ligningen. Vi har dermed fått redusert antall variable. Det finnes mange analytiske løsninger av diffusjonsligningen på formen gitt i (2.3.4). Disse løsningene kan derfor brukes på en hel rekke problemer fra forskjellige anvendelsesområder. Den dimensjonsløse tiden gitt i (2.3.3) er en dimensjonsløs gruppe som kalles Fourier-tallet og skrives vanligvis  $Fo$ . Vi vil nå forsøke å transformere (2.3.4) og (2.3.5) fra en partiell til en ordinær differensiellligning. Setter:

$$\bar{x} = a \cdot x \text{ og } \bar{t} = b \cdot t \quad (2.3.6)$$

der  $a$  og  $b$  er positive konstanter.

(2.3.6) innført i (2.3.4) gir følgende ligning:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{a^2}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} \quad (2.3.7)$$

Velger  $b = a^2$  slik at (2.3.7) og (2.3.4) er identiske med samme randbetingelser:

$$u(x, t) = u(\bar{x}, \bar{t}) = u(ax, a^2t), \quad \text{med } b = a^2 \quad (2.3.8)$$

Dersom (2.3.8) skal være uavhengig av  $a > 0$ , må  $u(x, t)$  skrives på formen

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad g\left(\frac{x^2}{t}\right), \quad \text{osv.} \quad (2.3.9)$$

Velger det første alternativet:

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (2.3.10)$$

Innfører følgelig en ny variabel  $\eta$  definert ved:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad (2.3.11)$$

der faktoren 2 er innført bare for å få et penere sluttresultat.

Transformasjonen gitt i (2.3.11) reduserer den opprinnelige ligningen fra å være avhengig både av  $x$  og  $t$  til bare å avhenge av en variabel  $\eta$ . Som funksjon av  $\eta$ , vil ett og samme  $u$ -profil gi løsningen for alle  $x$  og  $t$ .  $u(\eta)$  kalles derfor en likedannhetsløsning og (2.3.11) en likedannhets-transformasjon. (Engelsk: similarity transformation). Transformasjonen i (2.3.11) kalles ofte Boltzmann-transformasjonen.

Problemet som opprinnelig ble beskrevet av en partiell differensielligning, beskrives nå av en ordinær differensielligning.

Har da fått følgende variable:

$$t = \frac{\tau \cdot \alpha}{L^2}, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{t}} = \frac{X}{2\sqrt{\tau\alpha}} \quad (2.3.12)$$

La oss nå løse (2.3.4) analytisk.

Innfører

$$u = f(\eta) \quad (2.3.13a)$$

med randbetingelsene:

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1 \quad (2.3.13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = f'(\eta) \cdot \left( -\frac{y}{4t\sqrt{t}} \right) = -f'(\eta) \frac{\eta}{2t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = f'(\eta) \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( f'(\eta) \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) = f''(\eta) \frac{1}{4t} \end{aligned}$$

Innsatt for  $\frac{\partial u}{\partial t}$  og  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  i (2.3.4):

$$f''(\eta) \frac{1}{4t} + f'(\eta) \frac{\eta}{2t} = 0 \rightarrow f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0 \quad (2.3.14)$$

(2.3.14) kan løses ved direkte integrasjon:

$$\frac{f''(\eta)}{f'(\eta)} = -2\eta \rightarrow \ln f'(\eta) = -\eta^2 + \ln C_1$$

Som gir

$$f'(\eta) = C_1 e^{-\eta^2}$$

Ny integrasjon:

$$f(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-t^2} dt$$

hvor vi har benyttet randbetingelsen  $f(0) = 0$  fra (2.3.13b).

Fra integraltabell:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)$$

der feilfunksjonen  $\operatorname{erf}(x)$  er definert ved:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.3.15)$$

Dette gir:

$$f(\eta) = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) \quad (2.3.16)$$

$\operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$  for  $x \rightarrow \infty$  gir:  $C_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$  og videre innsatt i (2.3.16):

$$u(x, t) = \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (2.3.17)$$

Dersom vi ønsker  $u(x, t)$  uttrykt i de opprinnelige variable, får vi fra (2.3.3):

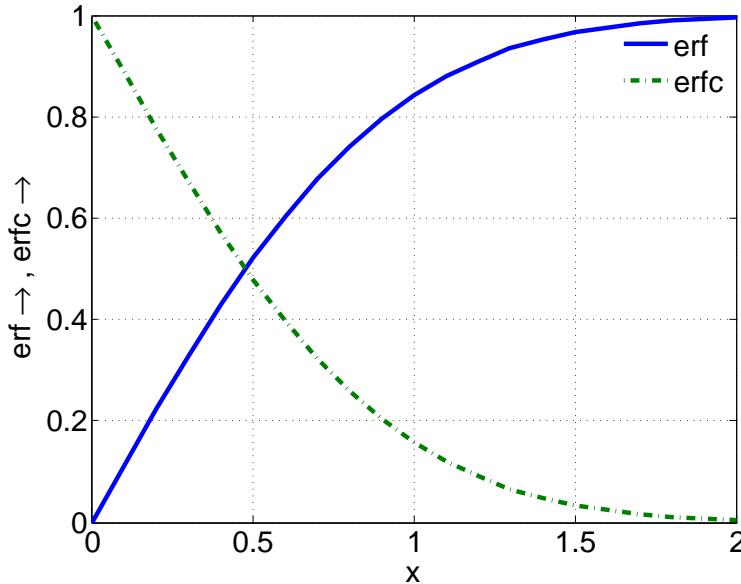
$$\frac{T(X, \tau) - T_0}{T_s - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau \cdot \alpha}}\right) \quad (2.3.18)$$

Noen tabellverdier for  $\operatorname{erf}(x)$

$x$	$\operatorname{erf}(x)$	$x$	$\operatorname{erf}(x)$
0.00	0.00000	1.00	0.84270
0.20	0.22270	1.20	0.91031
0.40	0.42839	1.40	0.95229
0.60	0.60386	1.60	0.97635
0.80	0.74210	1.80	0.98909

Figur 2.14 nedenfor viser feilfunksjonen  $\operatorname{erf}(x)$  samt den komplementære feilfunksjonen  $\operatorname{erfc}(x)$  som er definert ved:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (2.3.19)$$

Figur 2.14: Feilfunksjonene  $\text{erf}(x)$  og  $\text{erfc}(x)$ .**Eksempel 2.5 Frysing i vannledning**

Et tørt jordlag med opprinnelig temperatur  $20^\circ\text{C}$ , blir i en kuldeperiode utsatt for en overflatetemperatur på  $-15^\circ\text{C}$  i 30 døgn. Hvor dypt må vi legge en vannledning for å unngå at den fryser? Den termiske diffusiviteten  $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}\text{m}^2/\text{time}$ .

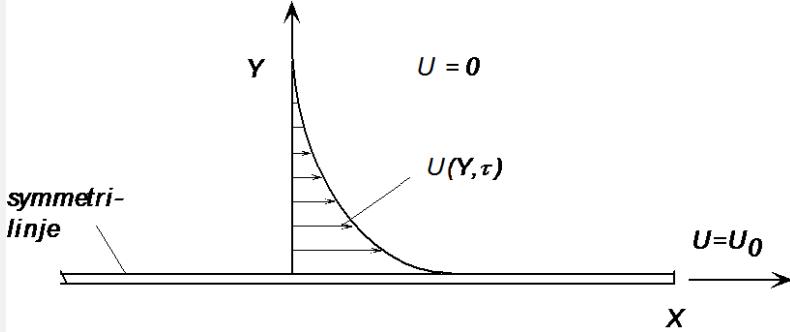
Med henvisning til (2.3.2) blir  $T_0 = -15^\circ\text{C}$  og  $T_s = 20^\circ\text{C}$ .  $\tau = 30$  døgn = 720 timer. Vannet fryser ved  $0^\circ\text{C}$ , slik at

$$u = \frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \frac{0 - (-15)}{20 - (-15)} = \frac{3}{7} = 0.4286, \text{ fra (2.3.3) og (2.3.18).}$$

Fra tabellen og (2.3.17) finner vi  $\text{erf}(\eta) = 0.4286 \rightarrow \eta \approx 0.4$  som med (2.3.12) gir:

$$X = 0.4 \cdot 2\sqrt{\tau \cdot \alpha} = 0.8 \cdot \sqrt{720 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0.48\text{m}$$

Vi har regnet med konstant diffusivitet  $\alpha$ , mens den kan variere i intervallet  $\alpha \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}]\text{m}^2/\text{time}$ . Dessuten vil jorda normalt ikke være tørr.

**Eksempel 2.6 Stokes 1. problem**

Figur 2.15

Vi har en stillestående fluid ved  $\tau < 0$ . Ved tiden  $\tau = 0$  får plata som er parallel med X-aksen, en konstant hastighet  $U = U_0$  parallelt med X-aksen. Plata må betraktes som uendelig tynn med uendelig utstrekning i X-retning for en korrekt matematisk beskrivelse i dette tilfellet. Navier-Stokes ligning i X-retning for inkompresibel strømning:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)$$

(Se utledning i appendiks B)

Antar at løsningen av dette problemet er uavhengig av  $X$ , samt at  $V = 0$  som betyr at  $U = U(Y, \tau)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad 0 < Y < \infty \quad (2.3.20)$$

Initialbetingelse:

$$U(U, 0) = 0 \quad (2.3.21a)$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} U(0, \tau) &= U_0 \text{ (heftbet.)} \\ U(\infty, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.21b)$$

Innfører følgende dimensjonsløse variable:

$$u = \frac{U}{U_0}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad t = \frac{\tau \cdot \nu}{L^2} \quad (2.3.22)$$

der  $U_0$  og  $L$  er henholdsvis en karakteristisk hastighet og lengde. (2.3.22) innsatt i (2.3.20) gir følgende ligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \infty \quad (2.3.23)$$

Initialbetingelse:

$$u(y, 0) = 0 \quad (2.3.24a)$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 1 \\ u(\infty, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.24b)$$

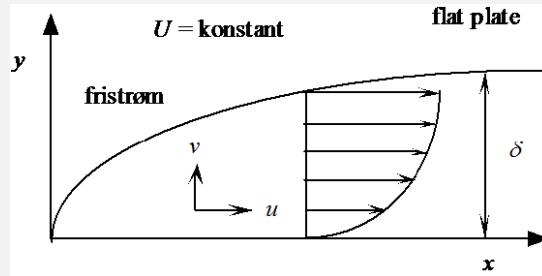
Vi ser at vi har fått samme ligning og problem som i (2.3.4) og (2.3.5), bare med en ombytting av 0 og 1 i randbetingelsene. Løsningen av (2.3.23) og (2.3.24) blir:

$$u(y, t) = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta) = \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right) \quad (2.3.25)$$

eller uttrykt ved dimensjonelle variable:

$$U(Y, \tau) = U_0 \text{erfc}\left(\frac{Y}{2\sqrt{\tau \cdot \nu}}\right) \quad (2.3.26)$$

### Eksempel 2.7 Blasius ligning



Figur 2.16

En detaljert utledning er gitt i appendiks C, del C.2. Gjengir noe av utledningen her for oversiktens skyld. For en stasjonær og inkompressibel grensesjiktstrømning, får vi fra lign. (C.1.10) i appendiks C:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3.27)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.3.28)$$

Ser på det tilfellet at fristrømhastigheten  $U$  er konstant =  $U_0$ . Bernoullis ligning (C.1.8) i appendiks C gir for dette tilfellet  $\frac{dp}{dx} = 0$ .

(2.3.28) forenkler seg til:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.3.29)$$

Randbetingelser:

$$u(0) = 0 \quad (2.3.30a)$$

$$u \rightarrow U_0 \quad \text{for } y \rightarrow \delta \quad (2.3.30b)$$

For å oppfylle kontinuitetsligningen (2.3.27), innfører vi strømfunksjonen  $\psi(x, y)$  definert ved:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.3.31)$$

Vi definerer et Reynoldstall:

$$\text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu} \quad (2.3.32)$$

Innfører følgende likedannhetsvariable for koordinat og strømfunksjon:

$$\eta = \sqrt{\frac{U_0}{2\nu x}} \cdot y \quad \text{og} \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{2U_0\nu x}} \quad (2.3.33)$$

Transformasjonen (2.3.33) gir Blasius-ligningen for strømfunksjonen  $f$ :

$$f'''(\eta) + f(\eta) \cdot f''(\eta) = 0 \quad (2.3.34)$$

Notasjon:  $\frac{df}{d\eta} \equiv f'(\eta)$  og tilsvarende for høyere deriverte. De fysikalske hastighetskomponentene er gitt ved:

$$\frac{u}{U_0} = f'(\eta), \quad \frac{v}{U_0} = \frac{\eta \cdot f'(\eta) - f(\eta)}{\sqrt{2\text{Re}_x}} \quad (2.3.35)$$

Heftbetingelsen  $u = 0$  for  $y = 0$  blir nå  $f'(0) = 0$  da  $f'(\eta) = \frac{u}{U_0}$  fra (2.3.35). Uten suging eller blåsing gjennom randen  $\eta = 0$ , blir den andre heftbetingelsen  $v = 0$  for  $\eta = 0$ . Fra (2.3.35) blir denne betingelsen  $f(0) = 0$ . Betingelsen  $u \rightarrow U_0$  fra (2.3.30b), blir nå  $f'(\eta) \rightarrow 1$  for  $\eta \rightarrow \infty$ . Randbetingelsene for ugjennomstrømmelig sjikt blir da:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\eta_\infty) = 1 \quad (2.3.36)$$

Skjærspenningen:

$$\tau_{xy} = \mu U_0 \cdot f''(\eta) \sqrt{\frac{U_0}{2\nu x}} \quad (2.3.37)$$

### Numerisk løsning

Vi ønsker å løse (2.3.34) sammen med randbetingelsene i ((2.3.36) ved bruk av skyteteknikk og skriver derfor ligningen som et sett av tre 1. ordens differensialligninger:

$$\begin{aligned} f' &= f_1 \\ f'_1 &= f_2 \\ f'_2 &= -f \cdot f_2 \end{aligned} \tag{2.3.38a}$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} f(0) &= f_1(0) = 0 \\ f_1(\eta_\infty) &= 1 \end{aligned} \tag{2.3.38b}$$

Setter  $f''(0) = f_2(0) = s$

$s$ , som i dette tilfellet er skjærspenningen ved veggjen, må bestemmes slik at randbetingelsen  $f_1(\eta_\infty) = 1$  blir oppfylt. Dette siste kravet kan formuleres på følgende måte:

$$\phi(s) = f_1(\eta_\infty; s) - 1 \tag{2.3.39}$$

med rett verdi  $s = s^*$  når  $\phi(s^*) = 0$ . Vi velger å bruke sekantmetoden til nullpunktbestemmelsen i (2.3.39).

### Iterasjonsprosess

Iterasjonsprosessen ved bruk av sekantmetoden, er gitt ved:

$$s^{m+1} = s^m + \delta s, \quad \delta s = -\phi(s^m) \cdot \left[ \frac{s^m - s^{m-1}}{\phi(s^m) - \phi(s^{m-1})} \right], \quad m = 1, 2, \dots \tag{2.3.40}$$

Antar at  $s^{m-1}$  og  $s^m$  er kjent.

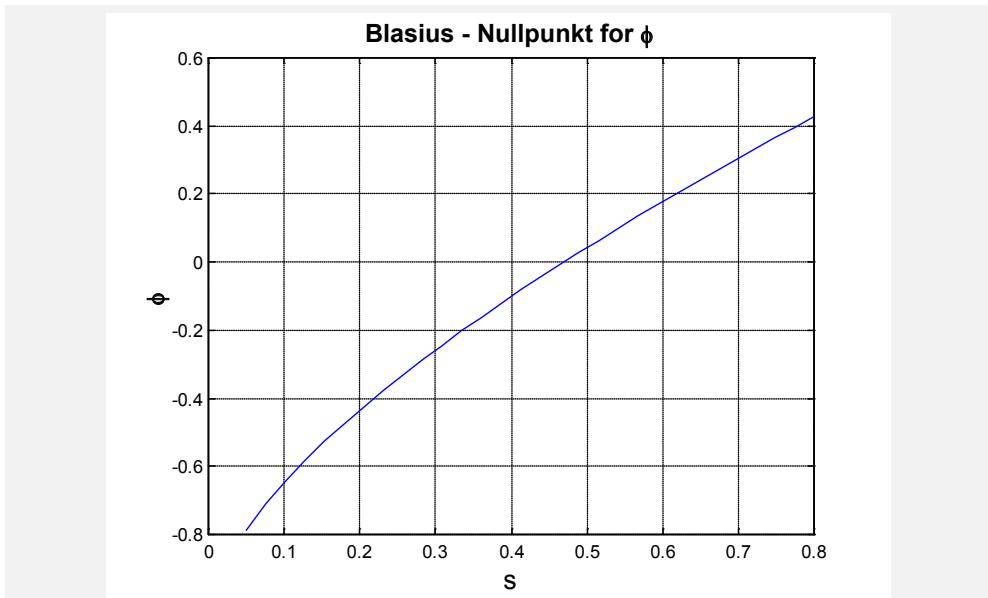
1. Beregn  $\phi(s^{m-1})$  og  $\phi(s^m)$  ved å løse (2.3.38).
2. Beregn  $\delta s$  og  $s^{m+1}$  fra (2.3.40)
- 3.

$$\text{Sett } \begin{cases} s^{m-1} \leftarrow s^m \\ s^m \leftarrow s^{m+1} \\ \phi(s^{m-1}) \leftarrow \phi(s^m) \end{cases}$$

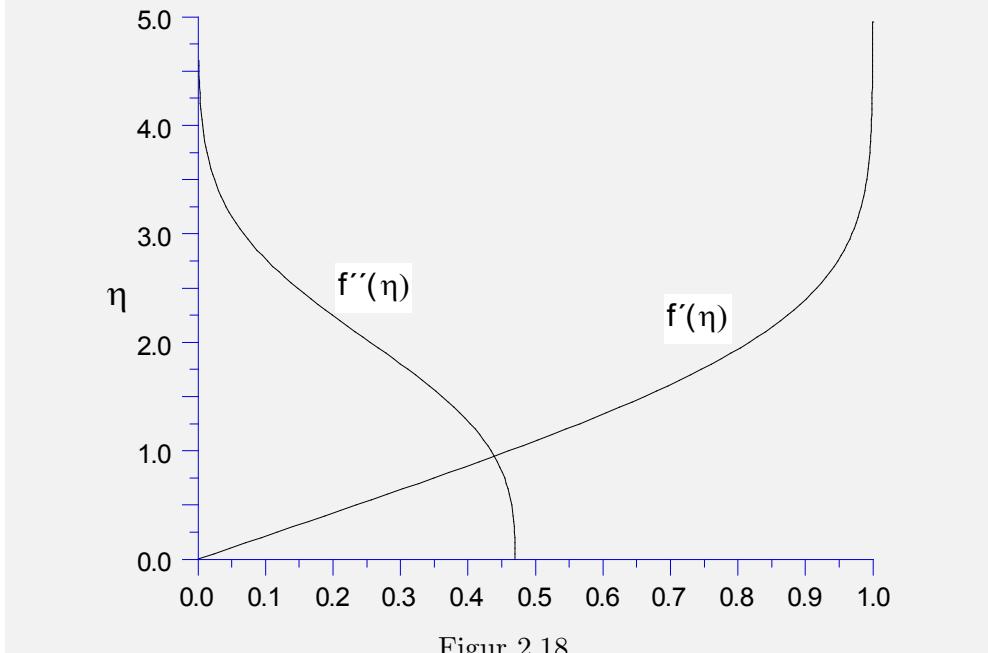
Gjenta skritt 1–3 inntil konvergens er oppnådd.

I dette tilfellet er korrekt verdi  $s^* = 0.46960\dots$  slik at konvergenskriteriet tilslutt blir  $\delta s < \varepsilon$ , dvs. en absolutt test. Under prosessen kan vi ha  $s > 1$  og da testes  $\left| \frac{\delta s}{s} \right|$ , altså en relativ test.

La oss se litt nærmere på hvordan vi finner passende startverdier  $s^0$  og  $s^1$  for å komme igang med iterasjonsprosessen. Den vanligvis enkleste måten å få oversikt over nullpunktene for en funksjon på, er å framstille funksjonen grafisk. Figur 2.17 viser  $\phi(s)$  der  $s \in [0.05, 0.8]$ . Beregningen er gjort med Matlabprogrammet **blaplot**. Av figuren ser vi at nullpunktet ligger i intervallet  $[0.45, 0.5]$ . Vi ser også at vi har et stort spillerom ved valg av  $s^0$  og  $s^1$ .



Figur 2.17



Figur 2.18

Figur 2.18 viser den dimensjonsløse u-hastigheten  $f'(\eta)$  og den dimensjonsløse skjærspenningen  $f''(\eta)$  som beregnet i tabellen på neste side. Den maksimale verdien av  $f''(\eta)$  inntreffer for  $\eta = 0$ , som igjen betyr at skjærspenningen er størst ved veggene. Legg merke til at  $f'''(0) = 0$  som betyr at  $f''(\eta)$  har vertikal tangent på veggene. Tabellen nedenfor er beregnet med programmet **blasec**.

itr.	s	ds
1	0.471625	-2.837e-002
2	0.469580	-2.046e-003
3	0.469601	2.146e-005
4	0.469601	-1.540e-008

$\eta$	f	f'	f''
0.00	0.000000	0.000000	4.69601e-001
0.25	0.01467	3 0.117364	4.69027e-001
0.50	0.058643	0.234228	4.65032e-001
0.75	0.131642	0.349324	4.54373e-001
1.00	0.232991	0.460634	4.34380e-001
1.25	0.361431	0.565601	4.03495e-001
1.50	0.515032	0.661476	3.61805e-001
1.75	0.691201	0.745765	3.11302e-001
2.00	0.886798	0.816697	2.55671e-001
2.25	1.098374	0.873559	1.99544e-001
2.50	1.322442	0.916810	1.47476e-001
2.75	1.555766	0.947928	1.02930e-001
3.00	1.795573	0.969057	6.77108e-002
3.25	2.039661	0.982573	4.19262e-002
3.50	2.286412	0.990711	2.44148e-002
3.75	2.534723	0.995319	1.33643e-002
4.00	2.783894	0.997773	6.87412e-003
4.25	3.033509	0.999000	3.32201e-003
4.50	3.283340	0.999577	1.50841e-003
4.75	3.533271	0.999832	6.43473e-004
5.00	3.783244	0.999938	2.57831e-004
5.25	4.033235	0.999980	9.70546e-005
5.50	4.283232	0.999995	3.43646e-005
5.75	4.533231	1.000000	1.15317e-005

### Eksempel 2.8 Falkner - Skan ligningen

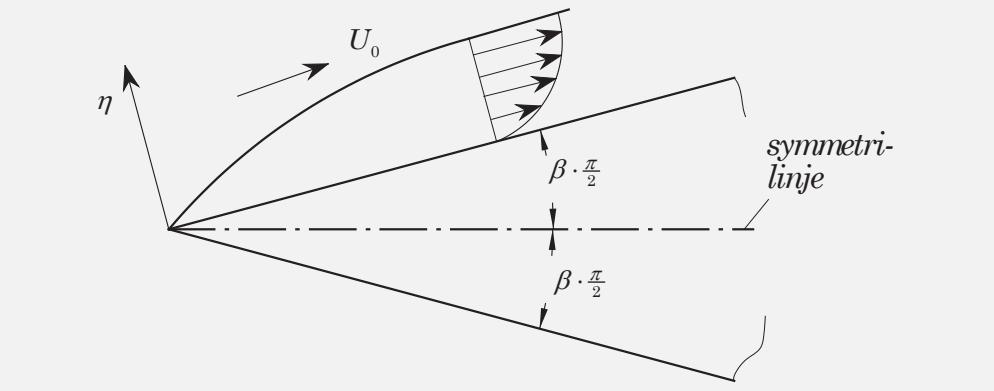
Blasius ligning er egentlig et spesialtilfelle av en mer generell ligning som kalles Falkner-Skan ligningen. Falkner-Skan transformasjonen (1930) overfører grensesjiktligningen til en likedannhetsform gitt ved:

$$f''' + ff'' + \beta \cdot [1 - (f')^2] = 0 \quad (2.3.41)$$

når fristrømshastigheten  $U(x)$  er gitt ved:

$$U(x) = U_0 x^m, \quad m = \text{konstant} \quad (2.3.42)$$

(2.3.41) kalles også kilestrømsligningen fordi parameteren  $\beta$  har den geometriske betydningen som vist i figur 2.19:



Figur 2.19

Vi ser at halve kilevinkelen er  $\beta \cdot \frac{\pi}{2}$ . For  $\beta = 0$ , får vi følgelig en flat plate, og (2.3.41) blir da Blasius ligning.

En detaljert utledning er gitt i appendiks C, del C.3 . Vi gjengir noe av utledningen for oversiktens skyld.

Sammenheng mellom  $m$  og  $\beta$ :  $\beta = \frac{2m}{m+1}$  og  $m = \frac{\beta}{2-\beta}$  Vi ser at  $\beta = 0$  gir  $U(x) = U_0$ .

Falkner-Skan transformasjonen er gitt ved:

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{(2-\beta)\nu x}} \cdot y, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{(2-\beta)U\nu x}} \quad (2.3.43)$$

Dersom vi velger de samme randbetingelsene som i eksempel 2.7, får vi: F-S - ligningen:

$$f''' + ff'' + \beta \cdot [1 - (f')^2] = 0 \quad (2.3.44a)$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 0 \\ f'(\eta_\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (2.3.44b)$$

Vi løser ligningen på samme måte som Blasius ligning ved å skrive (2.3.44) som et sett av 1. ordens differensiellligninger:

$$\begin{aligned} f' &= f_1 \\ f'_1 &= f_2 \\ f'_2 &= -[ff_2 + \beta(1 - f_1^2)] \end{aligned} \quad (2.3.45a)$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} f(0) &= f_1(0) = 0 \\ f_1(\eta_\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (2.3.45b)$$

Med  $f''(0) = f_2(0) = s$ , får vi:

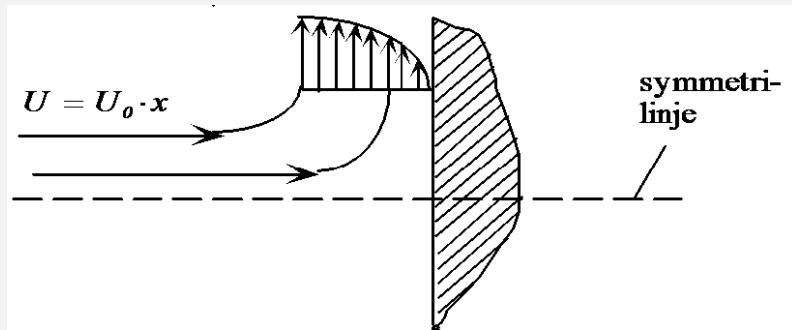
$$\phi(s) = f_1(\eta_\infty; s) - 1 \quad (2.3.46)$$

med korrekt verdi  $s^*$  når  $\phi(s^*) = 0$

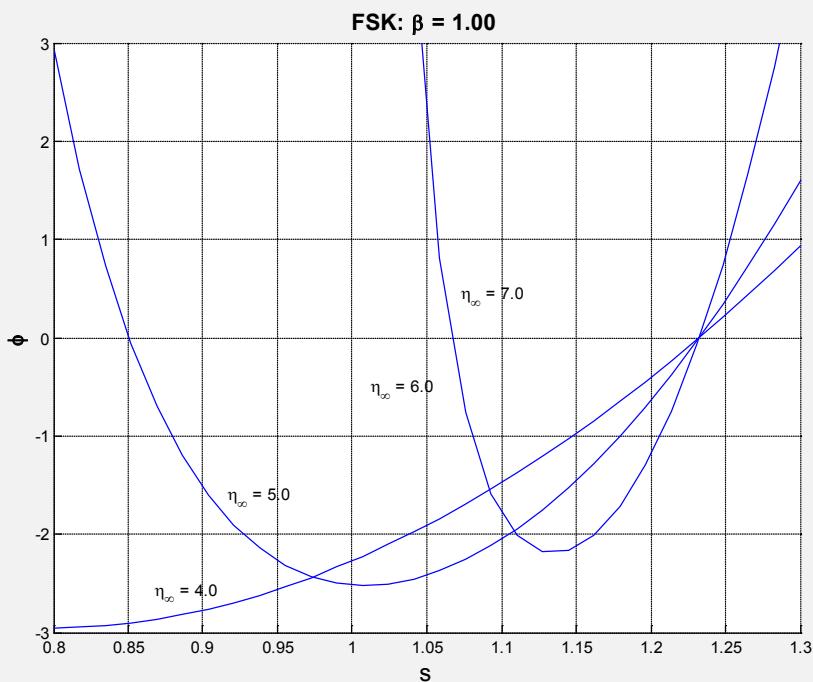
Flere detaljer om løsningsprosessen er gitt i appendiks C, del C.3.

### Bestemmelse av startverdier.

Vi bruker sekantmetoden for å finne nullpunktet i (2.3.46) og trenger derfor to startverdier  $s^0$  og  $s^1$  for å starte iterasjonsprosessen. Velger tilfellet med  $\beta = 1$  som er strømning mot en flat plate, dvs.: en stagnasjonsstrøm, se figur 2.20. Dette tilfellet kalles også en Hiemenz-strømning.



Figur 2.20



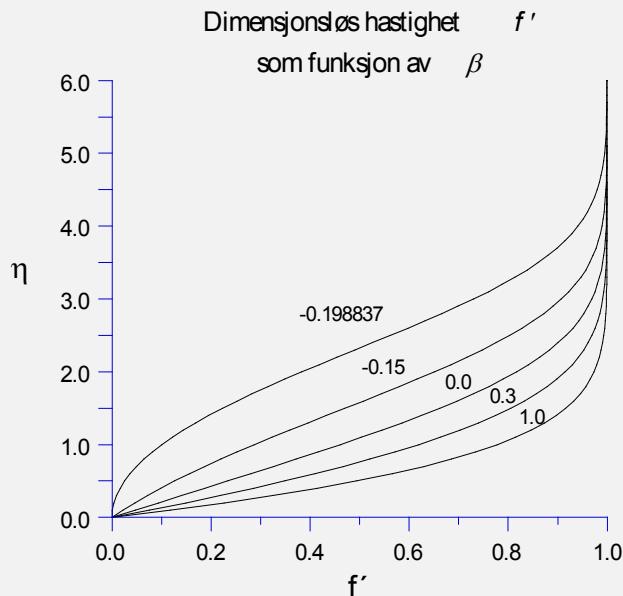
Figur 2.21

$\phi(s)$  er tegnet i figur 2.21. Beregningen er utført med bruk av **ode45**.

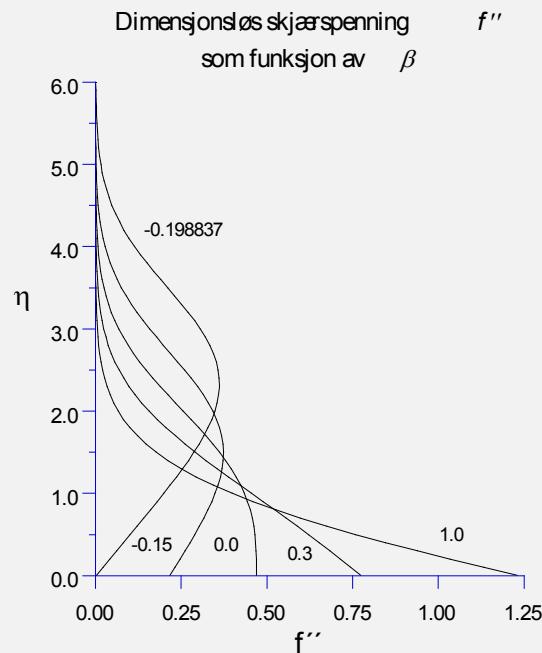
Det korrekte nullpunktet er  $s^* = 1.23259$  som er den entydige løsningen av F-S-ligningen for  $\eta \rightarrow \infty$  med  $\beta = 1$ . Dersom vi ser på kurven for  $\eta_\infty = 5.0$ , finner vi et nullpunkt rundt  $s = 0.85$  og et rundt  $s = 1.23$  der det siste er det korrekte. Årsaken er at F-S-ligningen har to løsninger for endelige verdier av  $\eta_\infty$  der det venstre nullpunktet beveger seg mens det andre som er det korrekte for  $\eta \rightarrow \infty$ , ligger fast. Begge nullpunktene gir korrekte løsninger av diff.ligningen, men det venstre nullpunktet gir en løsning som fører til avløsning og tilbake-strømning, noe som er ufysikalsk i dette tilfellet. Legg merke til at avstanden mellom nullpunktene minsker med økende verdi av  $\eta_\infty$ , og med  $\eta \rightarrow \infty$  vil de to grenene falle sammen.

Dersom vi bruker en løser med konstant skritt lengde, f.eks **rk4c**, og samtidig velger en forholdsvis stor skritt lengde, f. eks.  $\Delta\eta = 0.2$ , vil vi få en rekke andre nullpunkt. Disse nullpunktene gir løsning av differanseligningen, men er ikke løsning av differensialligningen. Ved å la  $\Delta\eta \rightarrow 0$ , vil disse nullpunktene forsvinne også for store  $\eta_\infty$ -verdier.

Figur 2.22 og figur 2.23 viser noen resultater fra Matlab-programmet **fsksec**.

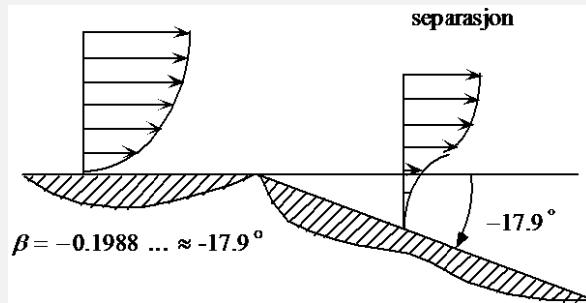


Figur 2.22



Figur 2.23

For  $\beta = \beta_{sep} = -0.19883768\dots$  forsvinner skjærspenningen ved veggen. Dette indikerer begynnende tilbakestrømning og separasjon, se figur 2.24.



Figur 2.24

Det finnes løsninger av F-S-ligningen for  $\beta$ -verdier som ligger utenfor det området vi fysisk kan knytte til en kilestrøm. For mer informasjon om disse løsningene, henvises til Evans [20], White [21], og Schlichting [14].

Tilslutt bør det nevnes at det finnes en analytisk løsning av F-S-ligningen. Vi tenker oss at det er plassert et sluk i  $x = 0$  med styrke  $K$  parallelt med platekanten. I dette tilfellet blir  $U(x) = -\frac{K}{x}$  og  $\eta = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{K}{\nu}}$ .

Ligningen blir nå:

$$f'''(\eta) - (f'(\eta))^2 + 1 = 0 \quad (2.3.47a)$$

med de vanlige randbetingelsene

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 0 \\ f'(\eta_\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (2.3.47b)$$

Løsningen kan da skrives:

$$f(\eta) = \eta + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \cdot \tanh(z) \quad (2.3.48a)$$

$$f'(\eta) = 3 \tanh^2(z) - 2 \quad (2.3.48b)$$

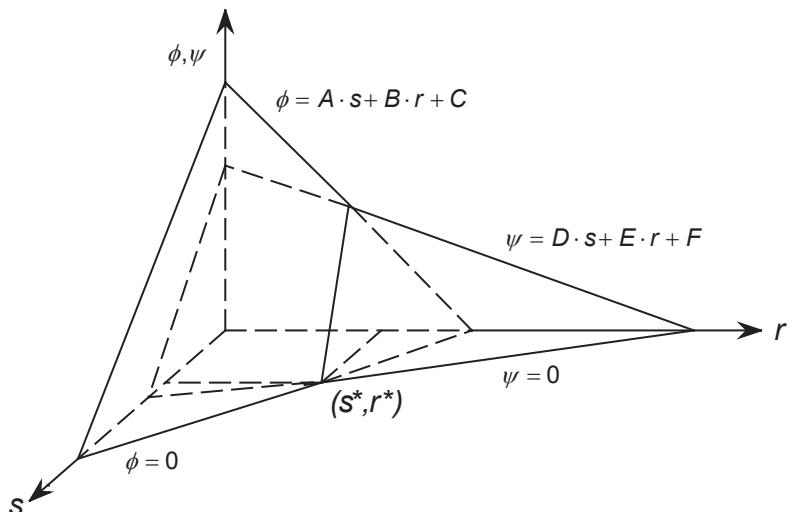
$$f''(\eta) = 3\sqrt{2} \cdot \tanh(z) \cdot [1 - \tanh^2(z)] \quad (2.3.48c)$$

Spesielt har vi:

$$f''(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547\dots$$

Merk at en funksjon  $f(\eta) = \eta + a - 3\sqrt{2} \cdot \tanh(\eta/\sqrt{2} + b)$  tilfredstiller (2.3.47) for vilkårlige verdier av  $a$  og  $b$  med  $f'(\infty) = 1$ .

## 2.4 SKYTING MED TO STARTBETINGELSER



Figur 2.25

### 2.4.1 LINEÆRE LIGNINGER

Vi vil nå utvide teknikken som vi brukte i avsnitt 2.1 til to ukjente startbetingelser. I dette tilfellet må vi tippe to startbetingelser  $r$  og  $s$  med tilhørende funksjoner  $\phi$  og  $\psi$ . Dette er vist grafisk i figur 2.25. Da ligningen som skal løses er lineær, danner  $\phi$  og  $\psi$  to plan og kan derfor skrives på

formen:

$$\begin{aligned}\phi &= A \cdot s + B \cdot r + C \\ \psi &= D \cdot s + E \cdot r + F\end{aligned}\quad (2.4.1)$$

der  $A, B, C, \dots, F$  er konstanter som må bestemmes. De rette verdiene  $r^*$  og  $s^*$  finnes fra  $\phi(r^*, s^*) = 0$  og  $\psi(r^*, s^*) = 0$ . (Se figuren) Vi har seks konstanter som bestemmes fra ligningene:

$$\begin{aligned}\phi^0 &= A \cdot s^0 + B \cdot r^0 + C \\ \phi^1 &= A \cdot s^1 + B \cdot r^1 + C \\ \phi^{(2)} &= A \cdot s^{(2)} + B \cdot r^{(2)} + C\end{aligned}\quad (2.4.2a)$$

$$\begin{aligned}\psi^0 &= D \cdot s^0 + E \cdot r^0 + F \\ \psi^1 &= D \cdot s^1 + E \cdot r^1 + F \\ \psi^{(2)} &= D \cdot s^{(2)} + E \cdot r^{(2)} + F\end{aligned}\quad (2.4.2b)$$

der  $s^0, s^1, s^{(2)}, r^0, r^1$  og  $r^{(2)}$  er verdier som vi har tippet for initialbetingelsene. For å forenkle slutt-resultatet, velger vi følgende verdier:

- 1)  $s^0 = 0, r^0 = 0$
- 2)  $s^1 = 0, r^1 = 1$
- 3)  $s^{(2)} = 1, r^{(2)} = 0$

Vi får da følgende uttrykk for konstantene:

$$\begin{aligned}C &= \phi^0, B = \phi^1 - \phi^0, A = \phi^{(2)} - \phi^0 \\ F &= \psi^0, E = \psi^1 - \psi^0, D = \psi^{(2)} - \psi^0\end{aligned}\quad (2.4.4)$$

De korrekte verdiene  $r^*$  og  $s^*$  finnes fra  $\phi(r^*, s^*) = 0$  og  $\psi(r^*, s^*) = 0$  som her blir  $A \cdot s^* + B \cdot r^* + C = D \cdot s^* + E \cdot r^* + F = 0$  med følgende løsning:

$$s^* = \frac{E \cdot C - B \cdot F}{D \cdot B - A \cdot E}, \quad r^* = \frac{A \cdot F - D \cdot C}{D \cdot B - A \cdot E}$$

som innsatt for  $A, B, C, \dots, F$  gir:

$$\begin{aligned}s^* &= \frac{\psi^1 \cdot \phi^0 - \phi^1 \cdot \psi^0}{(\psi^{(2)} - \psi^0) \cdot (\phi^1 - \phi^0) - (\phi^{(2)} - \phi^0) \cdot (\psi^1 - \psi^0)} \\ r^* &= \frac{\phi^{(2)} \cdot \psi^0 - \psi^{(2)} \cdot \phi^0}{(\psi^{(2)} - \psi^0) \cdot (\phi^1 - \phi^0) - (\phi^{(2)} - \phi^0) \cdot (\psi^1 - \psi^0)}\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

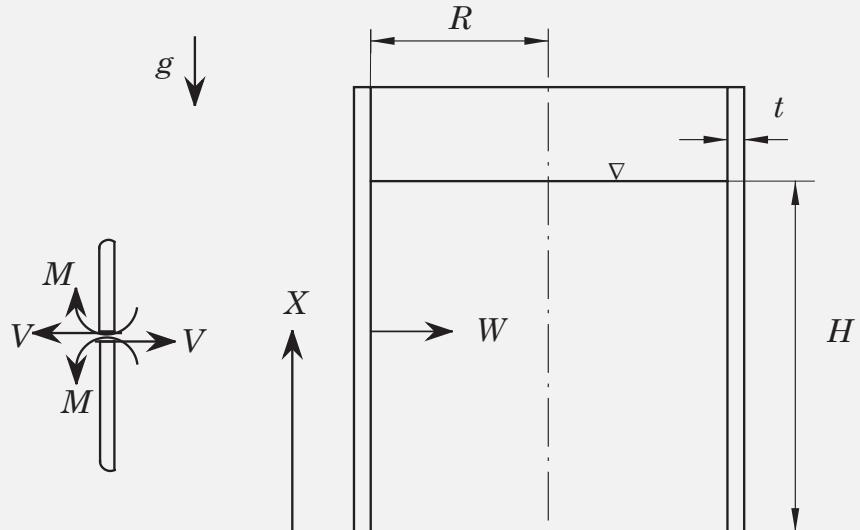
Fremgangsmåten blir da som følger:

Vi løser ligningssystemet for de tre settene av verdier for  $r$  og  $s$  gitt i (2.4.3) og finner derved de tilhørende verdiene av  $\phi$  og  $\psi$ . De korrekte verdiene  $r^*$  og  $s^*$  finnes da fra (2.4.5). Vi skal bruke denne prosedyren i eksempel 2.9

### Eksempel 2.9 SYLINDRISK TANK MED VÆSKE

#### DEL 1.

##### Konstant veggtykkelse



Figur 2.26

Figur 2.26 viser en sylinderisk tank fylt med en væske til en høyde  $H$ .  $W$  er radiell forskyvning. På detaljen til venstre er  $V$  skjærkraft pr. lengdeenhet og  $M$  moment pr. lengdeenhet. Pilene angir positiv retning.

Differensialligningen for forskyvningen  $W$  er gitt ved:

$$\frac{d^4W}{dX^4} + B \cdot W = -\gamma \frac{H - X}{D} \quad (2.4.6)$$

$$\text{der } B = \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 t^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \gamma = \rho g$$

Her er  $\nu$  Poissons tall,  $E$  elastisitetsmodellen og  $\rho$  væskas tetthet.

Innfører dimensjonsløse størrelser:

$$x = \frac{X}{H} \text{ og } w = \frac{E}{\gamma H t} \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot W \quad (2.4.7)$$

som innsatt i (2.4.6) gir følgende differensialligning:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 \cdot w = -4\beta^4(1 - x) \quad (2.4.8a)$$

der

$$\beta^4 = \frac{3(1 - \nu^2)H^4}{R^2 t^2} \quad (2.4.8b)$$

### Randverdier.

For  $x = 0$ :

$$W = 0, \frac{dW}{dX} = 0 \text{ (Fast innspent)}$$

Skjærkraft og moment = 0 for  $X = H$  som gir:

$$M = -D \frac{d^2 W}{dX^2} = 0, V = -D \frac{d^3 W}{dX^3} = 0$$

Randverdiene uttrykt ved dimensjonsløse størrelser blir da:

$$\begin{aligned} \text{For } x = 0 : \quad w &= 0, \frac{dw}{dx} = 0 \\ \text{For } x = 1 : \quad \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0, \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Dimensjonsløst moment  $m(x) = -\frac{d^2 w}{dx^2}$  og dimensjonsløs skjærkraft  $v(x) = -\frac{d^3 w}{dx^3}$ . Se appendiks D for flere detaljer.

Velger en en tank av betong med følgende dimensjoner:

$$\begin{aligned} R &= 8.5m, H = 7.95m, t = 0.35m \\ \gamma &= 9810 N/m^3 (\text{vann}), \nu = 0.2, E = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Med disse data blir  $\beta = 6.0044$ .

### NUMERISK BEREKNING

Setter  $w = y_1$ ,  $w' = y'_1 = y_2$ ,  $w'' = y'_2 = y_3$ ,  $w''' = y'_3 = y_4$  og skriver (2.4.6) som et system av fire 1. ordens differensiell ligninger:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= y_4 \\ y'_4 &= -4\beta^4(y + 1 - x) \end{aligned} \quad (2.4.11a)$$

med følgende randbetingelser:

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(1) = 0, y_4(1) = 0 \quad (2.4.11b)$$

Skal bestemme  $s = w''(0) = y_3(0)$  og  $r = w'''(0) = y_4(0)$  slik at  $y_3(1)$  og  $y_4(1) = 0$ . Setter følgelig  $\phi(r, s) = y_3(1; r, s)$  og  $\psi(r, s) = y_4(1; r, s)$ . De korrekte verdiene  $r^*$  og  $s^*$  gir da  $\phi(r^*, s^*) = 0$ . Løser følgelig (2.4.11) tre ganger med  $y_1(0)$  og  $y_2(0) = 0$  mens verdiene for  $r$  og  $s$  velges fra (2.4.3). De korrekte verdiene  $r^*$  og  $s^*$  beregnes deretter fra (2.4.5).

Utsnitt av programmet **tank1** samt utskrift er vist nedenfor.

```
% Program tank1
clear; clear global beta4;
global beta4;
% === Data ===
R = 8.5; % Radius[m]
H = 7.95; % Høyde[m]
t = 0.35; % Tykkelse[m]
ny = 0.2; % Poissons tall
beta = H*(3*(1-ny^2)/(R*t)^2)^0.25;
fprintf('      beta = %7.4f\n',beta);
beta4 = beta^4;
xspan = [0 1.0];
s = [0 0 1]; r = [0 1 0];
options = odeset('RelTol',1.0e-7,'AbsTol', 1.0e-7);
% ===== Skyter tre ganger for å finne s* og r* =====
for k = 1:3
    y0 = [0.0; 0.0 ; s(k) ; r(k)];
    [x,y] = ode45(@fcntank1,xspan,y0,options);
    phi(k) = y(end,3); psi(k) = y(end,4);
end
nev = (psi(3)-psi(1))*(phi(2)-phi(1)) - ...
(phi(3) - phi(1))*(psi(2)-psi(1));
rstar= (phi(3)*psi(1) - psi(3)*phi(1))/nev;
sstar = (psi(2)*phi(1) - phi(2)*psi(1))/nev;
fprintf('      r* = %12.5e  s* = %12.5e \n\n',rstar,sstar);
% ===== Tabell over forskyvning w ,helning dw/dx osv. =====
xspan = [0: 0.1:1.0];
y0 = [0.0 ;0.0 ;sstar; rstar];
[x,y] = ode45(@fcntank1,xspan,y0,options);
y(:,3) = -y(:,3); y(:,4)= -y(:,4);
fprintf('      x          w          dw/dx          m(x)
v(x)\n\n');
fprintf(' %10.3f  %13.5e  %13.5e  %13.5e  %13.5e \n',[x y']);
m = y(:,3)/beta; v = y(:,4)/beta^2;
```

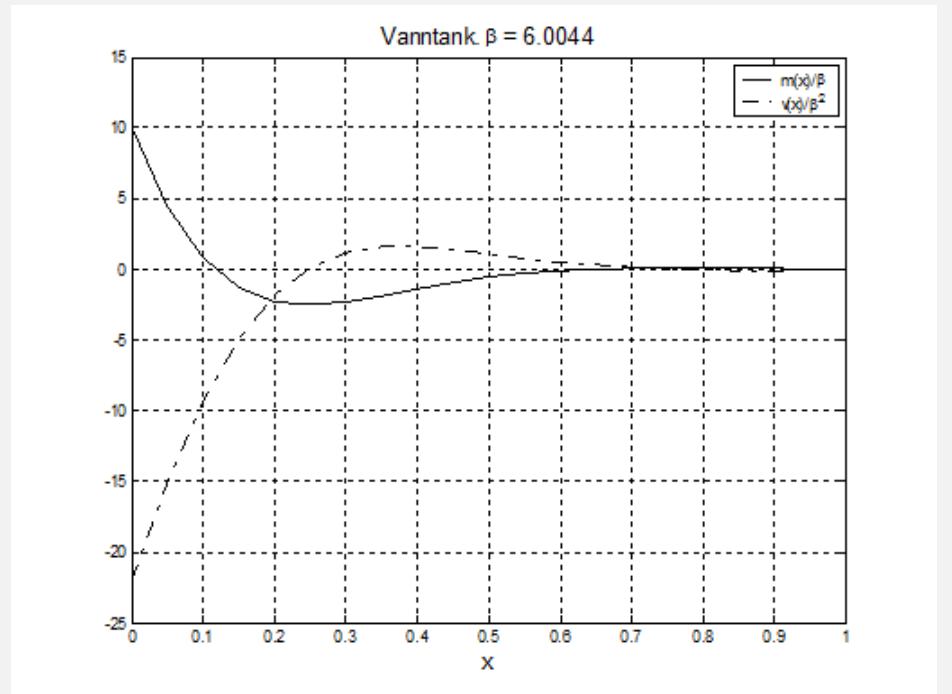
```
function dydx = fcntank1(x,y)
% Kalles fra programmet tank1
global beta4;
dydx = zeros(size(y));
dydx(1) = y(2);
dydx(2) = y(3);
dydx(3) = y(4);
dydx(4) = -4*beta4*(y(1) + 1 - x);

beta = 6.0044
r* = 7.93776e+002  s* = -6.00946e+001
```

x	w	dw/dx	m(x)	v(x)
0.000	0.00000e+000	0.00000e+000	6.00946e+001	-7.93776e+002
0.100	-1.89049e-001	-2.86464e+000	4.85241e+000	-3.36907e+002
0.200	-4.57346e-001	-2.19767e+000	-1.36887e+001	-6.60901e+001
0.300	-6.03796e-001	-7.32255e-001	-1.38468e+001	4.15724e+001
0.400	-6.16145e-001	3.93069e-001	-8.41051e+000	5.74987e+001
0.500	-5.43811e-001	9.70524e-001	-3.44813e+000	3.94237e+001
0.600	-4.35148e-001	1.15559e+000	-6.10973e-001	1.81108e+001
0.700	-3.18861e-001	1.15307e+000	4.27833e-001	4.09131e+000
0.800	-2.06030e-001	1.10306e+000	4.68862e-001	-2.15847e+000
0.900	-9.76194e-002	1.07014e+000	1.76515e-001	-2.96401e+000
1.000	8.92555e-003	1.06379e+000	1.20446e-004	6.10070e-004

Vi ser at vi har god overenstemmelse når vi sammenligner med den analytiske løsningen i tabell 1 i appendiks D. Figur 2.27 nedenfor viser forløpet av det

dimensjonsløse momentet samt skjærkrafta.



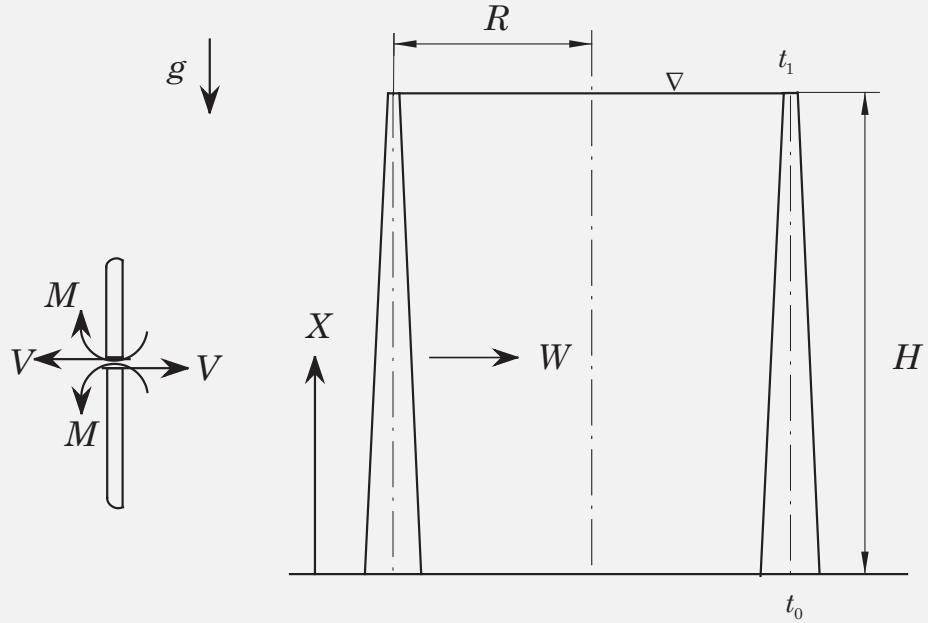
Figur 2.27

(2.4.8) er av typen der den høyeste deriverte er multiplisert med et lite tall  $\varepsilon$  der  $\varepsilon = \frac{1}{4\beta^4}$  i vårt tilfelle. Kalles gjerne en singulær ligning dersom vi tillater at  $\beta \rightarrow \infty$ . Dette gjenspeiler seg i den analytiske løsningen i lign. (D.1.6) og (D.1.8), del D.1, i appendiks D, der vi har ledd av typen  $e^{\beta x} \sin \beta x$  og  $e^{\beta x} \cos \beta x$ .

Dette betyr at skytelengden i praksis er lik  $\beta$ . Det vil da bli mer og mer vanskelig å treffe randen  $x = 1$  med økende  $\beta$ -verdier. For store  $\beta$ -verdier vil deformasjonen koncentrere seg rundt  $x = 0$  slik at det kanskje ikke er nødvendig å skyte helt til  $x = 1$ , men kan greie oss med en mindre verdi.

Nedenfor har vi beregnet innspenningsmomentet  $m_0 = -\left.\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\right|_{x=0}$  og skjærkrafta  $v_0 = -\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x=0}$  som funksjon av skytelengden. Merk at  $m_0 = -s^*$  og  $v_0 = -r^*$ .

Skytelengde	$m_0$	$-v_0$
1.0	60.098	793.809
0.9	60.093	793.715
0.8	60.099	793.670
0.7	60.079	793.598
0.6	59.816	791.835
0.5	58.879	781.541

**DEL 2.****Lineært variabel veggtykkelse**

Figur 2.28

Her varierer veggtykkelsen lineært fra  $t_0$  nederst til  $t_1$  øverst.

Med  $\alpha = \frac{t_0 - t_1}{t_0}$  kan veggtykkelsen  $t$  skrives:

$$t = \left(1 - \alpha \frac{X}{H}\right) \cdot t_0, \quad 0 \leq X \leq H \quad (2.4.12)$$

Differensialligningen for forskyvningen  $W$  er nå gitt ved:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left( D \frac{d^2W}{dX^2} \right) + E \frac{tW}{R^2} = -\gamma(H - X) \quad (2.4.13)$$

der  $D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$ ,  $\gamma = \rho g$

Konstantene har samme betydning som i del 1. (Se appendiks D for flere detaljer)

**Dimensjonsløs form**

$$x = \frac{X}{H}, \quad w = \frac{E}{\gamma H t_0} \left( \frac{t_0}{R} \right)^2 \cdot W, \quad \beta^4 = \frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 t_0^2} \cdot H^4 \quad (2.4.14)$$

(2.4.14) innsatt i (2.4.13):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ (1 - \alpha x)^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + 4\beta^4(1 - \alpha x) \cdot w = -4\beta^4(1 - x) \quad (2.4.15)$$

Utderivert:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \frac{6\alpha}{(1 - \alpha x)} \frac{d^5 w(x)}{dx^5} + \frac{6\alpha^2}{(1 - \alpha x)^2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{4\beta^4}{(1 - \alpha x)^2} w(x) = -\frac{4\beta^4(1 - x)}{(1 - \alpha x)^5} \quad (2.4.16)$$

Dette systemet kan også løses analytisk, se appendiks D, del D.2, men matematikken er mer komplisert fordi løsningen blir uttrykt med en spesiell type Besselfunksjoner som kalles Kelvinfunksjoner. Den numeriske fremgangsmåten er derimot uforandret.

Velger samme tank som i del 1 med tillegg for varierende veggtykkelse:

$$\begin{aligned} R &= 8.5m, \quad H = 7.95m, \quad t_0 = 0.35m, \quad t_1 = 0.1m \\ \gamma &= 9810N/m^3(\text{vann}), \quad \nu = 0.2, \quad E = 2 \cdot 10^4 \text{MPa} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Her blir  $\alpha = \frac{t_0 - t_1}{t_0} = \frac{5}{7}$  og som tidligere blir  $\beta = 6.0044$ .

## NUMERISK BEREGNING

Setter  $w = y_1$ ,  $w' = y'_1 = y_2$ ,  $w'' = y'_2 = y_3$ ,  $w''' = y'_3 = y_4$ ,  $z = 1 - \alpha x$  og skriver (2.4.12) som et system av fire 1. ordens differensielligninger:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= y_4 \\ y'_4 &= \frac{6\alpha}{z} y_4 - \frac{6\alpha^2}{z^2} y_3 - \frac{4\beta^4}{z^2} y_1 - \frac{4\beta^4(1 - x)}{z^3} \end{aligned} \quad (2.4.18a)$$

med følgende randbetingelser:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(1) = 0, \quad y_4(1) = 0 \quad (2.4.18b)$$

Fremgangsmåten blir som for del 1, bortsett fra at vi nå har parameteren  $\alpha$  tillegg til  $\beta$ . Programmet **tank2** blir derfor nesten identisk med **tank1**. Hovedforskjellen er funksjonen **fctntank2** for diff. ligningen.

```

function dydx = fcntank2(x,y)
% Kalles fra programmet tank2
global beta4 alfa;
z = 1 - alfa*x;
dydx = zeros(size(y));
dydx(1) = y(2);
dydx(2) = y(3);
dydx(3) = y(4);
temp = (6*alfa/z)*y(4) -(6*alfa^2/z^2)*y(3);
dydx(4) = temp -4*beta4*y(1)/z^2 - 4*beta4*(1 - x)/z^3;

```

Utskriften fra **tank2**:

```

beta = 6.0044
alfa = 0.7143
r* = 6.40200e+002 s* = -6.23338e+001

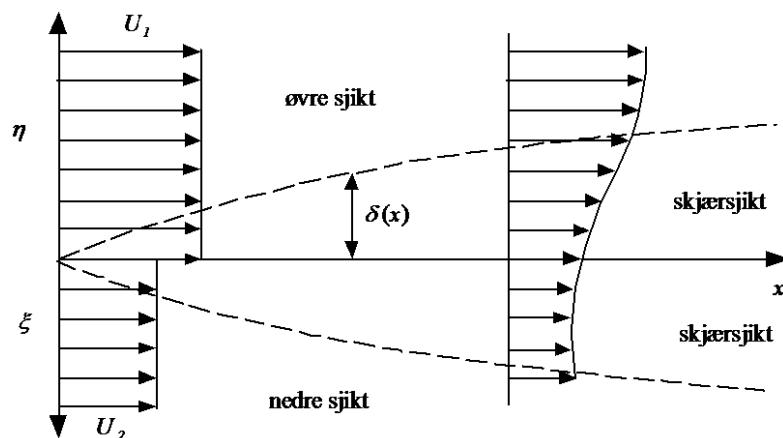
```

x	w	dw/dx	m(x)	v(x)
0.000	0.00000e+000	0.00000e+000	6.23338e+001	-7.73773e+002
0.100	-2.15376e-001	-3.45545e+000	9.04151e+000	-3.18887e+002
0.200	-5.66553e-001	-3.16644e+000	-8.14798e+000	-5.86193e+001
0.300	-8.05113e-001	-1.53673e+000	-8.34542e+000	3.32725e+001
0.400	-8.79417e-001	-3.87614e-002	-4.36688e+000	3.81223e+001
0.500	-8.34707e-001	8.24809e-001	-1.47715e+000	1.90313e+001
0.600	-7.31823e-001	1.17417e+000	-3.81333e-001	4.52213e+000
0.700	-6.05528e-001	1.35136e+000	-2.49403e-001	-5.41818e-001
0.800	-4.57651e-001	1.63752e+000	-3.00683e-001	8.66313e-002
0.900	-2.72819e-001	2.06404e+000	-1.83081e-001	2.16427e+000 %
1.000	-5.26758e-002	2.26301e+000	3.87892e-005	-1.76069e-006

>>

Vi finner god overenstemmelse ved å sammenligne med den analytiske løsningen i tabell 7, del D.2 i appendiks D.

#### 2.4.2 EKSEMPEL PÅ IKKE-LINEÆRE LIGNINGER



Figur 2.29

Figur 2.29 viser et fluidsjikt med initiell hastighet  $U_1$  som strømmer over et annet sjikt med initiell hastighet  $U_2$ . Da sjiktene må ha samme hastighet og

skjærspenning langs den felles grenseflata, oppstår det et skjærssjikt som vist på figuren. For enkelhets skyld antar vi samme fluid i begge sjiktene. Antar dessuten at Blasius ligning beskriver skjærssjiktet.

For begge sjiktene:

$$f'''(\eta) + f(\eta) \cdot f''(\eta) = 0 \quad (2.4.19a)$$

med randbetingelser:

$$f(0) = 0 \quad (2.4.19b)$$

$$f'(\eta_\infty) = 1 \quad (2.4.19c)$$

$$f'(-\eta_\infty) = \frac{U_2}{U_1} \quad (2.4.19d)$$

Merk her at  $\eta \geq 0$  for det øvre sjiktet og  $\eta \leq 0$  for det nedre sjiktet. Vi har definert koordinaten  $\eta$  og strømfunksjonen  $f(\eta)$  på følgende måte:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{U_1}{2\nu x}} \cdot y \\ f'(\eta) &= \frac{U(x, y)}{U_1} \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

(Sammenlign med lign. (C.2.7), appendiks C, del C.2)

I dette tilfellet er både hastigheten  $f'(0)$  og skjærspenningen  $f''(0)$  ukjente, slik at vi må tippe to initialbetingelser når vi skal bruke skyteteknikk.

Får totalt følgende tre initialbetingelser:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = r, \quad f''(0) = s \quad (2.4.21)$$

De to ukjente initialbetingelsene må velges slik at randbetingelsene (2.4.19c) og (2.4.19d) blir oppfylt. Vi skriver dette på følgende måte:

$$\phi(\eta_\infty; r, s) = f'(\eta_\infty; r, s) - 1 = 0 \text{ for } s = s^*, \quad r = r^* \quad (2.4.22)$$

$$\psi(-\eta_\infty; r, s) = f'(-\eta_\infty; r, s) - \frac{U_2}{U_1} = 0 \text{ for } s = s^*, \quad r = r^* \quad (2.4.23)$$

Istedentfor å bruke negative verdier for  $\eta$  for det nedre sjiktet, velger vi å innføre koordinaten  $\zeta$  der  $\zeta = -\eta$ . Får da følgende system:

I. For det øvre sjiktet:

$$f'''(\eta) + f(\eta) \cdot f''(\eta) = 0 \quad (2.4.24a)$$

med rand - og initialbetingelser:

$$f'(\eta_\infty) = 1 \quad (2.4.24b)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = r, \quad f''(0) = s \quad (2.4.24c)$$

$$\phi(\eta_\infty; r, s) = f'(\eta_\infty; r, s) - 1 = 0 \quad (2.4.24d)$$

II. For det nedre sjiktet:

$$f'''(\zeta) - f(\zeta) \cdot f''(\zeta) = 0 \quad (2.4.25a)$$

med rand - og initialbettingelser:

$$f'(\zeta_\infty) = -\frac{U_2}{U_1} \quad (2.4.25b)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = -r, f''(0) = s \quad (2.4.25c)$$

$$\psi(\zeta_\infty; r, s) = f'(\zeta_\infty; r, s) + \frac{U_2}{U_1} = 0 \quad (2.4.25d)$$

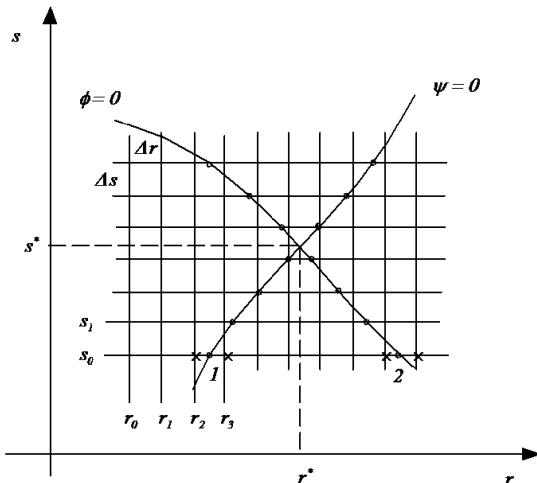
Merk at derivasjon er m. h. p. koordinaten  $\zeta$  i det nedre sjiktet.

Da  $\zeta = -\eta$ , får vi for eksempel:

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = \frac{df(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{df(\eta)}{d\eta} \cdot (-1) = -\frac{df(\eta)}{d\eta}$$

Oppgava blir da å løse (2.4.24a), (2.4.24c) og (2.4.24d) simultant med (2.4.25a), (2.4.25c) og (2.4.25d). Dette betyr at vi må finne verdier av  $r$  og  $s$  slik at (2.4.24d) og (2.4.25d) er tilfredstilt. Dette må gjøres for alle aktuelle verdier av  $\frac{U_2}{U_1}$  der  $\frac{U_2}{U_1} \in [0, 1]$ .

Vi har da det gamle problemet med å finne gode nok startverdier for  $r$  og  $s$  når vi skal beregne nullpunktene av (2.4.24d) og (2.4.25d). Vi går fram som tidligere ved å beregne  $\phi(\eta_\infty; r, s)$  og  $\psi(\zeta_\infty; r, s)$  for passende verdier av  $\eta_\infty$ ,  $\zeta_\infty$ ,  $r$  og  $s$  og deretter tegne funksjonene. La oss se nærmere på framgangsmåten.



Figur 2.30

Vi skal finne de verdiene av  $r$  og  $s$  som er nullpunkter både i (2.4.24d) og (2.4.25d). Fra figur 2.30 ser vi at dette er punktet  $(r^*, s^*)$ . Velger verdier for  $\eta_\infty$  og  $\zeta_\infty$  slik at  $\phi$  og  $\psi$  bare er funksjoner av  $r$  og  $s$ :

$$\begin{aligned} \phi(r^*, s^*) &= 0 \\ \psi(r^*, s^*) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Velger så en verdi  $s = s_0$ , se figur 2.30. Setter deretter  $r = r_0$  og beregner verdiene av  $\phi$  og  $\psi$  langs linja  $s = s_0$  med varierende  $r$ . Med henvisning til figuren ovenfor, får vi fortløpende:

$$\psi(r_0, s_0) \cdot \psi(r_1, s_0) > 0, \psi(r_1, s_0) \cdot \psi(r_2, s_0) > 0, \psi(r_2, s_0) \cdot \psi(r_3, s_0) < 0$$

Den negative verdien av  $\psi(r_2, s_0) \cdot \psi(r_3, s_0)$  betyr at vi har en rot av  $\psi(r, s_0)$  mellom  $r_2$  og  $r_3$ . Denne rota som er merket med 1 på figuren, kan finnes med en endimensjonal nullpunktsløser siden  $\psi$  nå bare er funksjon av  $r$ . Ved å gå videre langs  $s = s_0$ , finner vi nullpunktet 2 av  $\phi$  på samme måten. Deretter begynner vi på ny s-verdi med  $s_1 = s_0 + \Delta s$  og finner nullpunktene langs  $s_1$ -linja. Tilslutt har vi beregnet alle nullpunktene merket med en ring på figuren.

Dermed kan vi finne en god tilnærmelse  $(\bar{r}, \bar{s})$  til det korrekte nullpunktet  $(r^*, s^*)$ . Med disse tilnæringsverdiene for nullpunktene, kan vi nå løse (2.4.26) ved for eks. å bruke en todimensjonal versjon av Newton-Raphsons metode, se avsnitt 14.2 i C&K [5]. Figur 2.30 gjelder for en bestemt verdi av  $\alpha = \frac{U_2}{U_1}$  slik at vi i prinsippet må gjenta søkeprosedyren for hver verdi av  $\alpha$ . I praksis er dette sjeldent nødvendig, da verdien av  $(\bar{r}, \bar{s})$  for en  $\alpha$ -verdi vanligvis kan brukes til å finne  $(r^*, s^*)$  for en nærliggende verdi av  $\alpha$ . Prosedyren ovenfor gir følgende tabell for  $(r^*, s^*)$  som funksjon av  $\frac{U_2}{U_1}$ :

$\frac{U_2}{U_1}$	$r^*$	$s^*$
0.0	0.583776	0.284447
0.1	0.613568	0.267522
0.2	0.646947	0.247879
0.3	0.683594	0.225504
0.4	0.723101	0.200460
0.5	0.765049	0.172847
0.6	0.809060	0.142779
0.7	0.854807	0.110363
0.8	0.902021	0.075701
0.9	0.950480	0.038886
1.0	1.000000	0.000000

Med  $\alpha = \frac{U_2}{U_1}$  finner vi følgende kurvetilpasninger for  $r^*$  og  $s^*$  fra tabellen:

$$\begin{aligned} r^* &\approx \bar{r} = 0.1076 \cdot \alpha^2 + 0.3086 \cdot \alpha + 0.5838 \\ s^* &\approx \bar{s} = -0.1224 \cdot \alpha^2 - 0.1620 \cdot \alpha + 0.2844 \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Istedentfor denne litt omstendelige fremgangsmåten, kan du forsøke programmet **fsolve** fra Matlabs Optimization Toolbox.



# KAPITTEL 3

## DIFFERANSEMETODER FOR ORDINÆRE DIFFERENSIALLIGNINGER

### 3.1 TRIDIAGONALE ALGEBRAISKE LIGNINGSYSTEM

Differansemetoder anvendt på både ordinære og partielle differensialligninger gir vanligvis algebraiske ligningsystem med utpreget bandstruktur. Ved 2. ordens differensialligninger består ofte koeffisient-matrisa for ligningsystemet av tre diagonaler: En hoveddiagonal med en diagonal på hver side av denne. En slik matrise kalles tridiagonal. Et lineært, algebraisk ligningsystem med tridiagonal koeffisientmatrise kan skrives på formen:

$$\begin{aligned} b_1 x_1 + c_1 x_2 &= d_1 \\ &\dots \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} &= d_i \\ &\dots \\ a_N x_{N-1} + b_N x_N &= d_N \\ i = 1, 2, \dots, N, a_1 = c_N = 0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

eller på matriseform:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & & & \\ a_N & b_N & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

(3.1.1) kan løses ved Gauss-eliminasjon som for tridiagonale matriser blir en enkel algoritme, ofte kalt Thomas-algoritmen. En detaljert utledning er gitt i appendiks I.

Eliminering:

$$\text{Utfør for } j = 2, 3, \dots, N \quad q_j := \frac{a_j}{b_{j-1}} \quad (3.1.3)$$

$$\text{Beregn: } b_j := b_j - q_j \cdot c_{j-1}, \quad d_j := d_j - q_j \cdot d_{j-1}$$

Innsetting:

$$\text{Sett } x_N := \frac{d_N}{b_N}$$

$$\text{Utfør for } j = N-1, N-2, \dots, 1 \quad x_j := \frac{d_j - c_j \cdot x_{j+1}}{b_j}$$

(3.1.3) er implementert i subprogrammet **tdma** som tilsvarer prosedyren **tri** i C&K [5] , avsnitt 6.3.

```
function x = tdma(a,b,c,d)
% Solution of a tridiagonal matrix
% using the Thomas-algorithm.
% No. of equations are given by the length
% of the main diagonal b
n = length(b);
x = zeros(size(b));
% === Elimination ===
for k = 2:n
    q = a(k)/b(k-1);
    b(k) = b(k) - c(k-1)*q;
    d(k) = d(k) - d(k-1)*q;
end
% === Backsubstitution ===
q = d(n)/b(n);
x(n) = q;
for k = n-1:-1:1
    q = (d(k) - c(k)*q)/b(k);
    x(k) = q;
end
```

Merk at **tdma** ikke bruker  $a(1)$  og  $c(n)$ .

(3.1.3) er sikker numerisk stabil dersom følgende betingelser er oppfylt:

$$\begin{aligned} |b_1| &> |c_1| > 0 \\ |b_i| &\geq |a_i| + |c_i|, a_i \cdot c_i \neq 0, i = 2, 3, \dots, N-1 \\ |b_n| &> |a_N| > 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Matriser som oppfyller (3.1.4) , kalles diagonaldominante. Dersom vi bare har ulikhetstegn i (3.1.4), betegnes dette som streng diagonaldominans. For diagonal-dominante matriser behøves ikke pivotering ved Gauss-eliminasjonen.

Dette sparer tid samtidig som bandstrukturen beholdes. Bevis av(3.1.4) er gitt i appendiks I.

Legg merke til at i matrisa (3.1.2) har koeffisientene i hver linje samme indeks. Ligningsystemet i (3.1.1) kan også skrives:

$$\begin{aligned}
 b_1x_1 + c_2x_2 &= d_1 \\
 &\dots \\
 a_{i-1}x_{i-1} + b_ix_i + c_{i+1}x_{i+1} &= d_i \\
 &\dots \\
 a_{N-1}x_{N-1} + b_Nx_N &= d_N \\
 i = 1, 2, \dots, N, a_1 = c_N = 0
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

eller på matriseform:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c}
 b_1 & c_2 & & d_1 \\
 a_1 & b_2 & c_3 & d_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{N-2} & b_{N-1} & c_N & d_{N-1} \\
 a_{N-1} & b_N & & d_N
 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

Legg merke til at i matrisa (3.1.6) har koeffisientene i hver *kolonne* samme indeks.

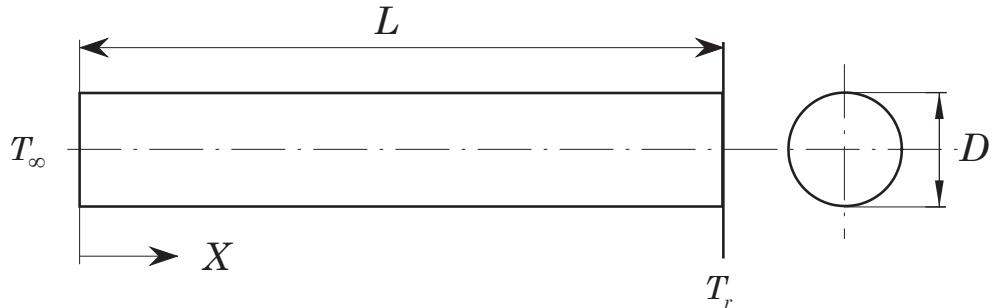
Versjonen i (3.1.6) fås enkelt fra (3.1.2) ved å trekke 1 fra *a*-indeksene og addere 1 til *c*-indeksene. Matlab lagrer tridiagonale matriser på formen (3.1.6). (Se avsnittet *Glisne matriser* i Matlabelfsa ).

(3.1.6) er programmert i funksjonen **tridiag**.

Av gammel vane bruker vi vanligvis funksjonen **tdma** i kurset. Dersom betingelsene i (3.1.4) ikke er oppfylt, kan f.eks. **tripiv** brukes. (Se appendiks I). I appendiks A, del A.5, står det mer om løsningsnøyaktigheten for lineære ligningsystem, spesielt tridiagonale system.

## 3.2 VARMELEDNING

### 3.2.1 KJØLERIBBE MED KONSTANT TVERRSNITT



Figur 3.1

Figur 3.1 viser en sirkulærslindrisk stav med lengde  $L$ , omgivelses-temperatur  $T_\infty$  og en konstant temperatur  $T_r$  for  $X = L$ .

Andre data:  $\bar{h} = 100 \text{W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $k = 200 \text{W/m/}^\circ\text{C}$

Fra ligning (B.0.22), appendiks B:

$$\frac{d}{dX} \left[ A(X) \cdot \frac{d(T - T_\infty)}{dX} \right] = \frac{\bar{h}P}{k}(T - T_\infty) \quad (3.2.1)$$

For konstant tverrsnitt:

$$\frac{d^2}{dX^2}(T - T_\infty) = \frac{\bar{h}P}{kA}(T - T_\infty) \quad (3.2.2)$$

Innfører dimensjonsløse variable:

$$x = \frac{X}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_r - T_\infty}, \quad \beta^2 = \frac{\bar{h}P}{kA}L^2 \quad (3.2.3)$$

der  $x$  er en dimensjonsløs lengde ( se B.5 ) og  $\theta$  en dimensjons- løs temperatur. Temperaturen  $T_r$  er en referanse-temperatur. Parameteren  $\beta^2$  kalles ofte Biot-tallet. ( Vanlig betegnelse for Biot-tallet er  $Bi$  der  $Bi = \beta^2$  ).

Lign. (3.2.1) kan nå skrives:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta^2\theta = 0 \quad (3.2.4)$$

med analytisk løsning:

$$\theta(x) = A \sinh(\beta x) = -B \cosh(\beta x) \quad (3.2.5)$$

der konstantene  $A$  og  $B$  bestemmes fra randbetingelsene.

Ser på et tilfelle med følgende to sett av randbetingelser:

I)

$$T = T_\infty \text{ for } X = 0, \quad T = T_r \text{ for } X = L$$

II)

$$Q_x = 0 = \frac{dT}{dX} \text{ for } X = 0, \quad T = T_r \text{ for } X = L$$

Tilfelle II betyr at staven er isolert for  $X = 0$

Randbetingelsene på dimensjonsløs form:

I)

$$\theta = 0 \text{ for } x = 0, \quad \theta = 1 \text{ for } x = 1 \quad (3.2.6a)$$

II)

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \text{ for } x = 0, \quad \theta = 1 \text{ for } x = 1 \quad (3.2.6b)$$

Randbetingelsene i (3.2.6) gir følgende uttrykk for temperatur og temperaturgradient:

I)

$$\theta(x) = \frac{\sinh(\beta x)}{\sinh(\beta)}, \quad \frac{d\theta}{dx} = \beta \cdot \frac{\cosh(\beta x)}{\sinh(\beta)} \quad (3.2.7a)$$

II)

$$\theta(x) = \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta)}, \quad \frac{d\theta}{dx} = \beta \cdot \frac{\sinh(\beta x)}{\cosh(\beta)} \quad (3.2.7b)$$

For eksemplet ovenfor blir Biot-tallet:

$$\beta^2 = \frac{\bar{h}P}{kA} \cdot L^2 = \frac{2}{D} \cdot L^2, \quad L \text{ og } D \text{ i meter} \quad (3.2.8)$$

Men  $D = 0.02m$  og  $L = 0.2m$  blir f.eks.  $\beta^2 = 4$ . En fordobling av lengden gir en 4-dobling av Biot-tallet.

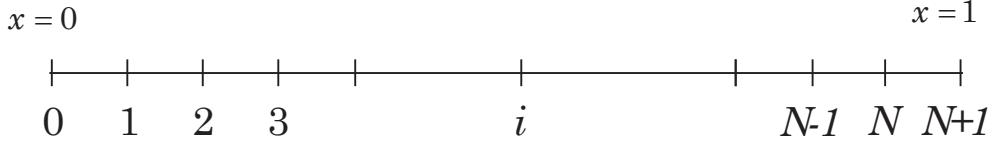
### Numerisk løsning

Vi bruker sentraldifferanser for  $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ , og med  $\frac{d^2\theta}{dx^2}\Big|_i \approx \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{h^2}$  får vi følgende differanseligning:

$$\theta_{i-1} - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_i + \theta_{i+1} = 0 \quad (3.2.9)$$

### Tilfelle 1

Vi nummererer punktene som vist på figur 3.2:



Figur 3.2

x-koordinatene er her gitt ved:  $x_i = i \cdot h$ ,  $i = 0, 1, \dots, N + 1$  der  $h = \frac{1}{N+1}$ .

Ligning (3.2.9) utskrevet for  $i = 1$ :

$$\theta_0 - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_1 + \theta_2 = 0 \rightarrow (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_1 + \theta_2 = 0$$

$$\text{da } \theta(0) = \theta_0 = 0$$

Ligning (3.2.9) utskrevet for  $i = N$ :

$$\theta_{N-1} - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_N + \theta_{N+1} = 0$$

som med  $\theta_{N+1} = 1$  gir:

$$\theta_{N-1} - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_N = -1$$

Fullstendig ligningsett:

$$\begin{aligned} i = 1 : & -(2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_1 + \theta_2 = 0 \\ i = 2, 3, \dots, N-1 : & \theta_{i-1} - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_i + \theta_{i+1} = 0 \\ i = N : & \theta_{N-1} - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_N = -1 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

I appendiks A, del A.5, eksempel A.15, er dette systemet behandlet mer inngående.

Ved å sammenligne med (3.1.1), får vi følgende sett med koeffisienter:

$$a_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.2.11a)$$

$$b_i = -(2 + \beta^2 h^2), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.11b)$$

$$c_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.11c)$$

$$d_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad d_N = -1 \quad (3.2.11d)$$

Programmet **ribbe1** nedenfor bruker koeffisientene i (3.2.11) og løser systemet med bruk av **tdma**. Den analytiske løsningen er gitt i (3.2.7a). Minner om at **tdma** ikke bruker  $a_1$  og  $c_N$ .

```

beta = 2;
h = 0.1;
n = round(1.0/h) - 1; % no. of equations
a = ones(n,1); % subdiagonal
b = -(2 + (beta*h)^2)*a; % main diagonal
c = a; % superdiagonal
d = zeros(n,1); % right hand side
d(n) = -1;
thet = tdma(a,b,c,d);
thet = [0;thet; 1];
% analytical solution
xa = (0: h: 1.0)';
theta = sinh(beta*xa)/sinh(beta);
fprintf(' x theta analyt \n');
fprintf('%4.2f %9.5f %9.5f \n',[xa thet theta]);

```

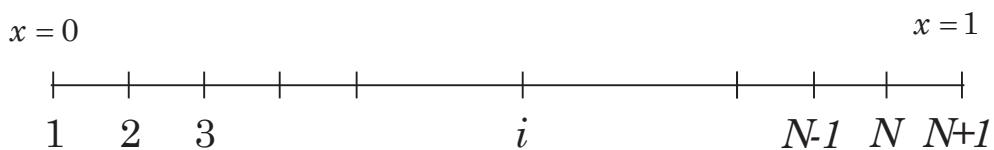
Resultatet fra programmet er gitt i tabellen nedenfor.

x	numerisk	analytisk	rel. feil
0.0	0.00000	0.00000	
0.1	0.05561	0.05551	0.00176
0.2	0.11344	0.11325	0.00170
0.3	0.17582	0.17554	0.00159
0.4	0.24522	0.24487	0.00144
0.5	0.32444	0.32403	0.00126
0.6	0.41663	0.41619	0.00105
0.7	0.52548	0.52506	0.00082
0.8	0.65536	0.65499	0.00056
0.9	0.81145	0.81122	0.00029
1.0	1.00000	1.00000	0.00000

Tabell 3.1

### Tilfelle 2. Versjon 1

Vi nummererer nå punktene som vist på fig. 3.3. Årsaken er at programmet **tdma** venter at den første ukjente har nummer 1, og her er det temperaturen i  $x = 0$  som er den første ukjente, mens vi i tilfelle 1 hadde den første ukjente for  $x = h$ . (Det er egenlig ikke nødvendig å omnummerere)



Figur 3.3

x-koordinatene er nå gitt ved:  $x_i = (i - 1) \cdot h$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + 1$  der  $h = \frac{1}{N}$   
Bruker her sentraldifferanser for  $\frac{d\theta}{dx}$  i forbindelse med randbetingelsen  $x = 0$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_i \approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} \quad (3.2.12)$$

Da  $\frac{d\theta_1}{dx_1} = 0$ :  $\frac{\theta_2 - \theta_0}{2h} = 0 \rightarrow \theta_0 = \theta_2$  som insatt i (3.2.9) gir:

$$-(2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_1 + 2\theta_2 = 0$$

Dette er den første ligningen i settet og er den eneste som er forskjellig fra (3.2.10). Istedentfor (3.2.11c), får vi nå:

$$c_1 = 2, c_i = 1, i = 2, \dots, N - 1 \quad (3.2.13)$$

### Tilfelle 2. Versjon 2

Istedentfor sentraldifferanser, bruker vi foroverdifferanser gitt ved lign. (3.2.9) i kap. 1 for den deriverte:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_i \approx \frac{-3\theta_i + 4\theta_{i+1} - \theta_{i+2}}{2h} \quad (3.2.14)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_1 = \frac{-3\theta_1 + 4\theta_2 - \theta_3}{2h} = 0$$

som videre gir:  $-3\theta_1 + 4\theta_2 - \theta_3 = 0 \rightarrow \theta_3 = 4\theta_2 - 3\theta_1$

Differanseligningen (3.2.9) utskrevet for  $i = 2$ :

$$\theta_1 - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_2 + \theta_3 = 0$$

innsatt for  $\theta_3$ :

$$\theta_1 - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_2 + 4\theta_2 - 3\theta_1 = 0 \rightarrow$$

$$2\theta_1 - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_2 = 0 \quad (3.2.15)$$

Dette er den første ligningen i settet og er den eneste som er forskjellig fra (3.2.10). Istedentfor (3.2.11b) og (3.2.11c), får vi nå:

$$b_1 = 2, b_i = (2 + \beta^2 h^2), i = 2, \dots, N \quad (3.2.16a)$$

$$c_1 = -(2 + \beta^2 h^2), c_i = 1, i = 2, \dots, N - 1 \quad (3.2.16b)$$

For oversiktens skyld skriver vi opp hele settet:

$$\begin{aligned} i = 1 : & 2\theta_1 - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_2 = 0 \\ i = 2, 3, \dots, N - 1 : & \theta_{i-1} - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_i + \theta_{i+1} = 0 \\ i = N : & \theta_{N-1} - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_N = -1 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Legg merke til at vi her måtte kombinere uttrykket for den deriverte med differanseligningen for å få en tridiagonal koeffisientmatrise. Løser de to versjonene med  $\beta = 2$  og  $h = 0.1$ . Nedenfor er listing av programmet **ribbe22** som løser (3.2.17).

```

clear
beta = 2;
h = 0.1;
n = round(1.0/h); % no. of equations
a = ones(n,1); % subdiagonal
bfac = (beta*h)^2;
b = -(2 + bfac)*a; % main diagonal
b(1) = 2;
c = a; % superdiagonal
c(1) = -(2.0 - bfac);
d = zeros(n,1); % right hand side
d(n) = -1;
thet = tdma(a,b,c,d);
thet = [thet; 1];
% analytical solution
xa = (0: h: 1.0)';
theta = cosh(beta*xa)/cosh(beta);
fprintf(' x theta analyt \n');
fprintf('%4.2f %9.5f %9.5f \n',[xa thet theta]);

```

Den relative feilen er beregnet fra  $\varepsilon_{rel} = |(\theta_{num} - \theta_{analyt})/\theta_{analyt}|$ . Resultatet av beregningen er gitt i tabell 3.2:

x	Analyt.	Sentr.diff	Rel. feil	Forov.diff	Rel. feil
0.0	0.26580	0.26665	0.00320	0.26613	0.00124
0.1	0.27114	0.27199	0.00314	0.27156	0.00158
0.2	0.28735	0.28820	0.00295	0.28786	0.00176
0.3	0.31510	0.31594	0.00267	0.31567	0.00180
0.4	0.35549	0.35632	0.00232	0.35610	0.00171
0.5	0.41015	0.41095	0.00194	0.41078	0.00153
0.6	0.48128	0.48202	0.00154	0.48189	0.00128
0.7	0.57171	0.57237	0.00114	0.57228	0.00098
0.8	0.68510	0.68561	0.00075	0.68555	0.00067
0.9	0.82597	0.82628	0.00037	0.82625	0.00034
1.0	1.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000

Tabell 3.2

Vi ser at de to uttrykkene for den deriverte randbetingelsen gir omtrent samme nøyaktighet unntatt nær  $x = 0$ , der foroverdifferansene er en del bedre. I avsnitt 3.6 ser vi nærmere på nøyaktigheten av deriverte randbetingelser.

Istedenfor nummereringen i fig. 3.3, kan vi bruke nummereringen i fig. 3.2 med  $x_i = i \cdot h$ ,  $i = 0, 1, \dots, N+1$  der  $h = \frac{1}{N+1}$  slik at vi med å sette  $i = 1$  i (3.2.9) får:

$$\theta_0 - (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_1 + \theta_2 = 0$$

Randbetingelsen i (3.2.14) blir nå:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_0 = \frac{-3\theta_0 + 4\theta_1 - \theta_2}{2h} = 0$$

som gir:

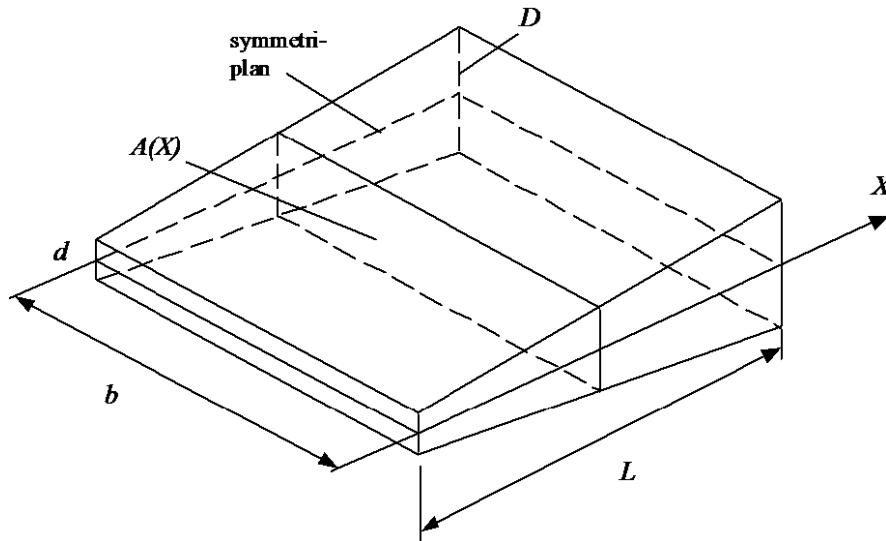
$$\theta_0 = 4(\theta_1 - \theta_2)/3 \quad (3.2.18)$$

som innsatt ovenfor gir ligning nr. 1:

$$-(2 + 3\beta^2 h^2) \cdot \theta_1 + 2\theta_2 = 0 \quad (3.2.19)$$

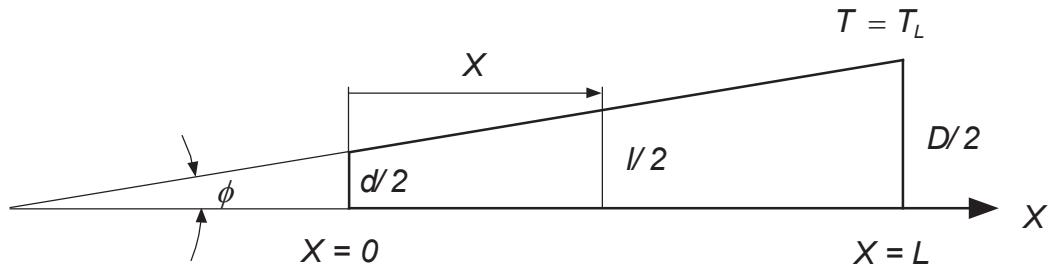
Etter at systemet er løst, beregnes  $\theta_0$  fra (3.2.18). (se program **ribbe23**)

### 3.2.2 RIBBE MED VARIABELT TVERRSNITT



Figur 3.4

Figur 3.4 viser en trapesformet kjøleribbe med lengde  $L$  og bredde  $b$ . Tykkelsen varierer fra  $d$  for  $X = 0$  til  $D$  for  $X = L$ . Ribba har varmetap for  $X = 0$  og har en gitt temperatur  $T_L$  for  $X = L$ . Omgivelsestemperaturen er konstant lik  $T_\infty$ .



Figur 3.5

Figur 3.5 viser øvre halvpart av ribba. Av denne figuren finner vi følgende relasjon:

$$\tan(\phi) = \frac{D/2 - d/2}{L} = \frac{l/2 - d/2}{X}$$

som løst m.h.p.  $l$  gir:

$$l = d + \left( \frac{D-d}{L} \right) \cdot X = D \cdot \left[ \frac{d}{D} + \left( 1 - \frac{d}{D} \right) \cdot \frac{X}{L} \right] \quad (3.2.20)$$

Vi forutsetter at temperaturen varierer hovedsakelig i  $X$ -retning slik at utledningen i appendiks B kan brukes. Antar derfor at  $D$  er liten,  $D \ll L$  samt

$$0 < \frac{d}{D} < 1 .$$

Fra appendiks B, lign. (B.0.22):

$$\frac{d}{dX} \left[ A(X) \cdot \frac{d(T - T_\infty)}{dX} \right] = \frac{\bar{h}P(X)}{k}(T - T_\infty) \quad (3.2.21a)$$

randbetingelser:

$$\frac{dT(0)}{dX} = \frac{\bar{h}_0}{k}[T(0) - T_\infty] , \quad T(L) = T_L \quad (3.2.21b)$$

For trapezverrsnittet i fig. 3.4:

$$P(X) = 2(b + l) \approx 2b \text{ for } l \ll b \text{ og } A(X) = b \cdot l$$

Innfører følgende dimensjonsløse størrelser:

$$\begin{aligned} \text{Temperatur } \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_L - T_\infty} , \text{ lengde } x = \frac{X}{L} , \quad \alpha = \frac{d}{D} , \quad 0 < \alpha < 1 \text{ samt} \\ \text{Biot-tallene } \beta^2 &= \frac{2\bar{h} \cdot L^2}{D \cdot k} \text{ og } \beta_0^2 = \frac{\bar{h}_0}{k} \cdot L \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Med bruk av disse dimensjonsløse størrelsene kan (3.2.21) skrives:

$$\frac{d}{dx} \left[ \{\alpha + (1 - \alpha) \cdot x\} \frac{d\theta(x)}{dx} \right] - \beta^2 \theta(x) = 0 \quad (3.2.23a)$$

med randbetingelser:

$$\frac{d\theta}{dx}(0) = \beta_0^2 \cdot \theta(0) , \quad \theta(1) = 1 \quad (3.2.23b)$$

Når  $d = 0$  som betyr  $\alpha = 0$ , går trapesprofilen over til et trekantprofil.

Lign. (3.2.23) blir nå:

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - \beta^2 \theta(x) = 0 \quad (3.2.24a)$$

For  $x = 0$ :

$$\frac{d\theta}{dx}(0) - \beta^2 \theta(0) = 0 \quad (3.2.24b)$$

Den analytiske løsningen av (3.2.23) og (3.2.24) er gitt i appendiks G, del G.5.

### Eksempel 3.1 Talleksempel for trapesprofilen.

$$\begin{aligned} L &= 0.1m, \quad D = 0.01m, \quad d = 0.005m, \quad \bar{h} = 80W/m^2/\text{°C}, \quad \bar{h}_0 = \\ &200W/m^2/\text{°C}, \text{ og } k = 40W/m/\text{°C} \text{ som gir } \beta^2 = 4.0 , \quad \alpha = \frac{1}{2} \text{ og } \beta_0^2 = 0.5 \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

(3.2.23) blir nå:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1+x) \cdot \frac{d\theta}{dx} \right] - 8 \cdot \theta(x) = 0 \quad (3.2.26)$$

Et Matlab-program som beregner temperaturen  $\theta$  samt gradienten  $\theta'$  for den analytiske løsningen, der  $x$  går fra 0 til 1 med skritt  $\Delta x = 0.1$ , er gitt i appendiks G, del G.5.

Programmet gir følgende tabell:

x	$\theta(x)$	$\theta'(x)$
0.00	0.18069	0.09034
0.10	0.19623	0.21842
0.20	0.22415	0.33967
0.30	0.26424	0.46318
0.40	0.31708	0.59556
0.50	0.38383	0.74211
0.60	0.46614	0.90754
0.70	0.56611	1.09629
0.80	0.68632	1.31291
0.90	0.82978	1.56211
1.00	1.00000	1.84901

### Numerisk løsning av homogent trapesprofil

Vi vil nå løse lign. (3.2.26) numerisk med bruk av sentraldifferanser

$$(1+x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - 8 \cdot \theta(x) = 0 \quad (3.2.27a)$$

med randbetingelser:

$$\frac{d\theta}{dx}(0) = \beta_0^2 \cdot \theta(0) = \frac{\theta(0)}{2}, \quad \theta(1) = 1 \quad (3.2.27b)$$

Fremgangsmåten blir som for tilfelle 2, versjon 2, avsnitt 3.2.1 med samme nummerering.



Figur 3.6

x-koordinatene er gitt ved:  $x_i = (i - 1) \cdot h$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + 1$  der  $h = \frac{1}{N}$ .

Diskretisering:

$$(1 + x_i) \cdot \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} + \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} - 8\theta_i = 0$$

som ordnet blir:

$$-(1 - \gamma_i) \cdot \theta_{i-1} + 2 \cdot (1 + 8h \cdot \gamma_i) \cdot \theta_i - (1 + \gamma_i) \cdot \theta_{i+1} = 0 \quad (3.2.28a)$$

$$\text{der } \gamma_i = \frac{h}{2(1 + x_i)} = \frac{h}{2[1 + (i - 1) \cdot h]}, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (3.2.28b)$$

For randbetingelsen i (3.2.27b) får vi:

$$\frac{\theta_2 - \theta_0}{2h} = \frac{\theta_1}{2} \rightarrow \theta_0 = \theta_2 - \theta_1 \cdot h \text{ som innsatt i (3.2.28) for } i = 1 \text{ gir:}$$

$$[2 + h \cdot (1 + 15 \cdot \gamma_1)] \cdot \theta_1 - 2\theta_2 = 0 \quad (3.2.29a)$$

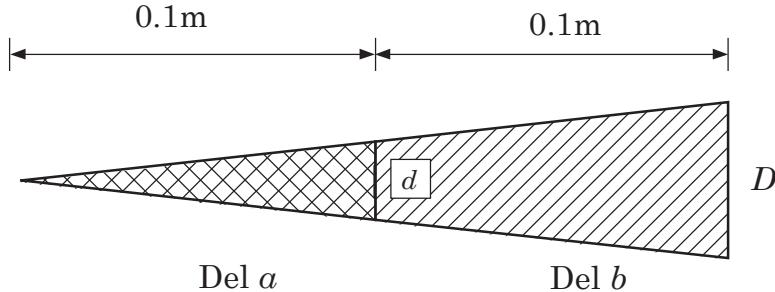
For  $i = N$ :

$$-(1 - \gamma_N) \cdot \theta_{N-1} + 2 \cdot (1 + 8h \cdot \gamma_N) \cdot \theta_N = 1 + \gamma_N \quad (3.2.29b)$$

For  $i = 2, 3, \dots, N - 1$  bruker vi (3.2.28). Vi har da et tridiagonalt ligningsett som kan løses med Thomas-algoritmen. Tabellen nedenfor viser beregningene med to forskjellige verdier av  $h$ . Vi ser at feilen er 100 ganger mindre for  $h = 0.01$  enn for  $h = 0.1$  som betyr at feilen er av  $O(h^2)$ ; i overenstemmelse med teorien. Den relative feilen er beregnet fra  $|(\theta_{numerisk} - \theta_{analytisk})/\theta_{analytisk}|$

$h = 0.1$			$h = 0.01$		
x	$\theta(x)$	rel. feil	x	$\theta(x)$	rel. feil
0.0	0.18054	8.000E-4	0.0	0.18069	4.866E-6
0.1	0.19634	5.619E-4	0.1	0.19623	1.010E-5
0.2	0.22442	1.224E-3	0.2	0.22415	1.669E-5
0.3	0.26462	1.436E-3	0.3	0.264259	1.703E-5
0.4	0.31752	1.394E-3	0.4	0.31709	1.325E-5
0.5	0.38430	1.222E-3	0.5	0.38383	9.861E-6
0.6	0.46660	9.910E-4	0.6	0.46614	6.393E-6
0.7	0.56653	7.385E-4	0.7	0.56611	2.737E-6
0.8	0.68665	4.838E-4	0.8	0.68632	4.342E-7
0.9	0.82998	2.364E-4	0.9	0.82978	1.508E-6
1.0	1.00000	0	1.0	1.00000	0

### Numerisk løsning av sammensatt trekantprofil



Figur 3.7

Figur 3.7 viser en trekantformet kjøleribbe sammensatt av en trekant (del a) og et trapes (del b) der del a og b er laget av forskjellige materialer. Hensikten med dette tilfellet er å vise hvordan vi kan behandle diskontinuiteter. Her er temperaturen kontinuerlig, mens temperaturgradienten er diskontinuerlig på grenseflata mellom de to delene p.g.a. forskjellige verdier for varmeledningstallene. Fra appendiks B:

$$-dQ_x = P \cdot h \cdot [T(X) - T_\infty] \cdot dX \text{ der } Q_x = -kA \frac{dT}{dX}$$

For  $dX \rightarrow 0$  får vi da  $dQ \rightarrow 0 \Rightarrow Q = \text{konstant}$  som betyr at på grenseflata mellom de to legemene gjelder følgende relasjon:

$$Q_a = Q_b \Rightarrow k_a A_a \left( \frac{dT}{dX} \right)_a = k_b A_b \left( \frac{dT}{dX} \right)_b \quad (3.2.30)$$

Da  $A_a = A_b$  på grenseflata, følger:  $\left( \frac{dT}{dX} \right)_b = \frac{k_a}{k_b} \left( \frac{dT}{dX} \right)_a$  som på dimensjonsløs form (med bruk av (3.2.22)) blir:

$$\left( \frac{d\theta}{dx} \right)_b = \frac{k_a}{k_b} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_a \quad (3.2.31)$$

Bruker følgende tallverdier:

$$L = 0.2m, D = 0.02m, d = 0.01m, \bar{h}_a = \bar{h}_b = 80W/m^2/\text{°C}, \quad (3.2.32)$$

$$k_a = 160W/m/\text{°C} \text{ og } k_b = 40W/m/\text{°C}$$

Med disse tallverdiene blir (3.2.31):

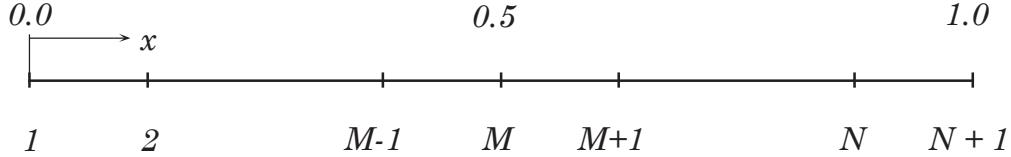
$$\left( \frac{d\theta}{dx} \right)_b = 4 \cdot \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_a \quad (3.2.33)$$

Differensiellaligning:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\beta^2} \frac{d\theta}{dx} \right) - \theta(x) = 0 \quad (3.2.34a)$$

$$\beta^2 = \frac{2\bar{h} \cdot L^2}{D \cdot k} \text{ som gir } \beta_a^2 = 2.0 \text{ og } \beta_b^2 = 8.0 \quad (3.2.34b)$$

Ved å skrive (3.2.34) på den viste formen, har vi oppnådd kontinuiteten i (3.2.30)



Figur 3.8

Med henvisning til figur 3.8 bruker vi følgende nummerering:

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1) \cdot h, \quad i = 1, 2, \dots, N+1 \text{ der } h = \frac{1}{N} \\ M &= \frac{N}{2} + 1 \text{ der } N \text{ er et partall og } x_M = 0.5 \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Med  $k = k_a$  for  $i = M$  får vi at  $\beta = \beta_a$  for  $i = 1, 2, \dots, M$  og  $\beta = \beta_b$  for  $i > M$ . For  $i \neq M$  kan vi skrive (3.2.34)

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{d\theta}{dx} \right) - \beta^2 \cdot \theta(x) = 0 \quad (3.2.36)$$

Diskretiserer (3.2.36) med bruk av (1.2.10) i kap. 1:

$$-x_{i-\frac{1}{2}} \cdot \theta_{i-1} + (x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}} + \beta^2 h^2) \cdot \theta_i - x_{i+\frac{1}{2}} \cdot \theta_{i+1} = 0$$

Innsatt for  $x_{i-\frac{1}{2}} = (i - \frac{3}{2}) \cdot h$  og  $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2}) \cdot h$  får vi:

$$\left( i - \frac{3}{2} \right) \cdot \theta_{i-1} + [2(i-1) + \beta^2 h] \cdot \theta_i - \left( i + \frac{1}{2} \right) \cdot \theta_{i+1} = 0$$

eller dividert med  $i$ :

$$-\left( 1 - \frac{3}{2i} \right) \cdot \theta_{i-1} + \left[ 2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{i} \right) + \frac{\beta^2 h}{i} \right] \cdot \theta_i - \left( 1 + \frac{1}{2i} \right) \cdot \theta_{i+1} = 0 \quad (3.2.37)$$

(3.2.37) brukes for alle verdier av  $i = 2, 3, \dots, N$  unntatt for  $i = M = N/2 + 1$

### For $i = 1$

Fra (3.2.24b) får vi for randbetingelsen for  $x = 0$ :

$$\frac{d\theta}{dx}(0) = \beta_a^2 \cdot \theta(0) \rightarrow \frac{-3\theta_1 + 4\theta_2 - \theta_3}{2h} = \beta_a^2 \cdot \theta_1 \text{ hvor vi har benyttet tabell 1.1}$$

Dette gir:

$$\theta_3 = 4\theta_2 - (3 + 2h\beta_a^2) \cdot \theta_1 \quad (3.2.38)$$

Skriver ut (3.2.37) for  $i = 2$ :

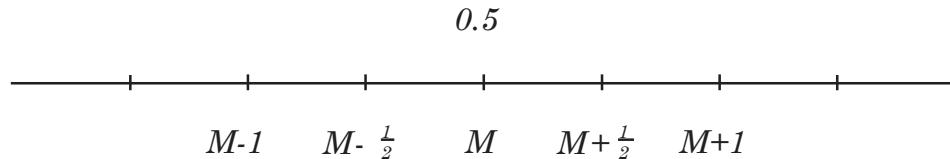
$$-\left( 1 - \frac{3}{4} \right) \cdot \theta_1 + \left[ 2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta_a^2 h}{2} \right] \cdot \theta_2 - \left( 1 + \frac{1}{4} \right) \cdot \theta_3$$

som innsatt fra (3.2.34b) og (3.2.38) gir:

$$\left(1 + \frac{3h}{2}\right) \cdot \theta_1 - \left(1 - \frac{h}{2}\right) \cdot \theta_2 = 0 \quad (3.2.39)$$

Dette er den første ligningen .

**For  $i = M$ .**



Figur 3.9

Her bruker vi ligningen på formen gitt i (3.2.34) som diskretisert med bruk av (1.2.10) fra kap. 1 gir:

$$\begin{aligned} \beta_{M-\frac{1}{2}}^2 &= \beta_a^2 = 2.0, \quad \beta_{M+\frac{1}{2}}^2 = \beta_b^2 = 8.0 \\ x_{M-\frac{1}{2}} &= \frac{h}{2}(N-1) = \frac{(1-h)}{2}, \quad x_{M+\frac{1}{2}} = \frac{h}{2}(N+1) = \frac{(1+h)}{2} \end{aligned}$$

som gir:

$$-4 \cdot (1-h) \cdot \theta_{M-1} + [5 - 3h + 16h^2] \cdot \theta_M - (1+h) \cdot \theta_{M+1} = 0 \quad (3.2.40)$$

**For  $i = N$**  kan vi bruke (3.2.37) med  $\beta^2 = \beta_b^2 = 8.0$ :

$$-\left(1 - \frac{3h}{2}\right) \cdot \theta_{N-1} + 2 \cdot [(1-h) + 4h^2] \cdot \theta_N = \left(1 - \frac{h}{2}\right) \quad (3.2.41)$$

Ligning (3.2.39)–(3.2.41) er et lineært ligningsystem på tridiagonal form som kan løses med Thomasalgoritmen. I tillegg til temperaturen ønsker vi også å beregne temperaturgradienten  $\theta'(x)$ . For  $x = 0$  bruker vi (3.2.24b) og sprang-verdien  $\frac{d\theta}{dx}(0.5+) \equiv (\frac{d\theta}{dx})_b$  finnes fra (3.2.33). De andre verdiene beregnes med vanlige sentraldifferanser, med 2. ordens bakoverdifferanser for  $x = 0.5$  og  $x = 1.0$ . La oss se på bruken av differensial-ligningen som et alternativ.

Vi integrerer (3.2.36):

$$\frac{d\theta_i}{dx} = \frac{\beta^2}{x_i} \int_{x_1}^{x_i} \theta(x) dx, \quad i = 2, 3, \dots, N+1 \quad (3.2.42)$$

Integralet  $I = \int_{x_1}^{x_i} \theta(x) dx$  beregnes f.eks ved bruk av trapesmetoden. Beregningen av (3.2.42) er vist i pseudo-kode nedenfor:

$$\begin{aligned}
 \theta'_1 &:= \beta_a^2 \cdot \theta_1 \\
 s &:= 0 \\
 \text{Utfør for } i &:= 2, \dots, N+1 \\
 x &:= h \cdot (i-1) \\
 s &:= s + 0.5h \cdot (\theta_i + \theta_{i-1})
 \end{aligned}$$

Dersom ( $i \leq M$ ) sett  $\theta'_i := \frac{\beta_a^2 \cdot s}{x}$  ellers  $\theta'_i := \frac{\beta_b^2 \cdot s}{x}$

I tabellen på neste side har vi brukt (3.2.42) og trapesmetoden. I dette tilfellet er nøyaktigheten av de to metodene for beregning av  $\theta'(x)$  temmelig sammenfallende da både  $\theta$  og  $\theta'$  er glatte funksjoner (bortsett fra  $x = 0.5$ ), men generelt vil integrasjonsmetoden gjerne være mer nøyaktig dersom det er diskontinuiteter.

x	$\theta(x)$	rel. feil	$\theta'(x)$	rel. feil
0.00	0.08007	1.371E-4	0.16014	1.312E-4
0.10	0.09690	1.341E-4	0.17670	1.302E-4
0.20	0.11545	1.386E-4	0.19438	1.286E-4
0.30	0.13582	1.252E-4	0.21324	1.360E-4
0.40	0.15814	1.265E-4	0.23333	1.329E-4
0.45	0.17007	1.294E-4	0.24387	1.312E-4
0.5-	0.18253	1.260E-4	0.25472	1.021E-4
0.5+	0.18253	1.260E-4	1.01889	1.021E-4
0.55	0.23482	5.962E-5	1.07785	1.067E-4
0.60	0.29073	5.848E-5	1.16297	9.202E-5
0.70	0.41815	3.348E-5	1.39964	7.288E-5
0.80	0.57334	1.744E-5	1.71778	5.938E-5
0.90	0.76442	7.849E-6	2.11851	4.862E-5
1.00	1.00000	0.0	2.60867	1.526E-4

Tabell 3.3: Løsning av lign. (3.2.34) med  $h = 0.01$

### 3.3 TO-PUNKTSMETODE . VARMEVEKSLER.

Et system av  $p$  første ordens differensialligninger kan skrives:

$$y'_i(x) = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Dersom randverdiene er foreskrevet for  $x = a$  og  $x = b$ , kan vi skrive randverdiproblemet på vektorform:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad (3.3.1a)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(a) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}(b) = \mathbf{c} \quad (3.3.1b)$$

der  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  er  $p \times p$  - matriser.

Randbetingelsene må være lineære, dvs. elementene i  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  er konstanter, dersom de skal kunne skrives på formen i (3.3.1b). Det eksisterer selvfølgelig mer generelle randbetingelser; f.eks:  $\mathbf{g}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0$ , men (3.3.1b) dekker en lang rekke tilfeller.

#### Eksempel 3.2

Fra lign.(3.2.4) og (3.2.6):

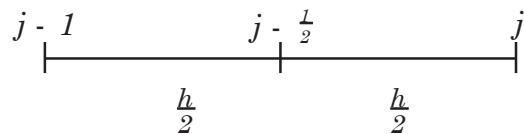
$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta^2\theta(x) &= 0 \\ \theta'(0) &= 0, \quad \theta(1) = 1 \end{aligned}$$

Med notasjonen i (3.3.1) kan dette systemet skrives:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= \beta^2 y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi diskretiserer (3.3.1) med bruk av sentraldifferanser. Da (3.3.1) er et sett av 1. ordens ligninger, velger vi å utvikle differanseutrykkene halveis mellom to punkt ; i dette tilfellet rundt  $x_{j-\frac{1}{2}}$  som vist på figur 3.10.



Figur 3.10

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} \Big|_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1}}{h} + O(h^2), \quad \mathbf{y}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j-1}) + O(h^2) \quad (3.3.2)$$

(3.3.2) brukt i (3.3.1) gir:

$$\frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1}}{h} - \mathbf{f}\left(x_{j-\frac{1}{2}}, \frac{\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j-1}}{h}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.3.3a)$$

med randbetingelser:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}_0 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}_N = \mathbf{c} \quad (3.3.3b)$$

Notasjon:

$$x_j = a + j \cdot h, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N} \quad (3.3.3c)$$

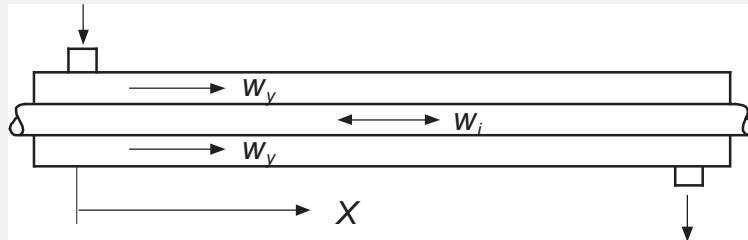
Med denne diskretiseringen kan det vises at følgende relasjon gjelder:

$$\mathbf{y}(x_j) = \mathbf{y}_j(h) + h^2 \mathbf{e}(x_j) + O(h^4), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.3.4)$$

Her er  $\mathbf{y}_j(h)$  de diskretiserte verdiene ved skritt lengden  $h$  og  $\mathbf{e}(x_j)$  er en funksjon som kan relateres til den gitte differensialligningen. (Bevis for de forskjellige teoremmene kan finnes i Keller [8], kapittel 3).

På denne måten får vi bare to forskjellige indekser i hver ligning; derav navnet to-punktsmetoden. Den vesentlige fordelen med denne metoden er normalt i forbindelse med randbetingelsene. En mindre bakdel er at vi selv for 2. ordens differensialligninger må bruke en generalisert versjon av Thomas-algoritmen, men disse generaliserte versjonene er også effektive. Utvider vi to-punktsmetoden til flere dimensjoner/tidsvariasjon, kalles metoden for en boksmetode. De mest kjente av disse er Kellers boksmetode i grensjikt-teori og Preismanns metode i kanalstrømning. (Wendroffs metode i avsnitt 6.7 er et spesialtilfelle av Preismanns metode). Vi skal nå bruke (6.7.3) på et system av to ligninger der ligningene allerede i utgangspunktet er på formen gitt i (6.7.1).

### Eksempel 3.3 Varmeveksler



Figur 3.11

Figur 3.11 viser en varmeveksler som er modellert som to rør. I det ytre røret foregår strømningen fra venstre mot høyre med konstant hastighet  $w_y$

og i det indre røret har vi en strømning med konstant hastighet  $w_i$ . Vi har likestrøm når  $w_i$  er rettet mot høyre mens vi har motstrøm når  $w_i$  er rettet mot venstre. Temperaturen i det ytre og det indre røret betegnes henholdsvis  $T_y$  og  $T_i$ . Vi regner det ytre røret så godt isolert at et eventuelt varmetap til omgivelsene kan neglisjeres.

Noen betegnelser: (Indeks  $i$  henviser til det indre røret)

Rørlengde:	$L$	[m]
Lengdekoordinat:	$X$	[m]
Rørdiameter:	$d_i$	[m]
Areal av rørtverrsnitt:	$A_i = \pi \cdot d_i^2 / 4$	[ $m^2$ ]
Omkrets av indre rør:	$P = \pi \cdot d_i$	[m]
Tetthet av medium:	$\rho_i$	[ $kg/m^3$ ]
Massestrøm:	$\dot{m}_i = \rho_i A_i w_i$	[ $kg/s$ ]
Totalt varmeovergangstall:	$\bar{h}$	[ $W/m^2/\text{ }^\circ C$ ]
Egenvarme:	$c_i$	[ $J/kg/\text{ }^\circ C$ ]
Varmestrøm:	$\dot{Q}_i = \dot{m}_i c_i T_i$	[W]

For de indekserte størrelsene (3.3.5) har vi tilsvarende med indeks  $y$  for det ytre røret.  $\dot{Q}_{yi}$  er varmestrømmen til det indre røret fra det ytre:

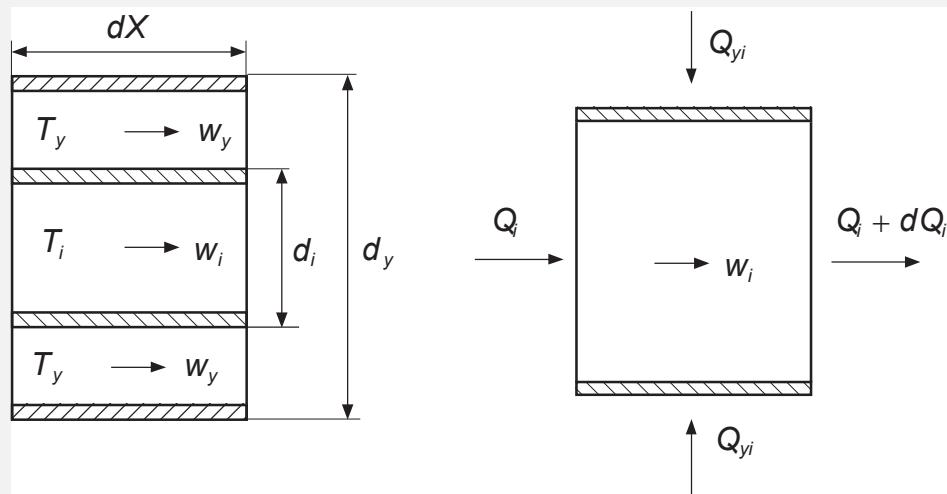
Med henvisning til figur 3.12:

$$\dot{Q}_{yi} = \bar{h} P \cdot dX [T_y(X) - T_i(X)] \quad (3.3.6)$$

Varmebalansen for det indre røret:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \dot{Q}_i + d\dot{Q}_i - \dot{Q}_{yi} \text{ som gir:} \\ d\dot{Q}_i &= \dot{Q}_{yi} = -d\dot{Q}_y \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

hvor vi har benyttet oss av at vi ikke har noe varmetap til omgivelsene.



Figur 3.12

(3.3.5) - (3.3.7) gir:

$$\dot{m}_i c_i dT_i(X) = \bar{h} P \cdot dX [T_y(X) - T_i(X)] = -\dot{m}_y c_y dT_y(X) \quad (3.3.8)$$

Fra (3.3.8) får vi følgende ligninger:

$$dT_y(X) = -\frac{\bar{h}P}{\dot{m}_y c_y} [T_y(X) - T_i(X)] \cdot dX \quad (3.3.9a)$$

$$dT_i(X) = \frac{\bar{h}P}{\dot{m}_i c_i} [T_y(X) - T_i(X)] \cdot dX \quad (3.3.9b)$$

Vi innfører nå dimensjonsløse størrelser. Lar  $T_{ir}$  og  $T_{yr}$  være referanse- temperaturer som kan gis passende verdier i konkrete tilfeller. De dimensjons-løse temperaturene i ytre og indre rør betegnes nå henholdsvis  $u$  og  $v$ .

$$\text{Temperatur ytre rør: } u = \frac{T_y - T_{yr}}{T_{ir} - T_{yr}} \quad (3.3.10a)$$

$$\text{Temperatur indre rør: } v = \frac{T_i - T_{yr}}{T_{ir} - T_{yr}} \quad (3.3.10b)$$

$$\text{Lengde: } x = \frac{X}{L} \quad (3.3.10c)$$

$$\alpha_y = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_y c_y} = \frac{\bar{h}PL}{\rho_y A_y w_y c_y} \quad (3.3.10d)$$

Koeffisienter:

$$\alpha_i = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_i c_i} = \frac{\bar{h}PL}{\rho_i A_i w_i c_i}$$

(3.3.10) innsatt i (3.3.9) gir følgende system:

$$\text{Ytre rør: } \frac{du}{dx} = -\alpha_y(u - v) \quad (3.3.11a)$$

$$\text{Indre rør: } \frac{dv}{dx} = \pm \alpha_i(u - v) \quad (3.3.11b)$$

Vi har skrevet  $\pm$  foran ledet på høyre side i (3.3.11b) der pluss-tegnet gjelder for strømningsretningen som vist på figur 3.12, mens negativt fortegn gjelder når  $w_i$  skifter retning (motstrøm). Det er underforstått at  $u$  og  $v$  er funksjoner av  $x$  slik at vi slipper å skrive  $u(x)$  og  $v(x)$ .

### Analytisk løsning

Dersom vi kjenner temperaturen for en gitt x-verdi både i det ytre og indre røret, kan vi løse (3.3.11) analytisk.

Ved subtraksjon:

$$-\frac{d}{dx}(u - v) = (\alpha_y \pm \alpha_i) \cdot (u - v)$$

Innfører temperaturdifferansen

$$\theta = u - v \quad (3.3.12)$$

slik at vi får ligningen  $-\frac{d\theta}{dx} = (\alpha_y \pm \alpha_i) \cdot \theta$  med løsning:

$$\theta(x) = \theta_0 \cdot e^{-(\alpha_y \pm \alpha_i) \cdot x}, \text{ der } \theta_0 = \theta(0) \quad (3.3.13)$$

Får da følgende løsning for  $u$  og  $v$ :

$$u(x) = u_0 - \theta_0 \cdot \left[ \frac{\alpha_y}{\alpha_y \pm \alpha_i} \right] \cdot \left[ 1 - e^{-(\alpha_y \pm \alpha_i) \cdot x} \right] \quad (3.3.14a)$$

$$v(x) = v_0 + \theta_0 \cdot \left[ \frac{\alpha_i}{\alpha_y \pm \alpha_i} \right] \cdot \left[ 1 - e^{-(\alpha_y \pm \alpha_i) \cdot x} \right] \quad (3.3.14b)$$

Her er  $u_0 = u(0)$  og  $v_0 = v(0)$ . Dersom f. eks.  $u(0)$  og  $v(1)$  er gitt, har vi et tilfelle med splitta randbetingelser som må løses numerisk.

### Tilfelle med splitta randbetingelser.

For et tilfelle med motstrøm blir (3.3.11):

$$\frac{du}{dx} = -\alpha_y(u - v) \quad (3.3.15a)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\alpha_i(u - v) \quad (3.3.15b)$$

Innløpsttemperaturen for det ytre røret =  $T_y(0)$  og utløpsttemperaturen =  $T_y(L)$ . Tilsvarende betegnelser for det indre røret er  $T_i(0)$  og  $T_i(L)$ . Velger nå referansetemperaturene i (3.3.10) for dette tilfellet:

$T_{yr} = T_y(0)$  og  $T_{ir} = T_i(L)$  slik at (3.3.10) nå blir:

$$\text{Temperatur ytre rør: } u = \frac{T_y - T_y(0)}{T_i(L) - T_y(0)} \quad (3.3.16a)$$

$$\text{Temperatur indre rør: } v = \frac{T_i - T_y(0)}{T_i(L) - T_y(0)} \quad (3.3.16b)$$

Dette valget av referansetemperaturer gir følgende randbetingelser:

$$u(0) = 0, v(1) = 1 \quad (3.3.17)$$

(3.3.15) innsatt i (3.3.3):

$$\frac{u_j - u_{j-1}}{h} = -\alpha_y \cdot \left[ \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1}) - \left( \frac{1}{2}(v_j + v_{j-1}) \right) \right]$$

$$\frac{v_j - v_{j-1}}{h} = -\alpha_i \cdot \left[ \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1}) - \left( \frac{1}{2}(v_j + v_{j-1}) \right) \right]$$

som ordnet gir følgende ligningssystem:

$$(h \cdot \alpha_y - 2) \cdot u_{j-1} + (2 + h \cdot \alpha_y) \cdot u_j - h \cdot \alpha_y \cdot v_{j-1} - h \cdot \alpha_y \cdot v_f = 0 \quad (3.3.18a)$$

$$h \cdot \alpha_i \cdot u_{j-1} + h \cdot \alpha_i \cdot u_j - (h \cdot \alpha_i + 2) \cdot v_{j-1} + (2 - h \cdot \alpha_i) \cdot v_j = 0 \quad (3.3.18b)$$

(3.3.18) er et spesialtilfelle av det mer generelle systemet

$$\begin{aligned} a_j^{(1)} u_{j-1} + \alpha_j^{(2)} v_{j-1} + b_j^{(1)} u_j + b_j^{(2)} v_j + c_j^{(1)} u_{j+1} + c_j^{(2)} v_{j+1} &= d_j^{(1)} \\ a_j^{(3)} u_{j-1} + a_j^{(4)} v_{j-1} + b_j^{(3)} u_j + b_j^{(4)} v_j + c_j^{(3)} u_{j+1} + c_j^{(4)} v_{j+1} &= d_j^{(2)} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Systemet i (3.3.19) kalles et bi-tridiagonalt ligningsystem. Algoritmen for løsning av dette systemet kalles ofte Douglas-algoritmen. (Se appendiks I) Nedenfor har vi skrevet ut (3.3.19) på matriseform.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} \begin{bmatrix} c_1^{(1)} & c_1^{(2)} \\ c_1^{(3)} & c_1^{(4)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} \\ b_1^{(3)} & b_1^{(4)} \end{bmatrix} & & & & & & & & & & \\ \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_2^{(4)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_2^{(1)} & b_2^{(2)} \\ b_2^{(3)} & b_2^{(4)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_2^{(1)} & c_2^{(2)} \\ c_2^{(3)} & c_2^{(4)} \end{bmatrix} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \begin{bmatrix} a_j^{(1)} & a_j^{(2)} \\ a_j^{(3)} & a_j^{(4)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_j^{(1)} & b_j^{(2)} \\ b_j^{(3)} & b_j^{(4)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_j^{(1)} & c_j^{(2)} \\ c_j^{(3)} & c_j^{(4)} \end{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} a_N^{(1)} & a_N^{(2)} \\ a_N^{(3)} & a_N^{(4)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_N^{(1)} & b_N^{(2)} \\ b_N^{(3)} & b_N^{(4)} \end{bmatrix} & & & & & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} u_j \\ u_j \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} u_N \\ u_N \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_1^{(2)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} d_2^{(1)} \\ d_2^{(2)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} d_j^{(1)} \\ d_j^{(2)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} d_N^{(1)} \\ d_N^{(2)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Vi ser at vi har fått en tridiagonal koeffisientmatrise der hvert element i matrisa er en  $2 \times 2$  - matrise. En slik matrise kalles blokk-tridiagonal der hvert element er en blokk. Vi får ofte blokk-tridiagonale matriser når vi diskretiserer system av første ordens ordinære og partielle ligninger. Hadde vi f.eks. brukt 3 rør, ville hver blokk vært en  $3 \times 3$  - matrise.

Den tridiagonale strukturen blir enda tydeligere når vi setter navn på blokkene:

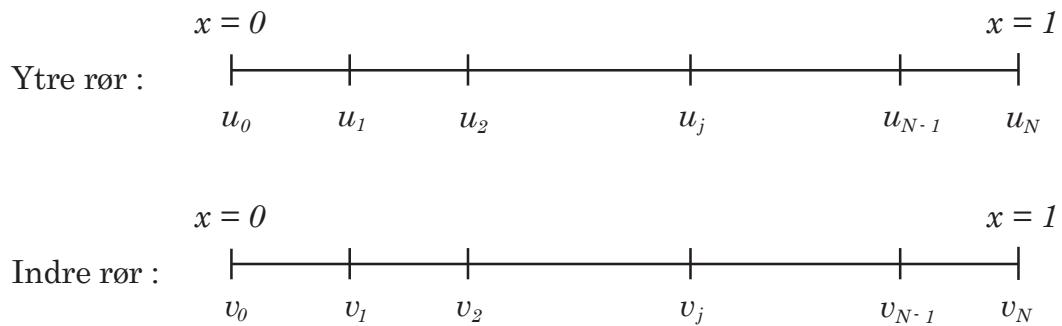
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j &= \begin{bmatrix} a_j^{(1)} & a_j^{(2)} \\ a_j^{(3)} & a_j^{(4)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_j^{(1)} & b_j^{(2)} \\ b_j^{(3)} & b_j^{(4)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} c_j^{(1)} & c_j^{(2)} \\ c_j^{(3)} & c_j^{(4)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_j &= \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} d_j^{(1)} \\ d_j^{(2)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

slik at systemet ovenfor kan skrives:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 & & \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ & \mathbf{a}_j & \mathbf{b}_j & \mathbf{c}_j \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \mathbf{a}_N & \mathbf{b}_N & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{d}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{d}_N \end{bmatrix} \quad (3.3.20)$$

Å løse dette systemet med Douglas-algoritmen, er det samme som å bruke Thomas-algoritmen når man tar hensyn til at elementene er matriser og vektorer.

### Indeksering.

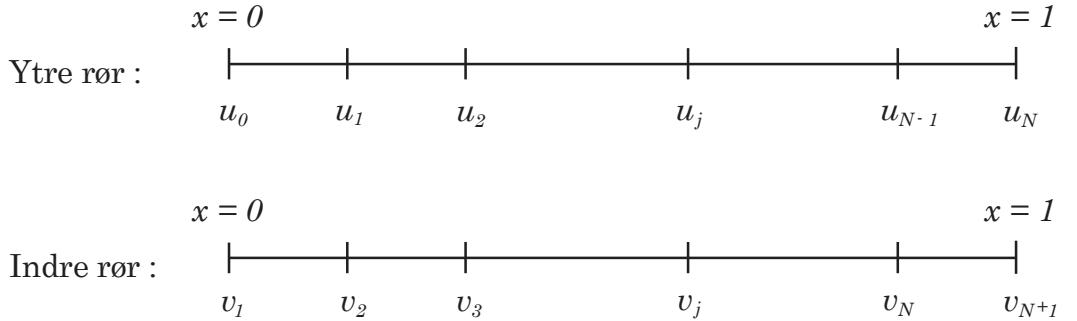


Figur 3.13

Randbetingelser:  $u_0 = 0$  ,  $u_N = 1$  .

Algoritmen krever at den første ukjente har indeks 1 og den siste indeks N. Som figuren ovenfor viser, stemmer dette for det ytre røret, men ikke for det indre der  $v_0$  er den første ukjente.

Vi forandrer indeksene som vist nedenfor:



Figur 3.14

Får da følgende indeksering:

For u:

$$u_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad u_0 = 0 \text{ fra randbetingelsen} \quad (3.3.21a)$$

For v:

$$v_j, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1, \quad v_{N+1} = 1 \text{ fra randbetingelsen} \quad (3.3.21b)$$

Med den nye indekseringen i (3.3.21b), blir systemet i (3.3.18) nå:

$$(h \cdot \alpha_y - 2) \cdot u_{j-1} + (2 + h \cdot \alpha_y) \cdot u_j - h \cdot \alpha_y \cdot v_j - h \cdot \alpha_y \cdot v_{j+1} = 0 \quad (3.3.22a)$$

$$h \cdot \alpha_i \cdot u_{j-1} + h \cdot \alpha_i \cdot u_j - (h \cdot \alpha_i + 2) \cdot v_j + (2 - h \cdot \alpha_i) \cdot v_{j+1} = 0 \quad (3.3.22b)$$

Utskrevet for  $j = 1$ :

$$\begin{aligned} (2 + h \cdot \alpha_y) \cdot u_1 - h \cdot \alpha_y \cdot v_1 - h \cdot \alpha_y \cdot v_2 &= 0 \\ h \cdot \alpha_i \cdot u_1 - (h \cdot \alpha_i + 2) \cdot v_1 + (2 - h \cdot \alpha_i) \cdot v_2 &= 0 \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet  $u_0 = 0$  fra randbetingelsen.

Utskrevet for  $j = N$ :

$$\begin{aligned} (h \cdot \alpha_y - 2) \cdot u_{N-1} + (2 + h \cdot \alpha_y) \cdot u_N - h \cdot \alpha_y \cdot v_N &= h \cdot \alpha_y \\ h \cdot \alpha_i \cdot u_{N-1} + h \cdot \alpha_i \cdot u_N - (h \cdot \alpha_i + 2) \cdot v_N &= h \cdot \alpha_i - 2 \end{aligned}$$

hvor vi har brukt  $v_{N+1} = 1$  fra randbetingelsen. Ved å sammenligne vårt system ovenfor med basissystemet i (3.3.19), får vi følgende koeffisienter for bruk i Douglas-algoritmen:

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(1)} &= h \cdot \alpha_y - 2, & \alpha_j^{(2)} &= 0, & b_j^{(1)} &= 2 + h \cdot \alpha_y, & b_j^{(2)} &= -h \cdot \alpha_y \\ c_j^{(1)} &= 0, & c_j^{(2)} &= -h \cdot \alpha_y, & d_j^{(1)} &= 0, & j &= 1, 2, \dots, N - 1 \\ \alpha_j^{(3)} &= h \cdot \alpha_i, & \alpha_j^{(4)} &= 0, & b_j^{(3)} &= h \cdot \alpha_i, & b_j^{(4)} &= -(h \cdot \alpha_i + 2) \\ c_j^{(3)} &= 0, & c_j^{(4)} &= 2 - h \cdot \alpha_i, & d_j^{(2)} &= 0, & j &= 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

hvor  $\alpha_1^{(1)}$  og  $\alpha_1^{(2)}$  ikke brukes.

For  $j = N$  blir utrykkene som i (3.3.23) bortsett fra  $d_N^{(1)} = h \cdot \alpha_y$  og  $d_N^{(2)} = h \cdot \alpha_i - 2 \cdot c_N^{(2)}$  og  $c_N^{(4)}$  brukes ikke. Et eksempel med  $N = 6$  er gitt vist nedenfor.

$$\left[ \begin{array}{cccccc} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & 0 & c_1^{(2)} & & \\ b_1^{(3)} & b_1^{(4)} & 0 & c_1^{(4)} & 0 & \\ a_2^{(1)} & 0 & b_2^{(1)} & b_2^{(2)} & 0 & c_2^{(2)} \\ a_2^{(3)} & 0 & b_2^{(3)} & b_2^{(4)} & 0 & c_2^{(4)} \\ 0 & a_3^{(1)} & 0 & b_3^{(1)} & b_3^{(2)} & 0 & c_3^{(2)} \\ a_3^{(3)} & 0 & b_3^{(3)} & b_3^{(4)} & 0 & c_3^{(4)} & 0 \\ 0 & a_4^{(1)} & 0 & b_4^{(1)} & b_4^{(2)} & 0 & c_4^{(2)} \\ a_4^{(3)} & 0 & b_4^{(3)} & b_4^{(4)} & 0 & c_4^{(4)} & 0 \\ 0 & a_5^{(1)} & 0 & b_5^{(1)} & b_5^{(2)} & 0 & c_5^{(2)} \\ a_5^{(3)} & 0 & b_5^{(3)} & b_5^{(4)} & 0 & c_5^{(4)} & 0 \\ 0 & a_6^{(1)} & 0 & b_6^{(1)} & b_6^{(2)} & 0 & c_6^{(2)} \\ a_6^{(3)} & 0 & b_6^{(3)} & b_6^{(4)} & 0 & c_6^{(4)} & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_6^{(1)} \\ d_6^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.3.24)$$

Sammenlignet med det generelle systemet ser vi at fire av halv-diagonalene forsvinner i vårt tilfelle:  $a_j^{(2)}$ ,  $a_j^{(4)}$ ,  $c_j^{(1)}$ , og  $c_j^{(3)}$ . Dersom det er behov for å spare denne plassen, kan vi skrive en spesiell versjon som ikke bruker disse vektorene. (Se Fortran-funksjonen **bitris** i appendiks I som også finnes i Matlab-versjon)

#### Eksempel 3.4 Talleksempel

Vi skal avkjøle smøreoljen fra et gassturbinanlegg. Oljen har en temperatur på  $100^{\circ}\text{C}$ . Til disposisjon har vi vann med temperatur på  $30^{\circ}\text{C}$ . Andre data:

Rørlengde:	$L$	$= 61m$
Rørdiameter:	$d$	$= 0.025m$
Omkrets av rør:	$P$	$= \pi \cdot d = 0.07854m$
Massestrøm:	$\dot{m}_y$	$= 0.1$ og $\dot{m}_i = 0.23\text{kJ/s}$
Totalt varmeovergangstal:	$\bar{h}$	$= 40\text{W/m}^2/\text{^{\circ}C}$
Egenvarme:	$c_y$	$= 2130$ og $c_i = 4180\text{J/Kg}/\text{^{\circ}C}$

Med disse data, får vi følgende verdier for koeffisientene  $\alpha_y$  og  $\alpha_i$ :

$$\alpha_y = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_y c_y} \approx 0.9, \quad \alpha_i = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_i c_i} \approx 0.2 \quad (3.3.25a)$$

Referansetemperaturene i (3.3.6) og (3.3.12):

$$T_{ir} = T_i(L) = 30^{\circ}\text{C}, \quad T_{yr} = T_y(0) = 100^{\circ}\text{C} \quad (3.3.25b)$$

som gir forbindelsen mellom dimensjonsløs og dimensjonelle temperaturer:

$$T_y(x) = 100 - 70 \cdot u(x), \quad T_i(x) = 100 - 70 \cdot v(x) \quad (3.3.26)$$

Legg merke til at vi bruker den dimensjonsløse koordinaten x i (3.3.26).

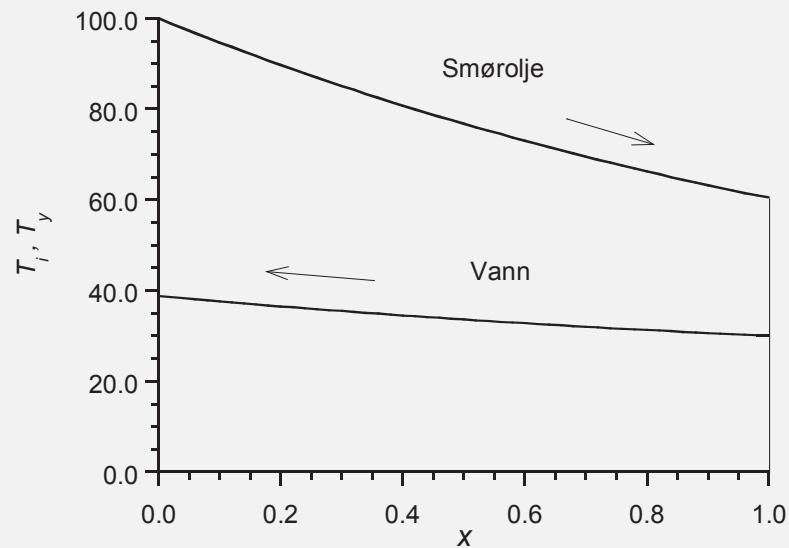
Tabellen viser resultatene ved å løse (3.3.24) med koeffisienter gitt i (3.3.23) ved bruk av bitris gitt i appendiks I. Vi ser av tabellen at smørroljen blir avkjølt fra 100°C til 60.4°C, mens vannets temperatur stiger fra 30°C til 38.8°C. Temperaturforløpet i tabellen er vist i figur 3.15.

Selv om vi ikke har noen direkte analytisk løsning å sammenligne med, indikerer den små forskjellen mellom løsningene for  $h = 0.1$  og  $h = 0.01$  at tabellverdiene sannsynligvis er temmelig nøyaktige. En delvis bekrefteelse kan fås ved å bruke den analytiske løsningen i (3.3.14) som innsatt for tallverdiene for dette eksemplet blir:

$$\begin{aligned} u(x) &= v_0 \frac{9}{7} [1 - e^{-0.7 \cdot x}] \\ v(x) &= v_0 [1 + \frac{2}{7} (1 - e^{-0.7 \cdot x})] \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

$h = 0.1$			$h = 0.01$		
x	$T_y(\text{°C})$	$T_i(\text{°C})$	x	$T_y(\text{°C})$	$T_i(\text{°C})$
0.0	100.00000	38.80441	0.0	100.00000	38.80226
0.1	94.67864	37.62189	0.1	94.68054	37.62016
0.2	89.71719	36.51934	0.2	89.72070	36.31798
0.3	85.09129	35.49137	0.3	85.09618	35.49031
0.4	80.77825	34.53291	0.4	80.78431	34.53211
0.5	76.75692	33.63928	0.5	76.76395	33.63870
0.6	73.00756	32.80609	0.6	73.01539	32.80569
0.7	69.51178	32.02925	0.7	69.52026	32.02899
0.8	66.25243	31.30495	0.8	66.26142	31.30480
0.9	63.21352	30.62964	0.9	63.22291	30.62958
1.0	60.38014	30.00000	1.0	60.38981	30.00000

Løsning av lign. (3.3.24)



Figur 3.15

Verdien av  $v_0 \equiv v(0)$  er ukjent og må beregnes numerisk. Ved å utføre beregningen for forskjellige verdier av  $h$ , får vi følgende tabell:

$h$	$v_0$
0.100	0.87422266
0.050	0.87424592
0.010	0.87425336
0.005	0.87425359
0.001	0.87425359

Dersom vi aksepterer  $v_0$ -verdien for  $h = 0.001$  som den rette”, kan vi bruke denne i (3.3.27) og deretter sammenligne med tabellverdiene. Gjør vi det, finner vi at den relative feilen for  $h = 0.1$  ligger i intervallet  $[10^{-4}, 10^{-5}]$  mens den for  $h = 0.01$  ligger i intervallet  $[10^{-6}, 10^{-7}]$ . Dette viser at differanseskjemaet er av  $O(h^2)$ , i overenstemmelse med teorien.

I avsnitt 6.7 behandler vi det ikke-stasjonære tilfellet av dette eksemplet.

### Bruk av Richardson ekstrapolering

Denne teknikken som er velkjent ved Romberg-integrasjon, kan ofte brukes til å forbedre verdier som er funnet ved bruk av differanse-metoder. ( Se avsnitt 4.3 i C & K [5] ). La oss anta at den korrekte verdien er  $y$ , mens vi har funnet en tilnærmelse  $y_1$  med bruk av skritt lengden  $h_1$ . Dessuten antar vi at forbindelsen mellom  $y$  og  $y_1$  er gitt ved:

$$y_1 = y + A \cdot h_1^k + B \cdot h_1^{k+1} + \dots \quad (3.3.28)$$

der A og B er konstanter.

Dersom vi nå beregner to tilnærmelser  $y_1$  og  $y_2$  med to forskjellige verdier  $h_1$  og  $h_2$ , får vi to ligninger av typen (3.3.28) og kan dermed eliminere A med følgende resultat:

$$\frac{h_2^k \cdot y_1 - h_1^k \cdot y_2}{h_2^k - h_1^k} = y + B \cdot \left( \frac{h_2^k h_1^{k+1} - h_1^k h_2^{k+1}}{h_2^k - h_1^k} \right) + \dots \quad (3.3.29)$$

(3.3.29) kan kalles  $h^k$ -ekstrapoleringsformelen. Spesielt for  $k = 2$  og  $h_2 = \frac{1}{2}h_1$  får vi fra (3.3.29):

$$y \approx y_2 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \quad (3.3.30)$$

med en feil  $\frac{1}{6}Bh_1^3 + \dots$

I noen tilfeller er vi så heldige at  $B = 0$ . Da blir feilen av  $O(h_1^4)$ . Dette er nettopp tilfelle for to-punkts metoden. For denne metoden får vi fra (3.3.4) med  $h = h_1$ :

$$\mathbf{y}(x_j) = \mathbf{y}_j(h) + h^2 \mathbf{e}(x_j) + O(h^4), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.3.31)$$

En tilstrekkelig betingelse for at (3.3.31) gjelder er at (3.3.1) har kontinuerlig femte derivert på det aktuelle intervallet. (Se Keller [8]). Med vår notasjon blir (3.3.30):

$$\mathbf{y}(x_j) = \mathbf{y}_j\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3} \left[ \mathbf{y}_j\left(\frac{h}{2}\right) - \mathbf{y}_j(h) \right] + \mathbf{O}(h^4) \quad (3.3.32)$$

$T_{ytre}$				
x	$h = 0.2$	$h = 0.1$	Ekstrapol.	$h = 2 \cdot 10^{-3}$
0.0	100.0000	100.00000	100.00000	100.00000
0.1		94.67864		
0.2	89.70651	89.71719	89.72075	89.72073
0.3		85.09129		
0.4	80.75984	80.77825	80.78439	80.78437
0.5		76.75692		
0.6	72.98376	73.00756	73.01549	73.01547
0.7		69.51178		
0.8	66.22511	66.25243	66.26154	66.26151
0.9		63.21352		
1.0	60.35076	60.38014	60.38993	60.38990

I tabellen ovenfor har vi beregnet temperaturen  $T_y$  i det ytre røret ; først med  $h=0.2$  , så med  $h=0.1$  og deretter ekstrapolert verdiene etter formelen i (3.3.32) I følge denne formelen skal vi da få verdier med nøyaktighet av  $O(h^4)$  som i dette tilfellet blir  $O(0.2^4) = O(10^{-5}) \approx 2 \cdot 10^{-3}$  som eksempel. I den siste kolonnen har vi utført beregningen med  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  med verdier som viser at teorien stemmer.

### 3.4 LINEARISERING AV IKKE - LINÆRE ALGEBRAISKE LIGNINGER

Som eksempel, bruker vi problemet i avsnitt 3.2.2:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{3}{2}y^2 \\ y(0) &= 4, \quad y(1) = 1 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

der en av løsningene er gitt ved:

$$y = \frac{4}{(1+x)^2} \tag{3.4.2}$$

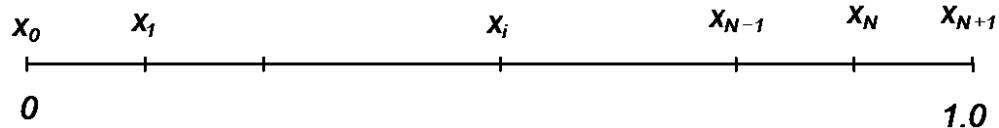
Vi diskretiserer (3.4.1) med bruk av sentraldifferanser for  $y''(x)$ :

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{3}{2}y_i^2$$

eller ordnet:

$$y_{i-1} - \left(2 + \frac{3}{2}h^2y_i\right)y_i + y_{i+1} = 0 \tag{3.4.3}$$

med  $h = \Delta x$



Figur 3.16

Vi har delt intervallet  $[0, 1]$  i  $N + 1$  deler der  $h = 1/(N + 1)$  og  $x_i = h \cdot i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ . Da  $y_0 = 4$  og  $y_{N+1} = 1$ , blir (3.4.3):

$$\begin{aligned} -\left(2 + \frac{3}{2}h^2y_1\right)y_1 + y_2 &= -4 \\ &\dots \\ y_{i-1} - \left(2 + \frac{3}{2}h^2y_i\right)y_i + y_{i+1} &= 0 \\ &\dots \\ y_{N-1} - \left(2 + \frac{3}{2}h^2y_N\right)y_N &= -1 \\ \text{der } i &= 2, 3, \dots, N - 1 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Koeffisientmatrisa for (3.4.4) er tridiagonal, men systemet er ikke-lineært. (Et system av 2. grads ligninger). Vi har ikke formler som kan løse slike system, og settet må derfor lineariseres. La oss skal se nærmere på to metoder for å utføre denne lineariseringen.

### 3.4.1 METODEN MED ETTERSLEP

Da ligningsystemet er ikke-lineært, må vi utføre en iterasjonsprosess. La  $y_i^{m+1}$  og  $y_i^m$  være løsningen av den diskretiserte ligningen (3.4.3) eller (3.4.4) for henholdsvis iterasjon  $m+1$  og  $m$ . Metoden med etterslep går ut på å erstatte avhengige variable ved iterasjon  $m+1$  med tilsvarende variable fra iterasjon  $m$  helt til vi bare har lineære ledd. I (3.4.3) og (3.4.4) er det  $y^2$ -leddet som forårsaker ikke-linearitetten og som derfor må lineariseres. Skriver ut (3.4.4)):

$$\begin{aligned} -\left(2 + \frac{3}{2}y_1^m h^2\right)y_1^{m+1} + y_2^{m+1} &= -4 \\ y_{i-1}^{m+1} - \left(2 + \frac{3}{2}y_i^m h^2\right)y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} &= 0 \\ y_{N-1}^{m+1} - \left(2 + \frac{3}{2}y_N^m h^2\right)y_N^{m+1} &= -1 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

der  $i = 2, 3, \dots, N-1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Lineariseringen består nå i å erstatte  $\frac{3}{2}h^2y_1^{m+1}$ ,  $\frac{3}{2}h^2y_i^{m+1}$  og  $\frac{3}{2}h^2y_N^{m+1}$  med  $\frac{3}{2}h^2y_1^m$ ,  $\frac{3}{2}h^2y_i^m$  og  $\frac{3}{2}h^2y_N^m$  slik at vi får følgende lineære system:

$$\begin{aligned} -\left(2 + \frac{3}{2}y_1^m h^2\right)y_1^m + y_2^m &= -4 \\ y_{i-1}^m - \left(2 + \frac{3}{2}y_i^m h^2\right)y_i^m + y_{i+1}^m &= 0 \\ y_{N-1}^m - \left(2 + \frac{3}{2}y_N^m h^2\right)y_N^m &= -1 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

der  $i = 2, 3, \dots, N-1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Vi har nå fått et lineært, tridiagonalt system som kan løses med Thomas-algoritmen.

For å starte iterasjonsprosessen, må vi tippe verdier for  $y_i^0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Dersom vi ikke har spesielle opplysninger, kan vi f.eks. tippe  $y_i^0 = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Gode startverdier vil generelt gi raskere konvergens. Vi må også huske å teste for diagonal-dominans når vi bruker **tdma**. For (3.4.6) blir kravet:

$$\left|2 + \frac{3}{2}y_i^m h^2\right| \geq 2, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

som er oppfylt dersom alle  $y_i^m > 0$ . Av figur 2.8 ser vi at dette kravet er oppfylt for den ene løsningen, men ikke for den andre. Når denne betingelsen ikke er oppfylt, kan det være fornuftig å bruke en løsningsrutine med pivotering, f.eks. **tripiv** istedenfor **tdma**. Når vi ikke vet hvoran iterasjonsprosessen vil foreløpe, er det lurt å bare bruke antall iterasjoner som et stoppkrev. Etter vi har fått innsikt i iterasjonsforløpet, kan vi legge til andre stoppkriterier. Endel eksempler er vist i avsnitt 3.4.3

Matlabprogrammet **delay34** gir følgende resultat med  $h = 0.05$ :

Itr.	max. avvik
1	1.000e+000
2	5.525e-001
3	1.104e-001
4	2.632e-002
5	5.892e-003
6	1.328e-003
7	2.980e-004
8	6.690e-005
9	1.502e-005
10	3.370e-006
11	7.562e-007
12	1.697e-007

Max. avvik betyr her det maksimale relative avviket. Løsningen av differanseligningen konvergerer langsomt mot løsningen  $y_I = \frac{4}{(1+x)^2}$  som vist på 2.8 i avsnitt 2.2. Den maksimale relative feilen i løsningen er  $\approx 5.6 \cdot 10^{-4}$  som ikke kan minkes uten å minkse skrittlenget  $h$ .

Fordelen med denne metoden er at lineariseringsprosessen er enkel. Bakdelen er at den konvergerer ofte langsomt, samt at vi gjerne må ha gode startverdier for å få konvergens. Når vi vet hvordan iterasjonen forløper, kan vi som nevnt ovenfor, legge inn et stoppkriterium basert på et iterasjonsavvik. Iterasjonsløkka kan nå f.eks. se ut som vist nedenfor:

```
it = 0; itmax = 10 ; dymax = 1.0; RelTol = 1.0e-5;
d = 0 ; % høyre side
d(1) = - 4.0; d(n) = - 1.0;
while (dymax > RelTol) & (it < itmax)
    it = it + 1; b = -(2.0 + fac*y); % hoveddiagonal
    ym1 = tdma(a,b,c,d); % Løser ligningsystemet
    dymax = max(abs((ym1-y)/ym1));% Beregner relativ avvik
    ym = ym1; % Oppdatering
    fprintf(' %10d %12.3e \n',it,dymax);
end
```

Legg merke til at for å starte iterasjonsløkka, må  $dymax$  være større enn  $RelTol$

### 3.4.2 NEWTON-LINEARISERING

Før vi setter opp den formelle utviklingen, viser vi en variant som er enkel å bruke når ikke-linearitetene er rene produkt.

$$\text{Setter } y_i^{m+1} = y_i^m + \delta y_i \quad (3.4.7)$$

der  $\delta y_i$  er avviket (residuet) mellom  $y_i$ -verdiene for de to iterasjonene. Ved bruk av 3.4.7:

$$\begin{aligned} (y_i^{m+1})^2 &= (y_i^m + \delta y_i)^2 = (y_i^m)^2 + 2y_i^m \cdot \delta y_i + (\delta y_i^m)^2 \\ &\approx (y_i^m)^2 + 2y_i^m \cdot \delta y_i = y_i^m(2y_i^{m+1} - y_i^m) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Lineariseringen består i å neglisjere  $(\delta y)^2$  som liten i forhold til de andre leddene.

(3.4.8) innsatt i (3.4.4) gir følgende system:

$$\begin{aligned} -(2 + 3y_1^m h^2)y_1^{m+1} + y_2^{m+1} &= -\frac{3}{2}(y_1^m h)^2 - 4 \\ y_{i-1}^{m+1} - (2 + 3y_i^m h^2)y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} &= -\frac{3}{2}(y_i^m h)^2 \quad (3.4.9) \\ y_{N-1}^{m+1} - (2 + 3y_N^m h^2)y_N^{m+1} &= -\frac{3}{2}(y_N^m h)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{der } i = 2, 3, \dots, N-1, \quad N-1, m = m = 0, 1, 2, \dots$$

Vi har igjen fått et lineært, tridiagonalt system som kan løses med Thomas-algoritmen. Velger samme startverdier som i foregående versjon. Matlabprogrammet **taylor34** gir følgende resultat med  $h = 0.05$ :

Itr.	max. avvik
1	1.000e+000
2	3.765e-001
3	2.479e-002
4	9.174e-005
5	1.175e-009
6	2.405e-015

Vi ser at iterasjonsprosessen nå går mye raskere enn ved etterslep-metoden. Riktignok langsomt i starten, men fra tredje iterasjon har vi rask konvergens. Lineariseringen i (3.4.7) og (3.4.8) er egentlig en Taylorutvikling der vi rekkeutvikler rundt iterasjon  $m$  og bare beholder de to første leddene. Kaller det ikke-lineære leddet som skal lineariseres for  $F$  og antar at  $F$  er funksjon av den avhengige variable  $z$  i punktet  $i$  ved iterasjon  $m+1$ : Vi skal linearisere leddet  $F(z_i)|^{m+1} \equiv F(z_i)_{m+1}$ . Bruker den siste notasjonen i fortsettelsen.

Rekkeutvikling:

$$\begin{aligned} F(z_i)_{m+1} &\approx F(z_i)_m + \delta z_i \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_m \\ \text{der } \delta z_i &= z_i^{m+1} - z_i^m \quad (3.4.10) \end{aligned}$$

I tilfellet ovenfor:

$$\delta z_i \rightarrow \delta y_i, \quad z_i^{m+1} \rightarrow y_i^{m+1}, \quad z_i^m \rightarrow y_i^m, \quad F(y_i)_{m+1} = (y_i^{m+1})^2, \quad F(y_i)_m = (y_i^m)^2$$

som innsatt i (3.4.10) gir:  $(y_i^{m+1})^2 \approx (y_i^m)^2 + 2y_i^m \cdot \delta y_i$  som er identisk med (3.4.8). Fremgangsmåten i (3.4.10) kalles ofte *Newton-linearisering*.

I mange tilfeller inngår flere indekser i det ikke-linære leddet. Anta f.eks at vi har et ledd der både  $z_i$  og  $z_{i+1}$  inngår. Vi bruker da Taylorutvikling for to variable:

$$F(z_i, z_{i+1})_{m+1} \approx F(z_i, z_{i+1})_m + \delta z_i \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_m + \delta z_{i+1} \left( \frac{\partial F}{\partial z_{i+1}} \right)_m \quad (3.4.11)$$

$$\text{der } \delta z_i = z_i^{m+1} - z_i^m, \quad \delta z_{i+1} = z_{i+1}^{m+1} - z_{i+1}^m$$

Dersom både  $z_{i-1}, z_i$  og  $z_{i+1}$  inngår, får vi:

$$\begin{aligned} F(z_{i-1}, z_i, z_{i+1})_{m+1} &\approx F(z_{i-1}, z_i, z_{i+1})_m \\ &+ \delta z_{i-1} \left( \frac{\partial F}{\partial z_{i-1}} \right)_m + \delta z_i \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_m + \delta z_{i+1} \left( \frac{\partial F}{\partial z_{i+1}} \right)_m \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

$$\text{der } \delta z_{i-1} = z_{i-1}^{m+1} - z_{i-1}^m, \quad \delta z_i = z_i^{m+1} - z_i^m, \quad \delta z_{i+1} = z_{i+1}^{m+1} - z_{i+1}^m$$

Tilsvarende for flere indeks.

### Eksempel 3.5

Gitt differensialligningen  $y''(x) + y(x)\sqrt{y(x)} = 0$  som diskretisert med sentral-differanser blir:

$$y_{i+1}^{m+1} - 2y_i^{m+1} + y_{i-1}^{m+1} + h^2 y_i^{m+1} \sqrt{y_i^{m+1}} = 0 \text{ ved iterasjon } m+1. \quad (\text{a})$$

Det er leddet  $y_i^{m+1} \cdot \sqrt{y_i^{m+1}}$  som er ikke-lineært og må lineariseres. I dette tilfellet har vi bare ett indeks og vi bruker (3.4.10) med  $z_i \rightarrow y_i$  og  $F(y_i) = y_i^{\frac{3}{2}}$ :

$$F(y_i)_{m+1} \approx F(y_i)_m + \delta y_i \left( \frac{\partial F}{\partial y_i} \right)_m = (y_i^m)^{\frac{3}{2}} + \delta y_i \cdot \frac{3}{2} \cdot (y_i^m)^{\frac{1}{2}} \text{ eller}$$

$$y_i^{m+1} \sqrt{y_i^{m+1}} \approx y_i^m \sqrt{y_i^m} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{y_i^m} \cdot \delta y_i \text{ der } \delta y_i = y_i^{m+1} - y_i^m$$

Merk at uttrykket nå er lineært da  $y_i^{m+1}$  bare inngår i 1. potens.

Innsatt i (a) får vi følgende differanseligning:

$$y_{i-1}^{m+1} + \left( \frac{3}{2} h^2 \sqrt{y_i^m} - 2 \right) y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} = \frac{h^2}{2} y_i^m \sqrt{y_i^m} \quad (\text{b})$$

### Eksempel 3.6

$y''(x) + \sin(y(x)) = 0$  som diskretisert med sentral-differanser blir:

$$y_{i+1}^{m+1} - 2y_i^{m+1} + y_{i-1}^{m+1} + h^2 \sin(y_i^{m+1}) = 0 \quad (\text{a})$$

Det er leddet  $y_i^{m+1}$  som er ikke-lineært og må lineariseres. Vi har bare ett indeks og vi bruker (3.4.10) med  $z_i \rightarrow y_i$  og  $F(y_i) = \sin(y_i)$ :

$$F(y_i)_{m+1} \approx F(y_i)_m + \delta y_i \left( \frac{\partial F}{\partial y_i} \right)_m = \sin(y_i^m) + \delta y_i \cdot \cos(y_i^m) \text{ eller}$$

$$\sin(y_i^{m+1}) \approx \sin(y_i^m) + \cos(y_i^m) \cdot \delta y_i \text{ der } \delta y_i = y_i^{m+1} - y_i^m$$

Innsatt i (a) får vi følgende differanseligning:

$$y_{i-1}^{m+1} + (h^2 \cos(y_i^m) - 2)y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} = h^2(y_i^m \cos(y_i^m) - \sin(y_i^m)) \quad (\text{b})$$

### Eksempel 3.7

Gitt differensialligningen  $y''(x) + y(x)\sqrt{y'(x)} = 0$  som diskretisert med sentral-differanser blir:

$$y_{i+1}^{m+1} - 2y_i^{m+1} + y_{i-1}^{m+1} + \alpha \cdot y_i^{m+1} \sqrt{y_{i+1}^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}} = 0, \text{ der } \alpha = h\sqrt{h/2} \quad (\text{a})$$

Det er ledet  $y_i^{m+1} \sqrt{y_{i+1}^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}}$  som er ikke-lineært og må lineariseres. I dette tilfellet har vi tre indekser og vi bruker 3.4.12 med  $z_{i-1} \rightarrow y_{i-1}$ ,  $z_i \rightarrow y_i$  og  $z_{i+1} \rightarrow y_{i+1}$  samt  $F(y_{i-1}, y_i, y_{i+1})_m = y_i \sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}$ . Finner de enkelte leddene i (3.4.12):

$$F(y_{i-1}, y_i, y_{i+1})_m = y_i^m \sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}, \left( \frac{\partial F}{\partial y_{i-1}} \right)_m = -\frac{y_i^m}{2\sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}},$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial y_i} \right)_m = \sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m} \text{ og tilslutt } \left( \frac{\partial F}{\partial y_{i+1}} \right)_m = \frac{y_i^m}{2\sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}}$$

Totalt:

$$\begin{aligned} y_i^{m+1} \sqrt{y_{i+1}^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}} &\approx y_i^m \sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m} - \frac{y_i^m}{2\sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}} \delta y_{i-1} \\ &+ \sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m} \cdot \delta y_i + \frac{y_i^m}{2\sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}} \delta y_{i+1} \end{aligned}$$

Merk at uttrykket nå er lineært da  $y_{i-1}^{m+1}$ ,  $y_i^{m+1}$  og  $y_{i+1}^{m+1}$  bare inngår i 1. potens. Vi setter dette inn i (a) som nå blir lineær:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \alpha \frac{y_i^m}{2g^m} \right) \cdot y_{i-1}^{m+1} - (2 - \alpha g^m) \cdot y_i^{m+1} + \left( 1 + \alpha \frac{y_i^m}{2g^m} \right) \cdot y_{i+1}^{m+1} \\ = \alpha \frac{y_i^m}{2g^m} (y_{i+1}^m - y_{i-1}^m) \end{aligned} \quad (\text{b})$$

$$\text{der } g^m = \sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}$$

I neste avsnitt viser vi hvordan vi kan operere direkte med delta-størrelsene  $\delta y_{i-1}^{m+1}$ ,  $\delta y_i^{m+1}$  og  $\delta y_{i+1}^{m+1}$

Hvordan vil disse eksemplene bli dersom vi bruker metoden med etterslep?

Lign. (a) i eksempel 3.5 skrives:  $y_{i-1}^{m+1} + (h^2 \sqrt{y_i^{m+1}} - 2) \cdot y_i^{m+1} + y_{i-1}^{m+1} = 0$

Koeffisienten foran  $y_i^{m+1}$ -leddet inneholder  $\sqrt{y_i^{m+1}}$  som blir erstattet med  $\sqrt{y_i^m}$  slik at ligningen blir:  $y_{i-1}^{m+1} + (h^2 \sqrt{y_i^m} - 2) \cdot y_i^{m+1} + y_{i-1}^{m+1} = 0$

I lign. ligning (a) i eksempel 3.6 erstattes med slik at ligningen blir:  
 $y_{i-1}^{m+1} - 2y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} = -h^2 \sin(y_i^m) = 0$

Lign. (a) i eksempel 3.7 skrives:

$$y_{i-1}^{m+1} + (\alpha \cdot \sqrt{y_{i+1}^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}} - 2) \cdot y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} = 0$$

Koeffisienten foran  $y_i^{m+1}$ -leddet inneholder  $\sqrt{y_{i+1}^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}}$  som erstattes med  $\sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m}$  slik at ligningen blir:

$$y_{i-1}^{m+1} + (\alpha \cdot \sqrt{y_{i+1}^m - y_{i-1}^m} - 2) \cdot y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} = 0$$

Når vi bruker denne metoden, må vi først skrive systemet på en form som viser koeffisientene i ligning-systemet. Dersom koeffisientene inneholder avhengige variable ved iterasjon  $m + 1$ , må disse erstattes med verdier fra iterasjon  $m$ . Men dette er ofte det samme som å Taylor-utvikle koeffisientene rundt iterasjon  $m$  og bruke bare 1. ledd i utviklingen.

Vi kan derfor vente at metoden med etterslep generelt konvergerer langsommere enn når vi bruker to ledd av Taylor-utviklingen. Metoden med etterslep brukes helst for partielle differanseligninger der f. eks. materialparametrene er funksjon av de avhengige variable, f.eks. temperaturavhengige varmelednings-tall.

### 3.4.3 EKSEMPLER PÅ STOPPKRITERIER

Vi setter:

$$\delta y_i = y_i^{m+1} - y_i^m, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.4.13)$$

der  $N$  er antall beregningspunkt

#### 1. Test for absolutte størrelser.

$$t_{a1} = \max(|\delta y_i|) < tol_a \quad (3.4.14a)$$

$$t_{a2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N |\delta y_i| < tol_a \quad (3.4.14b)$$

$$t_{a3} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\delta y_i)^2} < tol_a \quad (3.4.14c)$$

#### 2. Test for relative størrelser.

$$t_{r1} = \max \left( \left| \frac{\delta y_i}{y_i^{m+1}} \right| \right) < tol_r, \quad y_i^{m+1} \neq 0 \quad (3.4.15a)$$

$$t_{r2} = \frac{\sum_{i=1}^N |\delta y_i|}{\sum_{i=1}^N |y_i^{m+1}|} < tol_r \quad (3.4.15b)$$

$$t_{r3} = \frac{\max(|\delta y_i|)}{\max(|y_i^{m+1}|)} < tol_r \quad (3.4.15c)$$

Dersom de størrelsene vi beregner er av størrelsesorden 1, er det likegyldig om vi bruker en absolutt eller en relativ test. Vanligvis bruker vi en relativ test da denne samsvarer med uttrykket ”antall korrekte siffer”. Dersom den størrelsen vi beregner er liten i hele sitt beregningsområde, bruker vi vanligvis en absolutt test.

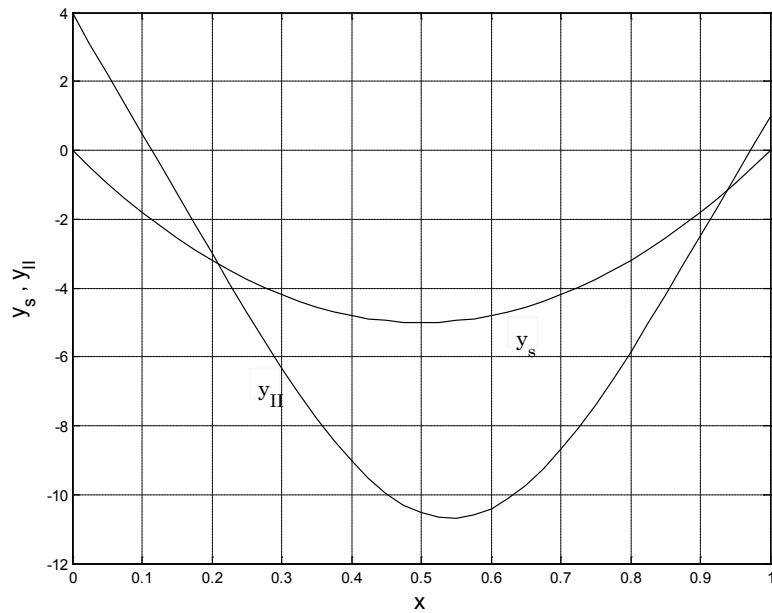
La oss bruke testene ovenfor på problemet i avsnitt 2.2 der vi skal beregne løsningen  $y_{II}$  gitt på fig 2.8

Vi gjentar ligningen fra 3.4.1:

$$y''(x) = \frac{3}{2}y^2 \quad (3.4.16a)$$

$$y(0) = 4, \quad y(1) = 1 \quad (3.4.16b)$$

Vi tipper et startprofil gitt ved parabelen  $y_s = 20(x - x^2)$ ,  $0 < x < 1$ . Denne parabelen, samt løsningen  $y_{II}$ , er plottet i figuren nedenfor.



Figur 3.17

I dette tilfellet er det naturlig å bruke et relativt stoppkriterium da  $y_{II}$  ligger i intervallet  $[4, -10.68]$ . Med ni iterasjoner får vi følgende tabell:

Iter.nr.	$t_{r2}$	$t_{r3}$
1	$7.25 \cdot 10^{-1}$	$7.55 \cdot 10^{-1}$
2	$8.70 \cdot 10^{-1}$	$8.20 \cdot 10^{-1}$
3	$8.49 \cdot 10^{-1}$	$6.65 \cdot 10^{-1}$
4	$4.96 \cdot 10^{-1}$	$5.85 \cdot 10^{-1}$
5	$2.10 \cdot 10^{-1}$	$2.80 \cdot 10^{-1}$
6	$4.62 \cdot 10^{-2}$	$6.07 \cdot 10^{-2}$
7	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$
8	$4.68 \cdot 10^{-6}$	$5.79 \cdot 10^{-6}$
9	$2.26 \cdot 10^{-11}$	$2.55 \cdot 10^{-11}$

Iterasjonsforløpet er typisk for Newton-iterasjon da startverdiene våre ligger et godt stykke fra de korrekte verdiene. For de seks første iterasjonene minker feilen langsomt, mens vi har rask konvergens for de siste tre iterasjonene. Vi ser også at det er liten forskjell mellom de to kriteriene i dette tilfellet.

Nedenfor vises listing av programmet **avvikr**.

```
clear
h = 0.025; % skritt lengde
ni = 1/h; % Antall intervall
% h må velges slik at ni er et heltall
n = ni-1; % Antall ligninger
fac = 3.0*h*h;
a = ones(n,1); % underdiagonal
c = a; % overdiagonal
% a og c blir ikke ødelagt under eliminasjons-prosessen og
% kan derfor legges utenfor iterasjonsløkka.
x = (h:h:1.0-h)';
ym = -20*x.* (1-x); % Startverdier
b = zeros(n,1); d = b; dy = b; % allokering
fprintf(' Itr. \n');
for it = 1:9
    b = -(2.0 + fac*ym); % hoveddiagonal
    d = -(fac*0.5)*ym.^2; % høyre side
    d(n) = d(n)- 1.0;
    d(1) = d(1) - 4.0;
    ym1 = tdma(a,b,c,d); % Løser ligningsystemet
    dy = abs(ym1 - ym);
    tr3 = max(dy)/max(abs(ym));
    tr2 = sum(dy)/sum(abs(ym));
    ym = ym1; % Oppdatering av y-verdier
    fprintf(' %10d %9.2e %9.2e \n',it,tr2, tr3);
end
```

Programmet **avvika** som beregner de absolutte kriteriene, er temmelig identisk med **avvikr** bortsett av vi erstatter beregningen av  $t_{r2}$  og  $t_{r3}$  med

```
ta1 = max(dy);
ta2 = sum(dy)/n;
ta3 = sqrt(dot(dy,dy))/n;
```

### 3.4.4 LIGNINGER PÅ DELTA-FORM

Fra lign. 3.4.8

$$\begin{aligned} (y_i^{m+1})^2 &= (y_i^m + \delta y_i)^2 = (y_i^m)^2 + 2y_i^m \cdot \delta y_i + (\delta y_i)^2 \\ &\approx (y_i^m)^2 + 2y_i^m \cdot \delta y_i = y_i^m(2y_i^{m+1} - y_i^m) \end{aligned}$$

Vi har her innført  $\delta y_i = y_i^{m+1} - y_i^m$  slik at ligningsystemet løses m.h.p  $y_i^{m+1}$ . Dette er ikke nødvendig. Vi kan beholde  $\delta y_i$  som ukjent og løse systemet m.h.p. delta-størrelsene. Ved å innføre  $y_k^{m+1} = y_k^m + \delta y_k$ ,  $k = i-1, i, i+1$  samt  $(y_i^{m+1})^2 \approx (y_i^m)^2 + 2y_i^m \cdot \delta y_i$  i (3.4.5) eventuelt (3.4.9), får vi følgende ligningsystem

$$\begin{aligned} -(2 + 3y_1^m h^2) \delta y_1 + \delta y_2 &= -(y_2^m - 2y_1^m + 4) + \frac{3}{2}(y_1^m h)^2 \\ \delta y_{i-1} - (2 + 3y_i^m h^2) \delta y_i + \delta y_{i+1} &= -(y_{i+1}^m - 2y_i^m + y_{i-1}^m) + \frac{3}{2}(y_i^m h)^2 \\ \delta y_{N-1} - (2 + 3y_N^m h^2) \delta y_N &= -(1 - 2y_N^m + y_{N-1}^m) + \frac{3}{2}(y_N^m h)^2 \end{aligned} \quad (3.4.17a)$$

der  $i = 2, 3, \dots, N-1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Vi har benyttet at  $y_0 = 4$ ,  $\delta y_0 = 0$ ,  $y_{N+1} = 1$ ,  $\delta y_{N+1} = 0$  fra randbettingelsene. For hver iterasjon oppdateres y-verdiene ved:

$$y_i^{m+1} = y_i^m + \delta y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.17b)$$

Når vi har funnet ut hvordan iterasjonen forløper, kan vi f. eks. legge inn stopp-kriterier som  $\max |\delta y_i| < \varepsilon_1$  eller  $\max |\delta y_i / y_i^{m+1}| < \varepsilon_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Iterasjonsløkka i programmet **delta34** ser slik ut med bruk av (3.4.15c):

```
it = 0; itmax = 10; dymax = 1.0; RelTol = 1.0e-5;
while (dymax > RelTol) & (it < itmax)
    it = it + 1; b = -(2.0 + fac*y); % hoveddiagonal
    d = (fac*0.5)*y.^2; % høyre side
    for j = 2:n-1
        d(j) = d(j) - (y(j+1)-2*y(j) + y(j-1));
    end
    d(n) = d(n) - (1.0 - 2*y(n) + y(n-1));
    d(1) = d(1) - (y(2)-2*y(1) + 4.0);
    dy = tdma(a,b,c,d); % Løser ligningsystemet
    y = y + dy; % Oppdatering av y-verdier
    dymax = max(abs(dy./y)); % Beregner relativ avvik
    fprintf(' %10d      %12.3e \n', it, dymax);
end
```

### 3.4.5 KVASILINEARISERING

I det foregående har vi først diskretisert ligningen og deretter linearisert den. Det er fullt mulig å linearisere ligningen først. Dette blir gjerne kalt kvasilinearisering. La oss se på en generell, ikke-lineær 2. ordens ligning:

$$y''(x) = f(x, y, y') \quad (3.4.18)$$

Skriver (3.4.18) på formen:

$$g(x, y, y', y'') \equiv y''(x) - f(x, y, y') = 0 \quad (3.4.19)$$

Setter

$$\delta y = y_{m+1} - y_m, \quad \delta y' = y'_{m+1} - y'_m, \quad \delta y'' = y''_{m+1} - y''_m \quad (3.4.20)$$

der  $m$  og  $m + 1$  som vanlig betyr iterasjonsnummer. (I storparten av dette avsnittet skriver vi iterasjonsnumrene som subindekser)

Ved rekkeutvikling av (3.4.19) rundt iterasjon  $m$ :

$$\begin{aligned} g(x, y_{m+1}, y'_{m+1}, y''_{m+1}) &\approx g(x, y_m, y'_m, y''_m) \\ &+ \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_m \delta y + \left( \frac{\partial g}{\partial y'} \right)_m \delta y' + \left( \frac{\partial g}{\partial y''} \right)_m \delta y'' \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Anta at vi har iterert så mange ganger at

$g(x, y_{m+1}, y'_{m+1}, y''_{m+1}) \approx g(x, y_m, y'_m, y''_m) \approx 0$  som innsatt i (3.4.21) gir:

$$\left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_m \delta y + \left( \frac{\partial g}{\partial y'} \right)_m \delta y' + \left( \frac{\partial g}{\partial y''} \right)_m \delta y'' = 0 \quad (3.4.22)$$

Ved derivasjon av (3.4.19):

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad \frac{\partial g}{\partial y''} = 1 \quad (3.4.23)$$

som innsatt i (3.4.22) gir:

$$\delta y'' = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \delta y + \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_m \delta y' \quad (3.4.24)$$

Ved å sette inn fra (3.4.20) i (3.4.24) samt bruk av (3.4.18), får vi:

$$\begin{aligned} y''_{m+1} - \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_m \cdot y'_{m+1} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \cdot y_{m+1} \\ = f(x, y_m, y'_m) - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \cdot y_m - \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_m \cdot y'_m \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

Skriver tilslutt (3.4.25) med vår vanlige notasjon med iterasjonsnummer oppe:

$$\begin{aligned} (y'')^{m+1} - \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_m \cdot (y')^{m+1} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \cdot y^{m+1} \\ = f(x, y^m, (y')^m) - \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_m \cdot (y')^m - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \cdot y^m \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Vi har brukt en 2. ordens ligning som eksempel, men (3.4.24) – (3.4.26) lar seg umiddelbart generalisere til en n'te ordens ligning, f.eks. en 3. ordens:

$$\begin{aligned}
(y''')^{m+1} - \left( \frac{\partial f}{\partial y''} \right) \cdot (y'')^{m+1} - \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_m \cdot (y')^{m+1} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \cdot y^{m+1} \\
= f(x, y^m, (y')^m, (y'')^m) - \left( \frac{\partial f}{\partial y''} \right)_m \cdot (y'')^m \\
- \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_m \cdot (y')^m - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \cdot (y)^m
\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

**Eksempel 3.8****1)**

$$\text{Ligningen } y''(x) = \frac{3}{2}y^2$$

Her blir  $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y$  som innsatt i (3.4.26) gir:

$$(y'')^{m+1} - 3y^m \cdot y^{m+1} = -\frac{3}{2}(y^m)^2$$

Ved å diskretisere med sentraldifferanser  $y''_i \approx \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$ : får vi følgende differanseligning:

$$y_{i-1}^{m+1} - (2 + 3h^2 y_i^m) y_i^{m+1} + y_{i+1}^{m+1} = -\frac{3}{2}(hy_i^m)^2$$

som er i overenstemmelse med (3.4.9).

**2)**

$$\text{Falkner-Skan-ligningen } y'' + y \cdot y'' + \beta \cdot [1 - (y')^2] = 0$$

Vi skriver ligningen på formen:

$$y'' = - (y \cdot y'' + \beta \cdot [1 - (y')^2]) = f(x, y, y', y'')$$

Lign. (3.4.27) gir med  $\frac{\partial f}{\partial y''} = -y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y'} = 2\beta y'$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -y''$

$$\begin{aligned}
(y''')^{m+1} + y^m \cdot (y'')^{m+1} - 2\beta(y')^m \cdot (y')^{m+1} + (y'')^m \cdot y^{m+1} \\
= -\beta \left( 1 + [(y')^m]^2 \right) + y^m \cdot (y'')^m
\end{aligned}$$

Bruk sentraldifferanser og verifiser lign.(F.0.16) i appendiks F

### 3.5 LØSNING AV BLASIUS LIGNING VED BRUK AV DIFFERANSEMETOODE

Fra eksempel 2.7:

$$f''' + f \cdot f'' = 0 \quad (3.5.1)$$

med randbetingelser:

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 0 \\ f'(\eta_\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Dersom vi bruker sentraldifferanser for de deriverte, får vi følgende utrykk:

$$\begin{aligned} f_i''' &= (f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - 2f_{i-2})/2h^3 + O(h^2) \\ f_i'' &= (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/h^2 + O(h^2) \\ f_i' &= (f_{i+1} - f_{i-1})/2h + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

$$\text{der } h = \Delta\eta$$

Ved å sette (3.5.2) inn i (3.5.1) med påfølgende linearisering, vil vi få et ligningsystem med pentadiagonal koeffisientmatrise - en diagonal for hvert indeks, som skrives (bruker  $y$  istedenfor  $f$  her):

$$e_i \cdot y_{i-2}^{m+1} + a_i \cdot y_{i-1}^{m+1} + b_i \cdot y_i^{m+1} + c_i \cdot y_{i+1}^{m+1} + f_i \cdot y_{i+2}^{m+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.3)$$

Systemet i (3.5.3) har formen ( $y$  ved iterasjon  $m+1$ ):

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} b_1 & c_1 & f_1 & & & & y_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & & & y_2 \\ e_2 & a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ e_i & a_i & b_i & c_i & f_i & & y_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ e_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & f_{n-2} & & y_{n-2} \\ e_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & & & y_{n-1} \\ e_n & a_n & b_n & & & & y_n \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Dersom vi innfører  $y_i^{m+1} = y_i^m + \delta y_i$  kan vi også skrive (3.5.3) på delta-form:

$$\begin{aligned} e_i \cdot \delta y_{i-2} + a_i \cdot \delta y_{i-1} + b_i \cdot \delta y_i + c_i \cdot \delta y_{i+1} + f_i \cdot \delta y_{i+2} \\ = d_i - (e_i \cdot y_{i-2}^m + a_i \cdot y_{i-1}^m + b_i \cdot y_i^m + c_i \cdot y_{i+1}^m + f_i \cdot y_{i+2}^m), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Diagonalene  $e_i = 1$  og  $f_i = 1$  er konstante i vårt tilfelle, slik at forskjellen mellom det tridiagonale og pentadiagonale systemet ikke er så stort her.

Systemene i (3.5.3) og (3.5.4) er behandlet i appendiks F for Falkner-Skan ligningen og er programmert i **fskpenta** og **fskdelta**. I tillegg er det også vist

hvordan vi kan bruke Matlab-løseren **bvp4c** og **bvp5c**.

Vi prøver om vi kan slippe unna med en tridiagonal matrise og skriver (3.5.1) som et system av to differensialligninger ved å innføre

$$f'(\eta) = g(\eta) \quad (3.5.5)$$

(3.5.1) kan nå skrives:

$$f' = g \quad (3.5.6a)$$

$$g'' + f \cdot g' = 0 \quad (3.5.6b)$$

med randbettingelser:

$$f(0) = g(0) = 0, \quad g(\eta_\infty) = 1 \quad (3.5.6c)$$

Innsatt fra (3.5.2) i (3.5.6b)

$$g_{i-1}^{m+1} - 2g_i^{m+1} + g_{i+1}^{m+1} + \frac{h}{2}f_i^{m+1}(g_{i+1}^{m+1} - g_{i-1}^{m+1}) = 0 \quad (3.5.7a)$$

Linearisering:

$$f_i^{m+1}(g_{i+1}^{m+1} - g_{i-1}^{m+1}) \approx f_i^m g_{i+1} - f_i^m g_{i+1}^m + f_i g_{i+1}^m - f_i^m g_{i-1} + f_i^m g_{i-1}^m - f_i g_{i-1}^m \quad (3.5.7b)$$

der størrelser uten iterasjonsindeks heretter henviser til iterasjon  $m + 1$  der dette er aktuelt.

(3.5.7a) får etter lineariseringen følgende form:

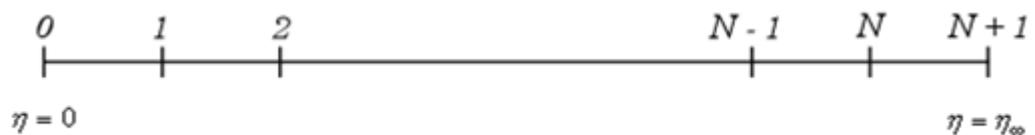
$$(1 - \frac{h}{2}f_i^m)g_{i-1} - 2g_i + (1 + \frac{h}{2}f_i^m)g_{i+1} = -\frac{h}{2}(g_{i+1}^m - g_{i-1}^m)\delta f_i \quad (3.5.8a)$$

$$\text{der } \delta f_i = f_i^{m+1} - f_i^m$$

(3.5.6a) blir nå:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hg_i \quad (3.5.8b)$$

Nummerering:



Figur 3.18

Deler intervallet  $[0, n_\infty]$  inn i  $N + 1$  like deler der  $\Delta\eta = h = \eta_\infty/(N + 1)$  som gir  $\eta_i = \Delta\eta \cdot i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ . Antall ligninger blir da  $N$ .

Systemet i (3.5.8) er bitridiagonalt og kan løses med Douglas-algoritmen gitt i (3.3.19). Dette er vist i appendiks F. I 3.5.8a har vi ledet  $-\frac{h}{2}(g_{i+1}^m - g_{i-1}^m)\delta f_i$ . Dersom vi kan sløyfe dette ledet, er vi på vei mot et tridiagonalt system. En forutsetning for å kunne gjøre dette, er at vi har gode startverdier. Da kan vi anta at dette ledet er lite under hele iterasjonsprosessen, ikke bare ved konvergens. Her har vi gode startverdier ved bruk av Pohlhausen-polynom, se appendiks F, slik at vi tar risken på å neglisjere dette ledet.

Har da fått følgende ligningsystem:

$$-f_{i-1} + f_{i+1} - 2hg_i = 0 \quad (3.5.9a)$$

$$\left(1 - \frac{h}{2}f_i^m\right)g_{i-1} - 2g_i + \left(1 + \frac{h}{2}f_i^m\right)g_{i+1} = 0 \quad (3.5.9b)$$

Systemet er fremdeles bi-tridiagonalt system, men ved å løse (3.5.9a) ved numerisk integrasjon, får vi:

$$f_i = \int_0^{\eta_i} g d\eta \quad (3.5.10)$$

Vi kan f.eks. bruke trapes-metoden som har en nøyaktighet av  $O(h^2)$  til å løse (3.5.10). (3.5.9b) er nå på tridiagonal form.

Når vi har beregnet  $f'(\eta) = g(\eta)$ , finner vi skjærspenningen  $f''(\eta) = g'(\eta)$ :

$$f''_i = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5.11)$$

Spesielt for  $i = 0$ :

$$f''_0 = \frac{g_1 - g_{-1}}{2h} = \frac{f_i - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = \frac{f_1 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f'_0 = g_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} = 0 \text{ som gir } f_{-1} = f_1$$

Innsatt ovenfor:

$$f''_0 = \frac{2f_1}{h^2} + O(h^2) \quad (3.5.12)$$

I avsnitt 3.6 viser vi at  $f''_0 = \frac{2f_1}{h^2} + O(h^3)$

Krav til diagonaldominans fra (3.1.4):

$$\left|1 + \frac{h}{2}f_1^m\right| < 2, \quad \left|1 + \frac{h}{2}f_i^m\right| + \left|1 - \frac{h}{2}f_i^m\right| \leq 2, \quad \left|1 - \frac{h}{2}f_N^m\right| < 2$$

$$\text{med } i = 2, 3, \dots, N - 1$$

Alle tre betingelsene lar seg lett oppfylle ved å kreve  $\frac{h}{2}f_i^m < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Utskrift fra programmet **bladiff** er gitt nedenfor. For å få samme nøyaktighet som ved skyteteknikk, må vi her bruke en  $h$  som er ti ganger mindre. På grunn av leddet vi sløyfet, konvergerer iterasjons-prosessen langsommere enn i programmene **fskpenta** og **fskdelta**.

```

Max. number of iterations, itmax .....15
Max. allowable error in iteration, epsi ...1.000e-005
Grid-spacing, deta .....1.000e-002
Print-spacing .....2.000e-001

Number of grid points =      580
Max. value of eta      =     5.8000
Estimate of f''(0)      =     0.3448

Iteration
no.    s = f''(0)          ds

      1  4.2357e-001  7.874e-002
      2  4.5531e-001  3.174e-002
      3  4.6535e-001  1.003e-002
      4  4.6835e-001  3.003e-003
      5  4.6924e-001  8.846e-004
      6  4.6949e-001  2.594e-004
      7  4.6957e-001  7.594e-005
      8  4.6959e-001  2.223e-005
      9  4.6960e-001  6.505e-006

point   eta       f        f'       f"
      0  0.000  0.00000e+000  0.00000e+000  4.69599e-001
  580  5.800  4.58323e+000  1.00000e+000  4.63867e-006

```

### 3.6 DERIVERTE RANDBETINGELSER

La oss se nærmere på nøyaktigheten av deriverete randbetingelser. Vi skal f. eks. beregne høyere ordens deriverete på randen etter at vi har løst differanseligningen. Anta at vi har løst en differensialligning numerisk, og har beregnet en serie med verdier for  $y_i$  med tilhørende abscisser  $x_i$  der  $x_i = i \cdot h, i = 0, 1, \dots$  og  $h = \Delta x$ . Anta at vi har gitt følgende randbetingelse:

$$y'(0) = \alpha \quad (3.6.1)$$

La oppgava bestå i å beregne  $y''(0)$ . Vi bruker sentraldifferanser:

$$y''(0) = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.6.2)$$

$$y'(0) = \alpha = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O(h^2) \text{ som gir:} \quad (3.6.3)$$

$$y_{-1} = y_1 - 2h\alpha + O(h^3) \quad (3.6.4)$$

(3.6.4) innsatt i (3.6.2) gir:

$$y''(0) = \frac{2(y_1 - y_0 - h\alpha)}{h^2} + O(h) \quad (3.6.5)$$

Vi ser av (3.6.5) at uttrykket for  $y''(0)$  nå er av orden  $h$  isteden for  $h^2$  som i (3.6.2). Årsaken er at uttrykket for  $y'$  i (3.6.3) har  $h$  i nevneren. Bruk av (3.6.3) i (3.6.2) er det samme som å bruke foroverdifferanser for  $y''(0)$  med nøyaktighet  $O(h)$ . (Se lign. (1.2.13) i kap.1). Dersom vi ønsker høyere nøyaktighet for  $y''(0)$  i dette tilfellet, må vi bruke et uttrykk for  $y'(0)$  som minst er av  $O(h^3)$ .

En annen måte som ofte kan brukes til å estimere nøyaktigheten, er å benytte differensialligningen. Som eksempel velger vi Falkner-Skan ligningen.

Fra eksempel 2.8:

$$f''' + ff'' + \beta \cdot [1 - (f')^2] = 0 \quad (3.6.6a)$$

med randbetingelser:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f(\eta_\infty) = 1 \quad (3.6.6b)$$

Vi ønsker å finne skjærspenningen  $f''(0)$  ved veggen. Dersom vi setter inn fra (3.6.6b) i (3.6.5), får vi følgende uttrykk:

$$f''(0) = \frac{2f_1}{h^2} + O(h) \quad (3.6.7)$$

Vi ønsker å forbedre dette uttrykket.

Rekkeutvikling rundt:

$$f(\eta) = f_0 + \eta \cdot f'_0 + \frac{\eta^2}{2} f''_0 + \frac{\eta^3}{6} f'''_0 + \frac{\eta^4}{24} f^{(4)}_0 + \frac{\eta^5}{120} f^{(5)}_0 + \dots \quad (3.6.8)$$

der indeks 0 henviser til  $\eta = 0$ . Da  $f_0 = f'_0 = 0$  fra (3.6.6b), reduseres (3.6.8) til:

$$(\eta) = \frac{\eta^2}{2} f''_0 + \frac{\eta^3}{6} f'''_0 + \frac{\eta^4}{24} f^{(4)}_0 + \frac{\eta^5}{120} f^{(5)}_0 + \dots \quad (3.6.9)$$

Ved fortløpende derivasjon av (3.6.6) og innsatt for  $\eta = 0$ :

$$\begin{aligned} f''' &= -f'' \cdot f - \beta \cdot [1 - (f')^2] \rightarrow f''_0 = -\beta \\ f^{(4)} &= -f''' \cdot f - f'' \cdot f' \cdot (1 - 2\beta) \rightarrow f^{(4)}_0 = 0 \\ f^{(5)} &= -f^{(4)} \cdot f - 2f''' \cdot f'(1 - \beta) - (1 - 2\beta) \cdot (f'')^2 \\ &\rightarrow f^{(5)}_0 = -(1 - 2\beta) \cdot (f''_0)^2 \end{aligned}$$

som innsatt i lign. (3.6.8) gir:

$$f(\eta) \approx \frac{\eta^2}{2} \left[ f''_0 - \frac{\eta}{3} \beta - \frac{\eta^3}{60} (1 - 2\beta) \cdot (f''_0)^2 \right] \quad (3.6.10)$$

Med  $\eta = \eta_1 = h$  blir (3.6.10):

$$f''_0 \approx \frac{2f_1}{h^2} + \frac{h}{3}\beta + O(h^3) \quad (3.6.11)$$

Vi ser av (3.6.11) at vi kan få betydelige avvik fra den korrekte verdien dersom vi utelater ledet  $\frac{h}{3}\beta$  når  $\beta$ -verdien er stor. Dette er f. eks. tilfellet med stagnasjonstrømningen vist i fig. 2.2, eksempel 2.8, med  $\beta = 1$ . Derimot har vi stor nøyaktighet for Blasius-ligningen med  $\beta = 0$ . Årsaken til dette er lett å innse. For  $\beta = 0$  blir  $f'''_0 = 0$ . Men da ser vi av (3.6.11) at ledet av  $O(h)$  forsvinner. Det betyr igjen at (3.6.5) gir nøyaktighet av minst  $O(h^2)$  når  $y'''(0) = 0$ . En til-strekkelig betingelse for dette, er at problemet vi skal løse er symmetrisk om  $x = 0$ . Dette er jo nettopp tilfellet med Falkner-Skan ligningen når vi har en flat plate. Det samme er tilfellet med varmeledningsproblemene i avsnitt 3.2.1 At problemet er symmetrisk, innser vi umiddelbart fra den analytiske løsningen i (3.2.7). Vår bruk av randbetingelser i forbindelsen med den numeriske løsningen, se lign. (3.2.12), gir derfor nøyaktighet av minst  $O(h^2)$ .

La oss se nærmere på hva som skjer når vi beregner  $f''_0$  for Falkner-Skan - ligningen.

Vi setter(fra (3.6.11)):

$$\tau_1 = \frac{2f_1}{h^2} \text{ og } \tau_2 = \frac{2f_1}{h^2} + \frac{h}{3}\beta = \tau_1 + \frac{h}{3}\beta \quad (3.6.12)$$

Basert på (3.6.10) kan vi også sette:

$$\tau_3 = \tau_2 \cdot \left[ 1 - \frac{h^3}{60} (1 - 2\beta) \cdot \tau_2 \right] \quad (3.6.13)$$

La oss nå løse Falkner-Skan-ligningen for  $\eta = 0.01$  for forskjellige verdier av  $\beta$  og beregne skjærspenningene  $\tau_1$  og  $\tau_2$  som en tilnærmelse av  $f''_0$ . Husk at  $f_1 = f(0.01)$  og  $h = 0.01$ . Tabellen nedenfor viser en nøyaktig beregning basert på **fsksec** samt Maple.

$\beta$	$f_1$	$\tau_1$	$\tau_2$
0.0	$2.348000 \cdot 10^{-5}$	0.469600	0.469600
0.5	$4.630069 \cdot 10^{-5}$	0.926013	0.927681
1.0	$6.146272 \cdot 10^{-5}$	1.229254	1.232588
1.5	$7.361121 \cdot 10^{-5}$	1.472224	1.477224

tabell 1

Verdiene for  $\tau_2$  er de korrekte verdiene for  $f''_0$  med de angitte siffrene. Det er ikke nødvendig å bruke (3.6.13) i dette tilfellet p.g.a. at verdien av  $h$  er så liten. La oss deretter løse Falkner-Skan-ligningen med bruk av **fskpenta** og  $h = 0.01$ .

$\beta$	$f_1$	$\tau_1$	$\tau_2$
0.0	$2.34801 \cdot 10^{-5}$	0.469602	0.469602
0.5	$4.63841 \cdot 10^{-5}$	0.927682	0.929349
1.0	$6.16297 \cdot 10^{-5}$	1.232594	1.235927
1.5	$7.38617 \cdot 10^{-5}$	1.477234	1.482234

tabell 2

Her får vi oss en overraskelse. I tabell 2 er verdiene for  $\tau_2$  mer nøyaktige enn verdiene for  $\tau_1$  unntatt for  $\beta = 0$  (Blasius) der vi vet at  $\tau_1$  er nøyaktig. Årsaken finner vi når vi sammenligner verdiene for  $f_1$  i de to tabellene, der verdiene i tabell 1 er de nøyaktige. **fskpenta** beregner litt unøyaktige verdier for  $f_1$  for alle  $\beta$ -verdiene, men på en slik måte at verdiene for  $f''_0$  er gode nok. Dette vil selvfølgelig ikke gjelde for andre ligninger. Vi ser at skal vi bruke slike korrekjonsformeler, må vi ha nøyaktige verdier, her for  $f_1$ . Matlab-program som f.eks. **ode45** og **bvp4c** regner med variabel skritt lengde og korrigerer automatisk når det behøves.

### 3.7 ITERASJONSMETODER VED LØSNING AV ODL

Dersom vi skal finne nullpunktene av ligningen  $f(x) = 0$ , kan vi f.eks prøve Newton-Raphsons metode:

$$x^{m+1} = x^m - \frac{f(x^m)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x^m)}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.7.1)$$

der  $m$  som vanlig angir iterasjonsnummer og  $x^0$  er en startverdi. Anta nå at vi har et system av  $N$  ligninger:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) &= 0 \\ &\dots \\ &\dots \\ f_N(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Dersom vi bruker Newton-Raphsons metode på (3.7.2), betyr dette at vi må rekkeutvikle rundt punktet  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ved iterasjon  $m$ . Resultatet er at vi må beregne en determinant med  $N^2$  ledd for hver iterasjon. Vi gjør nå den drastiske antagelsen at vi kan bruke (3.7.1) for hver av ligningene i (3.7.2). Dette betyr at vi antar at bare  $x_1$  varierer i den første ligningen, bare  $x_2$  varierer i den andre osv.

Vi får da følgende system:

$$\begin{aligned} x_1^{m+1} &= x_1^m - \frac{f_1(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)} \\ x_2^{m+1} &= x_2^m - \frac{f_2(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)}{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)} \\ x_3^{m+1} &= x_3^m - \frac{f_3(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)}{\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)} \\ &\text{osv.} \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

der vi iterere fra  $m = 0$ .

Vi kan selvfølgelig ikke regne med å ha 2. ordens konvergens nær en rot når vi bruker (3.7.3) som vi har med vanlig Newton-Raphsons metode. Men noen forbedringer kan gjøres. Fra (3.7.3) ser vi at når  $x_1^{m+1}$  er funnet fra den første ligningen, kan vi sette denne verdien inn i den andre ligningen istedenfor  $x_1^m$ . Tilsvarende for de påfølgende ligningene, slik at (3.7.3) nå kan skrives:

$$\begin{aligned}
x_1^{m+1} &= x_1^m - \omega \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)}{f_1(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)} \\
x_2^{m+1} &= x_2^m - \omega \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{m+1}, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)}{f_2(x_1^{m+1}, x_2^m, x_3^m, \dots, x_N^m)} \\
x_3^{m+1} &= x_3^m - \omega \frac{\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, x_3^m, \dots, x_N^m)}{f_3(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, x_3^m, \dots, x_N^m)}
\end{aligned} \tag{3.7.4}$$

osv.

Legg merke til at vi har tatt med en faktor  $\omega$  i håp om å forbedre iterasjonsprosessen ytterligere. (3.7.4) kan brukes både for lineære og ikke-lineære ligninger. La oss forsøke å løse følgende velkjente ligning fra avsnitt 2.2 og 3.4:

$$y''(x) = \frac{3}{2}y^2(x) \tag{3.7.5a}$$

$$y(0) = 4, \quad y(1) = 1 \tag{3.7.5b}$$

der en av løsningene er gitt ved:  $y = \frac{4}{(1+x)^2}$

Vi diskretiserer (3.7.5) med bruk av sentraldifferanser slik at den i'te ligningen blir

$$f_i = y_{i-1} - \left( 2y_i + \frac{3}{2}h^2y_i^2 \right) + y_{i+1} \tag{3.7.6}$$

(Se avsnitt 3.4)

Utfører derivasjonen som angitt i 3.7.4:

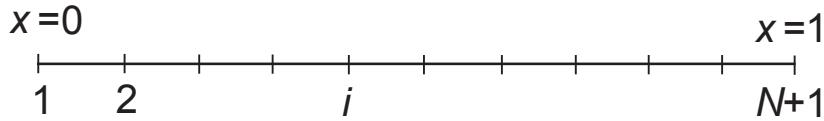
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} = -(2 + 3h^2y_i) \tag{3.7.7}$$

Systemet i (3.7.4) blir i vårt tilfelle: Utfør for  $i = 2, 3, \dots, N$

$$\begin{aligned}
f_i &= y_{i-1}^m - \left[ 2y_i^m + \frac{3}{2}(hy_i^m)^2 \right] + y_{i+1}^m \\
df_i &\equiv \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = -(2 + 3h^2y_i^m) \\
\delta y_i &= -\omega \frac{f_i}{df_i} \\
y_i^{m+1} &= y_i^m + \delta y_i
\end{aligned} \tag{3.7.8}$$

$N + 1$  er her antall punkt og (3.7.8) blir utført for hver iterasjon.

Vi har delt intervallet  $[0, 1]$  i  $N + 1$  deler slik at  $h = \frac{1}{N}$  og  $x_i = (i - 1) \cdot h$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + 1$  som figuren nedenfor viser.



Figur 3.19

Fra (3.7.8) innsatt for  $i = 1$  og  $i = N$  med bruk av (3.7.5b):

$$f_1 = 4 - \left[ 2y_1^m + \frac{3}{2}(hy_1^m)^2 + y_2^m \right] \quad (3.7.9a)$$

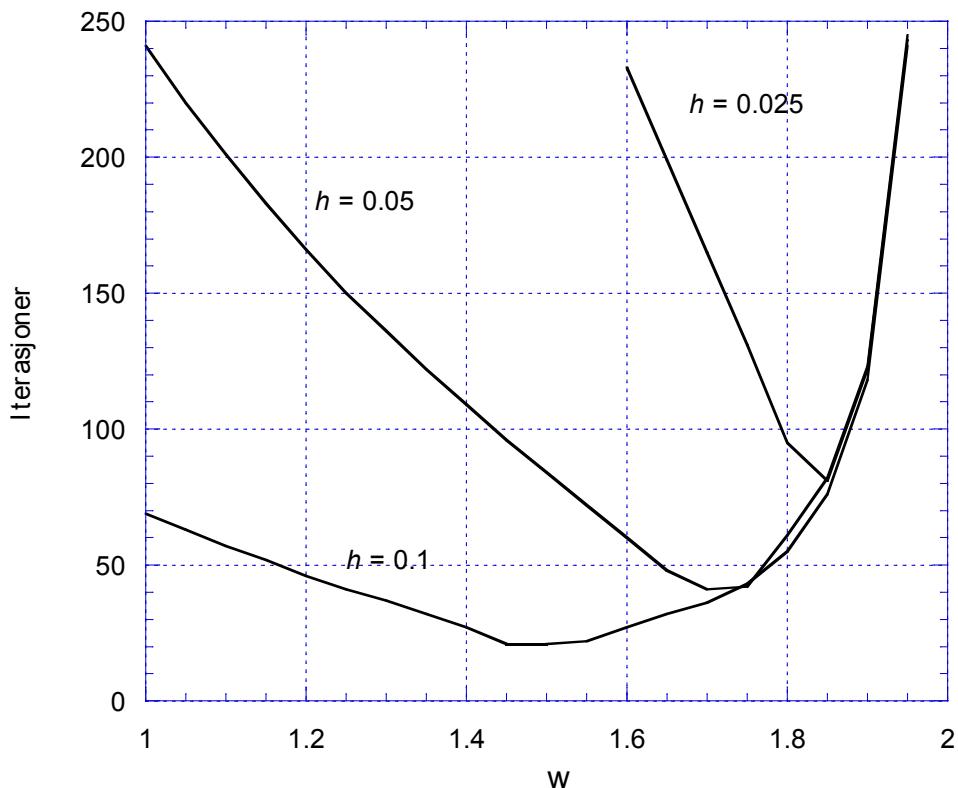
$$f_N = y_{N-1}^{m+1} - \left[ 2y_N^m + \frac{3}{2}(hy_N^m)^2 \right] + 1 \quad (3.7.9b)$$

Ligningsystemet i (3.7.8) og (3.7.9) er programmert som vist i Matlabprogrammet **nlsor**.

```
%===== nlsor =====
clear;
h = input(' Skritt lengde h = ? ');
w = input(' Relaksasjonsfaktor w = ? ');
ni = 1/h; % Antall intervall. h velges slik at ni er et heltall
np = ni + 1; % Antall punkt
fprintf('\n Skritt lengde h = %9.3e \n',h);
fprintf(' Relaksasjonsfaktor w = %6.3f \n',w);
y = zeros(np,1); % Initialverdier
y(1) = 4.0; y(np) = 1.0;
epsi = 1.0e-5; it = 0; test = 1.0; h2 = h*h;
while (test > epsi)
    abserr = 0.0;
    for k = 2: ni
        f = y(k-1) - y(k)*(2 + 1.5*h2*y(k)) + y(k+1);
        df = - (2 + 3*h2*y(k));
        dy = - w*f/df;
        y(k) = y(k) + dy;
        abserr = max(abserr, abs(dy));
    end
    test = abserr;
    it = it + 1;
end
fprintf('\n Antall iterasjoner = %8.0f \n',it);
```

Tabellen nedenfor viser antall iterasjoner som behøves for å tilfredsstille konvergenskriteriet  $\max |\delta y_i| < 10^{-6} \forall i$  for tre h-verdier når  $\omega \in [1, 2)$ . Tabellen er fremstilt grafisk i fig. 3.10

$\omega$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
1.0	69	241	823
1.1	57	201	689
1.2	46	166	574
1.3	37	136	474
1.4	27	109	385
1.5	21	84	306
1.6	27	60	233
1.7	36	41	165
1.8	55	61	95
1.9	118	123	122



Figur 3.20

Vi kan trekke noen konklusjoner fra tabellen og figuren. Kaller den  $\omega$ -verdien som gir det laveste antall iterasjoner for  $\omega_{opt}$ . Det groveste nettet med  $h = 0.1$  trenger færrest iterasjoner. For  $\omega = 1$  trengs 69 iterasjoner mens vi bare trenger 21 for  $\omega_{opt} = 1.5$ . Men kurva for  $h = 0.1$  er såpass slakk at dersom vi velger  $1.2 < \omega < 1.7$ , vil ikke dette gi noen dramatisk utslag på antall iterasjoner. Situasjonen er helt anderledes for det fineste nettet,  $h = 0.025$ . For  $\omega = 1$  trengs det hele 823 iterasjoner, mens minimum er 95 for  $\omega_{opt} = 1.8$ . Merk også at minimum antall iterasjoner her er mer enn fire ganger antallet av minimum for det groveste nettet. Kurva for det fineste nettet stiger bratt på begge sider av  $\omega_{opt}$ . Det er derfor nødvendig å finne en verdi for  $\omega$  som ligger nær  $\omega_{opt}$ .  $\omega_{opt}$

ligger for alle tilfellene i intervallet  $[1.5, 2)$  og nærmer seg 2 for minkende  $h$ . Også ved denne metoden er vi avhengige av å tippe gode nok startverdier for å oppnå konvergens. I eksemplet har vi tippet  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  som startverdier bortsett fra randverdiene. Disse startverdiene gir konvergens mot løsningen gitt i (3.7.5b). Startverdier som ligger nærmere løsningen, vil generelt gi raskere konvergens. Fra 2.4 ser vi at (3.7.5) også har en annen løsning. La det være en oppgave å undersøke om vi kan finne denne løsningen med bruk av **nlsor**. Rene iterasjonsmetoder som vist her, brukes svært sjeldent for løsning av ordinære differensialligninger. De andre metodene som vi har brukt er nesten alltid mer effektive. Derimot brukes slike metoder for løsning av partielle differensialligninger, spesielt av den elliptiske typen; se kapittel 7. Hovedgrunnen er at disse metodene trenger lite lagerplass og er lette å programmere. Fra programmet ovenfor, ser vi at det ikke er nødvendig å lagre noen koeffisientmatrise; det behøves bare lagerplass for løsningsvektoren  $\mathbf{y}$ . Størrelsen kalles *relaksasjonsfaktoren*. (3.7.3) kalles *Jacobis metode*. Dersom vi bruker (3.7.4) med  $\omega = 1$ , kalles dette *Gauss-Seidels metode*. Når (3.7.4) brukes med  $\omega > 1$ , kalles dette *suksessiv overrelaksasjon*; vanligvis forkortet til SOR. Disse tre metodene betegnes gjerne som *de klassiske iterasjonsmetodene*. Normalt er det bare SOR som brukes i praksis. Vi har tatt med dette avsnittet hovedsakelig for å vise at disse iterasjonsmetodene kan betraktes som endimensjonal bruk av Newton-Raphsons metode ( Taylorutvikling) der vi forsøker å kompensere for den grove forenklingen ved å bruke en relaksasjons-faktor. Dessuten viser det seg at fig. 3.10 er temmelig typisk for mange typer differensialligninger, både ordinære og partielle.

# KAPITTEL 4

## MATEMATISKE EGENSKAPER FOR PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER

### 4.1 MODELLIGNINGER

I appendiks B har vi utledet Navier-Stokes ligningene og energiligningen for strømning av en inkompressibel fluid:

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{DT}{Dt} &\equiv \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

Venstre side uttrykker transport (konveksjon, adveksjon) av en størrelse mens høyre side angir diffusjon av den samme størrelsen. Transporten uttrykkes ved 1. ordens ligninger som er ikke-lineære, mens vi har 2. ordens ligninger på høyre side. Disse er som ovenfor, lineære for konstante materialparametre. Mange viktige problemer lar seg beskrive av spesial-tilfeller av disse ligningene, som f.eks. grensesjiktproblemer. Siden slike spesialtilfeller selvfølgelig er lettere å løse og analysere, brukes disse ofte når vi skal utvikle regneskjema. Dette er gjerne en-dimensjonale, ikke-stasjonære tilfeller.

#### Liste over noen modell-ligninger.

Poisson-ligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (4.1.1a)$$

Laplace for  $f(x, y) = 0$  Potensialteori,  
stasjonær varmeledning, osv.

Endimensjonal diffusjonsligning.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1.1b)$$

Bølgeligningen, akustisk grunnligning.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1.1c)$$

1. ordens lineær bølgeligning. (konstant)  
(Transportligning, adveksjonsligning)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1.1d)$$

Ikke-viskøs Burgers ligning.

Modell for Eulerligningene.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1.1e)$$

Burgers ligning. Modell for  
inkompressibel Navier-Stokes ligninger.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1.1f)$$

Tricomi-ligningen.

Modell for transonisk strømning.

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1.1g)$$

Konveksjon-diffusjonsligningen.

Kalles også lineær Burgers ligning.

Modellerer en rekke av tilfellene ovenfor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1.1h)$$

Utrykkene transport, konveksjon og adveksjon blir ofte benyttet om hverandre. (4.1.1d) ovenfor er kjent som adveksjonsligningen.

## 4.2 1. ORDENS PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER

Transportsiden av basisligningene består av ledet  $\frac{D(\cdot)}{Dt}$  som er en 1. ordens partiell differensialligning (PDL). La oss derfor se nærmere på slike ved å betrakte følgende ligning:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c = 0 \quad (4.2.1)$$

Dersom  $a$  eller  $b$  er funksjoner av  $x$ ,  $y$  og  $u$ , kalles ligningen kvasilineær. Når  $a$  og  $b$  bare er funksjoner av  $x$  og  $y$ , er ligningen lineær.

Ligningen er ikke-lineær dersom  $a$  eller  $b$  også er funksjoner av  $\frac{\partial u}{\partial x}$  og/eller  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Transportsiden av f. eks. Navier-Stokes-ligningene er følgelig kvasi-lineære 1. ordens PDL, selvom vi vanligvis bruker betegnelsen ikke-lineær. Skriver (4.2.1) på formen:

$$a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c = 0 \quad (4.2.2)$$

Antar at  $u$  er kontinuerlig deriverbar:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Definerer nå karakteristikken for (4.2.1) ved:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad (4.2.3)$$

(4.2.3) innsatt ovenfor gir:

$$a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = a \frac{du}{dx}$$

som videre gir:

$$a \cdot du + c \cdot dx = 0 \quad (4.2.4)$$

Langs karakteristikken gitt ved  $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$  reduseres (4.2.1) til en ODL gitt i (4.2.4). (4.2.4) kalles kompatibilitetsligningen for (4.2.1). Dersom (4.2.1) er lineær, kan vi i prinsippet først finne karakteristikkene og deretter løse (4.2.4). Dette er generelt ikke mulig når (4.2.1) er kvasilineær eller ikke-lineær fordi  $\frac{dy}{dx}$  nå er en funksjon av  $u$ , dvs: av løsningen selv.

### Eksempel 4.1

Adveksjonsligningen (4.1.1d) gitt ved  $\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x}$  har løsningen  $u(x, t) = f(x - a_0 t)$  som er en bølge som forplanter seg med konstant profil og hastighet langs x-aksen. Bølgen beveger seg mot høyre for  $a_0 > 0$ . Karakteristikken er her gitt ved:  $\frac{dx}{dt} = a_0$ .

Denne ligningen kan integreres direkte:  $x = a_0 t + C_1$ . Konstanten  $C_1$  kan f.eks. bestemmes ved:  $x = x_0$  for  $t = 0$  som gir  $C_1 = x_0$ . Ligningen for den karakteristiske kurven bli da:  $x = a_0 t + x_0$ . (4.2.4) med  $c = 0$  og  $a = 1$  gir  $du = 0$ . Dette betyr at  $u$  som her er partikkelhastigheten, er konstant langs karakteristikken.

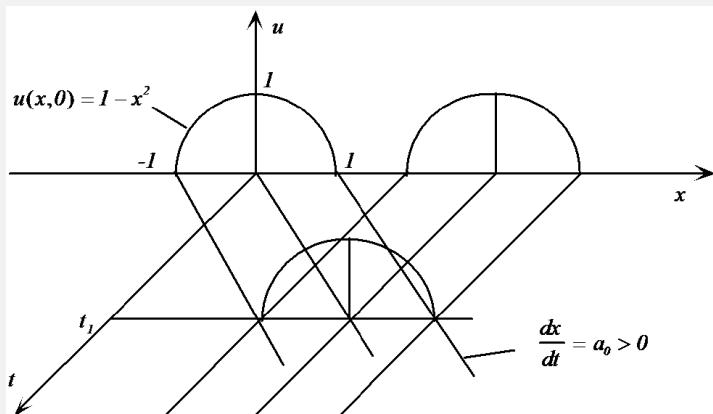
La oss som et eksempel på startverdier, velge

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{for } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases}$$

Dette er en parabel. Fra  $u(x,t) = f(x - a_0 t)$  fås  $u(x,0) = f(x)$ . Med  $\zeta = x - a_0 t$ , kan vi skrive løsningen:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - \zeta^2 & \text{for } |\zeta| \leq 1 \\ 0 & \text{for } |\zeta| > 1 \end{cases}$$

Når vi bruker  $\zeta$  som variabel, er løsningen stasjonær: Vi følger med bølgen. Fig. 4.1 nedenfor oppsummerer eksemplet.



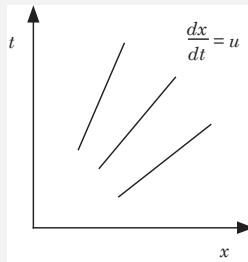
Figur 4.1

### Eksempel 4.2

Ikke-viskøs Burgers ligning (4.1.1e) er gitt ved:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Denne har løsningen  $u(x, t) = f(x - u \cdot t)$  og karakteristikker gitt ved:  $\frac{dx}{dt} = u$ . Dette er samme løsningen som i forrige eksempel, med den viktige forskjellen at nå er  $a_0$  erstattet med  $u$ . Karakteristikkenes helning varierer nå med  $x$ , som indikert på figuren på neste side.



Figur 4.2

Samme startbettingelser som i forrige eksempel, gir følgende løsning:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 - \zeta^2 & \text{for } |\zeta| \leq 1 \\ 0 & \text{for } |\zeta| > 1 \end{cases} \quad \text{der } \zeta = x - u \cdot t$$

Igjen ser vi at den eneste forskjellen fra forrige eksempel er at  $a_0$  nå er erstattet med  $u$ . Løst eksplisitt m.h.p.  $u$  der  $u(x, t) = 0$  for  $|\zeta| > 1$ :

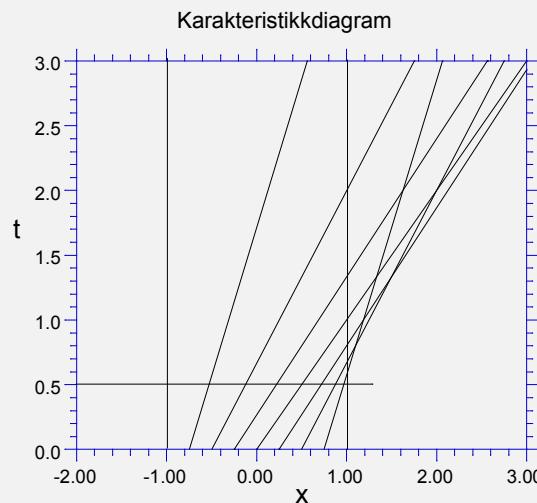
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2t^2}[(2xt - 1) \pm g(x, t)], \quad g(x, t) \\ &= \sqrt{1 - 4xt + 4t^2}, \quad |\zeta| \leq 1 \end{aligned} \quad (4.2.5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g(x, t) \pm 1}{t \cdot g(x, t)} \quad (4.2.5b)$$

Flertydig løsning inntreffer når karakteristikkene krysser hverandre. (Fig. 4.2) I dette tilfellet har  $u(x, t)$  to verdier for  $x \geq 1$ , når  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) > 0$ . Den kritiske verdien  $t_{krit}$  når dette inntreffer, skjer når  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) \rightarrow \infty$  som fra (4.2.5b) impliserer  $g(1, t) = 0 = 1 - 2t \rightarrow t_{krit} = \frac{1}{2}$ .

For  $t \leq \frac{1}{2}$  brukes (4.2.5) med positivt fortegn for  $g(x, t)$  for alle x-verdier. For  $t > \frac{1}{2}$  er den kritiske verdien av  $x$  gitt ved  $x^* = \frac{1+4t^2}{4t}$  med tilhørende u-verdi  $u^* = 1 - \frac{1}{4t^2}$ . For  $-1 \leq x \leq x^*$  brukes fremdeles (4.2.5) med positivt fortegn for  $g(x, t)$ , men for  $1 \leq x \leq x^*$  er den nedre greina av løsningen gitt ved å bruke (4.2.5) med negativt fortegn foran  $g(x, t)$ . Maksimalverdien  $u_{maks} = 1$  er hele tiden gitt ved  $x = t$ .

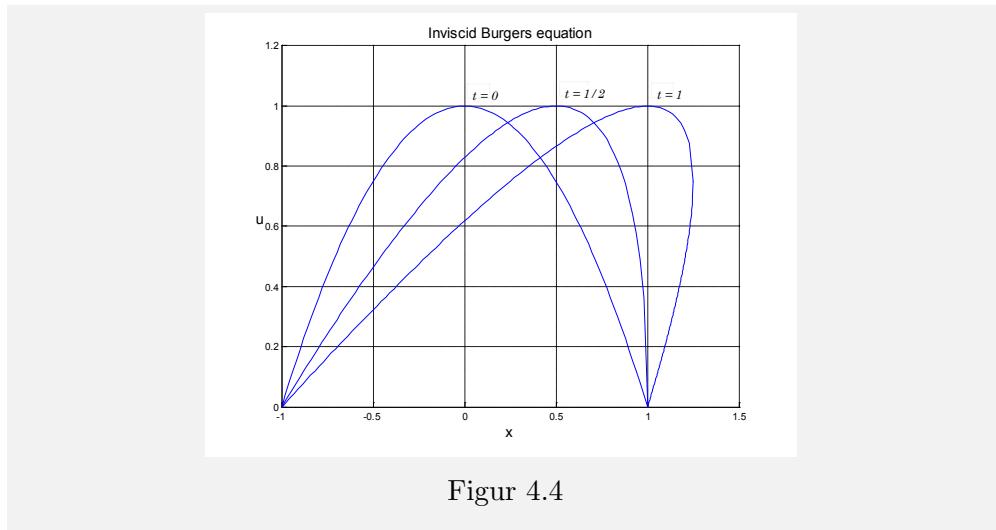
Dersom vi ønsker en entydig løsning av fysikalske grunner, må vi innføre en begrenset diskontinuitet: I gassdynamikk er dette et sjokk ; i væsker hydrauliske sprang. Løsningen er presentert i grafisk form:



Figur 4.3

Ligningen for de karakteristiske kurvene i diagrammet er gitt ved:

$$x = (1 - x_0^2) \cdot t + x_0, \quad \text{der } x = x_0 \text{ for } t = 0$$



Figur 4.4

### 4.3 KLASIFISERING AV 2. ORDENS PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER

En 2. ordens partiell differensialligning ( PDL ) i to uavhengige variable  $x$  og  $y$  kan skrives på formen:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + f = 0 \quad (4.3.1)$$

Dersom  $A, B, C$  og  $f$  er funksjoner av  $x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}$  og  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ , betegnes (4.3.1) som kvasilineær. Dersom  $A, B$  og  $C$  bare er funksjoner av  $x$  og  $y$ , betegnes (4.3.1) som semilineær. Er også  $f$  bare funksjon av  $x$  og  $y$ , er (4.3.1) lineær.

#### Eksempel 4.3

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} - e^{xy} \sin \phi &= 0 \text{ kvasilineær} \\ x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} - e^{xy} \sin \phi &= 0 \text{ semilineær} \\ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 \text{ ikke-lineær} \end{aligned}$$

En PDL som kan skrives på formen

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0 \quad (4.3.2)$$

der  $A, B, C, D, E, F$ , og  $G$  bare er funksjoner av  $x$  og  $y$ , kalles en 2. ordens lineær PDL. (4.3.2) er følgelig et spesialtilfelle av (4.3.1). Merk: Vanligvis vil vi bruke betegnelsen ”ikke-lineær” som motsetning til lineær”. La oss nå undersøke om (4.3.1) har karakteristikker.

Setter  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  og  $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$  som impliserer at  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ .  
(4.3.1) kan da skrives som et system av to 1. ordens PDL:

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial v}{\partial y} + f = 0 \quad (4.3.3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.3.3b)$$

Det kan vises at høyere ordens (kvasilineære) PDL alltid kan skrives som et system av 1. ordens PDL, men oppspaltingen kan skje på mange måter. Dersom (4.3.1) f.eks. er potensialligningen i gassdynamikk, kan vi tyde  $\phi$  som hastighetspotensialet. (4.3.3b) er da betingelsen for rotasjonsfri strømning.

Vi vil nå forsøke å skrive (4.3.3) som et totalt differensial. (Se (4.2.2) – (4.2.4)) Multipliserer (4.3.3b) med en vilkårlig skalar  $\sigma$  og adderer med (4.3.3a):

$$A \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{B + \sigma}{A} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \sigma \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{C}{\sigma} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + f = 0 \quad (4.3.4)$$

Nå har vi:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Derav:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.3.5a)$$

der vi har definert  $\lambda$  ved:

$$\lambda = \frac{dy}{dx} \quad (4.3.5b)$$

Ved å sammenligne (4.3.4) og (4.3.5a):

$$\frac{dy}{dx} = \lambda = \frac{B + \sigma}{A} = -\frac{C}{\sigma} \quad (4.3.6)$$

(4.3.6) innsatt i (4.3.4) gir kompatibilitetsligningen

$$A \frac{du}{dx} - \sigma \frac{dv}{dx} + f = 0 \quad (4.3.7)$$

Dersom karakteristikkene er reelle, dvs.  $\lambda$  er reell, har vi transformert den opprinnelige PDL til en ODL gitt i (4.3.7) langs retninger uttrykt i (4.3.5b).

Fra (4.3.6):

$$\sigma = -\frac{C}{\lambda} \quad (4.3.8a)$$

som også gir:

$$\lambda = \frac{B - \frac{C}{\lambda}}{A} \quad (4.3.8b)$$

(4.3.8b) gir følgende 2. gradsligning for bestemmelse av  $\lambda$ :

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0 \quad (4.3.9a)$$

eller ved bruk av (4.3.5b):

$$A \cdot (dy)^2 - B \cdot dy \cdot dx + C \cdot (dx)^2 = 0 \quad (4.3.9b)$$

Etter at  $\lambda$  er funnet fra (4.3.9), kan  $\sigma$  finnes fra (4.3.8) slik at kompatibilitetsligningen i (4.3.7) kan bestemmes. Istedentfor (4.3.7), kan vi sette inn for  $\sigma$  fra (4.3.6) i (4.3.7) slik at vi får følgende kompatibilitetsligning:

$$A \frac{du}{dx} + \frac{C}{\lambda} \frac{dv}{dx} + f = 0 \quad (4.3.10)$$

2. gradsligningen (4.3.9) har røtter  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  der

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.3.11)$$

Vi har tre muligheter for røttene i (4.3.11):

1.  $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow \lambda_1$  og  $\lambda_2$  er reelle
2.  $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow \lambda_1$  og  $\lambda_2$  er komplekse
3.  $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$  er reell

Den kvasilineære PDL i 1 kalles

- a) Hyperbolsk dersom  $B^2 - 4AC > 0$ :  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  reelle
- b) Elliptisk dersom  $B^2 - 4AC < 0$ : Ingen reelle røtter
- c) Parabolsk dersom  $B^2 - 4AC = 0$ :  $\lambda_1 = \lambda_2$  reell

Betegnelsene ovenfor kommer fra analogien med kjeglesnittligningen  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + F = 0$  der f.eks.  $x^2 - y^2 = 1$  framstiller en hyperbel siden  $B^2 - 4AC > 0$ .

Røttene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er karakteristikkene. Derav:

- Hyperbolsk: To reelle karakteristikker
- Elliptisk: Ingen reelle karakteristikker
- Parabolsk: En reell karakteristikk

#### Eksempel 4.4

- Bølgeligningen  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  er hyperbolsk da  $B^2 - 4AC = 4 > 0$ 
  - \* Karakteristikkene er gitt ved  $\lambda^2 = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm 1$
- Laplace-ligningen  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  er elliptisk da  $B^2 - 4AC = -4 < 0$
- Diffusjonsligningen  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  er parabolsk da  $B^2 - 4AC = 0$
- Linearisert potensial-ligning for kompressibel strømning:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad M = \text{Mach-tallet.}$$

- \*  $M = 1$ : Parabolsk (degenerert)
- \*  $M < 1$ : Elliptisk. Subsonisk strømning
- \*  $M > 1$ : Hyperbolsk. Supersonisk strømning.

## 4.4 RANDBETINGELSER FOR 2. ORDENS PDL

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 : \text{Elliptisk . Ingen reelle karakteristikker.} \quad (4.4.1a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 : \text{Hyperbolsk. To reelle karakteristikker.} \quad (4.4.1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \text{Parabolsk. En reell karakteristikk.} \quad (4.4.1c)$$

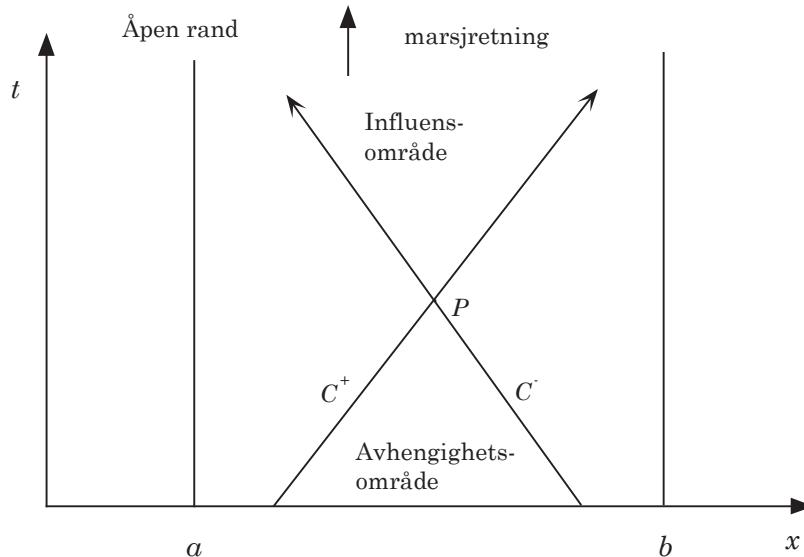
Modell-ligningene ovenfor adskiller seg ved antall reelle karakteristikker. Dette får direkte betydning for hvilke randbetingelser det er mulig å stille i de tre tilfellene, da fysikalsk informasjon forplanter seg langs karakteristikkene.

### 4.4.1 Hyperbolsk ligning

Som eksempel bruker vi bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.4.2)$$

(4.4.2) har karakteristikkene  $\frac{dx}{dt} = \pm a_0$  der  $a_0$  er bølgeforplantnings-hastigheten. Vi betegner  $\frac{dx}{dt} = +a_0$  med  $C^+$  og  $\frac{dx}{dt} = -a_0$  med  $C^-$ . Løsningsområdet for (4.4.2) er vist i fig. 4.5 nedenfor.



Figur 4.5

Løsningen i  $P$  avhenger bare av løsningen i avhengighetsområdet, samtidig som verdien i  $P$  bare invirker på punkt innefor influensområdet. Randverdier

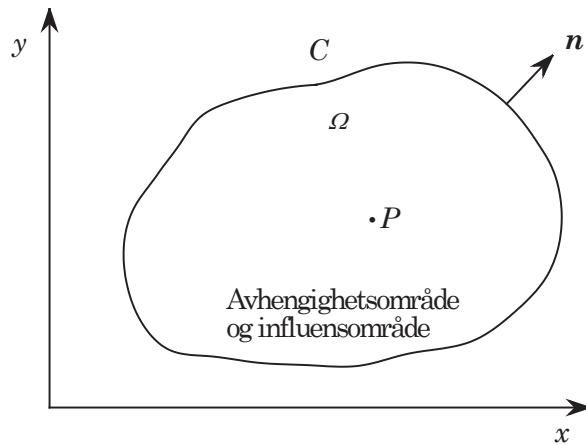
for rendene  $x = a$  og  $x = b$  kan ikke foreskrives uavhengig av initialverdier for  $t = 0$ . Løst som initialverdiproblem, må (4.4.2) også ha en initialbetingelse for  $\frac{\partial u}{\partial t}$  ved  $t = 0$ .

#### 4.4.2 Elliptisk ligning

Modell-ligning:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.4.3)$$

Løsningsområdet er som vist i fig. 4.6



Figur 4.6

Vi har ingen reelle karakteristikker. Hele området  $\Omega$ , inkludert randkurven  $C$ , er både avhengighetsområde og influensområde for  $P$ : Enhver forandring av en verdi i  $\Omega$  eller på  $C$  vil influere på verdien i  $P$ . (4.4.3) er da et rent randverdiproblem, og følgende randbetingelser er aktuelle:

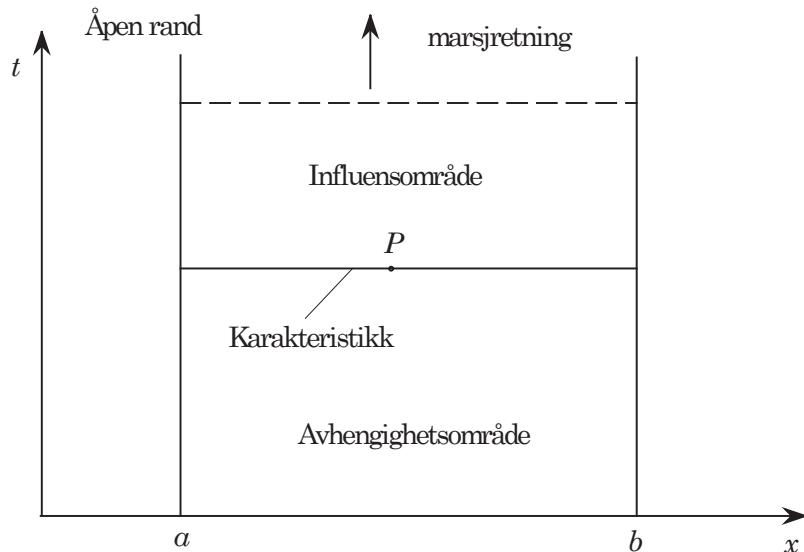
1.  $u$  gitt på  $C$ : Dirichlet-betingelse
2.  $\frac{\partial u}{\partial n}$  gitt på  $C$ : Neumann-betingelse
3.  $u$  og  $\frac{\partial u}{\partial n}$  gitt: Blandet betingelse (Robin-betingelse)

#### 4.4.3 Parabolsk ligning

Modell-ligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.4.4)$$

Løsningsområdet for (4.4.4) er gitt i fig. 4.7 nedenfor.



Figur 4.7

Fra klassifiseringsligningen (4.3.9b) finner vi:

$dt = 0 \Rightarrow t = \text{konstant}$  er karakteristikken (den karakteristiske kurva) i dette tilfellet. Derav:  $a_0 = \frac{dx}{dt} = \infty$  som betyr at forplantningshastigheten langs karakteristikken  $t = \text{konstant}$  er uendelig stor. Verdien i  $P$  avhenger av verdien i alle punktene i det fysiske rommet for tidligere verdier av tiden  $t$ , inkludert nåtiden. (4.4.4) oppfører seg som en elliptisk ligning for hver verdi  $t = \text{konstant}$ . Istedentfor  $t$ , kan vi ha en romkoordinat. Den tidslignende koordinaten kalles ofte den evolusjonsvariable: Den retningen vi marsjerer i.

## 4.5 VELFORMULERT PROBLEM. OPPSUMMERING

Et fysisk problem er velformulert (well-posed) dersom løsningen eksisterer, er entydig og er kontinuerlig avhengig av rand- og initialbetingelsene. Nedenfor lister vi opp de betingelsene som må oppfylles for at et problem som kan beskrives ved en elliptisk, parabolsk eller hyperbolsk PDL , skal være velformulert.

### **Elliptisk PDL.**

Løsningsområdet må være lukket og kontinuerlige randbetingelser må gis langs hele randkurven. (Se fig. 4.6). Randbetingelsene kan være av Dirichlet, Neumann eller blandet type.

### **Parabolsk PDL**

Løsningsområdet må være åpent i marsjretningen (evolusjonsretningen). Initialdata må gis langs den tidslignende randen, og kontinuerlige randbetingelser må gis langs den fysiske randen for løsningsområdet. Randbetingelsene er av samme type som ved elliptiske PDL.

### **Hyperbolske PDL**

Løsningsområdet må være åpent i evolusjonsretningen. Initialdata må gis langs den tidslignende randen, og kontinuerlige randbetingelser må gis langs den fysiske randen for løsningsområdet. Randbetingelsene kan være av samme type som ved elliptiske PDL. Initialdata kan ikke spesifiseres langs en karakteristisk kurve. En hyperbolsk PDL kan løses som et rent initialverdi-problem. Betegnes da ofte som et Cauchyproblem. Initialdata må da spesifiseres langs en ikke-karakteristisk kurve.

### **Litt om Navier-Stokes ligningsystemet.**

Med N-S-systemet menes N-S ligningene pluss kontinuitetsligningen og energiligningen. Dette settet er generelt mye mer komplisert enn de modell-ligningene vi har sett på ovenfor. Settet har ofte egenskapene til to eller alle tre standard-typene samtidig. (Ikke i samme punkt heldigvis)

### **Eksempel 4.5**

Kontinuitetsligningen betraktet som en ligning for tettheten  $\rho$  er en 1. ordens PDL der karakteristikken er partikkelbanen. Denne ligningen er av hyperbolsk karakter både for stasjonær og ikke-stasjonær strømning.

**Eksempel 4.6**

Bevegelsesligningene betraktet som en ligning for hastigheten  $\mathbf{V}$ , er elliptisk for stasjonær strømning og parabolsk for ikke-stasjonær strømning. Det samme kan sies om energiligningen når vi betrakter den som en ligning for temperaturen  $T$ .

Dersom vi antar at N-S-systemet beholder de matematiske egenskapene for hver av ligningene betraktet enkeltvis, kan vi si at N-S-systemet er parabolsk-hyperbolsk for ikke-stasjonær strømning og elliptisk-hyperbolsk for stasjonær strømning. Den hyperbolske karakteren skyldes i begge tilfeller kontinuitets-ligningen. Merk at evolusjonskarakteren for systemet forsvinner for en inkompressibel fluid selv om strømningen er ikke-stasjonær. Randbedingelsene for hele systemet stilles i utgangspunktet utfra betraktingene som er gitt ovenfor. I kompliserte tilfeller blir dette en blanding av matematiske, fysikalske og empiriske overlegninger.

**Tilleggsbemerkninger.**

Klassifiseringskriteriet i (4.3.11) gjelder bare for to uavhengige variable. Dersom vi legger til ledd som gir ligningen en naturlig utvidelse til flere dimensjoner, forandrer ikke dette karakteren av ligningen.

**Eksempel 4.7**

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  er elliptisk
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  er parabolsk
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  er hyperbolsk

Fig. 4.5 viser de karakteristiske kurvene som rette linjer. Dette vil ikke være tilfellet generelt, selv for lineære ligninger. For kvasilineære ligninger vil karakteristikkene, som tidligere nevnt, også være funksjon av selve løsningen.

**Eksempel 4.8**

Potensialligningen i to dimensjoner er gitt ved:

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

der  $a$  er lokal lydforplantningshastighet,  $u$  og  $v$  er fluidhastighet i henholdsvis x- og y-retning. Karakteristikkene er her gitt ved:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_\pm = \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2}, \text{ der Machtallet } M = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{a}$$

(Se Zucrow [29], vol. II, for flere detaljer)

## 4.6 PARTIKULÆRLØSNINGER AV LINEÆRE PDL

Mange lineære partielle differensialligninger lar seg løse ved separasjon av variable som da vanligvis fører til Fourier-rekker. Eksempelvis har vi løst et diffusjonsproblem med denne metoden i appendiks G, del G.6, der løsningen er gitt ved en uendelig Fourier-rekke. Men da ligningen er lineær, oppfyller hvert ledd i rekka differensialligningen, slik at hvert ledd da er en partikulær løsning. Selv om vi ikke finner den totale løsningen som tilfredstiller gitte rand-betingelser og startbetingelser, gir likevel en partikulær løsning en god pekepinn om løsningen for det aktuelle problemet.

Vi skal bruke følgende uttrykk for en rekke lineære modell-ligninger:

$$u_n(x, t) = e^{i(\beta_n x - \omega_n t)} = \cos(\beta_n x - \omega_n t) + i \sin(\beta_n x - \omega_n t), n = 1, 2, \dots \quad (4.6.1)$$

Her er  $\beta$  et bølgetall og  $\omega$  en vinkelfrekvens. Dessuten bruker vi begrep som fasehastighet  $c_f$  og gruppehastighet  $c_g$ . (Henviser til appendiks A, del A.3) Velger å bruke den komplekse formen da både realdelen og imaginærdelen hver for seg er en partikulær løsning. Utelater indeks  $n$  i (4.6.1) i fortsettelsen.

Vi har bruk for forskjellige deriverte av  $u(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -i\omega \cdot u(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot u(x, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= i\beta \cdot u(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\beta^2 \cdot u(x, t) \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= -\beta^3 \cdot u(x, t), \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \beta^4 \cdot u(x, t) \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

### 1. Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.6.3)$$

Innsatt fra (4.6.2) i (4.6.3):  $(\alpha\beta^2 - i\omega) \cdot u(x, t) = 0 \rightarrow i\omega = \alpha\beta^2$   
som gir:

$$u(x, t) = e^{-\alpha\beta^2 \cdot t} \cdot e^{i\beta \cdot x} \quad (4.6.4)$$

Imaginærdelen av (4.6.4) gir  $u(x, t) = e^{-\alpha\beta^2 \cdot t}$  som f.eks. er i overenstemmelse med løsningen i appendiks G, del G.6. (Flere detaljer i kapittel 5)

### 2. Adveksjonsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.6.5)$$

Innsatt fra (4.6.2) i (4.6.5):  $i \cdot (-\omega + \alpha_0\beta) \cdot u(x, t) = 0 \rightarrow \omega = \alpha_0\beta$  som gir:

$$u(x, t) = e^{i\beta(x - a_0 t)} \quad (4.6.6)$$

Realdelen av (4.6.6) viser at profilet  $u(x, 0) = \cos x$  forflytter seg uforandret til høyre med konstant hastighet  $a_0$ . Dette vil gjelde for alle bølgetall  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  slik at løsningen for et generelt startprofil  $u(x, 0) = f(x)$  også vil forflytte seg uforandret. (Flere detaljer i appendiks A, del A.3, samt kapittel 6)

**3. Bølgeligningen:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.6.7)$$

Innsatt fra (4.6.2) i (4.6.7):  $(-\omega^2 + a_0^2 \beta^2) \cdot u(x, t) = 0 \rightarrow \omega = \pm a_0 \beta$  som gir:

$$u(x, t) = e^{i\beta(x \pm a_0 t)} \quad (4.6.8)$$

Vi ser da at adveksjonsligningen er et spesialtilfelle av bølgeligningen. (4.6.8) viser at vi får to bølger, en i hver retning med uforandret profil. Da vi ikke har noen randbetingelser, antar vi at  $-\infty < x < \infty$ . For et endelig intervall  $a \leq x \leq b$  derimot, vil vi få superponering av de to bølgene ved f.eks. refleksjon fra rendene, men de enkelte bølgene beholder profilen.

**4. Korteweg-de Vries -ligningen:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + b_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (4.6.9)$$

Dette er en ligning som beskriver vannbølger på grunt vann, og (4.6.9) er en linearisert versjon av den egentlig ligningen. (Betegnes gjerne som KdV-ligningen)

Innsatt fra (4.6.2) i (4.6.9):

$$i \cdot (-\omega + a_0 \beta - b_0 \beta^3) \cdot u(x, t) = 0 \rightarrow \omega = \beta(a_0 - \beta^2 b_0) \quad (4.6.10)$$

som gir:

$$u(x, t) = e^{i\beta[x - (a_0 - \beta^2 b_0)t]} \quad (4.6.11)$$

Vi ser her at vinkelfrekvensen  $\omega$  er funksjon av bølgetallet  $\beta$ . Dette betyr av de enkelte fasene  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , vil forplante seg med forskjellig hastighet slik at et startprofil  $u(x, 0) = f(x)$  vil forandre fasong. Slike bølger kalles disperse og er bl. annet typisk for vannbølger. Generelt kalles relasjonen  $\omega = \omega(\beta)$  for dispersjonsrelasjonen. Fasehastigheten er gitt ved  $c_f = \frac{\omega(\beta)}{\beta}$ .

For tillfelle 2) og 3) blir fasehastigheten  $c_f = \frac{\beta \cdot a_0}{\beta} = a_0$  uavhengig av bølgetallet. Slike bølger kalles da ikke-disperse.

**5. Svingende bjelke:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad a^2 = \frac{EI}{m} \quad (4.6.12)$$

Gir transversalsvingninger av en bjelke etter elementær bjelketeori.  $EI$  er bjelke-stivheten og  $m$  er masse pr. lengdeenhet.

Innsatt fra (4.6.2) i (4.6.12):  $(-\omega^2 + a^2\beta^4) \cdot u(x, t) = 0 \rightarrow \omega = \pm a \cdot \beta^2$  som gir:

$$u(x, t) = e^{i\beta(x \pm a\beta \cdot t)} \quad (4.6.13)$$

Som i tilfelle 4), har vi igjen en ligning som gir disperhesive bølger. Fasehastigheten er her gitt ved  $c_f = a \cdot \beta$ .

$$\text{Gruppehastigheten } c_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \pm 2a\beta \neq c_f.$$



# KAPITTEL 5

## DIFFUSJONSPROBLEMER

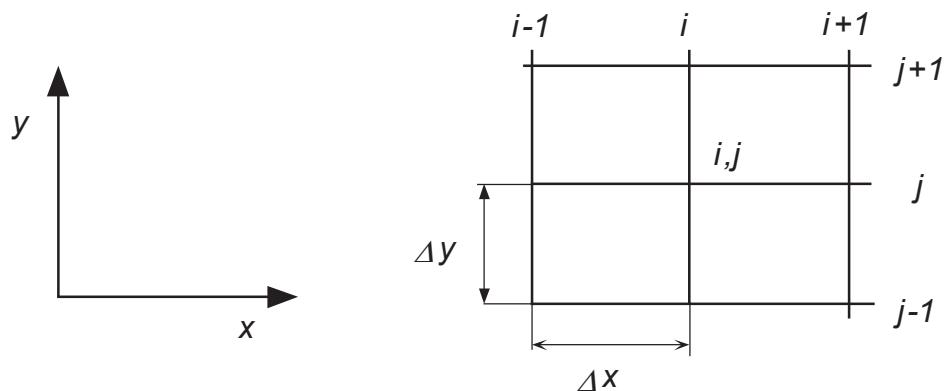
### 5.1 DIFFERANSER. NOTASJON

I avsnitt 1.2 brukte vi Taylor-utviklingen for en funksjon av en uavhengig variabel til å utlede differanseformler. Tilsvarende kan gjøres for funksjoner av flere uavhengige variable. Dersom uttrykkene ikke har noen kryssderiverte, kan vi direkte bruke formlene som vi utledet i avsnitt 1.2. Vi må bare huske å holde indekset for den andre variable konstant.

Følgende notasjon brukes for de diskrete verdiene i  $x$ - og  $y$ -retning:

$$x_1 = x_0 + i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$
$$y_j = y_0 + j \cdot \Delta y, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Som tidligere forutsetter vi at  $\Delta x$  og  $\Delta y$  er konstante dersom intet annet blir spesifisert. Figur 5.1 nedenfor gir eksempel på notasjonen i to dimensjoner.



Figur 5.1

Vi skriver nå opp en rekke formler direkte fra avsnitt 1.2.

Foroverdifferanser:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.1.1a)$$

Bakoverdifferanser:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.1.1b)$$

Sentraldifferanser

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (5.1.1c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (5.1.2)$$

Tilsvarende formler for  $\frac{\partial u}{\partial y}$  og  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  følger direkte:

Foroverdifferanser:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \quad (5.1.3a)$$

Bakoverdifferanser:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (5.1.3b)$$

Sentraldifferanser

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (5.1.3c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (5.1.4)$$

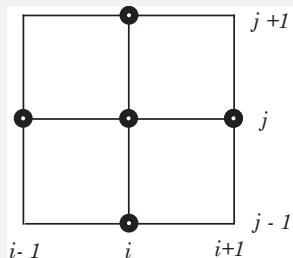
### Eksempel 5.1

Vi diskretiserer Laplace-ligningen  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  ved å bruke (5.1.2)og (5.1.4) og velger  $\Delta x = \Delta y$ .

Dette gir følgende differanseligning:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

Det resulterende beregningsmolekylet er illustrert i figur 5.2.



Figur 5.2: 5-punkts beregningsmolekyl for diffusjonsligningen

Vi ser av formelen at senterverdien er middelverdien av verdiene i de andre puntene. Denne formelen er velkjent og kalles gjerne 5-punkts-formelen (Brukes i kapittel 7).

Ved render er vi ofte nødt til å bruke bakover eller foroverdifferanser. Vi gir her noen formler med 2. ordens nøyaktighet .

Foroverdifferanser:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2\Delta x} \quad (5.1.5)$$

Bakoverdifferanser:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \quad (5.1.6)$$

Formlene gitt i tabell 1.1 , 1.2 og 1.3 i kapittel 1 kan brukes nå også bare vi utstyrer dem med to indeks. Programmet diffaf er derfor like nyttig her. En fyldig samling av differanseformler finnes i Anderson [1]. Detaljerte utledninger er gitt i Hirsch [3].

## 5.2 DIFFUSJONSIGNINGEN

### 5.2.1 INTRODUKSJON

Den endimensjonale diffusjonsligningen er gitt ved:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.2.1)$$

$t$  kalles som tidligere nevnt, den evolusjonsvariable og kan være både tid-og romkoordinat.

Typiske diffusjonsproblemer:

Varmeledning:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Ikke-stasjonært grensesjikt: (Stokes problem)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Strømning i porøse media:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Linearisert grensesjiktligning:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\nu}{U_0} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

( Her er  $x$  den evolusjonsvariable. )

Sammenligner (5.2.1) med klassifikasjonsligningen (4.3.1):

$B = C = 0$ ,  $A = 1$  som innsatt i (4.3.9b) og (4.3.11) gir:

$$dt = 0, \quad B^2 - 4AC = 0$$

(5.2.1) er følgelig parabolsk, og karakteristikken er gitt ved  $t = \text{konstant}$ .

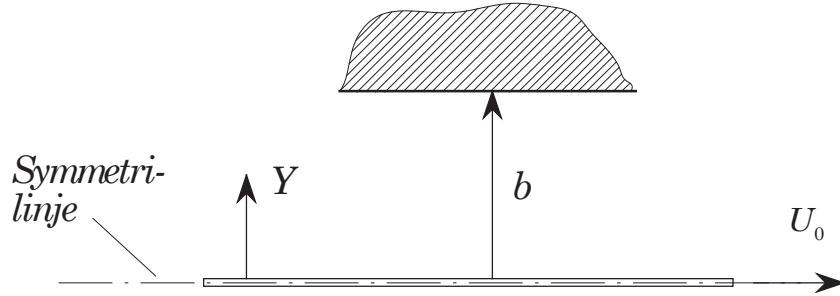
Dersom vi dividerer  $dt$  med  $dx$ :

$$\frac{dt}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \infty \quad (5.2.2)$$

Derav: Uendelig signalforplantningshastighet langs den karakteristiske kurva  $t = \text{konstant}$ .

Dette er en oppsummering av opplysninger som tidligere har vært gitt i avsnitt 4.4. (Se spesielt figur 4.7)

### 5.2.2 IKKE-STASJONÆR COUETTE STRØMNING



Figur 5.3

Den klassiske versjonen av dette problemet med  $b = \infty$  har vi tidligere behandlet i avsnitt 2.3 som Stokes 1. problem.

Ligning:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad 0 < Y < b \quad (5.2.3a)$$

Initialbetingelse:

$$U(Y, \tau) = 0, \quad \tau < 0 \quad (5.2.3b)$$

Randbetingelser:

$$\left. \begin{aligned} U(0, \tau) &= U_0 \\ U(b, \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} = \tau \geq 0 \quad (5.2.3c)$$

I avsnitt 2.3 har vi sett på flere måter å gjøre (5.2.3a) dimensjonsløs.

Innfører følgende dimensjonsløse variable:

$$y = \frac{Y}{b}, \quad u = \frac{U}{U_0}, \quad t = \frac{\tau \nu}{b^2} \quad (5.2.4)$$

(5.2.3) kan da skrives:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1 \quad (5.2.5a)$$

Initialbetingelse:

$$u(y, t) = 0, \quad t < 0 \quad (5.2.5b)$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 1 \\ u(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad t \geq 0 \quad (5.2.5c)$$

Som i avsnitt 2.3, kan dette eksemplet også formuleres som et varmeledningsproblem.

Analytisk løsning:

$$u(y, t) = 1 - y - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp[-(n\pi)^2 t] \sin(n\pi y) \quad (5.2.6)$$

Utledningen av (5.2.6) er gitt i detalj i appendiks G.6.

Vi diskretiserer (5.2.5a) ved å benytte foroverdifferanser for tiden  $t$  og sentraldifferanser for romkoordinaten  $y$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (5.2.7a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (5.2.7b)$$

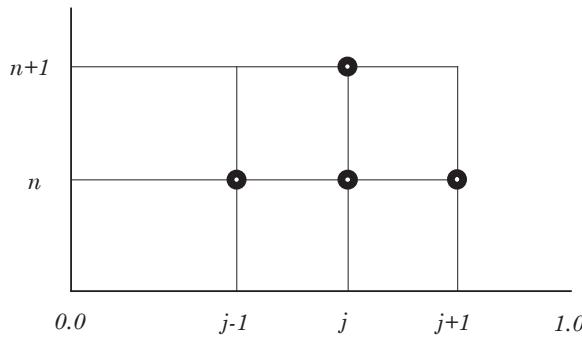
der  $t_n = n \cdot \Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $y_j = j \cdot \Delta y$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

(5.2.7) innsatt i (5.2.5a) gir følgende differanseligning:

$$u_j^{n+1} = r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2r)u_j^n \quad (5.2.8a)$$

$$\text{der } r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} = \nu \frac{\Delta \tau}{(\Delta Y)^2} \quad (5.2.8b)$$

$r$  er en dimensjonsløs gruppe. I varmeledning brukes betegnelsen det numeriske Fourier-tallet om denne gruppa. (Lign. (5.2.8) er behandlet i avsnitt 13.1 i C&K [5]). I avsnitt 5.5 viser vi at skjemaet i (5.2.8) er av 2. ordens nøyaktighet i  $t$  og 4. ordens nøyaktighet i  $y$  dersom vi bruker  $r = 1/6$ . I strømningsmekanikken er det vanlig å skrive  $u_j^n$  istedenfor  $u_{j,n}$  slik at indekset for den evolusjonsvariable skrives som et øvre indeks. Vi adopterer denne skrivemåten generelt.



Figur 5.4: FTCS-skjemaet.

Et skjema der vi bruker foroverdifferanser for den tidslignende variable og sentraldifferanser for romkoordinaten, betegnes gjerne på engelsk som et FTCS-skjema (Forward Time Central Space). Når vi bruker betegnelsen FTCS, menes 1. ordens nøyaktighet i  $t$  og 2. ordens nøyaktighet i romkoordinaten(e). Det er også vanlig å kalle dette skjemaet for Euler-skjemaet.

Figur 5.4 viser at skjemaet er eksplisitt; verdien ved tiden  $n + 1$  kan finnes direkte av formelen uten å løse et ligningsystem.

Velger  $\Delta y = 0.1$  og prøver med  $r = 0.3$  og  $r = 0.6$

### Tilfelle A, $r = 0.3$

Fra (5.2.8) får vi:

$$\Delta t = (\Delta y)^2 \cdot r = 3.0 \cdot 10^{-3}, \text{ som gir:}$$

$$t_n = n \cdot 3.0 \cdot 10^{-3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tabell 5.1: Tabell med  $r = 0.3$ 

$y$	$t_n = 0.03$	% $\varepsilon$	$t_n = 0.06$	% $\varepsilon$	$t_n = 0.12$	% $\varepsilon$	$t_n = 0.45$	% $\varepsilon$
0.0	1.0000	0.0	1.0000	0.0	1.0000	0.0	1.0000	0.00
0.1	0.6917	1.3	0.7761	0.4	0.8394	0.1	0.8978	0.01
0.2	0.4266	3.0	0.5692	1.0	0.6851	0.3	0.7958	0.02
0.3	0.2310	4.7	0.3927	1.6	0.5427	0.5	0.6942	0.03
0.4	0.1080	5.5	0.2537	2.2	0.4163	0.8	0.5931	0.04
0.5	0.0428	3.8	0.1528	2.6	0.3084	1.0	0.4928	0.06
0.6	0.0140	-2.3	0.0854	2.7	0.2191	1.3	0.3931	0.07
0.7	0.0036	-15.2	0.0440	2.1	0.1472	1.5	0.2942	0.08
0.8	0.0007	-35.7	0.0206	0.9	0.0896	1.6	0.1958	0.08
0.9	0.0001	-60.9	0.0078	-0.6	0.0422	1.7	0.0978	0.09
1.0	0.0000	0.0	0.0000	0.0	0.0000	0.0	0.0000	0.00

$$\% \text{ er prosent relativ feil} = \left( \frac{u_{\text{num}} - u_{\text{analytisk}}}{u_{\text{analytisk}}} \right) \cdot 100 \text{ der } u_{\text{analytisk}} \text{ er gitt i (5.2.6).}$$

For  $t_n = 0.03$  ser vi at  $\Delta y$  er for stor til å gi tilstrekkelig opplosning. Med  $t_n = 0.45$  har vi praktisk talt fått den stasjonære løsningen  $u_s = 1 - y$ . For å få en bedre opplosning for tilfellet  $t_n = 0.03$ , utfører vi en beregning med

$\Delta y = 0.05$  og en med  $\Delta y = 0.01$ . For  $\Delta y = 0.05$  får vi 40 tidskritt og for  $\Delta y = 0.01$  får vi 1000.

y	$t_n = 0.03$	$\% \varepsilon$	$t_n = 0.06$	$\% \varepsilon$
0.0	1.0000	0.00	1.0000	0.00
0.1	0.6853	0.32	0.6832	0.01
0.2	0.4173	0.75	0.4143	0.03
0.3	0.2232	1.17	0.2208	0.05
0.4	0.1038	1.33	0.1025	0.05
0.5	0.0416	0.92	0.0412	0.04
0.6	0.0142	-0.5	0.0143	-0.02
0.7	0.0041	-3.44	0.0043	-0.13
0.8	0.0010	-8.39	0.0011	-0.33
0.9	0.0002	-15.2	0.0002	-0.61
1.0	0.0000	0.00	0.0000	0.00

Tabell 5.2: Resultater for  $r = 0.3$ . Venstre side av tabellen er for  $\Delta y = 0.05$  og høyre side for  $\Delta y = 0.01$ .

### Tilfelle B, $r = 0.6$

Med  $\Delta y = 0.1$  får vi nå  $t_n = n \cdot 6.0 \cdot 10^{-3}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Resultatet av denne beregningen er vist i tabell 5.3.

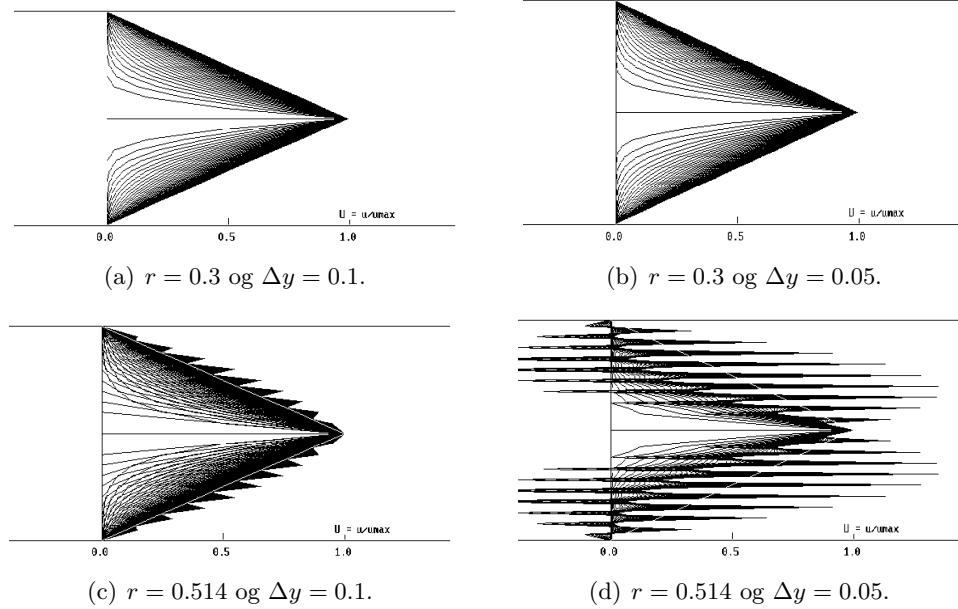
Tabell 5.3 indikerer tydelig en instabilitet. Ser vi på siste ledet i (5.2.8), finner vi at alle leddene er positive for  $2r \leq 1$ , dvs.  $r \leq \frac{1}{2}$ , som er en tilstrekkelig betingelse for å hindre oscillasjoner. I figur 5.5(a) har vi tegnet opp løsningen fra tabell 5.1 og i figur 5.5(b) løsningen fra tabell 5.2. Figur 5.5(c) og 5.5(d) viser løsningen for  $r = 0.514$  med  $\Delta y$  lik henholdsvis 0.1 og 0.05.

Betingelsen  $r \leq \frac{1}{2}$  forhindrer altså økende oscillasjoner i differanseligningen for

y	$t_n = 0.03$	$\% \varepsilon$	$t_n = 0.06$	$\% \varepsilon$
0.0	1.0000	0.0	1.0000	0.0
0.1	0.7939	16.2	0.5797	-25.0
0.2	0.2995	-27.7	0.9186	63.0
0.3	0.3715	68.4	0.0027	-99.3
0.4	0.0259	-74.7	0.6239	151.4
0.5	0.0778	88.6	-0.1241	-183.3
0.6	0.0000		0.2663	220.0
0.7	0.0000		-0.0551	-227.7
0.8	0.0000		0.0625	206.4
0.9	0.0000		-0.0081	-202.3
1.0	0.0000		0.0000	0.0

Tabell 5.3: Resultater for  $r = 0.6$ .

den gitte initialbetingelsen. Vi skal nå vise at vi kan utvide dette resultatet slik at det også kan brukes på andre differanseligninger.



Figur 5.5: Resultater FTCS for ulike verdier av  $r$ .

### 5.2.3 PK-KRITERIET: KRITERIET OM POSITIVE KOEFFISIENTER

La  $s = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$  være en sum av  $k$  ledd der tallene  $a_1, a_2, \dots, a_k$  er positive.

Setter:

$$x_{min} = \min(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ og } x_{max} = \max(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Derav:

$$x_{min} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \leq s \leq x_{max} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \quad (5.2.9)$$

Merk at dette bare gjelder dersom  $a_1, a_2, \dots, a_k$  er positive. La oss se på to tilfeller

**Tilfelle 1:**  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$

Innsatt i (5.2.9):

$$x_{min} \leq s \leq x_{max} \quad (5.2.10)$$

Likhetsstegnene i (5.2.10) gjelder for  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$ .

La oss nå anvende (5.2.10) på differanseligningen i (5.2.8):

$$u_j^{n+1} = r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2r)u_j^n$$

Her har vi  $a_1 = r$ ,  $a_2 = r$ ,  $a_3 = 1 - 2r$  slik at  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ .

(5.2.10) gir da:

$$\min(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n)$$

Betingelsen for at dette gjelder, er at alle koeffisientene  $a_1, a_2, \dots, a_k$  er positive. Da  $r > 0$ , betyr dette at bare  $a_3 = 1 - 2r$  kan bli negativ. Betingelsen for at  $a_3$  skal være positiv, blir da:  $1 - 2r > 0$  som gir  $r < \frac{1}{2}$ . Når  $r = \frac{1}{2}$ , forsvinner  $a_3$ , slik at  $a_1 + a_2 = 1$  og betingelsen også er oppfylt med  $r = \frac{1}{2}$ . Dette tilfellet kalles Bender - Schmidt formelen.

Det betyr at dersom vi velger  $r \leq \frac{1}{2}$ , vil  $u$ -verdiene ved tidskrittet  $n + 1$  ligge mellom den største og den minste  $u$ -verdien ved tidskritt  $n$ . Dersom skjemaet er eksplisitt og homogent og  $u = u_0$  er konstant er en løsning, vil summen av koeffisientene ofte være lik 1. (Sett f.eks  $u = u_0$  inn i (5.2.8)) Dette skyldes formen differanseutrykkene får fra Taylor-utviklingen. (Se tabell 1.1-1.3).

**Tilfelle 2:**  $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 1$

Definerer  $b = 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) > 0$  slik at  $a_1 + a_2 + \dots + a_k + b = 1$

Kan da skrive følgende sum:  $a = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_k + b \cdot 0$  Vi ser da at disse utrykkene oppfyller alle betingelsene for tilfelle 1 slik at vi får:

$$\min(0, x_1, x_2, \dots, x_k) \leq s \leq \max(0, x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (5.2.11)$$

Til forskjell fra (5.2.10) har vi nå fått inn talltallet 0 ; ellers som før. La oss se på et eksempel:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT, \quad b = \text{konstant}, \quad t < t_{maks}$$

Dersom vi bruker FTCS-skjemaet, får vi:

$$T_j^{n+1} = r(T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) + (1 - 2r + \Delta t \cdot b)T_j^n, \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Med  $a_1 = a_2 = r$  og  $a_3 = 1 - 2r + \Delta t \cdot b$  får vi:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \Delta t \cdot b \leq 1 \text{ bare med negativ verdi av } b$$

Kravet om positive koeffisienter blir nå:

$$1 - 2r + \Delta t \cdot b > 0 \text{ som blir: } 0 < r < \frac{1}{2} + \frac{\Delta t \cdot b}{2} \text{ der } b \text{ er negativ}$$

Kriteriet sier da at  $T$ -verdiene fra differanseligningen ikke øker når  $b$  er negativ. Dette stemmer med fysikken, da en negativ  $b$  betyr at leddet  $bT$  kan oppfattes som et varmesluk.

(5.2.10) og (5.2.11) er egentlig ikke stabilitetskriterium. Setningene gir en *tilstrekkelig* betingelse for å hindre at voksende oscillasjoner oppstår, noe som kan være adskillig mer restriktivt enn det som er nødvendig for stabilitet. Men i mange tilfeller er vi tilfreds med en slik betingelse. PK-kriteriet er mye anvendt fordi den ofte kan brukes på differanseligninger der en mer eksakt analyse er vanskelig å gjennomføre. Legg merke til at det bare kan brukes for eksplisitte skjema dersom vi ikke har ekstra opplysninger. For parabolske ligninger har vi gjerne slike ekstra opplysninger i form av det vi kaller maks.-min. prinsipp. (Se avsnitt 5.4.3). Kriteriet må også modifiseres når vi har problemer med økende amplitude.

Det beste ville selvfølgelig være å ha et kriterium som gir en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for numerisk stabilitet. For generelle differanseligninger eksisterer det ikke noe slikt kriterium, noe som neppe er overraskende. Et kriterium som ofte gir nødvendige og i noen tilfeller også tilstrekkelige betingelser for stabilitet, er von Neumanns metode. Denne metoden består i en Fourier-analyse av den lineariserte differanseligningen og kan også brukes for implisitte skjema. Vi skal se på denne metoden i det neste avsnittet.

### 5.3 STABILITETSANALYSE MED VON NEUMANNS METODE

Vi har differensialligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.3.1)$$

La oss repete hvordan vi kan løse denne ved bruk av separasjon av variable. Antar at vi kan skrive  $u(x, t)$  som produkt av to funksjoner  $f(t)$  og  $g(x)$ :

$$u(x, t) = f(t) \cdot g(x)$$

Ved derivasjon:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(t)}{dt} \cdot g(x)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t) \cdot \frac{d^2 g(x)}{dx^2}$  som innsatt ovenfor gir:

$$\frac{df(t)}{dt} \cdot g(x) = f(t) \cdot \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \rightarrow \frac{df(t)}{dt} \cdot \frac{1}{f(t)} = \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{g(x)}$$

Den ene siden av ligningen er bare funksjon av  $t$ , mens den andre bare er funksjon av  $x$ . Da de to sidene skal være like for vilkårlige verdier av  $t$  og  $x$ , er den eneste muligheten at hver av sidene er lik en konstant. Denne konstanten kalles separasjonskonstanten og vi velger den lik  $-\beta^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} \cdot \frac{1}{f(t)} &= -\beta^2 \rightarrow \frac{df(t)}{dt} + \beta^2 \cdot f(t) = 0 \\ \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{g(x)} &= -\beta^2 \rightarrow \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \beta^2 \cdot g(x) = 0 \end{aligned}$$

Den første ligningen har løsning  $f(t) = e^{-\beta^2 t}$  og den andre

$$g(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) \text{ slik at vi totalt får:}$$

$$u(x, t) = e^{-\beta^2 t} \cdot [A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)]$$

Dette er en partikulær løsning, og da ligningen er lineær, vet vi at summen av slike løsninger også er en løsning:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-\beta_m^2 t} \cdot [A_m \sin(\beta_m x) + B_m \cos(\beta_m x)]$$

I et gitt tilfelle bestemmes  $A_m$ ,  $B_m$  og  $\beta_m$  av startbetingelsene og randbetingelsene. Dette er vist i detalj i appendiks G.6.

Vi har ikke bruk for den generelle løsningen, men greier oss med to partikulære løsninger:

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-\beta^2 t} \sin(\beta x) \\ e^{-\beta^2 t} \cos(\beta x) \end{cases} \quad (5.3.2)$$

(5.3.2) kan skrives mer kompakt ved å bruke Eulers formel:

$$e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x), \quad i = \sqrt{-1} \quad (5.3.3)$$

Følgende uttrykk er da en løsning av (5.3.1):

$$u(x, t) = e^{-\beta^2 t} \cdot e^{i \cdot \beta x} = e^{-\beta^2 t + i \cdot \beta x} \quad (5.3.4)$$

**Merk.** Egentlig skal vi ta realdelen eller imaginærdelen av høyre side av (5.3.4) da  $u$  er reell. Men da både realdelen og imaginærdelen tilfredstiller (5.3.1), tillater vi oss nå og senere litt juks i notasjonen.

Med notasjonen  $x_j = j \cdot \Delta x$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  og  $t_n = n \cdot \Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  får vi fra (5.3.4):

$$u(x_j, t_n) = e^{-\beta^2 t_n} \cdot e^{i \cdot \beta x_j} = e^{-\beta^2 \cdot n \cdot \Delta t} \cdot e^{i \beta x_j} = (e^{-\beta^2 \cdot \Delta t})^n \cdot e^{i \beta x_j} \quad (5.3.5a)$$

$$u(x_j, t_{n+1}) = e^{-\beta^2 t_{n+1}} \cdot e^{i \cdot \beta x_j} = e^{-\beta^2 \cdot (n+1) \cdot \Delta t} \cdot e^{i \beta x_j} = (e^{-\beta^2 \cdot \Delta t})^{n+1} \cdot e^{i \beta x_j} \quad (5.3.5b)$$

Vi får amplitudeforholdet ved å dividere de to uttrykkene på hverandre:

$$G_a = \frac{u(x_j, t_{n+1})}{u(x_j, t_n)} = e^{-\beta^2 \Delta t} \quad (5.3.6)$$

$G_a$  kalles ofte den *analytiske* forsterkningsfaktoren. (Se avsnitt 1.6.1) I dette tilfellet ser vi at  $G_a < 1$ .

(5.3.5a) kan nå skrives:

$$u(x_j, t_n) = (G_a)^n \cdot e^{i \cdot \beta x_j} \equiv G_a^n \cdot e^{i \cdot \beta x_j} \quad (5.3.7)$$

Da  $G_a < 1$ , vil  $G_a^n \rightarrow 0$  for  $n \rightarrow \infty$  for dette problemet.

Fra (5.2.8) har vi følgende differanseligning for løsning av (5.3.1):

$$u_j^{n+1} = r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2r)u_j^n, \quad r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (5.3.8)$$

For endelig verdier av  $\Delta x$  og  $\Delta t$  vet vi at løsningen av differanseligningen nødvendigvis må avvike fra den analytiske løsningen av differensialligningen. Avviket vil selvfølgelig bli større for økende verdier av  $\Delta x$  og  $\Delta t$  og vi har sett at når forholdet  $r > \frac{1}{2}$ , blir differanseligningen ustabil: Stadig økende amplituder med vekslende fortegn. Da (5.3.7) er en løsning av differensialligningen, forsøker vi et tilsvarende uttrykk for differanseligningen (5.3.8):

$$u_j^n \rightarrow E_j^n = G^n \cdot e^{i \cdot \beta \cdot x_j} \quad (5.3.9)$$

Her er den *numeriske* forsterkningsfaktoren  $G$  gitt ved:

$$G = \frac{E_j^{n+1}}{E_j^n} \quad (5.3.10a)$$

som gir:

$$E_j^n = G^n \cdot E_j^0, \quad E_j^0 = e^{i \cdot \beta \cdot x_j} \quad (5.3.10b)$$

der  $G$  er en funksjon av  $\Delta t$  og  $\beta$  og kan være kompleks. Den numeriske forsterkningsfaktoren  $G$  vil selvfølgelig være forskjellig fra den analytiske faktoren  $G_a$ . Merk:  $G^n = G$  i  $n$ 'te potens.

Dersom amplitudeforholdet skal være begrenset, må  $G$  tilfredsstille følgende betingelse:

$$|G| \leq 1 \quad (5.3.11)$$

(5.3.11) kalles von Neumanns strenge stabilitetskriterium. Det kalles det strenge kriteriet fordi det ikke tillater at amplitudeforholdet øker. Vi skal fjerne denne restriksjonen i avsnitt 5.4.4. Selv om vi har brukt den enkle diffusjonsligningen som eksempel, gjelder fremgangsmåtem også i mer generelle tilfeller: Vi setter (5.3.9) inn i den aktuelle differanseligningen og forlanger at (5.3.11) skal være oppfylt.

Noen egenskaper for kriteriet:

1. Den lineære differanseligningen må ha konstante koeffisienter. Ved variable koeffisienter, kan kriteriet brukes ved å ”fryse” koeffisientene lokalt. Praksis viser at kriteriet da gir en nødvendig betingelse for stabilitet.
2. Kriteriet tar ikke hensyn til randverdier da det er utledet for periodiske initialdata. Dersom vi ønsker å undersøke randverdienes innvirkning på stabiliteten, må koeffisientmatrisa for ligningsystemet undersøkes. Eventuelt en mer generell teori.
3. Kriteriet tar ikke hensyn til randverdier da det er utledet for periodiske initialdata. Dersom vi ønsker å undersøke randverdienes innvirkning på stabiliteten, må koeffisientmatrisa for ligningsystemet undersøkes. Eventuelt en mer generell teori.

### 5.3.1 BRUK AV VON NEUMANN KRITERIET

Vi vil nå analysere det eksplisitte skjemaet i (5.2.8) ved bruk av von Neumanns metode. Skriver differanseligningen på følgende form:

$$E_j^{n+1} = r(E_{j+1}^n + E_{j-1}^n) + (1 - 2r)E_j^n \quad (5.3.12)$$

Fra (5.3.9):  $E_j^n = G^n \cdot e^{i \cdot \beta \cdot y_j}$  ( $G^n$  betyr  $G$  i  $n$ -te potens) som innsatt i (5.3.12) gir:

$$G^{n+1} e^{i \cdot \beta y_j} = r \cdot (G^n \cdot e^{i \cdot \beta y_{j+1}} + G^n \cdot e^{i \cdot \beta y_{j-1}}) + (1 - 2r) G^n e^{i \cdot \beta y_j}$$

Dividerer med  $G^n \cdot e^{i \cdot \beta y_j}$ :

$$G = r(e^{i \cdot \beta h} + e^{-i \cdot \beta h}) + (1 - 2r) = r(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + (1 - 2r) \quad (5.3.13a)$$

$$\text{der } \delta = \beta h \quad (5.3.13b)$$

**Merk.** Dersom vi bruker terminologien for periodiske funksjoner, er  $\beta$  et bølgetall (vinkelfrekvens), og  $\delta$  en fasevinkel. (Se appendiks A.3)

Noen standardformler som brukes ofte:

$$\begin{aligned} 2 \cos(x) &= e^{ix} + e^{-ix} \\ i \cdot 2 \sin(x) &= e^{ix} - e^{-ix} \\ \cos(x) &= 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

(5.3.14) brukt i (5.3.13) gir:

$$G = 1 - 2r(1 - \cos(\delta)) = 1 - 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (5.3.15)$$

Betingelsen  $|G| \leq 1$  betyr, da  $G$  er reell:

$$-1 \leq G \leq 1 \text{ eller } -1 \leq 1 - 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq 1$$

Høyre side er tilfredstilt med  $r \geq 0$ .

Venstre side:

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

som er oppfylt for alle  $\delta$  med  $r \leq \frac{1}{2}$ .

Generelt har vi  $-\pi \leq \delta \leq \pi$

For lineære, homogene differanseligninger blir  $G = 1$  for  $\delta = 0$ . Kan brukes som en sjekk på innsettingen.

Betingelsen for stabilitet for dette skjemaet blir da:

$$\begin{aligned} 0 < r < \frac{1}{2} \\ \text{med } r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \text{ fra (5.2.8b)} \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Da vi har et to-nivå skjema med konstante koeffisienter, er (5.3.16) en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for stabilitet. Dette bekreftes av resultatet som vi fant tidligere ved bruk av det tilstrekkelige kriteriet i (5.2.10). Resultatet betyr en kraftig begrensning på størrelsen av  $\Delta t$ , noe som selvfølgelig

vil influere sterkt på tidsforbruket. Et røft overslag for regnetiden ved bruk av FTCS-skjemaet gir:

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \text{ med samme } r\text{-verdi}$$

der  $T_1$  er regnetiden for  $\Delta y = h_1$  og  $T_2$  er regnetiden for  $\Delta y = h_2$ .

Med  $h_1 = 0.1$  og  $h_2 = 0.01$  får vi  $\frac{T_2}{T_1} = 1000$ .

### Bruk av derivasjon

Et alternativ er å finne for hvilken verdi av  $\delta G$  har maksimum og minimum ved å beregne  $\frac{dG}{d\delta}$  og sette  $\frac{dG}{d\delta} = 0$ . Deretter brukes betingelsen  $|G| < 1$ .

Fra (5.3.15):

$$G = 1 - 2r(1 - \cos(\delta)) \rightarrow \frac{dG}{d\delta} = -2r \sin(\delta)$$

som gir max-min for  $\delta = 0$ ,

$\delta = \pm\pi$ ,  $\delta = 0$  gir  $G = 1$ , mens  $\delta = \pm\pi$  gir  $G = 1 - 4r$  som med betingelsen  $|G| \leq 1$  blir

$$-1 \leq 1 - 4r \leq 1$$

Høyre side av ulikheten er alltid oppfylt, mens venstre side gir  $r \leq \frac{1}{2}$  som før. Vi vil ofte finne at  $\delta = \pm\pi$  er kritisk, slik at det uansett kan være lurt å sjekke disse verdiene. Men husk at dette nødvendigvis ikke er tilstrekkelig til å påvise stabilitet. Derimot kan det være tilstrekkelig til å påvise instabilitet da betingelsen  $|G| \leq 1$  må være oppfylt for alle  $\delta$ -verdier i intervallet  $[-\pi, \pi]$ .

### Sammenligning av forsterkningsfaktorene.

Det kan være interessant å sammenligne forsterkningsfaktoren  $G$  i (5.3.15) med den analytiske forsterkningsfaktoren  $G_a$  i (5.3.6).

Ved bruk av (5.3.8) og (5.3.13b) kan (5.3.6) skrives:

$$G_a = \exp(-\delta^2 \cdot r) \quad (5.3.17)$$

Stabilitetsgrensa er  $0 < r \leq 0.5$  for  $G$  med følgende verdier for spesielle verdier av  $r$ :

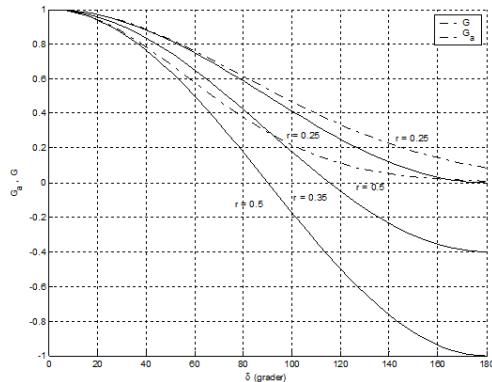
$$r = 0.025$$

$$G = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \geq 0 \text{ med } G = 0 \text{ for } \delta = \pi \quad (5.3.18a)$$

$$r = 0.5$$

$$G = \cos(\delta) \text{ med } G = 0 \text{ for } \delta = \pi/2 \text{ og } G = -1 \text{ for } \delta = \pi \quad (5.3.18b)$$

Figur 5.6 viser  $G$  og  $G_a$  som funksjon av  $\delta \in [0, \pi]$  for forskjellige verdier av  $r$ . Merk at de heltrukne linjene er den numeriske forsterknings-faktoren.



Figur 5.6: Forsterkningsfaktorer for difusjonsligningen.

For  $\delta \in [0^\circ, 90^\circ]$  gir differanseskjemaet større dempning enn den analytiske løsningen; liten forskjell for små  $\delta$ , men øker kraftig for økende  $\delta$ .

For  $\delta \in [90^\circ, 180^\circ]$  ser vi at amplituden endatil får feil fortegn i tillegg til stor avvik i størrelse. Når løsningen likevel er brukbar, skyldes dette at den analytiske løsningen har en amplitud  $G_a$  som avtar sterkt med økende frekvens; se den analytiske løsningen i (5.2.6). Denne glattингseffekten er typisk for parabolske ligninger. Likevel er effekten merkbar fordi vi i dette tilfellet har en diskon tinuitet i randbettingelsen for  $y = 0$ , slik at løsningen inneholder mange høyfrekvente komponenter.

Feil i amplituden defineres ofte ved  $\varepsilon_D = \left| \frac{G}{G_a} \right|$  og kalles diffusjonsfeil eller dissipasjonsfeil. (Ingen feil for  $\varepsilon_D = 1$ ). Begrepet dissipativt skjema brukes gjerne om skjema der amplituden avtar med økende  $t$ .

I vårt tilfelle:

$$\varepsilon_D = \left| 1 - 4r \sin^2(\delta/2) \right| \cdot \exp(\delta^2 \cdot r) \quad (5.3.19)$$

Rekkeutviklet for små  $\delta$ :

$$\varepsilon_D = 1 - r^2 \delta^4 / 2 + r \delta^4 / 12 + O(\delta^6)$$

som for  $r \leq 1/2$  viser at feilen er liten for lave frekvenser.

## 5.4 FLERE SKJEMA FOR PARABOLSKE LIGNINGER

### 5.4.1 RICHARDSON-SKJEMAET (1910)

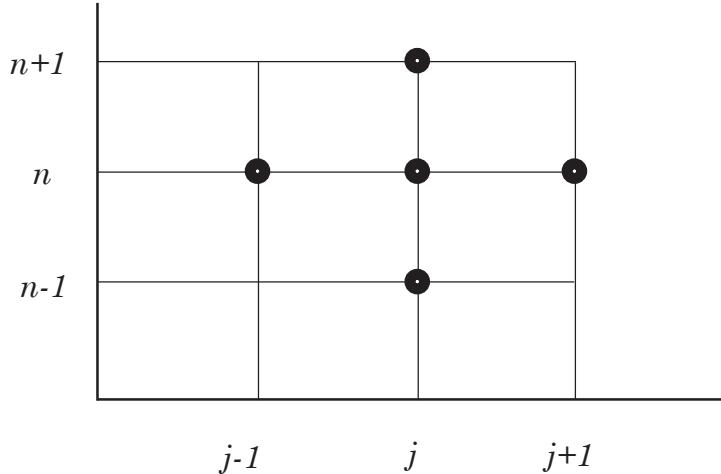
FTCS-skjemaet er av 1. ordens nøyaktighet i  $t$  og 2. orden i  $y$ . Vi ønsker et skjema som også er av 2. ordens nøyaktighet i  $t$ . Dette oppnår vi ved å benytte sentraldifferanser for ledet  $\frac{\partial u}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

som gir følgende differanseligning:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2r(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \quad (5.4.1)$$

Dette er et eksplisitt, 3-nivå skjema som kalles *Richardson-skjemaet*; se figur 5.7.



Figur 5.7

**Stabilitetsanalyse.**

La oss først forsøke det tilstrekkelige kriteriet i (5.2.10). Betingelsen om bare positive koeffisienter lar seg ikke oppfylle da koeffisienten foran  $u_j^n$ -leddet alltid er negativt for  $r > 0$ . Vi prøver derfor med von Neumanns metode.

(5.3.9) innsatt i (5.4.1) gir:

$$G^{n+1}e^{i\beta y_j} = G^{n-1}e^{i\beta y_j} + 2r[G^n e^{i\beta y_{j-1}} - 2G^n e^{i\beta y_j} + G^n e^{i\beta y_{j+1}}]$$

Dividerer med  $G^{n-1}e^{i\beta y_j}$  der  $y_j = j \cdot h$ :

$$\begin{aligned} G^2 &= 1 + 2rG \cdot (e^{-i\delta} + e^{i\delta} - 2) = 1 + 4rG \cdot (\cos(\delta) - 1) \\ &= 1 - 8Gr \cdot \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

hvor vi har brukt (5.3.13b) og (5.3.14). Vi har fått en 2. gradsligning fordi vi har et 3-nivå skjema:

$$\begin{aligned} G^2 + 2bG - 1 &= 0 \text{ med løsning} \\ G_{1,2} &= -b \pm \sqrt{b^2 + 1}, \quad b = 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

$|G| = 1$  for  $b = 0$ . For alle andre verdier av  $b$  har vi  $|G_2| > 1$ . Skjemaet er følgelig ustabil for alle aktuelle verdier av  $r$ . Et slikt skjema betegnes som ubetinget ustabilt.

Dette tilfellet viser at det ikke er noen sammenheng mellom nøyaktighet og stabilitet.

**Bruk av derivasjon**

Vi kan bruke derivasjon her også:

$$\begin{aligned} G^2 &= 1 + 4rG \cdot (\cos(\delta) - 1) \\ 2G \frac{dG}{d\delta} &= 4r \left[ (\cos(\delta) - 1) \frac{dG}{d\delta} - G \sin(\delta) \right], \text{ som med } \frac{dG}{d\delta} = 0 \\ &\text{gir max-min for } \delta = 0, \delta = \pm\pi \text{ som for FTCS-skjemaet.} \\ \delta = 0 &\text{ gir } G_{1,2} = \pm 1 \text{ mens } \delta = \pm\pi \text{ gir } G_{1,2} = -4r \pm \sqrt{1 + (4r)^2} \end{aligned}$$

med instabilitet for  $|G_2| > 1$  som tidligere.

### 5.4.2 DUFORT-FRANKEL SKJEMAET (1953)

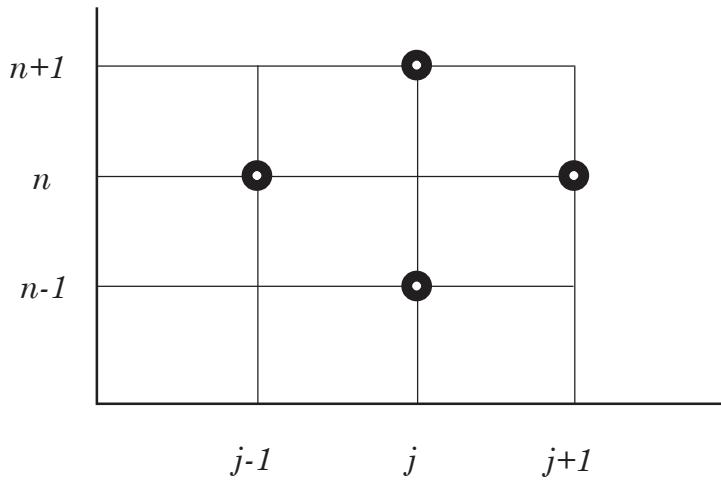
Richardson-skjemaet i (5.4.1) kan gjøres stabilt ved følgende modifikasjon:

$$u_j^n = \frac{1}{2}(u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) \quad (5.4.2)$$

som innsatt i (5.4.1) gir:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{1+2r} \left[ (1-2r)u_j^{n-1} + 2r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \right] \quad (5.4.3)$$

Dette er et eksplisitt 3-nivå skjema som kalles DuFort-Frankel-skjemaet, se figur 5.8



Figur 5.8

3-nivå skjema der leddet  $u_j^n$ -leddet mangler, kalles skjema av "Leap-frog"-typen. (Leap-frog: hoppe bukk). Det tilstrekkelige kriteriet om positive koeffisienter fra (5.2.10) krever  $r \leq \frac{1}{2}$  for et stabilt skjema. Stabilitetsanalysen er her litt mer komplisert p.g.a. at vi også må drøfte komplekse verdier av  $G$ .

Innsatt fra (5.3.9) og divisjon med  $G^{n-1}e^{i\delta j}$ :

$$G^2 = \frac{1}{1+2r} \left[ (1-2r) + 2r \cdot G \cdot (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \right] = \frac{1}{1+2r} [(1-2r) + 4r \cdot G \cdot \cos(\delta)]$$

som gir følgende 2. grads ligning:

$$(1+2r) \cdot G^2 - 4r \cdot G \cos(\delta) - (1-2r) = 0 \text{ med løsning:}$$

$$\begin{aligned} G_{1,2} &= \frac{4r \cos(\delta) \pm \sqrt{(4r \cos(\delta))^2 + 4(1+2r) \cdot (1-2r)}}{2(1+2r)} \\ &= \frac{2r \cos(\delta) \pm \sqrt{1 - r^2 \sin^2(\delta)}}{1+2r} \end{aligned}$$

For stabilitet må begge røttene oppfylle betingelsen  $|G| \leq 1$ .

Generelt må vi dessuten skille mellom reelle og komplekse røtter for å ta vare på det tilfellet at  $G \leq 0$  når  $G$  er reell.

1. Reelle røtter:  $1 - 4r^2 \sin^2(\delta) \geq 0$

$$|G_{1,2}| \leq \frac{2r \cdot |\cos(\delta)| + \sqrt{1 - 4r^2 \sin^2(\delta)}}{1 + 2r} \leq \frac{1 + 2r}{1 + 2r} \leq 1$$

2. Komplekse røtter:

$$1 - 4r^2 \sin^2(\delta) < 0 \rightarrow \sqrt{1 - 4r^2 \sin^2(\delta)} = i \cdot \sqrt{4r^2 \sin^2(\delta) - 1}$$

$$|G_{1,2}|^2 = \left| \frac{(2r \cos(\delta))^2 + 4r^2 \sin^2(\delta) - 1}{(1 + 2r)^2} \right| = \left| \frac{4r^2 - 1}{4r^2 + 4r + 1} \right| = \left| \frac{2r - 1}{2r + 1} \right| < 1$$

Analysen viser at (5.4.3) faktisk er ubetinget stabilt. DuFort-Frankel skjemaet er det eneste enkle kjente eksplisitte skjemaet med 2. ordens nøyaktighet som har denne egenskapen. Det har derfor vært en del brukt ved løsning av Navier-Stokes ligninger. I avsnitt 5.5 skal vi se at forholdene ikke er så fullt så rosenrøde som analysen ovenfor kan tyde på. For å starte beregningen, kan FTCS-skjemaet brukes.

#### 5.4.3 CRANK - NICOLSON SKJEMAET . $\theta$ - SKJEMAET

En av bakdelene ved DuFort-Frankel skjemaet er at det behøves et spesielt skjema for å starte regneprosessen. Vi forsøker derfor å finne en approksimasjon for  $\frac{\partial u}{\partial t}$  av 2. ordens nøyaktighet der bare to tidsnivå inngår.

Bruker sentraldifferanser for halve tidsintervallet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (5.4.4)$$

Problemet blir nå å approksimere  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^{n+\frac{1}{2}}$  uten at nivået  $n + \frac{1}{2}$  eksplisitt inngår i skjemaet. Dette oppnås ved Crank-Nicolson approksimasjonen (1947):

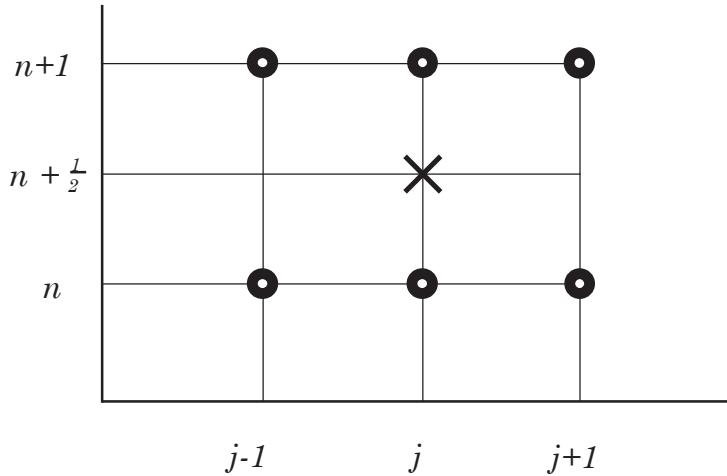
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + O(\Delta x)^2 \quad (5.4.5)$$

Differanseligningen blir nå:

$$u_{j-1}^{n+1} - 2(1 + \frac{1}{r})u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = -u_{j-1}^n + 2(1 - \frac{1}{r})u_j^n - u_{j+1}^n \quad (5.4.6)$$

der  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  som før.

Skjemaet er illustrert i figur 5.9.



Figur 5.9

Vi ser av (5.4.6) og figur 5.9 at skjemaet er implisitt. Dette betyr at vi må løse et ligningsystem. I dette tilfellet er systemet tridiagonalt, slik at Thomasalgoritmen og programmet **tdma** kan brukes.

Vi skal nå undersøke stabiliteten av (5.4.6). For å slå flere fluer i et smekk, tar vi for oss følgende differanseligning som kalles \$\theta\$-skjemaet:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r \left[ \theta(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \right] \quad (5.4.7a)$$

$$\text{der } 0 \leq \theta \leq 1 \quad (5.4.7b)$$

For \$\theta = 0\$ får vi det eksplisitte FTCS-skjemaet. For \$\theta = \frac{1}{2}\$ får vi Crank-Nicolson skjemaet. For \$\theta = 1\$ fås et implisitt skjema som ofte kalles Laasonenskjemaet (1949). I strømningsmekanikken brukes gjerne betegnelsen BTCS-skjemaet. (Backward Time Central Space) eller det totalt implisitte skjemaet.

(5.3.9) innsatt i (5.4.7) og divisjon med \$G^n \cdot e^{i\beta x\_j}\$ gir:

$$\begin{aligned} G &= 1 + r[G\theta(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2) + (1-\theta)(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2)] \\ &= 1 + r(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2) \cdot (G\theta + 1 - \theta) \end{aligned}$$

$$\text{der } \delta = \beta \cdot h$$

Med bruk av formlene i (5.3.14):

$$G = \frac{1 - 4r(1-\theta)\sin^2(\frac{\delta}{2})}{1 + 4r\theta\sin^2(\frac{\delta}{2})} \quad (5.4.8)$$

Betingelsen for stabilitet er \$|G| \leq 1\$ eller siden \$G\$ er reell: \$-1 \leq G \leq 1\$

Da  $0 \leq \theta \leq 1$ , er den høyre betingelsen tilfredstilt med  $r \geq 0$ . For den venstre siden:

$$\begin{aligned} 2r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) (1 - 2\theta) &\leq 1 \text{ eller} \\ r(1 - 2\theta) &\leq \frac{1}{2} \text{ da } \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

For  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  er betingelsen oppfylt for alle  $r \geq 0$ , dvs.: Ubetinget stabil.  
For  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  er skjemaet betinget stabilt.

Stabilitetsbetingelsen er da:

$$r(1 - 2\theta) \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (5.4.9)$$

### Bruk av derivasjon

Vi skriver nå:

$$\begin{aligned} G &= 1 + r(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2) \cdot (G\theta + 1 - \theta) = 1 + 2r(\cos(\delta) - 1) \cdot (G\theta + 1 - \theta) \\ \frac{dG}{d\delta} &= 2r \left[ (G\theta + 1 - \theta) \frac{d}{d\delta} (\cos(\delta) - 1) + (\cos(\delta) - 1)\theta \cdot \frac{dG}{d\delta} \right] \end{aligned}$$

Med  $\frac{dG}{d\delta} = 0$  får vi igjen max-min for  $\delta = 0$ ,  $\delta = \pm\pi$  ( $\delta = 0$  gir  $G = 1$  som ventet)  $\delta = \pm\delta$  gir  $G = \frac{1 - 4r(1 - \theta)}{1 + 4r\theta}$  som er identisk med (5.4.8) innsatt for  $\frac{\delta}{2} = 90^\circ$ . Betingelsen  $|G| \leq 1$  blir  $-1 \leq \frac{1 - 4r(1 - \theta)}{1 + 4r\theta} \leq 1$  med samme resultat som tidligere.

### Nøyaktighet

La oss se nærmere på nøyaktigheten av -skjemaet som gitt i (5.4.7).

Skriver et enkelt Maple-program

```
> eq1:= u(x+h,t+k) - 2*u(x,t+k) + u(x-h,t+k):
> eq2:= u(x+h,t) - 2*u(x,t) + u(x-h,t):
> eq:= (u(x,t+k) - u(x,t))/k - (theta*eq1 + (1-theta)*eq2)/h^2:
> Tnj:= mtaylor(eq,[h,k]):
> Tnj:= simplify(Tnj):
> Tnj:= convert(Tnj,diff);
```

Vi har her brukt  $h = \Delta x$  og  $k = \Delta t$ .  $Tnj$  er trunkeringsfeilen som er mer detaljert behandlet i avsnitt 5.5. Anta nå at  $u(x, t)$  er den analytiske løsningen av diff.-ligningen  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  slik at vi kan sette  $\frac{\partial}{\partial t}() = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  osv. Dersom vi bruker disse relasjonene i utskriften av  $Tnj$ , får vi følgende resultat:

$$T_j^n = \left[ \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \cdot \Delta t - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \right] \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{6}(\Delta t)^2(1 - 3\theta) \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots \quad (5.4.10)$$

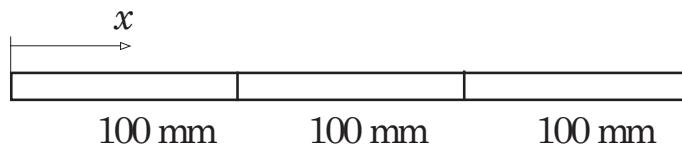
Vi ser at  $T_j^n = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$  for  $\theta = 0$  og  $1$ , altså for henholdsvis Euler-skjemaet og Laasonen-skjemaet, mens  $T_j^n = O(\Delta t)^2 + O(\Delta x)^2$  for  $\theta = \frac{1}{2}$  som er Crank-Nicolson skjemaet.

Dersom vi legger til en linje

$Tnj := simplify(subs(theta = (1 - h^2/(6 * k))/2, Tnj));$  i programmet ovenfor, finner vi at  $T_j^n = O(\Delta t)^2 + O(\Delta x)^4$  dersom vi velger  $r = \frac{1}{6(1 - 2\theta)}$  når  $r \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$ .

### Mer om stabiliteten.

Vi har funnet at skjemaet er ubetinget stabilt for  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ . I praksis viser det seg at skjemaet kan gi oscillasjoner rundt diskontinuiteter for  $\theta = \frac{1}{2}$ . En  $\theta$ -verdi  $> 0.5$  vil dempe disse oscillasjonene og denne dempingen er sterkest for  $\theta = 1$ . La oss se på et eksempel der vi bruker varmeledningsligningen på dimensjonell form.



Figur 5.10

Figuren viser en tynn aluminiumstang med lengde 300 mm.

Varmeledningsligningen er som vanlig gitt ved:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T = T(x, t)$$

Randbetingelser:

$$T(0, t) = T(300, t) = 20^\circ C$$

Startbetingelser:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= 270^\circ C \text{ for } x \in (100, 200) \\ T(x, 0) &= 20^\circ C \text{ for } x \in (0, 100) \text{ og } x \in (200, 300) \end{aligned}$$

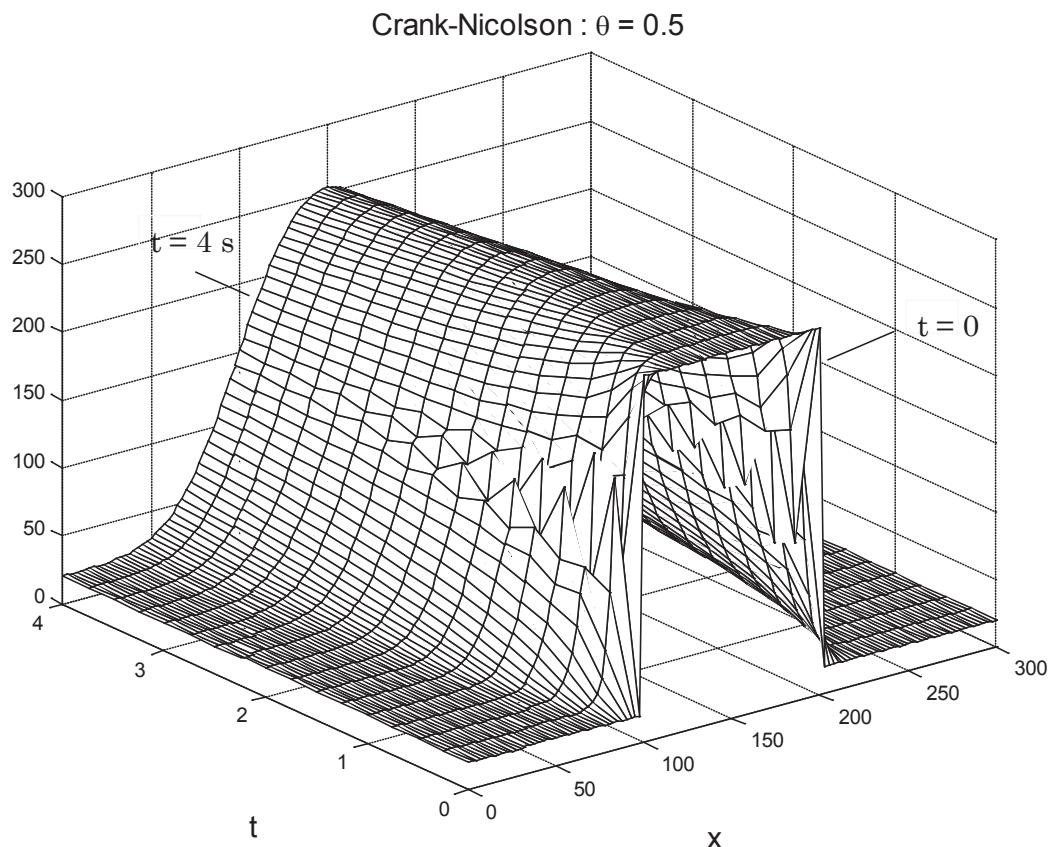
Termisk diffusivitet:

$$\alpha = 100 \text{ mm}^2/\text{s}$$

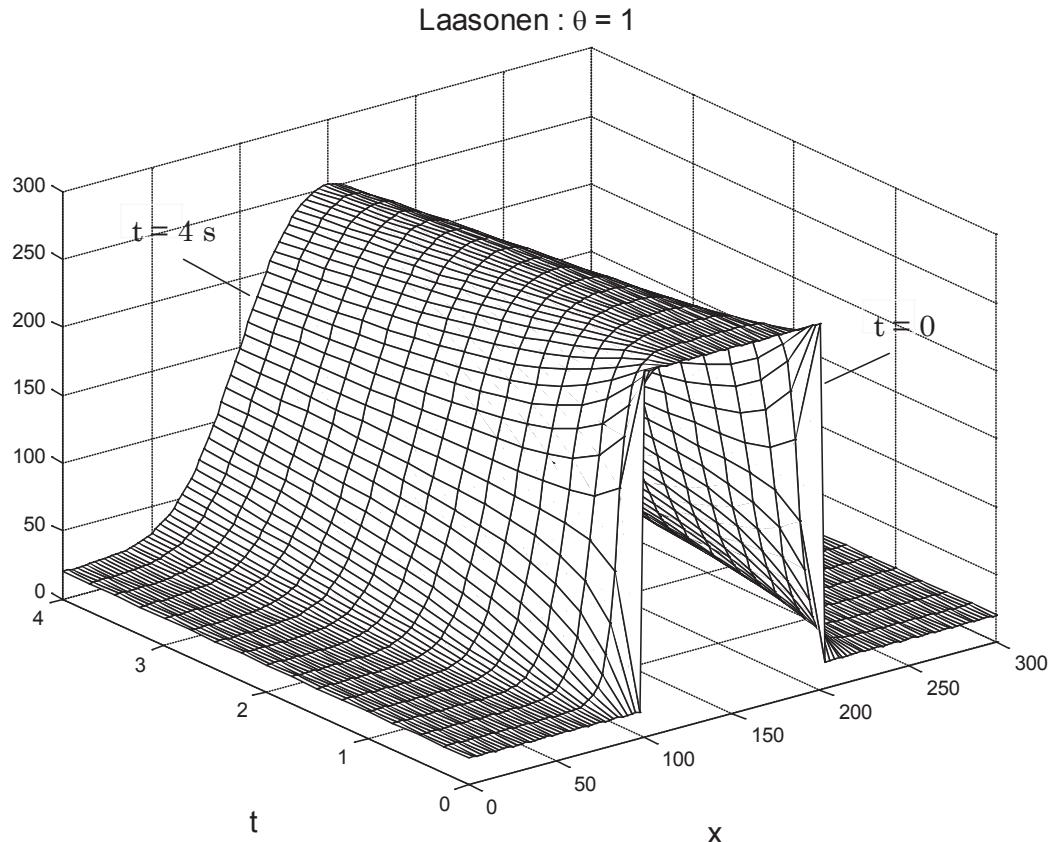
Det numeriske Fourier-tallet:

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Velger  $\Delta t = 0.25\text{s}$  slik at  $\Delta x = 5/\sqrt{r}$ . Ved å velge  $r = 4$ , får vi  $\Delta x = 2.5\text{mm}$ . Figurene på neste side viser en beregning med  $\theta = \frac{1}{2}$  og en med  $\theta = 1$ ; altså Crank-Nicolson skjemaet og Laasonen-skjemaet.



Figur 5.11



Figur 5.12

Vi ser at C-N-skjemaet gir kraftige oscillasjoner ved diskontinuitetene  $x = 100$  og  $x = 200$  for startprofilen. Etter  $t = 4\text{ s}$  er disse oscillasjonene nesten borte. For Laasonen-skjemaet har vi ingen oscillasjoner selv rundt  $t = 0$ . For å finne årsaken til dette, må vi gå tilbake til lign. (5.4.8):

$$G = \frac{1 - 4r(1 - \theta) \sin^2(\frac{\delta}{2})}{1 + 4r \sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

For  $\theta = \frac{1}{2}$  får vi:

$$G = \frac{1 - 2r \sin^2(\frac{\delta}{2})}{1 + 2r \sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

For  $\delta$  i nærheten av  $\pi$ , vil  $G$  ligge rundt  $-1$  for store verdier av  $r$ . Dette ser vi tydeligst ved å velge  $\delta = \pi = \beta \cdot h$  som gir  $G = \frac{1 - 2r}{1 + 2r}$ .

Fra (5.3.10b) har vi:

$$E_j^n = G^n \cdot E_j^0, \quad E_j^0 = e^{i \cdot \beta x_j}$$

Derfor ser vi at vi vil få oscillasjoner for  $\delta$  i nærheten av  $\pi$ . Disse høye bølgetallene vil dø ut for økende  $t$  fordi startprofilen blir utglattet av dissipasjonen. Dersom vi setter  $r = 4$  som brukt i eksemplet, vil vi etter 16

tidsteg med  $\Delta t = 0.25\text{s}$  få  $G^{16} = \left(-\frac{7}{8}\right)^{16} \approx 0.12$ , mens vi med  $r = 1$  ville fått  $G^{16} = 2.3 \cdot 10^{-8}$ . Dette betyr at de høye bølgetallene avtar langsomt for store verdier av  $r$ . Mye likt Gibbs-fenomenet ved Fourierutvikling av diskontinuerlige funksjoner. (Se appendiks A.3, tilfelle 1).

For Laasonen-skjemaet med  $\theta = 1$  får vi derimot:

$$G = \frac{1}{1 + 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Vi får her ingen oscillasjoner for noen av bølgetallene.

Dersom vi bruker uttrykk fra stabilitet av ordinære differential-ligninger, kan vi si at  $\theta$ -skjemaet er absolutt stabilt (A-stabilt) for  $\theta = \frac{1}{2}$  og strengt absolutt stabilt (eller  $L$ -stabilt) for  $\theta = 1$ . (Se avsnitt 1.6.1)

Dersom vi bruker  $\theta$ -skjemaet på et varmeledningsproblem av den typen som vist ovenfor med foreskrevet temperatur på begge rendene (Dirichlet-betingelser), vet vi at den maksimale temperaturen til enhver tid må ligge mellom den største som er gitt i startprofilet og den minste som er gitt på randen, eller  $T_{min} \leq T_j^n \leq T_{max}$ . For eksemplet ovenfor, er  $T_{min} = 20^\circ\text{C}$  og  $T_{max} = 270^\circ\text{C}$ . Men da oppfyller vi kravene til PK-kriteriet.

Skriver (5.4.7) løst med hensyn på  $u_j^{n+1}$ :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{1 + 2\theta r} \left[ \theta r(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1 - \theta)r(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + (1 - (1 - \theta)2r) \right] \quad (5.4.11)$$

Ved å summere koeffisientene på høyre side, finner vi at summen er lik 1. Deretter må vi forlange at koeffisientene er positive. Dette betyr at  $0 < \theta < 1$  og  $1 - (1 - \theta) \cdot 2r > 0$ . Den siste ulikheten er oppfylt for  $r \cdot (1 - \theta) < \frac{1}{2}$ . Ved å sette  $\theta = 0$  og  $\theta = 1$ , finner vi at summen er lik 1 også for disse verdiene, slik at vi får følgende betingelse for oppfyllelse av PK-kriteriet:

$$r \cdot (1 - \theta) \leq \frac{1}{2} \quad (5.4.12)$$

Fra von Neumann-analysen fant vi følgende betingelse fra (5.4.9):

$$r \cdot (1 - 2\theta) \leq \frac{1}{2} \quad (5.4.13)$$

Vi ser at (5.4.12) er vesentlig strengere enn (5.4.13). Mens C-N-skjemaet med  $\theta = \frac{1}{2}$  er ubetinget stabil i følge von Neumann-analysen, må vi ha  $r \leq 1$  ifølge PK-kriteriet. PK-kriteriet gir her en sikker betingelse for det fysiske max-min-kriteriet også oppfylles for differanseligningen. En test med eksemplet ovenfor, bekrefter dette kriteriet. Finnes det da et kriterium som er både nødvendig og tilstrekkelig for denne enkle modell-ligningen? Kraaijevanger fant i 1992 følgende nødvendige og tilstrekkelige kriterium:

$$r \cdot (1 - \theta) \leq \frac{2 - \theta}{4(1 - \theta)} \quad (5.4.14)$$

Vi ser at for  $\theta = \frac{1}{2}$  gir dette kriteriet betingelsen  $r \leq \frac{3}{2}$ . For  $\theta = \frac{3}{4}$  gir (5.4.14)  $r \leq 5$  mens PK-kriteriet gir  $r \leq 2$ .

Hensikten med store  $r$ -verdier er for å kunne bruke forholdsvis store tidskritt når vi ønsker å følge hele tidsforløpet mot en stasjonær tilstand. Men vi må selvfølgelig tenke på nøyaktigheten også. Husk dessuten at dette er en enkel endimensjonal differanseligning med konstante koeffisienter som kan løses meget raskt med en moderne PC nærmest uavhengig av  $\Delta t$  og  $\Delta x$  så lenge vi holder oss innfor stabilitetsområdet. Ikke-stasjonære problem i tre dimensjoner krever fremdeles mye regnetid.

#### 5.4.4 VON NEUMANNNS GENERELLE STABILITETS BETINGELSE

Vi har omtalt stabilitetsbetingelsen  $|G| \leq 1$  som von Neumanns strenge stabilitetsbetingelse. Årsaken til denne betegnelsen, er at dersom  $|G| \leq 1$  er oppfylt, kan ikke amplituden øke. I mange tilfeller har vi selvfølgelig fysikalske problemer der amplituden vokser med  $t$ . ( $t$  begrenset). Et enkelt eksempel er varmeledningsligningen med et kildeledd:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT, \quad b = \text{konstant}, \quad t < t_{maks} \quad (5.4.15)$$

Med  $b < 0$  har vi et varmesluk, mens for  $b > 0$  har vi en varmekilde. I det første tilfellet kan vi bruke det strenge kriteriet, men for det andre tilfellet er det nødvendig å tillate  $|G| > 1$ .

En partikulær løsning av (5.4.15) er gitt ved:

$$T(x, t) = e^{bt} \cdot e^{-\alpha\beta^2 \cdot t} \cos(\beta x) = e^{(b-\alpha\beta^2) \cdot t} \cos(\beta x) \quad (5.4.16)$$

La oss bruke (5.4.16) til å bestemme en analytisk forsterkningsfaktor, se (5.3.6):

$$G_a = \frac{T(x_j, t_{n+1})}{T(x_j, t_n)} = \exp [(b - \alpha\beta^2) \cdot t_{n+1} - (b - \alpha\beta^2) \cdot t_n] = e^{b\Delta t} \cdot e^{-\alpha\beta^2\Delta t} \quad (5.4.17)$$

Vi ser at det er ledet  $e^{b\Delta t}$  som får amplituden til å øke med positiv  $b$ .

En rekkeutvikling for små  $\Delta t$ :

$$e^{b\Delta t} = 1 + b \cdot \Delta t + \frac{b^2}{2} (\Delta t)^2 + \dots \quad (5.4.18)$$

Dersom vi bruker FTCS-skjemaet, får vi:

$$T_j^{n+1} = r(T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) + (1 - 2r)T_j^n + \Delta t b T_j^n \quad (5.4.19a)$$

$$\text{med } r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (5.4.19b)$$

Dersom vi bruker PK-kriteriet, finner vi at summen av koeffisientene er lik  $1 + b \cdot \Delta t$ , slik at dette kriteriet bare kan brukes for  $b < 0$ .

Får ved å bruke von Neumanns metode på (5.4.19):

$$G = 1 - 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + \Delta t \cdot b \quad (5.4.20)$$

Ved å sette  $r = \frac{1}{2}$ , får vi:

$$|G| \leq \left| 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \right| + |\Delta t \cdot b| \leq 1 + \Delta t \cdot b, \quad b > 0$$

Dersom vi sammenligner med (5.4.18), ser vi at vi får god overenstemmelse mellom den analytiske og den numeriske forsterkningsfaktoren i dette tilfellet.

Innfører von Neumanns generelle betingelsen ved:

$$|G| \leq 1 + K \cdot \Delta t \quad (5.4.21)$$

der  $K$  er en positiv konstant.

Dette betyr at vi tillater amplituden å øke eksponentielt for  $t < t_{maks}$ .

I dette tilfellet kan vi bruke den strenge betingelsen dersom vi resonnerer på følgende måte:

Da kildeleddet i (5.4.15) ikke inneholder noen derivert størrelse, kan vi se bort fra dette ledet ved stabilitetsundersøkelsen.

Vi har her samme type problemstilling som i avsnitt 1.6, der vi diskuterer stive, ordinære differensial-ligninger. (Se f.eks. lign. (1.6.8) i avsnitt 1.6.1). For en voksende amplitude må vi minske skritt lengden for den uavhengige variable dersom vi skal oppnå en foreskrevet nøyaktighet. For en minskende amplitude må vi derimot holde oss under en maksimum skritt lengde for å få en stabil regneprosess.

La oss se på et annet eksempel med bruk av FTCS-skjemaet.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \alpha > 0 \quad (5.4.22)$$

Denne ligningen som kalles adveksjon-diffusjonsligningen, er fremdeles en parabolsk ligning ifølge klassifiseringskjemaet i avsnitt 4.3.

Ved bruk av FTCS-skjemaet på (5.4.22) med sentraldifferanser for  $\frac{\partial u}{\partial x}$ :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + a_0 \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Bruker von Neumanns metode:

$$G = 1 - 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + i \cdot a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\delta)$$

som videre gir:

$$|G|^2 = \left(1 - 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2 + \left(a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\delta)\right)^2 = \left(1 - 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2 + \frac{a_0^2 \cdot r}{\alpha} \cdot \Delta t \sin^2(\delta)$$

Velger igjen  $r = \frac{1}{2}$ :

$$|G| = \sqrt{\left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2 + \frac{a_0^2}{2\alpha} \cdot \Delta t \cdot \sin^2(\delta)} \leq 1 + \frac{a_0^2}{2\alpha} \cdot \Delta t$$

Vi har her brukt  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$

Med  $K = \frac{a_0^2}{2\alpha}$ , ser vi at den generelle betingelsen i (5.4.21) er oppfylt.  
Adveksjon-diffusjonsligningen er behandlet mer detaljert i avsnitt 6.10.

## 5.5 TRUNKERINGSFEIL, KONSISTENS OG KONVERGENS

La  $U(x, t)$  være den eksakte løsningen av en PDL, skrevet  $L(U) = 0$ , og  $u$  den eksakte løsningen av den tilhørende differanseligningen, skrevet  $F(u) = 0$ . Den eksakte løsningen i  $(x_i, t_n)$  er gitt ved:

$$\begin{aligned} U_i^n &\equiv U(x_i, t_n) \text{ der } x_i = i \cdot \Delta x = i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ t_n &= n \cdot \Delta t = n \cdot k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

For den lokale trunkeringsfeilen  $T_i^n$  får vi da følgende uttrykk:

$$T_i^n = F(U_i^n) - L(U_i^n) = F(U_i^n) \quad (5.5.1)$$

$T_i^n$  finnes ved Taylor-utvikling.

Noen rekkeutviklinger:

$$U_{i\pm 1}^n \equiv U(x_{i\pm h}, t_n) = U_i^n \pm h \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_i^n + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_i^n \pm \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_i^n + \dots \quad (5.5.2a)$$

$$U_i^{n\pm 1} \equiv U(x_i, t_{n\pm k}) = U_i^n \pm k \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_i^n + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_i^n \pm \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \Big|_i^n + \dots \quad (5.5.2b)$$

La oss som eksempel finne den lokale trunkeringsfeilen  $T_i^n$  for FTCS-metoden anvendt på diffusjonsligningen  $L(U) = 0$  der

$$\begin{aligned} L(U) &= \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \\ T_i^n &= F(U_i^n) = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} - \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Innsatt fra (5.5.2) i (5.5.3):

$$\begin{aligned} T_i^n &= \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n + \left( \frac{k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_i^n + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \Big|_i^n + O(k^3, h^4) \\ \text{Da } \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$T_i^n = \left( \frac{k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_i^n + \text{høyere ordens ledd} \quad (5.5.4)$$

(5.5.4) viser at  $T_i^n = O(k) + O(h^2)$  som ventet.

(5.5.4) kan også skrives:

$$T_i^n = \frac{h^2}{12} \cdot \left( 6 \frac{k}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_i^n + O(k^2) + O(h^4)$$

Ved å velge  $r = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{6}$ , får vi:

$$T_i^n = O(k^2) + O(h^4) \quad (5.5.5)$$

$\Delta t$  blir svært liten for  $r = 1/6$ , men med dagens PC-er er dette ikke noen problem, bortsett fra eventuell akkumulering av avrundingsfeil. (Se også side 211)

### Konsistens

Vi sier at differanseligningen er konsistent med den gitte differensial-ligningen dersom den lokale trunkeringsfeilen  $T_i^n \rightarrow 0$  når  $\Delta x$  og  $\Delta t \rightarrow 0$  uavhengig av hverandre.

#### Eksempel 5.2

Fra (5.5.4)

$$T_i^n = \left( \frac{k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_i^n \rightarrow 0 \text{ for } h \text{ og } k \rightarrow 0$$

Dette betyr at FTCS-skjemaet er konsistent med diffusjonsligningen.

La oss se nærmere på DuFort-Frankel skjemaet fra avsnitt 5.4.2:

$$T_i^n = \frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2k} - \frac{[U_{i-1}^n + U_{i+1}^n - (U_i^{n+1} + U_i^{n-1})]}{h^2}$$

Med bruk av rekkeutviklingene i (5.5.2):

$$T_i^n = \left[ \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left( \frac{k}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right]_i^n + \left[ \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right]_i^n + O\left(\frac{k^4}{h^2}, k^4, h^4\right) \quad (5.5.6)$$

P.g.a faktoren  $\left(\frac{k}{h}\right)^2$  er det viktig å spesifisere hvordan  $k$  og  $h \rightarrow 0$ . Skjemaet er ikke uten videre konsistent med den gitte ligningen. Et slikt skjema betegnes gjerne som betinget konsistent.

### Tilfelle 1

Setter  $r_0 = \frac{k}{h} \rightarrow k = r_0 \cdot h$ ,  $r_0$  en konstant  $> 0$ .

Innsatt for  $k$  i (5.5.6):

$$T_i^n = \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r_0^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_i^n + O(h^2)$$

For  $h \rightarrow 0$ , ser vi at DuFort-Frankel skjemaet nå er konsistent med den hyperbolske ligningen  $\frac{\partial U}{\partial t} + r_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  og ikke den opprinnelige diffusjonsligningen.

### Tilfelle 2

Setter  $r_0 = \frac{k}{h^2} \rightarrow k = r_0 \cdot h^2$ . Innsatt for  $k$  i (5.5.6):

$$\begin{aligned} T_i^n &= \left[ \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_i^n + \left[ r_0^2 h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right]_i^n + O\left(\frac{k^4}{h^2}, k^4, h^4\right) \\ &= \left[ r_0^2 h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right]_i^n + O(r_0^4 h^6, k^4, h^4) \\ &\text{da } \left[ \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_i^n = 0 \end{aligned}$$

Vi ser at  $T_i^n \rightarrow 0$  for  $h$  og  $t \rightarrow 0$  med  $T_i^n = O(k^2) + O(h^2)$ .

Skjemaet er nå konsistent med diffusjonsligningen.

D-F-skjemaet kan derfor brukes med  $k = r_0 \cdot h^2$ . Men da har vi fått en begrensning på  $\Delta t$ , ikke som et stabilitetskrav, men ved kravet til konsistens. Ikke-konsistente skjema oppstår vanligvis når vi trikser med skjemaene etter at vi har Taylor-utviklet dem på vanlig måte.

### Konvergens

Med  $U$  som den eksakte løsningen av differensialligningen og  $u$  som den eksakte løsningen av den tilhørende differanseligningen, sier vi at differanseligningen er konvergent dersom

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} u \rightarrow U \text{ for gitt } t_n \text{ og } x_i$$

Det er generelt vanskelig å bevise konvergensen av et differanseskjema. Derfor har det vært gjort mange forsøk på å erstatte definisjonen ovenfor med betingelser som er lettere å bevise hver for seg, men som tilsammen er tilstrekkelig for konvergens.

Det mest kjente av disse teoremmene er *Lax's theorem*:

Dersom det lineære initialverdiproblemet er velformulert og den tilhørende differanseligningen er konsistent, er stabilitet en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for konvergens. (Se avsnitt 4.5 angående begrepet velformulert) Når vi ser alle betingelsene som må oppfylles forat Lax's teorem skal kunne anvendes, skjønner vi vanskelighetene med å bevise konvergens i mer generelle problemstillinger.

## 5.6 EKSEMPLER MED RADIELL SYMMETRI

Dersom vi transformerer diffusjonsligningen  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  til henholdsvis sylinder- og kule-koordinater og forlanger at  $u$  bare skal være funksjon av tiden  $t$  og radien  $r$ , får vi:

Sylinder:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Kule:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Ligningene kan da skrives:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \lambda = 0, 1, 2 \quad (5.6.1)$$

$\lambda = 0$  med  $r \rightarrow x$  gir det velkjente kartesiske tilfellet.

(5.6.1) er en partiell diff. ligning med variable koeffisienter. Vi vil nå forsøke en von Neumann-analyse av denne ligningen med  $\theta$ -skjemaet fra avsnitt 5.4.3.

### Stabilitetsanalyse med bruk av $\theta$ -skjemaet for radius $r > 0$

Setter  $r_j = \Delta r \cdot j$ ,  $j = 0, 1, \dots$  og innfører  $D = \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$

For  $r > 0$ :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n + D \left[ \theta(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \right] \\ & + \frac{\lambda D}{2j} \left[ \theta(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Utfører en von Neumann-analyse ved å sette inn  $E_j^n = G^n \cdot e^{i \cdot \beta r_j} = G^n e^{i \cdot \delta \cdot j}$  med  $\delta = \beta \cdot \Delta r$  og bruk av de vanlige formlene (5.3.14) og (5.3.15).

Vi får:

$$G \cdot \left( 1 + 4\theta D \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) - i \cdot \frac{\theta \lambda D}{j} \sin(\delta) \right) = 1 - 4(1-\theta)D \cdot \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) + i \frac{(1-\theta)\lambda D}{j} \sin(\delta)$$

som ved bruk av formelen  $\sin(\delta) = 2 \sin \left( \frac{\delta}{2} \right) \cos \left( \frac{\delta}{2} \right)$  og betingelsen  $|G| \leq 1$  blir:

$$\left( 1 - 4(1-\theta)D \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \right)^2 + \frac{(1-\theta)^2 \lambda^2 D^2}{j^2} \sin^2(\delta) \leq \left( 1 + 4\theta D \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \right)^2 + \frac{\theta^2 \lambda^2 D^2}{j^2} \sin^2(\delta)$$

og som videre gir:

$$D \cdot (1 - 2\theta) \cdot \left( \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \cdot \left( 4 - \frac{\lambda^2}{j^2} \right) + \frac{\lambda^2}{j^2} \right) \leq 2, \quad j \geq 1 \quad (5.6.3)$$

Det er ikke vanskelig å se at ledet i parentesen har sin største verdi for  $\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1$ ; dvs. for  $\delta = \pi$ . (Kan også finnes ved å derivere ledet m.h.p.  $\delta$  som gir maksimum for  $\delta = \pi$ ). Faktoren  $\frac{\lambda^2}{j^2}$  faller da ut.

Vi får:

$$D \cdot (1 - 2\theta) \cdot 2 \leq 1 \quad (5.6.4)$$

Som i avsnitt 5.4.3, må vi skille mellom to tilfeller.

1.

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$D = \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \quad (5.6.5)$$

2.

$$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$$

Skifter fortegn i (5.6.4):

$$D \cdot (2\theta - 1) \cdot 2 \geq -1$$

Denne betingelsen er alltid oppfylt, slik at differanseligningen er ubetinget stabil for disse  $\theta$ -verdiene.

Vi har med andre ord fått de samme stabilitetsbetingelsene som for ligningen med konstante koeffisienter:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$  der vi har FTCS-skjemaet for  $\theta = 0$ , Crank-Nicolson-skjemaet for  $\theta = 1/2$ , og Laasonen-skjemaet for  $\theta = 1$ .

Merk at denne analysen bare gjelder for  $r > 0$ .

Vi må da se på ligningen for  $r = 0$ .

Ledet  $\frac{\lambda}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$  må behandles spesielt for  $r = 0$ .

L'Hospitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \text{ for } r = 0 \quad (5.6.6)$$

Vi har funnet at ved bruk av FTCS-skjemaet, har vi den vanlige begrensningen  $D \leq 1/2$ . La oss derfor undersøke om randbetingelsene gir begrensninger når vi bruker FTCS-skjemaet.

### Versjon 1

Diskretiserer (5.6.6) for  $r = 0$  og utnytter symmetribetingelsen  $\frac{\partial u}{\partial r}(0) = 0$ :

$$u_0^{n+1} = [1 - 2(1 + \lambda)D] \cdot u_0^n + 2(1 + \lambda)D \cdot u_1^n \quad (5.6.7)$$

Dersom vi bruker PK-kriteriet på (5.6.7), får vi:

$$D \leq \frac{1}{2(1 + \lambda)} \quad (5.6.8)$$

For  $\lambda = 0$  får vi den velkjente betingelsen  $D \leq 1/2$ , mens vi for sylinderen med  $\lambda = 1$  får  $D \leq 1/4$  og for kule med  $\lambda = 2$  får  $D \leq 1/6$ . Spørsmålet er om disse betingelsene for sylinder og kule er nødvendige. Vi vet at  $D \leq 1/2$  er både tilstrekkelig og nødvendig for  $\lambda = 0$ .

Det er vanskelig å finne et nødvendig og tilstrekkelig kriterium i dette tilfellet. Ser derfor på et eksempel med oppstart av strømning i et rør, gitt som eksempel 5.3.

### Versjon 2

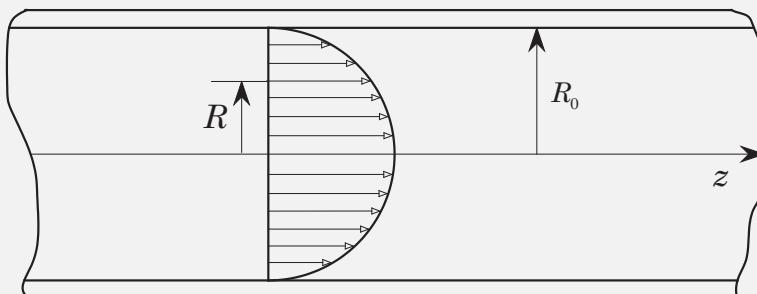
For å unngå å bruke en separat ligning for  $r = 0$ , diskretiserer vi symmetri-betingelsen  $\frac{\partial u}{\partial r}(0) = 0$  med 2. ordens foroverdifferanser:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0) = 0 \rightarrow \frac{-3u_0^n + 4u_1^n - u_2^n}{2\Delta r} \rightarrow u_0^n = \frac{1}{3}(4u_1^n - u_2^n) \quad (5.6.9)$$

For kula finnes det en detaljert analyse av Dennis Eisen i tidskriftet Numerische Mathematik vol. 10, 1967, side 397-409. Han viser at en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for løsning av (5.6.2) sammen med (5.6.7) (for  $\lambda = 2$  og  $\theta = 0$ ) er at  $D < 1/3$ . Dessuten viser han at ved å unngå å bruke (5.6.7), får vi stabilitet for FTCS-skjemaet når  $D < 1/2$ .

Vi beregner nå to tilfeller for å se hvilke stabilitetskrav vi får i praksis når vi bruker begge versjonene av randbetingelsene.

#### Eksempel 5.3 Oppstart av rørstrømning



Figur 5.13

Figuren viser hastighetsprofilen ved strømning i et rør av en inkompressibel fluid ved et gitt tidspunkt. Vi tenker oss at profilet har utviklet seg fra null ved å sette på en konstant trykkgredient  $\frac{dp}{dz} < 0$ , slik at hastighetsprofflet for det stasjonære tilfellet er det velkjente parabolske profilet for Poiseuille-strømning.

Bevegelsesligning:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) \quad (5.6.10)$$

der hastighetsprofilen  $U = U(R, \tau)$ .  $0 \leq R \leq R_0$ , og  $\tau$  er den fysiske tiden.

Dimensjonsløse variable:

$$t = \nu \frac{\tau}{R_0^2}, \quad r = \frac{R}{R_0}, \quad u = \frac{U}{k}, \quad u_s = \frac{U_s}{k} \text{ der } k = -\frac{R_0^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} \quad (5.6.11)$$

som innført i (5.6.10) gir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (5.6.12a)$$

Randbetingelser:

$$u(\pm 1, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 \quad (5.6.12b)$$

Den siste er en symmetribetingelse. Finner stasjonær løsning  $u_s$  for  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ :

$$\frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_s}{dr} = -4 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_s}{dr} \right) = -4 \text{ som gir:}$$

$$\frac{du_s}{dr} = -2r + \frac{C_1}{r} \text{ med } C_1 = 0 \text{ da } \frac{du_s(0)}{dr} = 0$$

Etter en ny integrasjon og bruk av randbetingelsene, får vi den velkjente parabolske hastighetsfordelingen:

$$u_s = 1 - r^2 \quad (5.6.13)$$

Vi antar nå at vi har et tilfelle med fullt utviklet profil som gitt i (5.6.13). Plutselig fjerner vi trykkgradienten. Fra (5.6.10) ser vi at dette gir en enklere ligning. Hastigheten  $\omega(r, t)$  for dette tilfellet er gitt ved:

$$\omega(r, t) = u_s - u(r, t) \text{ med } \omega = \frac{W}{k} \quad (5.6.14)$$

Vi skal nå løse følgende problem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad (5.6.15a)$$

Randbetingelser:

$$\omega(\pm 1, t) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r}(0, t) = 0 \quad (5.6.15b)$$

Startbetingelse:

$$\omega(r, 0) = u_s = 1 - r^2 \quad (5.6.15c)$$

Det opprinnelige problemet er da:

$$u(r, t) = 1 - r^2 - \omega(r, t) \quad (5.6.16)$$

Den analytiske løsningen av (5.6.15), (5.6.16), først gitt av Szymanski i 1932, finnes i appendiks G.8.

La oss se spesielt på FTCS-skjemaet.

Fra (5.6.2), med  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0$  og  $j \geq 0$ :

$$\omega_j^{n+1} = \omega_j^n + D \cdot (\omega_{j+1}^n - 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n) + \frac{D}{2j} \cdot (\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n) \quad (5.6.17a)$$

For  $j = 0$  får vi fra (5.6.7):

$$\omega_0^{n+1} = (1 - 4D) \cdot \omega_0^n + 4D \cdot \omega_1^n \quad (5.6.17b)$$

Fra (5.6.5) får vi stabilitetsintervallet  $0 < D \leq \frac{1}{2}$  for  $r > 0$  og  $0 < D \leq \frac{1}{4}$

fra (5.6.8) for  $r = 0$  som er en tilstrekkelig betingelse.

Ved å løse (5.6.17), får vi følgende tabell for stabilitetsgrensa:

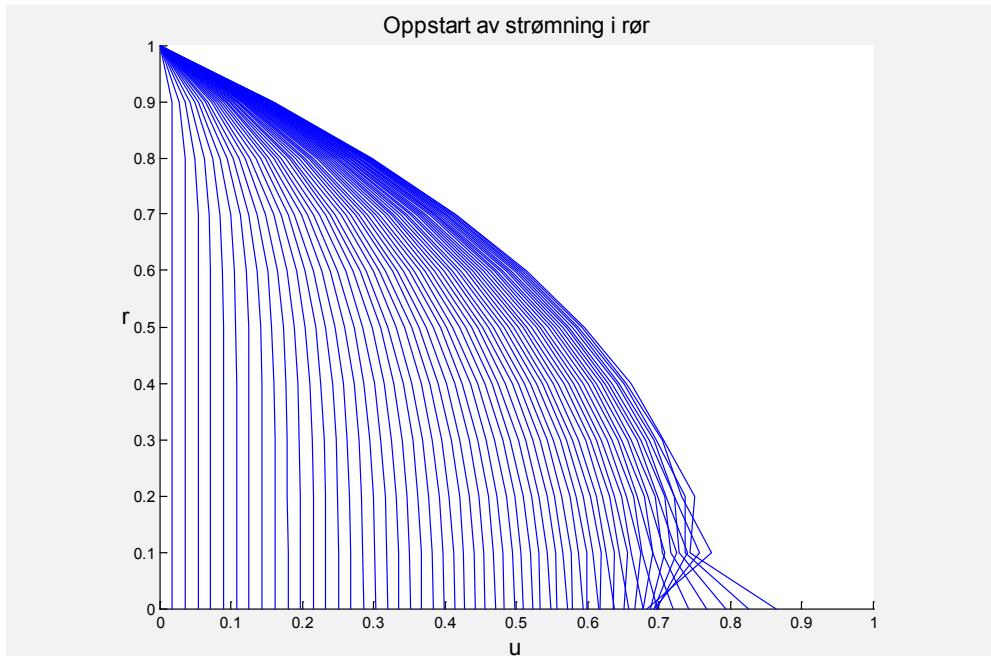
$\Delta r$	D
0.02	0.413
0.05	0.414
0.1	0.413
0.2	0.402
0.25	0.394
0.5	0.341

For tilfredstillende nøyaktighet bør vi her ha  $\Delta r \leq 0.1$ . Av tabellen ovenfor ser vi at da er betingelsen  $D < 0.4$  er tilstrekkelig. Med andre ord en slags midlere verdi av  $D = \frac{1}{2}$  og  $D = \frac{1}{4}$ .

Det er ligningen i (5.6.17b) som skaper problemer. Vi kan unngå denne ved isteden å bruke (5.6.9):

$$\omega_0^n = \frac{1}{3}(4\omega_1^n - \omega_2^n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.6.18)$$

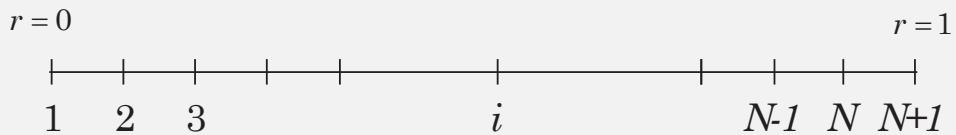
Beregningen viser da at grensa for hele systemet er gitt ved  $0 < D \leq \frac{1}{2}$  for FTCS-skjemaet. Figuren nedenfor viser  $u$ -profilen for  $D = 0.45$  med  $\Delta r = 0.1$  etter 60 tidskritt med bruk av (5.6.17b). Tydelig utvikling av instabilitet for  $r = 0$ .



Figur 5.14

### Programmering av $\theta$ -skjemaet

**Randbettingelse gitt i (5.6.17b)**



Figur 5.15

Da 1 er det laveste matrise-indekset i Matlab, setter vi  
 $r_j = \Delta r \cdot (j - 1)$ ,  $\Delta r = \frac{1}{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N + 1$  som vist på figuren ovenfor  
Ligningsystem fra (5.6.2) samt (5.6.6):

For  $j = 1$ :

$$(1 + 4D \cdot \theta) \cdot \omega_1^{n+1} - 4D \cdot \theta \cdot \omega_2^{n+1} = \omega_1^n + 4D(1 - \theta) \cdot (\omega_2^n - \omega_1^n) \quad (5.6.19)$$

For  $j = 2, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} & -D\theta \cdot \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) \cdot \omega_{j-1}^{n+1} + (1 + 2D\theta) \cdot \omega_j^{n+1} - D\theta \cdot \left(1 + \frac{1}{2(j-1)}\right) \cdot \omega_{j+1}^{n+1} \\ & = D(1 - \theta) \cdot \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) \cdot \omega_{j-1}^n + [1 - 2D(1 - \theta)] \cdot \omega_j^n \\ & + D(1 - \theta) \cdot \left(1 + \frac{1}{2(j-1)}\right) \cdot \omega_{j+1}^n \end{aligned} \quad (5.6.20)$$

Får da følgende koeffisienter for bruk i **tdma**:

$$\begin{aligned}
 a_j &= -D\theta \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right), \quad j = 2, \dots, N \\
 b_1 &= 1 + 4D\theta \\
 b_j &= 1 + 2D\theta, \quad j = 2, \dots, N \\
 c_1 &= -4D\theta \\
 c_j &= -D\theta \left(1 + \frac{1}{2(j-1)}\right), \quad j = 2, \dots, N-1 \\
 d_1 &= \omega_1^n + 4D(1-\theta) \cdot (\omega_2^n - \omega_1^n), \quad n = 1, \dots \\
 d_j &= D(1-\theta) \left\{ \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) \cdot \omega_{j-1}^n + \left(1 + \frac{1}{2(j-1)}\right) \cdot \omega_{n+1}^n \right\} \\
 &\quad + [1 - 2D(1-\theta)] \cdot \omega_j^n, \quad j = 2, \dots, N+1
 \end{aligned} \tag{5.6.21}$$

Startverdier:

$$\omega_j^0 = 1 - r_j^2 = 1 - [\Delta r \cdot (j-1)]^2, \quad j = 1, \dots, N+1 \tag{5.6.22}$$

Dessuten har vi at  $\omega_{N+1}$  for alle  $n$ -verdier.

Merk at vi også kan bruke **tdma** for  $\theta = 0$  (FTCS-skjemaet). I dette tilfellet forsvinner både  $a$ - og  $c$ -vektoren. Determinanten av matrisa er nå produktet av elementene i  $b$ -vektoren. Betingelsen for at matrisa er ikke-singulær er da at alle  $b$ -elementene  $\neq 0$ , noe som er oppfylt for alle verdier av  $D$  og  $\theta$ .

La oss også undersøke den numeriske stabiliteten av **tdma** for dette systemet.

Fra lign. (3.1.4), har vi følgende tre betingelser:

$$\begin{aligned}
 |b_1| &> |c_1| > 0 \\
 |b_j| &\geq |a_j| + |c_j|, \quad a_j \cdot c_j \neq 0, \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \\
 |b_N| &> |a_N| > 0
 \end{aligned} \tag{5.6.23}$$

Ulikhet 1:

$$|1 + 4D\theta| > |4D\theta| \text{ som alltid er oppfylt.}$$

Ulikhet 2:

$$|1 + 2D\theta| \geq D\theta \left|1 - \frac{1}{2(j-1)}\right| + D\theta \left|1 - \frac{1}{2(j+1)}\right|$$

Da alle leddene er positive:

$$\begin{aligned}
 1 + 2D\theta &\geq D\theta \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) + D\theta \left(1 - \frac{1}{2(j+1)}\right) \\
 \rightarrow 1 + 2D\theta &\geq 2D\theta \text{ som alltid er oppfylt}
 \end{aligned}$$

Ulikhet 3:

$$|1 + 2D\theta| \geq D\theta \left| 1 - \frac{1}{2(j-1)} \right| \rightarrow 1 + 2D\theta \geq D\theta \left( 1 - \frac{1}{2(j-1)} \right)$$

som alltid er oppfylt

Vi kan derfor bruke **tdma** som løsningsrutine.

Løsningen av dette systemet er gitt i programmet **startup** som løser systemet for  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1/2$  og  $\theta = 1$ . Utskrift er gitt på den neste siden. Vi har valgt  $D = 0.4$  og  $\Delta r = 0.02$  slik at vi er i det stabile området for FTCS-skjemaet. Utskriften gir  $u_s$ , ikke  $\omega$ .

Legg merke til at det bare er høyresiden av systemet, dvs.  $d$ -vektoren, som er tidsavhengig. Vi kan derfor bruke en versjon av **tdma** der vi utfører elimineringen kun en gang, mens innsettingen utføres for hvert tidskritt. En slik versjon er gitt i lign. (5.6.18), appendiks I og er programmert i **startupv3** som er 2-3 ganger raskere enn **startup**.

```

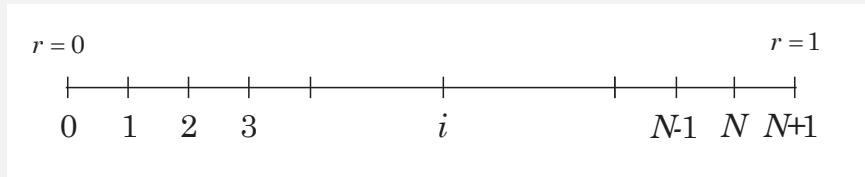
*****
*      Impulsive start of pipeflow      *
*      theta = 0:  FTCS-scheme          *
*      theta = 1:   Laasonen            *
*      theta = 1/2: Crank-Nicolson     *
*****
```

No. of time-steps ..... 500  
r-step length ..... 0.020  
Diffusion-number D ..... 0.400  
Timestep ..... 1.600e-004  
Elapsed time ..... 8.000e-002

r	u( )	u( )	u( )
analytisk			
0.000	3.1452e-001	3.1436e-001	3.1444e-001
0.100	3.1368e-001	3.1351e-001	3.1360e-001
0.200	3.1091e-001	3.1073e-001	3.1082e-001
0.300	3.0548e-001	3.0528e-001	3.0538e-001
0.400	2.9606e-001	2.9584e-001	2.9595e-001
0.500	2.8069e-001	2.8047e-001	2.8058e-001
0.600	2.5671e-001	2.5650e-001	2.5661e-001
0.700	2.2078e-001	2.2060e-001	2.2069e-001
0.800	1.6893e-001	1.6880e-001	1.6886e-001
0.900	9.6816e-002	9.6748e-002	9.6782e-002
1.000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000

Vi ser at det ikke er stor forskjell mellom resultatene for de ulike  $\theta$ -verdiene da vi har en valgt en forholdsvis liten verdi for  $D$ .

### Randbetingelse gitt i (5.6.9)



Figur 5.16

Vi velger å renummere som vist på figuren:

$$r_j = \Delta r \cdot j, \quad \Delta r = \frac{1}{N+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N+1$$

Ved å renummerere, kan vi også bruke **tdma** for tilfellet  $\theta = 0$  (FTCS) slik som vi gjorde i den foregående beregningen. Uten renummerering, vil vi få  $b_1 = 4D\theta$  slik at  $b_1 = 0$  for  $\theta = 0$ . Dette vil føre til at determinanten av koeffisientmatrisa blir lik null.

Gjentar randbetingelsen gitt i (5.6.9):

$$\omega_0^n = \frac{1}{3}(4\omega_1^n - \omega_2^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6.24)$$

Ligningsystemet blir nå som gitt i (5.6.17) når vi lar  $\frac{1}{2(j-1)} \rightarrow \frac{1}{2j}$  og  $j = 1, 2, \dots, N$ . For  $j = 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} & -D\theta \cdot \left(1 - \frac{1}{2j}\right) \cdot \omega_{j-1}^{n+1} + (1 + 2D\theta) \cdot \omega_j^{n+1} - D\theta \cdot \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \cdot \omega_{j+1}^{n+1} \\ &= D(1 - \theta) \cdot \left(1 - \frac{1}{2j}\right) \cdot \omega_{j-1}^n + [1 - 2D(1 - \theta)] \cdot \omega_j^n \\ &+ D(1 - \theta) \cdot \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \cdot \omega_{j+1}^n \end{aligned} \quad (5.6.25)$$

(5.6.25) utskrevet for  $j = 1$ , innsatt fra (5.6.24) og sammentrukket:

$$(1 + \frac{4}{3}D\theta) \cdot \omega_1^{n+1} - \frac{4}{3}D\theta\omega_2^{n+1} = [1 - \frac{4}{3}D(1 - \theta)] \cdot \omega_1^n + \frac{4}{3}D(1 - \theta)\omega_2^n \quad (5.6.26)$$

Etter at  $\omega_1, \omega_2, \dots$  er funnet, beregnes  $\omega_0$  fra (5.6.24), og lagres separat.

Startverdiene er som i (5.6.22), men med følgende indeksering:

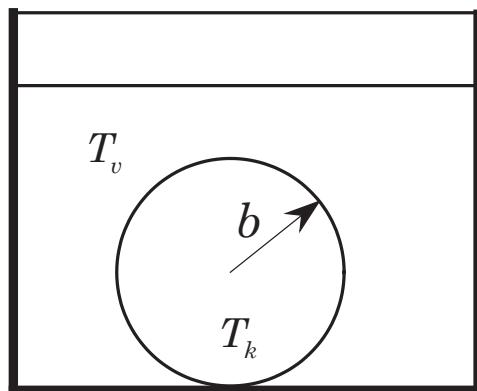
$$\omega_j^0 = 1 - r_j^2 = 1 - (\Delta r \cdot j)^2, \quad j = 0, \dots, N+1 \quad (5.6.27)$$

Får da følgende koeffisienter for bruk i **tdma**:

$$\begin{aligned} a_j &= -D\theta \left(1 - \frac{1}{2j}\right), \quad j = 2, \dots, N \\ b_1 &= 1 + \frac{4}{3}D\theta \\ b_j &= 1 + 2D\theta, \quad j = 2, \dots, N \\ c_1 &= -\frac{4}{3}D\theta \\ c_j &= -D\theta \left(1 + \frac{1}{2j}\right), \quad j = 2, \dots, N-1 \\ d_1 &= [1 - \frac{4}{3}D(1 - \theta)] \cdot \omega_1^n + \frac{4}{3}D(1 - \theta)\omega_2^n, \quad n = 1, \dots \\ d_j &= D(1 - \theta) \left\{ \left(1 - \frac{1}{2j}\right) \cdot \omega_{j-1}^n + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \cdot \omega_{j+1}^n \right\} \\ &\quad + [1 - 2D(1 - \theta)] \cdot \omega_j^n, \quad j = 2, \dots, N, \quad n = 1, \dots \end{aligned} \quad (5.6.28)$$

Løsningen av dette systemet er gitt i programmet **startupv2**. Ulikhetene i (5.6.23) er oppfylt og **tdma** kan brukes.

Med samme datasett, gir **startupv2** samme resultat som **startup**.

**Eksempel 5.4 Avkjøling av kule**

Figur 5.17

Figuren viser en kule som blir avkjølt i vann. Kula har radius  $b = 5$  og har temperatur  $T_k$  før den senkes i vannet. Vannet holder en konstant temperatur  $T_v$  under hele prosessen. Vi ser bort fra varmetap til omgivelsene.

Andre data:

$$\text{Varmeledningstall : } k = 0.1 \text{ W}/(\text{cm} \cdot {}^\circ\text{C}) \quad (5.6.29a)$$

$$\text{Varmeovergangstall : } \bar{h} = 0.2 \text{ W}/(\text{cm} \cdot {}^\circ\text{C}) \quad (5.6.29b)$$

$$\text{Termisk diffusivitet : } \alpha = 0.04 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (5.6.29c)$$

Vi har valgt verdiene slik at forholdet  $\frac{\bar{h} \cdot b}{k} = 1$ , noe som fører til en enklere analytisk løsning. Verdiene som er angitt i (5.6.29), passer bra for nikkel-legeringer.

Vi skal nå løse følgende problem med  $T = T(r, t)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5.6.30a)$$

Randbetingelser:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, t) = 0, \text{ (symmetribetingelse)} \quad (5.6.30b)$$

For  $r = b$  :

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = \bar{h} \cdot (T_v - T_b) \quad (5.6.30c)$$

Startbetingelse:

$$T(r, 0) = T_k \quad (5.6.30d)$$

I dette eksemplet nøyer vi oss med bruk av FTCS-skjemaet, men beregningen kan lett utvides til  $\theta$ -skjemaet som vist i eksempel 5.3.

Med  $r_j = \Delta r \cdot j$ ,  $\Delta r = \frac{1}{N+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N+1$  og  $D = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$  får vi fra (5.6.2) når  $u(r, t) \rightarrow T(r, t)$ ,  $\theta = 0$  og  $\lambda = 2$ :

$$T_j^{n+1} = (1 - 2D) \cdot T_j^n + D[(1 - 1/j) \cdot T_{j-1}^n + (1 + 1/j) \cdot T_{j+1}^n], \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.6.31)$$

Som i eksempel 5.3, bruker vi to versjoner for symmetribetingelsen for  $r = 0$ .

**1)** Fra (5.6.7) med  $\lambda = 2$ :

$$T_0^{n+1} = (1 - 6D) \cdot T_0^n + 6D \cdot T_1^n \quad (5.6.32)$$

**2)** Fra (5.6.9):

$$T_0^n = \frac{1}{3}(4T_1^n - T_2^n), \quad \text{alle } n \quad (5.6.33)$$

**Randbetingelsen for  $r = b$ .**

Diskretiserer (5.6.30b) med bruk av 2. ordens bakoverdifferanser:

$$k \cdot \left( \frac{3T_{N+1}^n - 4T_N^n + T_{N-1}^n}{2 \cdot \Delta r} \right) = \bar{h} \cdot (T_v - T_b) \text{ som løst m.h.p } T_{N+1}^n \text{ gir:}$$

$$T_{N+1}^n = \frac{4T_N^n - T_{N-1}^n + 2\delta \cdot T_v}{3 + 2\delta} \quad (5.6.34a)$$

$$\text{der } \delta = \frac{\Delta r \cdot \bar{h}}{k} \quad (5.6.34b)$$

Vi har tidligere vist at vi må ha  $D < 1/3$  når vi bruker randbetingelsen i (5.6.32). I eksempel 5.3 for sylinderen, fant vi at stabilitetsgrensen for  $D$  økte når vi minsket  $\Delta r$  ved bruk av FTCS-skjemaet. For kula derimot viser det seg at betingelsen  $D < 1/3$  er uavhengig av  $\Delta r$ . Årsaken til dette finner vi når vi skriver ut (5.6.31) for  $j = 1$ :

$$T_1^{n+1} = (1 - 2D) \cdot T_1^n + 2D \cdot T_2^n$$

Leddet  $(1 - 1/j) \cdot T_{j-1}^n = (1 - 1) \cdot T_0^n$  forsvinner for  $j = 1$ , slik at temperaturen i kulas sentrum ikke influerer på noen av de andre verdiene. Dette forklarer hvorfor stabilitetsgrensa er uavhengig av  $\Delta r$ . Vi kan da faktisk løse (5.6.21) for  $j = 1, 2, \dots, N$  uten å bry oss om randbetingelsene i (5.6.32) og (5.6.33). Randbetingelsen i (5.6.33) trenger vi bare for å finne temperaturen  $T_0^n$  i sentrum av kula.

Neumann-analysen som ikke tar hensyn til rendene, viste at (5.6.31) er stabil for  $D \leq 1/2$ . Dessuten viste analysen at innflytelsen av den variable koeffisienten forsvant både for sylinderen og kula. (Se diskusjonen i forbindelse med (5.6.3)). Vi har ikke vist at  $D \leq 1/2$  er en tilstrekkelig betingelse for hele systemet, siden vi da også må ta med randbetingelsen i (5.6.34).

Vi kan da oppsummerer for bruk av FTCS-skjemaet for kula:

Skjemaet i (5.6.34) er stabilt for  $D < 1/2$  for  $j = 1, 2, \dots$

Dersom sentrumstemperaturen også beregnes, må vi ha  $D < 1/3$  når (5.6.32) brukes.

Med bruk av (5.6.33), kan sentrumstemperaturen beregnes for  $D < 1/2$ . Dette passer godt med Eisens analyse, omtalt i forbindelse med (5.6.9).

Nedenfor er vist utskrift fra programmet **kule** av en beregning med  $D = 0.4$  og  $\Delta r = 0.1\text{cm}$ .  $T_k = 300^\circ\text{C}$  og  $T_v = 20^\circ\text{C}$  og beregningen varer i 10 min. med tidskritt 1 sekund. De analytiske verdiene er beregnet av funksjonen **kanalyt**. Vi ser at det er god overenstemmelse mellom de numeriske og de analytiske verdiene. (Analytisk løsning i appendiks G.9)

r(cm)	T ( $^\circ\text{C}$ )	$T_a$	r(cm)	T ( $^\circ\text{C}$ )	$T_a$
0.00	53.38	53.37	2.60	49.79	49.78
0.10	53.37	53.36	2.70	49.52	49.51
0.20	53.36	53.35	2.80	49.24	49.23
0.30	53.33	53.32	2.90	48.95	48.94
0.40	53.29	53.28	3.00	48.65	48.64
0.50	53.24	53.23	3.10	48.35	48.34
0.60	53.18	53.17	3.20	48.03	48.03
0.70	53.11	53.10	3.30	47.71	47.71
0.80	53.03	53.02	3.40	47.38	47.38
0.90	52.93	52.93	3.50	47.05	47.04
1.00	52.83	52.82	3.60	46.70	46.70
1.10	52.72	52.71	3.70	46.35	46.35
1.20	52.59	52.58	3.80	46.00	45.99
1.30	52.46	52.45	3.90	45.63	45.63
1.40	52.31	52.30	4.00	45.26	45.26
1.50	52.16	52.15	4.10	44.89	44.88
1.60	51.99	51.98	4.20	44.50	44.50
1.70	51.81	51.81	4.30	44.11	44.11
1.80	51.63	51.62	4.40	43.72	43.71
1.90	51.43	51.42	4.50	43.32	43.31
2.00	51.22	51.22	4.60	42.92	42.91
2.10	51.01	51.00	4.70	42.51	42.50
2.20	50.78	50.78	4.80	42.09	42.09
2.30	50.55	50.54	4.90	41.67	41.67
2.40	50.30	50.30	5.00	41.25	41.24
2.50	50.05	50.04			

# KAPITTEL 6

---

## KONVEKSJONSPROBLEMER

### 6.1 INNLEDNING

Adveksjonsligningen er gitt ved:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.1.1)$$

Fra avsnitt 4.2 i kap. 4 vet vi at 6.1.1 framstiller en bølge som forflytter seg med uforandret fasong langs x-aksen med konstant hastighet  $a_0$ . Karakteristikken er gitt ved  $\frac{dx}{dt} = a_0$ , og 6.1.1 er en hyperbolsk ligning. For  $a_0 > 0$ , beveger bølgen seg i positiv x-retning; for  $a_0 < 0$  i negativ retning. Dersom intet annet blir spesifisert, vil vi i fortsettelsen anta  $a_0 > 0$ . (6.1.1) kan tydes både som en modell-ligning for en kompressibel og en inkompressibel fluid. Dersom  $u$  f.eks. er trykk, framstiller (6.1.1) en trykkbølge som forplanter seg med hastigheten  $a_0$ . Med  $u$  som f.eks. temperaturen  $T$ , framstiller (6.1.1) transport av varme (temperatur) i en inkompressibel fluid som beveger seg med hastighet  $a_0$ .

## 6.2 1. ORDENS SENTRALDIFFERANSESKJEMA

Vi diskretiserer (6.1.1) ved bruk av foroverdifferanser i  $t$  og sentraldifferanser i  $x$ , dvs. vi bruker FTCS-skjemaet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

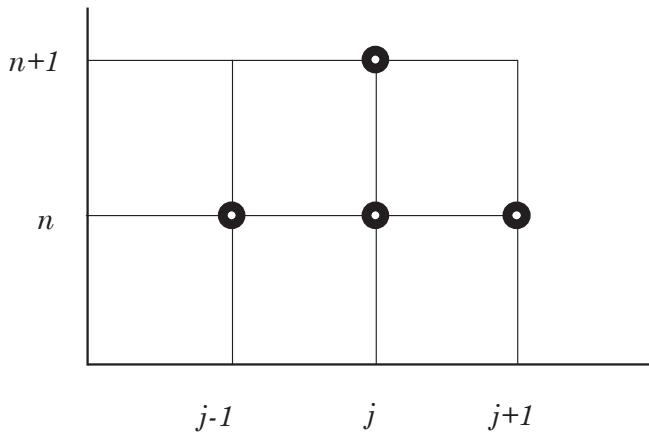
Innsatt i (6.1.1) får vi følgende skjema:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (6.2.1)$$

Vi har her innført Courant-tallet definert ved:

$$C = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (6.2.2)$$

Courant-tallet kan oppfattes som en dimensjonsløs tid og kan være både positivt eller negativt avhengig av fortegnet for  $a_0$ . Historisk ble Courant-tallet innført for kompressible fenomen. Betegnelsen konveksjonstaller derfor bedre når vi ser på inkompressible tilfeller. Vi vil likevel bruke betegnelsen "Courant-tall" i begge tilfeller. Nøyaktigheten av (6.2.1) er  $O(\Delta t) + O[(\Delta x)^2]$ . Uttrykket "1. ordens" i overskriften henviser til 1. orden i tiden  $t$ . Som det fremgår av fig. 6.1, er (6.2.1) et eksplisitt skjema.

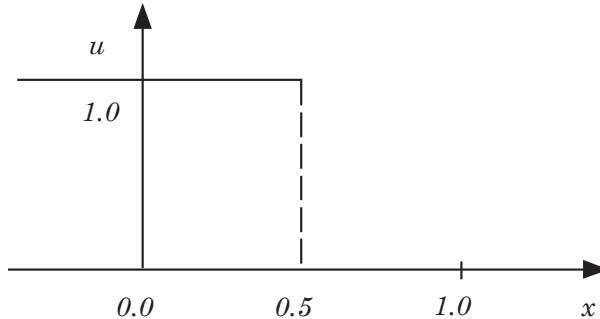


Figur 6.1

La oss bruke (6.2.1) til å løse følgende initialverdiproblem:

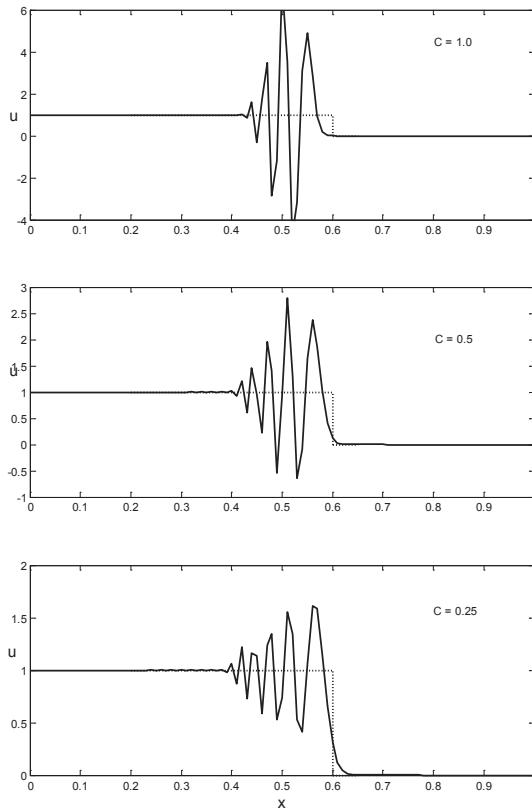
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1 \text{ for } x < 0.5 \\ u(x, 0) &= 0 \text{ for } x > 0.5 \end{aligned}$$

som vist i fig.6.2



Figur 6.2

Vi utfører beregningen for tre verdier av Courant-tallet:  $C = 0.25$ ,  $0.5$  og  $1.0$ . Resultatet av beregningene er vist i fig. 6.3



Figur 6.3

Stiplet linje angir korrekt profil. Vi ser at vi får store oscillasjoner for alle tre tilfellene selv om de dampses noe for minkende  $C$ -verdi. Fig. 6.3 indikerer at skjemaet er ustabilt. PK-kriteriet kan ikke oppfylles for noen positiv verdi av  $C$ . La oss derfor utføre en von Neumann analyse. Da forplantningen skal skje med uforandret profil, bruker vi den strenge betingelsen  $|G| \leq 1$ . Innsatt i (6.2.1) fra (5.3.9) i kap. 5:

$$G^{n+1}e^{i\cdot\beta\cdot x_j} = G^n e^{i\cdot\beta\cdot x_j} - \frac{C}{2} \left( G^n e^{i\cdot\beta x_{j+1}} - G^n e^{i\cdot\beta x_{j-1}} \right)$$

som dividert med  $G^n e^{i\cdot\beta\cdot x_j}$  gir:

$$G = 1 - \frac{C}{2} \left( e^{i\cdot\beta h} - e^{-i\cdot\beta h} \right) = 1 - i \cdot C \sin(\delta)$$

hvor vi har brukt (5.3.14) i kap. 5 og med  $\delta = \beta \cdot h$ .

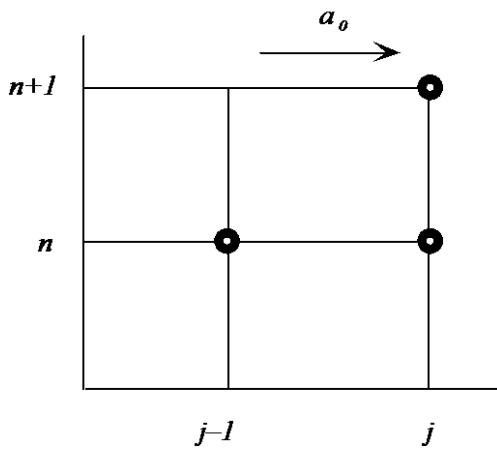
Vi får da:

$$|G| = \sqrt{1 + C^2 \sin^2(\delta)} \geq 1 \text{ for alle } C \text{ og } \delta$$

Derav følger at skjemaet er ubetinget ustabilt. Selv en liten C-verdi er ikke nok til å dempe oscillasjonene. FTCS-skjemaet er ikke brukbart for adveksjons-ligningen.

### 6.3 OPPSTRØMSDIFFERANSER

Oppstrømsdifferanser (upstream differences) kalles også motvind-differanser (upwind differences). Numerisk mener vi bakoverdifferanser i forhold til strømretningen. Medstrøms (downstream) eller medvind (downwind) blir da foroverdifferanser i forhold til strømretningen. Oppstrømsdifferanser anvendes utelukkende på de konvektive leddene, dvs.: de leddene som utfører transporten; aldri på diffusjonsleddene. Fig. 6.4 viser betydningen av begrepet anvendt på adveksjonsligningen. Et slikt skjema kalles et enveis-skjema.



Figur 6.4

Oppstrømsdifferanse for det konvektive leddet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (6.3.1)$$

(6.3.1) innsatt i (6.1.1) med foroverdifferanser for  $\frac{\partial u}{\partial t}$  og med  $C = \frac{a_0 \Delta t}{\Delta x}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C \cdot (u_j^n - u_{j-1}^n) = (1 - C)u_j^n + C \cdot u_{j-1}^n \quad (6.3.2)$$

(6.3.2) har nøyaktighet  $O(\Delta t) + O(\Delta x)$

Bruk av (6.3.2) på initialverdiproblemet i fig.6.1 er vist i fig. 6.5. Setter vi  $C = 1$  inn i (6.3.2), får vi  $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$  som er den eksakte løsningen av  $\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . ( Se avsnitt 4.2) For  $C < 1$  blir bølgefronten smurt” utover, noe som indikerer at skjemaet inneholder numerisk viskositet for disse verdiene av C. ( Vi kommer tilbake til begrepet numerisk viskositetsenere.) Beregningen i fig.6.5 indikerer at skjemaet ihvertfall er stabilt for  $C \leq 1$  . PK- kriteriet viser at skjemaet er stabilt for  $C \leq 1$  . La oss bruke von Neumann kriteriet for å se om stabilitetsintervallet strekker seg til høyere verdier av C. Innsatt i (6.3.2) fra (5.3.9) i kap. 5:

$$G^{n+1} e^{i \cdot \beta \cdot x_j} = (1 - C) \cdot G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_j} + C \cdot G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_{j-1}}$$

som dividert med  $G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_j}$  gir:

$$G = (1 - C) + C \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot h} = 1 - C + C \cdot (\cos(\delta) - i \cdot \sin(\delta)) = 1 + C \cdot (\cos(\delta) - 1) - i \cdot C \cdot \sin(\delta)$$

$$|G| = \sqrt{[1 + C \cos(\delta - 1)]^2 + C^2 \sin^2(\delta)} = \sqrt{1 - 2C(1 - \cos(\delta)) \cdot (1 - C)} \quad (6.3.3)$$

Stabilitetskriteriet  $|G| \leq 1$  gir følgende betingelse for C:

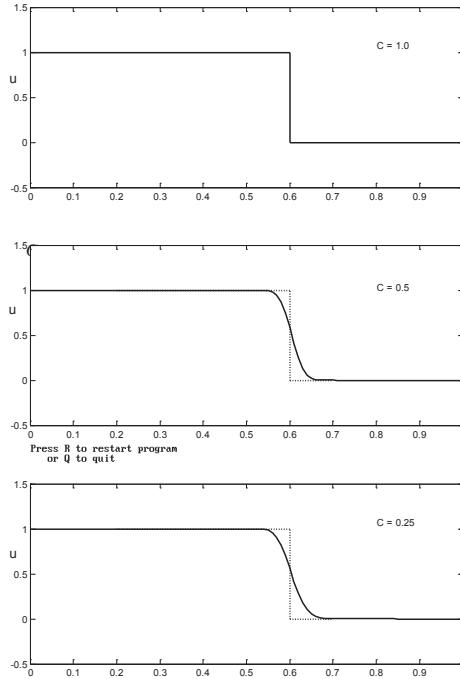
$$1 - 2C \cdot (1 - \cos(\delta)) \cdot (1 - C) \leq 1 \Rightarrow C \cdot (1 - \cos(\delta)) \cdot (1 - C) \geq 0$$

$$\text{eller } C \cdot \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) (1 - C) \geq 0$$

Stabilitetsintervall:

$$0 < C \leq 1 \quad (6.3.4)$$

(6.3.4) gjelder også når vi setter  $C = |a_0| \cdot \Delta t / \Delta x$ . Alle stabile, eksplisitte 2-nivå skjema for løsning av adveksjonsligningen har begrensninger på Courant-tallet.



Figur 6.5

## 6.4 DEN MODIFISERTE LIGNINGEN

I avsnitt 5.5 Taylor-utviklet vi noen differanseskjema for å finne trunkeringsfeilen samt å undersøke konsistensen av skjemaene. Vi skal nå vise at vi kan bruke slike rekkeutviklinger til også å si noe om stabiliteten. I hovedsak vil vi konsentrere oss om adveksjonsligningen.

Ser først på FTCS-skjemaet i avsnitt 6.2:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + a_0 \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (6.4.1)$$

Innsatt i (6.4.1) fra rekkeutviklingene i (5.5.2), kap. 5:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \left\{ \left[ u + ku_t + \frac{k^2}{2} u_{tt} + \dots \right] \Big|_j^n - u_j^n \right\} + \frac{a_0}{2h} \left[ u + hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \dots \right] \Big|_j^n \\ & - \frac{a_0}{2h} \left[ u - hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \dots \right] \Big|_j^n = 0 \end{aligned}$$

Ordnet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (6.4.2)$$

Vi bruker nå differensialligningen  $\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  til å transformere ledet  $-\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  til å uttrykke derivasjon m.h.p.  $x$

Differensialligningen gir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.4.3)$$

Deriverer (6.4.3) m.h.p.  $t$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

Deretter deriveres (6.4.3) m.h.p.  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow -a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

slik at vi totalt får:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.4.4)$$

(6.4.4) innsatt i (6.4.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{ka_0^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots$$

som ved innføring av Courant-tallet  $C = \frac{a_0 k}{h}$  gir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{Ch a_0^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (6.4.5)$$

(6.4.5) viser tydelig hvorfor skjemaet i (6.4.1) er ustabilt. I strømningsmekanikken kalles ofte koeffisienten  $\nu_N = -\frac{Ch a_0}{2}$  kalles den *numeriske viskositeten* analogt med den virkelige viskositeten i ligningen  $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Når vi bruker skjemaet i (6.4.1), gir dette den samme effekten som å løse diffusjonsligningen  $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  med negativ viskositet. Helt sikkert ustabilt. (6.4.5) forklarer også hvorfor oscillasjonene i fig. 6.3 avtar med minkende C. Ligning (6.4.5) kalles den *modifiserte ligningen* for det gitte skjemaet og den tilhørende differensial-ligningen.

Forsøker nå samme prosedyre på oppstrømskjemaet i avsnitt 6.3. Skjemaet skrevet på basisform:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + a_0 \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{h} = 0 \quad (6.4.6)$$

Innsatt fra rekkeutviklingene i(5.5.2) og ordnet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a_0 h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (6.4.7)$$

Da differensialligningen er den samme, får vi fra (6.4.4):

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  som innsatt i (6.4.6) sammen med gir  $C = \frac{a_0 k}{h}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_0 h}{2} (1 - C) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (6.4.8)$$

Koeffisienten  $\nu_N = \frac{a_0 h}{2} (1 - C)$  gir nå den numeriske viskositeten.

For  $C > 1$  blir dette ledet negativt, og differanseligningen er ustabil. Nødvendig betingelse for stabilitet blir derfor  $C \leq 1$  som er i overenstemmelse med tidligere resultater. Legg merke til at i dette tilfellet vil øke med minkende C. Dette betyr at en bratt front blir smurt" utover når C blir liten, noe som tydelig framgår av fig. 6.5.

### Bemerkninger

Ved utledningen av både lign. (6.4.5) og (6.4.8) har vi brukt differensialligningen til å finne relasjonen  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Problemets er at differanseligningen generelt ikke tilfredstiller differensialligningen. Det betyr at vi istedenfor å derivere differensialligningen, må derivere henholdsvis lign.(6.4.2) og (6.4.7) . Denne framgangsmåten, som er adskillig mer arbeidskrevende, må benyttes i det generelle tilfellet. For adveksjonsligningen blir det første ledet som skal omformes, korrekt når vi bruker differensialligningen. Dette stemmer også for mer kompliserte transportligninger uten diffusjonsledd. Symbolske program som Maple kommer her til sin rett. Nedenfor er det vist et Maple-program som gir lign. (6.4.5) med korrektsjon.

```

> restart:
> EQ:= (u(x,t+k)-u(x,t))/k + a*(u(x+h,t)-u(x-h,t))/(2*h):
> EQT:= mtaylor(EQ, [h,k]):
> MDE:=EQT:
> ELIM:=proc(i::integer,j::integer)
    local DE,uxt,UXT:
    global EQT,MDE:
    DE:=convert(diff(EQT,x$i,t$j-1,D):
    uxt:=convert(diff(u(x,t),x$i,t$j),D):
    UXT:=solve(DE = 0,uxt):
    subs(uxt = UXT,MDE):
  end:
> MDE:=ELIM(0,2):
> MDE:=ELIM(1,1):
> MDE:=ELIM(0,3):
> MDE:=ELIM(1,2):
> MDE:=ELIM(2,1):
> # Substitute the Courant number C = a*k/h
> MDE:=expand(subs(k=C*h/a,MDE)):
> u2x:=convert(diff(u(x,t),x$2),D):
> u3x:=convert(diff(u(x,t),x$3),D):
> collect(MDE,[u2x,u3x]):
> RHSMDE:=-coeff(MDE,u2x)*convert(u2x,diff)
  -coeff(MDE,u3x)*convert(u3x,diff);

```

$$\text{RHSMDE} := -\frac{1}{2}Ch a \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) - \left( \frac{1}{6}ah^2 + \frac{1}{3}C^2h^2a \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)$$

Legg merke til at vi her har fått med leddet  $\frac{1}{3}C^2h^2a$  som mangler i (6.4.5). Teknikken med den modifiserte ligningen kan også brukes på ikke-lineære differensialligninger. Det kan vises at metoden har forbindelse med von Neumanns metode. Både i Hirsch [3] og Anderson [1] finnes den modifiserte ligningen for de mest brukte differanseskjemaene.

## 6.5 LAX-WENDROFFS EKSPLISITTE METODE

Oppstrømskjemaet i avsnitt 6.3 er av 1. orden i både  $x$  og  $t$ . Vi trenger derfor et mer nøyaktig skjema som samtidig er et to-veis-skjema.  
adveksjonsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Taylor-utvikling:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n + \dots$$

Fra differensialligningen og (6.4.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= -a_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n &= a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

(6.5.1) innsatt i Taylor-rekka ovenfor:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{(a_0 \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \dots \quad (6.5.2)$$

Erstatter  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n$  og  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n$  i (6.5.2) med sentraldifferanser:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{(2 \Delta x)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

som innsatt i (6.5.2) gir følgende differanseligning:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{C^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (6.5.3)$$

Vi har her innført Courant-tallet

$$C = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (6.5.4)$$

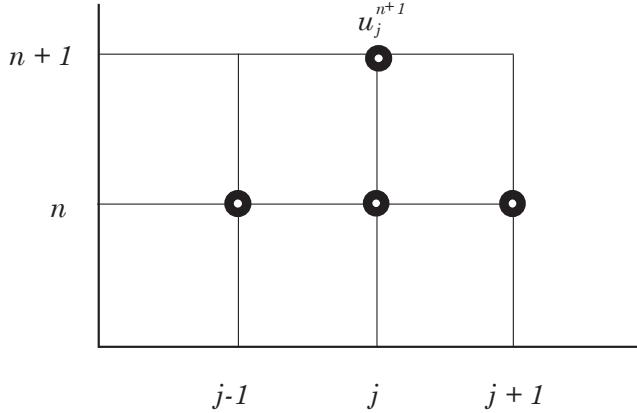
Den lokale trunkeringsfeilen  $T_j^n$  er gitt ved:

$$T_j^n = \frac{1}{6} \cdot \left[ (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a_0 (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_j^n = O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$$

Differanseligningen i (6.5.3) kan også skrives:

$$u_j^{n+1} = \frac{C}{2}(1+C)u_{j-1}^n + (1-C^2)u_j^n - \frac{C}{2}(1-C)u_{j+1}^n \quad (6.5.5)$$

Skjemaet er illustrert i fig. 6.6.



Figur 6.6

La oss undersøke stabiliteten av (6.5.3) og forsøker først PK-kriteriet. Summerer koeffisientene foran leddene:

$$\frac{C}{2} + \frac{C^2}{2} + 1 - C^2 - \frac{C}{1} + \frac{C^2}{2} = 1$$

Men betingelsen om positive koeffisienter kan ikke oppfylles for koeffisientene foran  $u_j^n$  og  $u_{j+1}^n$ -leddet samtidig. Forsøker derfor en von Neumann-analyse. Innsatt fra (5.3.9) fra kapittel 5 i (6.5.3):

$$\begin{aligned} G^{n+1} e^{i \cdot \beta \cdot x_j} &= G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_j} - \frac{C}{2} (G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_{j+1}} - G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_{j-1}}) \\ &\quad + \frac{C^2}{2} (G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_{j+1}} - 2G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_j} + G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_{j-1}}) \end{aligned}$$

Dividerer med  $G^n e^{i \cdot \beta \cdot x_j}$  og får:

$$\begin{aligned} G &= 1 - \frac{C}{2} (e^{i \cdot \delta} - e^{-i \cdot \delta}) + \frac{C^2}{2} (e^{i \cdot \delta} + e^{-i \cdot \delta} - 2) \\ &= 1 - 2C^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - 2 \cdot i \cdot C \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

hvor vi har satt  $\delta = \beta \cdot h$  og samtidig har brukt de trigonometriske relasjonene i (5.3.13) fra kapittel 5.

Fra (6.5.6) får vi:

$$|G|^2 = 1 - 4C^2(1 - C^2) \sin^4\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

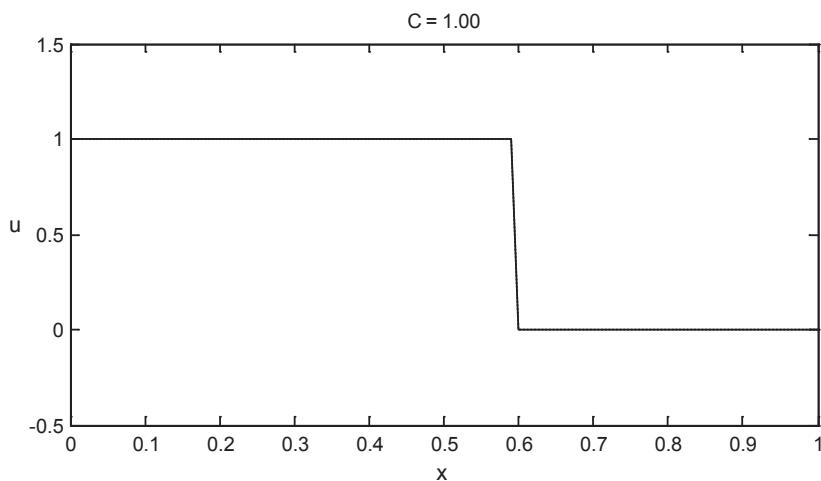
Kriteriet  $|G| \leq 1$  krever  $4C^2(1 - C^2) \geq 0$  som gir følgende betingelse for stabilitet:

$$0 < C \leq 1 \quad (6.5.7)$$

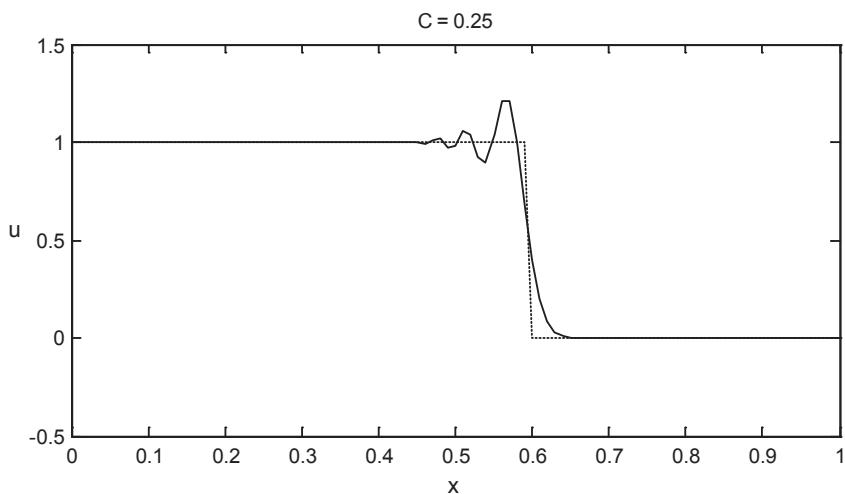
$C = 1$  gir  $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$  som er den eksakte løsningen. (6.5.7) gjelder også når vi setter  $C = |a_0| \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

Dette er den samme betingelsen som vi fant i avsnitt 6.3 for oppstrømskjemaet. En slik begrensning på Courant-tallet kalles ofte CFL-betingelsen etter Courant, Friedrichs og Lewy som presenterte denne betingelsen allerede i 1928. Betegnelsen ”Courant-talleter” av nyere dato.

Fig.6.8 nedenfor viser testeksemplet fra fig. 6.2 med bruk av Lax-Wendroffs metode. Merk oscillasjonene rundt diskontinuiteten.



Figur 6.7



Figur 6.8

La oss ta med den modifiserte ligningen for Lax-Wendroffs metode. Vi kan bruke det samme Mapleprogrammet som vi har brukt i avsnitt 6.4, men med nødvendige forandringer.

```
> restart:
> EQ1:= (u(x,t+k)-u(x,t))/k + a*(u(x+h,t)-u(x-h,t))/(2*h):
> EQ2:= (u(x+h,t)-2*u(x,t) + u(x-h,t))/(h*h):
> EQT:= mtaylor(EQ1,[h,k])-expand(a*a*k*mtaylor(EQ2,[h,k])/2):
> MDE:=EQT:

> ELIM:=proc(i::integer,j::integer)
    local DE,uxt,UXT:
    global EQT,MDE:
    DE:=convert(diff(EQT,x$i,t$j-1,D):
    uxt:=convert(diff(u(x,t),x$i,t$j),D):
    UXT:=solve(DE = 0,uxt):
    subs(uxt = UXT,MDE):
  end:

> MDE:=ELIM(0,2):
> MDE:=ELIM(1,1):
> MDE:=ELIM(0,3):
> MDE:=ELIM(1,2):
> MDE:=ELIM(2,1):

> # Substitute the Courant number C = a*k/h
> MDE:=expand(subs(k=C*h/a,MDE)):
> u2x:=convert(diff(u(x,t),x$2),D):
> u3x:=convert(diff(u(x,t),x$3),D):
> collect(MDE,[u2x,u3x]):
> RHSMDE:=-coeff(MDE,u2x)*convert(u2x,diff)
  -coeff(MDE,u3x)*convert(u3x,diff);
```

$$RHS MDE := - \left( \frac{1}{6} ah^2 - \frac{1}{6} C^2 h^2 a \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)$$

Vi ser at dette er en 2. ordens metode både i  $t$  og  $x$  i motsetning til oppstrømskjemaet som er av 1. orden i begge koordinatene. Numerisk løser vi nå ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -a_0 \frac{h^2}{6} (1 - C^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (6.5.8)$$

istedenfor den gitte ligningen  $\frac{\partial u}{\partial x} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . (6.5.8) ligner svært på lign. (4.6.9) i avsnitt 4.6. Der viste vi at KdV-ligningen er dispersiv, slik at (6.5.8) også er dispersiv for  $C \neq 1$ . Dette skal vi se næremere på i neste avsnitt.

## 6.6 DIFFUSJON- OG DISPERSJONSFEIL

Vi har sett at den numeriske forsterkningsfaktoren  $G$  kan være både reell og imaginær. Generelt kan den derfor skrives:

$$G = G_r + i \cdot G_i = |G| \cdot e^{-i\phi} \quad (6.6.1)$$

der  $|G| = \sqrt{G_r^2 + G_i^2}$  er amplituden og  $\phi = \arctan\left(\frac{-G_i}{G_r}\right)$  er fasen. (6.6.2)

I avsnitt 5.3.1 definerte vi diffusjonsfeilen  $\varepsilon_D$  (dissipasjonsfeilen) ved

$$\varepsilon_D = \frac{|G|}{|G_a|} \quad (6.6.3)$$

Her er  $|G_a|$  amplituden for den analytiske forsterkningsfaktoren. Ingen feil når  $\varepsilon_D = 1$ .

Feil i fasen  $\phi$  kalles dispersjonsfeil. For problemer med konveksjon, definerer vi dispersjonsfeilen  $\varepsilon_\phi$  ved:

$$\varepsilon_\phi = \frac{\phi}{\phi_a} \quad (6.6.4)$$

der  $\phi_a$  er fasen for den analytiske forsterkningsfaktoren. Igjen ingen feil når  $\varepsilon_\phi = 1$ .

(For parabolske problem der  $\phi_a = 0$ , brukes vanligvis  $\varepsilon_\phi = \phi$ .)

### Adveksjonsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

I avsnitt 4.6 brukte vi

$$u(x, t) = e^{i(\beta x - \omega t)} \text{ som gav } \omega = a_0 \beta, \beta \text{ er et bølgetall.} \quad (6.6.5a)$$

Med notasjonen ovenfor får vi

$$u(x, t) = e^{i(\beta x - \omega t)} = e^{-i \cdot \phi_a}, \phi_a = \omega t - \beta x \quad (6.6.5b)$$

Fra lign. (5.3.6) i avsnitt 5.3:

$$G_a = \frac{u(x_j, t_{n+1})}{u(x_j, t_n)} = \frac{e^{i(\beta x_j - \omega t_{n+1})}}{e^{i(\beta x_j - \omega t_n)}} = \exp[i(\beta x_j - \omega t_{n+1}) - i(\beta x_j - \omega t_n)] = \exp(-i\omega \cdot \Delta t)$$

hvor vi har satt inn fra (6.6.5b). Dermed blir  $|G_a| = 1 \rightarrow \varepsilon_D = |G|$ .

Derav:

$$\phi_a = \omega \cdot \Delta t = a_0 \beta \cdot \Delta t = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \beta \cdot \Delta x = C \cdot \delta \quad (6.6.6)$$

$C$  er Courant-tallet og  $\delta = \beta \cdot \Delta x$  som vanlig.

Fra (6.6.6) får vi også:

$$a_0 = \frac{\phi_a}{\beta \cdot \Delta t} \quad (6.6.7)$$

Analogt med (6.6.7) kan vi definere en numerisk forplantningshastighet  $a_{num}$ :

$$a_{num} = \frac{\phi}{\beta \cdot \Delta t} \quad (6.6.8)$$

Dispersjonsfeilen i (6.6.4) kan da skrives:

$$\varepsilon_\phi = \frac{a_{num}}{a_0} \quad (6.6.9)$$

Når dispersjonsfeilen er større enn 1, betyr dette at den numeriske hastigheten er større enn den fysiske. Den numerisk beregnede løsningen vil da synes å bevege seg hurtigere enn den eksakte. For  $\varepsilon_\phi < 1$  vil derimot den numerisk beregnede løsningen synes å bevege seg langsommere enn den eksakte.

La oss se nærmere på oppstrømskjemaet samt Lax-Wendroff metode

### OPPSTRØMSKJEMAET

Fra lign. (6.3.3), avsnitt 6.3:

$G = 1 + C \cdot (\cos(\delta) - 1) - i \cdot C \sin(\delta) = G_r + i \cdot G_i$  som innsatt i (6.6.2) og (6.6.4) gir:

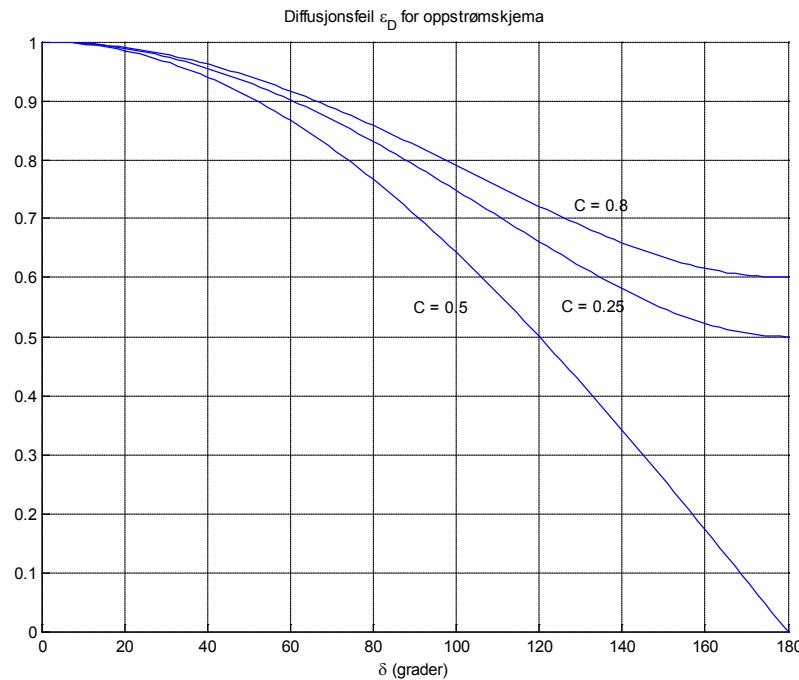
$$\begin{aligned} \varepsilon_D = |G| &= \sqrt{[1 + C \cdot (\cos(\delta) - 1)]^2 + [C \sin(\delta)]^2} \\ &= \sqrt{1 - 4C(1 - C) \sin^2(\frac{\delta}{2})} \end{aligned} \quad (6.6.10a)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\phi}{\phi_a} = \frac{1}{C\delta} \arctan \left[ \frac{C \sin(\delta)}{1 - C(1 - \cos(\delta))} \right] \quad (6.6.10b)$$

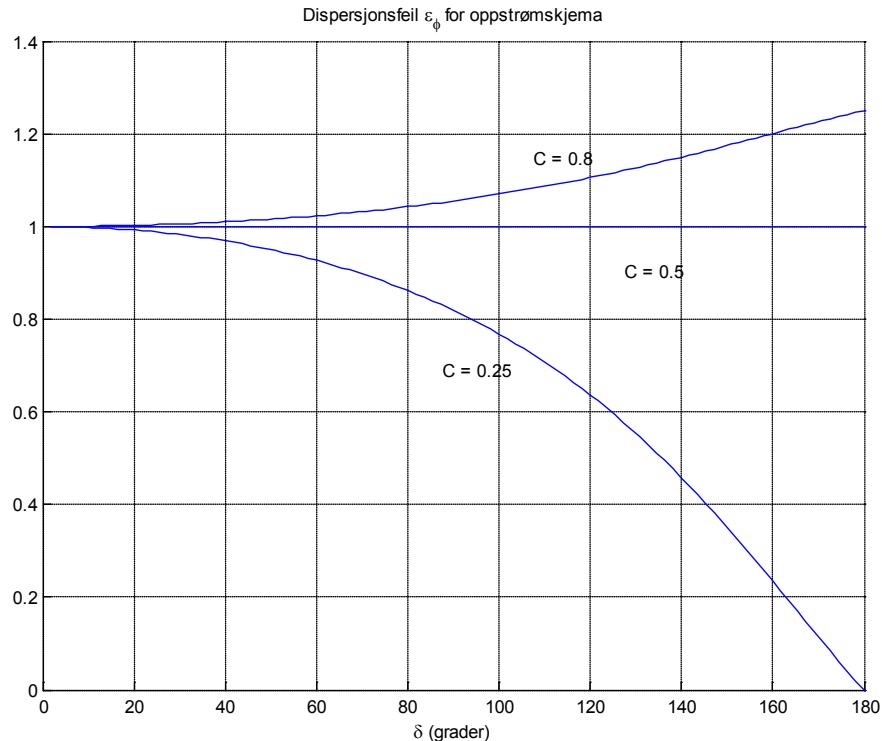
Figur 6.9 og 6.10 på neste side viser (6.6.10) som funksjon av  $\delta$  for tre forskjellige verdier av Courant-tallet  $C$ . Vi ser at  $\varepsilon_D$  minker sterkt med økende frekvens, noe som betyr at den numeriske amplituden blir mye mindre enn den eksakte når vi bruker mange tidskritt. Dette gjelder selv for  $C = 0.8$ . Husk her at amplitudeforholdet etter  $n$  tidskritt blir  $|G|^n$ . (Se også fig. 6.5). Skjemaet egner seg derfor dårlig for generelt bruk selv om det er stabilt.

For  $C = 0.5$  har vi ingen dispersjonsfeil. For  $C < 0.5$  blir  $\varepsilon_\phi < 1$  som betyr at den numeriske hastigheten er mindre enn den fysiske hastigheten  $a_0$ .

For  $C > 0.5$  blir  $\varepsilon_\phi > 1$  som betyr at den numeriske hastigheten er størst.



Figur 6.9



Figur 6.10

### LAX-WENDROFF SKJEMAET

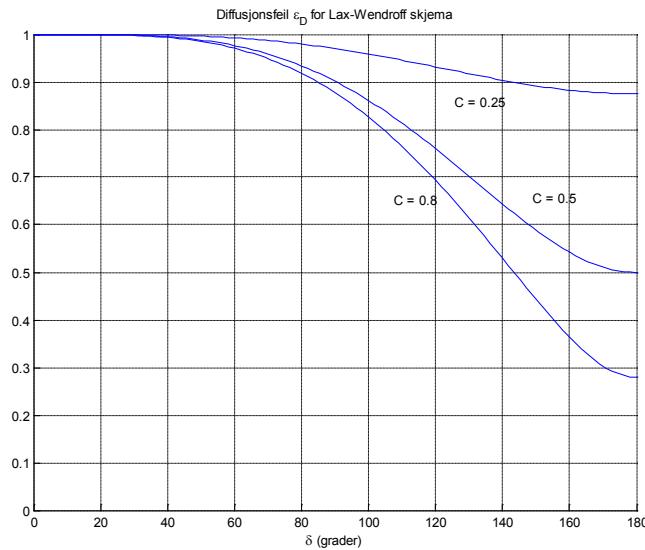
Fra lign. (6.5.5), avsnitt 6.5:

$G = 1 + C^2 \cdot (\cos(\delta) - 1) - i \cdot C \sin(\delta) = G_r + i \cdot G_i$  som innsatt i (6.6.2) og (6.6.4) gir:

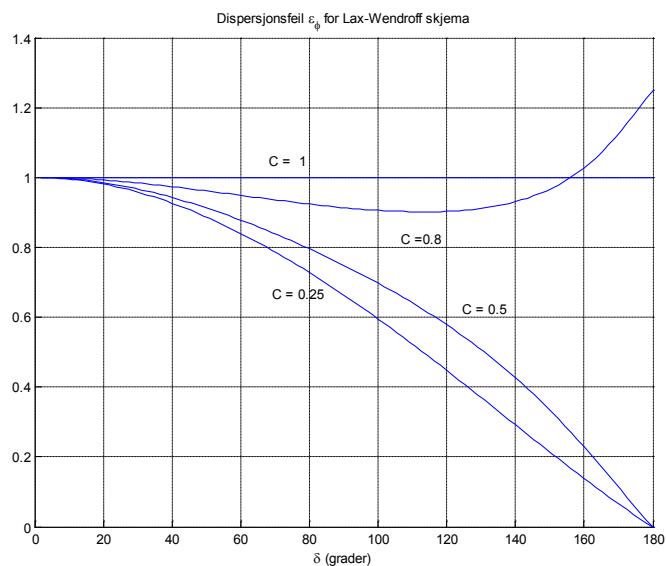
$$\begin{aligned} \varepsilon_D = |G| &= \sqrt{[1 + C^2 \cdot (\cos(\delta) - 1)]^2 + (C \sin(\delta))^2} \\ &= \sqrt{1 - 4C^2(1 - C^2) \sin^4\left(\frac{\delta}{2}\right)} \end{aligned} \quad (6.6.11a)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\phi}{\phi_a} = \frac{1}{C\delta} \arctan \left[ \frac{C \sin(\delta)}{1 + C^2(\cos(\delta) - 1)} \right] \quad (6.6.11b)$$

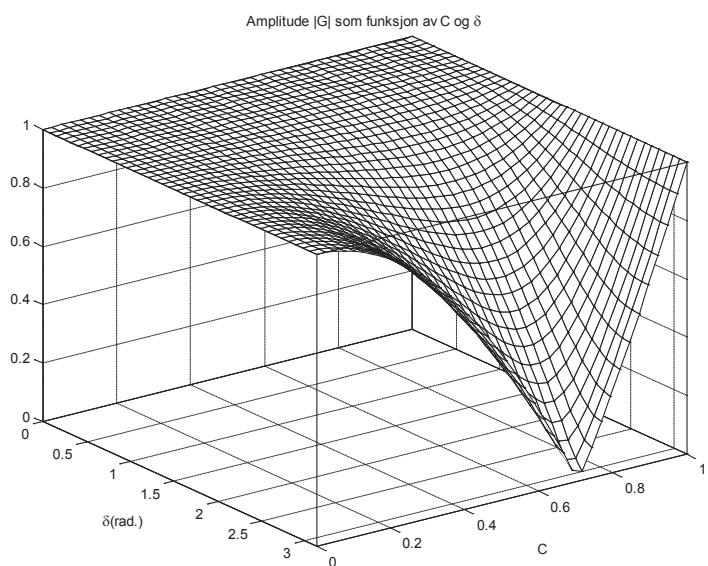
Figur 6.11–6.13 viser (6.6.11) som funksjon av  $\delta$  for forskjellige verdier av Courant-tallet  $C$ . Området hvor  $\varepsilon_D$  er nær 1 er større på fig. 6.11 enn for oppstrømskjemaet, fig. 6.9. Dette viser forskjellen på en første ordens metode og en 2. ordens metode. Fig. 6.12 viser  $\varepsilon_\phi$  er stort sett mindre enn 1, slik at den numeriske hastigheten er lavere enn den fysiske. Det er dette som er årsaken til oscillasjonene på fig. 6.8. Von Neumann-kriteriet garanterer at  $|G| \leq 1$ , men utfører ingen test på fasehastigheten, slik at feil i fasehastigheten i dette tilfellet gir en amplitud som er større enn 1. Husk at PK-kriteriet sikrer at det ikke oppstår voksende oscillasjoner. Derfor blir ikke PK-kriteriet oppfylt for Lax-Wendroffs metode anvendt på adveksjonsligningen. Vi kan da forlange at våre skjema skal tilfredsstille PK-kriteriet for å hindre oscillasjoner. Slik skjema kalles *monotone* skjema. Desverre er slike skjema anvendt på konvektive ligninger bare av første orden.



Figur 6.11



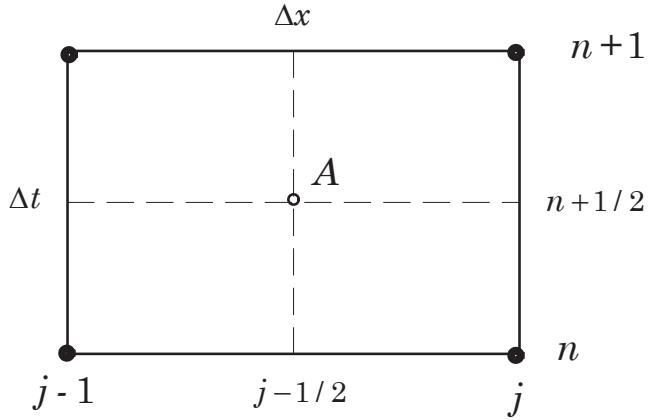
Figur 6.12



Figur 6.13

## 6.7 WENDROFFS IMPLISITTE SKJEMA

Dette er generelt et implisitt boks-skjema der vi bruker Crank-Nicolson approksimasjonen både for  $\frac{\partial u}{\partial t}$  og  $\frac{\partial u}{\partial x}$  i adveksjonsligningen.



Figur 6.14

Skriver  $\frac{\partial u}{\partial t}$  og  $\frac{\partial u}{\partial x}$  for pkt. A:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{j-1/2}^{n+1/2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} \right) \quad (6.7.1a)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j-1/2}^{n+1/2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right)$$

$$u|_{j-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{4} (u_j^{n+1} + u_j^n + u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n) \quad (6.7.1b)$$

(6.7.1) innsatt i adveksjonsligningen  $\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  gir:

$$(1 - C) \cdot u_{j-1}^{n+1} + (1 + C) \cdot u_j^{n+1} = (1 + C) \cdot u_{j-1}^n + (1 - C) \cdot u_j^n \quad (6.7.2)$$

hvor vi som vanlig har satt inn Courant-tallet  $C = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

Ved å sette  $C = 1$ , får vi  $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$  som er den eksakte løsningen av adveksjonsligningen.

La oss forsøke en von Neumann-analyse av (6.7.2) med  $a_0 > 0$ . Vi får ved å sette inn på vanlig måte:

$$G \cdot [(1 - C)e^{-1\delta} + (1 + C)] = (1 + C)e^{-i\delta} + (1 - C) \rightarrow$$

$$G = \frac{K + e^{-i\delta}}{1 + K e^{-i\delta}}, \quad K = \frac{1 - C}{1 + C} \text{ og } \delta = \beta \cdot \Delta x$$

Derav:

$$G = \frac{K + \cos(\delta) - i \sin(\delta)}{1 + K [\cos(\delta) - i \sin(\delta)]} = \frac{K + \cos(\delta) - i \sin(\delta)}{1 + K \cos(\delta) - i K \sin(\delta)}$$

Videre:

$$|G|^2 = \frac{K^2 + 2K \cos(\delta) + \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta)}{1 + 2K \cos(\delta) + K^2 \cos^2(\delta) + K^2 \sin^2(\delta)} = \frac{K^2 + 2K \cos(\delta) + 1}{K^2 + 2K \cos(\delta) + 1} = 1$$

Skjemaet er stabilt uavhengig av C, dvs. ubetinget stabilt. Da  $|G| = 1$  for alle verdier av  $\delta$ , er det også nøytralt stabilt. Generelt er dette et implisitt skjema slik at det må gis randverdier for to  $x$ -verdier samt startverdier for f.eks.  $t = 0$ . Det kan også brukes som et eksplisitt skjema til å løse initialverdiproblem. Dersom det f.eks. er gitt randverdier for  $x = 0$ , vil  $u_{j-1}^{n+1}$  være kjent (se fig. 6.14), slik at skjemaet da kan skrives:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{(1+C)} [(1+C) \cdot u_{j-1}^n + (1-C) \cdot u_j^n - (1-C) \cdot u_{j-1}^{n+1}] \quad (6.7.3)$$

La oss forsøke PK-kriteriet:

$$\frac{1}{(C+1)} [(1+C) + (1-C) - (1-C)] = 1$$

Vi ser at summen er lik 1. Betingelsen  $1-C > 1$  krever  $C < 1$ , mens  $-(1-C) > 0$  krever  $C > 1$ . Det er bare  $C = 1$  som oppfyller PK-kriteriet. Skjemaet er da ikke-monotont for  $C \neq 1$  når vi bruker det som et eksplisitt skjema, slik at vi kan vente oscillasjoner nær sjokk som med Lax-Wendroff-skjemaet.

La oss finne trunkeringsfeilen for (6.7.2) ved å finne den modifiserte ligningen. Vi kan bruke det samme Maple-programmet som vi brukte i avsnitt 6.5, når vi erstatter utrykkene for EQ1, EQ2 og EQT med:

```
EQ1:=(u(x,t+k) - u(x,t) + u(x-h,t+k) - u(x-h,t))/(2*k):
EQ2:=(u(x,t+k) - u(x-h,t+k) + u(x,t) - u(x-h,t))/(2*h):
EQT:=mtaylor(EQ1,[h,k]) + expand(a*mtaylor(EQ2,[h,k])):
```

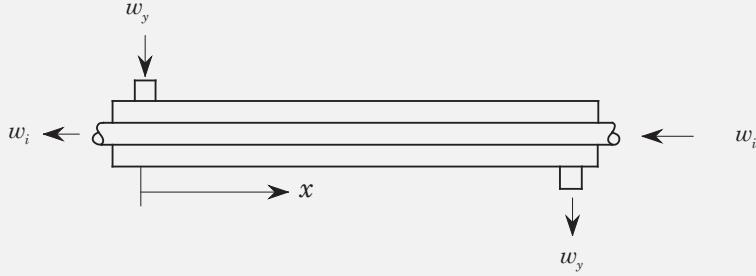
Vi får:

$$RHSMDE := - \left( \frac{1}{12} C^2 h^2 a - \frac{1}{12} ah^2 \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) \right)$$

Dette betyr at vi løser

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = a_0 \frac{h^2}{12} (1 - C^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots$$

som er nesten identisk med Lax-Wendroff-skjemaet.

**Eksempel 6.1 Oppstart av varmeveksler**

Figur 6.15

I kapittel 3 regnet vi på et eksempel med stasjonær varmeledning i en varmeveksler. Figuren 6.15 viser varmeveksleren i motstrøm fra fig.3.7 i kapittel 3.  $\omega_y$  er hastigheten for væska i det ytre røret mens  $\omega_i$  er hastigheten for væska i det indre røret.  $\omega_i$  og  $\omega_y$  er konstante størrelser.

Fra lign. K.0.2 i appendiks K:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_y}{\partial \tau} + \omega_y \frac{\partial T_y}{\partial X} &= -\frac{\bar{h}P}{\rho_y A_y c_y} (T_y - T_i) \\ \frac{\partial T_i}{\partial \tau} + \omega_i \frac{\partial T_i}{\partial X} &= -\frac{\bar{h}P}{\rho_i A_i c_i} (T_y - T_i) \end{aligned} \quad (1)$$

Her er  $T_y$  og  $T_i$  temperaturen i henholdsvis ytre og indre rør,  $\tau$  er fysisk tid,  $\bar{h}$  varmeovergangstallet mellom indre og ytre rør,  $P$  er periferien av det indre røret,  $\rho$  er tetthet,  $A$  er areal av rørtverrsnitt og  $c$  egenvarmen. Henviser til appendiks K for detaljer.

Innfører dimensjonsløse temperaturer  $u$  og  $v$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{T_y - 30}{70}, \quad 0 \leq u \leq 1 \text{ og } T_y = 70 \cdot u + 30, \quad 30 \leq T_y \leq 100 \\ v &= \frac{T_i - 30}{70}, \quad 0 \leq v \leq 1 \text{ og } T_i = 70 \cdot v + 30, \quad 30 \leq T_i \leq 100 \end{aligned} \quad (2)$$

Dette betyr at for  $u = 0$  blir  $T_y = 30^\circ$  og for  $u = 1$  blir  $T_y = 100^\circ$ . Samt for  $v = 0$  blir  $T_i = 30^\circ$  og for  $v = 1$  blir  $T_i = 100^\circ$ .

$$\alpha_y = \frac{\bar{h}PL}{\rho_y A_y \omega_y c_y} = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_y c_y}$$

Fra appendiks K

$$\alpha_i = \frac{\bar{h}PL}{\rho_i A_i \omega_i c_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_y} \right) = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_i c_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_y} \right) \quad (3)$$

der

$$\dot{m}_i = \rho_i A_i \omega_i \text{ og } \dot{m}_y = \rho_y A_y \omega_y$$

Ved å innføre 2 og 3 i 1, får vi tilslutt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= -\alpha_y(u - v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\omega_i}{\omega_y} \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha_i(u - v)\end{aligned}\quad (4)$$

der  $x$  er en dimensjonsløs koordinat  $0 \leq x \leq 1$  og  $t$  er dimensjonsløs tid.

Ved å diskretisere 4 med Wendroffs skjema, får vi fra lign. (K.1.14) i appendiks K der  $b = \frac{\omega_i}{\omega_y}$ :

Ytre rør:

$$\begin{aligned}&\left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \right) + 1 \right] \cdot u_{j-1}^{n+1} + \left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \right) + 1 \right] \cdot u_j^{n+1} \\ &- v_{j-1}^{n+1} - v_j^{n+1} \\ &= \left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \right) - 1 \right] \cdot u_{j-1}^n + \left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \right) - 1 \right] \cdot u_j^n \\ &+ v_{j-1}^n + v_j^n\end{aligned}\quad (5)$$

Indre rør:

$$\begin{aligned}&u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} - \left[ \frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta t} \right) + 1 \right] \cdot v_{j-1}^{n+1} \\ &+ \left[ \frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta t} \right) - 1 \right] \cdot v_j^{n+1} \\ &= -u_{j-1}^n - u_j^n + \left[ \frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta t} \right) + 1 \right] \cdot v_{j-1}^n \\ &+ \left[ -\frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta t} \right) + 1 \right] \cdot v_j^n\end{aligned}\quad (b)$$

Ser spesielt på tilfellet  $\Delta t = \Delta x$  og  $\omega_i = \omega_y \rightarrow b = 1$  som er tilfelle 1 i appendiks K:

Ytre rør:

$$\begin{aligned}&u_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1 \right) \cdot u_j^{n+1} - v_j^{n+1} - v_{j+1}^{n+1} \\ &= \left( \frac{4}{\alpha_y \Delta x} - 1 \right) \cdot u_{j-1}^n - u_j^n + v_j^n + v_{j+1}^n\end{aligned}\quad (6)$$

Indre rør:

$$\begin{aligned}&u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} - \left( \frac{4}{\alpha_i \Delta x} + 1 \right) \cdot v_j^{n+1} - v_{j+1}^{n+1} \\ &= -u_{j-1}^n - u_j^n + v_j^n + \left( -\frac{4}{\alpha_i \Delta x} + 1 \right) \cdot v_{j+1}^n\end{aligned}\quad (6b)$$

Skriver ut 6 for  $j = 1$ :

$$\left( \frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1 \right) \cdot u_1^{n+1} - v_1^{n+1} - v_2^{n+1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{4}{\alpha_y \Delta x} - 1 \right) \cdot u_0^n - u_0^{n+1} - u_1^n + v_1^n + v_2^n \\ &\quad u_1^{n+1} - \left( \frac{4}{\alpha_i \Delta x} + 1 \right) \cdot v_1^{n+1} - v_2^{n+1} \\ &= - (u_0^n + u_0^{n+1}) - u_1^n + v_1^n + \left( 1 - \frac{4}{\alpha_i \Delta x} \right) \cdot v_2^n \end{aligned} \quad (7b)$$

Vi har her brukt følgende indeksering:

For  $u$ :

$$u_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad u_0 \text{ er spesifisert}$$

For  $v$ :

$$v_j, \quad j = 1, 2, \dots, N+1, \quad v_{N+1} = 0$$

Dette betyr at indeksene i lign. 5 for  $v$ -leddene skal økes med 1 slik at  $v_{j-1} \rightarrow v_j$  og  $v_j \rightarrow v_{j+1}$ .

Vi har totalt  $N + 1$  punkt og  $N$  ukjente med  $\Delta x = 1/N$  slik at  $u_j = \Delta x \cdot j, \quad j = 1, \dots, N$  og  $v_j = \Delta x \cdot j, \quad j = 1, \dots, N$ .

Ligningsystemet løses med Douglas-algoritmen der vi har skrevet en spesialversjon **bitris2**. (Listing i appendiks K)

I Rosenberg [26], kapittel 3, avsnitt 7, finnes et program skrevet i Fortran 66 for dette problemet.

**Start- og randbetingelser.** Når vi starter,  $t = 0$ , har vannet i det indre røret en temperatur på  $30^\circ C$  som fra lign. 2 gir  $v = 0$  for alle  $x$ -verdier. For det ytre røret tenker vi oss at vi har konstant temperatur i hele røret når vi starter, unntatt for  $x = 0$ . Dette betyr at  $u = 0$  i hele intervallet  $0 < x \leq 1$ . (Se lign. 2). Setter  $u = u_0$  for  $x = 0$ . Vi kan nå tenke oss flere muligheter til å spesifisere  $u_0$ . Dersom vi setter  $u_0 = 1$ , betyr dette av vi setter  $T_y = 100^\circ$  for  $x = 0$ . Starter med  $u_0 = 0$  og øker trinnvis til  $u_0 = 1$  (Fra  $30^\circ C$  til  $100^\circ C$ ) La  $n$  stå for et vilkårlig trinn slik at  $u_0 = 0$  for  $n = 0$  og  $u_0 = 1$  for  $n = n_s$ , der  $n_s$  er antall tidskritt fram til  $u_0 = 1$ .

Lineær relasjon:

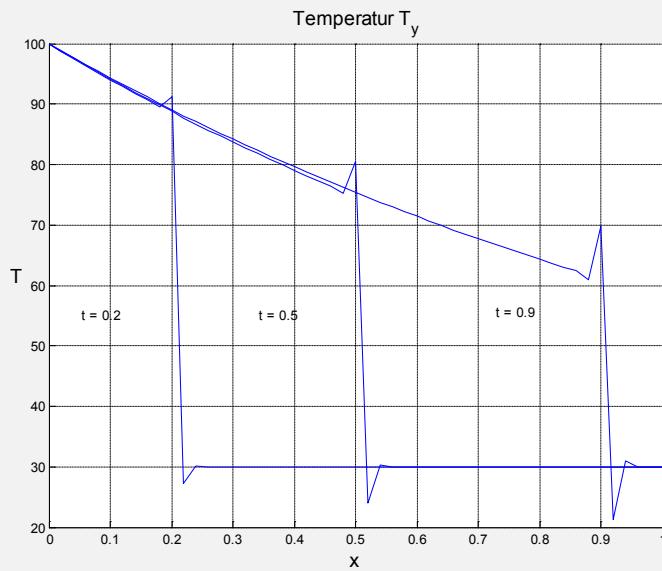
$$u_0 = \frac{n}{n_s}, \quad n = 0, 1, \dots, n_s \quad (8)$$

2. gradspolynom:

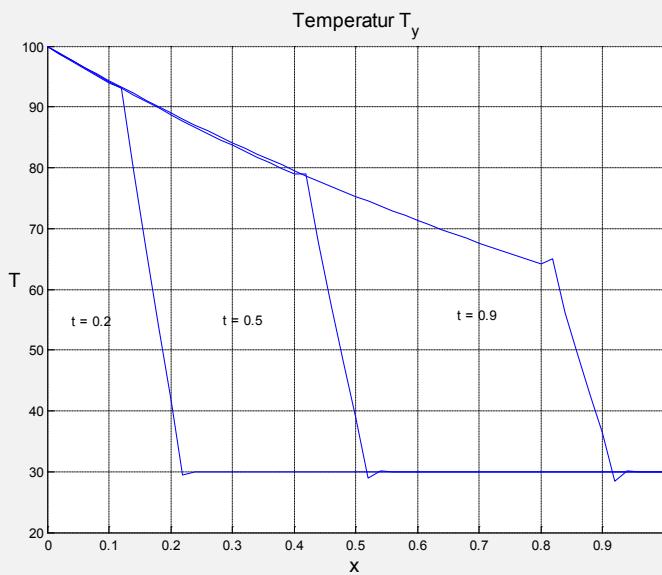
$$u_0 = \frac{n}{n_s} \left( 2 - \frac{n}{n_s} \right), \quad n = 0, 1, \dots, n_s \quad (8b)$$

På grunn av at vi varierer  $u_0$ , er vi mest interessert i temperaturforløpet i det ytre røret. Figur 6.16 viser  $T_y$  som funksjon av den dimensjonsløse tiden  $t$  der vi starter med  $u_0 = 1$ , dvs.  $T_y = 100^\circ C$ .

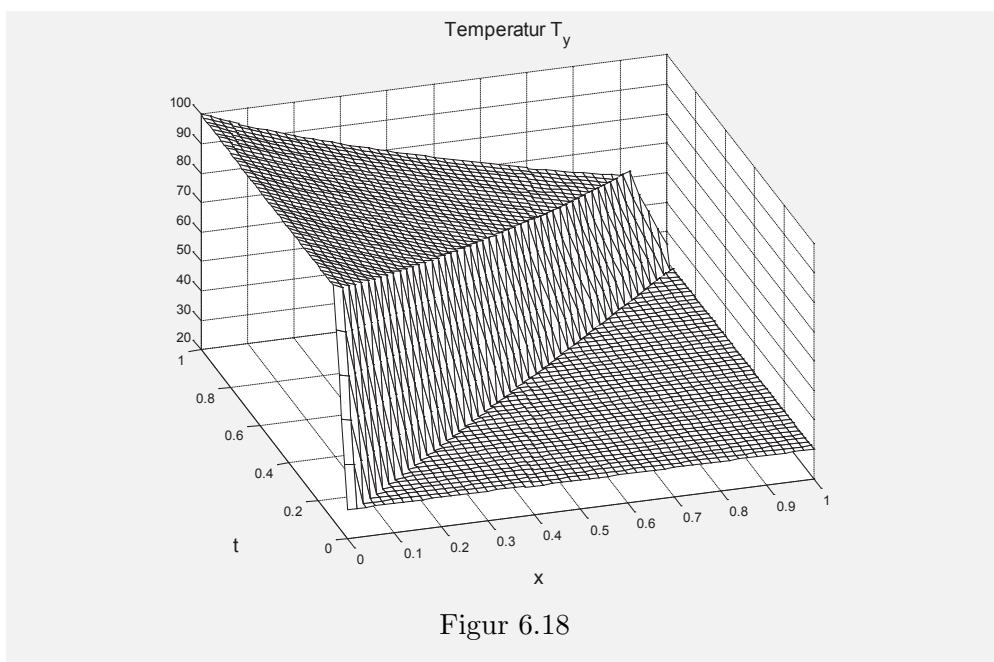
Vi ser at vi får overskyt som angir dispersjonsfeil av samme type som i fig. 6.8 ved bruk av Lax-Wendroff-skjemaet. Vi kan få bort en del av denne toppen ved å øke temperaturen trinnvis istedenfor å hoppe direkte til  $100^\circ$ . Dette er vist i fig. 6.17 hvor vi har tatt 5 trinn med bruk av 8. Fig. 6.18 er en tre-dimensjonal versjon av fig. 6.17.



Figur 6.16



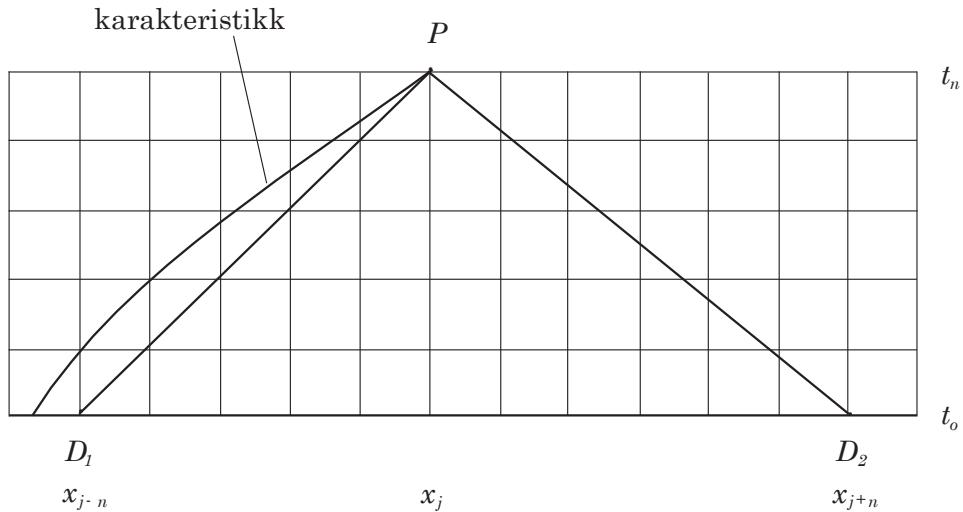
Figur 6.17



## 6.8 GEOMETRISK UTLEDNING AV CFL-BETINGELSEN

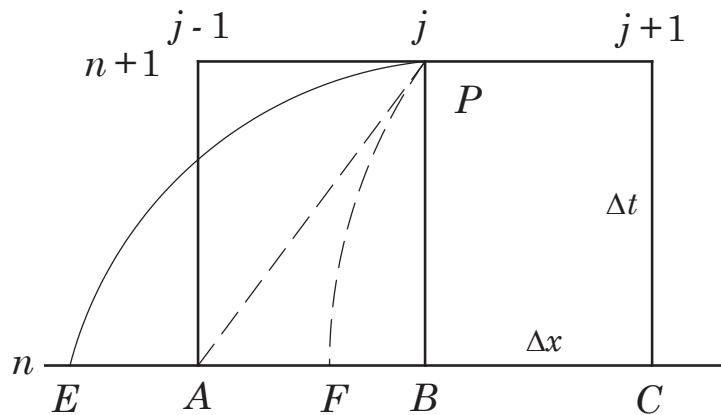
Anta at en 1. ordens PDL er diskretisert med en eksplisitt, 2-nivå-metode slik at differanseligningen kan skrives:

$$u_j^{n+1} = a_1 \cdot u_{j-1}^n + a_2 \cdot u_j^n + a_3 \cdot u_{j+1}^n \quad (6.8.1)$$



Figur 6.19

Med initialdata gitt for  $t = 0$ , har vi brukt (6.8.1) til å regne oss fram til nivået  $t_n$ , se fig. 6.19. Tegner opp de to øverste nivåene  $t_{n-1}$  og  $t_n$  og dørper om indeksene til  $n$  og  $n + 1$  slik at de stemmer overens med lign. (6.8.1), se fig. 6.20.



Figur 6.20

La data være gitt på intervallet  $D_1 - D_2$ , se fig. 6.19. Dersom vi endrer på data i dette intervallet, vil verdien i  $P$  endres. ( På fig. 6.20 endres verdiene i

$A$ ,  $B$  og  $C$  også.) La karakteristikken gjennom  $P$  skjære  $n$ -nivået i  $E$ .

Da  $PE$  er en karakteristikk ( karakteristisk kurve ), skal en forandring av verdien i  $E$  også gi en forandring av verdien i  $P$ . Men siden  $E$  ligger utenfor  $AC$ , vil ikke det numeriske skjemaet registrere en forandring av verdien i  $E$ . Derav følger:  $E$  må ligge på  $AC$  med grensetilfelle  $A$ . Dersom vi approksimerer  $PF$  med en rett linje, må helningen av  $PF$  være større eller lik helningen av  $PA$ .

### Eksempel 6.2

Ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ har karakteristikk } \frac{dx}{dt} = a_0, \quad a_0 > 0.$$

CFL-betingelsen blir her:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a_0} \rightarrow \frac{a_0 \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \rightarrow C \leq 1$$

## 6.9 BØLGELIGNINGEN

Denne er gitt ved:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} \quad (6.9.1a)$$

Eksempel på randbetingelser og initialbetingelser:

Randbetingelser:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (6.9.1b)$$

Initialbetingelser:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (6.9.1c)$$

Vi har brukt (6.9.1) i avsnitt 4.4 som prototypen på en 2. ordens hyperbolisk differensiellligning. Karakteristikkene er gitt ved  $x = \pm a_0 \cdot t$ .

Med substitusjonen  $\xi = x + a_0 \cdot t$ ,  $\eta = x - a_0 \cdot t$ , kan (6.9.1) skrives:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

med løsning:

$$u(x, t) = F(x - a_0 t) + G(x + a_0 t)$$

$u_0(x, t) = F(x - a_0 t)$ ,  $a_0 > 0$  har vi behandlet som adveksjonsligningen.

$u_2(x, t) = G(x + a_0 t)$ ,  $a_0 > 0$  er en tilsvarende bølge som beveger seg i negativ  $x$ -retning. Med bruk av rand-og initialbetingelsene i (6.9.1b) og (6.9.1c), blir løsningen:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x - a_0 t) + \frac{1}{2}f(x + a_0 t) + \frac{1}{2a_0} \int_{x-a_0 t}^{x+a_0 t} g(z) dz \quad (6.9.2)$$

### Eksempel 6.3 Svingende streng

Setter  $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$  og  $g(x) = 0$  i (6.9.2) som gir følgende løsning:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{L}(x - a_0 t)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{L}(x + a_0 t)\right) \right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi a_0 t}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (6.9.3a)$$

Spesialtilfellet

$$L = \pi, \quad \text{og } a_0 = 1 \text{ gir } u(x, t) = \cos(t) \cdot \sin(x) \quad (6.9.3b)$$

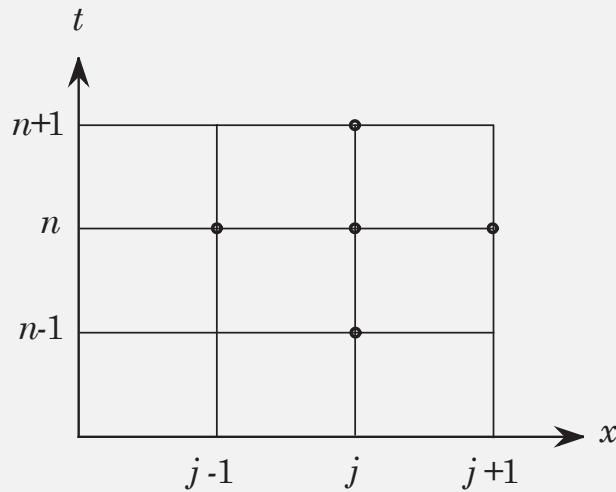
Vi ønsker å løse (6.9.1) numerisk med bruk av en eksplisitt metode. Bruker sentraldifferanser for begge leddene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

som innsatt i (6.9.1) gir:

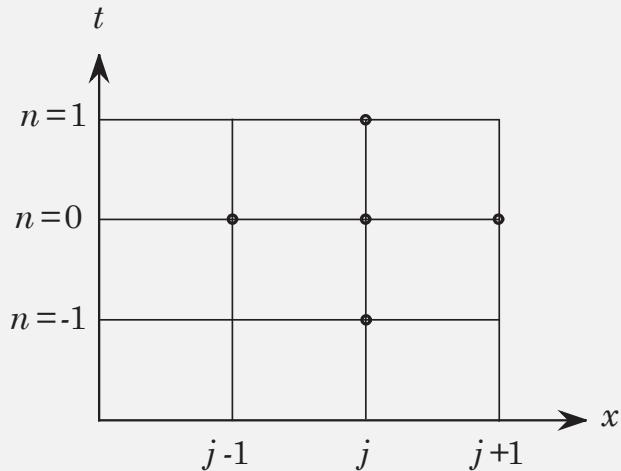
$$u_j^{n+1} = C^2(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + 2(1 - C^2)u_j^n - u_j^{n-1} \quad (6.9.4)$$

der  $C = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$  er Courant-tallet.



Figur 6.21

Vi bruker de samme punktene som i Richardson-skjemaet, se fig.5.5(d) i kapittel 5, men i motsetning til det skjemaet, er dette stabilt for  $C^2 \leq 1$ .



Figur 6.22

For diffusjonsligningen måtte vi bruke et separat skjema for å starte beregningen med bruk av Richardson-skjemaet og DuFort-Frankel-skjemaet.

Dette er ikke nødvendig her fordi vi også har en initialbetingelse  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ . Skriver ut (6.9.4) for  $n = 0$ , se fig. 6.22:

$$u_j^1 = C^2(u_{j-1}^0 + u_{j+1}^0) + 2(1 - C^2)u_j^0 - u_j^{-1}$$

Fra (6.9.1c):  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  som med sentraldifferanser for  $t$  blir:

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2 \cdot \Delta t} = g(x_j) \rightarrow u_j^{-1} = u_j^1 - 2\Delta t \cdot g_j$$

som innsatt ovenfor gir:

$$u_j^1 = \frac{C^2}{2}(u_{j-1}^0 + u_{j+1}^0) + (1 - C^2)u_j^0 + \Delta t \cdot g_j$$

Dersom vi også bruker initialbetingelsen  $u(x, 0) = f(x)$  fra (6.9.1c):

$$u_j^1 = \frac{C^2}{2}(f_{j-1} + f_{j+1}) + (1 - C^2)f_j + \Delta t \cdot g_j \quad (6.9.5)$$

(6.9.5) gir  $u$ -verdiene for det første tidsnivået.

For  $C^2 = 1$  blir (6.9.4):

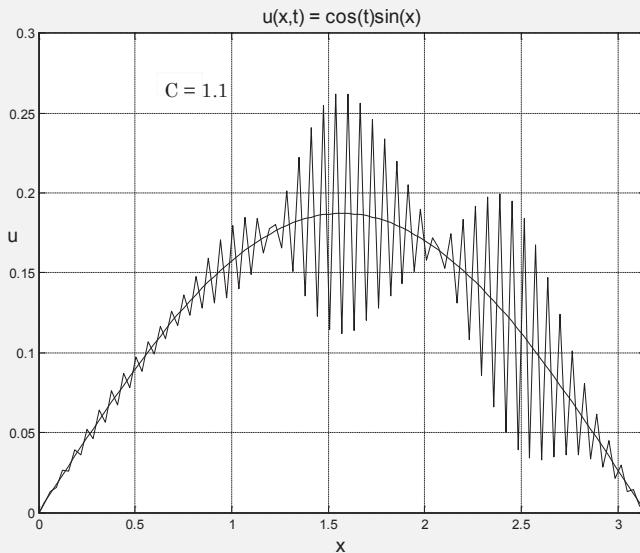
$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - u_j^{n-1} \quad (6.9.6)$$

som kalles Leap-frogskjemaet da  $u_j^n$  mangler som i DuFort-Frankel-skjemaet. Leap-frog skjemaet løser bølgeligningen eksakt når vi ser bort fra avrundingsfeil. Fordi bølgeligningen inneholder  $a_0^2$  og ikke  $+a_0$  og  $-a_0$  separat, inngår Courant-tallet som  $C^2$  i differanse-skjemaet.

Dersom vi ønsker å trigge en instabilitet, er det selvfølgelig larest å bruke et diskontinuerlig startprofil som vist i fig. 6.3, avsnitt 6.2. Men la oss forsøke det glatte profilet  $f(x) = \sin(x)$  og  $g(x) = 0$  som gitt i tilfellet (6.9.3b). Vi må nå være forberedt på at det tar forholdsvis mange tidskritt før instabiliteten opptrer.

Velger  $\Delta x = \frac{\pi}{100}$  og  $C = 1.1$ . Tidskrittet  $\Delta t = C \cdot \Delta x \approx 0.03456$ .

Figuren nedenfor viser den analytiske løsningen  $u(x, t) = \cos(t) \cdot \sin(x)$  i (6.9.3b) samt den numeriske løsningen med bruk av skjemaet i (6.9.4) og (6.9.5).



Figur 6.23

Vi har her brukt 40 tidskritt for å få frem oscillasjonene som viser at skjemaet er ustabilt i hvert fall for  $C = 1.1$ .

bølgeligningen vi løser her, er en linearisert versjon av mere eksakte ligninger. Vi har ovenfor behandlet en svingende streng (transverselle bølger), men ligningen beskriver dessuten longitudinelle bølger i en bjelke, samt akustiske bølger i en fluid. I samtlige tilfeller forutsettes små amplituder  $u(x, t)$  som grunnlag for lineariseringen.

**Von Neumann analyse.** La oss undersøke stabiliteten av differanseligningen der vi ser på tilfellet  $a_0 > 0$  (Helt tilsvarende for  $a_0 < 0$ ). PK-kriteriet gir ikke noe svar da koeffisienten foran det siste leddet alltid er negativt. Forsøker derfor en von Neumann-analyse.

Setter inn  $u_j^n = G^n e^{i \cdot \beta \cdot j} = G^n e^{u \cdot \delta \cdot j}$ ,  $x_j = j \Delta x \cdot \beta = \delta \cdot j$  som gir

$$G^2 - 2 [1 - C^2 (1 - \cos(\delta))] G + 1 = 0, \text{ som med } 1 - \cos(\delta) = 2 \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \text{ blir:}$$

$$G^2 - 2(1 - 2m^2)G + 1 = 0, \quad m = C \sin \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (6.9.7)$$

(6.9.7) har røttene

$$G_{1,2} = 1 - 2m^2 \pm 2m\sqrt{m^2 - 1} \quad (6.9.8)$$

Merk at  $G_1 \cdot G_2 = 1$  slik at  $|G_1| \cdot |G_2| = 1$

For  $m = 1$  vil vi få to sammenfallende røtter  $G_1 = G_2 = -1$ . Vi vil spesielt se på dette tilfellet tilslutt.

**1)  $m > 1$**

$$G_2 = 1 - 2m^2 - 2m\sqrt{m^2 - 1}$$

Stabilitetsbettingelse:  $|G_2| \leq 1 \rightarrow -1 \leq G_2 \leq 1$

Høyre side:

$$1 - 2m^2 - 2m\sqrt{m^2 - 1} \leq 1 \rightarrow -2m^2 - 2m\sqrt{m^2 - 1} \leq 0$$

Denne ulikheten er alltid oppfylt.

Venstre side:

$$-1 \leq 1 - 2m^2 - 2m\sqrt{m^2 - 1} \rightarrow m^2 + m\sqrt{m^2 - 1} \leq 1$$

Denne ulikheten er aldri oppfylt.

Vi har at  $|G_1| = 1/|G_2|$ . Stabilitetsbettingelsen må være oppfylt for begge røttene.

*Konklusjon:* Ustabilt skjema for  $m > 1$  ( $|m| > 1$ )

**2)  $m < 1$**

$$G_{1,2} = 1 - 2m^2 \pm 2m\sqrt{m^2 - 1} \rightarrow 1 - 2m^2 \pm i \cdot 2m\sqrt{1 - m^2}$$

Derav:

$$|G_{1,2}|^2 = (1 - 2m^2)^2 + 4m^2(m^2 - 1) = 1 \leq 1$$

Skjemaet er *stabilt* for  $m < 1$ . ( $|m| < 1$ ).

Kalles *nøytral stabilitet* når  $|G| = 1$  for alle  $\delta$

Med  $m = C \sin(\frac{\delta}{2})$  fra (3), får vi  $C \sin(\frac{\delta}{2}) < 1 \rightarrow C < 1/\sin(\frac{\delta}{2})$ : eller da  $\max(\sin(\frac{\delta}{2})) = 1$ :  $C < 1$  som stabilitetsgrense.

Vi kan også skrive:

$$G_{1,2} = 1 - 2m^2 \pm i \cdot 2m\sqrt{1 - m^2} = (\sqrt{1 - m^2} \pm i \cdot m)^2$$

slik at

$$|G_{1,2}| = |\sqrt{1 - m^2} \pm i \cdot m|^2 = |1 - m^2 + m^2| = 1 \text{ som før.}$$

**3)  $m = 1$**

Dette er et tilfelle som må behandles spesielt fordi røttene er sammenfallende med  $m = 1$ , som for  $C = 1$  og  $\delta = \pi$  gir  $G_1 = G_2 = -1$

Dette tilfellet er behandlet i appendiks A, del A.4, for ordinære differanseligninger. Tilfellet her er analogt, slik at med  $t_n = n \cdot \Delta t$  vil differanseligningen få et ledd som er multiplisert med indekset  $n$ . Dette kan også vises ved å bruke følgende løsning av (6.9.1):

$$u(x, t) = t \rightarrow u(x_i, t_n) = n \cdot \Delta t \quad (6.9.9)$$

(6.9.9) tilfredstiller startbetingelsene  $u(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1$

Da differanseligningen (6.9.4) er av  $O((\Delta x)^2(\Delta t)^2)$ , vil den løse (6.9.9) eksakt. Innsatt i (6.9.4) fra (6.9.9):

$$u_i^{n+1} = n \cdot \Delta t + n \cdot \Delta t - (n-1) \cdot \Delta t = (n+1) \cdot \Delta t$$

Vi har da ikke stabilitet når vi bruker det strenge kriteriet. Derimot får vi stabilitet når vi bruker von Neumanns generelle kriterium

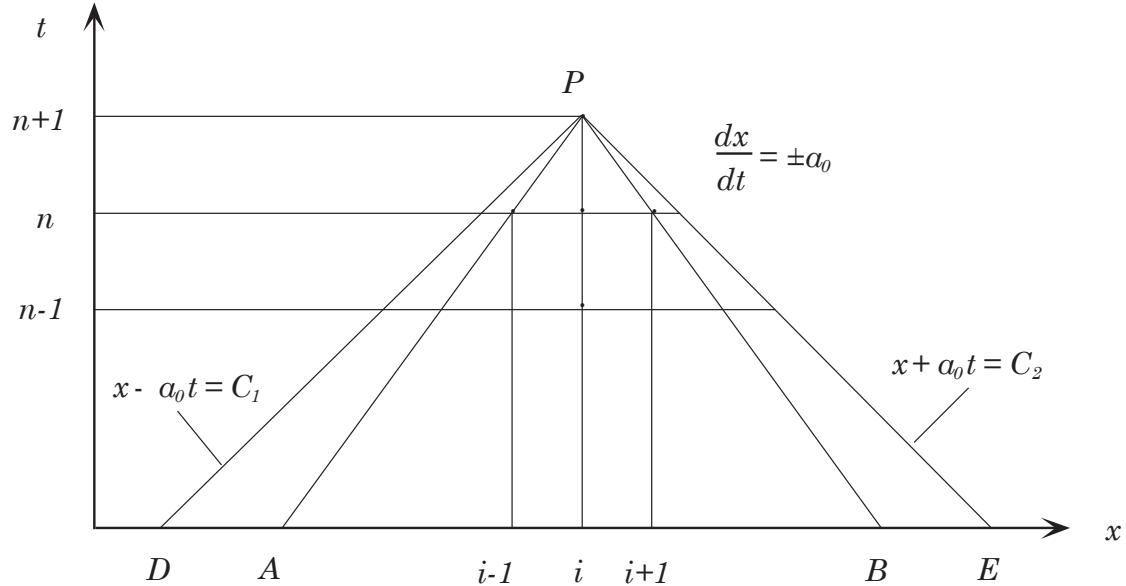
$$|G| \leq 1 + K \cdot \Delta t, \quad K \text{ en positiv konstant.}$$

(Se avsnitt 5.4.4 i kompendiet)

Vi kan da konkludere med at skjemaet i (6.9.4) er nøytralt stabilt for  $C \leq 1$  og dersom vi tar med  $a_0 < 0$   $|C| \leq 1$

Merk at vi også får sammenfallende røtter for  $m = 0$  med  $\delta = 0$ . I dette tilfellet er også  $G_1 = G_2 = 1$ , men  $\delta = 0$  gir selvfølgelig ingen instabilitet.

### Bruk av CFL-betingelsen fra avsnitt 6.8



Figur 6.24

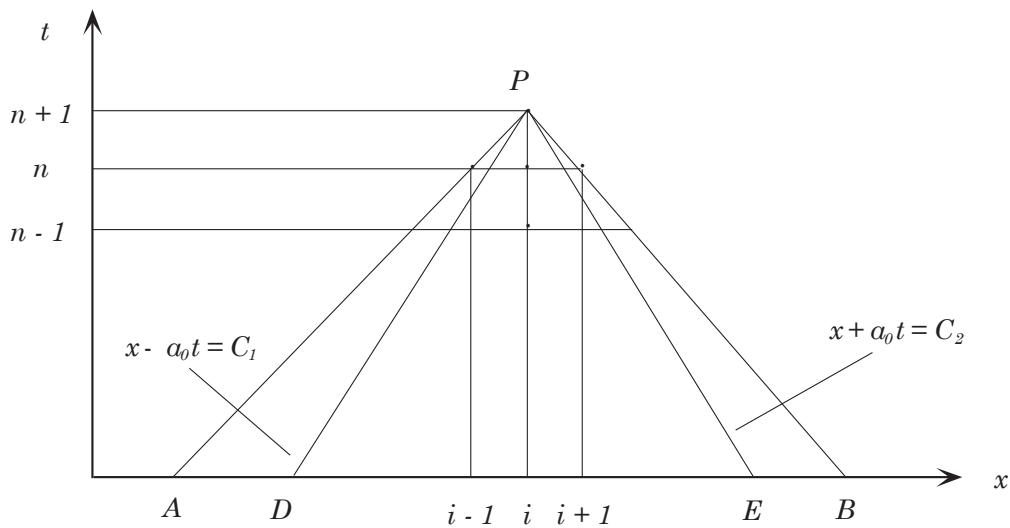
$PD$  og  $PE$  er differensialligningens karakteristikker gjennom  $P$ . Anta at vi skal løse (6.9.4) med data gitt på  $AB$ . Den numeriske verdien i  $P$  vil da bare være avhengig av nettpunkter innenfor  $\Delta ABP$ . (I fig. 4.5 har vi betegnet området  $DPE$  som avhengighetsområdet for punktet  $P$ .) Området  $ABP$  betegnes som det numeriske avhengighetsområdet.  $PA$  og  $PB$  betegnes som de numeriske karakteristikkene. Forandrer vi data i intervallene  $DA$  og/eller  $BE$ , vil ikke verdien i  $P$  beregnet fra (6.9.4) forandres. Men ifølge differensialligningen, skal verdien i  $P$  endre seg da  $DA$  og  $BE$  tilhører differensialligningens avhengighetsområde. Skjemaet er følgelig ustabilt dersom  $AB$  ligger innfor  $DE$ . Grensetilfellet blir da at de numeriske karakteristikkene faller langs differensialligningens karakteristikker: Helningen av  $PA$  er mindre eller lik helningen av  $PD$ , dvs:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a_0} \rightarrow a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (6.9.10)$$

Dette er CFL-betingelsen der  $a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$  er Courant-tallet.

*Sagt på en annen måte:* Differanseligningens avhengighetsområde må inneholde differensialligningens avhengighetsområde.

(6.9.10) kan også skrives:  $\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq a_0$ : Den numeriske hastigheten” må være større eller lik den fysiske hastigheten.



Figur 6.25

I fig. 6.25 er  $DP$  og  $EP$  karakteristikker, og Courant-tallet  $C < 1$ . Figuren viser at selv om beregningen er numerisk stabil, vil vi få data fra intervallene  $AD$  og  $EB$ . Disse verdiene må betegnes som falsk informasjon siden de ligger utenfor dataområdet for differensialligningen. I praksis fører dette til dårligere

nøyaktighet. For å få høyest mulig nøyaktighet, bør derfor de numeriske karakteristikkene falle mest mulig sammen med de fysikalske. Dette er selvfølgelig ikke lett å få til i et generelt tilfelle der karakteristikkene er krumme linjer.

## 6.10 ADVEKSJON-DIFFUSJONSLIGNINGEN

Denne er gitt ved:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.10.1)$$

Dette er den enkleste modellen for Navier-Stokes ligningene. Bruker vi klasifiseringskjemaet i kap. 4, finner vi at (6.10.1) er en parabolsk ligning. (Se også avsnitt 5.4.4. Vi kan følgelig bruke de numeriske løsningsmetodene som er gitt i avsnitt 5.2 for diffusjonsligningen. Men når konveksjonsleddet dominerer over diffusjonsleddet, vil (6.10.1) oppføre seg som adveksjonsligningen. Vi bør derfor se nærmere på denne effekten. Dette gjøres enklest ved å se på den stasjonære versjonen av (6.10.1) der vi for enkelhets skyld forutsetter  $a_0 > 0$ . Vi får nå en ordinær differensialligning:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{a_0}{\nu} \frac{du}{dx} \quad (6.10.2)$$

La oss bruke følgende randbetingelser:

$$u(0) = 0, \quad u(L) = U_0 \quad (6.10.3)$$

Med bruk av (6.10.3) gir (6.10.2) følgende analytiske løsning:

$$u(x) = U_0 \cdot \left[ \frac{1 - \exp\left(\frac{a_0 \cdot x}{\nu}\right)}{1 - \exp\left(\frac{a_0 \cdot L}{\nu}\right)} \right] \quad (6.10.4)$$

Merk at (6.10.2) er identisk med lign. (1.6.51) med løsning gitt i (1.6.52) i kap. 1

Vi skriver nå (6.10.4) for diskrete verdier  $x_i$  der  $x_i = \Delta x \cdot i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  med  $\Delta x = \frac{L}{N}$

$$u(x_i) = U_0 \cdot \left[ \frac{1 - \exp\left(\frac{a_0 \cdot \Delta x \cdot i}{\nu}\right)}{1 - \exp\left(\frac{a_0 \cdot \Delta x \cdot N}{\nu}\right)} \right] = U_0 \cdot \left[ \frac{1 - \exp(R_c \cdot i)}{1 - \exp(R_c \cdot N)} \right] \quad (6.10.5)$$

hvor vi har innført Reynoldscelletallet definert ved:

$$R_c = \frac{a_0 \cdot \Delta x}{\nu} \quad (6.10.6)$$

I forbindelse med energiligningen ville vi fått Peclletcelletallet  $P_c = \frac{a_0 \cdot \Delta x}{\alpha}$  isteden der  $\alpha$  er den termiske diffusiviteten.

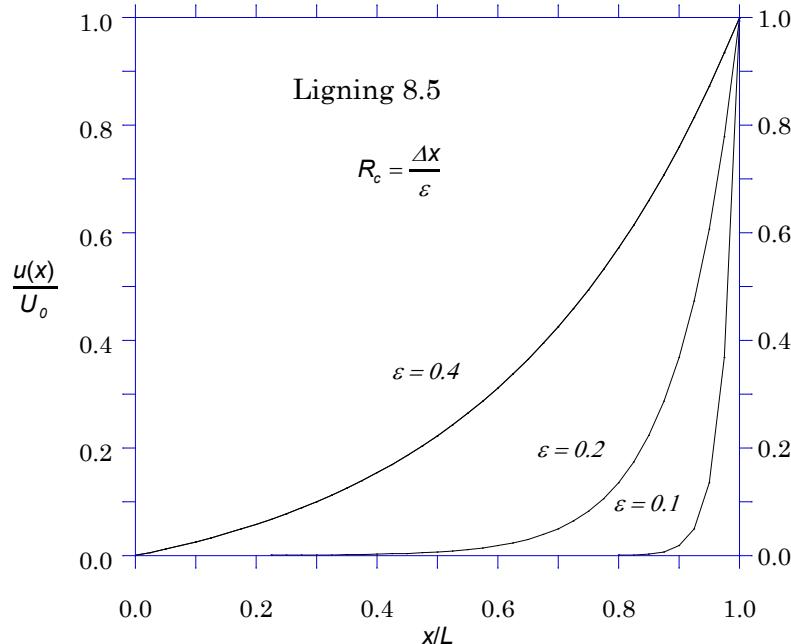
Som det vanlige Reynoldstallet, uttrykker  $R_c$  forholdet mellom konveksjon (transport) og diffusjon. Stor verdi av  $R_c$  betyr at strømningen dominerer over diffusjonen og omvendt for liten  $R_c$ . Merk at  $R_c$  generelt kan være både

positiv og negativ avhengig av den lokale strømretningen. Fig. 6.26 fremstiller (6.10.5) for forskjellige verdier av  $R_c$  med  $\frac{x}{L} = \frac{\Delta x \cdot i}{\Delta x \cdot N} = \frac{i}{N}$ . Denne figuren er identisk med fig. 6.20 når vi setter  $R_c = \frac{\Delta x}{\varepsilon}$ .

For store verdier av  $R_c$  danner det seg et grensesjikt rundt  $\frac{x}{L} = 1$  og problemet er singulært for  $R_c \rightarrow \infty$ . (Se også avsnitt 1.6.3)

Diskretiserer (6.10.2) med bruk av sentraldifferanser:

$$a_0 \cdot \left( \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) = \nu \cdot \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right)$$



Figur 6.26

Ordnet, sammen med innføring av  $R_c$ :

$$(2 + R_c) \cdot u_{i-1} - 4u_i + (2 - R_c) \cdot u_{i+1} = 0 \quad (6.10.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad u_0 = 0, \quad u_N = U_0$$

(6.10.7) kan løses med Thomasalgoritmen. Fra avsnitt 3.1 vet vi at ligningsystemet i (6.10.7) er numerisk stabil dersom koeffisientmatrisen har diagonal-dominans. Dette er sikkert tilfelle for  $R_c < 2$ . Da (6.10.7) er en lineær 2. ordens differensial-ligning med konstante koeffisienter, finner vi fra appendiks A, del A.4, at løsningen kan skrives:

$$u_i = C_1 \cdot \alpha_1^i + C_2 \cdot \alpha_2^i \quad (6.10.8)$$

der  $\alpha_{1,2}$  er røtter i den karakteristiske ligningen:

$$(2 - R_c) \cdot \alpha^2 - 4\alpha + (2 + R_c) = 0$$

med løsning:

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{2 + R_c}{2 - R_c}, \quad R_c \neq 2 \quad (6.10.9)$$

Konstantene i (6.10.8) bestemmes fra randbetingelsene gitt i (6.10.7):

$$u_0 = C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -C_1$$

$$u_N = C_1 \cdot [\alpha_1^N - \alpha_2^N] = U_0 \rightarrow C_1 = \frac{U_0}{\alpha_1^N - \alpha_2^N}$$

Innsatt for  $C_1$  og  $C_2$  i (6.10.8):

$$u_i = U_0 \cdot \left[ \frac{1 - \alpha_1^i}{1 - \alpha_1^N} \right] \quad (6.10.10)$$

Vi ser at  $\alpha_1 < 0$  for  $R_c > 2$  som betyr at ledet  $\alpha_1^i$  veksler mellom positiv og negativ verdi som funksjon av indekset  $i$ . Løsningen i (6.10.8) er derfor oscillerende, i strid med den analytiske løsningen. Vi må derfor velge  $R_c < 2$  dersom vi vil unngå oscillasjoner. Denne betingelsen på  $R_c$  legger strenge begrensninger på størrelsen av  $\Delta x$ . Dette er særlig alvorlig for flerdimensjonale tilfeller.

### Bemerkning.

Vi har ovenfor påpekt at ligningsystemet er numerisk stabilt for  $R_c < 2$  ved bruk av Thomasalgoritmen. For  $R_c > 2$  kan det da være nødvendig å utføre pivotering ved løsning av ligningsystemet. Men dette fører ikke til at oscillasjonene forsvinner. Betingelsen om diagonaldominans bestemmer her fortegnet på røttene i den karakteristiske ligningen, og det er dette som bestemmer karakteren av løsningen.

La oss undersøke om bruk av oppstrømsdifferanser kan fjerne oscillasjonene. Diskretiserer (6.10.2) med bruk av oppstrømsdifferanser for det konvektive ledet samt sentraldifferanser for diffusjonsleddet:

$$a_0 \cdot \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right) = \nu \cdot \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (6.10.11)$$

som ordnet gir følgende differanseligning:

$$(1 + R_c) \cdot u_{i-1} - (2 + R_c) \cdot u_i + u_{i+1} = 0 \quad (6.10.12)$$

Løsningen av (6.10.12) er gitt i (6.10.10) der  $\alpha_{1,2}$  er røtter i den karakteristiske ligningen:

$$\alpha^2 - (2 + R_c) \cdot \alpha + (1 + R_c) = 0$$

med løsning:

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 = 1 + R_c \quad (6.10.13)$$

Ingen av leddene i (6.10.10) skifter nå fortegn, og vi får en løsning uten oscillasjoner. I tillegg ser vi at koeffisientmatrisa for dette systemet er diagonaldominant slik at vi kan bruke Thomasalgoritmen for alle verdier av  $R_c$ . Det kan derfor være fristende å trekke den konklusjonen at istedenfor sentraldifferanser bruker vi oppstrømsdifferanser, og dermed har vi løst alle problemer. For det første er sentraldifferanser mer nøyaktige selv om stabilitetsområdet er begrenset. Det enkle oppstrømskjemaet vi har brukt her, har bare nøyaktighet av orden  $\Delta x$ . (Det finnes mer nøyaktige). Bruk av oppstrømsdifferanser innfører numerisk viskositet som demper oscillasjonene. Vi skriver 6.10.11 på sentraldifferanseform:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right) &= \nu \cdot \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) \rightarrow \\ a_0 \cdot \left( \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} \right) &= (\nu + \nu_{num}) \cdot \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (6.10.14) \\ \text{der } \nu_{num} &= \frac{a_0 \cdot \Delta c}{2} \end{aligned}$$

Vi ser at  $\Delta x$  må være liten dersom betingelsen  $\nu_{num}$  skal være oppfylt. Samtidig er det nettopp  $\nu_{num}$  som stabiliserer sentraldifferanseskjemaet. Oppstrømsdifferensiering er populær fordi den ofte fører til stabile differanse-skjema. Men samtidig kan dette gå på bekostning av nøyaktigheten. Modellproblemets vi har brukt her, er et grensesjiktproblem som egentlig ikke er særlig godt egnet til å sammenligne forskjellige måter å behandle det konvektive ledet på. Grensesjiktet oppstår på grunn av randbetingelsen  $u(L) = U_0$ . For store verdier av  $R_c$  må vi derfor ha et fint nett nær  $x = L$  dersom vi ønsker en nøyaktig løsning. Dette gjelder både for sentraldifferanser og oppstrøms-differanser. For sentraldifferanser er dette også nødvendig for å få en ikke-oscillerende løsning. Legg merke til at sentraldifferanser nettopp signaliserer at nettet er for grovt ved å oscillere. Noen slik advarsel fås ikke ved bruk av oppstrømsdifferanser.

Vi går nå tilbake til den fulle adveksjon-diffusjonsligningen i (6.10.1) og diskretiserer den på følgende måte der vi antar  $a_0 > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a_0 \theta}{\Delta x} \cdot &\left[ \alpha \left( u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \left( u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} \right) \right] \\ &+ \frac{a_0 (1 - \theta)}{\Delta x} \cdot \left[ \alpha (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (1 - \alpha) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right] \\ &= \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \cdot \left[ \theta (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (1 - \theta) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \right] \quad (6.10.15) \end{aligned}$$

der  $0 \leq \theta \leq 1$  og  $0 \leq \alpha \leq 1$

$\theta = 0$  gir et eksplisitt skjema og  $\theta = 1$  gir et fullt implisitt skjema.

$\alpha = 0$  gir sentraldifferanser og  $\alpha = 1$  gir full oppstrømsdifferensiering.

$\alpha = 0$  og  $\theta = \frac{1}{2}$  gir et skjema av Crank-Nicolson-typen.

Innfører det (numeriske) diffusjonstallet  $D$  definert ved:

$$D = \nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (6.10.16)$$

Dette tallet har vi tidligere betegnet  $r$  uten å gi det noe navn. (Se (5.2.8b), kap. 5). Ellers har vi Courant-tallet  $C = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$  og Reynoldscelletallet  $R_c = a_0 \frac{\Delta x}{\nu}$ . Det eksistere følgende sammenheng mellom disse tallene:

$$D = \frac{C}{R_c} \quad (6.10.17)$$

(6.10.15) kan skrives på følgende måte:

$$\begin{aligned} & u_j^{n+1} - u_j^n + C \cdot \theta \cdot \left[ \alpha(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + \frac{1}{2}(1-\alpha)(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \right] \\ & + C(1-\theta) \cdot \left[ \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(1-\alpha)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right] \\ & = D \cdot \left[ \theta(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (6.10.18)$$

La oss se på noen spesialtilfeller av (6.10.18). Med  $\theta = 0$  og  $\alpha = 0$  får vi et eksplisitt skjema med sentraldifferanser:

$$\begin{aligned} & u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{C}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = D \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \rightarrow \\ & u_j^{n+1} = \left( \frac{C}{2} + D \right) u_{j-1}^n + (1-2D)u_j^n + \left( D - \frac{C}{2} \right) u_{j+1}^n \end{aligned} \quad (6.10.19)$$

Nå vet vi at (6.10.19) med  $C = 0$  har stabilitetsbetingelsen  $D \leq \frac{1}{2}$ . Vi venter at denne fortsatt skal gjelde. Ved en von Neumann analyse kan vi finne følgende relasjon:

$$C^2 \leq 2D \text{ eller } R_c \leq \frac{2}{C} \quad (6.10.20)$$

Ved å kombinere denne med  $D \leq \frac{1}{2}$ , finner vi som ventet  $C \leq 1$  som er CFL-betingelsen. Stabilitetsbetingelsene for (6.10.19) kan da skrives:

$$0 \leq C^2 \leq 2D \leq 1 \quad (6.10.21)$$

Dersom vi rekkeutvikler (6.10.19) og danner den modifiserte ligningen ved å eliminere ledd som inneholder  $t$ , får vi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= \left( \nu - \frac{a_0^2 \cdot \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_0 \frac{(\Delta x)^2}{3} \left( 3D - C^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \\
&= \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot \Delta t} (2D - C^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_0 \frac{(\Delta x)^2}{3} \left( 3D - C^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots
\end{aligned} \tag{6.10.22}$$

Koeffisienten foran ledet  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  må være  $\geq 0$  som impliserer den nødvendige betingelsen  $C^2 \leq 2D$  som vi har angitt i (6.10.20).

Med  $C = 1$  og  $D = 1/2$  ( $R_c = 2$ ) gir (6.10.19)  $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$  som er den eksakte løsningen av adveksjonsligningen  $\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  som betyr at dette tilfellet ikke er konsistent med den gitte ligningen.

Selv om (6.10.21) angir stabilitetsområdet, viser det seg at det kan oppstå oscillasjoner i intervallet  $2 \leq R_c \leq \frac{2}{C}$ . Dersom vi f.eks. velger  $C = 0.5$ , blir stabilitetsområdet  $1 \leq R_c \leq 4.0$  med mulighet for oscillasjoner i intervallet  $2.0 \leq R_c \leq 4.0$ . Figur 6.28 og 6.29 viser en beregning for dette tilfellet. På fig. 6.28 ligger vi innenfor stabilitetsområdet og utenfor området som gir oscillasjoner. På fig. 6.29 ligger vi fremdeles innenfor stabilitetsområdet, men nå innenfor området som gir oscillasjoner. På fig. 6.30 ligger vi utenfor stabilitetsområdet. (Stiplet kurve angir analytisk løsning, se appendiks G, del G.10)

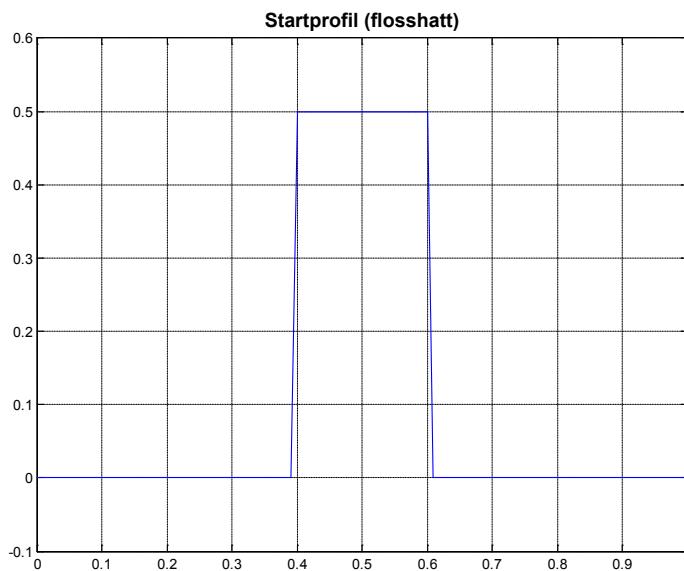
I et forsøk på å utvide stabilitetsområdet, kan vi med bakgrunn i tidligere erfaringer prøve med oppstrømsdifferanser i (6.10.18). Den modifiserte ligningen blir i dette tilfellet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= \\
\left[ \nu \left( 1 - \alpha \frac{R_c}{2} \right) - a_0^2 \frac{\Delta t}{2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_0 \frac{(\Delta x)^2}{6} (2C^2 - 3\alpha C + 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &+ \dots \\
= a_0 \frac{\Delta x}{2} \left( \alpha - C + \frac{2}{R_c} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_0 \frac{(\Delta x)^2}{6} (2C^2 - 3\alpha C - 6D + 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &+ \dots
\end{aligned} \tag{6.10.23}$$

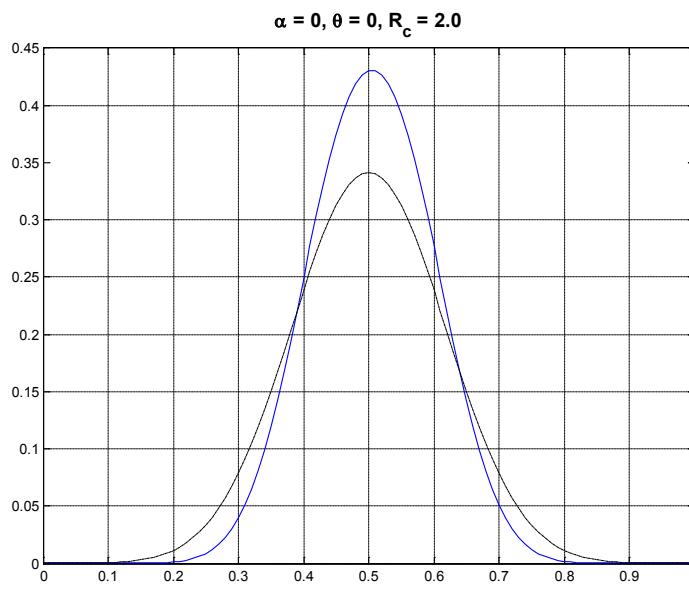
Fra (6.10.23) følger umiddelbart følgende nødvendige stabilitetsbetingelse:

$$\alpha - C + \frac{2}{R_c} \geq 0 \tag{6.10.24}$$

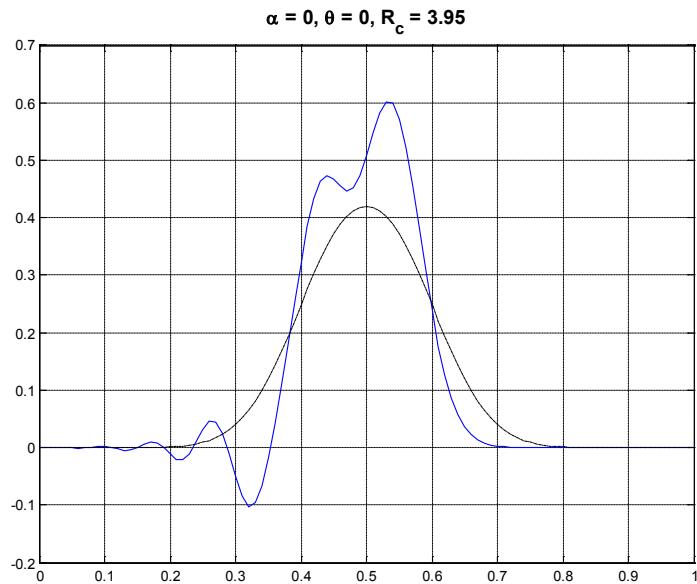
For  $\alpha = C$  får vi korrekt faktor foran diffusjonsleddet da  $a_0 \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{2}{R_c} = \nu$ . Tillfellet  $\alpha = C$  er Lax-Wendroffs metode. Dette siste tilfellet er vist på figur 6.32, mens fig. 6.31 viser et tilfelle der  $\alpha \neq C$ .



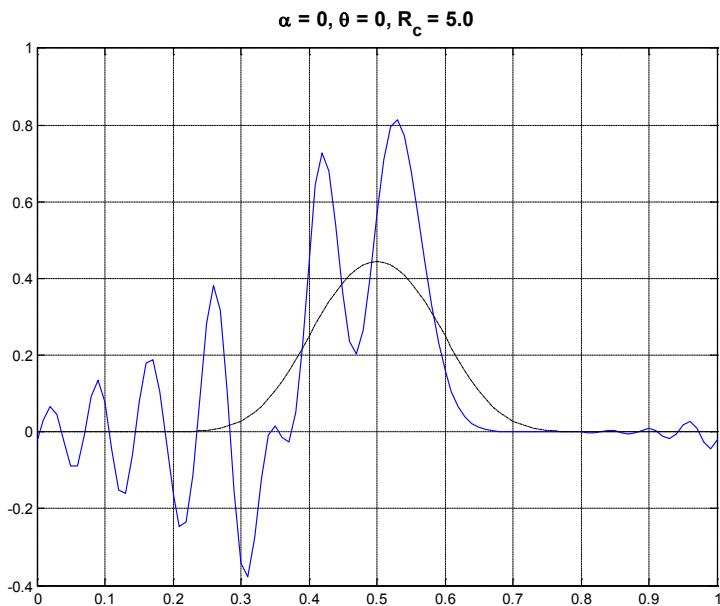
Figur 6.27



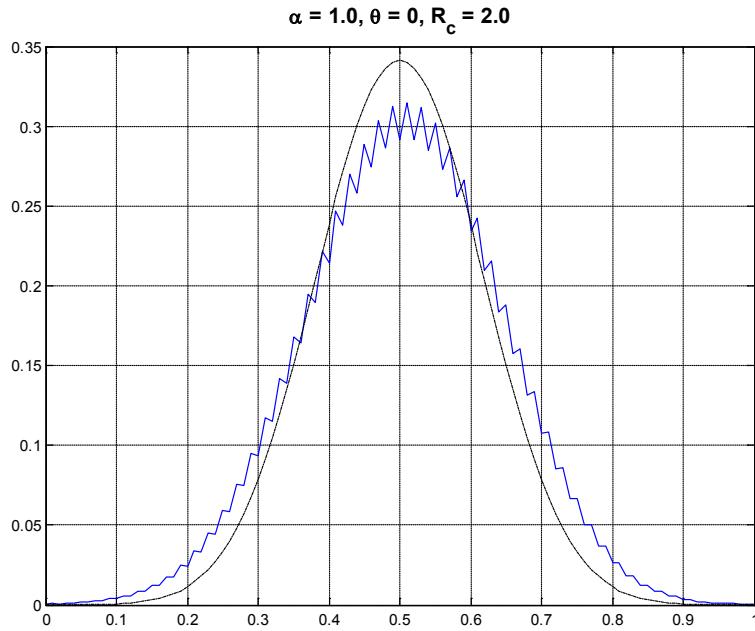
Figur 6.28



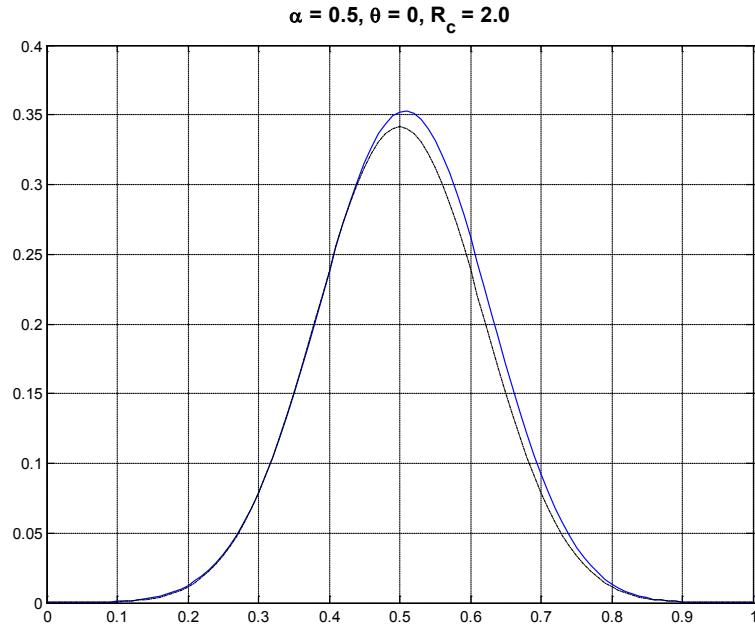
Figur 6.29



Figur 6.30



Figur 6.31



Figur 6.32

(6.10.15) er et tridiagonalt ligningsystem som kan skrives på formen:

$$a \cdot u_{j-1}^{n+1} + b \cdot u_j^{n+1} + c \cdot u_{j+1}^{n+1} = d_j \quad (6.10.25)$$

der

$$\begin{aligned}
 a &= -\theta \left[ D + \frac{C}{2}(1+\alpha) \right] = -\theta \cdot C \cdot \left[ \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) + \frac{1}{R_c} \right] \\
 b &= 1 + \theta \cdot (C \cdot \alpha + 2D) = 1 + \theta \cdot C \cdot \left[ \alpha + \frac{2}{R_c} \right] \quad (6.10.26) \\
 c &= \theta \cdot \left[ \frac{C}{2}(1-\alpha) - D \right] = \theta \cdot C \cdot \left[ \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) - \frac{1}{R_c} \right]
 \end{aligned}$$

med

$$d_j = s_1 \cdot u_{j-1}^n + s_2 \cdot u_j^n + s_3 \cdot u_{j+1}^n \quad (6.10.27)$$

der

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (1-\theta) \left[ D + \frac{C}{2}(1+\alpha) \right] = (1-\theta) \cdot C \cdot \left[ \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) + \frac{1}{R_c} \right] \\
 s_2 &= 1 - (1-\theta) \cdot (C \cdot \alpha + 2D) = 1 - (1-\theta) \cdot C \cdot \left[ \alpha + \frac{2}{R_c} \right] \\
 s_3 &= (1-\theta) \cdot \left[ D - \frac{C}{2}(1-\alpha) \right] = (1-\theta) \cdot C \cdot \left[ \frac{1}{R_c} - \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) \right] \quad (6.10.28)
 \end{aligned}$$

Merk at det er bare høyresiden som er variabel. Vi kan derfor bruke den versjonen av **tdma** som er gitt i lign.(I.0.9) i appendiks I. Denne versjonen har vi tidligere brukt i programmet **startupv3** i eksempel 5.3, kapittel 5.

Vi har sett at vi kan få oscillasjoner innenfor stabilitetsområdet for differanseligningen. Spørsmålet er om vi kan tillate slike oscillasjoner i praksis, f.eks. ved løsning av Navier-Stokes ligninger med turbulensmodeller. Svaret er generelt nei. Turbulensmodeller inneholder ofte størrelser som er funksjon av det lokale hastighetsfeltet. Hvis noen av disse størrelsene skal være positive, f.eks. den turbulente kinetiske energien, kan lokale oscillasjoner gi negative verdier som raskt fører til divergens. Dette gjelder selvfolgelig ikke bare turbulensmodeller, men i alle tilfeller der *numeriske* oscillasjoner i strømnings-feltet kan gi størrelser ufysiske fortegn. I mer omfattende flerdimensjonale beregninger er man ofte tvunget til å innføre numerisk viskositet, gjerne via differanseskjemaet, for å dempe oscillasjonene selv om dette kan føre til mindre nøyaktighet. Mye av disse problemene kan selvfolgelig unngås dersom vi bruker fin nok opplosning der dette er nødvendig. Problemet er å kunne lokalisere områdene der høy opplosning er påkrevet, da slike områder generelt opptrer mange steder i et strømningsfelt, ikke bare ved grenseflatene. I tillegg kommer vanskeligheten med å skrive program med variabelt nett.

Det finnes bedre metoder for behandling av det konvektive ledet enn det som er vist ovenfor. Henviser til Patankars PLDS-skjema som er behandlet i [27], og Leonards QUICK-skjema som f.eks. er beskrevet i Fletcher [18], vol. 2



# KAPITTEL 7

## STASJONÆRE PROBLEMER

### 7.1 INNLEDNING

Elliptiske partielle differensialligninger opptrer ofte ved stasjonære problemer som også betegnes likevektsproblemer.

#### Eksempel 7.1

Ikke-stasjonær varmeledning:  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$

Denne ligningen er parabolsk, men ved stasjonære forhold  $\left( \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$ , får vi:  
 $\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0$  som er en elliptisk ligning.

Vi vil i fortsettelsen begrense oss til to-dimensjonale problemer.

Noen eksempler på lineære elliptiske ligninger:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c \cdot u = q \quad (7.1.1)$$

der  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $q$  generelt er funksjoner av  $x$  og  $y$  ( $a$  og  $b$  har samme fortegn).

Noen spesialtilfeller av (7.1.1):

Helmholtz:

$$\nabla^2 u + c \cdot u = q \quad (7.1.2)$$

Poisson:

$$\nabla^2 u = q \quad (7.1.3)$$

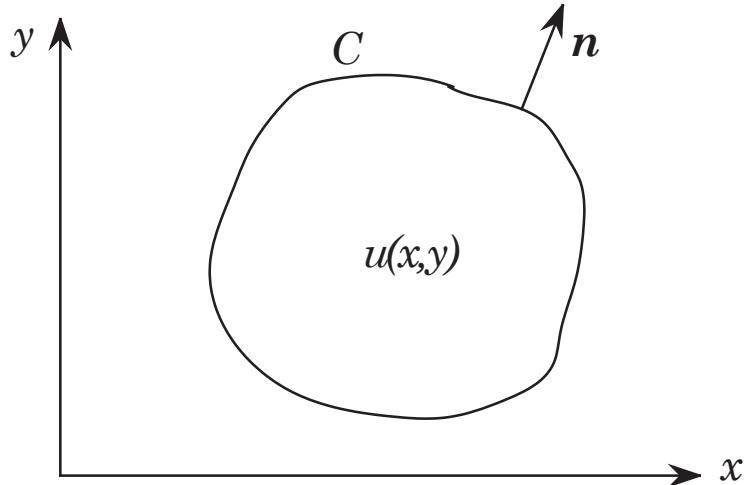
Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (7.1.4)$$

$$\text{der } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Klassifiseringskjemaet i avsnitt 4.3 viser at lign. (7.1.2) – (7.1.4) er elliptiske, dvs.:

Ingen reelle karakteristikker. Derfor må elliptiske PDL behandles som randverdiproblemer. (Se avsnitt 4.4 samt avsnitt 4.5 angående betingelsen for et velformulert problem.)



Figur 7.1

Vi repeterer de vanligste randbetingelser fra avsnitt 4.4:

1. Dirichlet-betingelse:

$$u(x, y) = G_1(x, y) \text{ på randkurven } C$$

2. Neumann-betingelse:

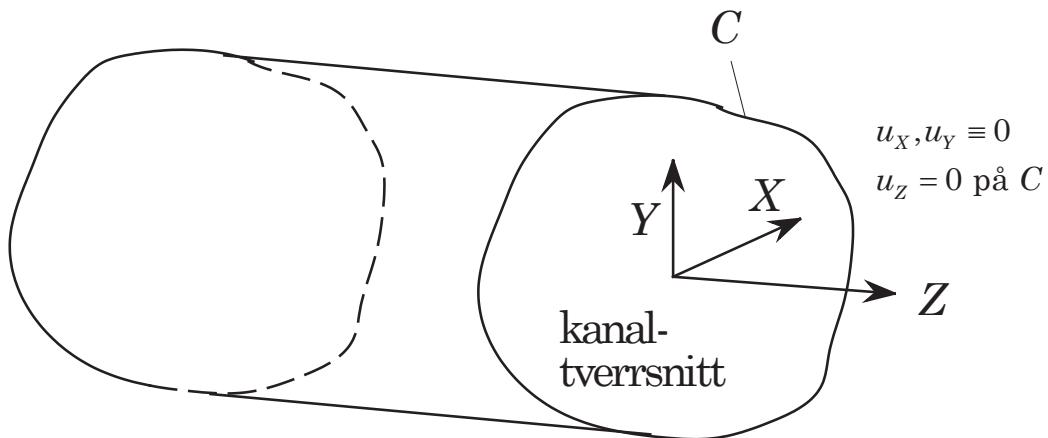
$$\frac{\partial u}{\partial n} = G_2(x, y) \text{ på } C$$

3. Robin-betingelse:

$$a \cdot u(x, y) + b \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = G_3(x, y) \text{ på } C$$

Neumann-problemet må ha minst en verdi av  $u(x, y)$  spesifisert på  $C$  dersom løsningen skal være entydig. I tillegg må linjeintegralet av  $G_2(x, y)$  rundt randkurven  $C$  forsvinne.

La oss se nærmere på fullt utviklet laminær strømning i en kanal som er et eksempel på en Poisson-ligning med Dirichlet-betingelser.



Figur 7.2

Fra appendiks 2:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{\partial^2 u_Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_Z}{\partial Y^2} \quad (7.1.5)$$

Med gitt trykkgradient er  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial Z}$  en konstant. (7.1.5) er en Poisson-ligning.

Vi gjør (7.1.5) dimensjonsløs ved å innføre:

$$y = \frac{Y}{a}, \quad x = \frac{X}{a}, \quad u = -\mu \frac{u_z}{a^2 \frac{\partial p}{\partial Z}} \quad (7.1.6)$$

der  $a$  er en typisk tverrsnittdimensjon.

Ved bruk av (7.1.6) blir (7.1.5):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \quad (7.1.7)$$

med  $u = 0$  på randkurven C.

(7.1.7) løser en rekke andre problemer i mekanikken.

Eksempler:

Ligningen for elastisk torsjon av en stav med samme tverrsnitt som ovenfor, er gitt av (7.1.7) der  $u$  nå er en spenningsfunksjon.

Utbøyningen av en membran over samme tverrsnitt påkjent av et konstant trykk  $p$ , er gitt av (7.1.7).  $u$  er her utbulningen.

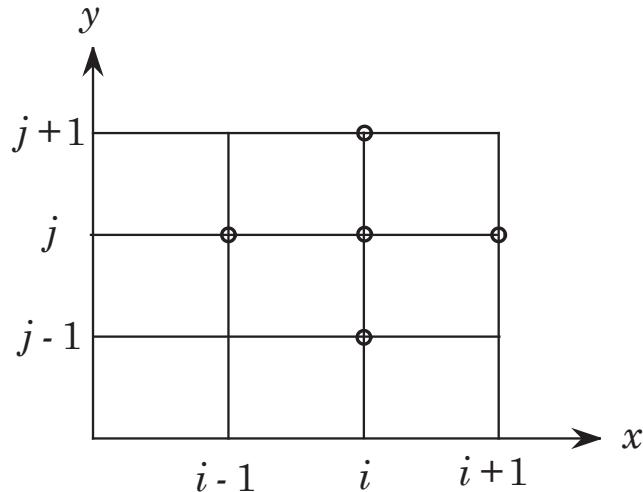
I White [21], avsnitt 3-3, er det gitt en rekke analytiske løsninger av (7.1.7), også i polare koordinater. Andre eksempler på lineære elliptiske ligninger er strømning ved lave Reynoldstall (Stokes-strømning) og lagerteori.

## 7.2 NUMERISK LØSNING VED DIREKTE METODE.

Dersom den elliptiske PDL er en stasjonær versjon av en parabolsk ligning, kan vi selvfølgelig løse den parabolske ligningen inntil stasjonære forhold inntreffer. Dette er normalt en tidkrevende angrepsmetode, og kravet om stabile skjema blir igjen et problem. Ser vi bort fra en slik metode, slipper vi å konsentrere oss om å lage stabile skjema. Men selv de enkleste elliptiske PDL har to uavhengige romkoordinater. I tillegg til kravet om raske løsnings-metoder, ønskes også regneskjema som med rimelig programmeringsarbeid fører til effektiv lagring av data.

La oss som eksempel diskretisere den stasjonære varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (7.2.1)$$



Figur 7.3

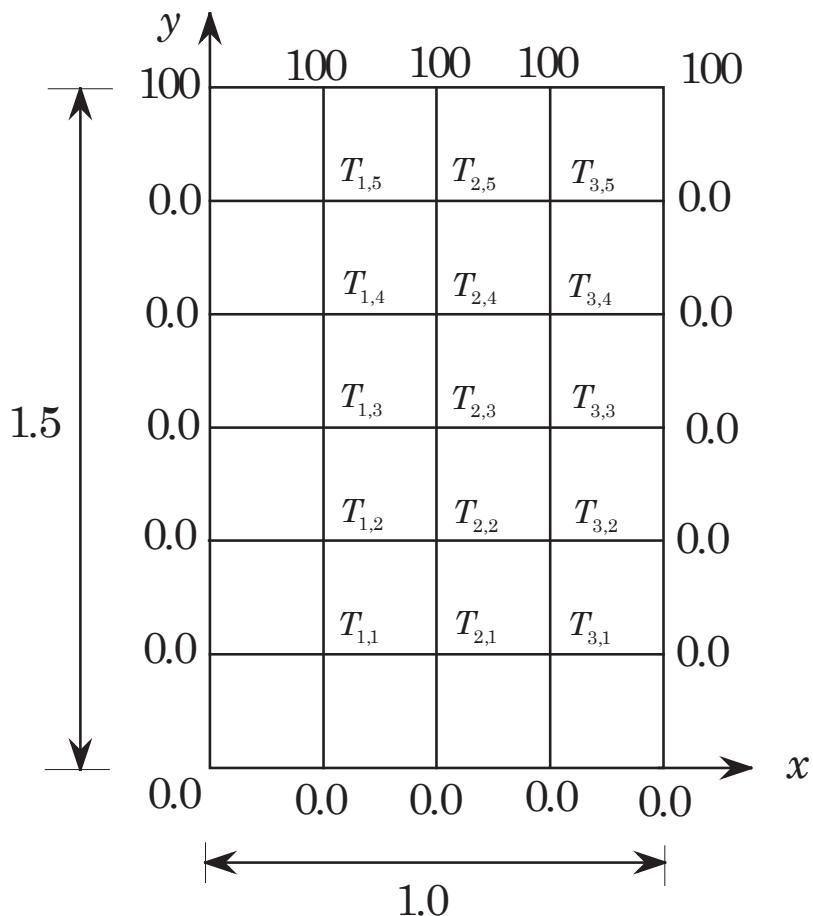
Vi bruker følgende notasjon:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ y_j &= y_0 + j \cdot h, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ \text{der } \Delta x &= \Delta y = h \end{aligned}$$

Ved bruk av sentraldifferanser får vi:

$$T_{i+1, j} + T_{i-1, j} + T_{i, j+1} + T_{i, j-1} - 4T_{i, j} = 0 \quad (7.2.2)$$

La oss bruke (7.2.2) på følgende eksempel:



Figur 7.4

En plate med lengde 1.0 og høyde 1.5 har følgende temperaturfordeling langs randkurven:

For  $y = 0 : T = 0.0$

For  $x = 0$  og  $x = 1 : T = 0.0, 0 \leq y < 1.5$

For  $y = 1.5 : T = 100.0$

Plata er inndelt med  $\Delta x = \Delta y = 0.25$

Bestem temperaturfordelingen i plata ved bruk av (7.2.2).

Ved å systematisk bruke (7.2.2) i hvert punkt, får vi følgende ligningsystem, gitt i (7.2.3)–(7.2.5) der **A** er koeffisientmatrisa, **T** inneholder de ukjente temperaturene, og **b** inneholder randtemperaturene.

$$\begin{aligned} -4 \cdot T_{11} + T_{12} + T_{21} &= 0 \\ T_{11} - 4 \cdot T_{12} + T_{13} + T_{22} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12} - 4 \cdot T_{13} + T_{14} + T_{23} &= 0, \quad T_{13} - 4 \cdot T_{14} + T_{15} + T_{24} = 0 \\ T_{14} - 4 \cdot T_{15} + T_{25} &= -100, \quad T_{11} - 4 \cdot T_{21} + T_{22} + T_{31} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12} + T_{21} - 4 \cdot T_{22} + T_{23} + T_{32} &= 0 \\ T_{13} + T_{22} - 4 \cdot T_{23} + T_{24} + T_{33} &= 0 \\ T_{14} + T_{23} - 4 \cdot T_{24} + T_{25} + T_{34} &= 0 \\ T_{15} + T_{24} - 4 \cdot T_{25} + T_{35} &= 100 \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

$$\begin{aligned} T_{21} - 4 \cdot T_{31} + T_{32} &= 0, \quad T_{22} + T_{31} - 4 \cdot T_{32} + T_{33} = 0 \\ T_{23} + T_{32} - 4 \cdot T_{33} + T_{34} &= 0, \quad T_{24} + T_{33} - 4 \cdot T_{34} + T_{35} = 0 \\ T_{25} + T_{34} - 4 \cdot T_{35} &= -100 \end{aligned}$$

(7.2.3) er et lineært, algebraisk ligningsystem med 15 ukjente som kan skrives symbolisk på formen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{b} \tag{7.2.4}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccccccccllllll} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{24} \\ T_{25} \\ T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \\ T_{34} \\ T_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \tag{7.2.5}$$

Den analytiske løsningen er gitt ved:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= 100 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(\lambda_n y) \cdot \sin(\lambda_n x) \\ \text{der } \lambda_n &= \pi \cdot n \text{ og } A_n = \frac{4}{\lambda_n \sinh(\frac{3}{2}\lambda_n)} \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Temperaturfeltet er symmetrisk om  $x = 0.5$ .

Vi ser umiddelbart at det er lite effektivt å løse (7.2.5) med alle null-elementene. Koeffisientmatrisa består av  $15 \times 15 = 225$  elementer, og av

disse er bare 59 forskjellige fra 0. Koeffisientmatrisa har tydelig bandstruktur og er symmetrisk. Det er klart at dette kan utnyttes til å lage effektive løsningskjema som ikke krever lagring av alle null-elementene.

Matlab har innebygde rutiner for løsning av glisne matriser (sparse matrices). Løsningen av (7.2.5) er gitt i Matlab-programmet **lap1** nedenfor.

```
% program lap1
clear
n = 15;
d = ones(n,1); % diagonal
b = zeros(n,1); % right hand side
% --- Update b ---
b(5) = -100; b(10) = -100; b(15) = -100;
% --- Generate A-matrix ---
A = spdiags([d d -4*d d d],[-5 -1 0 1 5], n,n);
% --- Update A ---
A(5,6) = 0; A(6,5) = 0; A(11,10) = 0; A(10,11) = 0;
% --- Solve system ---
T = A\b;
```

I programmet blir  $T(1) = T_{11}$ ,  $T(2) = T_{12}$ ,  $T(3) = T_{13}$  osv. Flere detaljer om bruk av løsning av glisne matriser er gitt i Matlablefsa.

Vi får følgende resultat der tallene i parantes er beregnet fra den analytiske løsningen i (7.2.6):

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{31} = 1.578 \quad (1.406), \quad T_{12} = T_{32} = 4.092 \quad (3.725) \\ T_{13} &= T_{33} = 9.057 \quad (8.483), \quad T_{14} = T_{34} = 19.620 \quad (18.945) \\ T_{15} &= T_{35} = 43.193 \quad (43.483), \quad T_{21} = 2.222 \quad (1.987), \quad T_{22} = 5.731 \quad (5.261) \\ T_{23} &= 12.518 \quad (11.924), \quad T_{24} = 26.228 \quad (26.049), \quad T_{25} = 53.154 \quad (54.449) \end{aligned}$$

For mer kompliserte operatorer enn Laplace-operatoren og enda mer utpreget for ikke-lineære ligninger, vil ikke strukturen av koeffisientmatrisa være så regelmessig som i (7.2.5). Men matrisa vil ofte være glissen. Kombinasjonen rask løsning og effektiv lagring blir vanskeligere å oppfylle. I motsetning til direkte metoder, er iterative metoder enkle å programmere og gir effektiv lagring, men er ofte utsatt for langsom konvergens. Vi ser på iterasjonsmetoder i avsnitt 7.3.

### 7.2.1 UTNYTTELSE AV SYMMETRI

Ved å utnytte eventuell symmetri for et problem, kan vi redusere antall ukjente. Dersom vi ser på figur 7.5, har vi symmetri om linja  $x = 0.5$ . Formelt får vi da betingelsen  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  langs denne linja, men det er selvfølgelig ikke nødvendig å utføre noe diskretisering da det følger direkte at

$T_{11} = T_{31}$ ,  $T_{12} = T_{32}$  osv. Dette fører til at systemet i (7.2.5) i dette tilfellet blir:

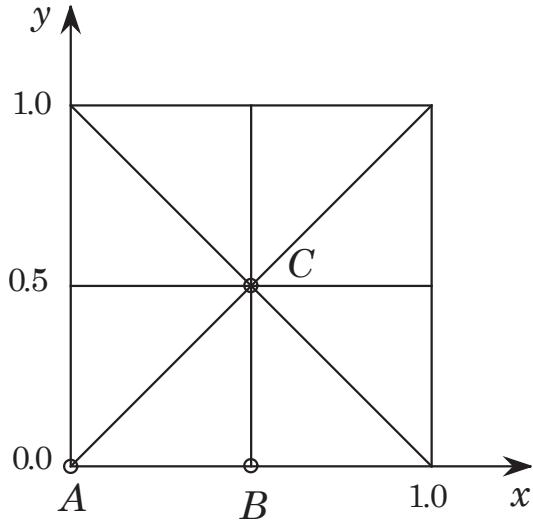
$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{24} \\ T_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \quad (7.2.7)$$

Løsningen av (7.2.7) er gitt i Matlab-programmet **lap1s** nedenfor.

```
% program lap1s
clear
n = 10;
d = ones(n,1); % diagonal
b = zeros(n,1); % right hand side
% --- Update b ---
b(5) = -100; b(10) = -100;
% --- Generate A-matrix ---
A = spdiags([2*d d -4*d d d], [-5 -1 0 1 5], n,n);
% --- Update A ---
A(5,6) = 0; A(6,5) = 0;
% --- Solve system ---
T = A\b;
```

### Poisson-ligning

La oss se på lign. (7.1.7) for et kvadratisk tverrsnitt av en kanal



Figur 7.5

Dersom vi ikke utnytter symmetrien, blir problemet fra (7.1.7)

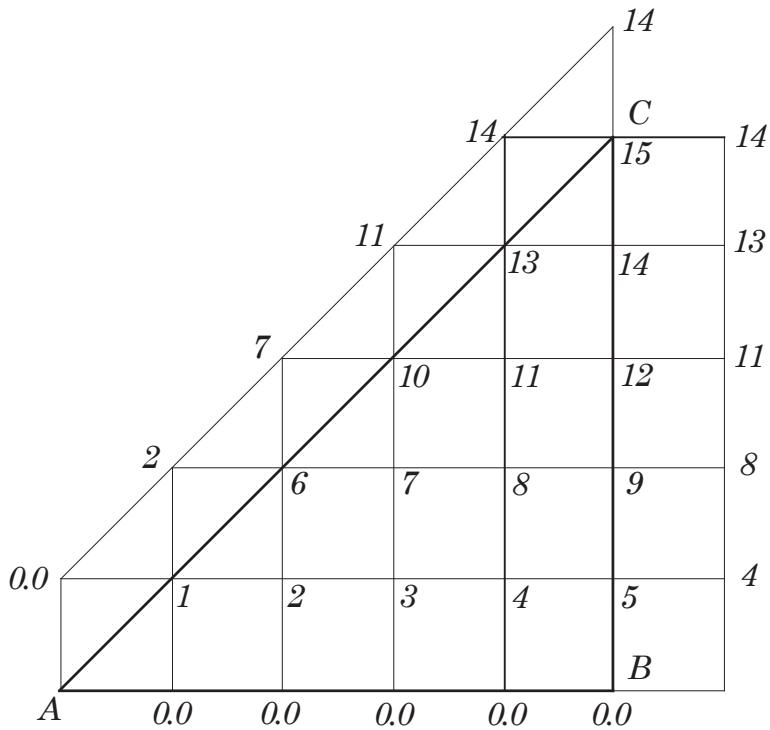
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \quad (7.2.8)$$

Randbetingelser:  $u = 0$  langs hele randkurven.

Dette er et problem med Dirichlet-betingelser. Dersom vi utnytter symmetrien om  $x = 0.5$  og  $y = 0.5$ , blir formelt symmetri-betingelsene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ for } x = 0.5 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \text{ for } y = 0.5\end{aligned}$$

Vi ser at vi også kan benytte oss av symmetrien om diagonalene, slik at det f.eks er tilstrekkelig å løse ligningen i trekanten ABC da AC er en symmetri-linje. Figur 7.6 på neste side viser trekanten ABC med nummerering der vi har utnyttet symmetrien. Vi setter  $u_1 = u_{1,1}$ ,  $u_2 = u_{1,2}$ ,  $u_3 = u_{1,3}$  osv. Langs AB har vi avmerket randverdien  $u = 0$ .



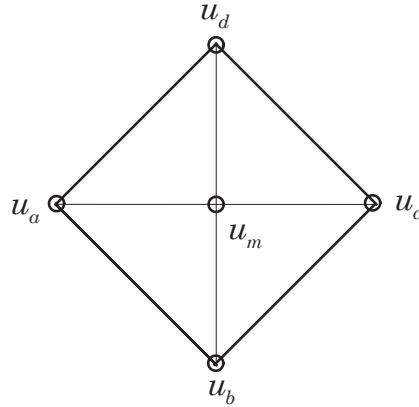
Figur 7.6

Den diskretiserte versjonen av (7.2.8) blir:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = -h^2 \quad (7.2.9)$$

$$\text{med } \Delta x = \Delta y = h$$

Vi har valgt  $h = 0.1$  i figur 7.6. Beregningsmolekylet med enkle indeks:



Figur 7.7

slik at (7.2.9) blir:

$$u_a + u_b + u_c + u_d - 4u_m = -h^2 \quad (7.2.10)$$

Noen eksempler på bruk av (7.2.10):

$$\begin{aligned} 2u_2 - 4u_1 &= -h^2 \\ 2u_4 + u_9 - 4u_5 &= -h^2 \\ u_7 + u_4 + u_9 + u_{11} - 4u_8 &= -h^2 \end{aligned}$$

med  $m = 1, 5$  og  $8$

Den endelige ligningsystemet blir som gitt i (7.2.11):

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \end{bmatrix} = -h^2 \quad (7.2.11)$$

Selv om bandstrukturen er tydelig, blir den mer rotet fordi vi har utnyttet symmetrien. Det blir mer oppdatering av koeffisientmatrisa. Programmet **pōisson** løser (7.2.11):

```
% program poisson
clear
n = 15;
h = 0.1; h2 = h*h;
d0 = zeros(n,1); % diagonal
d = ones(n,1); % diagonal
b = -h2*ones(n,1); % right hand side
% --- generate A-matrix ---
A = spdiags([d0 d0 d0 d -4*d d0 d0 d0], [-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4], n,n);
% === Update A ===
```

```
% --- sub-diagonals ---
A(6,2) = 2; A(7,3) = 1; A(8,4) = 1; A(9,5) = 1;
A(10,7) = 2; A(11,8) = 1; A(12,9) = 1;
A(13,11) = 2; A(14,12) = 1;
A(5,4) = 2; A(6,5) = 0; A(9,8) = 2; A(10,9) = 0; A(12,11) = 2;
A(13,12) = 0; A(14,13) = 2; A(15,14) = 4;
% --- super-diagonals ---
A(1,2) = 2; A(5,6) = 0; A(6,7) = 2; A(9,10) = 0;
A(10,11) = 2; A(12,13) = 0; A(13,14) = 2;
A(11,13) = 1; A(12,14) = 1;
A(7,10) = 1; A(8,11) = 1; A(9,12) = 1;
A(2,6) = 1; A(3,7) = 1; A(4,8) = 1; A(5,9) = 1;
% --- solve system ---
u = A\b;
```

Tabellen nedenfor viser de numeriske verdiene fra programmet. De analytiske verdiene er gitt i siste kolonne. Senterverdien  $u_{15}$  har en feil på 0.8%. Koordinatene refererer til figur 7.5.

$u_1 = u(0.1, 0.1)$	0.0128	0.0131
$u_2 = u(0.2, 0.1)$	0.0206	0.0209
$u_3 = u(0.3, 0.1)$	0.0254	0.0256
$u_4 = u(0.4, 0.1)$	0.0280	0.0282
$u_5 = u(0.5, 0.1)$	0.0288	0.0290
$u_6 = u(0.2, 0.2)$	0.0343	0.0346
$u_7 = u(0.3, 0.2)$	0.0430	0.0433
$u_8 = u(0.4, 0.2)$	0.0478	0.0482
$u_9 = u(0.5, 0.2)$	0.0493	0.0497
$u_{10} = u(0.3, 0.3)$	0.0544	0.0548
$u_{11} = u(0.4, 0.3)$	0.0608	0.0613
$u_{12} = u(0.5, 0.3)$	0.0629	0.0634
$u_{13} = u(0.4, 0.4)$	0.0682	0.0687
$u_{14} = u(0.5, 0.4)$	0.0706	0.0712
$u_{15} = u(0.5, 0.5)$	0.0731	0.0737

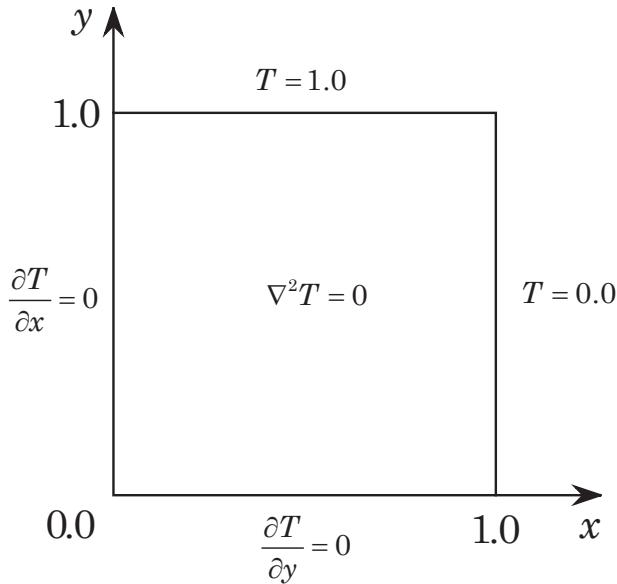
De analytiske verdiene er beregnet fra:

$$u = \zeta \cdot \frac{(1 - \zeta)}{2} - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\cosh(n\pi\bar{y})}{\cosh(\frac{n\pi}{2})} \cdot \sin(n\pi\zeta) \quad (7.2.12)$$

$$\text{der } \bar{x} = \left| x - \frac{1}{2} \right|, \bar{y} = \left| y - \frac{1}{2} \right|, \zeta = \frac{1}{2} - \bar{x}, (x, y) \in [0, 1].$$

Bytt om  $\bar{x}$  og  $\bar{y}$  dersom  $\bar{y} > \bar{x}$

### 7.2.2 DERIVERTE RANDBETINGELSER



Figur 7.8

Istedentfor problemet i figur 7.5 som bare har Dirichlet-betingelser, ser vi nå på problemet i figur 7.8 som har Neumann-betingelser langs  $x = 0$  og  $y = 0$ .

Problemet i figur 7.8 er gitt ved:

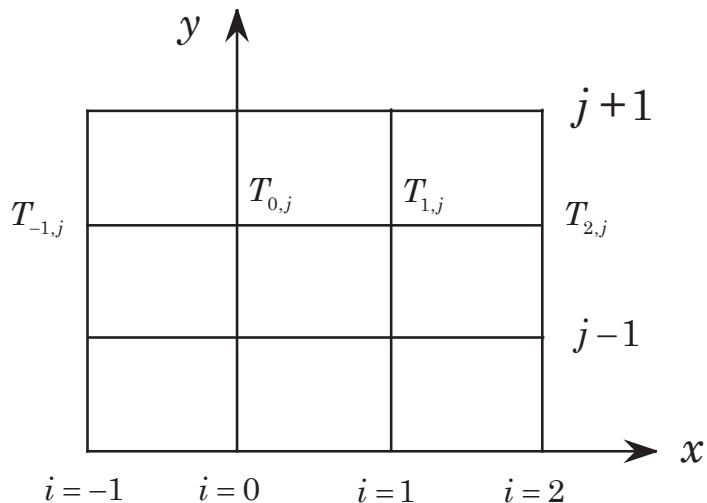
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (7.2.13a)$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \text{ for } x = 0, 0 < y < 1 \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \text{ for } y = 0, 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (7.2.13b)$$

$$\begin{aligned} T &= 1 \text{ for } y = 1, 0 \leq x \leq 1 \\ T &= 0 \text{ for } x = 1, 0 \leq y < 1 \end{aligned}$$

Differanseligningen som skal løses, er som gitt i (7.2.2) med  $\Delta x = \Delta y$ . La oss se nærmere på hvordan de deriverte randbetingelsene kan behandles. Tar for oss  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  for  $x = 0$ . Den andre Neumann-betingelsen behandles på samme måte. Legg merke til at vi har diskontinuiteter i hjørnene  $(1, 0)$  og  $(1, 1)$ . Hjørnet  $(0, 0)$  kan også lage problemer.



Figur 7.9

Ved bruk av sentraldifferanser:

$$\frac{T_{1,j} - T_{-1,j}}{2\Delta x} = 0 \rightarrow T_{-1,j} = T_{1,j} \quad (7.2.14)$$

Ved bruk av foroverdifferanser fra (5.1.5):

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i,i} = \frac{-3T_{i,j} + 4T_{i+1,j} - T_{i+2,j}}{2\Delta x}$$

som for  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  for  $x = 0$  blir:

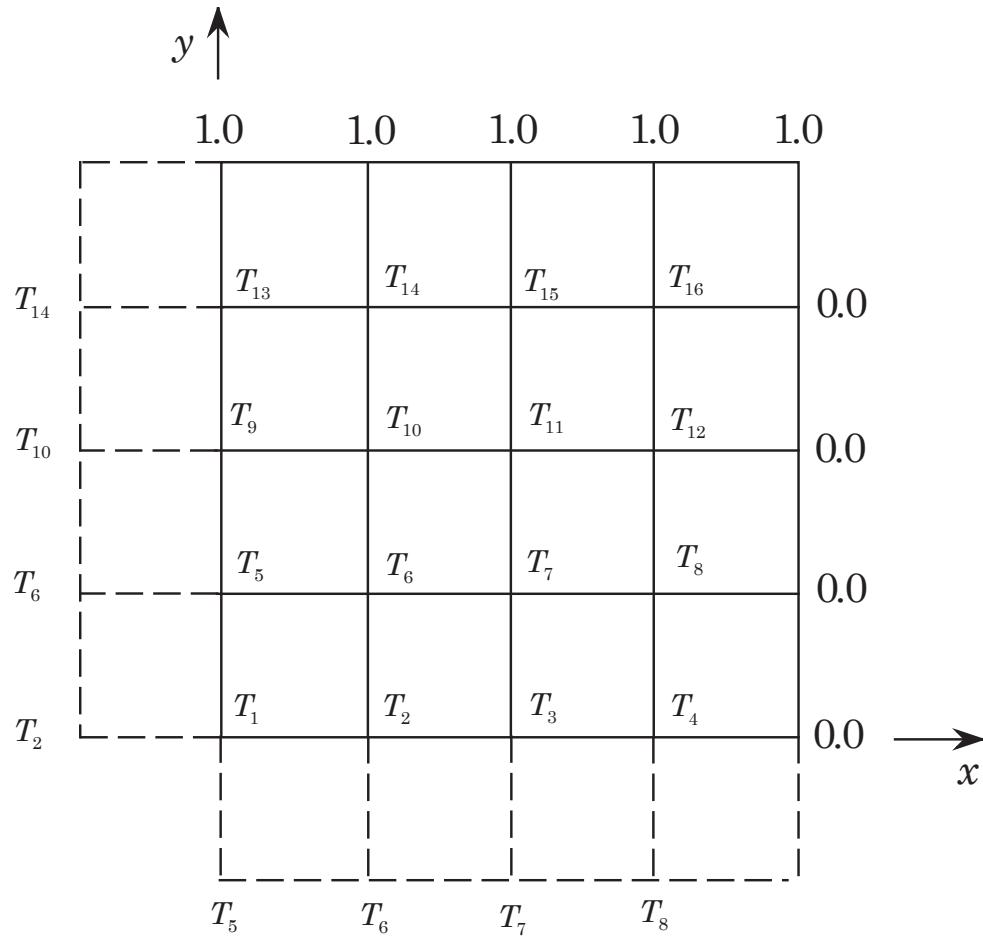
$$T_{0,j} = \frac{4T_{1,j} - T_{2,j}}{3} \quad (7.2.15)$$

For problemet ovenfor, gir (7.2.14) og (7.2.15) temmelig like resultater. (7.2.15) fører til litt kortere program når vi bruker iterasjonsmetodene i avsnitt 7.3.

Vi løser nå problemet i figur 7.8 der vi bruker beregningsmolekylet gitt i (7.2.10). I vårt tilfelle blir (7.2.10):

$$u_a + u_b + u_c + u_d - 4u_m = 0 \quad (7.2.16)$$

Nummereringen er som gitt i figur 7.10 på neste side. Vi har valgt å behandle Neumann-betingelsene ved bruk av (7.2.14) og dette er indikert på figuren ved bruk av de stiplete linjene.



Figur 7.10

Noen eksempler på bruk av (7.2.16) sammen med randbetingelsene i (7.2.13b):

$$2T_2 + 2T_5 - 4T_1 = 0$$

$$T_1 + 2T_6 + T_3 - 4T_2 = 0$$

$$T_2 + 2T_7 + T_4 - 4T_3 = 0$$

$$T_3 + 2T_8 - 4T_4 = 0$$

$$T_9 + 2T_{14} - 4T_3 = -1$$

$$T_{10} + T_{13} + T_{15} - 4T_{14} = -1$$

$$T_{11} + T_{14} + T_{16} - 4T_{15} = -1$$

$$T_{12} + T_{15} - 4T_{16} = -1$$

Det fullstendige systemet er vist i (7.2.17) på neste side.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7.2.17)$$

Programmet **lap2v1** løser systemet:

```
% program lap2v1
clear;
n = 16;
h = 0.25; h2 = h*h;
d0 = zeros(n,1); % diagonal
d = ones(n,1); % diagonal
b = d0; % right hand side
% --- Modify b
for k = 13:16
    b(k) = - 1;
end
% --- generate A-matrix ---
A = spdiags([d d0 d0 d -4*d d d0 d0 d], [-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4], n,n);
% === Update A ===
A(1,2) = 2; A(1,5) = 2; A(2,6) = 2; A(3,7) = 2;
A(4,5) = 0; A(4,8) = 2; A(5,4) = 0; A(5,6) = 2;
A(8,9) = 0; A(9,8) = 0; A(9,10) = 2;
A(12,13) = 0; A(13,12) = 0; A(13,14) = 2;
% --- solve system ---
T = A\b;
```

Vi ser at det trengs endel oppdatering av matrisa, men på grunn av strukturen kan vi gjøre denne oppdateringen automatisk slik at **lap2v1** også kan skrives som vist på neste side.

```
% Program lap2v2
clear;
h = 0.25;
nl = 1/h; % No. of unknowns per line
neq = nl^2; % Total no. of equations
d0 = zeros(neq,1); % diagonal
d = ones(neq,1); % diagonal
b = d0; % right hand side
% --- Modify b
for k = 0: nl -1
    b(neq - k) = - 1;
end
% --- Generate A-matrix ---
for k = -nl:nl
    diagvec(k + nl + 1) = k;
end
A = spdiags([d d0 d0 d -4*d d d0 d0 d], diagvec, neq, neq);
% === Update A ===
for k = 1: nl % superdiagonal no. nl
    A(k, nl + k) = 2;
end
k = 1 ; % superdiagonal no. 1
while k < neq
    A(k, k + 1) = 2.0 ;
```

```

k = k + nl ;
end
% --- super- and subdiagonal no. 1
k = nl ;
while k < neq
    A(k,k+1) = 0.0 ;
    A(k+1,k) = 0.0 ;
    k = k + nl ;
end
% --- solve system ---
T = A\b;

```

Utfra denne versjonen har vi laget en versjon **lap2v3** der skritt lengden varierer etter formelen  $h_n = \frac{h}{2^n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  med  $h = 0.25$ . I programmet begrenser vi oss til  $n = 3$  som gir  $h_3 = 0.03125$ . Utskrift fra beregningen er vist i tabell 7.1.

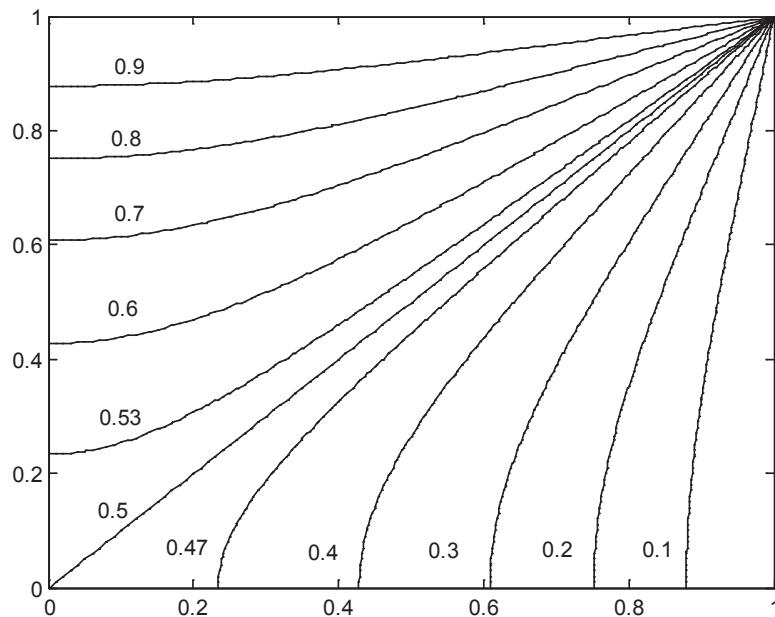
Tabell 7.1: Utskrift fra programmet **lap2v3**

pkt.	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	analytisk
$T_1$	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
$T_2$	0.4669	0.4661	0.4659	0.4658	0.4658
$T_3$	0.3676	0.3650	0.3643	0.3641	0.3641
$T_4$	0.2059	0.2026	0.2017	0.2015	0.2014
$T_5$	0.5331	0.5339	0.5341	0.5342	0.5342
$T_6$	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
$T_7$	0.3989	0.3967	0.3961	0.3959	0.3959
$T_8$	0.2279	0.2240	0.2229	0.2226	0.2226
$T_9$	0.6324	0.6350	0.6357	0.6359	0.6359
$T_{10}$	0.6011	0.6033	0.6039	0.6041	0.6041
$T_{11}$	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
$T_{12}$	0.3070	0.3019	0.3002	0.2997	0.2996
$T_{13}$	0.7941	0.7974	0.7983	0.7985	0.7986
$T_{14}$	0.7721	0.7760	0.7771	0.7774	0.7774
$T_{15}$	0.6930	0.6981	0.6998	0.7003	0.7004
$T_{16}$	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

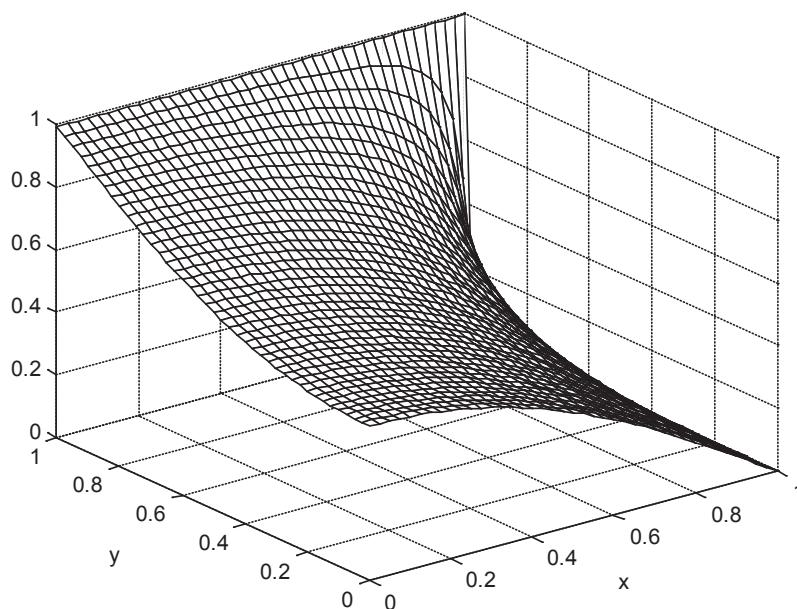
De analytiske verdiene er beregnet fra:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh(\lambda_n y) \cdot \cos(\lambda_n x), \quad (7.2.18)$$

der  $\lambda_n = (2n - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $A_n = 2 \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_n \cosh(\lambda_n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$



Figur 7.11



Figur 7.12

## 7.3 ITERASJONSMETODER

### 7.3.1 EKSEMPLER

I avsnitt 3.7, innførte vi de klassiske iterasjonsmetodene Jacobi, Gauss-Seidel og SOR i forbindelse med løsning av ordinære differensialligninger. Vi skal her se nærmere på noen av disse metodene, hovedsakelig brukt på lineære, elliptiske differensialligninger. Konvergenskriterier er behandlet i avsnitt 7.3.2.

Anta at vi har et system av lineære, algebraiske ligninger  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  som utskrevet for et sett av tre ligninger blir:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Skriver (7.3.1) på følgende måte:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + \frac{1}{a_{11}}[b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)] \\ x_2 &= x_2 + \frac{1}{a_{22}}[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)] \\ x_3 &= x_3 + \frac{1}{a_{33}}[b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)] \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Lager oss en iterasjonsprosess ved å skrive:

$$\begin{aligned} x_1^{m+1} &= x_1^m + \frac{1}{a_{11}}[b_1 - (a_{11}x_1^m + a_{12}x_2^m + a_{13}x_3^m)] \\ x_2^{m+1} &= x_2^m + \frac{1}{a_{22}}[b_2 - (a_{21}x_1^m + a_{22}x_2^m + a_{23}x_3^m)] \\ x_3^{m+1} &= x_3^m + \frac{1}{a_{33}}[b_3 - (a_{31}x_1^m + a_{32}x_2^m + a_{33}x_3^m)] \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

der  $m$  og  $m+1$  er iterasjonsnummer. (7.3.3) kan skrives kompakt for et system av  $n$  ligninger:

$$\begin{aligned} x_i^{m+1} &= x_i^m + \delta x_i \\ \delta x_i &= \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^m \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Iterasjonsprosessen starter ved å velge verdier  $x = x_0$  ved iterasjon  $m = 0$ .

Prosessen i (7.3.4) kalles Jacobis metode. Den kan også utledes direkte fra lign. (3.7.3) i avsnitt 3.7. Vi ser av (7.3.3) at metoden kan forbedres ved å sette inn for  $x_1^{m+1}$  i den andre ligningen og for  $x_1^{m+1}$  og  $x_2^{m+1}$  i den tredje

ligningen, slik at vi får:

$$\begin{aligned} x_1^{m+1} &= x_1^m + \frac{1}{a_{11}}[b_1 - (a_{11}x_1^m + a_{12}x_2^m + a_{13}x_3^m)] \\ x_2^{m+1} &= x_2^m + \frac{1}{a_{22}}[b_2 - (a_{21}x_1^m + a_{22}x_2^m + a_{23}x_3^m)] \\ x_3^{m+1} &= x_3^m + \frac{1}{a_{33}}[b_3 - (a_{31}x_1^m + a_{32}x_2^m + a_{33}x_3^m)] \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Dette er Gauss-Seidels metode. Ved å multiplisere med en faktor  $\omega$ , får vi enda en variant:

$$\begin{aligned} x_1^{m+1} &= x_1^m + \frac{\omega}{a_{11}}[b_1 - (a_{11}x_1^m + a_{12}x_2^m + a_{13}x_3^m)] \\ x_2^{m+1} &= x_2^m + \frac{\omega}{a_{22}}[b_2 - (a_{21}x_1^m + a_{22}x_2^m + a_{23}x_3^m)] \\ x_3^{m+1} &= x_3^m + \frac{\omega}{a_{33}}[b_3 - (a_{31}x_1^m + a_{32}x_2^m + a_{33}x_3^m)] \end{aligned} \quad (7.3.6a)$$

Generelt kan (7.3.6) skrives:

$$\begin{aligned} x_i^{m+1} &= x_i^m + \delta x_i \\ \delta x_i &= \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \left( \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k^{m+1} + \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^m \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (7.3.6b)$$

Faktoren  $\omega$  kalles *relaksasjonsparameteren* eller *relaksasjonsfaktoren*. Metoden i (7.3.6) kalles suksesiv overrelaksasjon når  $\omega > 1$ , vanligvis forkortet til SOR.  $\omega = 1$  gir Gauss-Seidels metode. Det kan vises at  $\omega$  ligger i intervallet  $(0, 2)$  for Laplace - og Poissonligninger, men  $\omega > 1$  er mest effektivt. Vi skal ikke bruke SOR på ligningsystem gitt på formen (7.3.1), men isteden bruke differanseligningene direkte; tilsvarende bruken i avsnitt 3.7.

La oss se på en Poissonligning:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (7.3.7)$$

som diskretisert med  $\Delta x = \Delta y = h$  gir følgende differanseligning:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 \cdot f_{i,j} \quad (7.3.8a)$$

Som vanlig:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_{max} \\ y_j &= y_0 + j \cdot h, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_{max} \end{aligned} \quad (7.3.8b)$$

(Se avsnitt 7.2)

Dersom vi bruker (7.3.6) på (7.3.8) får vi:

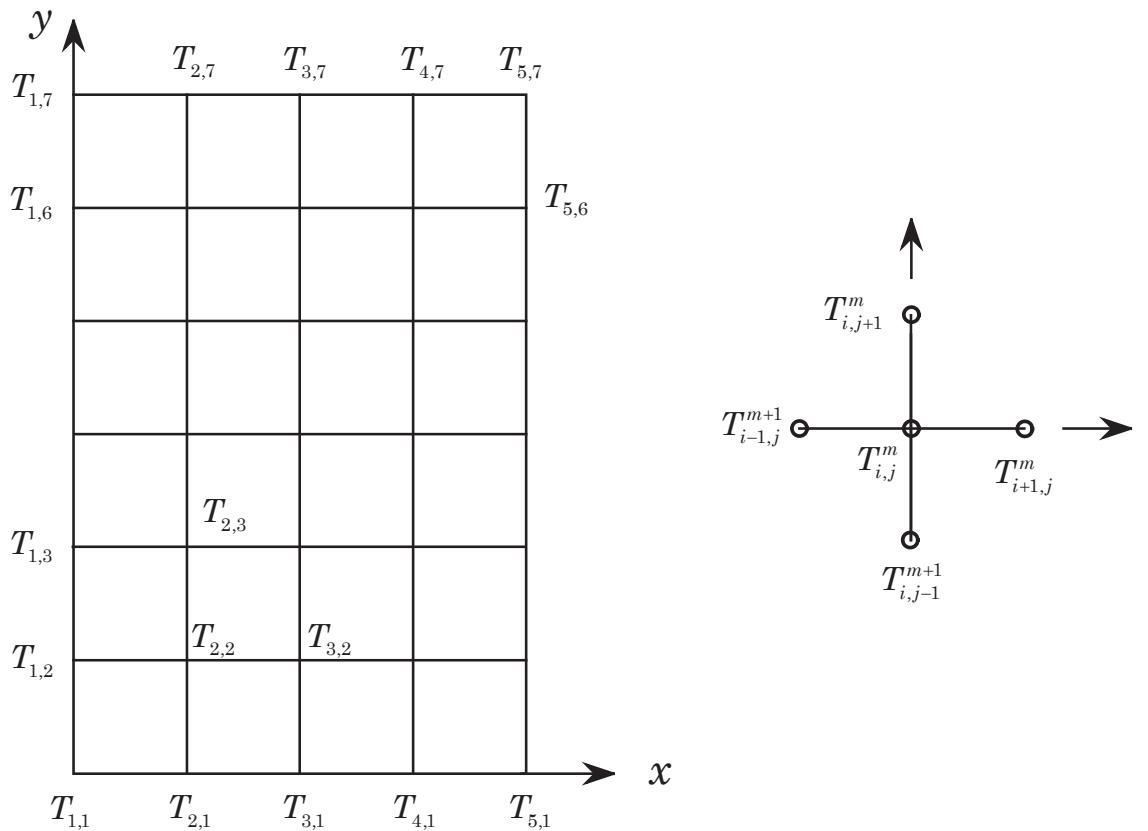
$$\begin{aligned} u_{i,j}^{m+1} &= u_{i,j}^m + \delta u_{i,j} \\ \delta u_{i,j} &= \frac{\omega}{4} \left[ u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i+1,j}^m + u_{i,j+1}^m - 4u_{i,j}^m - h^2 \cdot f_{i,j} \right] \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Kan også skrive:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{m+1} &= u_{i,j}^m + \frac{\omega}{4} R_{i,j} \\ R_{i,j} &= \left[ u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i+1,j}^m + u_{i,j+1}^m - 4u_{i,j}^m - h^2 \cdot f_{i,j} \right] \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

$R_{i,j}$  kalles residuet (avviket) i punkt  $(i, j)$ .

Løser nå eksemplet i figur 7.4, avsnitt 7.2, med bruk av (7.3.9).



Figur 7.13

Figur 7.13 viser figur 7.4 med ny indeksering. Vi tar ikke hensyn til symmetrien.  $i$ -indeks henviser til  $x$ -retningen,  $j$ -indeks til  $y$ -retningen.

Randverdier:

$$\begin{aligned}
 & \text{Langs } x = 0 : T_{1,j} = 0.0, j = 1, 2, \dots, 6 \\
 & \text{Langs } x = 1 : T_{5,j} = 0.0, j = 1, 2, \dots, 6 \\
 & \text{Langs } y = 0 : T_{i,1} = 0.0, i = 2, 3, \dots, 4 \\
 & \text{Langs } y = 1.5 : T_{i,7} = 100, i = 1, 2, \dots, 5
 \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

Velger startverdier lik 0 for de andre temperaturene. Bruker  $\omega = 1.5$  og utfører 20 iterasjoner som vist i programmet **lapsor1v1** nedenfor.  $h = 0.25$ .

```
% program lapsor1v1
clear
nx = 4 ; % parts in x-direction
ny = 6; % parts in y-direction
imax = nx + 1; % points in x-direction
jmax = ny + 1; % points in y-direction
T = zeros(imax,jmax); % temperatures
T(1:imax,jmax) = 100; % boundary values
omega = 1.5; % relaxation factor
% --- Start iteration ---
for it = 1: 20
    for i = 2: imax-1
        for j = 2: jmax-1
            resid = (T(i-1,j)+T(i,j-1) + T(i+1,j) + T(i,j+1) - 4*T(i,j));
            dT = 0.25*omega*resid;
            T(i,j) = T(i,j) + dT;
        end
    end
end
```

Utskrift av T-matrise:

0	0	0	0	0	0	100.0000
0	1.5784	4.0918	9.0575	19.6196	43.1933	100.0000
0	2.2220	5.7310	12.5185	26.2279	53.1537	100.0000
0	1.5784	4.0917	9.0575	19.6197	43.1933	100.0000
0	0	0	0	0	0	100.0000

Resultatet stemmer godt overens med verdiene gitt i avsnitt 7.2. I dette programmet har vi valgt vilkårlig  $\omega = 1.5$  og antall iterasjoner lik 20. Vi ønsker selvfølgelig et program med en selvstoppende iterasjonsprosess. Dessuten er det ønskelig med en  $\omega$ -verdi som gir færrest mulig iterasjoner for en gitt nøyaktighet.

### Stoppkriterier

Eksempelvis kan vi bruke  $\max(\delta T_{i,j}) < \varepsilon_a$  eller  $\max\left(\frac{\delta T_{i,j}}{T_{i,j}}\right) < \varepsilon_r$ .

Eventuelt kan vi bruke residuet isteden. Andre alternativ:

$$\frac{1}{N} \sum_i \sum_j |\delta T_{i,j}| < tol_a, \quad \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \left| \frac{\delta T_{i,j}}{T_{i,j}} \right| < tol_r, \quad |T_{i,j}| \neq 0 \tag{7.3.12}$$

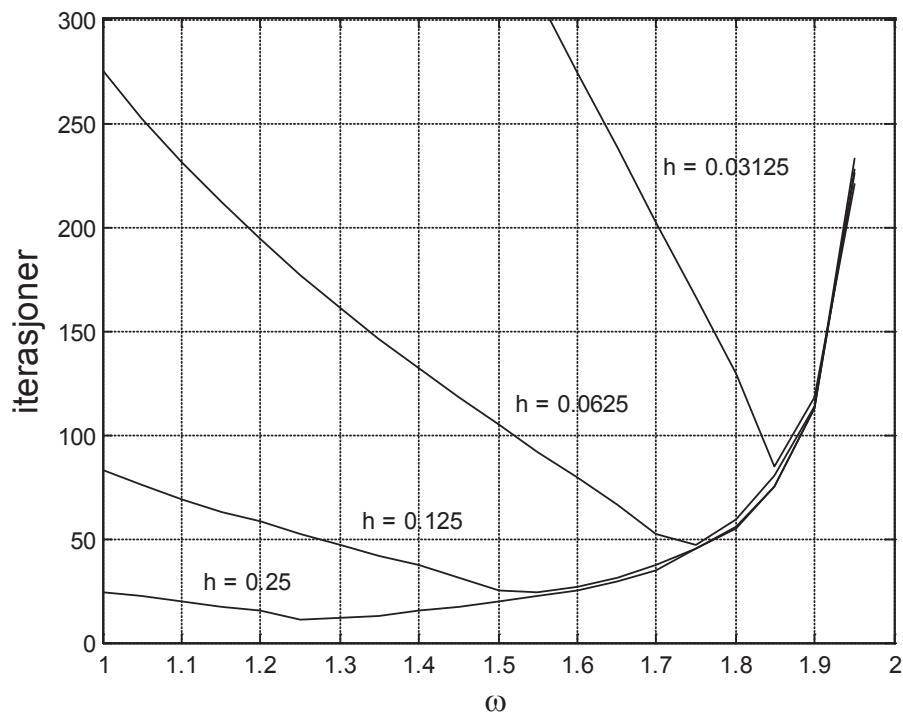
$N$  er antall beregningspunkt. I (7.3.12) kan residuet brukes istedet for  $\delta T_{i,j}$ . I den første uttrykket bruker vi en absolutt toleranse, mens vi bruker en relativ

toleranse i det siste. Velger å bruke følgende alternativ til (7.3.12):

$$\frac{\sum_i \sum_j |\delta T_{i,j}|}{\sum_i \sum_j |T_{i,j}|} < tol_r, \quad \frac{\max(|\delta T_{i,j}|)}{\max(|T_{i,j}|)} < tol_r \quad (7.3.13)$$

(7.3.13) gir en slags midlere relativ feiltest. Vi summerer over alle beregningspunktene i disse formlene. Fra figur 3.10 i avsnitt 3.7, ser vi at antall iterasjoner er en funksjon både av  $\omega$  og  $h$ , der vi bruker  $\Delta x = \Delta y = h$ . Lager derfor et program der vi kan variere skritt lengden  $h$ . I programmet **lapsor1v2** på neste side, kan vi forandre  $h$  i trinn med  $h_n = \frac{h}{2^n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Bruker  $\frac{\sum_i \sum_j |\delta T_{i,j}|}{\sum_i \sum_j |T_{i,j}|} < tol_r$ , som stoppkriterium.

Figur 7.14 viser antall iterasjoner som funksjon av  $\omega$  og  $h$  med  $tol_r = 10^{-5}$



Figur 7.14

```
% program lapsor1v2
clear
n = 0;
fac = 2^(n+1);
imax = 2*fac + 1; % points in x-direction
jmax = 3*fac + 1; % points in y-direction
T = zeros(imax,jmax); % temperatures

T(1:imax,jmax) = 100; % boundary values
reltol = 1.0e-5; % relative iteration error
omega = 1.95; % relaxation factor
relres = 1.0; it = 0;
% --- Start iteration ---
while relres > reltol
    it = it + 1;
    Tsum = 0.0; dTsum = 0.0;
    for i = 2: imax-1
        for j = 2: jmax-1
            resid = T(i-1,j) + T(i,j-1) + T(i+1,j) + T(i,j+1)-4*T(i,j);
            dT = 0.25*omega*resid;
            dTsum = dTsum + abs(dT);
            T(i,j) = T(i,j) + dT;
            Tsum = Tsum + abs(T(i,j));
        end
    end
    relres = dTsum/Tsum;
end
```

Dersom vi isteden bruker  $\frac{\max(|\delta T_{i,j}|)}{\max(|T_{i,j}|)} < tol_r$  som stoppkriterium, vil iterasjonløkka bli:

```
while relres > reltol
    it = it + 1;
    Tmax = 0.0; dTmax = 0.0;
    for i = 2: imax-1
        for j = 2: jmax-1
            resid = T(i-1,j) + T(i,j-1) + T(i+1,j) + T(i,j+1)-4*T(i,j);
            dT = 0.25*omega*resid;
            dTmax = max(dTmax, abs(dT));
            T(i,j) = T(i,j) + dT;
            Tmax = max(Tmax, abs(T(i,j)));
        end
    end
    relres = dTmax/Tmax;
end
```

Resultatet blir stort sett det samme for dette tilfellet.

### Optimal relaksasjonsparameter

Med optimal menes her den verdien som gir færrest mulig iterasjoner når  $\omega$  holdes konstant under hele beregningen. For Laplace- og Poisson-ligninger på rektangulære områder er det mulig å beregne en slik optimal  $\omega$  som vi vil kalle den teoretisk optimale.

La  $L_x$  og  $L_y$  være utstrekningen av rektanglet i henholdsvis  $x$ - og  $y$ -retning. Med den samme skritt lengden  $h$  i begge retningene, setter vi:

$$n_x = \frac{L_x}{h}, \quad n_y = \frac{L_y}{h} \quad \text{der } n_x \text{ og } n_y \text{ blir antall deler i henholdsvis } x \text{- og } y \text{-retning.}$$

$n_x$  og  $n_y$  skal være heltall. Den teoretisk optimale  $\omega$  er da gitt ved:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}[\cos(\pi/n_x) + \cos(\pi/n_y)] \\ \omega &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}\end{aligned}\tag{7.3.14}$$

Dersom skritt lengden  $h$  er forskjellig i  $x$ - og  $y$ -retning med  $h = h_x$  i  $x$ -retning og  $h = h_y$  i  $y$ -retning, får vi isteden for (7.3.14):

$$\rho = \frac{\cos(\pi/n_x) + (h_x/h_y)^2 \cdot \cos(\pi/n_y)}{1 + (h_x/h_y)^2}\tag{7.3.15}$$

Dersom området ikke er rektangulært, kan vi bruke Garabedians estimat:

$$\omega = \frac{2}{1 + 3.014 \cdot h/\sqrt{A}}, \quad A \text{ er arealet av området}\tag{7.3.16}$$

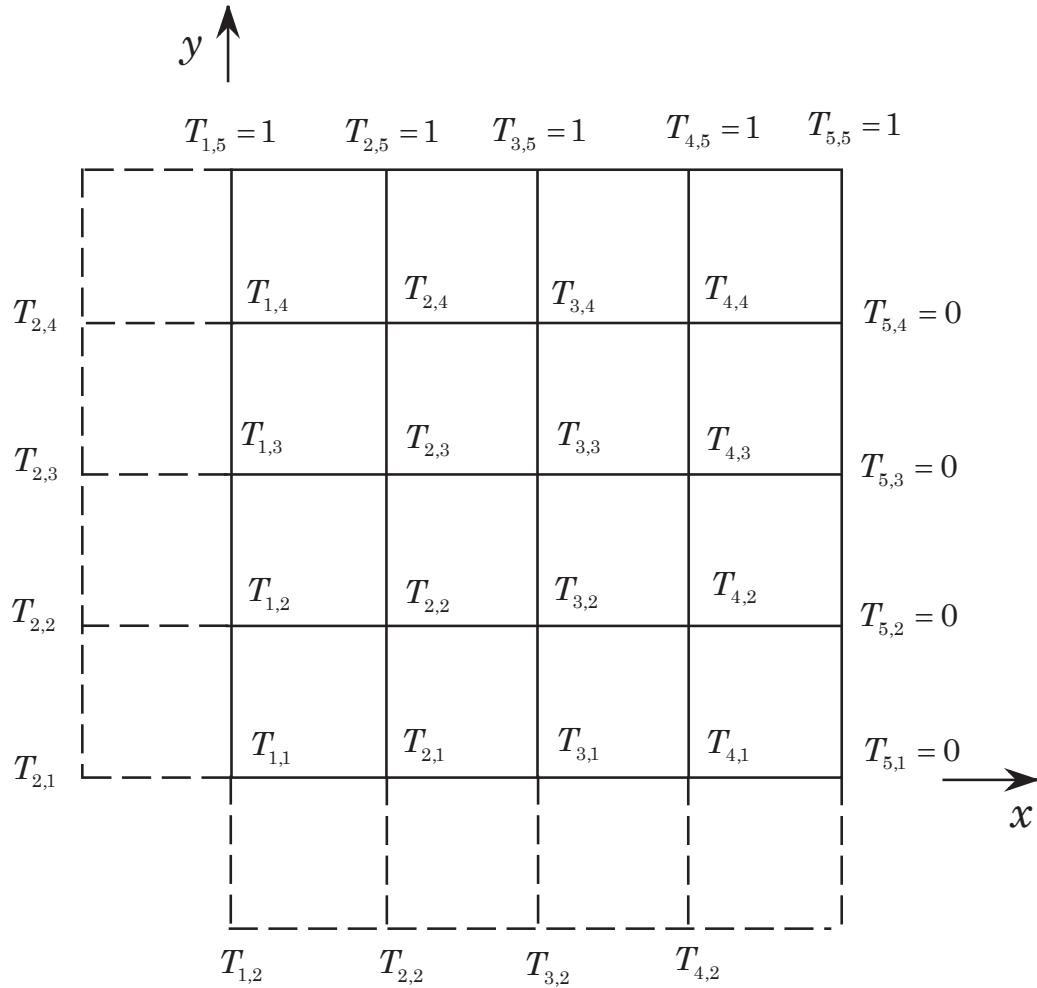
La oss regne ut  $\omega$  fra disse formlene for eksemplet der  $L_x = 1$ ,  $L_y = 1.5$  og  $A = L_x \cdot L_y = 1.5$ .

$h$	(7.3.14)	(7.3.16)
0.25	1.24	1.24
0.125	1.51	1.53
0.0625	1.72	1.74
0.03125	1.85	1.86

Vi ser at Garabedians estimat stemmer godt overens med de teoretisk eksakte verdiene i dette tilfellet. Figur 7.14 stemmer også godt overens med verdiene i denne tabellen.

### Bruk av SOR på eksemplet i 7.2.2

Vi løser nå temperaturproblemet i figur 7.8. Nummereringen blir som vist nedenfor i figur 7.15.



Figur 7.15

Vi bruker også her falske punkt som indikert med de stiplede linjene. For  $T_{1,1}$  får vi spesielt:

$$T_{1,1} = \frac{1}{4}(T_{1,2} + T_{2,1} + T_{2,2} + T_{1,1}) = \frac{1}{2}(T_{1,2} + T_{2,1}) \quad (7.3.17)$$

Beregningen startes ved iterere langs  $y = 0$  med start i  $T_{2,1}$ . Deretter itereres langs  $x = 0$  med start i  $T_{1,2}$ . Etterpå itereres i en dobbel løkke over de indre punktene. Tilslutt beregnes  $T_{1,1}$  fra (7.3.17). Beregningen er vist i programmet **lapsor2** på neste side. Vi har brukt stoppkriteriet  $\frac{\sum_i \sum_j |\delta T_{i,j}|}{\sum_i \sum_j |T_{i,j}|} < tol_r$  samt

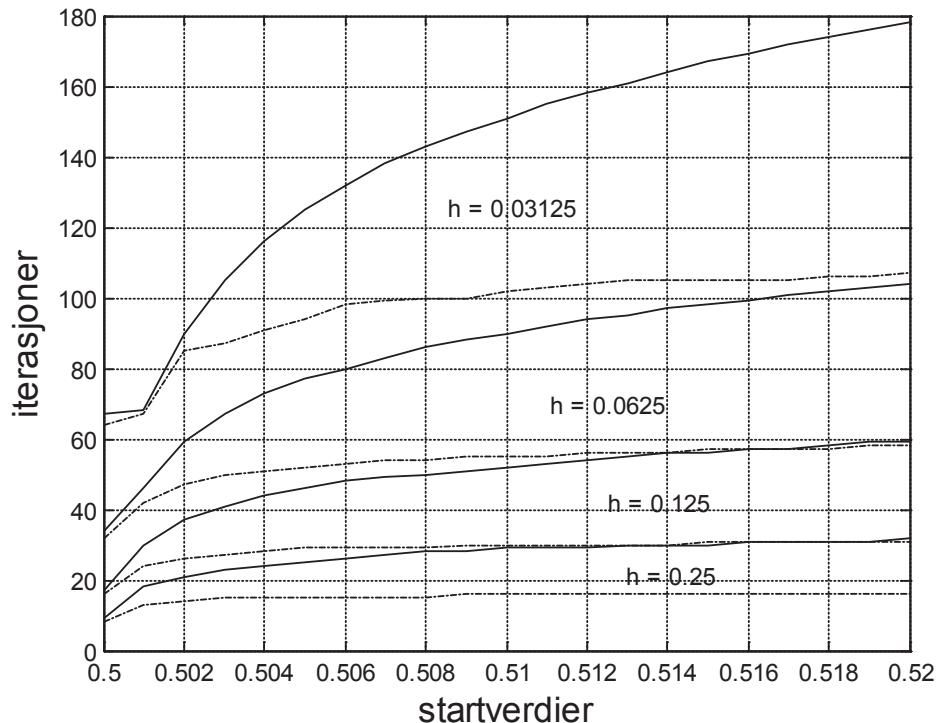
optimal  $\omega$  fra (7.3.14) og tipper  $T = 0.5$  som startverdier for hele feltet unntatt for de gitte randbetingelsene. Nøyaktigheten er som i utskriften for **lap2v3** i avsnitt 7.2.2.

```
% program lapsor2
clear
net = 1;
h = 0.25;
hn = h/2^(net -1);
nx = 1/hn; ny = nx;
imax = nx + 1; % points in x-direction
jmax = ny + 1; % points in y-direction
T = 0.5*ones(imax,jmax); % temperatures
% --- Compute optimal omega ---
ro = cos(pi/nx);
omega = 2/(1 + sqrt(1 - ro^2));
T(1:imax,jmax) = 1; % boundary values along y = 1
T(imax,1:jmax-1) = 0;% boundary values along x = 1
reltol = 1.0e-5; % relative iteration error
relres = 1.0; it = 0;
% --- Start iteration ---
while relres > reltol
    it = it + 1;
    Tsum = 0.0; dTsum = 0.0;
    % --- boundary values along y = 0 ---
    for i = 2: imax - 1
        resid = 2*T(i,2) + T(i-1,1) + T(i+1,1) - 4*T(i,1);
        dT = 0.25*omega*resid;
        dTsum = dTsum + abs(dT);
        T(i,1) = T(i,1) + dT;
        Tsum = Tsum + abs(T(i,1));
    end
    % --- boundary values along x = 0 ---
    for j = 2: jmax - 1
        resid = 2*T(2,j) + T(1,j-1) + T(1,j+1) - 4*T(1,j);
        dT = 0.25*omega*resid;
        dTsum = dTsum + abs(dT);
        T(1,j) = T(1,j) + dT;
        Tsum = Tsum + abs(T(1,j));
    end
    for i = 2: imax-1
        for j = 2: jmax-1
            resid = T(i-1,j) + T(i,j-1) + T(i+1,j) + T(i,j+1)-4*T(i,j);
            dT = 0.25*omega*resid;
            dTsum = dTsum + abs(dT);
            T(i,j) = T(i,j) + dT;
            Tsum = Tsum + abs(T(i,j));
        end
    end
    T(1,1) = 0.5*(T(2,1) + T(1,2));
    relres = dTsum/Tsum;
end
```

### Startverdier og randbetingelser

Vi venter å få raskere konvergens dersom vi tipper startverdier som ligger nær den korrekte løsningen. Dette er typisk for ikke-lineære ligninger, mens vi står mer fritt til å tippe startverdier når vi løser lineære ligninger uten at det går utover konvergenschastigheten. For temperaturproblemet i figur 7.4 for eksempel, er det lite forskjell i antall iterasjoner om vi starter iterasjonen med å tippe  $T = 0$  i hele feltet eller om vi starter med  $T = 100$ . Den optimale  $\omega$  for dette tilfellet er også uavhengig av startverdiene.

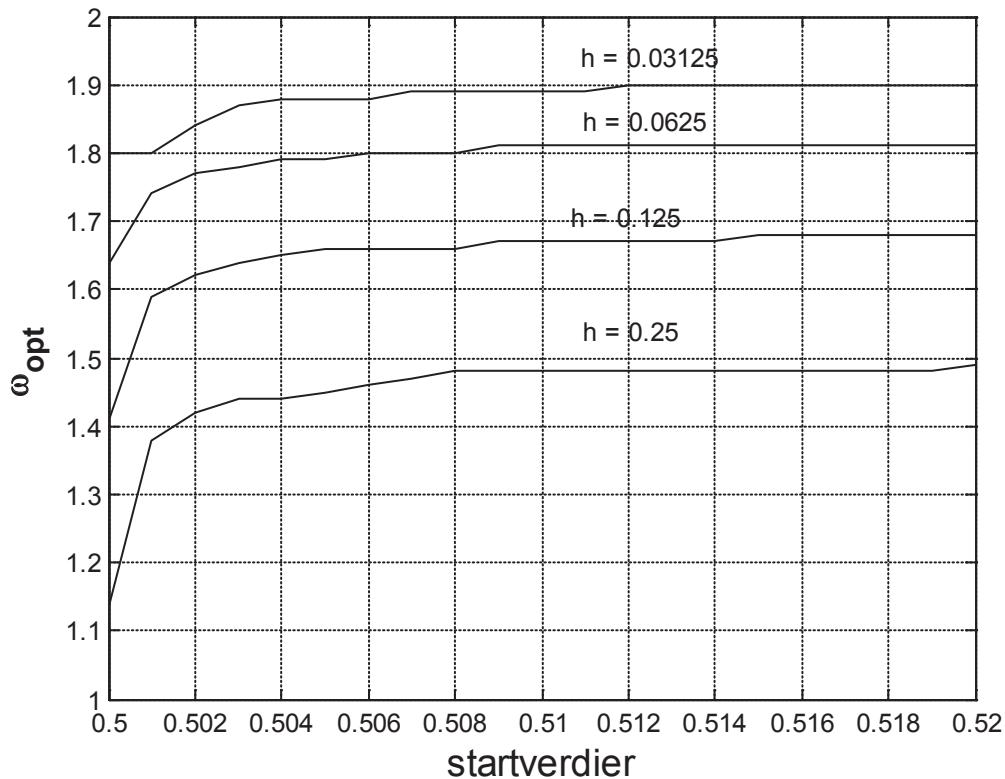
Situasjonen er helt forskjellig for tilfellet i figur 7.8. Vi løser også her en lineær ligning, men har mer kompliserte randbetingelser der vi foreskriver temperaturen langs to render (Dirichlet-betingelser) og den deriverte av temperaturen langs de to andre rendene (Neumann-betingelser). Dessuten er temperaturen diskontinuerlig i hjørnet  $x = 1, y = 1$ . I hjørnet  $x = 0, y = 0$  er den korrekte løsningen  $T = 0.5$  fra den analytiske løsningen. Dersom vi tipper  $T = 0.5$  som startverdier i hele feltet, får vi rask konvergens med optimal  $\omega$  lik den teoretiske fra (7.3.14). Dersom vi avviker litt fra  $T = 0.5$  som startverdi, er ikke lengre den optimale  $\omega$  lik den teoretisk optimale. Situasjonen blir som vist i figur 7.16 nedenfor.



Figur 7.16

De stiplete linjene på figuren er for den optimale  $\omega$  som her skiller seg fra den teoretisk optimale. Vi ser at selv om vi velger den optimale  $\omega$ , vil antall iterasjoner være avhengige av startverdiene. Figur 7.17 nedenfor viser den

optimale  $\omega$  som funksjon av startverdier. Vi ser at allerede når startverdien er lik 0.51, er  $\omega$  blitt konstant.

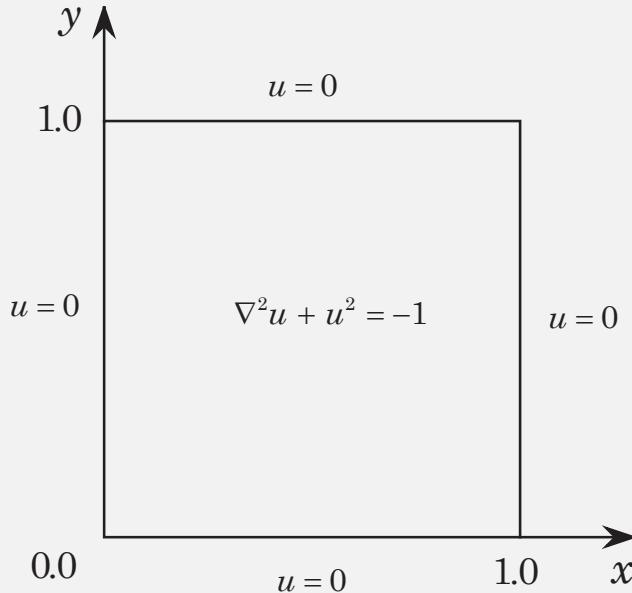


Figur 7.17

Tabellen nedenfor viser den teoretisk optimale  $\omega$  etter formel (7.3.14) og (7.3.16)

$h$	(7.3.14)	(7.3.16)
0.25	1.17	1.14
0.125	1.45	1.45
0.0625	1.67	1.68
0.03125	1.82	1.83

Vi ser at tabell-verdiene stemmer godt med verdiene i figur 7.17 når startverdien for iterasjonsprosessen er 0.5.

**Eksempel 7.2** Eksempel på en ikke-lineær ligning

Figur 7.18

Vi ønsker å løse en ikke-lineær Poisson-ligning på kvadratet i figur 7.18:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = -1 \quad (7.3.18)$$

der  $u = u(x, y)$  og  $u = 0$  på rendene.

Denne ligningen er bare svakt ikke-lineær, kalt semi-lineær i avsnitt 4.3, men den illustrerer fremgangsmåten.

Vi diskretiserer på vanlig måte med skritt lengde  $h$  i begge retningene:

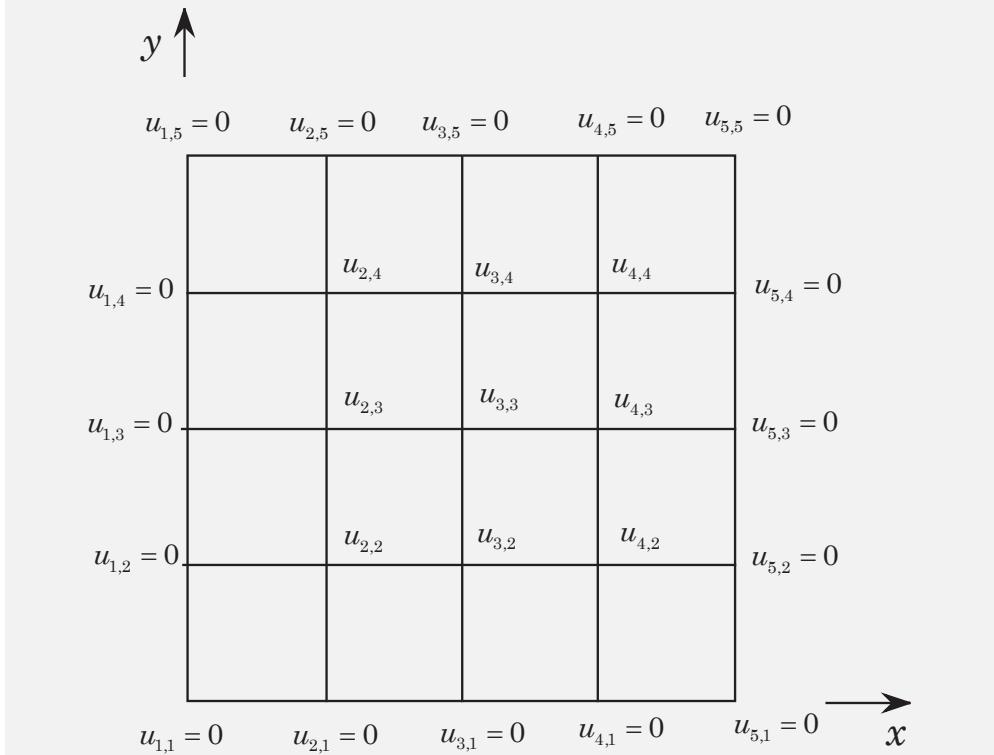
$$\begin{aligned} \nabla^2 u_{i,j} + u_{i,j}^2 + 1 &= 0 \rightarrow \\ \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}] + u_{i,j}^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

eller:

$$f_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + h^2(u_{i,j}^2 + 1) = 0 \quad (7.3.19)$$

Her er  $x_i = h \cdot (i - 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  og  $y_j = h \cdot (j - 1)$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Nummereringen er vist i figur 7.19 for tilfellet  $h = 0.25$ .



Figur 7.19

Som vi gjorde i avsnitt 3.7, løser vi (7.3.19) med Newtons metode ved å se på den lokalt som en funksjon der vi forandrer en variabel etter tur.

I dette tilfellet blir iterasjonsprosessen:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{m+1} &= u_{i,j}^m + \delta u_{i,j} \\ \delta u_{i,j} &= -\omega \frac{\frac{\partial f(u_{k,l})}{\partial f(u_{k,l})}}{\frac{\partial f(u_{k,l})}{\partial u_{i,j}}} \end{aligned} \quad (7.3.20a)$$

Her blir:

$$\begin{aligned} u_{k,l} &= u_{k,l}^{m+1} \text{ for } k < i, l < j \\ u_{k,l} &= u_{k,l}^m \text{ ellers} \end{aligned} \quad (7.3.20b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_{i,j}} = -4 + 2h^2 \cdot u_{i,j} \text{ og } \delta u_{i,j} = \omega \frac{f}{4 - 2h^2 u_{i,j}} \quad (7.3.20c)$$

Programmet **npoisor** på neste side bruker (7.3.19) og (7.3.20)

```
% program npoisor
% We may select different nets
% by specifying the parameter net.
%
```

```
% net = 1 -> h = 0.25, net = 2 -> h = 0.25/2
% giving hn = h/2^(net -1)
clear
net = 2;
h = 0.25;
hn = h/2^(net -1);
nx = 1/hn; ny = nx;
hn2 = hn*hn;
imax = nx + 1; % points in x-direction
jmax = ny + 1; % points in y-direction
% --- Initial values including the boundaries ---
u = zeros(imax,jmax);
%
% --- Compute optimal omega ---
ro = cos(pi/nx);
omega = 2/(1 + sqrt(1 - ro^2));
reltol = 1.0e-5; % relative iteration error
relres = 1.0; it = 0;
% --- Start iteration ---
while relres > reltol
    it = it + 1;
    usum = 0.0; dusum = 0.0;
    for i = 2: imax-1
        for j = 2: jmax-1
            fac1 = 4 - 2*hn2*u(i,j) ;
            fac2 = hn2*(u(i,j)^2 + 1);
            resid = u(i-1,j)+u(i,j-1)+u(i+1,j)+u(i,j+1)-
                4*u(i,j)+fac2
            du = omega*resid/fac1;
            dusum = dusum + abs(du);
            u(i,j) = u(i,j) + du;
            usum = usum + abs(u(i,j));
        end
    end
    relres = dusum/usum;
end
u

u =
0         0         0         0         0         0         0         0
0  0.0178  0.0278  0.0330  0.0346  0.0330  0.0278  0.0178  0
0  0.0278  0.0448  0.0539  0.0568  0.0539  0.0448  0.0278  0
0  0.0330  0.0539  0.0654  0.0691  0.0654  0.0539  0.0330  0
0  0.0346  0.0568  0.0691  0.0730  0.0691  0.0568  0.0346  0
0  0.0330  0.0539  0.0654  0.0691  0.0654  0.0539  0.0330  0
0  0.0278  0.0448  0.0539  0.0568  0.0539  0.0448  0.0278  0
0  0.0178  0.0278  0.0330  0.0346  0.0330  0.0278  0.0178  0
0         0         0         0         0         0         0         0
```

Utskriften ovenfor er for  $h = 0.125$  og vi har brukt stoppkriteriet  $\frac{\sum_i \sum_j |\delta T_{i,j}|}{\sum_i \sum_j |T_{i,j}|} < tol_r$  med  $tol_r = 10^{-5}$ . Startverdien  $u = 0$  for hele feltet er naturlig i dette tilfellet. Vi har brukt (7.3.14) til å beregne den optimale  $\omega$ . Tabellen nedenfor viser også den virkelig optimale  $\omega$  for startverdien  $u = 0$ .

$h$	(7.3.14)	Virkelig
0.25	1.17	1.19
0.125	1.45	1.46
0.0625	1.67	1.69
0.03125	1.82	1.83

I dette tilfellet får vi god overenstemmelse selv om ligningen er svakt ikke-lineær.

### 7.3.2 KONVERGENSKRITERIER

Vi går tilbake til et lineært ligningsystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  som for et tilfelle med 4 ukjente blir:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

Innfører følgende matriser:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, -\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, -\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3.21)$$

$\mathbf{D}$  er en diagonalmatrise og  $\mathbf{L}$  og  $\mathbf{U}$  er henholdsvis en nedre og en øvre trekantmatrise. Koeffisientmatrisa  $\mathbf{A}$  kan da skrives:  $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$  slik at ligningsystemet blir:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (7.3.22)$$

Med bruk av notasjonen i (7.3.22), kan Jacobis iterasjonsmetode i (7.3.3) skrives:

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{m+1} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^m + \mathbf{b}$$

som gir:

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^m + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \quad (7.3.23)$$

Setter:

$$\mathbf{G}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad (7.3.24)$$

$\mathbf{G}_J$  kalles iterasjonsmatrisa for Jacobis metode. Når ligningene er skrevet på matriseform, gjelder de selvfølgelig for et vilkårlig antall ukjente.

Tilsvarende for Gauss-Seidels metode i (7.3.5):

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{m+1} + \mathbf{U}\mathbf{x}^m + \mathbf{b}$$

som gir:

$$\mathbf{x}^{m+1} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^m + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \quad (7.3.25)$$

Setter:

$$\mathbf{G}_{GS} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} \quad (7.3.26)$$

$\mathbf{G}_{GS}$  kalles iterasjonsmatrisa for Gauss-Seidels metode.

For SOR- metoden i (7.3.6):

$$(\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}) \mathbf{x}^{m+1} = [(1 - \omega) \mathbf{I} + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}] \mathbf{x}^m + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$$

som gir:

$$\mathbf{x}^{m+1} = (\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{I} + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}] \mathbf{x}^m + (\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L})^{-1} \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b} \quad (7.3.27)$$

Setter

$$\mathbf{G}_{SOR} = (\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{I} + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}] \quad (7.3.28)$$

$\mathbf{G}_{SOR}$  kalles iterasjonsmatrisa for SOR-metoden.

Gauss-Seidel fås som et spesialtilfelle ved å sette  $\omega = 1$ .

Vi har delvis fulgt fremstillingen som er gitt i Smith [6], side 266.

Vi ser at alle tre metodene kan skrives:

$$\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{G} \mathbf{x}^m + \mathbf{c} \quad (7.3.29)$$

$\mathbf{G}$  står her for  $\mathbf{G}_J$ ,  $\mathbf{G}_{GS}$  og  $\mathbf{G}_{SOR}$

Ved konvergens blir  $\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{x}^m = \mathbf{x}$  slik at det eksakte systemet kan skrives:

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (7.3.30)$$

Vi kaller feil-vektoren i den  $m$ 'te iterasjonen for  $\mathbf{e}^m$  slik at

$$\mathbf{e}^m = \mathbf{x} - \mathbf{x}^m \quad (7.3.31)$$

Ved å trekke (7.3.29) fra (7.3.30) får vi:

$$\mathbf{e}^{m+1} = \mathbf{G} \mathbf{e}^m \quad (7.3.32)$$

Derav følger:

$$\mathbf{e}^m = \mathbf{G} \mathbf{e}^{m-1} = \mathbf{G}^2 \mathbf{e}^{m-2} = \mathbf{G}^3 \mathbf{e}^{m-3} = \dots = \mathbf{G}^m \mathbf{e}^0 \quad (7.3.33)$$

der  $\mathbf{e}^m$  er feilvektoren i den første iterasjonen, altså forskjellen mellom startverdiene og de rette verdiene.

Dersom prosessen i (7.3.32) og (7.3.33) skal konvergere for vilkårlige startverdier  $\mathbf{x}^0$ , må følgende betingelse være oppfylt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{G}^m = 0 \quad (7.3.34)$$

En nødvendig og tilstrekkelig betingelse for å oppfylle (7.3.34), er at tallverdien for den største egenverdien i  $\mathbf{G}$  er mindre enn 1.

Dette skrives:

$$\rho = |\lambda_{max}| < 1 \quad (7.3.35)$$

Absoluttverdien av den største egenverdien av en matrise  $\mathbf{A}$  kalles spektralradien og betegnes ofte med  $\rho$ . Skrives gjerne  $\rho(\mathbf{A})$  når det er nødvendig å henvise til den underliggende matrisa. (Se A.5).

I Smith [6] er både nødvendigheten og tilstrekkeligheten vist under forutsetningen av at alle egenvektorene av  $\mathbf{G}$  er uavhengige. Et generelt bevis er mer kronglete og kan finnes i mer avansert litteratur, f.eks Hageman & Young [15].

Følger derfor Smith og antar at iterasjonsmatrisa  $\mathbf{G}$  har dimensjon  $n \times n$  og har  $n$  uavhengige egenvektorer  $\mathbf{v}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Feilvektoren  $\mathbf{e}^0$  i den første iterasjonen kan da uttrykkes i egenvektor-rommet ved:

$$\mathbf{e}^0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k$$

der  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  er skalarer

Nå får vi:

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{Ge}^0 = c_1 \mathbf{Gv}_1 + c_2 \mathbf{Gv}_2 + \dots + c_n \mathbf{Gv}_n = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{Gv}_k \quad (7.3.36)$$

La  $\lambda_k$  være den  $k$ 'te egenverdien slik at med  $\mathbf{v}_k$  som den  $k$ 'te egenvektoren, får vi  $\mathbf{Gv}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$  som innsatt i (7.3.36) gir:

$$\mathbf{e}^1 = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k \mathbf{v}_k$$

Dette er for den første iterasjonen.

For den  $m$ 'te iterasjonen:

$$\mathbf{e}^m = \sum_{k=1}^n c_k (\lambda_k)^m \mathbf{v}_k \quad (7.3.37)$$

(7.3.37) gir da følgende:

*Nødvendig betingelse*

Dersom  $\lim_{m \rightarrow 0} \mathbf{e}^m = 0$  skal gjelde for vilkårlige startvektorer  $\mathbf{x}^0$  og da også for vilkårlige feilvektorer  $\mathbf{e}^0$ , må  $|\lambda_k| < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

*Tilstrekkelig betingelse*

Dersom  $|\lambda_k| < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , følger umiddelbart at  $\mathbf{e}^m \rightarrow 0$  for en vilkårlig  $\mathbf{e}^0$ .

Dette betyr at de klassiske iterasjonsmetodene konvergerer hvis og bare hvis spektralradien for iterasjonsmatrisa er mindre enn 1.

Vi kan også bruke (7.3.37) til å si noe om konvergenshastigheten. Til det trenger vi vektor- og matrisenormer. Henviser her til A.5. La oss se på et egenverdiproblem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ . Med bruk av lign. (A.5.8)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Ax}\| &= |\lambda||\mathbf{x}| \\ \|\mathbf{Ax}\| &\leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

som gir:

$$|\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

eller:

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\| \quad (7.3.38)$$

Merk at  $\lambda$  står for alle egenverdiene slik at spesielt  $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$

Fra (7.3.32):

$$\mathbf{e}^{m+1} = \mathbf{Ge}^m \rightarrow \|\mathbf{e}^{m+1}\| = \|\mathbf{G}\| \cdot \|\mathbf{e}^m\|$$

Anta nå at etter at vi har utført  $m$  iterasjoner, gjør  $k$  ekstra:

$$\|\mathbf{e}^{m+k}\| = \|\mathbf{G}^k\| \cdot \|\mathbf{e}^m\| \quad (7.3.39)$$

Sorterer egenverdiene etter størrelse:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

Her er  $\lambda_1 = \lambda_{max}$  og  $\rho = |\lambda_{max}|$ . Merk at vi har antatt at  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  ikke faller sammen.

Fra (7.3.37):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^m &= c_1 \lambda_1^m \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \lambda_n^m \mathbf{v}_n \rightarrow \|\mathbf{e}^m\| \leq \|c_1 \lambda_1^m \mathbf{v}_1\| + \|c_2 \lambda_2^m \mathbf{v}_2\| \\ &\quad + \dots + \|c_n \lambda_n^m \mathbf{v}_n\| \\ &= |\lambda_1^m| \cdot \left[ \|c_1 \mathbf{v}_1\| + \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^m \|c_2 \mathbf{v}_2\| + \dots + \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right|^m \|c_n \mathbf{v}_n\| \right] \end{aligned}$$

For tilstrekkelig store verdier av  $m$ :

$$\|\mathbf{e}^m\| \approx |\lambda_1|^m \|c_1 \mathbf{v}_1\| = \rho^m \|c_1 \mathbf{v}_1\| \quad (7.3.40)$$

Fra (7.3.38), (7.3.39) og (7.3.40) følger:

$$\|\mathbf{e}^{m+k}\| \approx \rho^k \|\mathbf{e}^m\| \rightarrow \frac{\|\mathbf{e}^{m+k}\|}{\|\mathbf{e}^m\|} \approx \rho^k \quad (7.3.41)$$

Vi ønsker spesielt å finne for hvilken verdi av  $k$  er  $\|\mathbf{e}^{m+k}\|$  en tiendepart av  $\|\mathbf{e}^m\|$ :

$$\frac{\|\mathbf{e}^{m+k}\|}{\|\mathbf{e}^m\|} = \frac{1}{10} \approx \rho^k \quad (7.3.42)$$

Ved bruk av den Briggske logaritmen i (7.3.42):

$$k \approx -\frac{1}{\log_{10}(\rho)} \quad (7.3.43)$$

$k$  angir hvor mange iterasjoner vi må utføre for å vinne ett desimalsiffer.  
Størrelsen

$$R = -\log_{10}(\rho) \quad (7.3.44)$$

kalles ofte det midlere konvergenstallet.

Istedentfor den Briggske logaritmen brukes gjerne den naturlige.

Ved bruk av matrisenormer kan vi finne tilstrekkelige betingelser for konvergens. La oss f. eks. velge Jacobis metode, lign.(7.3.22) med iterasjonsmatrisa gitt i (7.3.24):

$$\mathbf{G}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

For systemet i (7.3.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_J &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \frac{a_{24}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \frac{a_{34}}{a_{33}} \\ \frac{a_{41}}{a_{44}} & \frac{a_{42}}{a_{44}} & \frac{a_{43}}{a_{44}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.3.45)$$

En matrise  $\mathbf{A}$  kalles strengt diagonaldominant dersom:

$$|a_{i,j}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \text{ for alle } 1 \leq i \leq n \quad (7.3.46)$$

Anta nå at  $\mathbf{A}$  er strengt diagonaldominant. Da blir tallverdien av alle leddene i  $\mathbf{G}_j$  mindre enn 1. Bruker matrisenormen  $\|\mathbf{A}\|_\infty$  samt (7.3.38):

$$|\lambda| < \|\mathbf{G}_J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\mathbf{G}_{i,j}| < 1$$

Med andre ord: Dersom iterasjonsmatrisa er strengt diagonaldominant, konvergerer Jacobis metode uavhengig av startvektoren. Det kan vises at dette også gjelder både Gauss-Seidel og SOR også.

**Eksempel 7.3 Eksempel ved bruk av Gauss-Seidels metode**

La oss løse følgende system  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  med fire ukjente der vi bruker Gauss-Seidels metode:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette systemet har løsningen  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = 2$ . I praksis ville vi selvfølgelig ikke bruke Gauss-Seidels metode på et slik system, men systemet er så enkelt at det er mulig å analysere det.

Lign. (7.3.21) blir i dette tilfellet:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, -\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, -\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Videre får vi:

$$\mathbf{D} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Iterasjonsmatrisa  $\mathbf{G}_{GS}$  i (7.3.26) blir nå:

$$\mathbf{G}_{GS} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Beregner egenverdiene av iterasjonsmatrisa:

$$\det(\mathbf{G}_{GS} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} - \lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} - \lambda & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Vi får en enkel 4. grads ligning:  $\lambda^2(\lambda^2 - \frac{4}{9}\lambda + \frac{1}{36}) = 0$  med løsning:

$$\rho = \lambda_1 = 0.3692, \lambda_2 = 0.0752, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Vi kan selvfølgelig bruke Matlab direkte til å finne egenverdiene:

```
> Ggs = [0 1/2 0 0; 0 1/6 1/3 0; 0 1/18 1/9 1/3; 0 1/36 1/18 1/6];
>> eig(Ggs)
ans = 0 0.0752 0.3692 0.0000
>>
```

Da tallverdien for alle egenverdiene er mindre enn 1, følger at Gauss-Seidels metode konvergerer for dette tilfellet. (Systemet er strengt diagonaldominant). Konvergenstallet  $-\log_{10}(\rho)$  fra (7.3.44) blir  $-\log_{10}(0.3692) = 0.4327$  slik at  $k \approx 2.3$  som betyr at vi må utføre litt mer enn to iterasjoner for hvert

desimalsiffer vi ønsker.

Gauss-Seidel systemet i (7.3.25) blir i vårt tilfelle:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{m+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^m + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{49} \\ \frac{18}{49} \\ \frac{49}{36} \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Vi skriver et lite Matlabprogram som utfører iterasjonsprosessen:

```
% Program GStest
Ggs = [0 1/2 0 0; 0 1/6 1/3 0; 0 1/18 1/9 1/3 ; 0 1/36 1/18 1/6];
c = [-1/2; 7/6 ; 49/18; 49/36 ];
x = zeros(4,1); % Startverdier
for k = 1:12
x = Ggs*x + c;
fprintf(' %6.4f %6.4f %6.4f %6.4f \n',x')
end
```

```
>> GStest
-0.5000 1.1667 2.7222 1.3611
0.0833 2.2685 3.5432 1.7716
0.6343 2.7258 3.8325 1.9162
0.8629 2.8985 3.9382 1.9691
0.9492 2.9625 3.9772 1.9886
0.9812 2.9861 3.9916 1.9958
0.9931 2.9949 3.9969 1.9984
0.9974 2.9981 3.9989 1.9994
0.9991 2.9993 3.9996 1.9998
0.9997 2.9997 3.9998 1.9999
0.9999 2.9999 3.9999 2.0000
1.0000 3.0000 4.0000 2.0000
>>
```

Vi ser at i dette tilfellet konvergerer Gauss-Seidels metode raskt, noe som skyldes at spektralradien er liten og godt separert fra  $\lambda_2$ . Desverre er nok ikke forholdene så gunstige for de tilfellene der vi ønsker å bruke iterasjonsmetoder. Anta at vi skal løse en Poisson-ligning  $\nabla^2 u = f(x, y)$  på et enhetskvadrat, se f.eks. figur 7.18, og la skritt lengden være  $h$  i begge koordinat-retningene. For dette tilfellet er det mulig å finne spektralradien analytisk, se. f.eks Hageman & Young [15]. Vi finner følgende uttrykk:

Jacobis metode:

$$\rho = \cosh(\pi h) \approx 1 - \frac{(\pi h)^2}{2} \text{ for små } h \quad (7.3.47a)$$

Gauss-Seidels metode:

$$\rho = \cosh^2(\pi h) \approx 1 - (\pi h)^2 \text{ for små } h \quad (7.3.47b)$$

SOR:

$$\rho = \frac{1 - \sinh(\pi h)}{1 + \sinh(\pi h)} \approx 1 - 2\pi h \text{ for små } h \quad (7.3.47c)$$

Tilfelle (c) er basert på optimal  $\omega$ .

Vi husker at betingelsen for konvergens er at spektralradien  $\rho < 1$ . For små  $h$  nærmer spektralradien seg raskt 1 for alle metodene, men særlig er dette tydelig for Jacobi- og Gauss-Seidels metode. Tabellen nedenfor viser dette klart.

Spektral radius	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$	$h = \frac{1}{128}$
$\rho_J$	0.9952	0.9988	0.9997
$\rho_{GS}$	0.9904	0.9976	0.9994
$\rho_{SOR}$	0.8215	0.9065	0.9521

Dette vises enda tydligere når vi beregner antall iterasjoner som behøves for å vinne ett desimalsiffer, se lign. (7.3.43).

Iterasjoner	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$	$h = \frac{1}{128}$
$k_J$	477	1910	7644
$k_{GS}$	239	955	3822
$k_{SOR}$	12	23	47

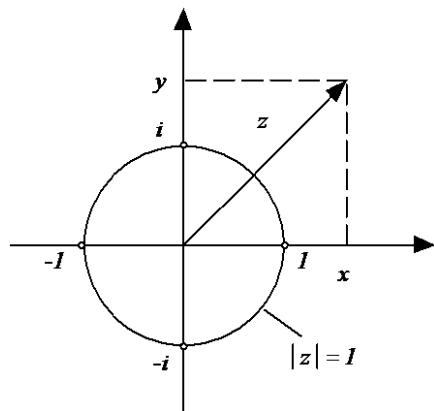
Konklusjon: Det er bare SOR som er praktisk brukbare av disse metodene.

På grunn av denne konklusjonen, har vi bare brukt SOR på eksemplene i dette avsnittet med unntak av et demo-eksempel med Gauss-Seidel. Det er mulig å forbedre SOR betraktelig. Vi kan f.eks. variere  $\omega$  for hver iterasjon etter bestemte skjema istedenfor å la den være konstant i hele iterasjonsprosessen. Legg også merke til at SOR, med Gauss-Seidel som spesialtilfelle, er avhengig av nummereringen. Vi kan forbedre konvergensen ved f.eks å bruke sjakkbrett-nummerering, dvs: Først gjennomløpe 1, 3, 5, ... og deretter 2, 4, 6, .... Den SOR-versjonen vi har brukt kalles punkt-SOR fordi vi går fra punkt til punkt. Her er det forbedringspotensiale ved heller å operere på hele blokker, eventuelt hele linjer. For dem som er interessert i disse variantene, henvises til Press [9] og Hageman & Young [15] der det også finnes programmer. Det er sjeldent bryt verdt å bruke disse mer avanserte versjonene fordi det idag finnes mer effektive iterasjons-metoder. Fordelen med den enkle SOR-metoden vi har brukt, er at den er lett å programmere både for lineære- og ikke-lineære ligninger. Legg merke til at når vi brukte direkte-løsere i avsnitt 7.2, måtte vi sette opp hele matrisa på forhånd. Dette var forholdsvis enkelt i de viste eksemplene, noe som ofte ikke er tilfelle ellers. Samtidig var vi avhengige av de innebygde løserne i Matlab.

Dersom du ønsker å bruke iterasjonsmetoder på et fint nett, bør du bruke noen av de nyere metodene. Disse går under betegnelsene Flernett-metoder(Multigrid) og Krylov-metoder. En god introduksjon til Flernett-metoder finnes i Briggs [19]. En rekke av Krylov-metodene finnes tilgjengelig i Matlab. Stikkord er her *bicg*, *cgs*, *bicgstab*, *pcg*, *gmres*og *qmr*. Skriv f.eks *doc gmres* og se på eksemplene. Istedentfor matrisene som er gitt i eksemplene der, kan du bruke koeffisient-matrisene fra eksemplene i avsnitt 7.2. Se Saad [28] for mer om Krylov-metoder. Mange av disse metodene er også behandlet av Kelley [25] med nedlastbare Matlabprogram.

## MATEMATISK BAKGRUNNSTOFF

### A.1 BRUK AV KOMPLEKSE TALL



Figur A.1

Figuren viser det komplekse planet med  $x$ -aksen som den reelle aksen og  $y$ -aksen som den imaginære. Et komplekst tall  $z$  skrives på formen

$$z = x + iy \quad (\text{A.1.1})$$

der  $x = \operatorname{Re}(z)$  og  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Den komplekse enheten  $i = \sqrt{-1}$ . Absoluttverdien(lengden) av  $z$  betegnes  $|z|$  og er definert ved:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A.1.2})$$

#### Eksempel A.1

Med  $z_1 = 3 + 4i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$  fås:  $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  og  $|z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Noen regler for regning med tallverdier.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| , \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{A.1.3})$$

Dessuten gjelder trekant-ulikheten:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{A.1.4})$$

### Eksempel A.2

Gitt  $z_1 = a + ib$ ,  $z_2 = c - id$  der  $a, b, c$  og  $d$  er reelle.

Får da:

$$|z_1 z_2| = |a + ib||c - id| = \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$$

I det første tilfellet kan vi selvfølgelig først multiplisere  $a + i \cdot b$  med  $c - i \cdot d$  og deretter ta tallverdien. Dette er ikke lurt, og det lønner seg heller ikke å først gjøre nevneren reell i det siste tilfellet. Betingelsen  $|z| \leq 1$  betyr at vi ligger på og innenfor enhetsirkelen; se figuren.

Merk at dersom  $z$  er reell, dvs.  $z = x$ , betyr  $|z| \leq 1$  at  $-1 \leq x \leq 1$ . Det samme gjelder dersom  $z$  er rent imaginær:  $|z| = |i \cdot y| = |y| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$ .

### Eksempel A.3

Gitt:

$$g = \cos(\delta) - 2K \cdot i \cdot \sin(\delta), \quad K > 0. \quad \text{Bestem } K \text{ slik at } |g| \leq 1, \quad \forall \delta$$

$$\begin{aligned} |g|^2 &= \cos^2(\delta) + 4K^2 \sin^2(\delta) = 1 - \sin^2(\delta) + 4K^2 \sin^2(\delta) \\ &= 1 + \sin^2(\delta) \cdot (4K^2 - 1) = 1 - \sin^2(\delta)(1 - 4K^2) \end{aligned}$$

Betingelsen

$$|g| \leq 1 \Rightarrow |g|^2 \leq 1 \Rightarrow$$

$$1 - \sin^2(\delta) \cdot (1 - 4K^2) \leq 1 \Rightarrow -\sin^2(\delta) \cdot (1 - 4K^2) \leq 0$$

Derav:

$$1 - 4K^2 \geq 0 \text{ som gir } K \leq \frac{1}{2}$$

### Eksempel A.4

*Legg merke til dette eksemplet.*

Gitt:  $|g|^2 = (1 - 2 \cdot C)^2$  der  $C$  er et reelt tall. Bestem  $C$  slik at  $|g| \leq 1$ . Vi får:  
 $(1 - 2 \cdot C)^2 = 1 - 4C + 4C^2 \leq 1 \Rightarrow C \cdot (1 - C) \geq 0$  som gir:  $0 \leq C \leq 1$

Vi kan også skrive:

$$|g| = |1 - 2C| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - 2C \leq 1 \text{ Som igjen gir } 0 \leq C \leq 1$$

Eller:

$$|g|^2 = (1 - 2 \cdot C)^2 \Rightarrow |g| = \pm(1 - 2 \cdot C) \leq 1 \text{ som også gir } 0 \leq C \leq 1$$

### Eksempel A.5

Gitt:

$$g = \frac{1 - r[1 - \cos(\delta)] + r \cdot i \sin(\delta)}{1 + r[1 - \cos(\delta)] + r \cdot i \sin(\delta)}, \quad r > 0$$

Bestem  $r$  slik at  $|g| \leq 1$

Med  $x = 1 - \cos(\delta) \geq 0$  for alle  $\delta$ , får vi:

$$|g|^2 = \frac{(1 - rx)^2 + r^2 \sin^2(\delta)}{(1 + rx)^2 + r^2 \sin^2(\delta)} \leq 1 \Rightarrow (1 - rx)^2 \leq (1 + rx)^2$$

som alltid er oppfylt uavhengig av  $r$ . Vi kan selvfølgelig multiplisere ut:

$$1 - 2rx + r^2x^2 \leq 1 + 2rx + r^2x^2 \Rightarrow r \cdot x \geq 0$$

### Eksempel A.6

Et litt mer komplisert eksempel.

Gitt:

$$g^2 - (2 - b) \cdot g + 1 = 0$$

Bestem  $b$  (reell) slik at  $|g| \leq 1$ .

Dette er en 2. grads ligning med løsning:

$$g_{1,2} = \frac{(2 - b) \pm \sqrt{b \cdot (b - 4)}}{2}$$

For  $b > 4$  får vi to reelle røtter, for  $b = 4$  en reell rot, og for  $b < 4$  får vi to komplekse røtter. Vi må behandle tilfellet med reelle og komplekse røtter hver for seg.

*Reelle røtter med  $b \geq 4$ .*

Setter  $b = 4 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$  som gir:

$$g_{1,2} = \frac{-(2 + \varepsilon) \pm \sqrt{(4 + \varepsilon) \cdot \varepsilon}}{2}, \quad g_2 = \frac{-[2 + \varepsilon + \sqrt{(4 + \varepsilon) \cdot \varepsilon}]}{2}$$

Dermed får vi:  $|g_2| > 1$  for  $b > 4$  som viser at betingelsen  $|g| \leq 1$  ikke kan oppfylles for  $b > 4$ . Merk at begge røttene må ha tallverdi mindre eller lik 1, og vi ser at  $g_2$  gir det mest kritiske tilfellet.

For  $b = 4$  får vi  $g_1 = g_2 = -1$ .

*Komplekse røtter med  $b < 4$ .*

$$g_{1,2} = \frac{(2-b) \pm \sqrt{-1 \cdot (4b-b^2)}}{2} = \frac{2-b \pm i\sqrt{b \cdot (4-b)}}{2}$$

Derav:

$$|g_{1,2}|^2 = \frac{1}{4} \cdot [(2-b)^2 + b \cdot (4-b)] = 1$$

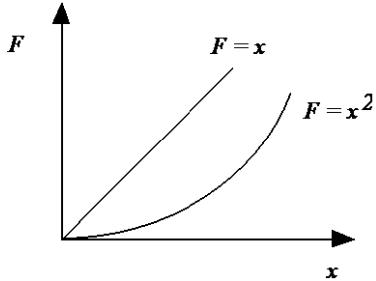
Vi konkluderer med at betingelsen  $|g| \leq 1$  bare kan oppfylles for  $b \leq 4$  med  $|g|_{min} = 1$ .

Når vi har å gjøre med røtter av  $n$ 'te grads-polynomer, kan det være lurt å huske på at produktet av røttene er lik konstantleddet med koeffisienten foran  $n$ 'te gradsleddet er lik 1.

I vårt tilfelle blir dette:  $g_1 \cdot g_2 = 1 \Rightarrow |g_1| \cdot |g_2| = 1$

## A.2 LINEARITET

### A.2.1 Lineær og ikke-lineær fjær



Figur A.2

Figuren viser en fjær der relasjonen mellom krafta og forlengelsen i det ene tilfellet er gitt ved  $F = x$ , mens det andre tilfellet er gitt ved  $F = x^2$ . I det første tilfellet har vi lineær respons, mens responsen i det andre tilfellet er ikke-lineær (parabel). Sammenhengen mellom kraft og forlengelse for den lineære fjæra er gitt ved:

$$F(x) = x \quad (\text{A.2.1})$$

Dersom vi påfører forlengelser  $x_1$  og  $x_2$ , får vi tilhørende krefter  $F(x_1) \equiv F_1 = x_1$  og  $F(x_2) \equiv F_2 = x_2$ . Vi påfører så en forlengelse  $x = x_1 + x_2$  og innser umiddelbart at den tilhørende krafta  $F = F_1 + F_2$ . Det er også klart at dersom vi bruker forlengelsen  $x = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$  der  $c_1$  og  $c_2$  er konstanter, vil den tilhørende krafta  $F$  være  $F = c_1 \cdot F_1 + c_2 \cdot F_2$ .

Definerer en lineær operator  $L(x)$  ved:

$$L(c \cdot x) = c \cdot L(x) \quad (\text{A.2.2a})$$

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \quad (\text{A.2.2b})$$

(A.2.2) kan settes sammen til en betingelse:

$$L(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2) = c_1 \cdot L(x_1) + c_2 \cdot L(x_2) \quad (\text{A.2.3})$$

der  $c, c_1$  og  $c_2$  er konstanter.

Definisjonen (A.2.3) anvendt på (A.2.1) gir:

$$F(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2) = x = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = c_1 \cdot F(x_1) + c_2 \cdot F(x_2)$$

$F(x)$  er i dette tilfellet en lineær operator.

Definisjonen i (A.2.2) eller (A.2.3) kan utvides til et vilkårlig antall elementer, men det er tilstrekkelig med to for å avgjøre om operatoren er lineær eller ikke.

For den ikke-lineære fjæra er sammenhengen mellom kraft og forlengelse gitt ved:

$$F(x) = x^2 \quad (\text{A.2.4})$$

Bruker (A.2.2a):

$$\begin{aligned} F(c \cdot x) &= (c \cdot x)^2 = c^2 \cdot x^2 \\ &= c^2 \cdot F(x) \neq c \cdot F(x) \end{aligned} \quad (\text{A.2.5a})$$

Dersom vi isteden bruker (A.2.2b):

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= F(x_1) + F(x_2) + 2x_1x_2 \neq F(x_1) + F(x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.2.5b})$$

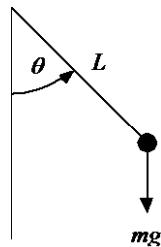
Både (A.2.5a) og (A.2.5b) viser at  $F$  i dette tilfellet er en ikke-lineær operator. Rent mekanisk har vi en ikke-lineær fjær. Det er ofte lettest å bruke (A.2.2a), men dersom (A.2.2a) er tilfredsstilt, må også (A.2.2b) benyttes. Kan selvfølgelig bruke (A.2.3) direkte. I de fleste tilfeller der vi bruker begrepet linearitet, er det ikke mulig å henvise til en figur med et rettlinjet diagram. Det er definisjonen i (A.2.2) som bestemmer om en relasjon er lineær.

*Litt lakonisk sier*(A.2.3):

Dersom  $x_1$  og  $x_2$  er løsninger, er også summen  $x_1 + x_2$  en løsning.

Bruker nå den matematiske pendelen til å vise forskjellen mellom en lineær og en ikke-lineær differensialligning.

## A.2.2 Matematisk pendel



Figur A.3

Fig. A.3 viser en matematisk pendel som svinger friksjonsfritt i vertikalplanet. Ligningen for pendelbevegelsen er gitt ved:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \cdot \sin(\theta(t)) \quad (\text{A.2.6})$$

$$\text{der } \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

Rekkeutvikling av  $\sin(\theta)$  rundt  $\theta = 0$ :

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (\text{A.2.7})$$

For små verdier av  $\theta$  er  $\sin(\theta) \approx \theta$  som innsatt i (A.2.7) gir:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta(t) = 0 \quad (\text{A.2.8})$$

(A.2.8) er den lineariserte versjonen av (A.2.6).

Vi skal nå vise at (A.2.8) er lineær ifølge definisjonen gitt i (A.2.2).

$$\text{Setter } F(\theta) = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta \quad (\text{A.2.9})$$

La  $\theta_1$  og  $\theta_2$  være to løsninger av (A.2.8) og sett  $\theta = c_1 \cdot \theta_1 + c_2 \cdot \theta_2$  som innsatt i (A.2.9) gir:

$$\begin{aligned} F(c_1\theta_1 + c_2\theta_2) &= \frac{d^2(c_1\theta_1 + c_2\theta_2)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot (c_1\theta_1 + c_2\theta_2) \\ &= c_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + c_1 \cdot \omega_0^2 \cdot \theta_1 + c_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + c_2 \cdot \omega_0^2 \cdot \theta_2 \\ &= c_1 F(\theta_1) + c_2 F(\theta_2) \end{aligned}$$

$F(\theta)$  er ifølge (A.2.2) en lineær operator og (A.2.8) er en lineær differensialligning.

Tester nå (A.2.6) og setter:

$$F(\theta) = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \sin(\theta) \quad (\text{A.2.10})$$

Får nå fra (A.2.2a):

$$F(c \cdot \theta) = c \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \sin(c \cdot \theta) \neq c \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\theta) = c \cdot F(\theta) \quad (\text{A.2.11})$$

$F(\theta)$  som gitt i (A.2.10) er følgelig en ikke-lineær operator og (A.2.6) en ikke-lineær differensialligning. Vi kan isteden bruke (A.2.2b):

$$\begin{aligned} F(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{d^2(\theta_1 + \theta_2)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \\ &\neq F(\theta_1) + F(\theta_2) \end{aligned}$$

Betingelsen for linearitet blir da som ventet  $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \approx 1$

Vi har vist at det viktige ved linearitet er at summen av to (eller flere) løsninger også er en løsning. Ligningen for den matematiske pendelen er av 2. orden, og teorien viser at differensialligningen da har maksimalt to *uavhengige* løsninger. For en  $n$ 'te orden differensialligning vil vi følgelig få maksimalt  $n$  uavhengige løsninger.

En  $n$ 'te orden lineær, ordinær differensialligning kan skrives på formen:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) = b(x) \quad (\text{A.2.12})$$

der  $y^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  henviser til den  $k$ 'te deriverte av  $y(x)$  og  $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$ .

Lineariteten av (A.2.12) kan påvises som ovenfor. Dersom en eller flere av koefisientene  $a_k$  også er funksjon av minst en  $y^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , er differensialligningen ikke-lineær. Hovedproblemet med ikke-lineære differensialligninger er nettopp at vi ikke lenger kan legge sammen løsningene. Vi så dessuten ovenfor at konstantene også inngår ikke-lineært. Teknikken med rekkeutvikling, f.eks. i potens-rekker og Fourier-rekker kan ikke lenger brukes i det generelle tilfellet. Vi har dermed mistet vårt viktigste redskap til å finne en *analytisk* løsning.

## A.3 KORT OM FOURIER-REKKER

### A.3.1 NOEN STANDARDBETEGNELSER

En funksjon  $f(x)$  kalles periodisk med periode  $2L$  dersom  $f(x) = f(x + 2L)$   
Ser på funksjonen

$$g_m(x) = \sin(\beta_m x) = \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \text{ der } \beta_m = \frac{m\pi}{L}, m = 1, 2, \dots \quad (\text{A.3.1})$$

#### 1) x er tiden t

$\beta_m$  kalles vinkelfrekvensen (radianer pr. sek.) med periode  $P_m = \frac{2\pi}{\beta_m} = \frac{2L}{m}$

$$\text{Frekvensen } f_m = \frac{1}{P_m} = \frac{m}{2L} \text{ (Hertz) (sykler pr. sek.)} \quad (\text{A.3.2})$$

2) x er en romkoordinat Perioden  $P_m$  kalles nå bølgelengden  $\lambda_m$  gitt ved:

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta_m} = \frac{2L}{m} \quad (\text{A.3.3})$$

Vinkelfrekvensen  $\beta_m = \frac{m\pi}{L}$  betegnes nå som bølgetallet med dimensjon radianer pr. lengdeenhet.

Det er vanlig å bruke symbolet  $k$  for bølgetall istedenfor  $\beta$ . Merk at det er bare når  $2L = 2\pi$  at bølgetallet angir hele bølger. Betegnelsene bølgetall, vinkelfrekvens og frekvens brukes omhverandre.

### A.3.2 Litt om dispersjon

Gitt funksjonen

$$u(x, t) = A \sin(\phi) = A \sin(\beta - \omega t), \phi = \text{fasen} \quad (\text{A.3.4a})$$

$$u(x, 0) = A \sin(\beta x) = f(x) \quad (\text{A.3.4b})$$

La oss undersøke om (A.3.4) er en løsning av adveksjonsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, a_0 > 0 \quad (\text{A.3.5})$$

(Denne ligningen er behandlet i avsnitt 4.2 og 4.6 i kapittel 4, samt kapittel 6)

Vi finner:  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega A \cos(\phi)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \beta A \cos(\phi)$  som innsatt i (A.3.5) gir:

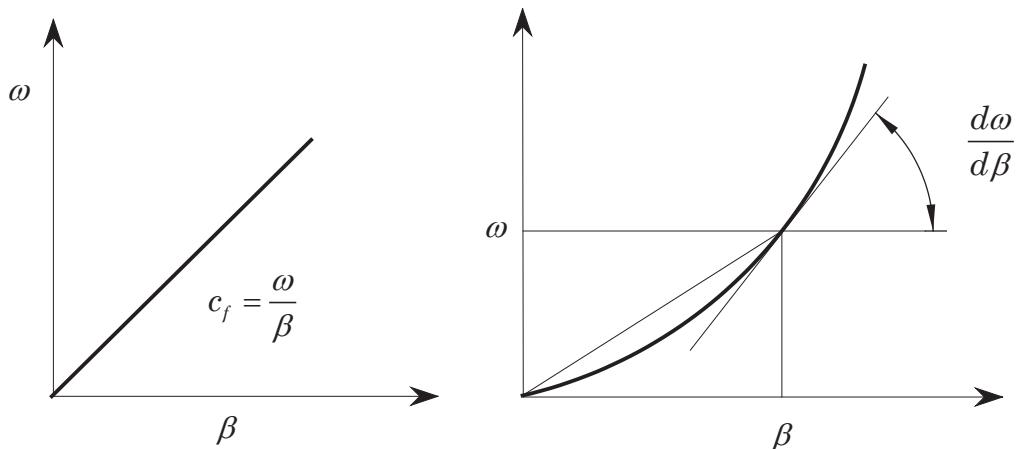
$$a_0 \beta - \omega = 0 \quad (\text{A.3.6})$$

Ligning (A.3.6) kalles en dispersjonsrelasjon. Vi innfører fasenhastigheten, også kalt forplantningshastigheten gitt ved:

$$c_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{A.3.7})$$

Med bruk av (A.3.6) blir fasehastigheten  $c_f = a_0 = \text{konstant}$  som betyr at startprofilen  $u(x, 0)$  forplanter seg uforandret i positiv  $x$ -retning. Dersom vi skriver (A.3.4a) som  $u_n(x, t) = A_n \sin(\beta_n - \omega_n t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , vet vi at  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  også er en løsning da (5) er en lineær ligning. Dette betyr at et generelt startprofil  $u(x, 0) = f(x)$  også forplanter seg uforandret med konstant hastighet  $c_f = a_0$ . En slik bølge kalles ikke-dispersiv.

Tilfeller der  $c_f = \frac{\omega}{\beta}$  ikke er konstant kalles disperse bølger. I dette tilfellet vil de forskjellige bølgene forplanter seg med forskjellig hastighet, slik at profilen forandrer seg. Figuren nedenfor viser tilfelle med konstant og variabel



Figur A.4

På figuren til venstre har vi konstant fasehastighet  $c_f$ , mens vi til høyre har en fasehastighet som varierer med  $\beta$ , uttrykt ved varierende helning  $\frac{d\omega}{d\beta}$ . Vi har følgelig disperse bølger når  $\frac{\omega}{\beta} \neq \frac{d\omega}{d\beta}$ . Størrelsen  $\frac{d\omega}{d\beta}$  kalles gruppehastigheten og betegnes  $c_g$ . Det kan vises at energien i en bølge forplanter seg med gruppehastigheten. For ikke-disperse bølger faller forplantnings-hastigheten og grupphastigheten sammen. I avsnitt 4.6 i kapittel 4 er det gitt flere eksempler på ligninger med disperse løsninger.

### A.3.3 REKKEUTVIKLING AV KONTINUERLIGE FUNKSJONER

En periodisk funksjon  $f(x)$  kan under temmelig generelle betingelser utvikles i en trigonometrisk rekke( Fourier-rekke) gitt ved:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right) \quad (\text{A.3.8})$$

Koeffisientene i A.3.8 beregnes fra:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \cdot \int_d^{d+2L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \cdot \int_d^{d+2L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned} \quad (\text{A.3.9})$$

Vanlige valg er  $L = \pi$  og  $d = -\pi$  eller 0.

Ved bruk av Eulers formel  $e^{\pm i \cdot nx} = \cos(nx) \pm i \sin(x)$  der  $i = \sqrt{-1}$ , kan (A.3.8) og (A.3.9) skrives:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad (\text{A.3.10})$$

der

$$C_n = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.3.11})$$

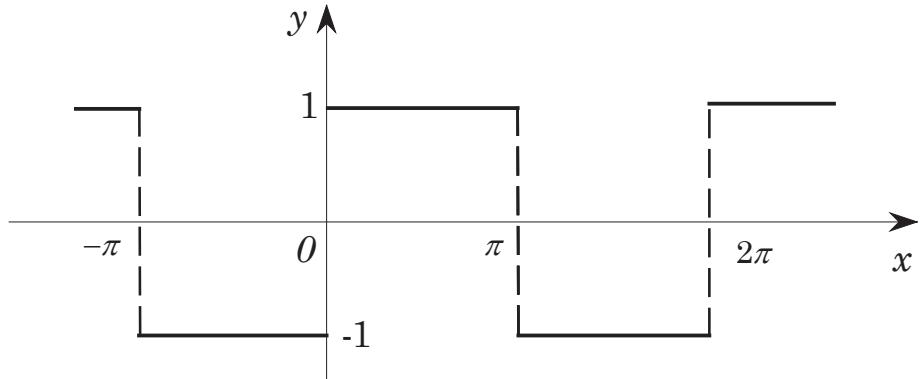
Vi har her valgt  $d = -L$ .

Når  $f(x)$  er reell, har vi følgende relasjoner mellom koeffisientene i (A.3.9) og (A.3.11):

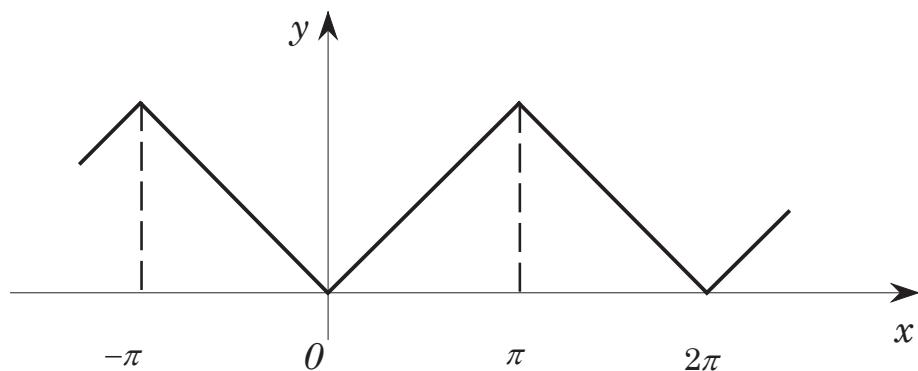
$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.3.12})$$

#### A.3.4 Eksempler på rekkeutviklinger

Tilfelle 1:  $y = f(x) = 1$ ,  $0 < x < \pi$



Tilfelle 2:  $y = f(x) = |x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$



Figur A.5

### Tilfelle 1

Vi rekkeutvikler funksjonen  $y = 1$  for  $0 < x < \pi$  i en sinusrekke ved å forlenge den utenfor grunnintervallet som en odde funksjon. Med  $L = \pi$  og  $d = -\pi$ , får vi fra (A.3.8) og (A.3.9):

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n\pi}$$

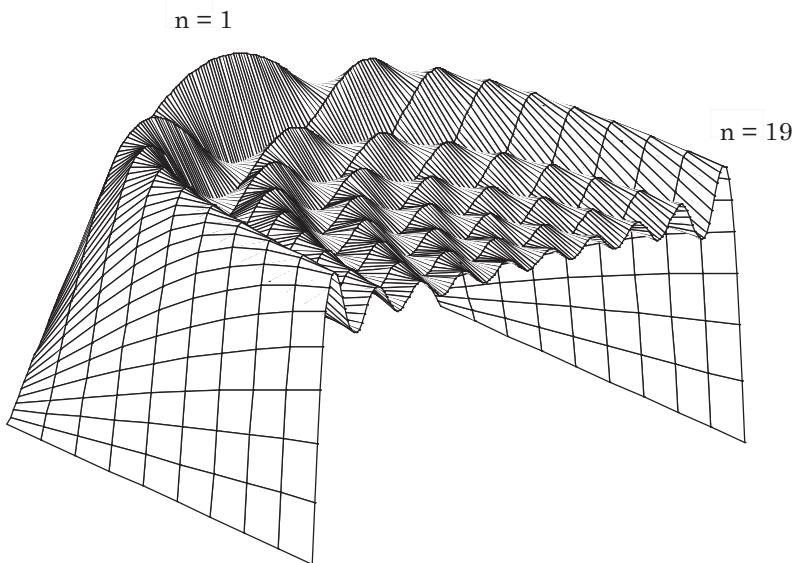
Med  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , får vi:

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \quad (\text{A.3.13})$$

Vi ser at rekka konvergerer langsomt da koeffisientene avtar som  $\frac{1}{n}$ .

For  $x = \frac{\pi}{2}$  eksempelvis, får vi Leibnitz rekke for  $\pi$  som vi har stiftet bekjentskap med i appendiks G, del G.6 og del G.9.

Figuren nedenfor viser (A.3.13) for  $n = 1, 3, 5, \dots, 19$  (10 ledd) med det velkjente Gibbs fenomen for  $x = 0$  og  $x = \pi$ .



Figur A.6

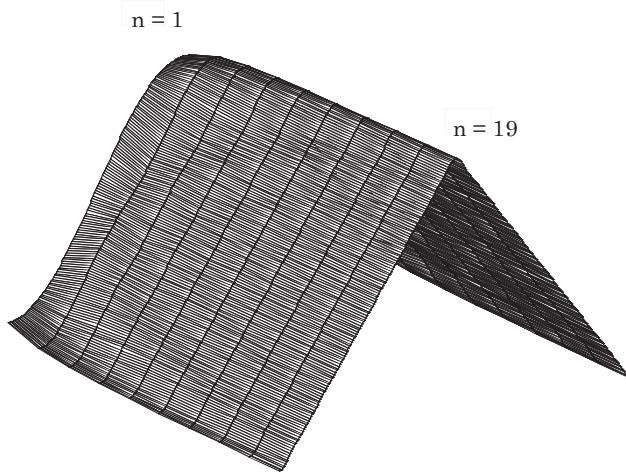
**Tilfelle 2** Vi rekkeutvikler funksjonen  $y = |x|$  for  $-\pi \leq x \leq \pi$  som vi forandrer til en rekkeutvikling av funksjonen  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  og  $y = -x + 2\pi$ ,  $\pi \leq x \leq 2\pi$  som en cosinusrekke ved å forlenge den utenfor grunnintervallet som en jevn funksjon. Med  $L = \pi$  og  $d = 0$ , får vi fra (A.3.8) og (A.3.9):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi x \cdot dx + \int_\pi^{2\pi} (-x + 2\pi) \cdot dx \right] = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi x \cos(nx) dx + \int_\pi^{2\pi} (-x + 2\pi) \cos(nx) dx \right] = \frac{2(\cos(n\pi) - 1)}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Med  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , får vi:

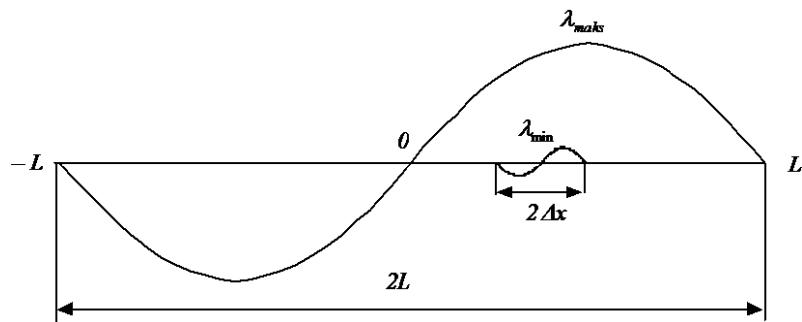
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) \quad (\text{A.3.14})$$

Merk at funksjonen i tilfelle 1 er den deriverte av funksjonen i tilfelle 2. Vi ser at koeffisientene her avtar som  $\frac{1}{n^2}$ . Dette skyldes at funksjonen her er kontinuerlig. Hadde funksjonen dessuten hatt kontinuerlig derivert, ville koeffisientene ha avtatt som  $\frac{1}{n^3}$ . Figuren nedenfor viser (A.3.14) for  $n = 1, 3, 5, \dots, 19$  (10 ledd). Da funksjonen er kontinuerlig, har vi intet Gibbs fenomen.



Figur A.7

### A.3.5 Fourier-rekker for diskrete funksjoner



Figur A.8

Vi ønsker å bruke den komplekse formen i forbindelse med stabilitetsanalyse av differanseligninger der  $f(x)$  bare er kjent i diskrete punkter  $x_j$ .

Diskretiserer intervallet  $[0, L]$  i  $M$  deler:

$$\Delta x = \frac{L}{M}, \quad x_j = j\Delta x, \quad 0, 1, 2, \dots, M$$

Den diskrete versjonen av (A.3.10) er gitt ved:

$$f_j = \sum_{m=-M}^{M} A_m \cdot e^{i \frac{m\pi}{L} x_j} = \sum_{m=-M}^{M} A_m \cdot e^{i \cdot \beta_m x_j} \quad (\text{A.3.15})$$

hvor vi har innført bølgetallet  $\beta_m$  fra (A.3.1).

I (A.3.15) summerer vi fra  $-M$  til  $M$  slik at den komplekse formen gjelder for intervallet  $[-L, L]$ .

Den største bølgelengden  $\lambda_{maks} = 2L$  gir det minste bølgetallet  $\beta_{min} = \frac{\pi}{L}$ . Den korteste bølgelengden får vi når  $m = M$ :

$$\lambda_{min} \equiv \lambda_M = 2 \cdot \frac{L}{M} = 2\Delta x \quad (\text{A.3.16})$$

som gir det høyeste bølgetallet

$$\beta_{maks} = \beta_M = \frac{\pi M}{L} = \frac{\pi}{\Delta x} \quad (\text{A.3.17})$$

(Se figur ovenfor)

Hele bølggespektret på intervallet  $[0, L]$  dekkes følgelig av:

$$\beta_m = m \cdot \beta_{min} = m \frac{\pi}{L}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M \quad (\text{A.3.18})$$

Legg merke til at vi har tatt med  $m = 0$  som inkluderer  $\beta_0 = 0$ . I rekkeutviklingen (A.3.15) tilsvarer dette konstanten  $A_0$ .

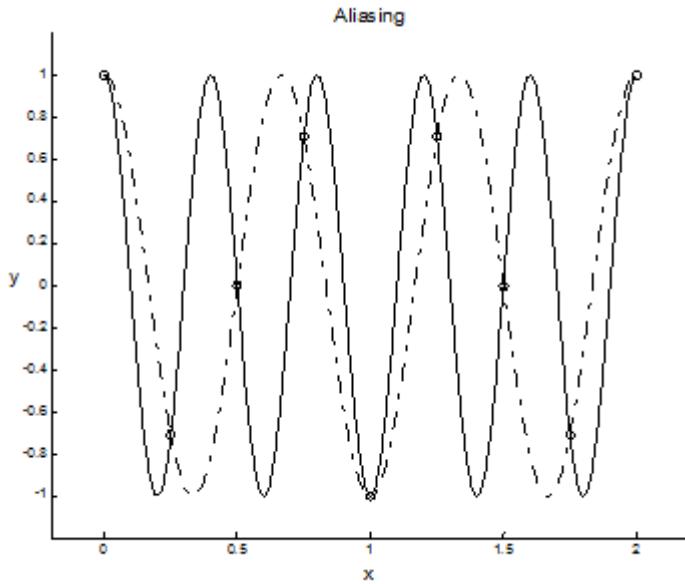
Størrelsen  $\delta_m = \beta_m \cdot \Delta x$  er et dimensjonsløst bølgetall eller fasevinkel der

$$\delta_m = \beta_m \cdot \Delta x = m \frac{\pi}{L} \Delta x = m \frac{\pi}{L} \frac{L}{M} = m \frac{\pi}{M} \quad (\text{A.3.19})$$

Denne fasevinkelen varierer i intervallet  $[-\pi, \pi]$  i skritt på  $\frac{\pi}{M}$ .

Området rundt  $\delta = 0$  er følgelig området med lavest bølgetall (frekvens), og  $\delta$  nær  $\pi$  er området med høyeste bølgetall (frekvens).

Når vi undersøker den numeriske stabiliteten av lineære (lineariserte) differanseligninger, vil vi finne at numerisk instabilitet vanligvis er et høyfrekvent fenomen. Det er derfor vanlig å prøve  $\delta = \pi$ . Legg merke til at selv om skritt lengden er  $\Delta x$ , er den minste bølgelengden  $2\Delta x$ . I måleteori er det velkjent at vi må måle med den dobbelte frekvensen av den vi ønsker å gjengi. (Nyquist-kriteriet). Det at en høyere frekvens skjuler seg under en laverer frekvens, kalles ”aliasingpå engelsk. Figuren nedenfor viser et slikt tilfelle.



Figur A.9

$y_1 = \cos(5\pi x)$  er den heltrukne kurven, men  $y_2 = \cos(2\pi x)$  er den stipla. Disse to funksjonene har sammenfallende verdier for  $x_k = (k - 1)/4$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$  på intervallet  $x \in [1, 2]$ . De ni verdiene er avmerket med ringer på figuren. La oss anta at vi ved en beregning har funnet disse ni verdiene og ønsker å interpolerer med for eksempel med en trigonometrisk funksjon  $y = \cos(m\pi x)$ . Dersom vi bare har disse punktene, kan vi ikke avgjøre om  $m = 3$  eller  $m = 5$  fordi den mer høyfrekvente funksjonen  $y_1$  skjuler seg i den mer lavfrekvente funksjonen  $y_2$ . Vi må derfor regne med finerer nett for å avgjøre hvilken er den rette.

#### A.4 KORT OM LINEÆRE DIFFERANSELIGNINGER

En lineær, inhomogen differanseligning av orden  $N$  med konstante koeffisienter kan skrives på følgende form:

$$y_{i+N} + b_{N-1} \cdot y_{i+N-1} + \cdots + b_0 \cdot y_i = c_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{A.4.1})$$

Vi har her antatt  $b_N = 1$ . Dersom  $c_i = 0$  er ligningen homogen.

Eksempler:

$$y_{i+1} - y_i = 1$$

Ved å sammenligne med (A.4.1) ser vi at her er  $b_0 = -1$  og  $c_i = 1$  slik at vi har en 1. ordens inhomogen differanseligning.

$$y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 0$$

Her har vi  $b_1 = -2$ ,  $b_0 = 1$  og  $c_i = 0$ . Differanseligningen er følgelig homogen og av 2. orden.

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 0$$

For å få denne til å stemme med formen i (A.4.1), må vi øke indekset  $i$  med 1 slik at  $i+1 \rightarrow i+2$ ,  $i \rightarrow i+1$  og  $i-1 \rightarrow i$ . Dette betyr at denne siste ligningen er identisk med den rett ovenfor; en 2.ordens homogen differanseligning.

Analogien mellom (A.4.1) og en lineær differensialligning av orden  $N$  er klar da den sistnevnte kan skrives på følgende måte:(bare homogendelen)

$$y^{(N)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(N-1)}(x) + \cdots + a_0 \cdot y(x) = 0 \quad (\text{A.4.2})$$

Her betyr  $y^{(N)}(x)$  den  $N$ te deriverte av  $y(x)$ . (A.4.2) kan løses ved å anta en partikulær løsning  $y(x) = A \cdot e^{rx}$  som innsatt i (A.4.2) gir et karakteristisk polynom:

$$r^N + a_{N-1} \cdot r^{N-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad (\text{A.4.3})$$

Dersom røttene i (A.4.3) betegnes  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , kan løsningen av (A.4.2) skrives:

$$y(x) = A_1 \cdot e^{r_1 x} + A_2 \cdot e^{r_2 x} + \cdots + A_N \cdot e^{r_N x} \quad (\text{A.4.4})$$

$A_1, A_2, \dots, A_N$  er her konstanter som kan bestemmes fra initial-betingelser.

Dessuten har vi for enkelthets skyld antatt at røttene i (A.4.3) er distinkte:

$$r_i \neq r_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

Vi forsøker samme fremgangsmåte på differanseligningen i (A.4.1) og ser først på den homogene ligningen, dvs.  $c_i = 0$ . Antar en løsning på formen  $y_i = \alpha^i$  der  $\alpha \neq 0$ . (Dette er  $y_i = e^{ir}$  med  $r = \ln(\alpha)$ ). Innsatt i (A.4.1) får vi:

$$\alpha^{i+N} + b_{N-1}\alpha^{i+N-1} + \cdots + b_0\alpha^i$$

som etter divisjon med  $\alpha^i$  gir det karakteristiske polynomet:

$$p(\alpha) = \alpha^N + b_{N-1}\alpha^{N-1} + b_{N-2}\alpha^{N-2} + \cdots + b_0 = 0 \quad (\text{A.4.5})$$

### 1) Distinkte røtter

Distinkte røtter  $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_n^i$  i (A.4.5):

$$\alpha_m^i \neq \alpha_n^i, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots, N$$

Den homogene løsningen av (A.4.1) kan da skrives:

$$y_i = C_1\alpha_1^i + C_2\alpha_2^i + \cdots + C_N\alpha_N^i \quad (\text{A.4.6})$$

der  $C_1, C_2, \dots, C_N$  er konstanter som kan bestemmes fra initial-betingelser.

## 2) Sammenfallende røtter

Vi begrenser oss til tilfellet at de sammenfallende røttene er en dobbelrot.

La oss først se på en ordinær diff. ligning:

$$y''(x) - 2m \cdot y'(x) + 1 = 0$$

med løsning

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \text{ der } r_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$$

der  $r_{1,2}$  er røttene av det karakteristiske polynomet  $r^2 - 2mr + 1 = 0$  fra (A.4.3). For  $m = 1$  får vi en dobbelrot  $r_{1,2} = 1$ , slik at vi får en løsning  $y_1 = e^x$ . Den andre løsningen finnes ved å sette  $y_2 = u(x) \cdot y_1$  inn i diff.ligningen som gir  $u''(x) = 0 \rightarrow u(x) = x$

Total løsning:

$$y(x) = C_1 e^x + xC_2 e^x \quad (\text{A.4.7})$$

Fremgangsmåten er den samme for en differanseligning.

Antar at  $\alpha = \alpha_1$  er en dobbelrot av homogendelen av differanseligningen gitt i (A.4.1). Da vil det karakteristiske polynomet i (A.4.5) inneholde faktoren  $(\alpha - \alpha_1)^2$

Fra (A.4.5) får vi da:

$$p(\alpha_1) = 0, \frac{dp}{d\alpha}(\alpha_1) = 0 \quad (\text{A.4.8})$$

Eksempel:

$$p(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

Her er  $\alpha = 1$  en dobbelrot som gir  $p(1) = 0, \frac{dp}{d\alpha}(1) = 0$

Med  $\alpha_1$  som dobbelrot, vil vi analogt med (A.4.7), få en løsning av differanseligningen som inneholder leddet  $y_i = 1 \cdot \alpha_1^i$  slik at løsningen vil være på formen:

$$y_i = C_1 \alpha_1^i + C_2 i \cdot \alpha_1^i + \cdots + C_N \alpha_1^i \quad (\text{A.4.9})$$

med  $\alpha_1 = \alpha_2$

La oss vise dette.

Setter  $y_i = i \cdot \alpha_1^i$  inn i (A.4.1) med  $C_i = 0$ :

$$\begin{aligned}
& (1+N)\alpha_1^{i+N} + b_{N-1}(i+N-1)\alpha_1^{i+N-1} + \cdots + b_0 \cdot i \cdot \alpha_1^i \\
&= \alpha_1^i \left[ i \cdot (\alpha_1^N + b_{N-1}\alpha_1^{N-1} + \cdots + b_0) + \alpha_1 \cdot (N\alpha_1^{N-1} + b_{N-1}(N-1)\alpha_1^{N-2} + \cdots + b_1) \right] \\
&= \alpha_1^i \left( i \cdot p(\alpha_1) + \alpha_1 \frac{dp}{d\alpha}(\alpha_1) \right) = 0
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet (A.4.8).

Når differanseligningen er inhomogen som i (A.4.1), er den fullstendige løsningen summen av homogenløsningen og en partikulær løsning.

Vi ser på det enkle tilfellet at  $c_i = c = \text{konstant}$  i (A.4.1). Tipper partikulær løsningen  $y_i^p = A$  der  $A$  er en konstant, som innsatt i (A.4.1) gir:

$$y_i^p = \frac{c}{1 + b_{N-1} + b_{N-2} + \cdots + b_0} \quad (\text{A.4.10})$$

Totalløsningen med konstant høyre side er da gitt som summen av (A.4.6) eller (A.4.9) og (A.4.10).

### Eksempel A.7

$$y_{i+3} - 2y_{i+2} - y_{i+1} + 2y_i = 0$$

Det karakteristiske polynomet blir:

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0$$

som gir røttene  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$ ,  $\alpha_3 = 2$ . Vi får da denne løsningen:

$$y_i = C_1 + (-1)^i C_2 + 2^i C_3$$

La oss anta at vi har gitt følgende initialbetingelser:

$y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 1$  som innsatt gir følgende verdier for konstantene:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -1/3$ ,  $C_3 = 1/3$  slik at den fullstendige løsningen av dette eksemplet blir:

$$y_i = -\frac{1}{3}(-1)^i + \frac{1}{3}2^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

### Eksempel A.8

$$y_{i+3} - 5y_{i+2} + 8y_{i+1} - 4y_i = 0$$

Det karakteristiske polynomet blir:

$$\alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha - 4 = (\alpha - 2)^2(\alpha - 1) = 0$$

Vi ser at  $\alpha = 2$  er en dobbelrot og (A.4.9) gir:

$$y_i = 2^i C_1 + i2^i C_2 + C_3 = 2^i(C_1 + iC_2) + C_3 , \quad i = 0, 1, \dots$$

### Eksempel A.9

Gitt følgende differensialligning:

$$y'(x) + y(x) = 0 \quad (\text{A.4.11})$$

med initialbetingelse

$$y(0) = 1$$

Løsningen av (A.4.11) er gitt ved  $y(x) = e^{-x}$ .

La oss løse (A.4.11) numerisk ved bruk av Eulers metode. Vi får da følgende differanseligning:

$$y_{i+1} + (h - 1)y_i = 0 , \quad y_0 = 1 \quad (\text{A.4.12})$$

Det karakteristiske polynomet for (A.4.12) følger fra (A.4.5):  $\alpha + (h - 1) = 0$  som gir  $\alpha = 1 - h$ . Fra (A.4.6) får vi da følgende løsning:

$$y_i = C_1(1 - h)^i$$

Konstanten  $C_1$  bestemmes fra initialbetingelsen  $y_0 = 1$  som gir  $C_1 = 1$ . Løsningen av (A.1.2) er da gitt ved:

$$y_i = (1 - h)^i \quad (\text{A.4.13})$$

Når  $h \rightarrow 0$  skal (A.4.13) gi oss den analytiske løsningen  $y(x) = e^{-x}$ . La oss undersøke dette nærmere.

Innfører først  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots$  slik at (A.4.13) kan skrives:  $y_i = (1 - h)^{\frac{x_i}{h}}$ . Nå har vi at tallet  $e = 2.718\dots$  er definert ved:

$$e = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \quad (\text{A.4.14})$$

Dermed følger:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - h)^{\frac{x_i}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 - h)^{(\frac{1}{h})x_i} = e^{-x_i} \quad (\text{A.4.15})$$

Løsningen av (A.4.13) for  $h \rightarrow 0$  blir da:  $y(x) = e^{-x}$  hvor vi har satt  $x_i = x$ .

La oss undersøke hvilken effekt avrundingfeilen har ved numerisk løsning av differanseligningen gitt i (A.4.12). Betegner avrundingsfeilen ved det  $i$ 'te skrittet med  $\varepsilon_i$  der  $\varepsilon_i$  er begrenset ved  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_m$  der  $\varepsilon_m$  er en maskinavhengig konstant. Istedentfor (A.4.9), løser vi nå følgende differanseligning:

$$\bar{y}_{i+1} + (h - 1)\bar{y}_i = \varepsilon_{i+1} \quad (\text{A.4.16})$$

med initialbetingelse:

$$\bar{y}_0 = 1 + \varepsilon_0$$

Vi ser nå på avviket  $\omega_i$  mellom  $\bar{y}_i$  og  $y_i$  ved å definere  $\omega_i = \bar{y}_i - y_i$  som innført i (A.4.16) med bruk av (A.4.12) gir følgende differanseligning:

$$\omega_{i+1} + (h - 1)\omega_i = \varepsilon_{i+1} \quad (\text{A.4.17})$$

med initialbetingelse:

$$\omega_0 = \varepsilon_0$$

Da  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_m$  for alle  $i$ , gir følgende differanseligning en øvre skranke for avrundingsfeilen  $|\omega_i|$  som gjøres fra skritt  $i$  til  $i + 1$ :

$$\omega_{i+1} + (h - 1)\omega_i = \varepsilon_m \quad (\text{A.4.18})$$

med initialbetingelse:

$$\omega_0 = \varepsilon_m$$

Homogenløsningen av (A.4.18) er identisk med løsningen av (A.4.12):

$$\omega_i^h = C_1(1 - h)^i$$

Da (A.4.18) er inhomogen med konstant høyre side, kan vi finne partikulær-løsningen fra (A.4.10):

$$\omega_i^p = \frac{\varepsilon_m}{1 + (h - 1)} = \frac{\varepsilon_m}{h}$$

Den fullstendige løsningen blir da:

$$\omega_i = C_1(1 - h)^i + \frac{\varepsilon_m}{h}$$

Konstanten  $C_1$  bestemmes fra initialbetingelsen  $\omega_0 = \varepsilon_m$ :

$$\omega_0 = C_1 + \frac{\varepsilon_m}{h} = \varepsilon_m \rightarrow C_1 = \frac{\varepsilon_m}{h}(h - 1)$$

Med denne verdien av  $C_1$  får vi løsningen:

$$\omega_i = \frac{\varepsilon_m}{h} [1 - (1 - h)^{i+1}] \quad (\text{A.4.19})$$

(A.4.19) viser at  $\omega_i \rightarrow 0$  når  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ . Samtidig ser vi at dersom skritt lengden  $h$  velges liten, vil vi kunne få betydelig avrundingsfeil, men ingen numerisk instabilitet.

### Eksempel A.10

Vi løser igjen ligningen gitt i (A.4.11), men nå med sentraldifferanser for  $y'(x)$ :

$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$  som innsatt i (A.4.11) gir følgende differanseligning:

$$y_{i+2} + 2hy_{i+1} - y_i = 0 \quad (\text{A.4.20})$$

med initialbetingelse:

$$y_0 = 1$$

(A.4.20) er en homogen 2. ordens differanseligning med karakteristisk polynom gitt ved:

$$\alpha^2 + 2h\alpha - 1 = 0$$

med røttene  $\alpha_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 + 1} \approx -h \pm 1$  for små  $h$ .

Fra (A.4.6) får vi da løsningen:

$$y_i = C_1(1-h)^i + C_2(-1)^i(1+h)^i \quad (\text{A.4.21})$$

Vi kan her benytte oss av grenseovergangene gitt i (A.4.14) og (A.4.15) slik at (A.4.21) kan skrives:

$$y(x_i) = C_1 e^{-x_i} + C_2 (-1)^i e^{x_i} \quad (\text{A.4.22})$$

Det første leddet i (A.4.22) er den analytiske løsningen, mens det andre leddet er et falskt ledd som skyldes at vi har løst en første ordens differensielligning med en 2. ordens metode. Dette andre leddet vil ødelegge løsningen allerede for små  $x$ -verdier slik at det foreslalte skjemaet er numerisk ustabilt. Legg merke til at vi trenger en verdi  $y(x_1)$  i tillegg til den gitte startverdien i  $x = 0$ . Denne verdien kan f.eks. finnes ved å bruke Eulers metode.

## A.5 LITT NUMERISK LINEÆR ALGEBRA

### A.5.1 Vektor - og matrisenormer

Når vi løser et lineært ligningsystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , vil vi gjerne vite litt om nøyaktigheten vi kan forvente, og når vi beregner egenverdier fra  $\mathbf{Az} = \lambda \mathbf{x}$ , vil vi gjerne vite litt om størrelsen av disse før vi starter beregningen. Ved å bruke normer, kan vi skaffe oss slike opplysninger.

En norm er et skalært mål for størrelsen av en vektor eller matrise. Anta at vi har to vektorer  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  med  $n$  komponenter  $x_k$  og  $y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . En vektornorm skal da oppfylle følgende betingelser:

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ og } \|\mathbf{x}\| = 0 \text{ bare for } \mathbf{x} = 0$$

$$\|c \cdot \mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\| \text{ for enhver skalar } c \quad (\text{A.5.1})$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ (Trekant-ulikheter)}$$

En norm som oppfyller (A.5.1) er  $p$ -normen eller Hölder-normen:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (\text{A.5.2})$$

Med  $p = 1, 2$  og  $\infty$ , får vi følgende tilfeller:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad (\text{A.5.3})$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Den siste via en grenseovergang når  $p \rightarrow \infty$

Fra nå av begrenser vi oss til disse tre verdiene av  $p$ . Vi har følgende ulikheter:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq n^{1/p} \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \quad (\text{A.5.4a})$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \quad (\text{A.5.4b})$$

Funksjonen **norm**( $\mathbf{x}, p$ ) i Matlab beregner normene i (A.5.2) for alle  $p$ -verdier, inkludert  $p = \infty$ . Når vi utelater  $p$ , beregnes  $\|\mathbf{x}\|_2$

#### Eksempel A.11

```
>> x = 1:5
x =      1      2      3      4      5
>> norm(x,1) = 15
>> norm(x,2) = 7.4162
```

```
>> norm(x) = 7.4162
>> norm(x,inf) = 5
```

Merk at (A.5.4b) gir  $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{5} \cdot \|\mathbf{x}\|_2 = 16.58\dots$  som stemmer bra.

Anta at vi har gitt en reell  $n \times n$ -matrise  $\mathbf{A}$  og vi ønsker nå en matrisenorm med forbindelse til vektornormene ovenfor. En måte å gjøre dette på, er å bruke følgende definisjon:

$$\|\mathbf{A}\| = \max \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \mathbf{x} \neq 0 \quad (\text{A.5.5})$$

Matrisenormer som tilfredstiller (A.5.5), oppfyller følgende betingelser:

$$\|\mathbf{A}\| \geq 0 \text{ og } \|\mathbf{A}\| = 0 \text{ bare for } \mathbf{A} = 0$$

$$\|c \cdot \mathbf{A}\| = |c| \cdot \|\mathbf{A}\| \text{ for enhver skalar } c$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \text{ (Trekant-ulikheten)} \quad (\text{A.5.6})$$

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$$

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \text{ for alle } \mathbf{x}$$

For  $p = 1, 2$  og  $\infty$  gir (A.5.6) disse normene:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \text{ (maks. kolonne-sum)}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{AA}^T)} \text{ (spektral-normen)} \quad (\text{A.5.7})$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ (maks. linjesum)}$$

Den positive kvadratrotta av egenverdiene av matrisa  $\mathbf{AA}^T$  kalles de singulære verdiene av matrisa  $\mathbf{A}$ . Disse beregnes med funksjonen **svd** i Matlab. (**svd** står for **singular value decomposition**). Dersom matrisa  $\mathbf{A}$  er symmetrisk, er de singulære verdiene lik absoluttverdien av egenverdiene for  $\mathbf{A}$ .

Absoluttverdien av den største egenverdien av en matrise  $\mathbf{A}$  kalles spektralradien og betegnes med  $\rho$  eller  $\rho(\mathbf{A})$  for å henvise til den underliggende matrisa. Eksempelvis er  $\|\mathbf{A}\|_2$  lik kvadratrotta av spektralradien for matrisa  $\mathbf{AA}^T$  som igjen er lik den største singulære verdien av  $\mathbf{A}$ .

Med

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{Ax}\| = \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

følger

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\| \text{ som igjen gir}$$

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\| \quad (\text{A.5.8})$$

Dersom matrisa  $\mathbf{A}$  er symmetrisk, blir

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) \quad (\text{A.5.9})$$

Vi har blant andre, følgende ulikhet:

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{A}\|_\infty} \quad (\text{A.5.10})$$

Som for vektorer, beregner funksjonen  $\text{norm}(\mathbf{A}, p)$  normene i (A.5.7). Eksplisitte formler finnes bare for tilfellene i (A.5.7). For de andre  $p$ -verdiene er beregningen rent numerisk. Spektralnormen er mye mer tidskrevende å beregne enn de to andre, og brukes derfor mest for små matriser og i teoretiske overlegninger.

### Eksempel A.12

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
 1   2   3
 4   5   6
 7   8   9
>> norm(A,1) = 18
>> norm(A,2) = 16.8481
>> norm(A) = 16.8481
>> norm(A,inf) = 24
```

Ulikheten i (A.5.10) gir  $\|\mathbf{A}\|_2 \leq 20.78\dots$

### A.5.2 Lineære ligninger

Vi skal løse den lineære ligningen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  og vil undersøke hvor stor forandringen  $\delta\mathbf{x}$  i løsningen  $\mathbf{x}$  blir når vi gjør en forandring  $\delta\mathbf{b}$  i  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b}$$

Den siste ligningen løst m.h.p  $\delta\mathbf{x}$

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \delta\mathbf{b}$$

Med bruk av normer:

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{b}\|, \|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1} \cdot \delta\mathbf{b}\|$$

Får da:

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} &= \frac{\|\delta\mathbf{A}^{-1} \cdot \delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\delta\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{A}^{-1} \cdot \delta\mathbf{b}\|}{\|\delta\mathbf{b}\|} \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{Ax}\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{A}^{-1} \cdot \delta\mathbf{b}\|}{\|\delta\mathbf{b}\|} \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \end{aligned}$$

Med  $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$  og  $\|\delta\mathbf{A}^{-1} \cdot \delta\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\mathbf{b}\|$  fra (A.5.6), får vi tilslutt:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (\text{A.5.11})$$

Definerer tilstandstallet  $\kappa$  ved:

$$\kappa = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (\text{A.5.12})$$

(A.5.11) kan da skrives:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (\text{A.5.13})$$

Når det er nødvendig å henvise til den underliggende matrisa, skriver vi f.eks.  $\kappa(\mathbf{A})$ , og når vi vil spesifisere matrisenormen, skriver vi  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  eller  $\kappa_\infty$ .

For enhetsmatrisa blir  $\kappa$  lik 1, og for en singulær matrise, dvs. en matrise der determinanten er lik 0, blir  $\kappa$  lik  $\infty$  slik at  $1 \leq \kappa \leq \infty$ .

For spektralnormen spesielt:

$$\kappa_2 = \frac{\sigma_{maks}}{\sigma_{min}} \quad (\text{A.5.14})$$

der  $\sigma_{maks}$  er den største singulære verdien av  $\mathbf{A}$  og  $\sigma_{min}$  er den minste.

Dersom matrisa er symmetrisk, er  $\sigma_{maks}$  og  $\sigma_{min}$  absolutt-verdiene av henholdsvis største og minste egenverdi.

Vanligvis vil vi ha perturbasjoner både i  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{b}$ , men det viser seg at også her er det tilstandstallet  $\kappa$  som er avgjørende, selv om forholdene er noe mer komplisert enn vi har vist i (A.5.11) og (A.5.13).

Dersom vi bare perturberer  $\mathbf{A}$ , vil vi istedenfor (A.5.13) få:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa \cdot \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (\text{A.5.15})$$

Generelt vil (A.5.13) og (A.5.15) være pessimistisk, men legg merke til likhetstegnene, noe som betyr at det finnes tilfeller der skrankene kan nåes.

### Eksempel A.13 2 × 2 - matrise

La oss se på et enkelt, klassisk eksempel tatt fra Forsythe & Moler [13].

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix} \text{ som med høyreside } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix} \text{ har løsningen } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vi perturberer med } \delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.000097 \\ 0.000106 \end{bmatrix} \text{ som gir } \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1.989903 \\ 1.970106 \end{bmatrix}$$

Med den nye høyresiden får vi løsningen

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3.0000 \\ -1.0203 \end{bmatrix} \text{ og } \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 2.0203 \end{bmatrix}$$

La oss undersøke hvordan dette stemmer med estimatet i (A.5.13) når vi bruker 2-normen.

```
>> A = [1 0.99; 0.99 0.98]
A = 1.0000    0.9900
      0.9900    0.9800
>> kappa2 = cond(A)
kappa2 = 3.9206e+004
>>
```

La oss samtidig verifisere (A.5.14) der  $\sigma_{maks}$  og  $\sigma_{min}$  nå er tallverdiene av største og minste egenverdi da matrisa er symmetrisk.

```
>> s = svd(A)
s = 1.9801
      0.0001
>> kappa2 = max(s)/min(s)
kappa2 = 3.9206e+004
```

Ved bruk av Matlab og 2-normen:

$$\|\delta\mathbf{b}\| = 1.4368 \cdot 10^{-4}, \|\mathbf{b}\| = 2.8002 \text{ som gir } \kappa \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 2.0118$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| = 2.8428, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{2} = 1.4142 \text{ som gir } \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 2.0102$$

Vi ser at for dette eksemplet gir (A.5.13) et meget nøyaktig estimat, noe som eksemplet også er laget for å gi. Estimatet angir at den relative feilen er rundt 100% basert på normer, noe som også stemmer godt for komponentene. For 1-normen blir høyre side av (A.5.13) lik 2.0301 og venstresiden 2.0101. For  $\infty$ -normen får vi henholdsvis 2.1094 og 2.0203.

Normalt vil vi ikke ha så god overenstemmelse, slik at (A.5.13) overestimerer vanligvis feilen. Tommelfingerregel: Den Briggske logaritmen ( $\log_{10}$ ) til tilstandstallet angir hvor mange siffer som går tapt i forhold til dem datamaskinen regner med.

Med  $\kappa_2 = 39206 \rightarrow \lg(\kappa_2) \approx 4.6$  som da skal bety at vi taper 4-5 siffer. Nå regner Matlab med 15-16 siffers nøyaktighet, men la oss skrive ut beregningen av  $\mathbf{x}_1$  fra eksemplet med alle sifferene sammen med de nøyaktige verdiene:

$$\text{Matlab: } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2.999999999998766 \\ -1.020299999998754 \end{bmatrix} \text{ Nøyaktig: } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3.000 \\ -1.0203 \end{bmatrix}$$

Vi ser at estimatet ikke er så verst, selv om begrepet ”antall sifferer litt diffust.

**Eksempel A.14 Hilbert - og Pascal-matrise**

Det finnes mange matriser der tilstandstallet vokser sterkt med dimensjonen  $n$ . Et av de mest kjente (og berykta) er Hilbertmatrisa  $\mathbf{H}$  der elementene er gitt ved:

$$h_{ij} = 1/(i + j - 1), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.5.16})$$

Denne kan kalles direkte fra Matlab. F.eks.:

```
>> hilb(4)
ans =
    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
>>
```

Det kan vises at for  $\kappa_2$  får vi en eksponentsiell økning av tilstandstallet på formen  $\kappa_2 \sim e^{3.5n}$ . Determinanten går som  $2^{-2n^2}$  for store  $n$ . La oss løse systemet  $\mathbf{Hx} = \mathbf{b}$  med  $n = 7$  og  $\mathbf{b} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

```
>> H = hilb(7);
>> cond(H)
ans =
    4.7537e+008
>> b = zeros(7,1);
>> b(1) = 1;
>> format long g
>> x = H\b
x =
    49.0000000811447
    -1176.00000330527
    8820.00003230162
    -29400.000126924
    48510.0002346231
    -38808.0002040862
    12012.0000673753
>>
```

De eksakte verdiene er heltallene foran desimalpunktet.

Med  $\log_{10}(\kappa_2) \approx 8.7$ , ser vi igjen at antallet tapte siffer stemmer noenlunde.

Når en matrise er singulær, betyr dette at determinanten av matrisa er lik 0. Determinanten for det første eksemplet er  $-10^{-4}$ , og for  $H$ -matrisa  $\approx 4.84 \cdot 10^{-25}$ . Hvorfor ikke bruke determinanten som en test istedenfor

tilstandstallet ?

Gitt følgende ligningsystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ med løsning } x = 1, y = 2 \text{ og } z = 3$$

Determinanten av koeffisientmatrisa er 1 og  $\kappa = 1$ .

Ved å multiplisere systemet med  $10^{-30}$  på begge sider:

$$\begin{bmatrix} 10^{-30} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-30} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-30} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-30} \\ 2 \cdot 10^{-30} \\ 3 \cdot 10^{-30} \end{bmatrix}$$

med samme løsning som ovenfor.

$\kappa$  er fremdeles lik 1, men nå er determinanten lik  $10^{-90}$ . Vi ser ut fra dette at determinanten ikke er noen god indikator.

Pascal-matrisa er et annet eksempel der tilstandstallet øker raskt med økende  $n$ . Denne kan også kalles direkte fra Matlab.

```
>> pascal(4)
ans =
    1     1     1     1
    1     2     3     4
    1     3     6    10
    1     4    10    20
>>
```

Vi kjenner igjen tallene fra Pascals trekant.

Det kan vises at  $\kappa_2 \sim \frac{16^n}{n\pi}$  for store  $n$ -verdier, mens derimot determinanten er lik 1 for alle  $n$ . La oss se for  $n = 10$ :

```
>> P = pascal(10);
>> cond(P) = 4.1552e+009
>> det(P) = 1
```

I motsetning til Hilbertmatrisa der alle elementene er  $\leq 1$ , er elementene i Pascalmatrisa  $\geq 1$ . Så selv om determinanten er lik 1, er ikke matrisa langt fra å være singulær, da den enkelt kan gjøres singulær ved å trekke 1 fra elementet  $P(n, n)$ . La oss vise det.

```
>> P(10,10) = P(10,10)-1;
>> cond(P) = 1.7581e+018
>> det(P) = 0
```

Legg merke til at  $\kappa_2$  egentlig skulle være  $\infty$ , mens den blir beregnet til et adskillig lavere verdi. Dette er det beste **svd**-funksjonen greier i dette tilfellet. La oss verifisere lign. (A.5.14)

```
>> s = svd(P);
>> smax = max(s)
smax = 6.446013538263486e+004
>> smin = min(s)
smin = 3.666402874313248e-014
>> smax/smin = 1.758130178062029e+018
>>
```

### Eksempel A.15 Tridiagonal matrise

La oss avslutte med en tridiagonal matrise der vi kjenner egenverdiene på analytisk form. Fra avsnitt 3.2.1 i kapittel 3 har vi følgende ligningsystem:

$$-\theta_{i-1} + (2 + \beta^2 h^2) \cdot \theta_i - \theta_{i+1} = d_i$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & -1 & & & \\ -1 & \mathbf{b} & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & \mathbf{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.17a})$$

$$\text{der } b = 2 + \beta^2 h^2 \quad (\text{A.5.17b})$$

Forbindelsen mellom antall ligninger  $n$  og skritt lengden  $h = \Delta x$  er gitt ved:

$$h = \frac{1}{n+1}, \quad n = \frac{1}{h} - 1, \quad n \cdot h = 1 - h, \quad n \text{ er heltall} \quad (\text{A.5.18})$$

Da koeffisientmatrisa er symmetrisk, får vi fra (A.5.14):

$$\kappa_2 = \frac{\sigma_{maks}}{\sigma_{min}} = \frac{|\lambda_{maks}|}{|\lambda_{min}|} \quad (\text{A.5.19})$$

For matrisa i (A.5.17) er egenverdiene gitt ved:

$$\lambda_k = b + 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.5.20})$$

Maks. for  $k = 1$ :

$$\lambda_{maks} = b + 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = b + 2 \cos(\pi h)$$

Min. for  $k = n$ :

$$\lambda_{min} = b + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) = b + 2 \cos(\pi \cdot nh) = b - 2 \cos(\pi h)$$

Innsatt i (A.5.19):

$$\kappa_2 = \frac{b + 2 \cos(\pi h)}{b - 2 \cos(\pi h)} \quad (\text{A.5.21})$$

Nå er vi mest interessert i problemer der skritt lengden  $h$  er liten.

Fra (A.5.17b):

$$b = 2 + \beta^2 h^2 \approx 2 \text{ som det mest ekstreme tilfellet.}$$

(A.5.21) blir nå:

$$\kappa_2 = \frac{b + 2 \cos(\pi h)}{b - 2 \cos(\pi h)} = \frac{2 + 2 \cos(\pi h)}{2 - 2 \cos(\pi h)} = \frac{1 + \cos(\pi h)}{1 - \cos(\pi h)} \quad (\text{A.5.22})$$

(A.5.22) rekkeutviklet for små  $h$ -verdier:

$$\kappa_2 \approx \frac{4}{\pi^2 h^2} - \frac{2}{3} + O(h^2) \approx \left(\frac{2}{\pi h}\right)^2 = \left[\frac{2(n+1)^2}{\pi}\right] \quad (\text{A.5.23a})$$

Dessuten:

$$\log_{10}(\kappa_2) \approx 2 \cdot \log_{10} \left[ \frac{2(n+1)}{\pi} \right] \quad (\text{A.5.23b})$$

Vi konkluderer med at  $\kappa_2 = O(1/h^2) = O(n^2)$  som betyr at tilstandstallet øker med kvadratet av antall ligninger  $n$ , noe som vil være typisk for denne typen randverdiproblemer.

La oss løse ligningsystemet i (A.5.17) med  $b = 2$  for forskjellige verdier av  $n$ . Dette systemet har følgende analytiske løsning:

$$x_k = \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.5.24})$$

Dermed kan vi beregne den største relative feilen  $\varepsilon_{maks}$  gitt ved:

$$\varepsilon_{maks} = \max [(x_k - x_k^*)/x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n] \quad (\text{A.5.25})$$

der  $\mathbf{x}$  er den analytiske løsningen gitt i (A.5.24), mens  $\mathbf{x}^*$  er den numeriske løsningen.

Vi kan også beregne en relativ feil basert på 2-normen ved

$$\varepsilon_{maks} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| / \|\mathbf{x}\| \quad (\text{A.5.26})$$

Legg merke til at alle tallene i (A.5.17) lar seg representere nøyaktig i datamaskinen, slik at avrundingsfeilene som oppstår skyldes løsningsprosessen.

Matlabprogrammet **eksempel3**, se neste side, utfører beregningen for en rekke verdier av  $n$ .

$n$	$\kappa_2$	$\log_{10}(\kappa_2)$	$\varepsilon_{maks}$	$\varepsilon_{narm}$
10	4.84e+001	1.68	2.04e-016	1.37e-016
1000	4.06e+005	5.61	2.51e-013	1.12e-013
10000	4.05e+007	7.61	1.68e-011	7.45e-012
100000	4.05e+009	9.61	5.56e-010	1.20e-010
500000	1.01e+011	11.01	3.75e-007	2.19e-007

Vi ser at  $\log_{10}(\kappa_2)$  overdriver tap av siffer, men kan igjen brukes som en tommelfingerregel. For  $n = 500000$  angir  $\log_{10}(\kappa_2)$  et tap av ca 11 siffer slik at vi bare sitter igjen med ca 5 siffers nøyaktighet med bruk av Matlab, mens  $\varepsilon_{maks}$  angir en relativ feil på rundt  $4 \cdot 10^{-7}$  som tilsvarer ca 6-7 siffers nøyaktighet.

Vi ser dessuten at  $\varepsilon_{norm}$  gir et bra mål for den største relative feilen.

I dette tilfellet er det avrundingsfeil som gir perturbasjoner i data, og vi ser at tilstandstallet igjen gir essensielle opplysninger om nøyaktigheten vi kan forvente.

I dette spesielle tilfellet var vi istrand til å finne et analytisk uttrykk for  $\kappa_2$ . For store matriser er 2-normen og  $\kappa_2$  altfor tidskrevende å beregne. Normalt brukes 1-normen eller  $\infty$ -normen som gitt i (A.5.7). Dersom vi bruker 1-normen, kan vi bruke Matlab-funksjonen *condest* til å beregne  $\kappa_1$ . Dessuten kan vi bruke Matlab-funksjonen *rcond* som gir et estimat av  $1/\kappa_1$  slik at *rcond* = 0 betyr en singulær matrise.

```
% Program eksempel3
% Beregning av tabell under eksempel 3, del 5.
%
clear
% n = antall ligninger
fprintf('    n      k2      lgk2      epsmax      epsnorm \n\n');
for n = [10 1000 10000 100000 500000]
A = spdiags([-ones(n,1),2*ones(n,1),-ones(n,1)],[ -1 0 1],n,n);
d = zeros(n,1);
xa = d;
d(n) = 1;
x = A\d;
fac = 1/(n+1);
for k = 1:n
    xa(k) = k*fac;% Analytisk løsning
end
f = cos(pi/(n+1));
k2 = (1 + f)/(1 - f); % Tilstandstall
lgk2 = log10(k2);
epsmax = max(abs((xa - x)/xa));
epsnorm = norm(xa - x)/norm(xa);

fprintf('%8.0f %10.2e %7.2f %11.2e %11.2e \n',n,k2,lgk2,epsmax,epsnorm);
end
```

## GRUNNLIGNINGER

### DEN MATERIELLDERIVERTE

La  $f = f(t, x, y, z)$  være en vilkårlig, kontinuerlig deriverbar funksjon. Den materiellderiverte av  $f$  er gitt ved:

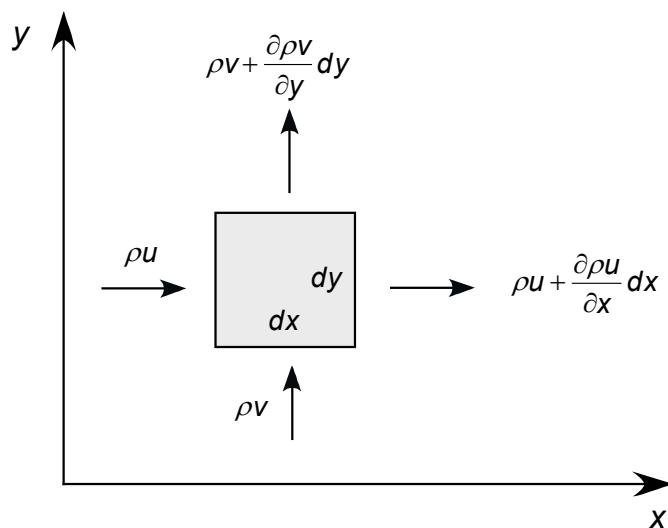
$$\dot{f} \equiv \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{B.0.1})$$

der hastighetsvektoren  $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ .

Andre betegnelser er partikkelderiverte og substansiellderiverte.

I fortsettelsen opererer vi for enkelhets skyld i to dimensjoner ( $dz = 1$ ).

### BEVARELSE AV MASSE ( KONTINUITETSLIGNINGEN )



Figur B.1

Fra figur B.1:

$$(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx - \rho u) dy + (\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy - \rho v) dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdy = 0$$

som gir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.0.2a})$$

eller

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{B.0.2b})$$

Ved å utføre derivasjonen i (B.0.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

som gir:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{B.0.3a})$$

som også kan skrives:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (\text{B.0.3b})$$

Definerer en inkompressibel fluid ved:

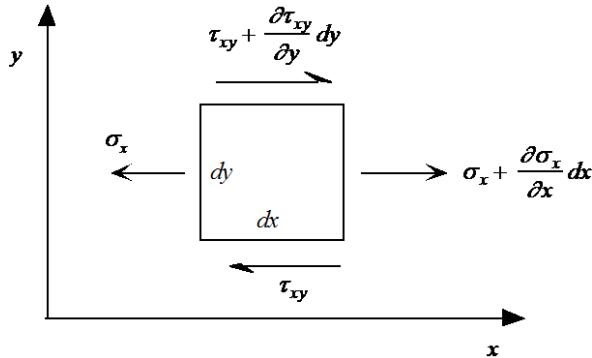
$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\text{B.0.4})$$

som impliserer:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.0.5})$$

Spesialtilfellet  $\rho = \text{konstant}$  i hele fluiden impliserer selvfølgelig inkompressibilitet.

## BEVEGELSESLIGNINGENE



Figur B.2

Newton's law in  $x$ -direction:

$$\rho dxdy \frac{Du}{Dt} = \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dx$$

which gives:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{B.0.6})$$

## MATERIALLIGNING

Material alignment for an incompressible Newton fluid:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.0.7})$$

It means  $\mu$  [Pa·s] is the dynamic viscosity coefficient. (B.0.7) gives a linear relationship between stresses and velocity gradients. Note that linearity implies isotropy in contrast to Hooke's law for a solid material where we must require isotropy. For a compressible fluid contains material equation to independent parameters.

The kinematic viscosity  $\nu$  is defined as:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} [\text{m}^2/\text{s}] \quad (\text{B.0.8})$$

Siden definisjonen inneholder  $\rho$ , brukes  $\nu$  stort sett bare i sammenheng med inkompresible fluider.

Noen tallverdier ved 20°C og 1 atm. trykk:

Vann	Luft
$\mu = 10^{-3}$ Pa·s	$\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s
$\nu = 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s	$\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ m <sup>2</sup> /s

## NAVIER-STOKES LIGNINGER FOR EN INKOMPRESSIBEL FLUID

Materialligningene (B.0.7) innsatt i (B.0.6):

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Da  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , får vi totalt:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.0.9})$$

## ENERGI-LIGNINGEN

Termodynamikkens 1. lov:

$$dE_t = dQ + dW$$

der  $E_t$  = total energi,  $Q$  er tilført varme og  $W$  er arbeid tilført systemet; alle størrelsene regnet per volumenhett.

$$E_t = \rho \left( e - \frac{1}{2} V^2 \right) \text{ der}$$

$e$  = indre energi per masse-enhet.

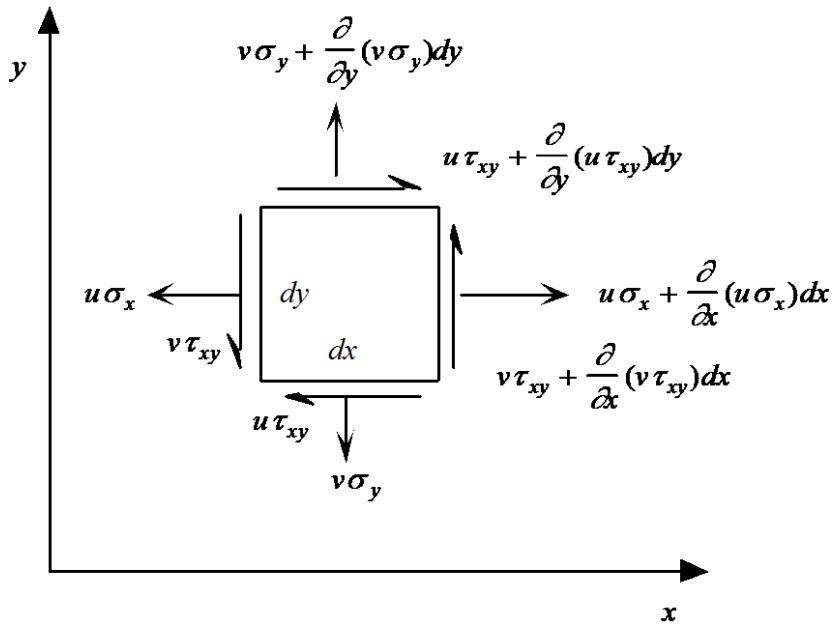
$$\frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = \text{kinetisk energi per masse-enhet.}$$

(Potensiell energi er inneholdt i  $W$ )

Den 1. loven kan da skrives:

$$\begin{aligned}\frac{DE_t}{Dt} &= \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt} \\ \frac{DE_t}{Dt} &= \rho \left[ \frac{De}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (V^2) \right]\end{aligned}\quad (\text{B.0.10})$$

**EFFEKT** (arbeid pr. tidsenhet)



Figur B.3

$$\begin{aligned}\frac{DW}{Dt} dx dy &= \left[ u\sigma_x + \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) dx - u\sigma_x \right] dy \\ &\quad + \left[ u\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{xy}) dy - u\tau_{xy} \right] dx \\ &\quad + \left[ v\sigma_y + \frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_y) dy - v\sigma_y \right] dx \\ &\quad + \left[ v\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy}) dx - v\tau_{xy} \right] dy\end{aligned}$$

Sammentrukket:

$$\begin{aligned}\frac{DW}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy}) \\ &= u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma_x + u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} \\ &\quad + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \sigma_y + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

som kan skrives:

$$\begin{aligned}\frac{DW}{Dt} = & u \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + v \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial v}{\partial y} \sigma_y + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Fra bevegelsesligningene (B.0.6):

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\end{aligned}$$

som gir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (u^2) &= u \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (v^2) &= v \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Med  $V^2 = u^2 + v^2$  får vi:

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (V^2) + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial v}{\partial y} \sigma_y + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Innsatt fra material-ligningene (B.0.7) for  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$ :

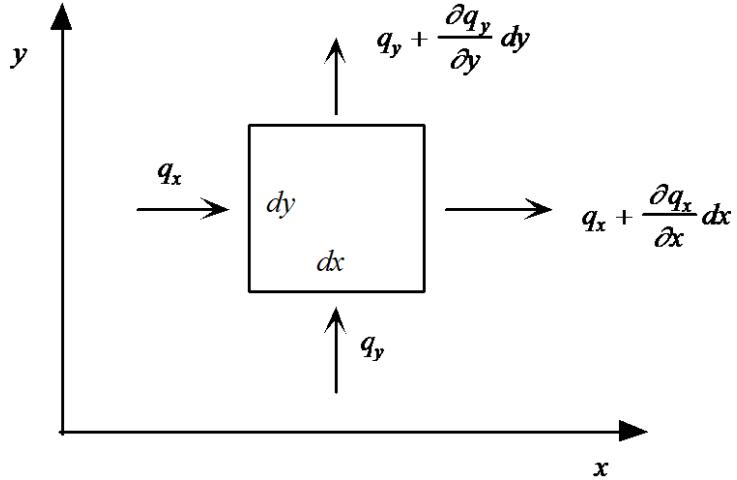
$$\begin{aligned}\frac{DW}{Dt} = & \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (V^2) - p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ = & \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (V^2) + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2\end{aligned}$$

Innfører dissipasjonsfunksjonen  $\Phi$  definert ved:

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{B.0.11})$$

Uttrykket for arbeidet (effekten) blir:

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (V^2) + \Phi \quad (\text{B.0.12})$$



Figur B.4

Fouriers lov:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{B.0.13})$$

der  $k[\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})]$  er varmeledningstallet.

Netto varmestrøm per tidsenhet inn i elememtet:

$$\frac{DQ}{Dt} dx dy = - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) dy - \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right) dx$$

som sammentrukket gir:

$$\frac{DQ}{Dt} = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right)$$

Ved bruk av Fouriers lov , lign. (B.0.13):

$$\frac{DQ}{Dt} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.0.14})$$

Vi setter nå uttrykkene for  $\frac{DW}{Dt}$  fra (B.0.12) og  $\frac{DQ}{Dt}$  fra (B.0.14) inn i (B.0.10):

$$\rho \left[ \frac{De}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (V^2) \right] = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi + \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (V^2)$$

som sammentrukket blir:

$$\rho \frac{De}{Dt} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi$$

For en idell gass:  $e = c_v T$ , der  $c_v$  er spesifikk varme ved konstant volum.

For en væske er  $c_p \approx c_v$  da en væske er bortimot inkompresibel. Her er  $c_p$

spesifikk varme ved konstant trykk. Siden utledningen ovenfor forutsetter inkompressibilitet, er det ikke nødvendig å skille mellom  $c_v$  og  $c_p$ . Vi setter derfor  $c_p = c_v = c$  der  $c$  er egenvarmen.

Får da:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi$$

eller ordnet:

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\Phi}{\rho \cdot c} \quad (\text{B.0.15})$$

Den termiske diffusiviteten  $\alpha$  er gitt ved:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c} [\text{m}^2/\text{s}] \quad (\text{B.0.16})$$

Dersom temperaturgradientene er store, eventuelt små fluidhastigheter, kan dissipasjonsfunksjonen  $\Phi$  neglisjeres i (B.0.15):

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.0.17})$$

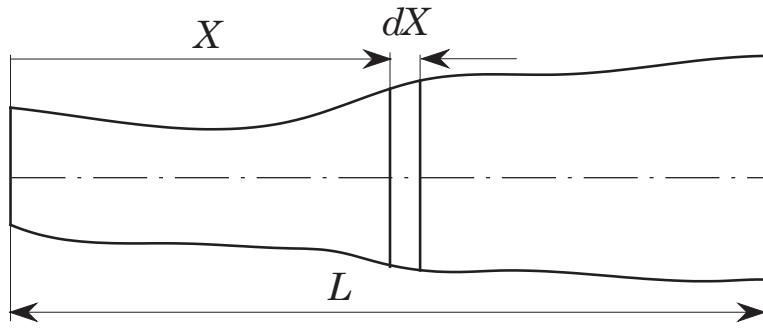
Dersom vi ikke har noen bevegelse i fluiden, får vi følgende ligning:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.0.18})$$

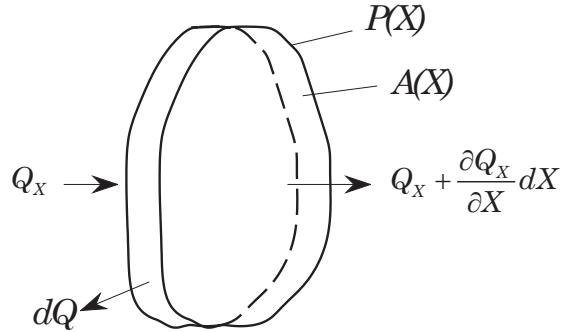
Dette er varmeledningsligningen i to dimensjoner og gjelder også for et fast stoff. Noen verdier for den termiske diffusiviteten  $\alpha$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] ved 20°C:

Stål ( $< 0.5\%$ C)	$1.45 \cdot 10^{-5}$
Vann	$1.45 \cdot 10^{-7}$
Luft	$2.1 \cdot 10^{-5}$
Jord(tørr)	$4.0 \cdot 10^{-7}$

## KVASI-ENDIMENSJONAL VARMELEDNING



Figur B.5



Figur B.6

Figur B.5 viser et legeme med hovedutstrekning i  $X$ -retning. Vi vil anta at temperaturen  $T$  hovedsakelig bare varierer i  $X$ -retningen. Figur B.6 viser et utsnitt  $dX$  av dette legemet. Med henvisning til figurene ovenfor, har vi følgende størrelser med typiske enheter:

$$A(X) = \text{tverrsnittareal} [\text{m}^2]$$

$$P(X) = \text{omkrets} [\text{m}]$$

$$Q(X) = \text{varme pr. tidsenhet} [\text{W}]$$

$$T(X) = \text{legeme-temperatur} [\text{°C}]$$

$$T_\infty = \text{omgivelsestemperatur} [\text{°C}]$$

$$k = \text{varmeledningstallet} [\text{W}/\text{m}/\text{°C}]$$

$$h = \text{varmeovergangstallet} [\text{W}/\text{m}^2/\text{°C}]$$

$$c = \text{egenvarme} [\text{J}/\text{kg}/\text{°C}]$$

$$\rho = \text{densitet} [\text{kg}/\text{m}^3]$$

$$\alpha = \text{termisk diffusivitet} [\text{m}^2/\text{s}]$$

Fouriers lov:

$$Q_X = -kA \frac{\partial T}{\partial X}$$

Newton's avkjølingslov:

$$dQ = hP \cdot dX \cdot [T(X) - T_\infty]$$

Bruker  $\tau$  som fysisk tid.

Varmebalanse:

$$\begin{aligned} Q_X &= Q_X + \frac{\partial Q_X}{\partial X} dX + dQ + A\rho c \cdot dX \frac{\partial T}{\partial \tau} \\ &\rightarrow \frac{\partial Q_X}{\partial X} dX + dQ + A\rho c \cdot dX \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \end{aligned}$$

som innsatt for  $dQ_X$  og  $dQ$  gir:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( k \cdot A \frac{\partial T}{\partial X} \right) - P \cdot h \cdot [T(X) - T_\infty] = A \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{B.0.19})$$

Her kan både  $h$  og  $k$  være funksjoner av  $X$  og  $T$ .

Når vi forutsetter at omgivelsestemperaturen  $T_\infty$  er konstant og  $k$  er uavhengig av  $X$ , kan (B.0.19) skrives på formen:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( A \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial X} \right) - \frac{h}{k} P \cdot \bar{T}(X) \right] \quad (\text{B.0.20})$$

Her er

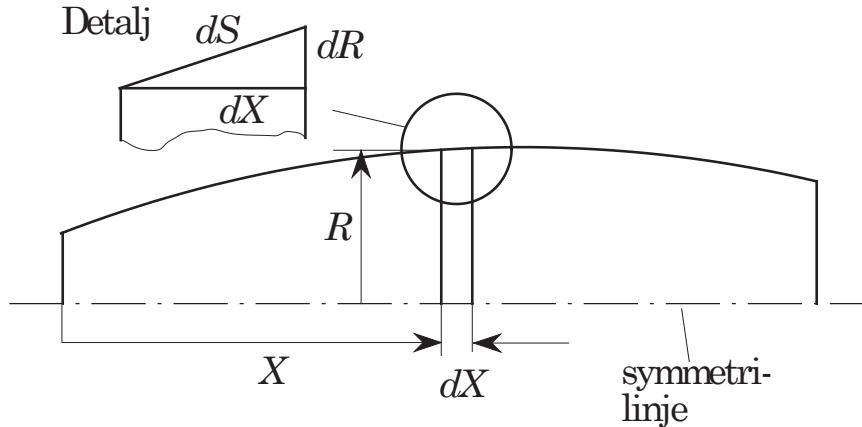
$$\bar{T}(X) = T(X) - T_\infty \text{ og } \alpha = \frac{k}{\rho \cdot c} \quad (\text{B.0.21})$$

Variasjonsområdet for  $h$  er stort. I mange tilfeller brukes en middlere (global) verdi for hele legemet. Dette markeres ofte ved å bruke symbolet  $\bar{h}$  istedenfor  $h$ .

For stasjonære forhold:

$$\frac{d}{dX} \left( A \cdot \frac{d\bar{T}}{dX} \right) - \frac{h}{k} P \cdot \bar{T}(X) = 0 \quad (\text{B.0.22})$$

La oss se på tilfellet der legemet er rotasjonsymmetrisk.



Figur B.7

I utledningen har vi satt arealet for overflata av utsnittet lik  $P \cdot dX$  der  $P$  er lik omkretsen som i figuren ovenfor er lik  $2\pi R$ . Fra detaljen i figuren ovenfor ser vi at et mer nøyaktig uttrykk for arealet er  $P \cdot dS$ .

Fra figuren:

$$(dS)^2 = (dX)^2 + (dR)^2 \rightarrow dS = dX \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{dR}{dX} \right)^2} \quad (\text{B.0.23})$$

$P \cdot dX$  kan da erstattes med

$$P \cdot dX \sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dX}\right)^2} \quad (\text{B.0.24})$$

Nå har vi forutsatt at vi har en tilnæmet endimensjonal prosess som igjen betyr at legemet må være slankt; dvs.:  $\left(\frac{dR}{dX}\right)^2 \ll 1$ . Dette betyr at tilnærmlelsen  $dS \approx dX$  er i tråd med fysikken. I noen tilfeller der  $dR/dX = \text{konstant}$ , er det vanlig å inkludere dette ledet. (Dette gjelder også for tilfeller der vi ikke har rotasjonsymmetri.).



## GRENSESIKT

### C.1 GRENSESIKTLIGNINGER

Vi ser bare på strømning av en inkompressibel fluid. Skriver opp basisligningene som er utledet i appendiks B:

Kontinuitetsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.1.1})$$

Navier-Stokes ligninger:

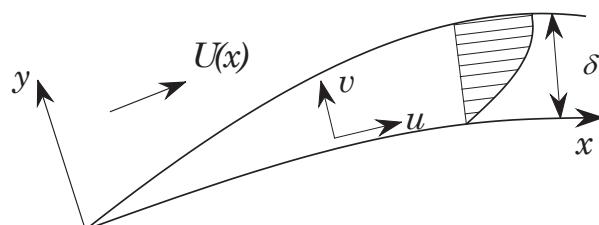
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{C.1.2a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{C.1.2b})$$

Energiligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{C.1.3})$$

Vi har neglisjert dissipasjonsfunksjonen i (C.1.3).



Figur C.1

$\delta$  er grensesjiktstykken. Heftbetingelser ved veggen:  $u = v = 0$  for  $y = 0$ . Dersom vi har blåsing eller suging i grensesjiktet, vil  $v \neq 0$  for  $y = 0$ . Grensesjiktet oppstår p.g.a. heftbetingelsen  $u = 0$  ved veggen.

I intervallet  $y \in [0, \delta]$  vil hastighetsgradienten  $\frac{\partial u}{\partial y}$  være stor; noe som impliserer store skjærspenninger selv om viskositeten  $\mu$  er liten fordi  $\tau \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  nær veggen.

For  $\nu$  reduseres (C.1.2) til Eulerligningene som er et sett av 1. ordens PDL, dvs: Bare en randbetingelse kan tilfredsstilles. I denne typen problem eksisterer det to lengdeskalaer  $L$  og  $\delta$  der  $L$  er skalaen parallel med  $x$ -aksen og  $\delta$  er skalaen parallel med  $y$ -aksen. Det som karakteriserer et grensesjiktproblem er at  $\delta \ll L$ . La  $U_0$  være en karakteristisk hastighet i  $x$ -retningen.

Dersom vi innfører et Reynoldstall  $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$ , er et grensesjikt karakterisert ved  $\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$  der  $\sim$  blir brukt i betydningen størrelsesorden.

Vi innfører følgende dimensjonsløse størrelser:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}\sqrt{Re}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U_0}\sqrt{Re}, \quad \bar{p} = \frac{p - p_0}{\rho U_0^2}, \quad \bar{t} = t \frac{U_0}{L} \quad (\text{C.1.4a})$$

$$\text{der Reynoldstallet } Re = \frac{U_0 L}{\nu} \quad (\text{C.1.4b})$$

(C.1.4) innsatt i kontinuitetsligningen gir:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{C.1.5a})$$

Navier-Stokes i  $x$ -retning, lign. (C.1.2a) blir:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{C.1.5b})$$

Navier-Stokes i  $y$ -retning, lign. (C.1.2b) blir:

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + Re \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{C.1.5c})$$

Lar vi  $R \rightarrow \infty$ , får vi følgende bevegelsesligninger:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{C.1.6a})$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{C.1.6b})$$

Dette betyr at  $p$  er bare en funksjon av  $x$  slik at trykket i grensesjiktet er det samme som utenfor. Med andre ord:

$$p = p(x) \quad (\text{C.1.7})$$

Av Navier-Stokes ligningene sitter vi da igjen med (C.1.5) og (C.1.6).

Bernoullis ligning bruket i fri-strømmen:

$$\frac{1}{2} U^2 + \frac{p}{\rho} = \text{konst.} \quad \text{som ved derivasjon gir:}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U(x) \frac{d}{dx} U(x) \quad (\text{C.1.8})$$

der  $U(x)$  er fristrømshastigheten.

Dersom vi anvender samme prosedyre på energiligningen, får vi:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{C.1.9})$$

der ledet  $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}$  forsvinner når  $Re \rightarrow \infty$ .

Når vi går tilbake til de opprinnelige variable, får vi det fullstendige (klassiske) settet av grensesjiktligninger for todimensjonal og inkompresibel strømning:

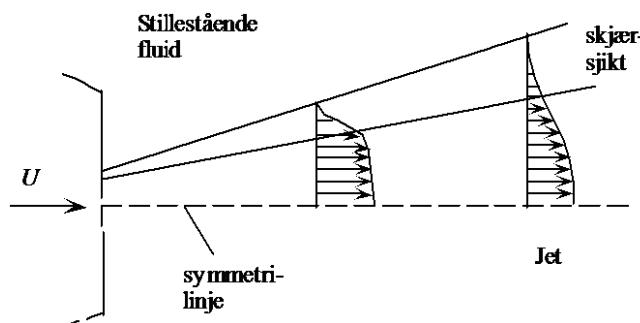
Kontinuitetsligningen:  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Bevegelsesligningen:  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{C.1.10})$

Energiligningen:  $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

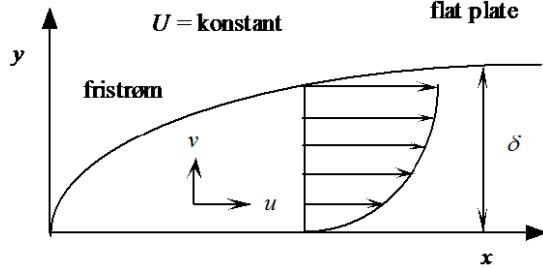
Utledningen av grensesjiktligningene ovenfor forutsetter  $Re \rightarrow \infty$ , men i praksis håper vi på at vi kan bruke dem også for endelige verdier av Reynoldstallet, noe som erfaringen bekrefter.

Grensesjiktligningene kan brukes langs krumme flater når vi forutsetter at krumningen er moderat. Ved stor krumming må en inkludere centrifugaleffekten i trykkleddet i ligning (C.1.2b). Betegnelsen grensesjikter ovenfor brukt i den mer generelle betydningen skjær-sjikt", dvs: Vi inkluderer også tilfeller der skjær-sjikten ikke nødvendigvis oppstår langs en fastflate. Eksempel på grensesjikt langs en fastflate er gitt i eksempler 2.4 og 2.5. Fig. C.2 er et eksempel på et grensesjikt (skjær-sjikt) som oppstår p.g.a. en fluid som strømmer igjennom en dyse ut i en stillestående fluid.(jet)



Figur C.2

## C.2 BLASIUS LIGNING



Figur C.3

For en stasjonær og inkompressibel grensesjiktstrømning, får vi fra lign. (C.1.10) i del C.1:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.2.1})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{C.2.2})$$

Ser på det tilfellet at fristrømhastigheten  $U = \text{konstant} = U_0$ .

Bernoullis ligning (C.1.8) i del C.1 gir for dette tilfellet  $\frac{dp}{dx} = 0$ .

(C.2.2) forenkler seg til:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{C.2.3})$$

Randbetingelser:

$$u = 0 \text{ for } y = 0 \quad (\text{C.2.4a})$$

$$u \rightarrow U_0 \text{ for } y \rightarrow \delta \quad (\text{C.2.4b})$$

For å oppfylle kontinuitetsligningen (C.2.1), innfører vi strømfunksjonen  $\psi(x, y)$  definert ved:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{C.2.5})$$

( Se White [22], avsnitt 4.7 )

I del C.1 har vi funnet et estimat for grensesjikttykkelsen  $\delta$  med

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

der vi definerer et Reynoldstall  $Re_x$  ved:

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}, \quad x > 0 \quad (\text{C.2.6})$$

som antyder (se lign. (2.3.11)) følgende transformasjoner til dimensjonsløse likedannhetsvariable:

Koordinat:

$$\eta = \frac{k_1}{\sqrt{x}} y \quad (\text{C.2.7a})$$

Strømfunksjon:

$$f(\eta) = \frac{\psi}{k_2 \sqrt{x}} \quad (\text{C.2.7b})$$

$$\text{der } k_1 = \sqrt{\frac{U_0}{2\nu}}, \quad k_2 = \sqrt{2U_0\nu} \quad (\text{C.2.7c})$$

Vi skal senere se at (C.2.7b) impliserer

$$f'(\eta) = \frac{u}{U_0} \quad (\text{C.2.7d})$$

(C.2.7d) brukes ofte som definisjon av  $f$ .

$k_1$  og  $k_2$  er valgt som gitt i (C.2.7c) for å gjøre  $\eta$  og  $f$  dimensjonsløse og samtidig gi et pent uttrykk tilslutt.

Notasjon:  $\frac{df}{d\eta} \equiv f'(\eta)$  og tilsvarende for høyere deriverte.

Ved derivasjon (kan gjerne bruke Maple her):

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{k_2}{2\sqrt{x}} [f(\eta) - \eta \cdot f'(\eta)] \quad (\text{C.2.8a})$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 f'(\eta) \quad (\text{C.2.8b})$$

Dette gir  $f'(\eta) = \frac{u}{U_0}$  som bemerket i forbindelse med (C.2.7d).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_0 \eta \cdot f''(\eta)}{2x} \quad (\text{C.2.8c})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_0 f''(\eta) \frac{k_1}{\sqrt{x}} \quad (\text{C.2.8d})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_0^2}{2x\nu} f'''(\eta) \quad (\text{C.2.8e})$$

(C.2.8a) - (C.2.8e) innsatt i (C.2.3):

$$\begin{aligned} U_0 f'(\eta) \left[ \frac{-U_0 \eta f''(\eta)}{2x} \right] + \frac{k_2}{2\sqrt{x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \frac{U_0 k_1 f''(\eta)}{\sqrt{x}} \\ = \frac{U_0^2}{2x\nu} f'''(\eta) \cdot \nu \end{aligned}$$

som gir:

$$f'''(\eta) + f(\eta) \cdot f''(\eta) = 0 \quad (\text{C.2.9})$$

Dette er Blasius ligning (1908). Blasius brukte egentlig en variant av de gitte transformasjonene med  $\tilde{\eta} = \sqrt{2}\eta$  og  $\tilde{f} = \sqrt{2}f$  som gir differensialligningen:

$$\tilde{f}'''(\tilde{\eta}) + \frac{1}{2}\tilde{f}(\tilde{\eta}) \cdot \tilde{f}''(\tilde{\eta}) = 0 \quad (\text{C.2.10})$$

(Se White [22], avsnitt 7.4 )

### Randbetingelsene.

Heftbetingelsen  $u = 0$  for  $y = 0$  blir nå  $f'(0) = 0$  da  $f'(\eta) = \frac{u}{U_0}$  fra (C.2.7d). Uten suging eller blåsing gjennom randen  $\eta = 0$ , er den andre heftbetingelsen  $v = 0$  for  $\eta = 0$ . Fra (C.2.8a) blir denne betingelsen  $f(0) = 0$ . Betingelsen  $u \rightarrow U_0$  for  $y \rightarrow \delta$  fra (C.2.4b), blir nå  $f'(\eta) \rightarrow 1$  for  $\eta \rightarrow \infty$ .

Totalt får vi:

Blasius ligning:

$$f''' + f f'' = 0 \quad (\text{C.2.11a})$$

Randbetingelser:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\eta_\infty) = 1 \quad (\text{C.2.11b})$$

La oss finne et uttrykk for skjærspenningen  $\tau_{xy}$ .

Da  $Re >> 1$  i et grensesjikt, betyr dette at  $\tau_{xy} \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  i sjiktet. Denne relasjonen er eksakt for  $y = 0$ . Fra (C.2.8d):  $\frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \cdot f''(\eta) \cdot \frac{k_1}{\sqrt{x}}$  som gir:

$$\tau_{xy} = \mu U_0 \cdot f''(\eta) \sqrt{\frac{U_0}{2\nu x}} \rightarrow \tau_{vegg} = \mu U_0 \cdot f''(0) \sqrt{\frac{U_0}{2\nu x}} \quad (\text{C.2.12})$$

### MAPLE-PROGRAM

Nedenfor ser vi hvordan vi kan finne Blasiusligningen ved å bruke det Maple. I programmet har vi satt  $a = k_1$  og  $b = k_2$ ; se lign (C.2.7c). Dessuten har vi brukt  $z$  istedenfor  $\eta$  i begynnelsen av programmet. Utskriften viser at lign. (C.2.9) gjelder bare når  $x \neq 0$ .

```
> alias(f=f(z));
> assume(a>0,b>0,x>0,nu>0,U>0):
> z:=a*y/sqrt(x);
> psi:=b*sqrt(x)*f;
> v:=-diff(psi,x);
> u:=diff(psi,y);
> dudx:=diff(u,x);
> dudy:=diff(u,y);
> dudy2:=diff(dudy,y);
> eq:=simplify(u*dudx+v*dudy-nu*dudy2):
> eq:=subs(z=eta,eq):
> eq:=subs(a=sqrt(U/(2*nu)),b=sqrt(2*U*nu),eq):
> eq:=simplify(eq):
> eq:=convert(eq,diff,eta);
```

$$eq := -\frac{U^2 \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f(\eta) \right) f(\eta) + \left( \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} f(\eta) \right) \right]}{2x}$$

### C.3 FALKNER-SKAN LIGNINGEN

Kontinuitetsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.3.1})$$

Bevegelsesligningen:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{C.3.2})$$

Tilfredstiller (C.3.1) ved å innføre strømfunksjonen  $\psi(x, y)$  definert ved:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{C.3.3})$$

#### Falkner - Skan transformasjonen

Koordinat:

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{(2-\beta)\nu x}} y \quad (\text{C.3.4})$$

Strømfunksjon:

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{(2-\beta)U\nu x}} \quad \text{der } f'(\eta) = \frac{u}{U(x)} \quad (\text{C.3.5})$$

$$\text{og } U(x) = U_0 x^m = U_0 x^{\frac{\beta}{2-\beta}} \quad \text{der } \beta = \frac{2m}{m+1} \quad (\text{C.3.6})$$

Merk at  $U_0$  generelt er en dimensjonsbehaftet konstant.

Får følgende uttrykk for hastigheter og deriverte i lign. (C.3.2):

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\frac{U\nu}{(2-\beta)x}} [f + \eta f'(\beta-1)], \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U(x) f'(\eta) \quad (\text{C.3.7a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U}{(2-\beta)x} [\beta f'(\eta) + \eta(\beta-1) f''(\eta)], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U \sqrt{\frac{U}{(2-\beta)\nu x}} f''(\eta) \quad (\text{C.3.7b})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U^2}{(2-\beta)\nu x} f''(\eta) \quad (\text{C.3.7c})$$

Ved bruk av (C.1.8):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{U^2 m}{x} = \frac{U^2}{x} \left( \frac{\beta}{2-\beta} \right) \quad (\text{C.3.8})$$

Lign. (C.3.7)-(C.3.8) innsatt i (C.3.2):

$$f''' + f f'' + \beta [1 - (f')^2] = 0 \quad (\text{C.3.9a})$$

Standard randbetingelser:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f(\eta_\infty) = 1 \quad (\text{C.3.9b})$$

Ved å sette  $\beta = 0$ , får vi relasjonene gitt i del C.2 for Blasius ligning.

**NUMERISK LØSNING** Ligning (C.3.9) skrevet som et system av 1. ordens diff. ligninger:

$$\begin{aligned} f' &= f_1 \\ f'_1 &= f_2 \\ f'_2 &= -[f \cdot f_2 + \beta \cdot (1 - f_1^2)] \end{aligned} \quad (\text{C.3.10a})$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} f(0) &= f_1(0) = 0 \\ f_1(\eta_\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.3.10b})$$

Setter

$$s = f''(0) = f_2(0) \text{ slik at} \quad (\text{C.3.11})$$

$$\phi(s) = f_1(\eta_\infty; s) - 1 = 0 \quad (\text{C.3.12})$$

**ESTIMAT av  $s^0$ ,  $s^1$  og  $\eta_\infty$**

Programmet **fsksec** løser F-S-ligningen for  $\beta_{sep} \leq \beta \leq 1.999$  der  $\beta_{sep} \equiv \beta_s = -0.19883768$ .

**Startverdier for  $s^0$  og  $s^1$**

$$\beta_s \leq \beta \leq 1.0$$

$$s^0 = [1.27 \cdot (0.2 + \beta)]^{0.56} \quad (\text{C.3.13a})$$

$$s^1 = [1.23(\beta - \beta_s)]^{0.54} \quad (\text{C.3.13b})$$

$$1.0 \leq \beta \leq 1.999$$

$$s^0 = 1.23 \cdot \beta^{0.454} \quad (\text{C.3.14a})$$

$$s^1 = -0.0693 \cdot \beta^2 + 0.661 \cdot \beta + 0.642 \quad (\text{C.3.14b})$$

**VERDIER FOR  $\eta_\infty$**

$\eta_\infty$  er bestemt slik at  $f''(\eta_\infty) \approx 10^{-5}$ .

$$\begin{aligned} \beta_s \leq \beta \leq 0.0 \\ \eta_\infty = 36.76 \cdot \beta^2 + 2.0 \cdot \beta + 5.87 \end{aligned} \quad (\text{C.3.15})$$

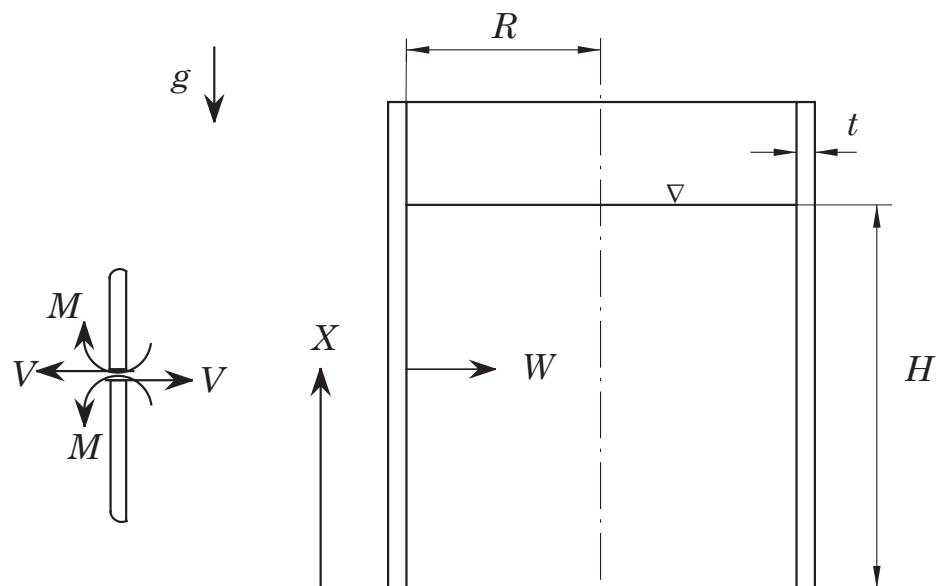
$$\begin{aligned} 0.0 \leq \beta \leq 1.0 \\ \eta_\infty = 0.633 \cdot \beta^2 - 1.68 \cdot \beta + 5.76 \end{aligned} \quad (\text{C.3.16})$$

$$\begin{aligned} 1.0 \leq \beta \leq 1.999 \\ \eta_\infty = 0.125 \cdot \beta^2 - 0.9 \cdot \beta + 5.436 \end{aligned} \quad (\text{C.3.17})$$

# TILLEGG D

## VANNTANK

### D.1 TANK MED KONSTANT VEGGTYKKELSE



Figur D.1

Figuren viser en sylinderisk tank fylt med en væske til en høyde  $H$ .  $W$  er radiell forskyvning. På detaljen til venstre er  $V$  skjærkraft pr. lengdeenhet og  $M$  moment pr. lengdeenhet. Pilene angir positiv retning.

Differensialligningen for forskyvningen  $W$  er gitt ved:

$$\frac{d^4W}{dX^4} + B \cdot W = -\gamma \frac{(H - X)}{D} \quad (\text{D.1.1a})$$

$$\text{der } B = \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 t^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \gamma = \rho g \quad (\text{D.1.1b})$$

Her er  $\nu$  Poissons tall,  $E$  elastisitetsmodelen og  $\rho$  væskas tetthet. Detaljert utledning er gitt i Timoshenko & Woinowsky-Krieger [5], avsnitt 117.

Innfører dimensjonsløse størrelser:

$$x = \frac{X}{H} \text{ og } \omega = \frac{E}{\gamma H t} \cdot \left( \frac{t}{R} \right)^2 \cdot W \quad (\text{D.1.2})$$

som innsatt i (D.1.1) gir følgende differensialligning:

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \cdot \omega = -4\beta^4(1-x) \quad (\text{D.1.3a})$$

$$\text{der } \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)H^4}{R^2 t^2} \quad (\text{D.1.3b})$$

Homogenløsning:

$$\omega_h(x) = e^{\beta x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) + e^{-\beta x}(C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x))$$

Partikulærløsning:

$$\omega_p(x) = -(1-x)$$

Totalløsning av (D.1.3):

$$\omega(x) = \omega_h(x) + \omega_p(x)$$

### Randverdier.

For  $x = 0$ :

$$W = 0, \frac{dW}{dX} = 0 \text{ (Fast innspent)}$$

Skjærkraft og moment = 0 for  $X = H$  som gir:

$$M(H) = -D \frac{d^2 W(H)}{dX^2} = 0, V(H) = -D \frac{d^3 W(H)}{dX^3} = 0$$

Randverdiene uttrykt ved dimensjonsløse størrelser blir da:

$$\begin{aligned} \text{For } x = 0 \quad \omega = 0, \frac{d\omega}{dx} = 0 \\ \text{For } x = 1 \quad \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0, \frac{d^3 \omega}{dx^3} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.1.4})$$

### Fysikalske størrelser

Dimensjonsløst moment  $m(x) = -\frac{d^2 \omega}{dx^2}$  og dimensjonsløs skjærkraft  $v(x) = -\frac{d^3 \omega}{dx^3}$ . Med disse notasjonene beregner vi de fysikalske størrelsene fra

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{\gamma H R^2}{E \cdot t} \omega(x), \frac{R^2 t^2}{12(1-\nu^2)} = \frac{1}{4} \left( \frac{H}{\beta} \right)^4 \\ M(x) &= \frac{\gamma}{H} \cdot \frac{R^2 t^2}{12(1-\nu^2)} \cdot m(x) = \frac{\gamma}{4} \cdot \frac{H^3}{\beta^4} \cdot m(x) \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

$$V(x) = \frac{\gamma}{H^2} \cdot \frac{R^2 t^2}{12(1-\nu^2)} \cdot v(x) = \frac{\gamma}{4} \cdot \frac{H^2}{\beta^4} \cdot v(x), X = H \cdot x$$

### Uttrykkene for de fortløpende deriverte

$$\begin{aligned}\omega'(x) &= \beta e^{\beta x} [\sin(\beta x) \cdot (C_2 - C_1) + \cos(\beta x) \cdot (C_1 + C_2)] \\ &\quad + \beta e^{-\beta x} [-\sin(\beta x) \cdot (C_3 + C_4) + \cos(\beta x) \cdot (C_4 - C_3)] + 1\end{aligned}\quad (\text{D.1.6a})$$

$$\begin{aligned}\omega''(x) &= 2\beta^2 e^{\beta x} (-\sin(\beta x) \cdot C_1 + \cos(\beta x) \cdot C_2) \\ &\quad + 2\beta^2 e^{-\beta x} (\sin(\beta x) \cdot C_3 - \cos(\beta x) \cdot C_4)\end{aligned}\quad (\text{D.1.6b})$$

$$\begin{aligned}\omega'''(x) &= 2\beta^3 e^{\beta x} [-\sin(\beta x) \cdot (C_2 - C_1) + \cos(\beta x) \cdot (C_1 + C_2)] \\ &\quad + 2\beta^3 e^{-\beta x} [\sin(\beta x) \cdot (C_4 - C_3) + \cos(\beta x) \cdot (C_3 - C_4)]\end{aligned}\quad (\text{D.1.6c})$$

**Bestemmelse av konstantene  $C_1, C_2, C_3$  og  $C_4$**

- 1)  $\omega = 0$  for  $x = 0 \rightarrow C_1 + C_3 - 1 = 0$
- 2)  $\omega'(x) = 0$  for  $x = 0 \rightarrow C_1 + C_2 - C_3 + C_4 + \frac{1}{\beta} = 0$
- 3)  $\omega''(x) = 0$  for  $x = 1 \rightarrow$   

$$-\sin(\beta C_1) + \cos(\beta C_2) + e^{-2\beta} \sin(\beta C_3) - e^{-2\beta} \cos(\beta C_4) = 0$$
- 4)  $\omega'''(x) = 0$  for  $x = 1 \rightarrow$   

$$-(\sin(\beta) + \cos(\beta))C_1 + (\cos(\beta) - \sin(\beta))C_2 +$$
  

$$e^{-2\beta}(\cos(\beta) - \sin(\beta))C_3 + e^{-2\beta}(\sin(\beta) + \cos(\beta))C_4 = 0$$

Ved å løse dette systemet, får vi:

$$J = 4\beta(\cos^2(\beta) + \cosh^2(\beta)) \quad (\text{D.1.7})$$

$$C_1 = \left[ 2\cos^2(\beta) \cdot (\beta - 1) - \sin(2\beta) \cdot \beta \cdot (1 + e^{-2\beta}) \right] / J \quad (\text{D.1.8a})$$

$$C_2 = \left[ 2\cos^2(\beta) \cdot (\beta) + \sin(2\beta) \cdot (1 - \beta) - (1 + \beta) \cdot (1 + e^{-2\beta}) \right] / J \quad (\text{D.1.8b})$$

$$C_3 = \left[ \sin(2\beta) \cdot \beta + (1 + \beta) \cdot 2\cos^2(\beta) + \beta \cdot (1 + e^{2\beta}) \right] / J \quad (\text{D.1.8c})$$

$$C_4 = - \left[ 2\cos^2(\beta) \cdot \beta - \sin(2\beta) \cdot (1 + \beta) + (1 - \beta) \cdot (1 + e^{2\beta}) \right] / J \quad (\text{D.1.8d})$$

**Dimensjonsløst moment  $\mathbf{m}(x)$  og skjærkraft  $\mathbf{v}(x)$  for  $x = 0$**

$$\begin{aligned}-m_0 &\equiv -m(0) = \omega''(0) \\ &= 4\beta^2 \cdot (2\cos^2(\beta) - 2\beta \cosh^2(\beta) + \sinh(2\beta) - \sin(2\beta)) / J\end{aligned}\quad (\text{D.1.9a})$$

$$\begin{aligned}-v_0 &\equiv -v(0) = \omega'''(0) \\ &= 8\beta^3 \cdot [\beta(\sin(2\beta) + \sinh(2\beta)) + \cos^2(\beta) - \cosh^2(\beta)] / J\end{aligned}\quad (\text{D.1.9b})$$

### Store verdier av skallparameteren $\beta$

Nå vil deformasjonen være konsentrert rundt tankbunnen  $X = 0$ . I dette tilfellet kan vi sette  $C_1 = C_2 \approx 0$  slik at forskyvningen blir:

$$\omega(x) = e^{-\beta x} (C_3 \cdot \cos(\beta x) + C_4 \cdot \sin(\beta x)) - (1 - x) \quad (\text{D.1.10})$$

som med betingelsene  $\omega(0) = \omega'(0) = 0$  gir  $C_3 = 1$  og  $C_4 = 1 - \frac{1}{\beta}$   
Dermed får vi:

$$\omega(x) = e^{-\beta x} \left[ \cos(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \sin(\beta x) \right] - (1 - x) \quad (\text{D.1.11a})$$

$$\omega'(x) = 1 + e^{-\beta x} [(1 - 2\beta) \sin(\beta x) - \cos(\beta x)] \quad (\text{D.1.11b})$$

$$-m(x) = \omega''(x) = 2\beta e^{-\beta x} [\beta \cdot \sin(\beta x) - (\beta - 1) \cos(\beta x)] \quad (\text{D.1.11c})$$

$$-v(x) = \omega'''(x) = 2\beta^2 e^{-\beta x} [(2\beta - 1) \cos(\beta x) - \sin(\beta x)] \quad (\text{D.1.11d})$$

$$m_0 \equiv m|_{x=0} = 2\beta \cdot (\beta - 1), \quad v_0 \equiv v|_{x=0} = -2\beta^2 (2\beta - 1) \quad (\text{D.1.11e})$$

### Noen beregninger

#### Datasett 1:

$$\begin{aligned} R &= 8.5m, \quad H = 7.95, \quad t = 0.35m \\ \gamma &= 9810 N/m^3 \text{ (vann)}, \quad \nu = 0.2, \quad E = 2 \cdot 10^4 MPa \end{aligned} \quad (\text{D.1.12})$$

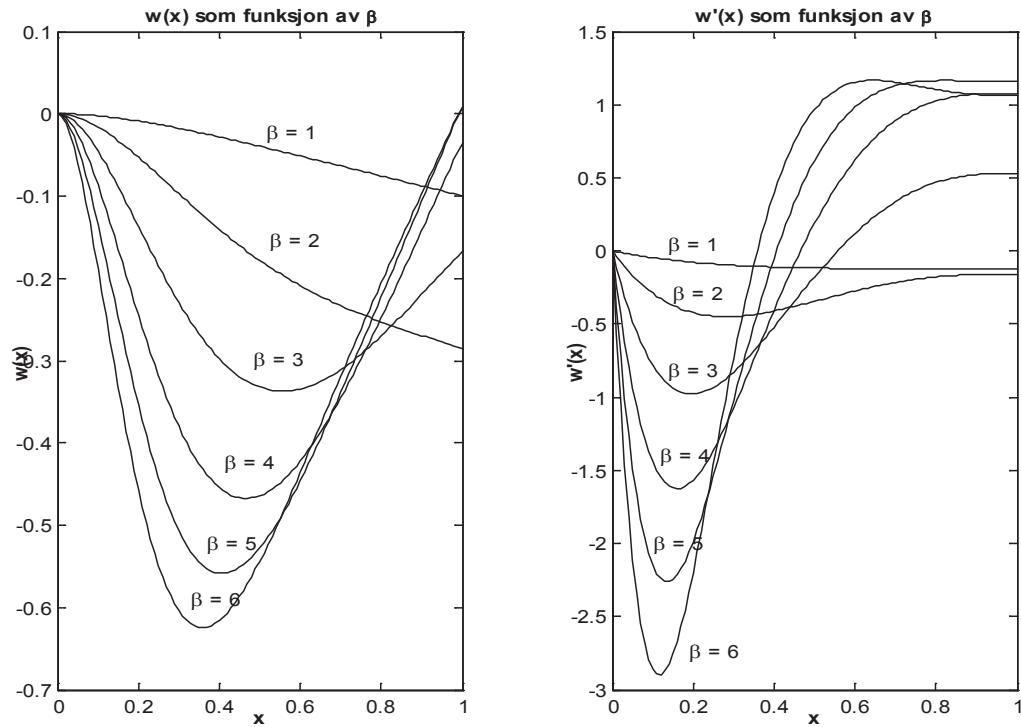
Materialdata er for betong.

Fra (D.1.3b):

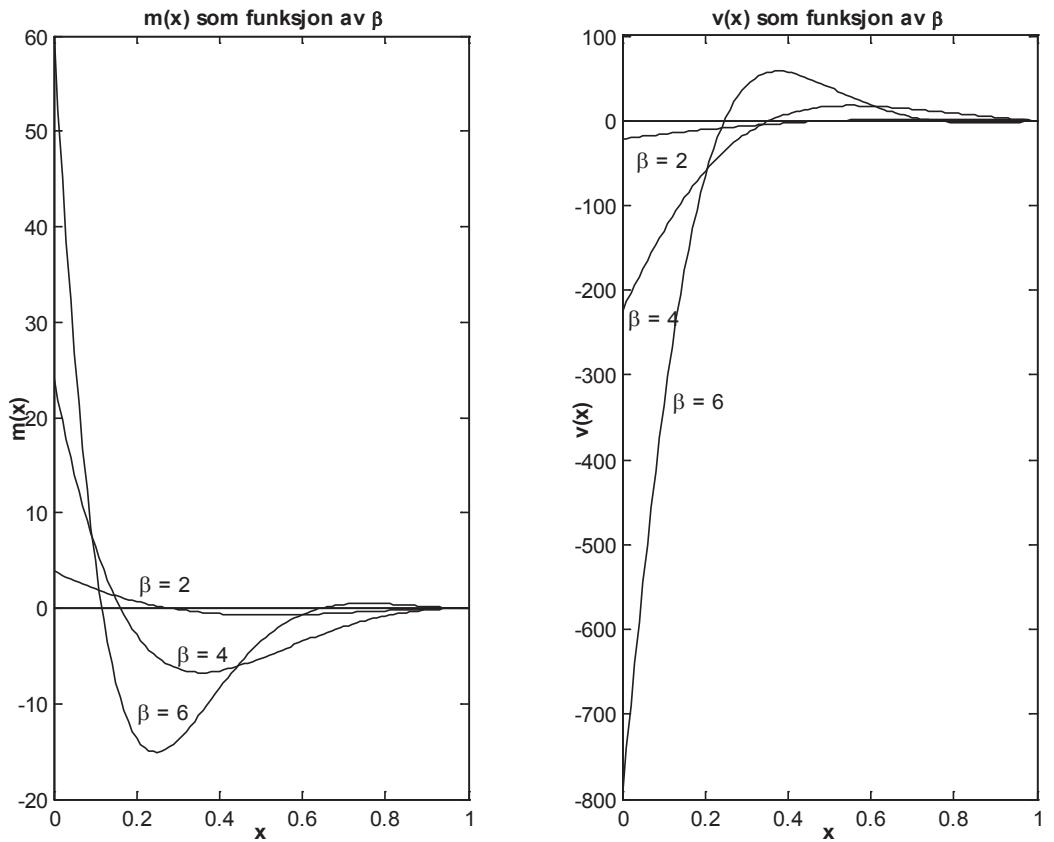
$$\beta = H \cdot \left[ \frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 t^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (\text{D.1.13})$$

Dersom vi holder  $\nu, R, t$  konstant, ser vi at  $\beta$  er proposjonal med  $H$ .

Med data fra (D.1.12) får vi  $\beta = H \cdot 0.755274$ . Med  $H = 7.95$ , blir  $\beta = 6.0044$ . Med  $\beta = 1$  blir  $H = 1.32m$ . I det siste tilfellet blir vanntanken et sirkulært svømmebasseng. På neste side er vist utbøyningen  $\omega(x)$ , helningen  $\omega'(x)$ , momentet  $m(x)$  og skjærkrafta  $v(x)$  som funksjon av  $\beta$  der  $\beta$  varierer mellom 1 og 6.



Figur D.2



Figur D.3

Som ventet, ser vi av fig. D.2 at deformasjonene blir mer og mer konsentrert mot bunnen ( $x = 0$ ) når  $\beta$  øker. Fra fig. D.3 ser vi at både moment og skjærspenningen er størst for  $x = 0$  og øker sterkt med økende  $\beta$ . Med data gitt i (D.1.12), blir  $\beta = 6.00444$ . Tabell 1 nedenfor viser størrelsene i fig.D.2 og D.3 som funksjon av  $x$  for denne verdien av  $\beta$ .

$x$	$w$	$w'(x)$	$m(x) = -w''(x)$	$v(x) = -w'''(x)$
0.000	2.22045e-016	0.00000e+000	6.00946e+001	-7.93776e+002
0.100	-1.89049e-001	-2.86464e+000	4.85241e+000	-3.36907e+002
0.200	-4.57346e-001	-2.19767e+000	-1.36887e+001	-6.60901e+001
0.300	-6.03796e-001	-7.32255e-001	-1.38468e+001	4.15724e+001
0.400	-6.16145e-001	3.93068e-001	-8.41051e+000	5.74988e+001
0.500	-5.43811e-001	9.70524e-001	-3.44812e+000	3.94238e+001
0.600	-4.35148e-001	1.15559e+000	-6.10966e-001	1.81108e+001
0.700	-3.18862e-001	1.15306e+000	4.27835e-001	4.09120e+000
0.800	-2.06030e-001	1.10306e+000	4.68844e-001	-2.15877e+000

0.900	-9.76198e-002	1.07015e+000	1.76455e-001	-2.96455e+000
1.000	8.92581e-003	1.06380e+000	9.38134e-017	3.75531e-016

tabell 1

Da  $\beta$  er stor, kan vi bruke den tilnærmede løsningen i (D.1.10) og (D.1.11). Med samme  $\beta$  som ovenfor, er disse verdiene vist i tabell 2.

x	w	w' (x)	m(x) = -w'' (x)	v(x) = -w''' (x)
0.000	0.00000e+000	0.00000e+000	6.00975e+001	-7.93809e+002
0.100	-1.89058e-001	-2.86476e+000	4.85203e+000	-3.36941e+002
0.200	-4.57360e-001	-2.19758e+000	-1.36928e+001	-6.61313e+001
0.300	-6.03773e-001	-7.31538e-001	-1.38552e+001	4.15308e+001
0.400	-6.16002e-001	3.94797e-001	-8.42168e+000	5.74957e+001
0.500	-5.43443e-001	9.73218e-001	-3.45415e+000	3.95492e+001
0.600	-4.34511e-001	1.15788e+000	-5.92489e-001	1.84992e+001
0.700	-3.18167e-001	1.15098e+000	5.03107e-001	4.84458e+000
0.800	-2.06060e-001	1.08916e+000	6.33725e-001	-1.18143e+000
0.900	-1.00019e-001	1.03528e+000	4.22269e-001	-2.52734e+000
1.000	1.80659e-003	1.00510e+000	1.91546e-001	-1.93230e+000

tabell 2

Det er litt avvik nær  $x = 1.0$  fordi vi ikke kan tilfredsstille randbetingelsene her, men ellers er det god overenstemmelse. Tabell 3 på neste side viser fysiske verdier basert på data gitt i (D.1.12) og uttrykk i (D.1.5).  $W$  har dimensjon meter,  $M$  har dimensjon Nm/m og  $V$  har dimensjon N/m.

x	W(m)	W' (x)	M(x) (Nm/m)	V(x) (Nm/m)
0.000	1.78738e-019	0.00000e+000	5.69716e+004	-9.46574e+004
0.050	-4.82298e-005	-2.14530e-004	2.53366e+004	-6.50879e+004
0.100	-1.52177e-004	-2.90054e-004	4.60025e+003	-4.01760e+004
0.150	-2.67439e-004	-2.79243e-004	-7.38839e+003	-2.11451e+004
0.200	-3.68147e-004	-2.22521e-004	-1.29773e+004	-7.88120e+003
0.250	-4.42057e-004	-1.48195e-004	-1.43090e+004	4.47921e+002
0.300	-4.86034e-004	-7.41432e-005	-1.31272e+004	4.95749e+003
0.350	-5.02357e-004	-1.01392e-005	-1.07246e+004	6.76881e+003
0.400	-4.95974e-004	3.97994e-005	-7.97344e+003	6.85669e+003
0.450	-4.72632e-004	7.53510e-005	-5.39964e+003	5.98533e+003
0.500	-4.37748e-004	9.82686e-005	-3.26893e+003	4.70126e+003
0.550	-3.95830e-004	1.11216e-004	-1.66920e+003	3.35878e+003
0.600	-3.50278e-004	1.17007e-004	-5.79216e+002	2.15970e+003
0.650	-3.03420e-004	1.18171e-004	7.92536e+001	1.19592e+003
0.700	-2.56672e-004	1.16752e-004	4.05601e+002	4.87873e+002

0.750	-2.10743e-004	1.14254e-004	4.98443e+002	1.57374e+001
0.800	-1.65847e-004	1.11688e-004	4.44479e+002	-2.57432e+002
0.850	-1.21881e-004	1.09641e-004	3.15006e+002	-3.70171e+002
0.900	-7.85803e-005	1.08356e-004	1.67285e+002	-3.53521e+002
0.950	-3.56400e-005	1.07802e-004	4.84394e+001	-2.27191e+002
1.000	7.18495e-006	1.07713e-004	8.89382e-014	4.47818e-014

tabell 3

Merk at vi har brukt den dimensjonsløse lengden  $x$  istedenfor den dimensjonelle  $X$  der  $X = x \cdot H$ .

### Moment og skjærkraft for $X = 0$

$m_0$  og  $M_0$  er henholdsvis det dimensjonsløse og det dimensjonelle momentet for  $X = 0$ , mens  $v_0$  og  $V_0$  er henholdsvis den dimensjonsløse og den dimensjonelle skjærkrafa.  $m_0$  og  $v_0$  er gitt i (D.1.9) og (D.1.11e).

$M_0$  og  $V_0$  er gitt ved (se D.1.5):

$$M_0 = K_2 \cdot m_0, \quad V_0 = \frac{K_2}{H} \cdot m_0 \text{ der } K_2 = \frac{\gamma \cdot H^3}{4 \cdot \beta^4} \quad (\text{D.1.14})$$

Datasett 1 er gitt i (D.1.12).

### Datasett 2:

$$\begin{aligned} R &= 360'' = 9.144m, \quad H = 312'' = 312'' = 7.925m, \quad t = 14'' = 0.3556 \\ \gamma &= 9807.4N/m^3(\text{vann}), \quad \nu = 0.25 \end{aligned} \quad (\text{D.1.15})$$

Sett 2 er fra Timoshenko [5], avsnitt 117, side 487

For datasett 1 får vi følgende verdier med  $\beta = 6.0044$ :

	$m_0$	$-v_0$	$M_0(\text{Nm}/\text{m})$	$-V_0(\text{N}/\text{m})$
Nøyaktig, lign.(9)	60.095	793.78	56971.7	94657.3
Asymptotisk, lign. (11e)	60.098	793.81	56974.4	94661.2

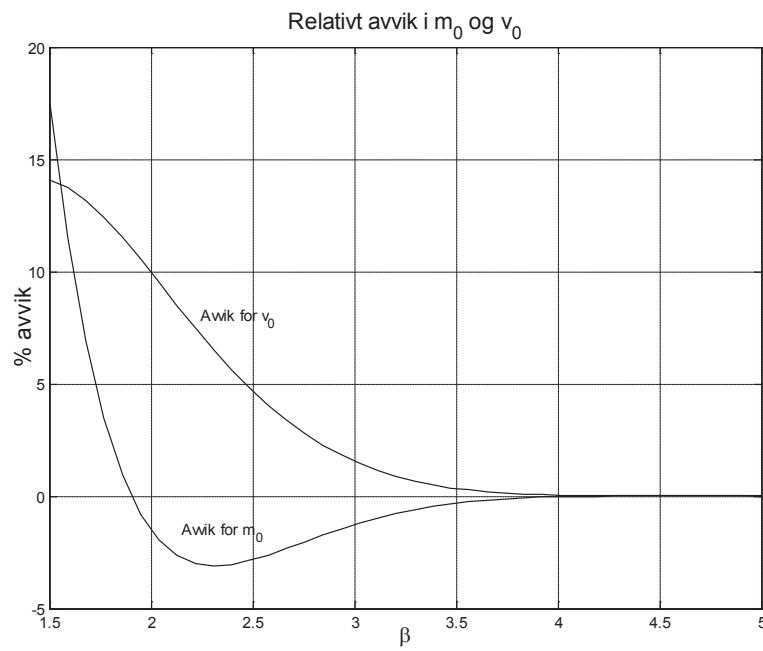
tabell 5

For datasett 2 får vi følgende verdier med  $\beta = 5.6913$ :

	$m_0$	$-v_0$	$M_0(\text{lbf-in.}/\text{in.})$	$-V_0(\text{lbf/in.})$
Nøyaktig, lign.(9)	53.396	672.56	13961.4	563.63
Asymptotisk, lign. (11e)	53.400	672.61	13962.4	563.68
Timoshenko			13960	563.6

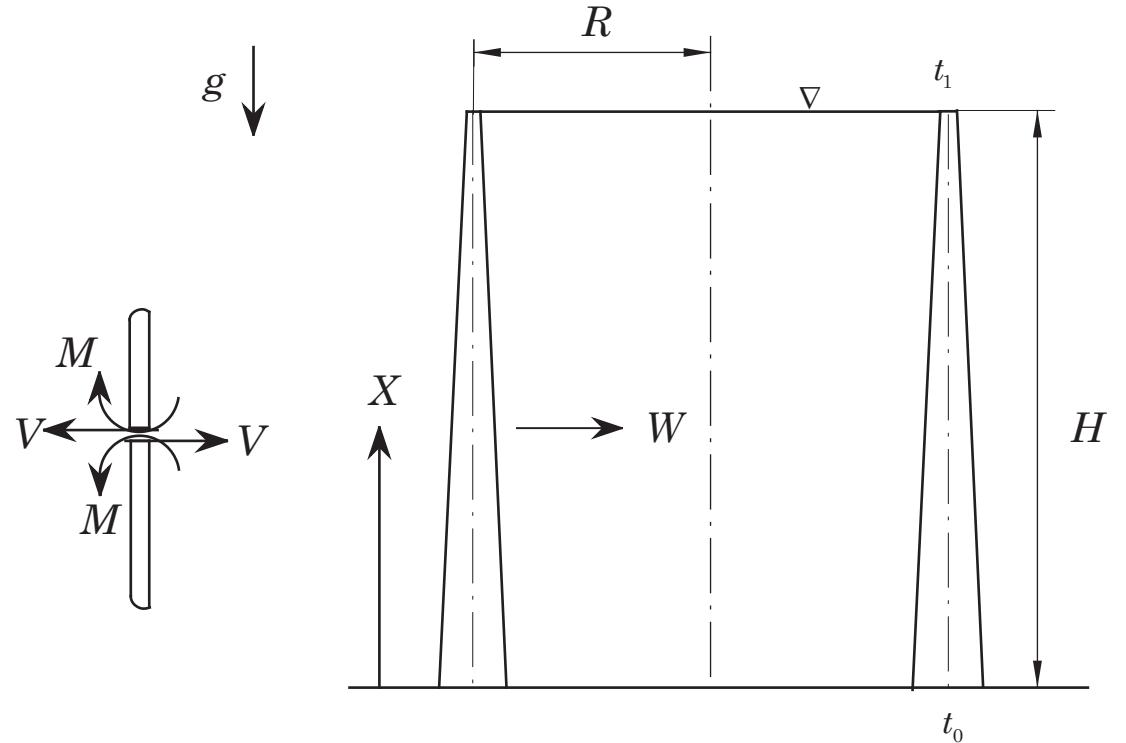
tabell 6

Vi har her brukt lbf og inch for å kunne sammenligne med verdier gitt i Timoshenko. For disse store verdiene av  $\beta$  er de asymptotiske formlene meget nøyaktige. Figuren nedenfor viser avvik i % mellom eksakte formler og asymptotiske formler som funksjon av  $\beta$ .



Figur D.4

## D.2 TANK MED VARIABEL VEGGTYKKELSE



Figur D.5

Fig. D.5 er identisk med fig. D.1 bortsett fra at her varierer veggtykkelsen lineært fra  $t_0$  nederst til  $t_1$  øverst.

Med  $\alpha = \frac{t_0 - t_1}{t_0}$ , kan veggtykkelsen  $t$  skrives:

$$t = \left(1 - \alpha \frac{X}{H}\right) \cdot t_0, \quad 0 \leq X \leq H, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{D.2.1})$$

Differensialligningen for forskyvningen  $W$  er nå gitt ved:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left( D \frac{d^2W}{dX^2} \right) + E \frac{tW}{R^2} = -\gamma(H - X) \quad (\text{D.2.2})$$

der  $D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$ ,  $\gamma = \rho g$

Konstantene har samme betydning som i del D.1

Detaljert utledning er gitt i Timoshenko & Woinowsky-Krieger [5], avsnitt 118. (Utledningen der bruker et annet koordinatsystem)

### LIGNINGER PÅ DIMENSJONSLØS FORM.

$$x = \frac{X}{H}, \quad \omega = \frac{E}{\gamma H t_0} \left( \frac{t_0}{R} \right)^2 \cdot W, \quad \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 t_0^2} \cdot H^4 \quad (\text{D.2.3})$$

(D.2.3) innsatt i (D.2.2):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ (1-\alpha x)^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right] + 4\beta^4 (1-\alpha x) \omega = -4\beta^4 (1-x) \quad (\text{D.2.4})$$

Innfører

$$y = 1 - \alpha x, \quad \alpha \neq 0 \text{ og } \rho = \sqrt{2} \frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{D.2.5})$$

som innsatt i (D.2.4) gir:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[ y^3 \frac{d^2 \omega}{dy^2} \right] + \rho^4 y \cdot \omega = -\rho^4 \left( \frac{\alpha + y - 1}{\alpha} \right) \quad (\text{D.2.6})$$

Løsningen av (D.2.6) består av en homogenløsning  $\omega_h$  og en partikulær løsning  $\omega_p$  slik at totalforskyvningen er  $\omega = \omega_h + \omega_p$ .

Partikulær løsningen er gitt ved:

$$\omega_p = -\frac{(\alpha + y - 1)}{\alpha y} = -\frac{1-x}{1-\alpha x} \quad (\text{D.2.7})$$

$\omega_h$  er løsning av:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[ y^3 \frac{d^2 \omega_h}{dy^2} \right] + \rho^4 y \cdot \omega_h = 0 \quad (\text{D.2.8})$$

Løsningen av (D.2.8) kan uttrykkes ved Kelvin-funksjoner:

$$\omega_h = \frac{1}{\sqrt{y}} [C_1 \cdot \text{ber}'(z) + C_2 \cdot \text{bei}'(z) + C_3 \cdot \text{ker}'(z) + C_4 \cdot \text{kei}'(z)] \quad (\text{D.2.9a})$$

$$\text{der } z = 2\rho\sqrt{y} \quad (\text{D.2.9b})$$

Konstantene  $C_1 - C_4$  bestemmes av randbetingelsene.

### FYSIKALSKE STØRRELSER

Innfører to konstanter:

$$K_1 = \gamma \frac{HR^2}{E \cdot t_0}, \quad K_2 = \gamma \frac{(R \cdot t_0)^2}{12(1-\nu^2)H} = \frac{\gamma}{4} \frac{H^3}{\beta^4} \quad (\text{D.2.10})$$

### Utbøyning

Den dimensjonsløse utbøyningen  $\omega$  er gitt av (D.2.7) og (D.2.9):

$$\begin{aligned}\omega(y) &= \frac{1}{\sqrt{y}}[C_1 \cdot \text{ber}'(z) + C_2 \cdot \text{bei}'(z) \\ &\quad + C_3 \cdot \text{ker}'(z) + C_4 \cdot \text{kei}'(z)] - \frac{(\alpha + y - 1)}{\alpha y} \quad (\text{D.2.11a})\end{aligned}$$

$$\text{der } z = 2\rho\sqrt{y} \text{ og } y = 1 - \alpha x, \quad x = \frac{X}{H} \quad (\text{D.2.11b})$$

Den dimensjonelle utbøyningen er gitt ved:

$$W = K_1 \cdot \omega \quad (\text{D.2.12})$$

### Helning

Dimensjonsløs helning

$$\frac{d\omega}{dx} \text{ og } \frac{d\omega}{dy} \text{ der } \frac{d\omega}{dx} = -\alpha \frac{d\omega}{dy}; \quad (\text{D.2.13a})$$

$$\text{Her er } \frac{d\omega}{dy} = \frac{d\omega_h}{dy} + \frac{d\omega_p}{dy} \quad (\text{D.2.13b})$$

som ved derivasjon av (D.2.11) blir:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dy} &= \frac{1}{2y\sqrt{y}}[-\{2\text{ber}'(z) + z \cdot \text{bei}(z)\} \cdot C_1 + \{-2\text{bei}'(z) + z \cdot \text{ber}(z)\} \cdot C_2 \\ &\quad - \{2\text{ker}'(z) + z \cdot \text{kei}(z)\} \cdot C_3 + \{-2\text{kei}'(z) + z \cdot \text{ker}(z)\} \cdot C_4] + \frac{(\alpha - 1)}{\alpha \cdot y^2} \quad (\text{D.2.14})\end{aligned}$$

Den dimensjonelle helningen er da gitt ved:

$$\frac{dW}{dX} = \frac{K_1}{H} \cdot \frac{d\omega}{dx} = -\frac{K_1 \cdot \alpha}{H} \cdot \frac{d\omega}{dy} \quad (\text{D.2.15})$$

### Moment M (Pr. lengdeenhet)

De dimensjonsløse momentene  $m(x)$  og  $m(y)$  er gitt ved:

$$m(x) = -y^3 \frac{d^2\omega}{dx^2}, \quad m(y) = -\alpha^2 y^3 \frac{d^2\omega}{dy^2} \quad (\text{D.2.16a})$$

der

$$m(y) = \alpha^2 \cdot m(x) = -\alpha^2 \left( y^3 \frac{d^2\omega_h}{dy^2} + y^3 \frac{d^2\omega_p}{dy^2} \right) \quad (\text{D.2.16b})$$

Her er:

$$y^3 \frac{d^2\omega_p}{dy^2} = \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha} \quad (\text{D.2.16c})$$

$$\begin{aligned}y^3 \frac{d^2\omega_h}{dy^2} &= \frac{\sqrt{y}}{2} \left[ \left\{ 4\text{ber}'(z) - \frac{z^2}{2}\text{bei}'(z) + 2z \cdot \text{bei}(z) \right\} \cdot C_1 + \right. \\ &\quad \left. \left\{ 4\text{bei}'(z) + \frac{z^2}{2}\text{ber}'(z) - 2z \cdot \text{ber}(z) \right\} \cdot C_2 + \right. \\ &\quad \left. \left\{ 4\text{ker}'(z) - \frac{z^2}{2}\text{kei}'(z) + 2z \cdot \text{kei}(z) \right\} \cdot C_3 + \right. \\ &\quad \left. \left\{ 4\text{kei}'(z) + \frac{z^2}{2}\text{ker}'(z) - 2z \cdot \text{ker}(z) \right\} \cdot C_4 \right] \quad (\text{D.2.16d})\end{aligned}$$

Det dimensjonelle momentet  $M$  er da gitt ved:

$$M = -D \frac{d^2W}{dX^2} = K_2 \cdot m(x) = K_2 \cdot m(y) = \frac{\gamma}{4} \cdot \frac{H^3}{\beta^4} \cdot m(y) \quad (\text{D.2.17})$$

### Skjærkraft $V$ ( Pr. lengdeenhet)

Dimensjonsløs skjærkraft  $v(x)$  og  $v(y)$  er gitt ved:

$$\begin{aligned} v(x) &= \left( 3\alpha y^2 \frac{d^2\omega_h}{dx^2} - y^3 \frac{d^3\omega_h}{dx^3} \right), \quad v(y) = \alpha^3 \left( 3y^2 \frac{d^2\omega_h}{dy^2} + y^3 \frac{d^3\omega_h}{dy^3} \right) \\ v(y) &= \alpha^3 \left( 3y^2 \frac{d^2\omega_h}{dy^2} + y^3 \frac{d^3\omega_h}{dy^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.2.18a})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha^3 \frac{\rho^2 \sqrt{y}}{2} [\{2\text{bei}'(z) - z \cdot \text{ber}(z)\} \cdot C_1 - \{2\text{ber}'(z) + z \cdot \text{bei}(z)\} \cdot C_2] \\ &\quad + \{2\text{kei}'(z) + z \cdot \text{ker}(z)\} \cdot C_3 - \{2\text{ker}'(z) + z \cdot \text{kei}(z)\} \cdot C_4 \end{aligned} \quad (\text{D.2.18b})$$

(Se (D.2.3) og (D.2.5) for  $\rho$ )

Den dimensjonelle skjærkrafa  $V$  er da gitt ved:

$$V = \frac{dM}{dX} = \frac{K_2}{H} \cdot v(x) = \frac{\gamma}{4} \frac{H^2}{\beta^4} \cdot v(x) = \frac{K_2}{H} \cdot v(y) = \frac{\gamma}{4} \cdot \frac{H^2}{\beta^4} \cdot v(y) \quad (\text{D.2.19})$$

### BESTEMMELSE AV KONSTANTENE.

Randbetingelser:

$$W = 0 \text{ for } X = 0 \quad (\text{D.2.20a})$$

$$\frac{dW}{dX} = 0 \text{ for } X = 0 \rightarrow \omega'(y = 1) = 0 \quad (\text{D.2.20b})$$

$$M = 0 \text{ for } X = H \rightarrow \frac{d^2W}{dX^2} = 0 \rightarrow m(y = 1) = 0 \quad (\text{D.2.20c})$$

$$V = 0 \text{ for } X = H \rightarrow \frac{d^3W}{dX^3} = 0 \rightarrow v(y = 1) = 0 \quad (\text{D.2.20d})$$

Vi bruker følgende betegnelser:

$$y_1 = y|_{x=1}, \quad z_0 = 2\rho, \quad z_1 = 2\rho\sqrt{y_1} = 2\rho\sqrt{1-\alpha} = 2\rho\sqrt{\frac{t_1}{t_0}}, \quad \rho \text{ er gitt i (D.2.5)} \quad (\text{D.2.21})$$

Bruk av betingelsene i (D.2.20) gir følgende fire ligninger for bestemmelse av konstantene

Fra (D.2.11):

$$C_1 \cdot \text{ber}'(z_0) + C_2 \cdot \text{bei}'(z_0) + C_3 \cdot \text{ker}'(z_0) + C_4 \cdot \text{kei}'(z_0) = 1 \quad (\text{D.2.22a})$$

Fra (D.2.14):

$$\begin{aligned} & -[2\text{ber}'(z_0) + z_0\text{bei}(z_0)] \cdot C_1 + [-2\text{bei}'(z_0) + z_0\text{ber}(z_0)] \cdot C_2 \\ & -[2\text{ker}'(z_0) + z_0\text{kei}(z_0)] \cdot C_3 + [-2\text{kei}'(z_0) + z_0\text{ker}(z_0)] \cdot C_4 \\ & = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{D.2.22b})$$

Fra (D.2.16c) og (D.2.16d):

$$\begin{aligned} & \left[ 4\text{ber}'(z_1) - \frac{z_1^2}{2}\text{bei}'(z_1) + 2z_1\text{bei}(z_1) \right] \cdot C_1 + \\ & \left[ 4\text{bei}'(z_1) + \frac{z_1^2}{2}\text{ber}'(z_1) - 2z_1\text{ber}(z_1) \right] \cdot C_2 + \\ & \left[ 4\text{ker}'(z_1) - \frac{z_1^2}{2}\text{kei}'(z_1) + 2z_1\text{kei}(z_1) \right] \cdot C_3 + \\ & \left[ 4\text{kei}'(z_1) + \frac{z_1^2}{2}\text{ker}'(z_1) - 2z_1\text{ker}(z_1) \right] \cdot C_4 = -\frac{4(1-\alpha)}{\alpha\sqrt{y_1}} \end{aligned} \quad (\text{D.2.22c})$$

Fra (D.2.18b):

$$\begin{aligned} & [2\text{bei}'(z_1) - z_1\text{ber}(z_1)] \cdot C_1 - [2\text{ber}'(z_1) + z_1\text{bei}(z_1)] \cdot C_2 + \\ & [2\text{kei}'(z_1) - z_1\text{ker}(z_1)] \cdot C_3 - [2\text{ker}'(z_1) + z_1\text{kei}(z_1)] \cdot C_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2.22d})$$

Vi kan f.eks. bruke Maple til å løse (D.2.22), men sluttresultatet vil være altfor komplisert. Et unntak er spesialtilfellet der tykkelsen  $t_1$  øverst = 0 som gir  $\alpha = 1$ . I dette tilfellet får vi:

$$\begin{aligned} J &= z_0 [\text{ber}'(z_0) \cdot \text{ber}(z_0) + \text{bei}'(z_0) \cdot \text{bei}(z_0)] \\ C_1 &= [-2\text{bei}'(z_0) + z_0\text{ber}(z_0)] / J \\ C_2 &= [2\text{ber}'(z_0) + z_0\text{bei}(z_0)] / J \\ \text{med } C_3 &= C_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2.23})$$

For dette tilfellet kan vi også finne noenlunde enkle uttrykk for momentet  $m_0 \equiv m|_{x=0}$  og skjærkrafta  $v_0 \equiv v|_{x=0}$ .

$$\begin{aligned} m_0 &= -\frac{z_0^2}{4J} [2\{\text{ber}'(z_0)^2 + \text{bei}'(z_0)^2\} + z_0\{\text{bei}(z_0)\text{ber}'(z_0) - \text{ber}(z_0)\text{bei}'(z_0)\}] \\ v_0 &= -\frac{\rho^2}{2J} [\{-2\text{bei}'(z_0) + z_0\text{ber}(z_0)\}^2 + \{2\text{ber}'(z_0) + z_0\text{bei}(z_0)\}^2] \end{aligned} \quad (\text{D.2.24})$$

### Store verdier av skallparameteren $\beta$

Også her kan vi finne forenkla uttrykk når  $\beta$  er stor. Vi kan nå sette  $C_3 = C_4 \approx 0$  slik at (D.2.9) blir:

$$\omega_h = \frac{1}{\sqrt{y}} [C_1 \text{ber}'(z) - C_2 \text{bei}'(z)] \quad (\text{D.2.25})$$

Partikulær løsningen i (D.2.7) er som følger.

$C_1$  og  $C_2$  bestemmes nå fra:

$$C_1 \text{ber}'(z_0) + C_2 \text{bei}'(z_0) = 1 \quad (\text{D.2.26a})$$

$$-[2\text{ber}'(z_0) + z_0 \text{bei}(z_0)]C_1 + [-2\text{bei}'(z_0) + z_0 \text{ber}(z_0)]C_2 = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \quad (\text{D.2.26b})$$

Løsning av systemet i (D.2.26):

$$\begin{aligned} J &= \alpha \cdot z_0 [\text{ber}'(z_0) \cdot \text{ber}(z_0) + \text{bei}'(z_0) \cdot \text{bei}(z_0)] \\ C_1 &= [-2\text{bei}'(z_0) + \alpha \cdot z_0 \text{ber}(z_0)]/J \\ C_2 &= [2\text{ber}'(z_0) + \alpha \cdot z_0 \text{bei}(z_0)]/J \end{aligned} \quad (\text{D.2.27})$$

(D.2.27) er identisk med (D.2.23) når vi setter  $\alpha = 1$ .

For store verdier av  $\beta$  vil vi kunne bruke asymptotiske uttrykk for Kelvin-funksjonene. Fra (D.2.11b) har vi at  $z = 2\rho\sqrt{y}$ ,  $\rho = \sqrt{2}\beta/\alpha$  der  $y = 1 - \alpha x$  med  $0 \leq x \leq 1$ .

For de to datasettene vi bruker, finner vi for det første med  $\beta = 6.0044$  og  $\alpha = 5/7$  at  $12.71 \leq z \leq 23.78$ .

For det andre settet med  $\beta = 5.6913$  og  $\alpha = 3/4$  blir  $10.73 \leq z \leq 21.46$  som viser at vi ligger i det asymptotiske området for begge settene.

Asymptotiske uttrykk:

$$A(z) = \frac{e^{z/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi z}}, \quad a_1(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}, \quad a_2(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \quad (\text{D.2.28a})$$

$$\begin{aligned} \text{ber}(z) &\sim A(z) \cos(a_1(z)), \quad \text{bei}(z) \sim A(z) \sin(a_1(z)) \\ \text{ber}'(z) &\sim \frac{\sqrt{2}}{4z} A(z) \left[ (2z - \sqrt{2}) \cos(a_1(z)) - 2z \sin(a_1(z)) \right] \\ \text{bei}'(z) &\sim \frac{\sqrt{2}}{4z} A(z) \left[ 2z \cos(a_1(z)) + (2z - \sqrt{2}) \sin(a_1(z)) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.2.28b})$$

Uttrykkene for  $\text{ber}'(z)$  og  $\text{bei}'(z)$  fås ved å derivere henholdsvis  $\text{ber}(z)$  og  $\text{bei}(z)$ . Det er vanlig å sette  $\text{ber}'(z) \sim A(z) \cos(a_2(z))$  og  $\text{bei}'(z) \sim A(z) \sin(a_2(z))$ ; se f.eks Timoshenko [5] og Flügge [22], men dette gir for unøyaktige resultater. F. eks. får vi samme verdi for  $m_0 \equiv m|_{x=0}$  som for et skall med konstant tykkelse.

For  $z = z_0$  skriver vi:

$$A(z_0) \rightarrow A, z_0 = 2\rho$$

slik at (D.2.27) blir:

$$J = \frac{\alpha\sqrt{2}A^2}{2}(2z_0 - \sqrt{2}) = A^2(4\beta - \alpha) \quad (\text{D.2.29})$$

Vi er først og fremst interessert i momentet  $m_0 \equiv m|_{x=0}$  og skjærkrafta  $v_0 \equiv v|_{x=0}$ .

Ved å sette (D.2.28) og (D.2.29) inn i (D.2.16b) og (D.2.18b), får vi følgende uttrykk:

$$m_0 = \frac{32\beta^2(\beta - 1) + \alpha(8\beta - \alpha)}{4(4\beta - \alpha)} \quad (\text{D.2.30a})$$

$$v_0 = -\frac{[32\beta^2\{2\beta^2 - \beta(1 + \alpha) + \alpha\} - \alpha^2(8\beta - \alpha)]}{4(4\beta - \alpha)} \quad (\text{D.2.30b})$$

For et jevntykt skall er  $\alpha = 0$  som stemmer overens med (D.1.11e) i del D.1, mens  $\alpha = 1$  for et skall med topptykkelsen  $t_1 = 0$ . Ved å sette inn (D.2.28) i (D.2.24), får vi uttrykkene i (D.2.30) når vi setter  $\alpha = 1$

Det fysiske momentet  $M_0$  og den fysiske skjærkrafta  $V_0$  finnes som før ved:

$$M_0 = K_2 m_0, V_0 = K_2 v_0 / H, K_2 \text{ gitt i (D.2.10)} \quad (\text{D.2.31})$$

### Noen beregninger

#### **Datasett 1:**

$$\begin{aligned} R &= 8.5\text{m}, H = 7.95\text{m}, t_0 = 0.35\text{m}, t_1 = 0.1\text{m} \\ \gamma &= 9810\text{N/m}^3(\text{vann}), \nu = 0.2, E = 2 \cdot 10^4\text{MPa} \end{aligned} \quad (\text{D.2.32a})$$

$$\text{Her blir } \beta = 6.0044 \text{ og } \alpha = 5/7 \quad (\text{D.2.32b})$$

#### **Datasett 2:**

$$\begin{aligned} R &= 360'' = 9.144\text{m}, H = 312'' = 7.925\text{m}, t_0 = 14'' = 0.3556\text{m}, \\ t_1 &= 3.5'' = 0.0889\text{m}, \gamma = 9807.4\text{N/m}^3(\text{vann}), \nu = 0.25 \end{aligned} \quad (\text{D.2.33a})$$

$$\text{Her blir } \beta = 5.6913 \text{ og } \alpha = 3/4 \quad (\text{D.2.33b})$$

Data er som for tilfellene i del D.1, bortsett fra at tykkelsen varierer.

Fra (D.2.3):

$$\beta = H \cdot \left[ \frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 t_0^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Utbøyningen  $\omega(x)$ , helningen  $\omega'(x)$ , momentet  $m(x)$  og skjærkrafta  $v(x)$  som funksjon av  $\beta$  vil variere som på fig. D.2 og D.3 i del D.1.

Tabell 7 nedenfor viser utbøyningen  $w(x)$  fra (D.2.11), helningen  $\omega'(x)$  fra (D.2.13), (D.2.14), momentet  $m(x)$  fra (D.2.16) og skjærkrafta  $v(x)$  fra (D.2.18). Som ventet, vil det ikke være store forskjeller mellom denne tabellen og verdiene i tabell 1 (del D.1).

x	w(x)	w'(x)	m(x)	v(x)
0.000	-2.22045e-016	-1.18952e-016	6.23338e+001	-7.73773e+002
0.100	-2.15376e-001	-3.45545e+000	9.04151e+000	-3.18887e+002
0.200	-5.66553e-001	-3.16644e+000	-8.14798e+000	-5.86193e+001
0.300	-8.05113e-001	-1.53673e+000	-8.34542e+000	3.32725e+001
0.400	-8.79417e-001	-3.87613e-002	-4.36688e+000	3.81223e+001
0.500	-8.34707e-001	8.24808e-001	-1.47715e+000	1.90313e+001
0.600	-7.31823e-001	1.17417e+000	-3.81331e-001	4.52215e+000
0.700	-6.05528e-001	1.35136e+000	-2.49400e-001	-5.41833e-001
0.800	-4.57652e-001	1.63752e+000	-3.00685e-001	8.65227e-002
0.900	-2.72819e-001	2.06406e+000	-1.83101e-001	2.16403e+000
1.000	-5.26707e-002	2.26313e+000	0.00000e+000	2.10133e-015

tabell 7

### Moment og skjærkraft for $X = 0$

$m_0$  og  $M_0$  er henholdsvis det dimensjonsløse og det dimensjonelle momentet for  $X = 0$ , mens  $v_0$  og  $V_0$  er henholdsvis den dimensjonsløse og den dimensjonelle skjærkrafta.

For datasett 1:

	$m_0$	$-v_0$	$M_0$ (Nm/m)	$-V_0$ (N/m)
Nøyaktig	62.334	773.77	59094.5	92271.97
Asymptotisk, lign. (30)	62.302	773.64	59064.5	92255.93

tabell 8

For datasett 2:

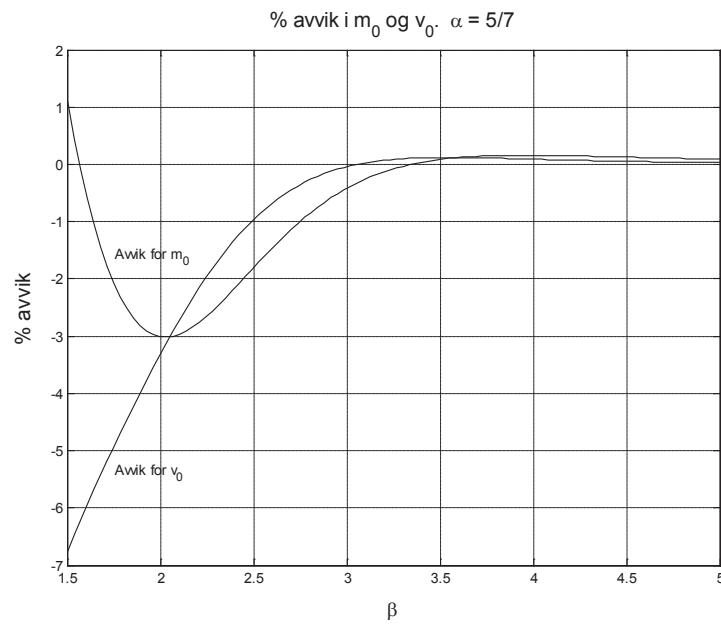
	$m_0$	$-v_0$	$M_0$ (lbf-in./in.)	$-V_0$ (lbf/in.)
Nøyaktig	55.636	653.96	14547.1	548.05
Asymptotisk, lign. (30)	55.600	653.82	14537.8	547.93
Timoshenko			13900	527

tabell 9

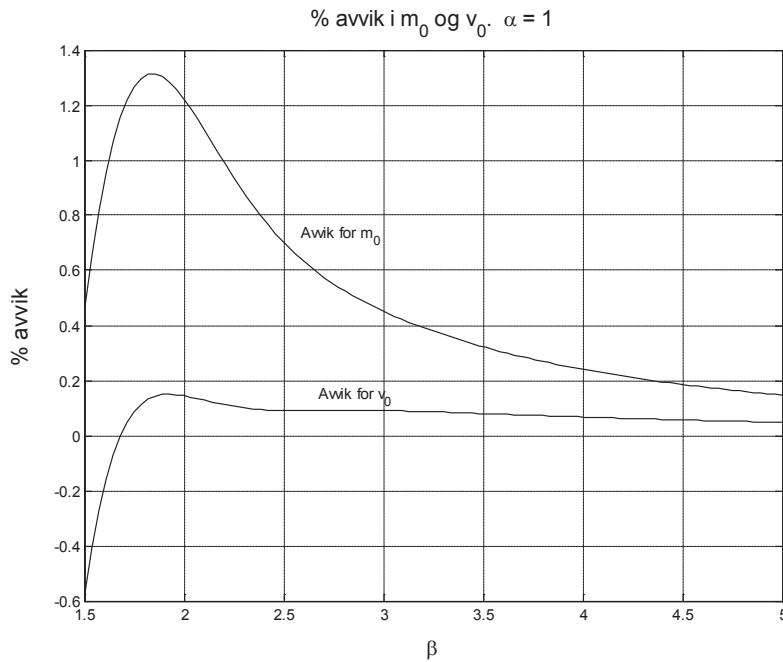
Vi har her bruktt lbf og inch for å kunne sammenligne med verdier gitt i Timoshenko [5], side 497. Timoshenkos resultater er basert på forenkla asymptotiske formler for Kelvin-funksjonene.

Fig. D.6 på neste side viser avvik i % mellom eksakte, numeriske verdier og verdiene fra de asymptotiske formlene med  $\alpha = 5/7$  fra datasett 1. Fig. D.7 viser tilfellet  $\alpha = 1$  som betyr at tykkelsen øverst  $t_1 = 0$ .

Formlene for avvikene er  $\left(\frac{m_0^a - m_0}{m_0^a}\right) \cdot 100$  for momentet og  $\left(\frac{v_0^a - v_0}{v_0^a}\right) \cdot 100$  for skjærkrafta, der indeks  $a$  henviser til analytisk løsning.



Figur D.6



Figur D.7

### Referanser

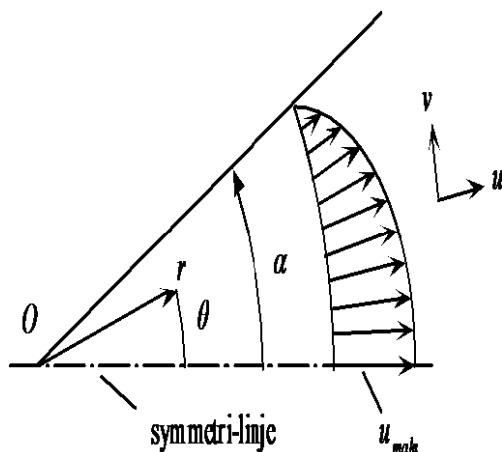
- [5] S. P. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2. edition, McGraw-Hill 1959.
- [22] W. Flügge: Stresses in Shells, Springer-Verlag 1960



# JEFFREY - HAMEL STRØMNING

## E.1 BRUK AV KOMPLEKSE TALL

Dette er en inkompressibel, to-dimensjonal stasjonær og laminær strømning i en konvergerende/divergerende kanal ; se fig. E.1. Figuren viser halve kanalen, der kanalveggene er gitt ved  $\theta = \pm\alpha$ .



Figur E.1

Strømningsfeltet er symmetrisk om  $\theta = 0$ . Vi kan ha både innstrømning og utstrømning der  $u$  er positiv ved utstrømning. Løsningen nedenfor forutsetter  $r > r_0 > 0$ . Lar  $u$  betegne hastigheten i radiell retning og  $v$  hastigheten i  $\theta$ -retningen.

### E.1.1 LIGNINGER I POLARE KOORDINATER

Kontinuitetsligning:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

Navier - Stokes ligning i  $r$ -retning:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

Navier - Stokes ligning i  $\theta$ -retning:

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

Ligningene ovenfor finnes hos White [22], appendiks D, eller hos Irgens: Formelsamling i Mekanikk.

Antar  $v \equiv 0$ , noe som er nærliggende utfra fig. E.1. Med denne antagelsen får vi et betydelig forenklet sett:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \quad (\text{E.1.1a})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{E.1.1b})$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{E.1.1c})$$

Kontinuitetsligningen E.1.1a gir:

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \Rightarrow ur \text{ er bare funksjon av } \theta$$

Innfører

$$F(\theta) = \frac{ur}{\nu} \quad (\text{E.1.2})$$

som gir

$$u = \frac{F(\theta)\nu}{r} \quad (\text{E.1.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 = u + r \frac{\partial u}{\partial r} \text{ som gir}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{u}{r} \quad (\text{E.1.4a})$$

Videre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{u}{r} \right) = \frac{u}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{E.1.4b})$$

Med bruk av E.1.4a i E.1.1b, får vi følgende sett:

$$\begin{aligned} -\frac{u^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Setter inn for  $u$  fra E.1.3:

$$\begin{aligned} -\frac{F^2\nu^2}{r^3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu^2}{r^3}\frac{d^2F}{d\theta^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \frac{2\nu^2}{r^2}\frac{dF}{d\theta} \end{aligned}$$

Kryssderiverer for å eliminere trykket:

$$\begin{aligned} -\frac{2F\frac{dF}{d\theta}\nu^2}{r^3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta\partial r} + \frac{\nu^2}{r^3}\frac{d^3F}{d\theta^3} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta} - \frac{4\nu^2}{r^3}\frac{dF}{d\theta} \end{aligned}$$

slik at vi får følgende ligning for  $F$ :

$$\frac{d^3F}{d\theta^3} + 2F\frac{dF}{d\theta} + 4\frac{dF}{d\theta} = 0 \quad (\text{E.1.5})$$

Randbetingelser:

$$F(\alpha) = 0 \quad (\text{E.1.6a})$$

$$\frac{dF}{d\theta}(0) = 0 \quad (\text{E.1.6b})$$

$$F(0) = F_{maks} = \frac{u_{maks}r}{\nu} \quad (\text{E.1.6c})$$

E.1.6b er en symmetribetingelse som samtidig uttrykker at skjærspenningen  $\tau_{r\theta}$  er lik 0 for  $\theta = 0$ .

Dette ser vi av følgende uttrykk:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right] = \frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\mu\nu}{r^2} \frac{dF}{d\theta}$$

## Innføring av nye variable

Koordinat:

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha}, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (\text{E.1.7})$$

der  $\theta$  og  $\alpha$  måles i radianer.

Hastighet:

$$f = \frac{u}{u_{maks}} = \frac{\frac{ur}{\nu}}{\frac{u_{maks}r}{\nu}} = \frac{F}{F_{maks}} \quad (\text{E.1.8})$$

Innfører Reynoldstallet

$$\text{Re} = \frac{u_{maks}r\alpha}{\nu} \quad (\text{E.1.9a})$$

slik at

$$F = \frac{f \cdot \text{Re}}{\alpha} \quad (\text{E.1.9b})$$

Innsatt fra E.1.7 – E.1.9a i E.1.5:

$$f''' + 2 \text{Re} \cdot \alpha f f' + 4\alpha^2 f' = 0 \quad (\text{E.1.10})$$

$$\text{der } f' \equiv \frac{df}{d\eta}$$

Randbetingelser:

$$f(1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad (\text{E.1.11})$$

Dersom væskemengden som strømmer inn/ut i pkt.  $O$  i fig. E.1 er  $Q$ , får vi:

$$Q = 2 \cdot \int_0^\alpha u \cdot r d\theta = 2\nu \cdot \int_0^\alpha F d\theta = 2\nu \cdot \text{Re} \cdot \int_0^1 f d\eta$$

som innsatt for  $\text{Re}$  gir:

$$Q = 2u_{maks} \cdot r\alpha \cdot \int_0^1 f d\eta$$

eller:

$$u_{maks} = \frac{Q}{2r\alpha \cdot \int_0^1 f d\eta} \quad (\text{E.1.12})$$

Ved suksessiv integrasjon kan E.1.10 skrives:

$$\eta = \int_f^1 \frac{df}{\sqrt{(1-f) \cdot [\frac{2}{3} \text{Re} \cdot \alpha \cdot (f^2 + f) + 4\alpha^2 f + C]}} \quad (\text{E.1.13})$$

der  $C = [f'(1)]^2$

$C$  bestemmes følgelig fra E.1.13 ved å sette  $\eta = 1$  og nedre integrasjonsgrense  $f = 0$ . Integralet kan omformes til et ufullstendig elliptisk integral av første slag. Analytisk skal vi bare se på et spesialtilfelle som lar seg forholdsvis enkelt uttrykke ved elliptiske Jacobi-funksjoner. Ønsker vi tall-verdier for det generelle tilfellet, er det like greit å bruke skyteteknikk på E.1.10. Fig. E.2 viser noen strømningsfelt som er løsninger av E.1.13. Disse feltene vil være vanskelig å observere eksperimentelt da det symmetriske feltet i fig. E.1 er det mest stabile.

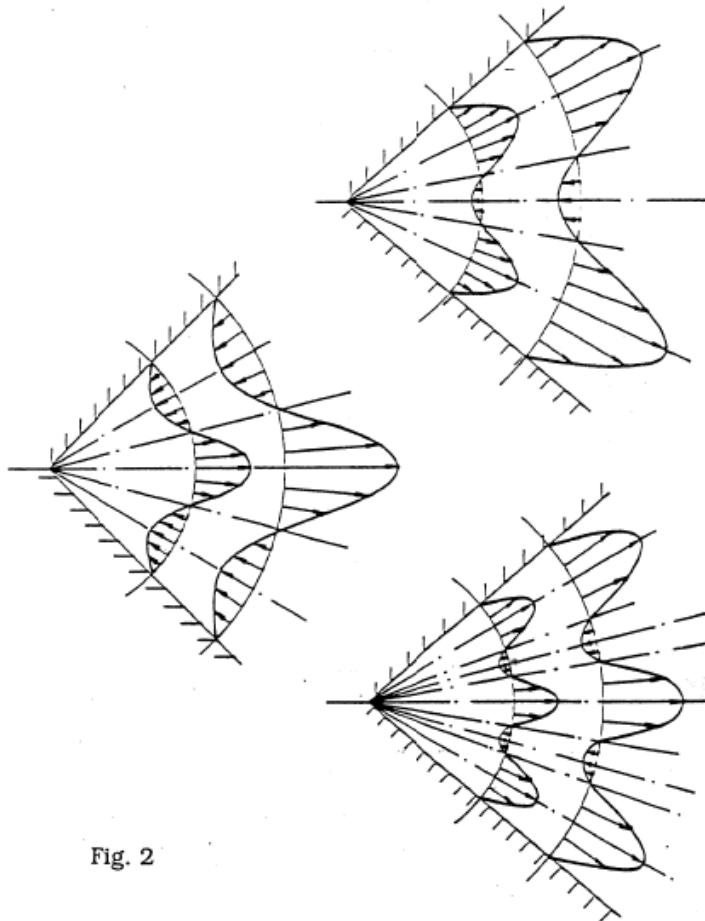


Fig. 2

Tatt fra  
P. C. LU : "Introduction to the  
Mechanics of Viscous Fluids",  
Hemisphere 1977

Figur E.2

Vi konsentrerer oss derfor om profiler av typen vist i fig. E.1. Når  $Re < 0$  (innstrømning), vil vi ha en strømning der skjærspenningen langs veggens alltid har samme fortegn, og det er ingen fare for separasjon. For  $Re > 0$ , vil vi kunne finne en tilhørende  $f'(1) = 0$  som gir null skjærspenning ved veggens, dvs.:  $f'(1) = 0$  som gir  $C = 0$  i E.1.13.

La oss derfor forsøke å beregne den verdien av  $Re$  som for en gitt verdi av  $\alpha$ , gir null skjærspenning ved veggens. Setter derfor  $C = 0$  i E.1.13 som vi skriver på følgende måte:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} Re \cdot \alpha}} \int_f^1 \frac{df}{\sqrt{(1-f) \cdot f \cdot (f+D)}} \quad (\text{E.1.14a})$$

der

$$D = 1 + \frac{6\alpha}{Re} \quad (\text{E.1.14b})$$

Fra integraltabell:

$$\int_f^1 \frac{df}{\sqrt{(1-f) \cdot f \cdot (f+D)}} = \frac{2}{\sqrt{1+D}} \cdot F(\phi, m) = \frac{2}{\sqrt{1+D}} \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m \cdot \sin^2 \theta}} \quad (\text{E.1.15a})$$

der

$$\sin \phi = \sqrt{1-f} \text{ og } m = \frac{1}{1+D} \quad (\text{E.1.15b})$$

$F(\phi, m)$  er et ufullstendig elliptisk integral av 1. slag. Henviser til appendiks G, innledning, der  $m$  betegnes  $k^2$ .

E.1.14a kan da skrives:

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{\alpha \cdot (\text{Re} + 3\alpha)}} \cdot F(\phi, m) = \beta \cdot F(\phi, m) \quad (\text{E.1.16})$$

Setter  $\eta = 1$  og med nedre integrasjonsgrense  $f = 0$ , blir  $F(\phi, m)$  et fullstendig elliptisk integral:

$$\frac{1}{\beta} = F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) \equiv K(m) \text{ eller } G(m) = K(m) - \sqrt{\alpha \cdot \left(\alpha + \frac{\text{Re}}{3}\right)} \quad (\text{E.1.17})$$

$K(m)$  beregnes av Matlabfunksjonen **ellipke** som sammen med nullpunkt løsener **fzero** løser  $G(m) = 0$  i E.1.17.

Startverdier for **fzero** som funksjon av  $\alpha^\circ$  (grader):

$$\begin{aligned} 0 < \alpha^\circ \leq 45^\circ : \text{Re} &= 590/\alpha^\circ \\ 45^\circ < \alpha^\circ \leq 65^\circ : \text{Re} &= -0.274 \cdot \alpha^\circ + 22.1 \\ 65^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ : \text{Re} &= -0.17 \cdot \alpha^\circ + 15.3 \end{aligned} \quad (\text{E.1.18})$$

Tabellen nedenfor er utskrift fra programmet **jhshearz**:

$\alpha$	Re	$\text{Re} \cdot \alpha$
5.00	1.17794e+002	1.02795e+001
10.00	5.83254e+001	1.01797e+001
15.00	3.82491e+001	1.00136e+001
20.00	2.80217e+001	9.78141e+000
25.00	2.17348e+001	9.48358e+000
30.00	1.74190e+001	9.12059e+000
35.00	1.42307e+001	8.69305e+000
40.00	1.17481e+001	8.20169e+000
45.00	9.73687e+000	7.64732e+000
50.00	8.05676e+000	7.03085e+000
55.00	6.61849e+000	6.35329e+000
60.00	5.36263e+000	5.61573e+000
65.00	4.24812e+000	4.81934e+000
70.00	3.24569e+000	3.96536e+000
75.00	2.33390e+000	3.05507e+000
80.00	1.49673e+000	2.08983e+000
85.00	7.21929e-001	1.07100e+000

Når vi nå har funnet, for gitt  $\alpha$ , den verdien av  $\text{Re}$  og produktet  $\text{Re} \cdot \alpha$  som gir  $f'(1) = 0$ , kan vi beregne  $f$  og  $f'$  som funksjon av  $\eta$ . Fra E.1.16:

$$\zeta = \frac{\eta}{\beta} = F(\phi, m) \quad (\text{E.1.19a})$$

der

$$\sin \phi = \sqrt{1 - f}, \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{\alpha \cdot (\text{Re} + 3\alpha)}}, \quad m = \frac{1}{1 + D} \quad (\text{E.1.19b})$$

$f(\eta)$  kan da finnes fra de elliptiske Jacobifunksjonene  $\text{sn}(\zeta, m)$  eller  $\text{cn}(\zeta, m)$ :

$$f = 1 - \text{sn}^2(\zeta, m) = \text{cn}^2(\zeta, m) \quad (\text{E.1.20})$$

$\text{sn}(\zeta, m)$  og  $\text{cn}(\zeta, m)$  beregnes med Matlabfunksjonen **ellipj**.

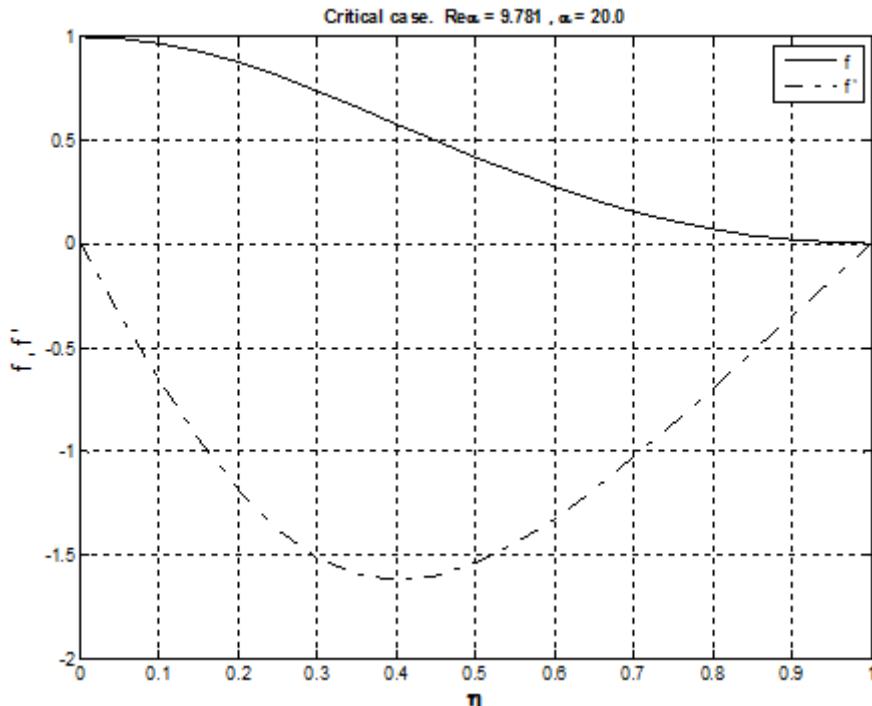
$f'(\eta)$  finnes fra E.1.13 med  $C = 0$ :

$$f'(\eta) = -\sqrt{(1 - f) \cdot \left[ \frac{2}{3} \text{Re} \cdot \alpha \cdot (f^2 + f) + 4\alpha^2 f \right]} \quad (\text{E.1.21})$$

Kan også finnes ved å derivere E.1.20 direkte:

$$f'(\eta) = -2 \text{sn}(\zeta, m) \cdot \text{cn}(\zeta, m) \cdot \text{dn}(\zeta, m) \quad (\text{E.1.22})$$

Et eksempel med  $\alpha = 20^\circ$  er beregnet med programmet **jhshearz3** og plottet i fig. E.3.



Figur E.3

Et tilfelle som det ofte henvises til i litteraturen, er når  $\alpha^2 \ll Re \cdot \alpha$ ,  $Re > 0$ . (Velger å skrive  $Re \alpha$  istedenfor  $Re \cdot \alpha$ ). Siste ledet i E.1.10 kan nå sløyfes. Ligningen blir nå:

$$f''' + 2 Re \alpha f f' = 0 \quad (\text{E.1.23})$$

Merk at det bare er produktet  $Re \alpha$  som opptrer i E.1.23; ikke  $Re$  og  $\alpha$  separat.

E.1.13 kan nå skrives:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} Re \cdot \alpha}} \int_f^1 \frac{df}{\sqrt{(1-f) \cdot (f^2 + f + C_0)}} \quad (\text{E.1.24a})$$

der

$$C_0 = \frac{C}{\frac{2}{3} Re \alpha} \quad (\text{E.1.24b})$$

$C_0$  bestemmes ved å sette  $\eta = 1$  og  $f = 0$ . For  $C = 0$  blir  $C_0 = 0$  slik at E.1.24a nå blir:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} Re \alpha}} \int_f^1 \frac{df}{(1-f) \cdot f \cdot (1+f)} \quad (\text{E.1.25})$$

eller med notasjon som i E.1.15a og E.1.16:

$$\eta = \beta \cdot F \left( \phi, \frac{1}{2} \right), \text{ der } \beta = \sqrt{\frac{3}{Re \alpha}} \quad (\text{E.1.26})$$

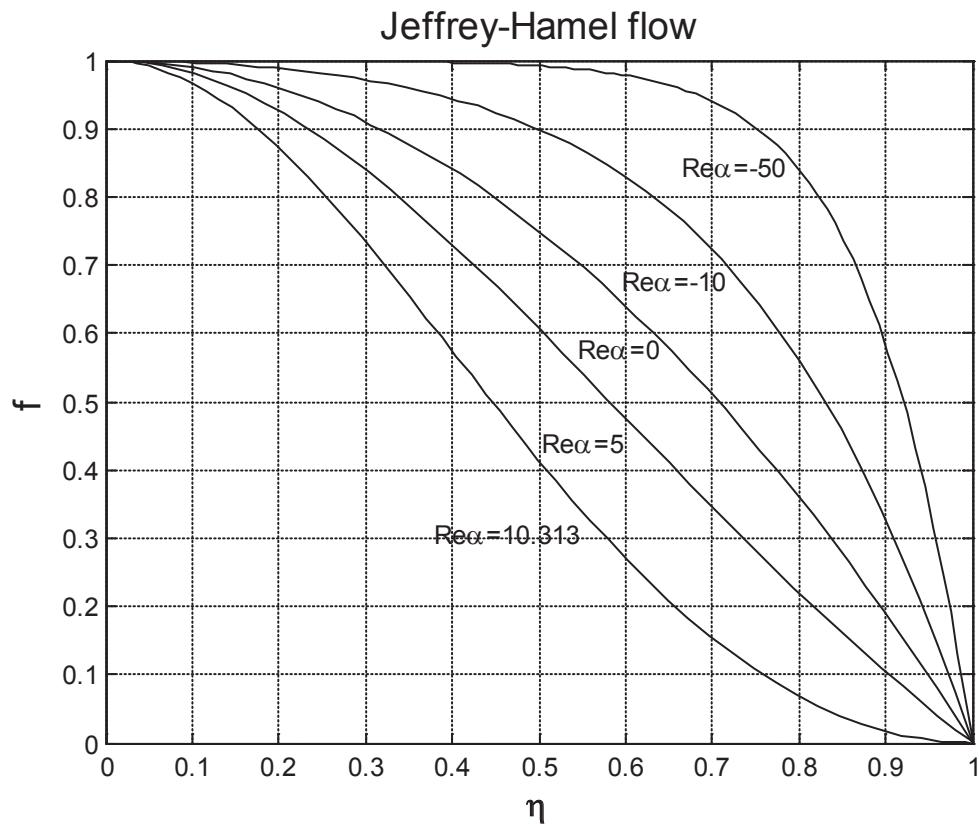
La oss spesielt bestemme den verdien av  $Re \alpha$  som gir  $C = 0$ . Med  $\eta = 1$ , får vi fra E.1.26:

$$\frac{1}{\beta} = F \left( \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \right) \equiv K \left( \frac{1}{2} \right), \text{ der } K \left( \frac{1}{2} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} \quad (\text{E.1.27})$$

som gir:

$$Re \alpha = 3 \cdot \left[ K \left( \frac{1}{2} \right) \right]^2 = 10.31277873 \quad (\text{E.1.28})$$

Fig. E.4 nedenfor viser noen kurver for tilfellet  $\alpha^2 \ll Re \alpha$  med grenseverdiene  $Re \alpha = 10.313$  som angir null skjærspenning ved veggens. ( $Re < 0$ : innstrømning;  $Re > 0$ : utstrømning). Beregning i programmet **jhfifigur** der vi bruker skyteteknikk og sekantmetoden.



Figur E.4

Tilfeller som lett lar seg løse analytisk er  $Re \ll 1$  (Stokes strømning), slik at leddet  $2 \cdot Re \alpha \cdot f \cdot f'$  kan sløyfes i E.1.10. Dersom også  $\alpha^2 \ll 1$ , kan begge de to siste leddene sløyfes, slik at vi sitter igjen med  $f''' = 0$  som gir en vanlig Poiseuille-strømning. (Parabelformet hastighetsprofil).



# LØSNING AV BLASIUS OG FALKNER-SKAN LIGNING VED BRUK AV DIFFERANSEMETODER

## STARTVERDIER. POHLHAUSEN-POLYNOM

Falkner -Skan- ligningen:

$$f''' + ff'' + \beta \cdot [1 - (f')^2] = 0 \quad (\text{F.0.1a})$$

med følgende randbetingelser:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f'(0) &= g(0) = 0 \\ f'(\eta_\infty) &= g(\eta_\infty) = 1 \end{aligned} \quad (\text{F.0.1b})$$

Dessuten oppfyller (F.0.1a) følgende betingelser:

$$\begin{aligned} f''(\eta_\infty) &= g'(\eta_\infty) = 0 \\ f'''(0) &= g''(0) = -\beta, & f'''(\eta_\infty) &= g''(\eta_\infty) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.0.1c})$$

Polynomer som oppfyller betingelsene i (F.0.1b) og (F.0.1c), kalles Pohlhausen - polynomer. La oss forsøke å utlede disse og starter med tilfellet  $\beta = 0$ .

Antar

$$f'''(\eta) = k \cdot \xi \cdot (\xi - 1), \quad \xi = \eta/\eta_\infty \quad (\text{F.0.2})$$

som tilfredsstiller betingelsene  $f'''(0) = 0$ ,  $f'''(\eta_\infty) = 0$ .  $k$  er en konstant som må bestemmes.

Ved integrasjon:

$$f''(\eta) = \frac{k \cdot \eta_\infty}{6} \cdot [1 + \xi^2 \cdot (2\xi - 3)] \quad (\text{F.0.3})$$

hvor vi har benyttet betingelsen  $f''(\eta_\infty) = 0$

Ny integrasjon:

$$f'(\eta) = \frac{k \cdot \eta_\infty^2}{12} \cdot \xi \cdot [2 + \xi^2 \cdot (\xi - 2)]$$

Betingelsen  $f'(\eta) = 1$  gir  $k = 12/\eta_\infty^2$  og  $f'(0) = 0$  er oppfylt.

Derav:

$$f'(\eta) = \xi \cdot [2 + \xi^2 \cdot (\xi - 2)] \quad (\text{F.0.4})$$

En siste integrasjon gir:

$$f(\eta) = \eta_\infty \xi^2 \cdot [1 + \xi^2 \cdot (\xi/5 - 1/2)] \quad (\text{F.0.5})$$

For  $\beta \neq 0$  starter vi med  $f'''(\eta) = \frac{(\xi - 1)}{\eta_\infty^2} [12\xi + \beta \cdot (1 - k_1\xi) \cdot k_2]$  basert på (F.0.5) der konstantene  $k_1$  og  $k_2$  må bestemmes.

$f'''(\eta_\infty) = 0$  er oppfylt, mens betingelsen  $f'''(0) = -\beta$  som følger fra (F.0.1c), gir  $k_2 = \eta_\infty^2$ . Ved å integrere opp to ganger, finnes  $k_1 = 2$  fra betingelsen  $f'(\eta_\infty) = 1$ . En ny integrasjon gir da  $f(\eta)$ .

Pohlhausen-polynomene for Falkner-Skan med  $\xi = \frac{\eta}{\eta_\infty}$  blir da:

$$f(\eta) = \eta_\infty \xi^2 \cdot \left\{ 1 + \xi^2 \left( \frac{\xi}{5} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta}{6} \left[ \frac{1}{2} - \xi + \xi^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{5} \right) \right] \eta_\infty^2 \right\} \quad (\text{F.0.6a})$$

$$f'(\eta) = \xi \left\{ 2 + \xi^2 (\xi - 2) + \frac{\beta}{6} [1 - 3\xi + \xi^2(3 - \xi)] \eta_\infty^2 \right\} \quad (\text{F.0.6b})$$

$$f''(\eta) = \frac{1}{\eta_\infty} \left\{ 2 + 2\xi^2(2\xi - 3) + \frac{\beta}{6} [1 - 6\xi + \xi^2(9 - 4\xi)] \eta_\infty^2 \right\} \quad (\text{F.0.6c})$$

$$f'''(\eta) = \frac{1}{\eta_\infty^2} \left\{ 12\xi(\xi - 1) + \beta \cdot [\xi(3 - 2\xi) - 1] \eta_\infty^2 \right\} \quad (\text{F.0.6d})$$

For Blasius ligningen er  $\beta = 0$  og (F.0.6) blir:

$$f(\eta) = \eta_\infty \xi^2 \left[ 1 + \xi^2 \left( \frac{\xi}{5} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{F.0.7a})$$

$$f'(\eta) = \xi [2 + \xi^2 (\xi - 2)] \quad (\text{F.0.7b})$$

$$f''(\eta) = \frac{1}{\eta_\infty} [2 + 4\xi^3 - 6\xi^2] \quad (\text{F.0.7c})$$

$$f'''(\eta) = \frac{12}{\eta_\infty^2} (\xi^2 - \xi) \quad (\text{F.0.7d})$$

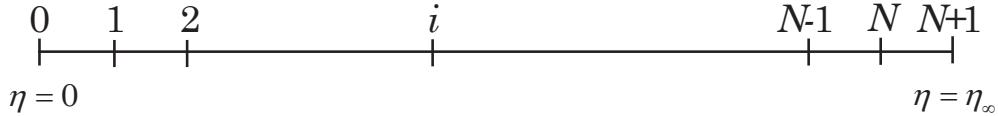
Det er lett å forsikre seg om at (F.0.6) tilfredstiller betingelsene i (F.0.1b) og (F.0.1c).

Pohlhausen-polynomer brukes ofte til å gi startverdier også ved numerisk løsning av de generelle grensesjiktligningene. (Se f.eks. Cebeci [4]).

## PROGRAMMET BLADIFF

Vi løser her Blasius ligning ved å skrive systemet som en 1. ordens ligning og en 2. ordens ligning som vist i avsnitt 3.5

Nummerering:



Figur F.1

Fra (3.5.7b) og (3.5.8) i kap 3:

$$f_i = \int_0^{\eta_i} g \, d\eta \quad (\text{F.0.8})$$

$$\left(1 - \frac{h}{2} f_i^m\right) g_{i-1} - 2g_i + \left(1 + \frac{h}{2} f_i^m\right) g_{i+1} = 0 \quad (\text{F.0.9})$$

der  $h = \Delta\eta$ ,  $f'(\eta) = g(\eta)$  og  $i = 1, 2, \dots, N$

Husk at alle størrelsene uten iterasjonsindeks er ved iterasjon  $m + 1$ . (F.0.8) løses ved bruk av Heuns metode (trapesmetoden i vårt tilfelle):

$$\begin{aligned} \text{sum} &:= 0.0 \\ \text{Utfør for } i &:= 1, 2, \dots, N + 1 \\ \text{sum} &:= \text{sum} + \frac{h}{2}(g_i + g_{i+1}) \\ f_i &:= \text{sum} \end{aligned} \quad (\text{F.0.10})$$

Fra (F.0.9) får vi følgende uttrykk for koeffisientene i Thomas-algoritmen:

$i = 1$ :

$$a_1 = 0, \ b_1 = -2, \ c_1 = 1 + \frac{h}{2} f_1^m, \ d_1 = 0 \quad (\text{F.0.11})$$

$2 \leq i \leq N - 1$ :

$$a_i = \left(1 - \frac{h}{2} f_i^m\right), \ b_i = -2, \ c_i = 1 + \frac{h}{2} f_i^m, \ d_i = 0$$

$i = N$ :

$$a_N = \left(1 - \frac{h}{2} f_N^m\right), \ b_N = -2, \ c_N = 0, \ d_N = -\left(1 + \frac{h}{2} f_N^m\right)$$

Løsningsprosessen blir som følger:

1. Startverdier beregnes fra (F.0.7)
2. Deretter løses (F.0.9) ved bruk av Thomas-algoritmen(**tdma**).
3. Nye verdier for  $f$  beregnes fra (F.0.10).

Skrittene 2–3 gjentas til konvergens er oppnådd.

Konvergensbetingelse:

$$|g'(0)^{m+1} - g'(0)^m| < \varepsilon \quad (\text{F.0.12})$$

$f''(0)$  beregnes fra (3.5.10).

$$f''_0 = g'_0 \approx \frac{2f_1}{h^2} \quad (\text{F.0.13})$$

Programmet ligger på **Disketten** i mappa *App6*. Tar med et utsnitt av listen som viser iterasjonsløkka samt iterasjonsforløpet

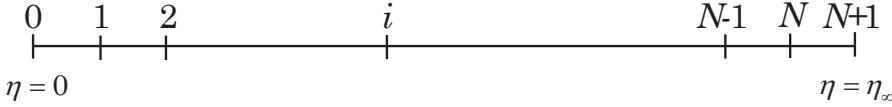
```
it = 0; fac = deta*0.5; df2 = 1.0;
while (df2 > epsi) & (it <= itmax)% Start of iteration loop
    it = it + 1;
    a = 1.0 - fac*f;
    b = -2.0*ones(neq,1);
    c = 1.0 + fac*f;
    d(neq) = -c(neq);
    x = tdma(a,b,c,d); % Solve system of equations
    for k = 1: neq
        g(k) = x(k);
    end
    % === Compute new f by the trapezoidal method ===
    f(1) = fac*g(1);
    s = f(1);
    for k = 2: np
        s = s + fac*(g(k) + g(k-1));
        f(k) = s;
    end
    f2new = 2*f(1)/deta^2;
    df2 = abs(f2new - f2wold);
    fprintf(' %10.0f %10.4e %10.3e \n',it,f2new,df2);
    f2wold = f2new;
end % end of iteration loop
if it > itmax
    disp(' *** Max. number of iterations! ***');
end;
```

Iteration	no.	s = f''(0)	ds
1	4.2360e-001	7.882e-002	
2	4.5537e-001	3.177e-002	
3	4.6541e-001	1.004e-002	
4	4.6842e-001	3.007e-003	
5	4.6930e-001	8.859e-004	
6	4.6956e-001	2.598e-004	
7	4.6964e-001	7.611e-005	
8	4.6966e-001	2.228e-005	
9	4.6967e-001	6.523e-006	

## PROGRAMMENE FSKPENTA OG FSKDELTA

Vi løser her Falkner-Skan ligningen ved å diskretisere ligningen direkte uten å først skrive den som 1. ordens og en 2. ordens ligning.

Nummerering:



Figur F.2

Ligning:

$$y_i''' + y \cdot y'' + \beta \cdot [1 - (y')^2] = 0 \quad (\text{F.0.14a})$$

med randbetingelser:

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(\eta_\infty) = 1 \quad (\text{F.0.14b})$$

Bruker sentraldifferanser for de deriverte med  $h = \Delta\eta$ :

$$\begin{aligned} y_i''' &= (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_{i-1} - y_{i-2})/2h^3 \\ y_i'' &= (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 \\ y_i' &= (y_{i+1} - y_{i-1})/2h \end{aligned} \quad (\text{F.0.15})$$

Vi beholder nummereringen fra **bladiff**, selv om  $y(\eta_\infty)$  ikke er gitt.

Ved å sette (F.0.15) inn i (F.0.14) med påfølgende linearisering, får vi følgende ligningsystem med en pentadiagonal koeffisientmatrise - en diagonal for hvert indeks:

$$\begin{aligned} &-y_{i-2} + [2(1 + hy_i^m) + \beta h(y_{i+1}^m - y_{i-1}^m)] \cdot y_{i-1} \\ &+ 2h(y_{i+1}^m - 4y_i^m + y_{i-1}^m) \cdot y_i \\ &+[2(hy_i^m - 1) - \beta h(y_{i+1}^m - y_{i-1}^m)] \cdot y_{i+1} + y_{i-2} \\ &= 2hy_i^m(y_{i+1}^m - 2y_i^m + y_{i-1}^m) - 2\beta h^3 - \frac{\beta h}{2}(y_{i+1}^m - y_{i-1}^m)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.0.16})$$

Vi har utelatt indekset  $m + 1$ . Systemet i (F.0.16) har formen:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} b_1 & c_1 & f_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & & \\ e_3 & a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ e_i & a_i & b_i & c_i & f_i & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ e_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & f_{n-2} & \\ e_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & & \\ e_n & a_n & b_n & & & \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (\text{F.0.17})$$

der ligning nr. $i$  skrives:

$$e_i \cdot y_{i-2} + a_i \cdot y_{i-1} + b_i \cdot y_i + c_i \cdot y_{i+1} + f_i \cdot y_{i+2} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{F.0.18})$$

Ett av problemene er at når (F.0.18) skrives ut for  $i = N$ , får vi leddene  $y_{N+1}$  og  $y_{N+2}$  som er ukjente.

Betingelsene  $y'(\eta_\infty) = 1$  og  $y''(\eta_\infty) = 0$  der  $\eta_\infty = \eta_{N+1}$  gir:

$$y_{N+1} = y_N + h, \quad y_{N+2} = y_N + 2h \quad (\text{F.0.19})$$

$y(0) = y'(0) = 0$  sammen med (F.0.19) brukt i (F.0.16) gir da følgende system:

i=1:

$$\begin{aligned} & [2h(y_2^m - 4y_1^m) - 1] \cdot y_1 + [2(hy_1^m - 1) - \beta hy_2^m] \cdot y_2 + y_3 \\ & = 2hy_1^m(y_2^m - 2y_1^m) - 2\beta h^3 - \frac{1}{2}\beta h(y_2^m)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.0.20a})$$

i=N-1

$$\begin{aligned} & -y_{N-3} + [2(1 + hy_{N-1}^m) + \beta h(y_N^m - y_{N-2}^m)] \cdot y_{N-2} \\ & + 2h(y_N^m - 4y_{N-1}^m + y_{N-2}^m) \cdot y_{N-1} \\ & + [2hy_{N-1}^m - 1 - \beta h(y_N^m - y_{N-2}^m)] \cdot y_N \\ & = 2hy_{N-1}^m(y_{N-2}^m - 2y_{N-1}^m + y_N^m) - h - 2\beta h^3 - \frac{1}{2}\beta h(y_N^m - y_{N-1}^m)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.0.20b})$$

i=N:

$$\begin{aligned} & -y_{N-2} + [2(1 + hy_N^m) + \beta h(y_N^m - y_{N-1}^m + h)] \cdot y_{N-1} \\ & + [2h(y_{N-1}^m - 2y_N^m) + 2h^2 - 1 - \beta h(y_N^m - y_{N-1}^m + h)] \cdot y_N \\ & = 2hy_N^m(y_{N-1}^m - y_N^m) - \frac{3}{2}\beta h^3 - \frac{1}{2}\beta h(y_N^m - y_{N-1}^m)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.0.20c})$$

For  $2 \leq i \leq N-2$  brukes (F.0.16).

Skriver eksplisitt ut alle koeffisientene:

$$\begin{aligned} f_i &= 1, \quad e_i = -1, \quad i = 1, \dots, N \\ a_i &= 2(hy_i^m + 1) + \beta h(y_{i+1}^m - y_{i-1}^m), \quad i = 2, \dots, N-1 \\ a_N &= 2(hy_N^m + 1) + \beta h(y_N^m - y_{N-1}^m + h) \\ b_i &= 2h(y_{i+1}^m - 4y_i^m + y_{i-1}^m), \quad i = 2, \dots, N-1 \\ b_1 &= 2h(y_2^m - 4y_1^m) - 1 \\ b_N &= 2h(y_{N-1}^m - 2y_N^m) + 2h^2 - 1 - \beta h(y_N^m - y_{N-1}^m + h) \\ c_i &= 2(hy_i^m - 1) - \beta h(y_{i+1}^m - y_{i-1}^m), \quad i = 2, \dots, N-2 \\ c_1 &= 2(hy_1^m - 1) - \beta hy_2^m \\ c_{N-1} &= 2hy_{N-1}^m - 1 - \beta h(y_N^m - y_{N-2}^m) \end{aligned} \quad (\text{F.0.21a})$$

$$\begin{aligned} d_i &= 2hy_i^m(y_{i+1}^m - 2y_i^m + y_{i-1}^m) - 2\beta h^3 - \frac{1}{2}\beta h(y_{i+1}^m - y_{i-1}^m)^2, \quad i = 2, \dots, N-2 \\ d_1 &= 2hy_1^m(y_2^m - 2y_1^m) - 2\beta h^3 - \frac{1}{2}\beta h(y_2^m)^2 \\ d_{N-1} &= 2hy_{N-1}^m(y_N^m - 2y_{N-1}^m + y_{N-2}^m) - h - 2\beta h^3 - \frac{1}{2}\beta h(y_N^m - y_{N-2}^m)^2 \\ d_N &= 2hy_N^m(y_{N-1}^m - y_N^m) - \frac{3}{2}\beta h^3 - \frac{1}{2}\beta h(y_N^m - y_{N-1}^m)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.0.21b})$$

Funksjonen **penta** løser systemet i (F.0.21). (En Fortran-versjon er beskrevet i appendiks I). Programmet **fskpenta** er skrevet som en funksjon slik at **penta** er innlagt i **fskpenta** og ligger på **Disketten** i mappa *App6*. Tar med et utsnitt av listingen som viser iterasjonsløkka samt iterasjonsforløpet.

```

it = 0; merror = 1.0;
bh = beta*h; bh3 = beta*h^3;
while (it <= itmax)& (merror > epsi)
    it = it + 1;
    for k = 2: n-1
        a(k) = 2*(h*y(k) + 1) + bh*(y(k+1) - y(k-1));
        b(k) = 2*h*(y(k+1) - 4*y(k) + y(k-1));
        c(k) = 2*(h*y(k) - 1) - bh*(y(k+1) - y(k-1));
        d(k) = 2*h*y(k)*(y(k+1) - 2*y(k) + y(k-1))...
            -2*bh3 - 0.5*bh*(y(k+1) - y(k-1))^2;
    end
    a(n) = 2*(h*y(n) + 1) + bh*(y(n) - y(n-1) + h);
    b(1) = 2*h*(y(2) - 4*y(1)) - 1;
    c(1) = 2*(h*y(1)-1) - bh*y(2);
    b(n) = 2*h*(y(n-1) - 2*y(n)) + 2*h^2 - 1 -bh*(y(n)-y(n-1) + h);
    c(n-1) = 2*h*y(n-1)-1 - bh*(y(n) - y(n-2));
    d(1) = 2*h*y(1)*(y(2) - 2*y(1))- 2*bh3 - 0.5*bh*y(2)^2;
    d(n-1) = - h + 2*h*y(n-1)*(y(n) - 2*y(n-1) + y(n-2)) ...
        -2*bh3 - 0.5*bh*(y(n) - y(n-2))^2;
    d(n) = 2*h*y(n)*(y(n-1) - y(n))-1.5*bh3 - 0.5*bh*(y(n) - y(n-1))^2;

    x = penta(e,a,b,c,f,d); % Solve system of equations
    merror = sum(abs(y-x))/n; %Compute mean error
    fprintf(' %10.0f %12.3e \n',it, merror);
    y = x; % Update the y-vector
end
if it >= itmax
    fprintf('\n *** Max. number of iterations! ***\n');
end;

Iteration
no.      mean error
1       4.049e-001
2       7.561e-002
3       2.886e-003
4       4.132e-006

```

Vi ser at iterasjonsprosessen her forløper mye raskere enn i programmet **bladiff**. Det skyldes at vi neglisjerte ledet  $\delta f_i(g_{i+1}^m - g_{i-1}^m)$  i den ene ligningen i **bladiff** for å få systemet på tridiagonal form.

### Bruk av delta-formen

I **fskpenta** har vi ligningsystemet på formen:

$$e_i \cdot y_{i-2}^{m+1} + a_i \cdot y_{i-1}^{m+1} + b_i \cdot y_i^{m+1} + c_i \cdot y_{i+1}^{m+1} + f_i \cdot y_{i+2}^{m+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{F.0.22})$$

Ved å innføre  $y_i^{m+1} = y_i^m + \delta y_i$  og tilsvarende for de andre  $i$ -indeksene i (F.0.22):

$$\begin{aligned} e_i \cdot \delta y_{i-2} + a_i \cdot \delta y_{i-1} + b_i \cdot \delta y_i + c_i \cdot \delta y_{i+1} + f_i \cdot \delta y_{i+2} = \\ d_i - (e_i \cdot y_{i-2}^m + a_i \cdot y_{i-1}^m + b_i \cdot y_i^m + c_i \cdot y_{i+1}^m + f_i \cdot y_{i+2}^m), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (\text{F.0.23})$$

Dette betyr at det er bare høyre-siden som forandres, ihvertfall før vi setter inn randbetingelser.

Når (F.0.23) skrives ut for  $i = N$ , får vi som tidligere leddene  $y_{N+1}$  og  $y_{N+2}$ , samt nå også  $\delta y_{N+1}$  og  $\delta y_{N+2}$ .

Nå har vi fra (F.0.19):

$$y_{N+1} = y_N + h, \quad y_{N+2} = y_N + 2h \quad (\text{F.0.24a})$$

slik at

$$\delta y_{N+1} = y_{N+1}^{m+1} - y_{N+1}^m = y_N^{m+1} + h - (y_N^m + h) = y_N^{m+1} - y_N^m = \delta y_N$$

som gir

$$\delta y_{N+1} = \delta y_{N+2} = \delta y_N \quad (\text{F.0.24b})$$

Angir derfor bare de koeffisientene som skiller seg fra (F.0.21).

$$\begin{aligned} d_i &= 2 \cdot [y_{i+1}^m - y_{i-1}^m - hy_i^m(y_{i+1}^m - 2y_i^m + y_{i-1}^m)] \\ &\quad + y_{i-2}^m - y_{i+2}^m - 2\beta h^3 + \frac{\beta h}{2}(y_{i+1}^m - y_{i-1}^m)^2, \quad i = 3, \dots, N-2 \\ d_1 &= y_1^m - y_3^m + 2 \cdot [y_2^m - hy_1^m(y_2^m - 2y_1^m)] - 2\beta h^3 + \frac{\beta h}{2}(y_2^m)^2 \\ d_2 &= -y_4^m + 2 \cdot [y_3^m - y_1^m - hy_2^m(y_3^m - 2y_2^m + y_1^m)] \\ &\quad - 2\beta h^3 + \frac{\beta h}{2}(y_3^m - y_1^m)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.0.25})$$

$$\begin{aligned} d_{N-1} &= y_N^m + y_{N-3}^m - h - 2 \cdot [y_{N-2}^m + hy_{N-1}^m(y_N^m - 2y_{N-1}^m + y_{N-2}^m)] \\ &\quad - 2\beta h^3 + \frac{\beta h}{2}(y_N^m - y_{N-2}^m)^2 \\ d_N &= y_N^m - 2y_{N-2}^m + y_{N-2}^m - 2hy_N^m(y_{N-1}^m - y_N^m + h) \\ &\quad + 2\beta h^3 + \frac{\beta h}{2}(y_N^m - y_{N-1}^m + h)^2 \end{aligned}$$

Programmet **fskdelta** som bruker disse koeffisientene, blir da temmelig likt **fskpenta**. Det ligger på **Disketten** i mappa *App6*. Tar med et utsnitt av listingen som viser iterasjonsløkka. Iterasjonsforløpet blir som for **fskpenta**.

```
it = 0; merror = 1.0;
bh = beta*h; bh3 = beta*h^3;
while (it <= itmax)& (merror > epsi)
    it = it + 1;
    for k = 2: n-1
        a(k) = 2*(h*y(k) + 1) + bh*(y(k+1) - y(k-1));
        b(k) = 2*h*(y(k+1) - 4*y(k) + y(k-1));
        c(k) = 2*(h*y(k) - 1) - bh*(y(k+1) - y(k-1));
        d(k) = 2*(y(k+1) - y(k-1) - h*y(k)*(y(k+1) - 2*y(k) + y(k-1)))...
            - 2*bh3 + 0.5*bh*(y(k+1) - y(k-1))^2;
        if (k > 2) & (k < n-1)
            d(k) = d(k) + y(k-2) - y(k+2);
        end
    end
    a(n) = 2*(h*y(n) + 1) + bh*(y(n) - y(n-1) + h);
    b(1) = 2*h*(y(2) - 4*y(1)) - 1;
```

```

c(1) = 2*(h*y(1)-1) - bh*y(2);
b(n) = 2*h*(y(n-1) - 2*y(n)) + 2*h^2 - 1 - bh*(y(n)-y(n-1) + h);
c(n-1) = 2*h*y(n-1)-1 - bh*(y(n) - y(n-2));
d(1) = y(1) - y(3) + 2*(y(2) - h*y(1)*(y(2) - 2*y(1))) ...
- 2*bh3 + 0.5*bh*y(2)^2;
d(2) = - y(4) + 2*(y(3) - y(1) - h*y(2)*(y(3)-2*y(2)+y(1))) ...
- 2*bh3 + 0.5*bh*(y(3) - y(1))^2;
d(n-1) = y(n) + y(n-3) - h ...
- 2*(y(n-2) + h*y(n-1)*(y(n) - 2*y(n-1) + y(n-2)))...
- 2*bh3 + 0.5*bh*(y(n) - y(n-2))^2;
d(n) = y(n)-2*y(n-1) + y(n-2) - 2*h*y(n)*(y(n-1) - y(n) + h)...
- 2*bh3 + 0.5*bh*(y(n) - y(n-1) + h)^2;

dy = penta(e,a,b,c,f,d); % Solve system of equations
y = y + dy; % Update the y-vector
merror = sum(abs(dy))/n; %Compute mean error
fprintf(' %10.0f %12.3e \n',it, merror);
end
if it >= itmax
    fprintf('\n *** Max. number of iterations! ***\n');
end;

```

Forskjellen mellom de to versjonene er at delta-versjonen vanligvis gir litt mer komplisert høyreside i ligningsystemet.

## PROGRAMMET FSKDIFF

Programmet **fskdiff** kan betraktes som differanseversjonen av skyteprogrammet **fsksec** i kapittel 2 ved at det løser Falkner-Skan ligningen ved bruk av Matlab-funksjonen **bvp4c**. **fskdiff** plotter hastigheten  $f'(\eta)$  samt skjærspenningen  $f''(\eta)$  for en gitt verdi av  $\beta$ . Lagt ved en beregning for  $\beta = 1$ .

```

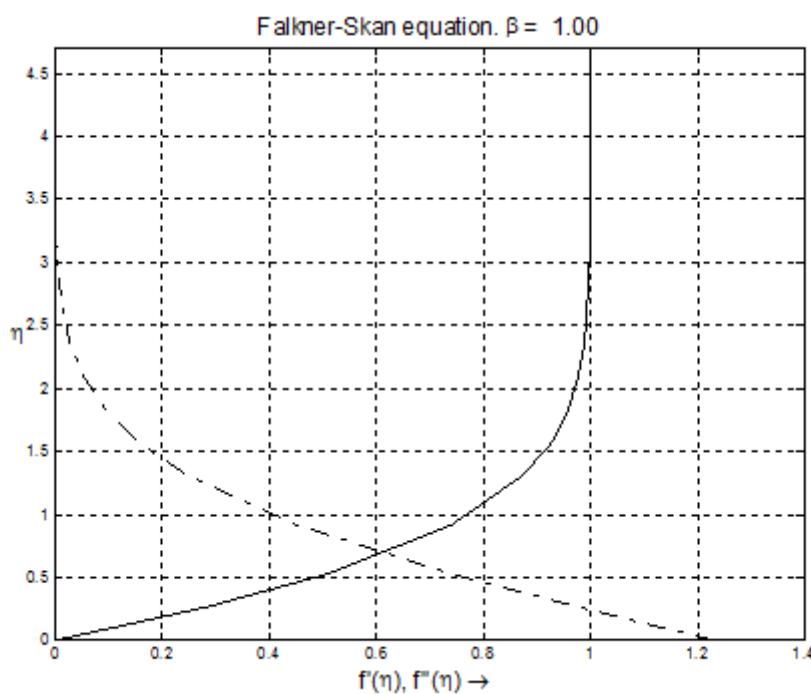
function fskdiff
% Solves the Falkner-Skan equation
% for a given value of beta using Matlab-function
% bvp4c.
% This version uses nested functions.
betasep = -0.19883768;
beta = input(' beta = ?');
while(beta < betasep) | (beta > 1.999)
    fprintf('beta = %7.3e is invalid!\n',beta);
    disp(' Try again !');
    beta = input(' beta = ?');
end
etainf = svalue(beta);
solinit = bvpinit(linspace(0,etainf,10),@fskinit);
% set 'stats' = 'on' to get information
options = bvpset('stats','off');
sol = bvp4c(@fskode,@fskbc,solinit,options);
eta = sol.x;
f = sol.y;
fprintf('\n');
fprintf(' f ''(0) = %7.5f.\n',f(3,1))
% Limits for plotting
v1 = ceil(10*f(3,1))*0.1;
v1 = max(1.1, v1);
v2 = ceil(10*etainf)*0.1;
FS = 'FontSize';
clf
plot(f(2,:),eta,'k',f(3,:),eta,'k-.');
axis([0 v1 0 v2]);
stitle = sprintf('Falkner-Skan equation. \\beta = %5.3f',beta);

```

```

title(stitle,FS,14);
ylabel('\'\eta',FS,14,'Rotation',0);
xlabel('f''(\eta), f'''(\eta) \rightarrow',FS,14)
grid
shg
% -----
function dfdata = fskode(eta,f)
% The Falkner-Skan equation
dfdata = [ f(2); f(3); -f(1)*f(3) - beta*(1 - f(2)^2)];
end
% -----
function res = fskbc(f0,finf)
% Boundary conditions for the Falkner-Skan equation
res = [f0(1); f0(2); finf(2) - 1];
end
% -----
function v = fskinit(eta)
% Pohlhausen polynomials give initial values for the Falkner-Skan equation
% These polynomials satisfy the boundary conditions
% f(0) = 0 , f'(0)=0, f'(\eta_{ainf}) = 1
x = eta/etainf; x2 = x*x;
v = zeros(3,1);
fac = beta*etainf^2/6;
fac1 = fac*(0.5 - x + x2*(0.75 - 0.2*x));
fac2 = fac*(1 - 3*x + x2*(3 - x));
fac3 = fac*(1 + x2*(9-4*x)-6*x);
v(1) = etainf*x2*(1 + x2*(0.2*x - 0.5)+ fac1);
v(2) = x*(2.0 + x2*(x - 2)+ fac2);
v(3) = (2 + x2*(4*x - 6)+ fac3)/etainf;
end
% -----
function etamax = svalue(beta)
% Estimate of etamax for a given value of beta
% See appendix 3,part 3.
p1 = [0.633 -1.68 5.76] ; p2 = [36.76 2.0 5.87];
p3 = [0.125 -0.9 5.463];
if ( beta <= 1.0)
    if ( beta >= 0.0 ) % 0 <= beta <= 1.0
        p = polyval(p1,beta);
        etamax = round(10.0*p)*0.1;
    else
        p = polyval(p2,beta); % betasep <= beta < 0
        etamax = round(10.0*p)*0.1;
    end
else
    p = polyval(p3,beta); % 1 < beta <= 1.999
    etamax = round(10.0*p)*0.1;
end
end
end

```



Figur F.3



# ANALYTISKE LØSNINGER

## G.1 INNLEDNING

I en rekke av avsnittene får vi bruk for elliptiske integral og funksjoner. For å slippe gjentagelser, gir vi en kort beskrivelse av disse her.

Det ufullstendige elliptiske integralet av 1. orden er gitt ved:

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} \quad (\text{G.1.1})$$

der  $\phi \in [0, \pi/2]$  og  $k \in [0, 1]$

For  $\phi = \pi/2$ , får vi det fullstendige elliptiske integralet av 1. orden:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} \quad (\text{G.1.2})$$

Ofte brukes symbolet  $m = k^2$ . Dette er f.eks. gjort i appendiks E.

Tilsvarende har vi det ufullstendige elliptiske integralet av 2. orden er gitt ved:

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)} \cdot du \quad (\text{G.1.3})$$

(G.1.4)

der  $\phi \in [0, \pi/2]$  og  $k \in [0, 1]$  (G.1.5)

For  $\phi = \pi/2$ , får vi det fullstendige elliptiske integralet av 2. orden:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)} \cdot du \quad (\text{G.1.6})$$

De fullstendige elliptiske integralene beregnes av funksjonen **ellipke** i Matlab. De ufullstendige integralene finnes ikke i Matlab og er separat kodet i

funksjonene **ellipfk** og **ellipek**.

Vi har også bruk for inverse funksjoner av de elliptiske integralene når vi ønsker å finne  $\phi$  eksplisitt.

$F(\phi, k)$  kan løses m.h.p.  $\phi$  ved bruk av den Jacobi-elliptiske funksjonen **sn**:

$$F(\phi, k) \equiv v(k) = \int_0^\phi \left( \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} \right) \quad (\text{G.1.7})$$

$$(\text{G.1.8})$$

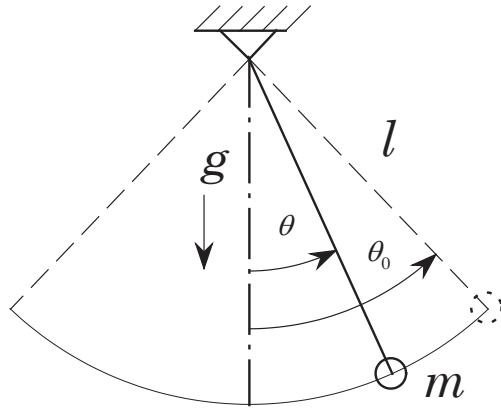
$$\sin(\phi) = \text{sn}(v, k) \quad (\text{G.1.9})$$

De Jacobi-elliptiske funksjonene **cn** og **dn** er definert via **sn** ved:

$$\begin{aligned} \text{sn}^2(v, k) + \text{cn}^2(v, k) &= 1 \\ \text{dn}^2(v, k) + k^2 \text{sn}^2(v, k) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{G.1.10})$$

**sn, cn** og **dn** beregnes i Matlab av funksjonen **ellipj**.

## G.2 ENKEL MATEMATISK PENDEL



Figur G.1

Pendelligning:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (\text{G.2.1})$$

Ved å betrakte pendelsnora som en masseløs stang, kan vi la  $\theta_0$  variere i intervallet  $-\pi \leq \theta_0 \leq \pi$ . På grunn av periodisiteten, kan vi begrense  $0 \leq \theta_0 \leq \pi$  oss til .

Innfører en dimensjonsløs tid  $t$ :

$$t = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \tau \quad (\text{G.2.2})$$

slik at (G.2.1) kan skrives:

$$\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0 \quad (\text{G.2.3})$$

Prikk betyr heretter derivasjon m.h.p  $t$ .

Multipliserer begge sider av (G.2.3) med  $\dot{\theta}$  og omformer:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\theta})^2 - \frac{d}{dt}(\cos(\theta)) = 0 \rightarrow \dot{\theta}^2 - 2 \cos(\theta) = C_1 \quad (\text{G.2.4})$$

(G.2.4) uttrykker at kinetisk energi + potensiell energi er konstant.

Initialbetingelser for  $t = 0$ :

$$\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0 \quad (\text{G.2.5})$$

(G.2.5) brukt i (G.2.4) gir  $C_1 = -2 \cos(\theta_0)$  slik at (G.2.4) kan skrives:

$$\dot{\theta}^2 = 2 \cdot (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \quad (\text{G.2.6})$$

Fra (G.2.6):

$$dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{2 \cdot (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} \quad (\text{G.2.7})$$

Innfører:

$$\cos(v) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{v}{2}\right), \quad v = \theta \text{ og } \theta_0 \quad (\text{G.2.8})$$

slik at (G.2.7) kan skrives:

$$dt = -\frac{d\theta}{2\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}} \quad (\text{G.2.9})$$

Innfører videre:

$$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right), \quad \sin(\phi) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k} \quad (\text{G.2.10})$$

Fra (G.2.10) følger  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \sin(\phi)$ ,  $\frac{d\theta}{2} = \frac{k \cos(\phi)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$  slik at (G.2.9) kan skrives:

$$dt = -\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}}$$

som gir:

$$t = - \int_{\pi/2}^{\phi} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} - \int_0^{\phi} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} \\ K(k) - F(\phi, k) \quad (\text{G.2.11})$$

Se innledningen for betydningen av integralene.

$K(k)$  er svingetiden for en fjerdedel av hele perioden. Kaller denne fjerdelstiden  $T$ :

$$T = K(k) \quad (\text{G.2.12})$$

I Matlab beregnes  $T$  fra:  $T = \text{ellipke}(k^2)$

Eksempel:  $\theta_0 = 60^\circ \rightarrow k = \frac{1}{2}$  fra (G.2.10) som gir  $T = 1.68575035\cdots$  fra Matlab.

Fra (G.2.11):

$$F(\phi, k) = K(k) - t = T - t$$

Den inverse av  $F(\phi, k)$  kan uttrykkes ved den Jacobi-elliptiske funksjonen **sn** slik at vi får

$$\sin(\phi) = \text{sn}(T - t, k) \quad (\text{G.2.13})$$

Ved å bruke (G.2.10), får vi:

$$\begin{aligned}\theta &= 2 \arcsin[k \cdot \operatorname{sn}(T-t, k)] \\ \dot{\theta} &= -2k \operatorname{cn}(T-t, k)\end{aligned}\quad (\text{G.2.14})$$

La oss se på svingetiden  $T$  for små utslag. Husk at  $T$  her er fjerdeparten av den totale svingetiden.

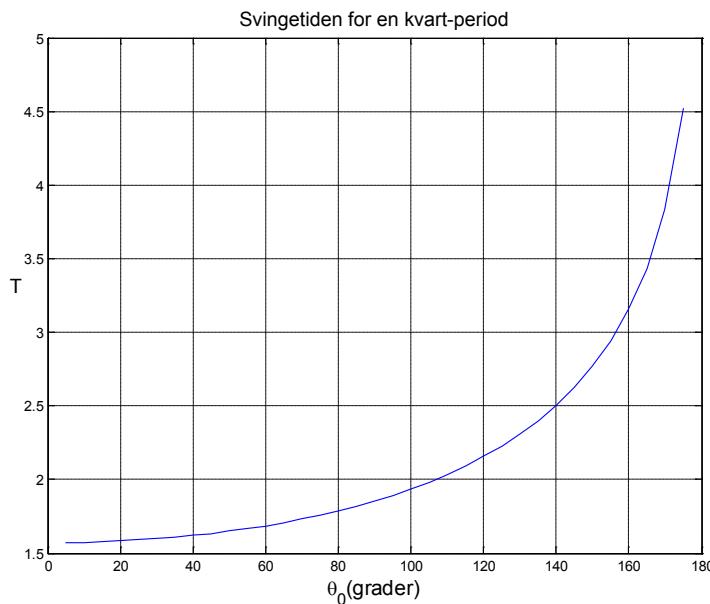
Fra (G.2.12):

$$\begin{aligned}T &= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2(u) + \frac{3}{8}k^4 \sin^4(u) + \dots\right) du \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64}k^4\right) \\ \text{Forlanger feilen } < 1 \% &\rightarrow \frac{k^2}{4} < \frac{1}{100} \rightarrow \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Fra (G.2.10) får vi:

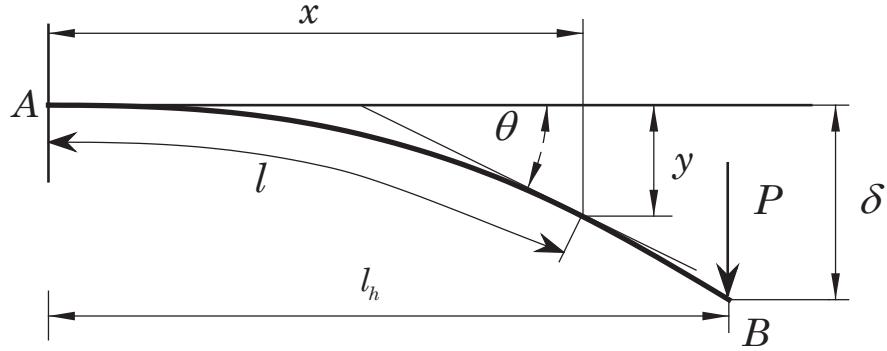
$$\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = k = 0.2 \rightarrow \theta_0 < 23.1^\circ$$

Dersom vi er fornøyd med en feil på 5%, tilsvarer dette  $\theta_0 = 50.4^\circ$ . Figuren nedenfor viser kvartperioden som funksjon av  $\theta_0$



Figur G.2

### G.3 STOR NEDBØYNING AV KRAGBJELKE



Figur G.3

Bruker buelengden  $l$  og helningsvinkelen  $\theta$  som variable. Alle lengder er gjort dimensjonsløse ved divisjon med bjelkelengden  $L$ . Buelengden  $l$  går derfor fra  $l = 0$  i  $A$  til  $l = 1$  i  $B$ .

Momentligning:

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{PL^2}{EI}(l_h - x) \quad (\text{G.3.1})$$

Geometriske relasjoner:

$$\frac{dx}{dl} = \cos(\theta), \quad \frac{dy}{dl} = \sin(\theta) \quad (\text{G.3.2})$$

Deriverer (G.3.1) m.h.p.  $l$  og setter inn fra (G.3.2):

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{PL^2}{EI} \cos(\theta) = 0 \quad (\text{G.3.3})$$

Parameteren  $\alpha$  definert ved:

$$\alpha^2 = \frac{PL^2}{EI} \quad (\text{G.3.4})$$

Vi må da løse følgende differensiellligninger:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \alpha^2 \cos(\theta) = 0 \quad (\text{G.3.5a})$$

$$\frac{dy}{dl} = \sin(\theta) \quad (\text{G.3.5b})$$

med følgende randbetingelser:

$$y(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \frac{d\theta}{dl}(1) = 0 \quad (\text{G.3.5c})$$

Utledningen videre følger stort sett den som er gitt i del G.2, og vi tar derfor ikke med alle detaljene.

Fra (G.3.5a):

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = -\alpha^2 \cos(\theta)$$

Integrasjon:

$$\left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 = -2\alpha^2 \sin(\theta) + C$$

Fra (G.3.5c):

$\theta = \theta_0$  og  $C = 0$  for  $l = 1$  som gir:

$$\left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 = 2\alpha^2 (\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \quad (\text{G.3.6})$$

$\theta_0$  er helningen på enden  $l = 1$  og er ukjent. Bruker dessuten betingelsen at lengden bevares.

Innfører en ny variabel  $\phi$  definert ved:

$$\sin^2(\phi) = \frac{1 + \sin(\theta)}{1 + \sin(\theta_0)} \text{ og en konstant } k^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin(\theta_0)) \quad (\text{G.3.7})$$

Med disse definisjonene får vi:

$$\begin{aligned} 1 + \sin(\theta) &= 2k^2 \sin^2(\phi), \quad 1 - \sin(\theta) = 2(1 - k^2 \sin^2(\phi)) \\ \sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)} &= \sqrt{2} \cdot k \cos(\phi), \quad d\theta = \frac{4k^2 \sin(\phi) \cos(\phi)}{\cos(\theta)} d\phi \end{aligned} \quad (\text{G.3.8})$$

Betingelser:

$$\theta = 0 \rightarrow \sin(\phi_1) = \frac{\sqrt{2}}{2k}, \quad \theta = \theta_0 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \quad (\text{G.3.9})$$

Med bruk av (G.3.4), (G.3.8) og (G.3.9):

$$\alpha = L \sqrt{\frac{P}{EI}} = \int_{\phi_1}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} = K(k) - F(\phi_1, k) \quad (\text{G.3.10})$$

Nedbøyningen  $\delta$  på enden blir da:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \int_{\phi_1}^{\pi/2} \frac{(2k^2 \sin^2(u) - 1)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} du = 1 - \frac{2}{\alpha} [E(k) - E(\phi_1, k)] \quad (\text{G.3.11})$$

Se innledningen for betegnelsen for integralene.

Vi er også interessert i å finne den horisontale lengden  $l_h$ .

Denne finnes ved å sette  $x = 0 \rightarrow \theta = 0$  i (G.3.1) som med bruk av (G.3.6) gir:

$$l_h = \frac{\sqrt{2 \sin(\theta_0)}}{\alpha}, \quad l_h = 1 \text{ for } \theta_0 = 0, \alpha = 0 \quad (\text{G.3.12})$$

Med gitt verdi av  $\theta_0$ , finnes  $k$  fra (G.3.7),  $\phi_1$  fra (G.3.9),  $\alpha$  fra (G.3.10),  $\delta$  fra (G.3.11) og  $l_h$  fra (G.3.12).

Vanligvis er det lastfaktoren  $\alpha$  som er gitt. Fra (G.3.7) og (G.3.10) får vi:

$$K(k) - \alpha = F(\phi_1, k) \rightarrow \sin(\phi_1) = \operatorname{sn}[K(k) - \alpha, k] = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot k}$$

som blir:

$$k = \frac{\operatorname{sn}[K(k) - \alpha, k]}{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{dn}(\alpha, k)}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{cn}(\alpha, k)} \quad (\text{G.3.13})$$

Vi har løst (G.3.13) numerisk ved bruk av sekantmetoden i funksjonen **kalpha**. Fra programmet **ldctable** får vi følgende tabell ( $\theta_0$  i grader)

$\alpha$	$\theta_0$	$\delta$	$l_h$
0.0	0.000	0.00000	1.00000
0.5	7.121	0.08275	0.99588
1.0	26.434	0.30172	0.94357
1.5	48.217	0.52670	0.81414
2.0	64.242	0.66996	0.67106
2.5	74.362	0.75088	0.55512
3.0	80.527	0.79906	0.46818
3.5	84.260	0.83048	0.40305
4.0	86.521	0.85275	0.35323
4.5	87.871	0.86952	0.31416
5.0	88.721	0.88273	0.28281

## G.4 LIGNINGEN $\mathbf{y}''(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}^2(\mathbf{x})$

Ligning:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \cdot [y(x)]^2, \quad a > 0 \quad (\text{G.4.1a})$$

Randbetingelser:

$$y(0) = \frac{6}{a}, \quad y(1) = \frac{3}{2a} \quad (\text{G.4.1b})$$

Denne ligningen har to løsninger, og den ene finnes enkelt ved direkte integrasjon.

$$y'' \cdot y' = a \cdot y^2 \cdot y' \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [(y')^2] = a \cdot y \cdot y'$$

eller:

$$(y')^2 = 2a \cdot \int (y^2 \cdot y') + C$$

Vi har:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y^3) &= 3y^2 \cdot y' \rightarrow \int (y^2 \cdot y') = \frac{y^3}{3} \\ \rightarrow (y')^2 &= \frac{2a}{3} y^3 + C_4 \end{aligned} \quad (\text{G.4.2})$$

Velger  $C_4 = 0$ :

$$(y')^2 = \frac{2a}{3} y^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot y^{3/2}$$

Velger negativt fortegn p.g.a. betingelsen  $y(1) = \frac{3}{2a}$ :

$$x = 2\sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + C_1$$

Betingelsen  $y(0) = \frac{6}{a}$  gir  $C_1 = -1$  slik at vi får tilslutt:

$$y_I(x) \equiv y(x) = \frac{6}{a \cdot (x+1)^2} \quad (\text{G.4.3})$$

Ved å velge  $C_4 \neq 0$  i (G.4.2), finner vi den andre løsningen. Dette blir mer komplisert og gir derfor bare sluttresultatet nedenfor.

$$y_{II}(x) = \left(\frac{3}{2a}\right) \cdot C_1^2 \left[ \frac{1 + \operatorname{cn}(u, k)}{1 - \operatorname{cn}(u, k)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad u = C_1 x + C_2 \quad (\text{G.4.4})$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 4.3031099033567704983 \\ C_2 &= 3.2014843331984385194 \\ k &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \cos(15^\circ) \end{aligned} \quad (\text{G.4.5})$$

(G.4.4) kan også skrives:

$$y_{II}(x) = \left(\frac{3}{2a}\right) \cdot C_1^2 \left[ \frac{1 - \operatorname{cn}(v, k)}{1 + \operatorname{cn}(v, k)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad v = C_1 x + C_3 \quad (\text{G.4.6a})$$

$$\text{der } C_3 = 2.3346419575390965983 \quad (\text{G.4.6b})$$

Med tanke på skyteteknikk:

$$\begin{aligned} y'_I(0) &= -\frac{12}{a} \\ y'_{II}(0) &= -\frac{53.787823237283229765}{a} \end{aligned} \quad (\text{G.4.7})$$

Dessuten:

$$\begin{aligned} y'_{II}(x) &= 0 \text{ for } x = 0.542547602101199028621 \\ y_{II}(x) &= 0 \text{ for } x_1 = 0.11370060107199119337 \\ &\quad x_2 = 0.971405199002329137905 \end{aligned} \quad (\text{G.4.8})$$

Verdiene i (G.4.8) er uavhengige av  $a$ .

Tilslutt tar vi med at løsningen i (G.4.1) finnes enkelt ved bruk av Maple:

```
eq:= diff(y(x),x,x) - a*(y(x))^2;
dsolve(eq,y(x));
```

$$y(x) = \frac{6 \cdot \text{WeierstrassP}(x + .C1, 0, .C2)}{a}$$

Funksjonen WeierstrassP kalles Weierstrass elliptiske  $P$ -funksjon og skrives ofte med symbolet  $\wp$ .

Løsningen av (G.4.1) er da gitt ved:

$$y(x) = \frac{6}{a} \cdot \wp(x + A_1; 0, A_2) \quad (\text{G.4.9})$$

$\wp$ -funksjonen finnes ikke i Matlab.

Tilfellet med  $a = 6$  er kjent som Painlevés 1. transendent.

Et spesialtilfelle:

$$\wp(z; 0, 0) = \frac{1}{z^2} \quad (\text{G.4.10})$$

Dette tilsvarer  $A_2 = 0$  og  $z = \frac{1}{x+A_1}$  i (G.4.9), som gir:

$$y(x) = \frac{6}{a \cdot (x + A_1)^2}$$

Betingelsen  $y(0) = \frac{6}{a}$  fra (G.4.1b) gir  $A_1 = 1$  slik at vi får:

$$y_I(x) \equiv y(x) = \frac{6}{a \cdot (x + 1)^2} \quad (\text{G.4.11})$$

Ved å sette inn  $y(1) = \frac{3}{2a}$  fra (G.4.1b), finner vi at (G.4.11) også tilfredsstiller denne betingelsen. (G.4.11) er da en løsning av (G.4.1), identisk med (G.4.3).

Vi kan bruke Maple til å bestemme konstantene  $A_1$  og  $A_2$  i (G.4.9) for den andre løsningen.

Ved å sette  $a = 6$ , blir betingelsene i (G.4.1b):  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = \frac{1}{4}$  som fra (G.4.9) gir følgende ligningsystem:

$$\begin{aligned} 1 &= \wp(A_1; 0, A_2) \\ \frac{1}{4} &= \wp(1 + A_1; 0, A_2) \end{aligned} \tag{G.4.12}$$

Ved bruk av **fsolve** i Maple:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.74399315962184099231 \\ A_2 &= -76.364720239034049554 \end{aligned} \tag{G.4.13}$$

Den andre løsningen er da gitt ved:

$$y_{II}(x) = \frac{6}{a} \cdot \wp(x + A_1; 0, A_2) \tag{G.4.14}$$

med  $A_1$  og  $A_2$  gitt i (G.4.13).

Merk at  $C_4 = -A_2$  i (G.4.2) for  $y_{II}(x)$ .

## G.5 RIBBE MED VARIABELT TVERRSNITT

Differensialligning:

$$\frac{d}{dx} \left[ \{\alpha + (1 - \alpha) \cdot x\} \frac{d\theta(x)}{dx} \right] - \beta^2 \theta(x) = 0 \quad (\text{G.5.1a})$$

med randbetingelser:

$$\frac{d\theta}{dx}(0) = \beta_0^2 \cdot \theta(0), \quad \theta(1) = 1 \quad (\text{G.5.1b})$$

Setter

$$z^2 = [\alpha + (1 - \alpha) \cdot x] \left\{ \frac{2\beta}{1 - \alpha} \right\}^2 \quad (\text{G.5.2a})$$

som gir

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2\beta^2}{z(1 - \alpha)} \text{ og } \frac{d()}{dx} = \frac{2\beta^2}{z(1 - \alpha)} \cdot \frac{d()}{dz} \quad (\text{G.5.2b})$$

Bruk av (G.5.2) i (G.5.1) gir følgende ligning:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \theta(z) = 0 \quad (\text{G.5.3})$$

med løsning:

$$\theta(z) = A \cdot I_0(z) + B \cdot K_0(z) \quad (\text{G.5.4})$$

$I_0$  og  $K_0$  er modifiserte Besselfunksjoner av nullte orden;  $A$  og  $B$  er konstanter som bestemmes fra randbetingelsene. Fra (G.5.2a) får vi

$$x = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt{\alpha} \cdot \frac{2\beta}{(1 - \alpha)}, \quad x = 1 \Rightarrow z_1 = \frac{2\beta}{(1 - \alpha)} \quad (\text{G.5.5})$$

Ved derivasjon av (G.5.4):

$$\frac{d\theta}{dz} = A \cdot \frac{dI_0(z)}{dz} + B \cdot \frac{dK_0(z)}{dz} = A \cdot I_1(z) - B \cdot K_1(z) \quad (\text{G.5.6})$$

der  $I_1$  og  $K_1$  er modifiserte Besselfunksjoner av første orden.

For den første randbetingelsen i (G.5.1b) får vi med bruk av (G.5.2b):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(0)}{dx} &= \beta_0^2 \cdot \theta(0) = \frac{2\beta^2}{z_0(1 - \alpha)} \frac{d\theta(z_0)}{dz} \rightarrow \\ \frac{d\theta(z_0)}{dz} &= g \cdot \theta(z_0) \text{ med } g = \frac{z_0(1 - \alpha)}{2} \left( \frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{G.5.7})$$

der  $z_0$  er gitt i (G.5.5)

Randbetingelsene i (G.5.1b) med bruk av (G.5.4)- (G.5.7), gir følgende to ligninger for bestemmelse av konstantene  $A$  og  $B$ :

$$\begin{aligned} A \cdot I_0(z_1) + B \cdot K_0(z_1) &= 1 \\ A \cdot I_1(z_0) - B \cdot K_1(z_0) &= g \cdot [A \cdot I_0(z_0) + B \cdot K_0(z_0)] \end{aligned}$$

som løst m.h.p.  $A$  og  $B$  gir:

$$A = \frac{[K_1(z_0) + g \cdot K_0(z_0)]}{J}, \quad B = \frac{[I_1(z_0) - g \cdot I_0(z_0)]}{J} \quad (\text{G.5.8a})$$

med

$$J = K_1(z_0) \cdot I_0(z_1) + K_0(z_1) \cdot I_1(z_0) + g \cdot [K_0(z_0) \cdot I_0(z_1) - K_0(z_1) \cdot I_0(z_0)] \quad (\text{G.5.8b})$$

der  $z_0$  og  $z_1$  er gitt i (G.5.5)

**Spesialtilfelle: Trekantprofil.** Når  $d = 0$  som betyr  $\alpha = 0$ , går trapesprofilen over til et trekantprofil.

Lign. (G.5.1) blir nå:

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - \beta^2 \theta(x) = 0 \quad (\text{G.5.9a})$$

For  $x = 0$  reduseres (G.5.9) til:

$$\frac{d\theta(0)}{dx} - \beta^2 \theta(0) = 0 \quad (\text{G.5.9b})$$

Randbetingelsen i (G.5.1b) for  $\frac{d\theta(0)}{dx}$  kan derfor ikke lenger tilfredsstilles og må erstattes med betingelsen i (G.5.9b). Vi får videre  $z = \sqrt{x} \cdot 2\beta$  som gir  $z_0 = 0$  og  $z_1 = 2\beta$ . Løsningen i (G.5.4) gjelder fremdeles, men da  $K_0(z) \rightarrow \infty$  for  $z \rightarrow 0$ , må vi sette  $B = 0$ . Løsningen blir nå:

$$\theta(z) = A \cdot I_0(z) \quad (\text{G.5.10})$$

Konstanten  $A$  bestemmes fra betingelsen  $\theta(z_1) = 1$  som gir  $A = \frac{1}{I_0(z_1)} = \frac{1}{I_0(2\beta)}$ . Den fullstendige løsningen for trekantprofilen blir:

$$\theta(z) = \frac{I_0(z)}{I_0(2\beta)} \rightarrow \theta(x) = \frac{I_0(2\beta\sqrt{x})}{I_0(2\beta)} \quad (\text{G.5.11a})$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{I_1(z)}{I_0(2\beta)} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{2\beta^2}{z} \cdot \frac{I_1(z)}{I_0(2\beta)} = \frac{\beta}{\sqrt{x}} \frac{I_1(\sqrt{x} \cdot 2\beta)}{I_0(2\beta)} \quad (\text{G.5.11b})$$

Løsningen gitt i (G.5.11b) tilfredstiller randbetingelsen i (G.5.1b) da:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{I_1(\sqrt{x} \cdot 2\beta)}{\sqrt{x}} = \beta$$

**Talleksempel for trapesprofilen.**

$$L = 0.1\text{m}, \quad D = 0.01\text{m}, \quad d = 0.005\text{m}, \quad \bar{h} = 80\text{W/m}^2/\text{°C}, \quad \bar{h}_0 = 200\text{W/m}^2/\text{°C}$$

og  $k = 40\text{W/m}/\text{°C}$  som gir  $\beta^2 = 4.0$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  og  $\beta_0^2 = 0.5$

(G.5.12)

(G.5.1) blir nå:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1+x) \cdot \frac{d\theta}{dx} \right] - 8 \cdot \theta(x) = 0 \quad (\text{G.5.13})$$

$$z^2 = 32 \cdot (1+x), \quad z_0 = 4\sqrt{2}, \quad z_1 = 8, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{16}{z} \cdot \frac{d\theta}{dz}, \quad g = \frac{\sqrt{2}}{8} \quad (\text{G.5.14})$$

Et Matlab-program som beregner temperaturen  $\theta$  samt gradienten  $\theta'$  for  $x$  fra 0 til 1 med skritt  $\Delta x = 0.1$  er gitt nedenfor.

```

z0 = 4.0*sqrt(2.0); z1 = 8.0; g = sqrt(2.0)/8.0;
K1z0 = besselk(1,z0); I0z1 = besseli(0,z1);
K0z1 = besselk(0,z1); I1z0 = besseli(1,z0);
K0z0 = besselk(0,z0); I0z0 = besseli(0,z0);
J = K1z0*I0z1 + K0z1*I1z0 + g*(K0z0*I0z1 - K0z1*I0z0);
A = (K1z0 + g*K0z0)/J;
B = (I1z0 - g*I0z0)/J;
x = [0: 0.1: 1.0]';
z = sqrt(32.0*(1+x));
theta = A*besseli(0,z) + B*besselk(0,z);
dtheta = 16.0*(A*besseli(1,z) - B*besselk(1,z))/z;
fprintf(' x theta theta' '\n\n');
fprintf('%6.2f %10.5f %10.5f \n',[x,theta,dtheta]');

```

## G.6 IKKE-STASJONÆR COUETTE-STRØMNING

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1 \quad (\text{G.6.1})$$

Initialbetingelse:

$$u(y, t) = 0, \quad t < 0 \quad (\text{G.6.2})$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 1, \quad t \geq 0 \\ u(1, t) &= 0, \quad \forall t \end{aligned} \quad (\text{G.6.3})$$

Henviser til avsnitt 5.2.2 for detaljer.

Stasjonær løsning:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\rightarrow 0 \text{ når } t \rightarrow \infty \\ \text{gir } \frac{d^2 u_s}{dy^2} &= 0; \text{ dvs.: } u_s(y) = 1 - y \end{aligned} \quad (\text{G.6.4})$$

Innfører:

$$\omega(y, t) = u_s(y) - u(y, t) \quad (\text{G.6.5})$$

Får da følgende problem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1 \quad (\text{G.6.6a})$$

Initialbetingelse:

$$\omega(y, t) = u_s, \quad t < 0 \quad (\text{G.6.6b})$$

Randbetingelser:

$$\begin{aligned} \omega(0, t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ \omega(1, t) &= 0, \quad \forall t \end{aligned} \quad (\text{G.6.6c})$$

Dette problemet er identisk med problemet i avsnitt 2.3 bortsett fra at avstanden mellom plate og vegg der var uendelig.

Separasjon av variable:

$$\omega(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(y, t) \quad (\text{G.6.7a})$$

der

$$\omega_n = T_n(t) \cdot Y_n(y) \quad (\text{G.6.7b})$$

som gir følgende diff. ligninger med separasjonskonstant  $\lambda \neq 0$ :

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0 \text{ med løsning } T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$Y''_n(y) + \lambda_n^2 Y_n(y) = 0 \text{ med løsning } Y_n(y) = A_n \sin(\lambda_n y) + B_n \cos(\lambda_n y), \quad n = 0, 1, \dots$$

Innsatt i (G.6.7):

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \cdot (A_n \sin(\lambda_n y) + B_n \cos(\lambda_n y)) \quad (\text{G.6.8})$$

Randbetingelse (G.6.6b):

$$\omega(0, t) = 0 \text{ gir } B_n = 0 , \forall n$$

Derav:

$$\omega(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \cdot A_n \sin(\lambda_n y) \quad (\text{G.6.9})$$

Randbetingelse (G.6.6c):

$$\omega(1, t) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda_n) = 0$$

som gir  $\lambda_n = n \cdot \pi , n = 1, 2, \dots$  da vi forutsatte  $\lambda_n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \omega(y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \cdot A_n \sin(\lambda_n y) \\ &\text{der } \lambda_n = n \cdot \pi , n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{G.6.10})$$

Koeffisientene  $A_n$  bestemmes fra initialbetingelsen (G.6.6b):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi y) = 1 - y , y \in [0, 1]$$

Multipliserer med  $\sin(m\pi y)$  og integrerer:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - y) \sin(m\pi y) dy &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi y) \sin(m\pi y) dy \\ &= A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi y) dy = \frac{A_m}{2} \end{aligned}$$

Derav:

$$A_n = 2 \cdot \int_0^1 (1 - y) \sin(n\pi y) dy = \frac{2}{n \cdot \pi} , n = 1, 2, \dots \quad (\text{G.6.11})$$

Vi får da følgende resultater:

$$\begin{aligned} 1 - y &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi y) , y \neq 0 \\ \omega(y, t) &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi y) \cdot e^{-(nx)^2 t} \end{aligned} \quad (\text{G.6.12})$$

Løsningen av det opprinnelige problemet blir følgelig:

$$u(y, t) = 1 - y - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi y) \cdot e^{-(nx)^2 t} \quad (\text{G.6.13})$$

(G.6.13) kan også skrives:

$$u(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{2n+y}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2(n+1)-y}{2\sqrt{t}} \right) \right\} \quad (\text{G.6.14})$$

(G.6.14) egner seg bedre enn (G.6.13) for små verdier av  $t$ . De to første leddene i (G.6.14),  $n = 0$ , er tilstrekkelig for  $t < 0.06$ , mens de fire første leddene,  $n = 0$  og  $n = 1$ , kan brukes opptil  $t = 0.2$ .

(G.6.13) blir for  $t = 0$  og  $y = \frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \rightarrow \pi = 4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$$

Dette er Leibnitz rekke for  $\pi$  som er ubrukbar i praksis dersom en ikke bruker spesielle summeringstriks.

## G.7 VARMELEDNING I EN ENDELIG STAV

Vi har en stav med initialtemperatur  $u = 0$ . Ved tiden  $t = 0$  settes det på en temperatur  $u = 1$  på enden  $y = 1$ . Enden  $y = 0$  er isolert:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ for } y = 0$$

Problemet ovenfor løses enklest ved å betrakte følgende problem:

Ved tiden  $t = 0$  setter vi på en temperatur  $u = 1$  på endene  $y = \pm 1$ . På grunn av symmetrien følger da at  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  for  $y = 0$ .

Matematisk formulering:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad -1 < y < 1 \quad (\text{G.7.1a})$$

Initialbetingelse:

$$u(y, t) = 0, \quad t < 0 \quad (\text{G.7.1b})$$

Randbetingelser:

$$\left. \begin{array}{l} u(-1, t) = 1 \\ u(1, t) = 1 \end{array} \right\} t \geq 0 \quad (\text{G.7.1c})$$

Problemet i (G.7.1) er ekvivalent med et strømningsproblem av Stokes-typen. Det er innlysende at stasjonærlosningen er  $u_s = 1$ .

Innfører

$$\omega(y, t) = u_s - u(y, t) = 1 - u(y, t) \quad (\text{G.7.2})$$

Løser da følgende problem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad -1 < y < 1 \quad (\text{G.7.3a})$$

Initialverdier:

$$\omega(y, 0) = 1, \quad t < 0 \quad (\text{G.7.3b})$$

Randbetingelser:

$$\left. \begin{array}{l} \omega(1, t) = 0 \\ \omega(-1, t) = 0 \end{array} \right\} t \geq 0 \quad (\text{G.7.3c})$$

Det nye problemet har homogene randbetingelser slik at vi kan løse det som et egenverdiproblem.

Separasjon av variable:

$$\omega(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(y, t) \quad (\text{G.7.4})$$

$$\text{der } \omega_n = T_n(t) \cdot Y_n(y)$$

For  $\lambda_n \neq 0$ :

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0 \text{ med løsning } T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}, n = 0, 1, \dots$$

$$Y''_n(y) + \lambda_n^2 Y_n = 0 \text{ med løsning } Y_n(y) = A_n \sin(\lambda_n y) + B_n \cos(\lambda_n y), n = 0, 1, \dots$$

Innsatt i (G.7.4):

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \cdot (A_n \sin(\lambda_n y) + B_n \cos(\lambda_n y))$$

Randbetingelsene i (G.7.3c) gir:

$$\begin{aligned} \omega(1, t) &= 0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \cdot (A_n \sin(\lambda_n) + B_n \cos(\lambda_n)) \\ \omega(-1, t) &= 0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \cdot (-A_n \sin(\lambda_n) + B_n \cos(\lambda_n)) \end{aligned} \quad (\text{G.7.5})$$

(G.7.5) er oppfylt for alle  $n$  når  $A_n = 0$  og  $\cos(\lambda_n) = 0$ ; dvs:

$$\lambda_n = \left( \frac{2n+1}{2} \right) \cdot \pi, n = 0, 1, \dots \quad (\text{G.7.6})$$

Utvikler initialbetingelsen  $\omega(y, 0) = 1$  i cosinusrekke:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\lambda_n y)$$

som ved multiplikasjon med  $\cos(\lambda_m)$  og integrasjon gir:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \cos(\lambda_m y) dy &= \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\lambda_n y) \cdot \cos(\lambda_m y) dy \\ &= B_m \int_{-1}^1 \cos^2(\lambda_m y) dy = B_m \end{aligned}$$

Derav:

$$B_n = \frac{2}{\lambda_n} (-1)^n, n = 0, 1, \dots \quad (\text{G.7.7})$$

(G.7.6) og (G.7.7) innsatt i (G.7.4) og videre innsatt i (G.7.2):

$$\omega(y, t) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cdot e^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n y) \quad (\text{G.7.8})$$

$$u(y, t) = 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cdot e^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n y) \quad (\text{G.7.9})$$

$$\text{der } \lambda_n = \left( \frac{2n+1}{2} \right) \cdot \pi, n = 0, 1, \dots$$

## G.8 OPPSTART AV STRØMNING I RØR

Utledning av ligningene er vist i kap. 5, avsnitt 5.6

Ligning:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad (\text{G.8.1a})$$

Randbetingelser:

$$\omega(\pm 1, t) = 0 \quad (\text{G.8.1b})$$

Startbetingelse:

$$\omega(r, 0) = 1 - r^2 \quad (\text{G.8.1c})$$

Symmetri:

$$\frac{\partial \omega}{\partial r}(0, t) = 0 \quad (\text{G.8.1d})$$

Som i del G.6 og G.7, løser vi ligningen ved separasjon av variable. Forskjellen er at nå får vi Besselfunksjoner istedenfor trigonometriske funksjoner.

Separasjon av variable:

$$\omega(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(r, t) \quad (\text{G.8.2})$$

der

$$\omega_n = T_n(t) \cdot G_n(r) \quad (\text{G.8.3})$$

som innsatt i (G.8.1) gir følgende diff. ligninger med separasjonskonstant  $\lambda_n \neq 0$ :

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0 \quad (\text{G.8.4})$$

$$G''_n(r) + \frac{1}{r} G'_n(r) + \lambda_n^2 G_n(r) = 0 \quad (\text{G.8.5})$$

(G.8.4) har løsningen

$$T_n(t) = \exp(-\lambda_n^2 t) \quad (\text{G.8.6})$$

mens (G.8.5) har løsningen:

$$G_n(r) = A_n \cdot J_0(\lambda_n r), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{G.8.7})$$

der  $J_0(x)$  er Besselfunksjon av nullte orden.

Konstantene  $A_n$  bestemmes fra (G.8.1c).

Fra (G.8.1b) og (G.8.7):

$$J_0(\lambda_n) = 0 \quad (\text{G.8.8})$$

$\lambda_n, n = 1, 2, \dots$  er følgelig nullpunktene av Besselfunksjonen  $J_0(x)$ .

(G.8.2) blir da:

$$\omega(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \cdot \exp(-\lambda_n^2 t) \quad (\text{G.8.9})$$

Utvikler startbetingelsen (G.8.1c) i en Fourier-Bessel-rekke:

$$1 - r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r)$$

og multipliserer på begge sider med  $r \cdot J_0(\lambda_m r)$  og integrerer:

$$\int_0^1 r \cdot J_0(\lambda_m r) \cdot (1 - r^2) \cdot dr = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 r \cdot J_0(\lambda_n r) \cdot J_0(\lambda_m r) \cdot dr \quad (\text{G.8.10})$$

Benytter oss av ortogonalitetsbetingelsene for Besselfunksjoner:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r \cdot J_0(\lambda_n r) \cdot J_0(\lambda_m r) dr &= 0 \text{ for } n \neq m \\ \int_0^1 r \cdot J_0^2(\lambda_n r) \cdot dr &= \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} \text{ for } m \neq 0 \end{aligned}$$

Dermed blir (G.8.10):

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r \cdot J_0(\lambda_n r) \cdot (1 - r^2) \cdot dr \quad (\text{G.8.11})$$

Ved bruk av Maple:

$$\int_0^1 J_0(kr) \cdot r \cdot (1 - r^2) \cdot dr = \frac{2}{k^3} [-k \cdot J_0(k) + 2J_1(k)]$$

Med  $k = \lambda_n$  blir  $J_0(k) = 0$  fra (G.8.8), og (G.8.11) blir da:

$$A_n = \frac{8}{J_1(\lambda_n) \cdot \lambda_n^3}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{G.8.12})$$

(G.8.9) og (G.8.12) gir da løsningen av (G.8.1) uttrykt ved en Bessel-rekke:

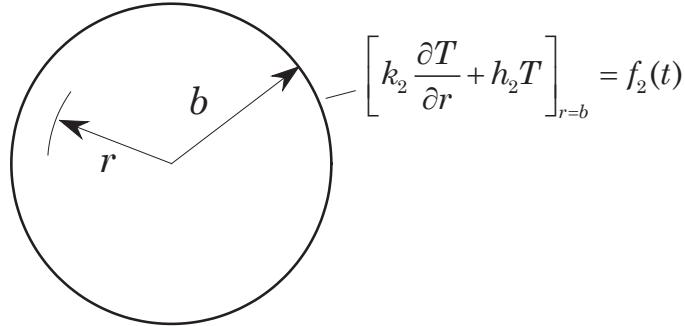
$$\omega(r, t) = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n) \lambda_n^3} \exp(-\lambda_n^2 t) \quad (\text{G.8.13})$$

Løsningen av det opprinnelige problemet er da:

$$u(r, t) = 1 - r^2 - \omega(r, t) \quad (\text{G.8.14})$$

(G.8.13) og (G.8.14) ble gitt av Szymanski i 1932.

## G.9 AVKJØLING AV KULE



Figur G.4

Figuren viser en kule med radius  $b$  der varme dissiperes til omgivelsene fra overflata  $r = b$ . Temperaturen  $T = T(r, t)$  er en funksjon av radien  $r$  og tiden  $t$ . Problemet ovenfor kan formuleres matematisk:

Varmeledningsligning:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad 0 < r < b, \quad t > 0 \quad (\text{G.9.1a})$$

Randbetingelse:

$$k_2 \frac{\partial T}{\partial r} + h_2 T = f_2(t) \text{ for } r = b, \quad t > 0 \quad (\text{G.9.1b})$$

Symmetribetingelse:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ for } r = 0 \quad (\text{G.9.1c})$$

Startbetingelse:

$$T = F(r), \quad 0 \leq r \leq b, \quad t = 0 \quad (\text{G.9.1d})$$

Løsningen av (G.9.1) kan skrives:

$$T(r, t) = \frac{1}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\alpha \cdot \beta_m^2 \cdot t) \cdot K(\beta_m, r) \cdot G(\beta_m, r) \quad (\text{G.9.2a})$$

$$G(\beta_m, t) = \int_{r=0}^b r \cdot F(r) \cdot K(\beta_m, r) \cdot dr + \int_{t=0}^t \exp(\alpha \cdot \beta_m^2 \cdot t) \cdot A(\beta_m, t) \cdot dt \quad (\text{G.9.2b})$$

Den fullstendige løsningen i (G.9.2) kan f.eks. finnes i M. Necati Özisik: Boundary Value Problems of Heat Conduction, Dover 1989. Vi skal bruke (G.9.2) til å løse avkjølingsproblemets gitt i eksempel 5.4 i avsnitt 5.6 i kapittel 5.

Sammenligner vi dette problemet med betingelsene ovenfor, får vi følgende relasjoner:

$$k_2 \rightarrow k, \quad h_2 \rightarrow \bar{h}, \quad f_2 = \bar{h} \cdot T_v \text{ og } F(r) = T_k$$

Randbetingelsen (G.9.1b) blir nå:

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = \bar{h} \cdot (T_v - T_b) \quad (\text{G.9.3})$$

For å forenkle den analytiske løsningen, velger vi:

$$\frac{\bar{h}}{k} \cdot b = 1 \quad (\text{G.9.4})$$

Formlene nedenfor gjelder bare under forutsetningen i (G.9.4)

$$K(\beta_m, r) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \sin(\beta_m \cdot r) \quad (\text{G.9.5})$$

$\beta_m$  er røttene av ligningen  $\beta \cdot \cotan(\beta \cdot b) = 0$  som blir:

$$\beta_m = \frac{m\pi}{2b}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{G.9.6})$$

$$\int_{r=0}^b r \cdot F(r) \cdot K(\beta_m, r) \cdot dr = T_k \cdot \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \frac{1}{\beta_m^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right), \quad t > 0 \quad (\text{G.9.7})$$

$$A(\beta_m, t) = b \cdot f_2 \cdot \alpha \frac{K(\beta_m, r)}{k} \Big|_{r=b} = \alpha \cdot T_v \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right), \quad t > 0 \quad (\text{G.9.8})$$

$$\int_0^t \exp(\alpha \beta_m^2 t) \cdot A(\beta_m, t) \cdot dt = \int_0^t \exp(\alpha \beta_m^2 t) \cdot \alpha \cdot T_v \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cdot dt$$

$$= b^2 \sqrt{\frac{2}{b}} T_v \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\beta_m^2} \cdot [\exp(\alpha \beta_m^2 t) - 1] \quad (\text{G.9.9})$$

Lign. (G.9.2b) blir:

$$G(\beta_m, t) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \frac{1}{\beta_m^2} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) (T_k + T_v \cdot b^2 [\exp(\alpha \beta_m^2 t) - 1]) \quad (\text{G.9.10})$$

Dermed får vi for den totale løsningen i (G.9.2):

$$T(r, t) = \frac{8b}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cdot \sin(\beta_m \cdot r) \cdot (T_v + \exp(-\alpha \beta_m^2 t) \cdot (T_k - T_v)) \quad (\text{G.9.11})$$

Det er mulig å forenkle løsningen i (G.9.11).

Fra formelsamling (Gradshteyn & Ryzhik):

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

som med  $x = \frac{\pi r}{2b}$  gir:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}\right) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin(x) = \frac{\pi^2 r}{8b} \quad (\text{G.9.12})$$

(G.9.12) brukt i (G.9.11) gir da tilslutt:

$$T(r, t) = T_v + \frac{8b}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} (T_k - T_v) \cdot \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin(\beta_m \cdot r) \cdot \exp(-\alpha \beta_m^2 t) \quad (\text{G.9.13})$$

Løsningen i (G.9.13) er programmert i funksjonen **kanalyt**.

La oss sjekke løsningen for utvalgte verdier av  $r$  og  $t$ .

**1)**  $T(r, 0) = T_k$  for  $t = 0$

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_v + \frac{8b}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} (T_k - T_v) \cdot \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin(\beta_m \cdot r) \\ &= T_v + \frac{8b}{\pi^2} \frac{1}{r} (T_k - T_v) \cdot S = T_v + \frac{8b}{\pi^2} \frac{1}{r} (T_k - T_v) \cdot \frac{\pi^2 r}{8b} = T_k \end{aligned}$$

**2)**  $T(r, t)$  for  $r \rightarrow 0$

Nå har vi:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta_m \cdot r)}{r} = \beta_m$$

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_v + \frac{8b}{\pi^2} \cdot (T_k - T_v) \cdot \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \beta_m \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cdot \exp(-\alpha \beta_m^2 t) \\ &= T_v + (T_k - T_v) \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cdot \exp(-\alpha \beta_m^2 t) \end{aligned} \quad (\text{G.9.14})$$

I appendiks G, del G.6, støtte vi på Leibnitz rekke for  $\pi$ :

$\pi = 4 \cdot (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots)$  som er ubrukbar i praksis dersom vi ikke bruker spesielle summeringstriks.

Setter inn for  $t = 0$  i (G.9.14):

$$\begin{aligned} T(0, 0) &= T_v + (T_k - T_v) \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \\ &= T_v + (T_k - T_v) \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = T_k \end{aligned}$$

Vi ser at (G.9.14) vil konvergere langsomt for små verdier av  $t$ , og når  $t \rightarrow 0$  vil løsningen være praktisk ubrukelig. I appendiks G, del G.6, kunne

vi erstattet rekke-løsningen med en rask konvergerende rekke basert på den komplementære feilfunksjonen. Dette er ikke så lett i dette tilfellet.

### 3) $T(r, t)$ for $r = b$

Nå har vi:

$$\begin{aligned} \beta_m \cdot r \Big|_{r=b} &= \frac{m\pi}{2} \\ T(b, t) &= T_v + \frac{8}{\pi^2} \cdot (T_k - T_v) \cdot \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2 \left( \frac{m\pi}{2} \right) \cdot \exp(-\alpha\beta_m^2 t) \\ &= T_v + \frac{8}{\pi^2} \cdot (T_k - T_v) \cdot \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \exp(-\alpha\beta_m^2 t) \end{aligned} \quad (\text{G.9.15})$$

La oss tilslutt se på en dimensjonsløs versjon av løsningen. Innfører  $R$  og  $\tau$  som henholdsvis den dimensjonelle radius og den dimensjonelle tiden i (G.9.13):

$$T(R, \tau) = T_v + \frac{8b}{\pi^2} \cdot \frac{1}{R} (T_k - T_v) \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \left( \frac{m\pi}{2} \right) \cdot \sin(\beta_m \cdot R) \cdot \exp(-\alpha\beta_m^2 \tau)$$

Innfører dimensjonsløse variable:

$$r = \frac{R}{b}, \quad \theta = \frac{T - T_v}{T_k - T_v}, \quad t = \frac{\alpha}{b^2} \tau \quad (\text{G.9.16})$$

Innført ovenfor:

$$\theta(r, t) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \left( \frac{m\pi}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{m\pi r}{2} \right) \exp \left[ - \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 t \right] \quad (\text{G.9.17})$$

Dette tilsvarer å sette  $T_v = 0$  og  $T_k = 1$  i (G.9.13).

## G.10 PERIODISKE LØSNINGER AV ADVEKSJONDIFFUSJONSIGNINGEN

Ligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{G.10.1})$$

der  $a_0$  og  $\nu$  er konstanter.

(G.10.1) har periodiske løsninger gitt ved:

$$u(x, t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-k_m^2 \nu t \cdot [A_m \sin(k_m(x - a_0 t)) + B_m \cos(k_m(x - a_0 t))]\right) \quad (\text{G.10.2a})$$

$$\text{der } k_m = \frac{\pi \cdot m}{L} \quad (\text{G.10.2b})$$

$u(x, t)$  er periodisk med basisintervall  $[0, 2L]$

Initialbetingelse:

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin(k_m x) + B_m \cos(k_m x)) \quad (\text{G.10.3})$$

Koeffisientene  $A_m$  og  $B_m$  bestemmes fra:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cdot \sin(k_m x) \cdot dx , \quad m = 1, 2, \dots, \\ B_m &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cdot \cos(k_m x) \cdot dx , \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (\text{G.10.4})$$

La oss bestemme  $A_m$  og  $B_m$  for noen tilfeller av  $f(x)$  der integralene i (G.10.4) er lett å finne analytisk.

### Tilfelle I

#### Sinusform

$$f(x) = \sin(k_p x) , \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{G.10.5})$$

I dette tilfellet er  $m$  lik 1,  $B_0 = B_1 = 0$  og  $A_1 = 1$ .

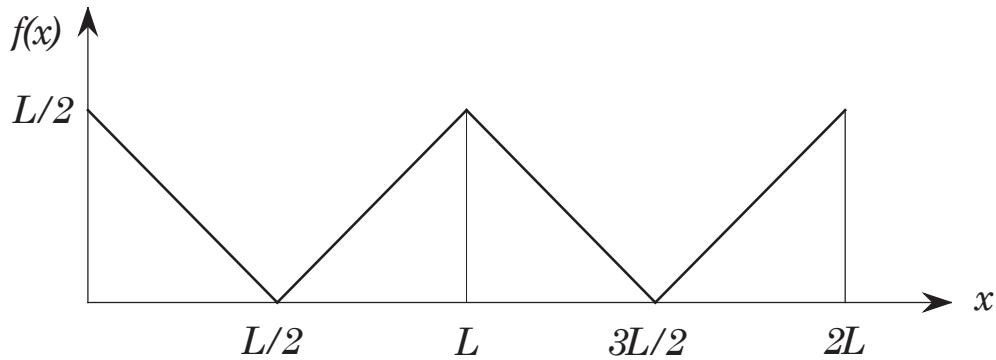
(G.10.2) blir nå:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp(-k_p^2 \nu t) \cdot \sin(k_p(x - a_0 t)) \\ \text{der } k_p &= \frac{\pi \cdot p}{L} , \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{G.10.6})$$

Mer generelt kan vi sette  $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_m x)$  slik at (G.10.2) nå blir:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-k_m^2 \nu t) \cdot \sin(k_m(x - a_0 t)) \quad (\text{G.10.7})$$

### Tilfelle II

**Sagtann**

Figur G.5

Startfunktjonen  $f(x)$  er definert ved:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{L}{2} - x, & x \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \\ x - \frac{L}{2}, & x \in \left[\frac{L}{2}, L\right] \\ -x + \frac{3}{2}L, & x \in \left[L, \frac{3L}{2}\right] \\ x - \frac{3}{2}L, & x \in \left[\frac{3L}{2}, 2L\right] \end{cases} \quad (\text{G.10.8})$$

$f(x)$  er en jevn funksjon slik at konstantene  $A_m$  i (G.10.2) er lik 0. Ved å regne ut integralene i (G.10.4), finner vi:

$$B_0 = \frac{L}{2}, \quad B_m = \frac{4}{Lk_m^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right), \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (\text{G.10.9})$$

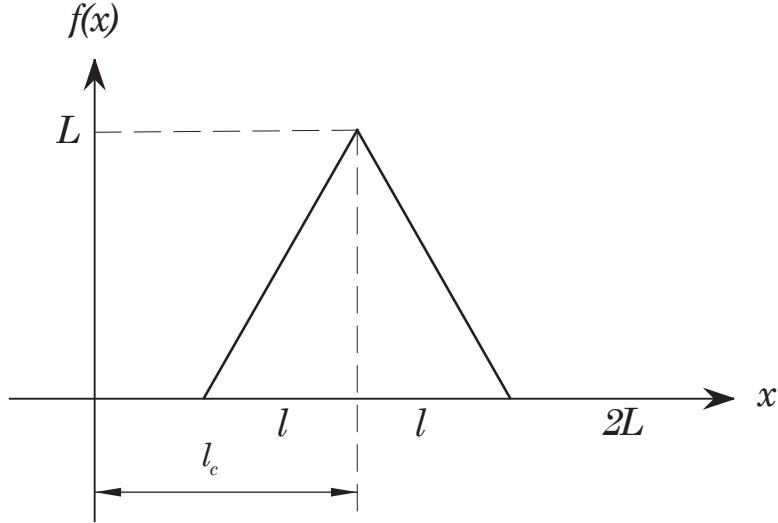
(G.10.2) blir nå:

$$u(x, t) = \frac{L}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-k_m^2 \nu t) \cdot B_m \cos(k_m(x - a_0 t)) \quad (\text{G.10.10})$$

Dersom vi setter  $m = 2 \cdot (2j-1)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , kan koeffisientene  $B_m$  skrives:

$$B_{2(2j-1)} = \frac{2L}{[(2j-1)\pi]^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{G.10.11})$$

**Tilfelle III**

**Heksehatt (Witch hat)**

Figur G.6

Startfunksjonen  $f(x)$  er definert ved:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l_c - l] \\ \frac{L}{l}(x + l - l_c), & x \in [l_c - l, l_c] \\ \frac{L}{l}(-x + l + l_c), & x \in [l_c, l + l_c] \\ 0, & x \in [l + l_c, 2L] \end{cases} \quad (\text{G.10.12})$$

med følgende betingelser:

$$0 < l \leq L, \quad l \leq l_c \leq L$$

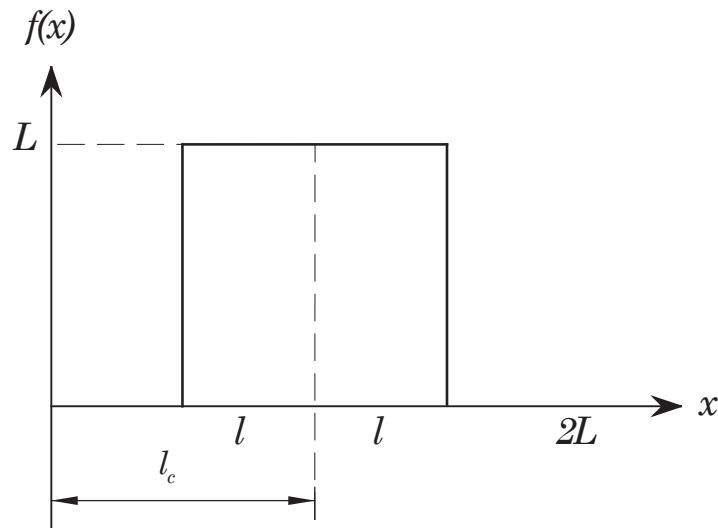
Ved å regne ut integralene i (G.10.4), får vi:

$$B_0 = l, \quad B_m = \frac{2 \cos(k_m l_c)}{l \cdot k_m^2} (1 - \cos(k_m l)), \quad A_m = \frac{2 \sin(k_m l_c)}{l \cdot k_m^2} (1 - \cos(k_m l)) \quad (\text{G.10.13})$$

(G.10.2) blir nå:

$$u(x, t) = \frac{l}{2} + \frac{1}{l} \left( \frac{2L}{\pi} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \exp(-k_m^2 \nu t) \cdot (1 - \cos(k_m l)) \cdot \cos[k_m(l_c - (x - a_0 t))] \quad (\text{G.10.14})$$

**Tilfelle IV****Flosshatt (Top hat)**



Figur G.7

Startfunksjonen  $f(x)$  er definert ved:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l_c - l] \\ L, & x \in (l_c - l, l_c + l) \\ 0, & x \in (l_c + l, 2L] \end{cases} \quad (\text{G.10.15})$$

med følgende betingelser:

$$l < l_c \leq L, \quad l \leq L$$

Ved å regne ut integralene i (G.10.4), får vi:

$$B_0 = 2l, \quad B_m = \frac{2}{k_m} \sin(k_m l) \cdot \cos(k_m l_c), \quad A_m = \frac{2}{k_m} \sin(k_m l) \sin(k_m l_c) \quad (\text{G.10.16})$$

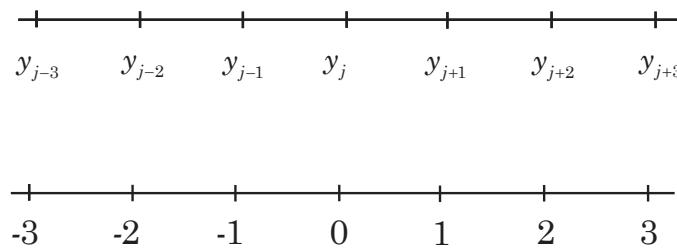
(G.10.2) blir nåd

$$u(x, t) = l + \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp(-k_m^2 \nu t) \cdot \sin(k_m l) \cdot \cos[k_m(l_c - (x - a_0 t))] \quad (\text{G.10.17})$$



## PROGRAMMET DIFFAF

Programmet DIFFAF beregner differanseuttrykk basert på polynomer. Fremgangsmåten er som beskrevet i 1.2.



Figur H.1

For å forenkle notasjonen, betegnes punktet  $j - 3$  som  $-3$ ,  $j - 2$  som  $-2$ , og tilsvarende for de andre punktene.(Se figur ovenfor). Avstanden mellom punktene antas konstant lik  $h$ , mensprogrammet også kan regne ut differanser for brøkdeler av  $h$ . De aktuelle differansene antas alltid utviklet for punkt  $j$  som er ekvivalent med punkt 0. Programmet spør først etter antall punkter. Deretter spør det etter indeks for de oppgitte punktene. Indeksene leses inn fra venstre mot høyre, dvs. fra laveste til høyeste verdi. Tilslutt spørres det etter orden av den deriverte. La oss se på noen eksempler. Fra tabell 1.1 i kapittel 1 finner vi følgende uttrykk for den deriverte som forover-differanse:

$$\frac{dy_j}{dx} = \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2\Delta x} + \frac{1}{3}y'''(\xi) \cdot (\Delta x)^2 \quad (\text{H.0.1})$$

```

==== Difference Approximation Finder ====

Number of points ?3
Index of point no.1 ?0
Index of point no.2 ?1
Index of point no.3 ?2

Order of derivative ?1

Difference Scheme

+[ -3.00000 /(2.00000 H**1 )] Y( 0.000H)
+[4.00000 /(2.00000 H**1 )] Y( 1.000H)
+[ -1.00000 /(2.00000 H**1 )] Y( 2.000H)

Error Term

( 2.000/ 6.000)H**2Y^(3)
( 6.000/24.000)H**3Y^(4)

```

Vi bruker tre punkt,  $j$ ,  $j + 1$  og  $j + 2$  som leses inn som indeks 0, 1 og 2. Siden basispunktet er  $j$ , angir dette foroverdifferanser. Da det er den første-deriverte som skal beregnes, er orden av den deriverte lik 1. I utskriften henviser  $H$  til  $\Delta x$ . I dette tilfellet beregnes to feilreddet. Det første feilreddet er gitt ved:

$$\frac{2}{6} H^2 \cdot Y^{(3)} \text{ der } Y^{(3)} \text{ betyr } y'''. \text{ Det neste feilreddet er da } \frac{(\Delta x)^3}{4} \cdot y^{(4)}.$$

La oss se på et eksempel med sentraldifferanser fra tabell 1.3. Ved siden av punktet  $j$ , må vi her ta med like mange punkt på hver side av  $j$ .

$$\frac{d^2y_j}{dx^2} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} y^{(4)}(\xi) \quad (\text{H.0.2})$$

```

==== Difference Approximation Finder ====

Number of points ?3
Index of point no. 1 ?-1
Index of point no. 2 ?0
Index of point no. 3 ?1

Order of derivative ?2

Difference Scheme

+[ 1.00000 /( 1.00000 H**2 )] Y(-1.000H)
+[ -2.00000 /( 1.00000 H**2 )] Y( 0.000H)
+[ 1.00000 /( 1.00000 H**2 )] Y( 1.000H)

Error Term

( -2.000/ 24.000)H**2 Y^(4)

```

Som et siste eksempel skal vi se på et tilfelle der vi bruker punktene  $j - \frac{1}{2}$ ,  $j$  og  $j + 1$  ved beregning av den første-deriverte. Denne formelen er gitt ved:

$$\frac{dy_j}{dx} = \frac{y_{j+1} + 3y_j - 4y_{j-1/2}}{3\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot y'''(\psi) \quad (\text{H.0.3})$$

```
==== Difference Approximation Finder ====  
  
Number of points ?3  
Index of point no.1 ?-0.5  
Index of point no.2 ?0  
Index of point no.3 ?1  
  
Order of derivative ?1  
  
Difference Scheme  
  
+[ -4.00000 /(3.00000 H**1 )] Y(-0.500H)  
+[3.00000 /(3.00000 H**1 )] Y( 0.000H)  
+[1.00000 /(3.00000 H**1 )] Y( 1.000H)  
  
Error Term  
  
(-0.500/ 6.000)H**2Y^(3)  
(-0.250/24.000)H**3Y^(4)  
>>
```

Matlab-programmet er en modifisert versjon av Fortran programmet DIFFAF gitt i Nakamura [24].



# BANDMATRISER

## INNLEDNING

Vi gir først en kort oppsummering angående løsning av lineære ligningsystemer. Det meste av dette finnes i C&K [5] , kapittel 6.

Som et eksempel ser vi på et system med tre ukjente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= d_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= d_2 \\ a_{33}x_3 &= d_3 \end{aligned} \tag{I.0.1a}$$

eller på matriseform:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \tag{I.0.1b}$$

På symbolsk form:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{I.0.1c}$$

Dette systemet kan løses direkte ved å starte nederst i (I.0.1):

$$x_3 = \frac{d_3}{a_{33}}, \quad x_2 = \frac{d_2 - a_{23}x_3}{a_{22}}, \quad x_1 = \frac{d_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

Systemet i (I.0.1) er på øvre trekantform og det kan løses under forutsetning av at alle elementene langs hoveddiagonalen er forskjellig fra 0. For et system med  $n$  ligninger får vi tilsvarende:

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} \cdot x_k}{a_{ii}}, \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Fra (I.0.1b) finner vi determinanten:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \text{ eller for } n \text{ elementer: } \det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \tag{I.0.2}$$

Betingelsen for at et lineært ligningsystem skal ha en entydig løsning er nettopp at determinanten til koeffisientmatrisa er forskjellig fra 0. For en trekantmatrise betyr dette at alle elementene langs hoveddiagonalen må være forskjellig fra 0. Istedentfor å skrive matrisa på øvre trekantform, kan den skrives på nedre trekantform. I dette tilfellet løser vi systemet fra toppen. Vi ser at dersom et generelt system kan bringes på trekantform, øvre eller nedre, har vi funnet en måte å løse det på. Å bringe systemet på trekantform kalles Gauss-eliminasjon. Denne eliminasjonsmetoden kan fremstilles ved å faktorisere koeffisientmatrisa i en øvre og en nedre trekant-matrice på følgende måte, med en  $3 \times 3$ -matrise som eksempel:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{I.0.3a})$$

eller symbolisk:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A} \quad (\text{I.0.3b})$$

$\mathbf{L}$  er en matrise på nedre trekantform mens  $\mathbf{U}$  er en matrise på øvre trekantform med 1 langs hoveddiagonalen.

Ligningsystemet som skal løses, kan da skrives:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{L}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d} \quad (\text{I.0.4a})$$

Setter

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{g} \quad (\text{I.0.4b})$$

slik at (I.0.4a) kan skrives:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{d} \quad (\text{I.0.4c})$$

Siden  $\mathbf{L}$  og  $\mathbf{U}$  er på trekantform kan (I.0.4b) og (I.0.4c) løses direkte. Det gjenstår derfor å finne elementene i  $\mathbf{L}$  og  $\mathbf{U}$ . Multipliserer ut (I.0.3):

$$\begin{aligned} l_{11} &= a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}, \quad l_{31} = a_{31} \\ u_{12} &= \frac{a_{12}}{l_{11}}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} \\ l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12}, \quad l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} \\ u_{23} &= \frac{a_{23} - u_{13}l_{21}}{l_{22}} \\ l_{33} &= a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \end{aligned}$$

Vi ser at vi kan finne alle elementene ved først å beregne en kolonne i  $\mathbf{L}$ , deretter en linje i  $\mathbf{U}$ , så en nye kolonne av  $\mathbf{L}$  fulgt av en ny linje i  $\mathbf{U}$  osv. For

en  $n \times n$ -matrise får vi følgende formler:

$$\begin{aligned} l_{i1} &= a_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad j \leq i, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ u_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}, \quad i < j, \quad j = 3, 4, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{I.0.5})$$

For determinanten av koeffisientmatrisa får vi:

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{LU}) = \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} = \det \mathbf{L} \cdot \mathbf{1} = l_{11} l_{22} \dots l_{nn} \quad (\text{I.0.6})$$

I praksis må vi ofte bytte om ligninger før de kan løses med Gauss-eliminasjon. Slike ombyttinger er vanligvis også nødvendige av numeriske grunner. Denne prosessen kalles pivotering. ( Se C&K [5], avsnitt 6.2 )

### Bemerkning

Med bruk av programmerbare datamaskiner betyr det ikke så mye hvilke verdier vi gir elementene langs hoveddiagonalen. Med tidligere tiders mekaniske maskiner hadde dette derimot ofte stor betydning. Varianten ovenfor med 1 langs hoveddiagonalen i  $\mathbf{U}$  kalles Crouts metode. Velger man isteden å sette 1 langs hoveddiagonalen i  $\mathbf{L}$ , kalles den Doolittles metode. For symmetriske matriser kan en sette  $l_{ii} = u_{ii}$  langs hoveddiagonalen. Dette kalles Choleskys metode. Det er egentlig litt synd på Doolittle. Det er hans metode som er brukt i de fleste lærebøkene, men metoden kalles nesten alltid Crouts metode.

### TRIDIAGONALE MATRISER

I avsnitt 3.2 har vi sett at vi får tridiagonale koeffisientmatriser når vi diskretiserer 2. ordens lineære differensielligninger med bruk av sentral-differanser. Et slik system skrives på matriseform:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.0.7a})$$

Vi faktoriserer koeffisientmatrisa som vist i foregående avsnitt ved å sette:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ a_2 & \beta_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \ddots & & \\ & \cdot & & \ddots & \\ & & a_j & \beta_j & \\ & & \cdot & \ddots & \\ & & \cdot & & a_n & \beta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & \\ & 1 & \gamma_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \gamma_j \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 & \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.0.7b})$$

der  $\beta$  og  $\gamma$  bestemmes fra  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$  som vist tidligere. Ved å utføre multiplikasjonen får vi: (følger også direkte av (I.0.5))

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1, \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{\beta_1} \\ \beta_j &= b_j - a_j \cdot \gamma_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, n \\ \gamma_j &= \frac{c_j}{\beta_j}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (\text{I.0.8a})$$

Vi må nå løse ligningsettene i (I.0.4b) og (I.0.4c), men dette er enkelt da koeffisientmatrisa er på trekantform. For matrisene ovenfor blir (I.0.4b):

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{d_1}{\beta_1} \\ g_j &= \frac{(d_j - a_j \gamma_{j-1})}{\beta_j}, \quad j = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{I.0.8b})$$

I dette tilfellet blir (I.0.4c):

$$\begin{aligned} x_n &= g_n \\ x_j &= g_j - \gamma_j x_{j+1}, \quad j = n-1, n-2, \dots, 1 \end{aligned} \quad (\text{I.0.8c})$$

(I.0.8a) og (I.0.8b) utgjør eliminasjonsprosessen, mens (I.0.8c) er innsettingen. Vanligvis har vi ikke bruk for å bevare de opprinnelige vektorene, slik at vi kan overskrive disse med vektorene  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{g}$ . Dersom vi bare har en høyre side  $\mathbf{d}$ , kan vi legge eliminatingsprosessen i (I.0.8a) og (I.0.8b) i samme løkka. Under disse forutsetningene får vi følgende algoritme med  $N$  ligninger:

Eliminering:

$$q_j := \frac{a_j}{b_{j-1}}, \quad b_j := b_j - q_j \cdot c_{j-1}, \quad d_j := d_j - q_j \cdot d_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.0.9a})$$

Innsetting:

$$x_N := \frac{d_N}{b_N}, \quad x_j := \frac{(d_j - c_j \cdot x_{j+1})}{b_j}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 1 \quad (\text{I.0.9b})$$

Algoritmen kalles ofte Thomas-algoritmen etter L.H. Thomas (1949) som brukte den i forbindelse med løsning av elliptiske partielle differensielligninger. Nedenfor er vist en implementering av (I.0.9) i Fortran 90.

```

subroutine tdma(n,a,b,c,d,x)
implicit none
integer, intent(in):: n
real, intent(in), dimension(n):: a, c
real, intent(inout), dimension(n):: b, d
real, intent(out):: x(n)
! --- local variables ---
integer:: i
real:: q
! --- Elimination ---
do i = 2,n
    q = a(i)/b(i - 1)
    b(i) = b(i) - c(i - 1)*q
    d(i) = d(i) - d(i - 1)*q
end do
! --- Backsubstitution ---
q = d(n)/b(n)
x(n) = q
do i = n - 1,1,-1
    q = (d(i) - c(i)*q)/b(i)
    x(i) = q
end do
return
end

```

Algoritmen er sikker numerisk stabil dersom følgende betingelser er oppfylt:

$$\begin{aligned} |b_1| &> |c_1| > 0 \\ |b_j| &\geq |a_j| + |c_j|, \quad a_j \cdot c_j \neq 0, \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \\ |b_n| &> |a_n| > 0 \end{aligned} \quad (\text{I.0.10})$$

Dersom  $a_j \cdot c_j = 0$ ,  $j \neq 1, n$ , kan systemet deles opp i to uavhengige system som kan løses hver for seg (reduserbare system). Dersom  $c_1 = 0$ , kan  $x_1$  finnes direkte. Tilsvarende kan  $x_n$  finnes dersom  $a_n = 0$ .

Dersom (I.0.10) er oppfylt, skal vi vise at  $\mathbf{A} \neq 0$ . (Utledningen nedenfor følger stort sett Isaacson & Keller [17]). Vi trenger først følgende setning:

$$\begin{aligned} |\gamma_j| &< 1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \\ |c_j| &< |b_j| - |a_j| < |\beta_j| < |b_j| + |a_j|, \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (\text{I.0.11a})$$

Fra (I.0.8a) og (I.0.10) ser vi at (I.0.11) er oppfylt for  $j = 1$ . Anta nå at (I.0.11a) er oppfylt for alle aktuelle verdier av  $j$ . Fra (I.0.8b) og (I.0.8c):

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{c_j}{\beta_j} = \frac{c_j}{b_j - a_j \gamma_{j-1}} \rightarrow \\ |\gamma_j| &= \frac{|c_j|}{|b_j - a_j \gamma_{j-1}|} \leq \frac{|c_j|}{||b_j| - |a_j| \cdot |\gamma_{j-1}||} < \frac{|c_j|}{||b_j| - |a_j||} \end{aligned} \quad (\text{I.0.11b})$$

Fra (I.0.10):

$$|b_j| \geq |a_j| + |c_j| \rightarrow |b_j| - |a_j| \geq |c_j|$$

Vi har her brukt den generelle ulikheten:

$$|u - v| \geq ||u| - |v|| \quad (\text{I.0.12})$$

Fra (I.0.8b):

$$\beta_j = b_j - a_j \gamma_{j-1} \rightarrow \beta_j - b_j = -a_j \gamma_{j-1}$$

Derav følger:

$$|\beta_j - b_j| = |a_j \gamma_{j-1}| < |a_j| \text{ med bruk av (I.0.11a)}$$

Da  $|\beta_j - b_j| \geq ||\beta_j| - |b_j|| < |a_j|$  med bruk av (I.0.12), følger:

$$\begin{aligned} -|a_j| &< |\beta_j| - |b_j| < |a_j| \text{ eller ordnet:} \\ |b_j| - |a_j| &< |\beta_j| < |a_j| + |b_j| \text{ som beviser (I.0.11b).} \end{aligned}$$

Dermed får vi fra (I.0.6) og (I.0.7b): det  $\mathbf{A} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_n \neq 0$  slik at (I.0.10) gir en tilstrekkelig betingelse for en ikke-singulær koeffisientmatrise. I tillegg viser (I.0.11) at koeffisientene  $\gamma$  og  $\beta$  er begrenset i størrelse under eliminasjonsprosessen. Dette sikrer en stabil numerisk algoritme. Dersom (I.0.10) ikke er oppfylt, kan det være lurt å sjekke resultatet med en rutine som utfører pivotering. Ofte vil det være liten forskjell.

Det finnes mange varianter av **tdma**. Dersom vi vil løse det samme systemet med forskjellige høyresider, kan f. eks. denne varianten brukes:

Eliminering av koeffisientmatrisa (En gang):

$$\begin{aligned} c_1 &:= \frac{c_1}{b_1} \\ \text{Utfør for } j &= 2, 3, \dots, N \\ b_j &:= b_j - a_j \cdot c_{j-1} \\ c_j &:= c_j / b_{j-1} \end{aligned} \tag{I.0.13a}$$

Eliminering av høyre side (hver gang):

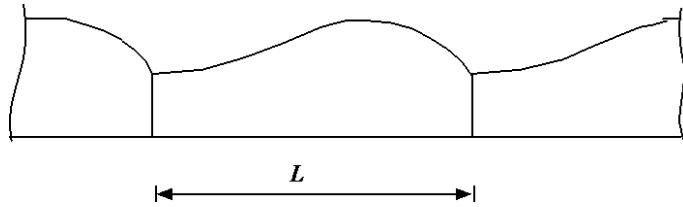
$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{d_1}{b_1} \\ d_j &:= (d_j - a_j \cdot d_{j-1}) / b_j, \quad j = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \tag{I.0.13b}$$

Innsetting:

$$\begin{aligned} x_N &:= d_N \\ x_j &:= d_j - c_j \cdot x_{j+1}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 1 \end{aligned} \tag{I.0.13c}$$

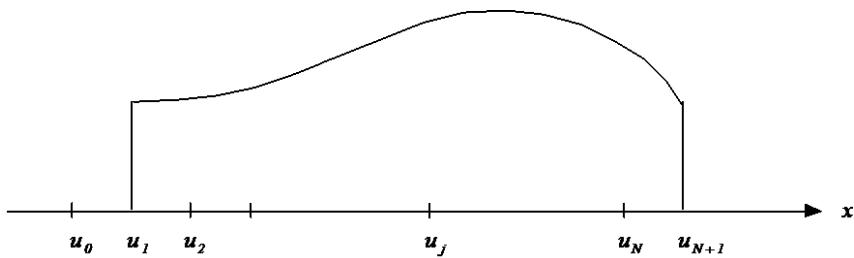
## PERIODISKE SYSTEM

I mange tilfeller har vi fysiske system der beregningsområdet gjentar seg periodisk slik at det bare er nødvendig å finne de aktuelle størrelsene for en liten del av det totale beregningsområdet. Et slikt tilfelle er vist i figur I.1 der basisområdet med lengde  $L$  gjentar seg mange ganger.



Figur I.1

Figur I.2 viser basisområdet fra figur I.1 noe forstørret . Vi ønsker å beregne en fysisk størrelse  $u(x)$  som kan finnes ved numerisk løsning av en differensiell ligning.



Figur I.2

Intervallet  $L$  er oppdelt ved:

$$a_j = (j - 1) \cdot h, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (\text{I.0.14})$$

$$\text{der } h = \frac{L}{N}.$$

Antar at  $u_j$  kan finnes fra denne velkjente ligningen:

$$a_j \cdot u_{j-1} + b_j \cdot u_j + c_j \cdot u_{j+1} = d_j \quad (\text{I.0.15a})$$

med randbetingelser:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{N+1} \\ u_0 &= u_N \end{aligned} \quad (\text{I.0.15b})$$

(I.0.15b) er et eksempel på periodiske randbetingelser. Etter vi har brukt disse, vil ikke (I.0.15a) lenger være et system med tridiagonal koeffisientmatrise.

Skriver ut (I.0.15a) for  $j = 1$  og  $N$ :

$$\begin{aligned} a_1 \cdot u_0 + b_1 \cdot u_1 + c_1 \cdot u_2 &= d_1 \\ a_N \cdot u_{N-1} + b_N \cdot u_N + c_N \cdot u_{N+1} &= d_N \end{aligned}$$

som innsatt for randbetingelsene i (I.0.15b) blir:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot u_N + b_1 \cdot u_1 + c_1 \cdot u_2 &= d_1 \\ a_N \cdot u_{N-1} + b_N \cdot u_N + c_N \cdot u_1 &= d_N \end{aligned} \quad (\text{I.0.16})$$

Totalt har vi da fått følgende system:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot u_N + b_1 \cdot u_1 + c_1 \cdot u_2 &= d_1 \\ \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot \\ a_j \cdot u_{j-1} + b_j \cdot u_j + c_j \cdot u_{j+1} &= d_j \\ \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot \\ a_N \cdot u_{N-1} + b_N \cdot u_N + c_N \cdot u_1 &= d_N \end{aligned} \quad (\text{I.0.17})$$

eller på matriseform:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & a_j & b_j & c_j & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_N & & a_N & b_N & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_j \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_j \\ \cdot \\ \cdot \\ d_N \end{bmatrix} \quad (\text{I.0.18a})$$

Vi ser at elementene  $a_1$  og  $c_N$  ødelegger den rene tridiagonale strukturen, men siden avviket fra tridiagonal form er liten, forsøker vi å omforme systemet slik at Thomasalgoritmen likevel kan brukes. (I.0.18a) på symbolsk form:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{d} \quad (\text{I.0.18b})$$

Lager ett nytt system der vi stryker siste linje i (I.0.17) og flytter leddene  $a_1 \cdot u_N$  og  $c_{N-1} \cdot u_N$  over på høyre side:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot u_1 + c_1 \cdot u_2 &= d_1 - a_1 \cdot u_N \\ a_2 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + c_2 \cdot u_3 &= d_2 \\ \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot \\ a_j \cdot u_{j-1} + b_j \cdot u_j + c_j \cdot u_{j+1} &= d_j \\ \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot \\ a_{N-1} \cdot u_{N-2} + b_{N-1} \cdot u_{N-1} &= d_{N-1} - c_{N-1} \cdot u_N \end{aligned} \quad (\text{I.0.19a})$$

På symbolsk form:

$$\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{d}_t \quad (\text{I.0.19b})$$

Dette systemet er på tridiagonal form, men  $u_1$  og  $u_N$  er ukjente. Løser først (I.0.19) med Thomasalgoritmen der vi utelater ledene  $a_1 \cdot u_N$  og  $c_{N-1} \cdot u_N$  på høyre siden. Kaller denne løsningen  $\mathbf{u}^{(1)}$ . Symbolsk:

$$\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{d}^{(1)} \quad (\text{I.0.20a})$$

Løser deretter (I.0.19) med høyre side  $\mathbf{d}^{(2)} = [-a_1, 0, \dots, 0, -c_{N-1}]^T$ . Kaller denne løsningen  $\mathbf{u}^{(2)}$ . Symbolsk:

$$\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{d}^{(2)} \quad (\text{I.0.20b})$$

Vi ser fra (I.0.19) og (I.0.20) at vi får den rette høyresiden ved å skrive

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{d}^{(1)} + u_N \cdot \mathbf{d}^{(2)} \quad (\text{I.0.20c})$$

Innsatt fra (I.0.19b), (I.0.20a) og (I.0.20b) i (I.0.20c):

$$\mathbf{A}_t \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{u}^{(1)} + u_N \cdot \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{A}_t \left( \mathbf{u}^{(1)} + u_N \cdot \mathbf{u}^{(2)} \right) \quad (\text{I.0.21})$$

som direkte gir:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}^{(1)} + u_N \cdot \mathbf{u}^{(2)} \quad (\text{I.0.22})$$

Det står bare igjen å bestemme  $u_N$  fra den siste linja i (I.0.17):

$$c_N \cdot u_1 + a_N \cdot u_{n-1} + b_N \cdot u_N = d_N$$

som innsatt for  $u_1 = u_1^{(1)} + u_n \cdot u_1^{(2)}$  og  $u_{N-1} = u_{N-1}^{(1)} + u_N \cdot u_{N-1}^{(2)}$  og løst m.h.p  $u_N$  gir:

$$u_N = \frac{d_N - c_N \cdot u_1^{(1)} - a_N \cdot u_{N-1}^{(1)}}{b_N - a_N \cdot u_{N-1}^{(2)} + c_N \cdot u_1^{(2)}} \quad (\text{I.0.23})$$

Nedenfor er vist et program skrevet i Fortran 90 som utfører beregningen vist i (I.0.20), (I.0.22) og (I.0.23). Programmet er en lett modifisert versjon av programmet **triper** gitt i Hirsch [3], appendiks B.  $a_1$  og  $c_N$  lagres henholdsvis i  $a(1)$  og  $c(N)$ . De ukjente betegnes  $\mathbf{x}$  i programmet istedenfor som  $\mathbf{u}$  ovenfor.

```
subroutine triper(n,a,b,c,d,x)
  implicit none
  integer, intent(in):: n
  real, intent(inout), dimension(n):: a,b,c,d
  real, intent(out):: x(n)
  ! --- Local variables ---
  integer:: k
  real:: xn
  b(1) = 1.0/b(1)
  x(1) = -a(1)*b(1)
  a(1) = d(1)*b(1)
  ! --- Elimination ---
  do k = 2,n-1
    c(k-1) = c(k-1)*b(k-1)
    b(k) = b(k) - a(k)*c(k-1)
    b(k) = 1.0/b(k)
    x(k) = -a(k)*x(k-1)*b(k)
    a(k) = (d(k) - a(k)*a(k-1))*b(k)
  end do
```

```

x(n-1) = x(n-1) - c(n-1)*b(n-1)
! --- Backsubstitution ---
d(n-1) = a(n-1)
b(n-1) = x(n-1)
do k = n-2,1,-1
    d(k) = a(k) - c(k)*d(k+1)
    b(k) = x(k) - c(k)*b(k+1)
end do
xn = d(n) - c(n)*d(1) - a(n)*d(n-1)
xn = xn/(b(n) + a(n)*b(n-1) + c(n)*b(1))
x(n) = xn
do k = 1,n-1
    x(k) = d(k) + b(k)*xn
end do
return
end

```

### BLOKK-TRIDIAGONALE MATRISER

I avsnitt 3.3 så vi på et tilfelle der det lineære ligningsystemet hadde en tridiagonal form når elementene ble skrevet som  $2 \times 2$ -matriser. Nedenfor har vi et slikt system der hver element(blokk) er enten en  $m \times m$ -matrise eller en vektor med  $m$  elementer.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 & & \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \mathbf{a}_j & \mathbf{b}_j & \mathbf{c}_j & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \mathbf{a}_N & \mathbf{b}_N & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{d}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{d}_N \end{bmatrix} \quad (\text{I.0.24})$$

De enkelte blokkene blir nå:

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{11}^{(j)} & \dots & a_{1m}^{(j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(j)} & \dots & a_{mm}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = 2, \dots, n; \quad \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{11}^{(j)} & \dots & b_{1m}^{(j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}^{(j)} & \dots & b_{mm}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{I.0.25a})$$

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{(j)} & \dots & c_{1m}^{(j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{(j)} & \dots & c_{mm}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ x_m^{(j)} \end{bmatrix} \quad (\text{I.0.25b})$$

$$\mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} d_1^{(j)} \\ \vdots \\ d_m^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Vi har her brukt en mer generell notasjon enn i avsnitt 3.3. Det totale antall ligninger blir nå  $N = m \cdot n$ .

Vi faktoriserer her på samme måte som i (I.0.7) med  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$  der den eneste forskjellen at elementene nå er matriser:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & & \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{\alpha}_j & \boldsymbol{\beta}_j \\ & & & \ddots \\ & & & & \boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \gamma_j \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

1 er her enhetsmatrisa med  $m$  ett-tall langs hoveddiagonalen. Formlene blir som i (I.0.8):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\beta}_1, \quad \gamma_1 = \boldsymbol{\beta}_1^{-1} \cdot \mathbf{c}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_j &= \boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\alpha}_j \cdot \gamma_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, n \\ \boldsymbol{\gamma}_j &= \boldsymbol{\beta}_j^{-1} \cdot \mathbf{c}_j, \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (\text{I.0.26a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \boldsymbol{\beta}_1^{-1} \cdot \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{g}_j &= \boldsymbol{\beta}_j^{-1} \cdot (\mathbf{d}_j - \boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{\gamma}_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{I.0.26b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{g}_n \\ \mathbf{x}_j &= \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{x}_{j+1}, \quad j = n-1, n-2, \dots, 1 \end{aligned} \quad (\text{I.0.26c})$$

Divisjon er selvfølgelig erstattet med matriseinversjon. Vi må nå beregne den inverse  $\mathbf{b}_j^{-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . For små verdier av  $m$  kan vi gjøre denne regningen direkte med den Cramerske regelen, ellers gjøres det med Gauss-eliminasjon. Dersom vi nå skriver ut de resulterende formlene, får vi en spesiell algoritme for hver blokkstørrelse  $m$ . For  $m = 1$  har vi som kjent Thomas-algoritmen. Algoritmen for  $m = 2$  basert på systemet skrevet i (I.0.27) kalles ofte Douglas-algoritmen. I Rosenberg [26] er det gitt algoritmer for  $m = 2$  og 3. I Cebeci & Bradshaw [4] er det gitt en rutine for  $m = 3$  skrevet i Fortran77. I Anderson et al. [1], appendiks B, er gitt et Fortranprogram for beregning av blokk-tridiagonale system med blokker av vilkårlig orden. Rutiner som er skrevet for en spesiell blokkstørrelse er vanligvis mer effektive enn generelle rutiner. Siden vi har brukt Douglas-algoritmen i avsnitt 3.3, gjengir vi denne nedenfor med samme notasjon som brukt i Rosenberg [26], appendiks C. Denne notasjonen går direkte på følgende system som vi tidligere har gitt i lign.(3.3.19), kapittel 3:

$$\begin{aligned} a_j^{(1)} u_{j-1} + a_j^{(2)} v_{j-1} + b_j^{(1)} u_j + b_j^{(2)} v_j + c_j^{(1)} u_{j+1} + c_j^{(2)} v_{j+1} &= d_j^{(1)} \\ a_j^{(3)} u_{j-1} + a_j^{(4)} v_{j-1} + b_j^{(3)} u_j + b_j^{(4)} v_j + c_j^{(3)} u_{j+1} + c_j^{(4)} v_{j+1} &= d_j^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{I.0.27})$$

Beregn først

$$\begin{aligned}\beta_j^{(1)} &= b_j^{(1)} - a_j^{(1)} \cdot \gamma_{j-1}^{(1)} - a_j^{(2)} \cdot \gamma_{j-1}^{(3)} \\ \beta_j^{(2)} &= b_j^{(2)} - a_j^{(1)} \cdot \gamma_{j-1}^{(2)} - a_j^{(2)} \cdot \gamma_{j-1}^{(4)} \\ \beta_j^{(3)} &= b_j^{(3)} - a_j^{(3)} \cdot \gamma_{j-1}^{(1)} - a_j^{(4)} \cdot \gamma_{j-1}^{(3)} \\ \beta_j^{(4)} &= b_j^{(4)} - a_j^{(3)} \cdot \gamma_{j-1}^{(2)} - a_j^{(4)} \cdot \gamma_{j-1}^{(4)} \\ \text{der } \beta_1^{(k)} &= b_1^{(k)}, \quad k = 1, \dots, 4\end{aligned}\tag{I.0.28a}$$

samt

$$\begin{aligned}\delta_j^{(1)} &= d_j^{(1)} - a_j^{(1)} \cdot g_{j-1}^{(1)} - a_j^{(2)} \cdot g_{j-1}^{(2)} \\ \delta_j^{(2)} &= d_j^{(2)} - a_j^{(3)} \cdot g_{j-1}^{(1)} - a_j^{(4)} \cdot g_{j-1}^{(2)}\end{aligned}\tag{I.0.28b}$$

$$\text{med } \delta_1^{(1)} = d_1^{(1)} \text{ og } \delta_1^{(2)} = d_1^{(2)}$$

$$\text{Sett } \mu_j = \beta_j^{(1)} \cdot \beta_j^{(4)} - \beta_j^{(2)} \cdot \beta_j^{(3)}\tag{I.0.28c}$$

og beregn

$$\begin{aligned}\gamma_j^{(1)} &= (\beta_j^{(4)} \cdot c_j^{(1)} - \beta_j^{(2)} \cdot c_j^{(3)}) / \mu_j \\ \gamma_j^{(2)} &= (\beta_j^{(4)} \cdot c_j^{(2)} - \beta_j^{(2)} \cdot c_j^{(4)}) / \mu_j \\ \gamma_j^{(3)} &= (\beta_j^{(1)} \cdot c_j^{(3)} - \beta_j^{(3)} \cdot c_j^{(1)}) / \mu_j \\ \gamma_j^{(4)} &= (\beta_j^{(1)} \cdot c_j^{(4)} - \beta_j^{(3)} \cdot c_j^{(2)}) / \mu_j\end{aligned}\tag{I.0.28d}$$

og

$$\begin{aligned}g_j^{(1)} &= (\beta_j^{(4)} \cdot \delta_j^{(1)} - \beta_j^{(2)} \cdot \delta_j^{(2)}) / mu_j \\ g_j^{(2)} &= (\beta_j^{(1)} \cdot \delta_j^{(2)} - \beta_j^{(3)} \cdot \delta_j^{(1)}) / mu_j\end{aligned}$$

Innsetting:

$$\begin{aligned}u_n &= g_n^{(1)} \\ v_n &= g_n^{(2)}\end{aligned}\tag{I.0.28e}$$

$$\begin{aligned}u_j &= g_j^{(1)} - \gamma_j^{(1)} \cdot u_{j+1} - \gamma_j^{(2)} \cdot v_{j+1} \\ v_j &= g_j^{(2)} - \gamma_j^{(3)} \cdot u_{j+1} - \gamma_j^{(4)} \cdot v_{j+1}, \quad j = n-1, \dots, 1\end{aligned}$$

Vi ser at algoritmen i (I.0.28) følger skjemaet i (I.0.26) temmelig nøye. På neste side er vist en subroutine **bitri** basert på denne algoritmen.

```

subroutine bitri(n,a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4,c1,c2,c3,c4, &
                d1,d2,u,v)
implicit none
integer, intent(in):: n
real, intent(in), dimension(n):: a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4, &
                c1,c2,c3,c4,d1,d2
real, intent(out):: u(n),v(n)
! --- Local variables ---
integer:: k
real, dimension(n):: ba1,ba2,ba3,ba4,ga1,ga2,ga3, &
                ga4,g1,g2,da1,da2
real:: my
real, parameter:: one = 1.0e0
ba1(1) = b1(1)
ba2(1) = b2(1)
ba3(1) = b3(1)
ba4(1) = b4(1)
da1(1) = d1(1)
da2(1) = d2(1)
my = one/(ba1(1)*ba4(1) - ba2(1)*ba3(1))
ga1(1) = (ba4(1)*c1(1) - ba2(1)*c3(1))*my
ga2(1) = (ba4(1)*c2(1) - ba2(1)*c4(1))*my
ga3(1) = (ba1(1)*c3(1) - ba3(1)*c1(1))*my
ga4(1) = (ba1(1)*c4(1) - ba3(1)*c2(1))*my
g1(1) = (ba4(1)*da1(1) - ba2(1)*da2(1))*my
g2(1) = (ba1(1)*da2(1) - ba3(1)*da1(1))*my
! --- Elimination ---
do k = 2,n
    ba1(k) = b1(k) - a1(k)*ga1(k-1) - a2(k)*ga3(k-1)
    ba2(k) = b2(k) - a1(k)*ga2(k-1) - a2(k)*ga4(k-1)
    ba3(k) = b3(k) - a3(k)*ga1(k-1) - a4(k)*ga3(k-1)
    ba4(k) = b4(k) - a3(k)*ga2(k-1) - a4(k)*ga4(k-1)
    da1(k) = d1(k) - a1(k)*g1(k-1) - a2(k)*g2(k-1)
    da2(k) = d2(k) - a3(k)*g1(k-1) - a4(k)*g2(k-1)
    my = one/(ba1(k)*ba4(k) - ba2(k)*ba3(k))
    ga1(k) = (ba4(k)*c1(k) - ba2(k)*c3(k))*my
    ga2(k) = (ba4(k)*c2(k) - ba2(k)*c4(k))*my
    ga3(k) = (ba1(k)*c3(k) - ba3(k)*c1(k))*my
    ga4(k) = (ba1(k)*c4(k) - ba3(k)*c2(k))*my
    g1(k) = (ba4(k)*da1(k) - ba2(k)*da2(k))*my
    g2(k) = (ba1(k)*da2(k) - ba3(k)*da1(k))*my
end do
! --- Backsubstitution ---
u(n) = g1(n)
v(n) = g2(n)
do k = n-1,1,-1
    u(k) = g1(k) - ga1(k)*u(k+1) - ga2(k)*v(k+1)
    v(k) = g2(k) - ga3(k)*u(k+1) - ga4(k)*v(k+1)
end do; return ; end

```

Når vi programmerer dette skjemaet, kan vi spare plass ved å bruke de opprinnelige koeffisientene for bruk til mellomlagring. Dette har vi gjort i programmet **bitric** som er en kompakt versjon av **bitri**.

```

subroutine bitric(n,a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4,c1,c2,c3,c4, &
                  d1,d2,u,v)
implicit none
integer, intent(in):: n
real, intent(inout), dimension(n):: a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4, &
                                 c1,c2,c3,c4,d1,d2
real, intent(out):: u(n),v(n)
! --- Local variables ---
integer:: i
real:: my
real, parameter:: one = 1.0e0
my = one/(b1(1)*b4(1) - b2(1)*b3(1))
a1(1) = (b4(1)*c1(1) - b2(1)*c3(1))*my
a2(1) = (b4(1)*c2(1) - b2(1)*c4(1))*my
a3(1) = (b1(1)*c3(1) - b3(1)*c1(1))*my
a4(1) = (b1(1)*c4(1) - b3(1)*c2(1))*my
u(1) = (b4(1)*d1(1) - b2(1)*d2(1))*my
v(1) = (b1(1)*d2(1) - b3(1)*d1(1))*my
! --- Elimination ---
do i = 2,n
    b1(i) = b1(i) - a1(i)*a1(i-1) - a2(i)*a3(i-1)
    b2(i) = b2(i) - a1(i)*a2(i-1) - a2(i)*a4(i-1)
    b3(i) = b3(i) - a3(i)*a1(i-1) - a4(i)*a3(i-1)
    b4(i) = b4(i) - a3(i)*a2(i-1) - a4(i)*a4(i-1)
    d1(i) = d1(i) - a1(i)*u(i-1) - a2(i)*v(i-1)
    d2(i) = d2(i) - a3(i)*u(i-1) - a4(i)*v(i-1)
    my = one/(b1(i)*b4(i) - b2(i)*b3(i))
    a1(i) = (b4(i)*c1(i) - b2(i)*c3(i))*my
    a2(i) = (b4(i)*c2(i) - b2(i)*c4(i))*my
    a3(i) = (b1(i)*c3(i) - b3(i)*c1(i))*my
    a4(i) = (b1(i)*c4(i) - b3(i)*c2(i))*my
    u(i) = (b4(i)*d1(i) - b2(i)*d2(i))*my
    v(i) = (b1(i)*d2(i) - b3(i)*d1(i))*my
end do
! --- Backsubstitution ---
do i = n-1,1,-1
    u(i) = u(i) - a1(i)*u(i+1) - a2(i)*v(i+1)
    v(i) = v(i) - a3(i)*u(i+1) - a4(i)*v(i+1)
end do
return
end

```

I avsnitt 3.3 har vi et tilfelle der halvdiagonalene  $a_j^{(2)}$ ,  $a_j^{(4)}$ ,  $c_j^{(1)}$  og  $c_j^{(3)}$  forsvinner. Dersom et slikt tilfelle opptrer ofte, kan det lønne seg å skrive en spesialversjon nettopp for dette tilfellet, slik versjonen **bitris** nedenfor viser. Det er lurt å bruke **bitri** som utgangspunkt når en skal lage slike kompakte versjoner.

```

subroutine bitris(n,a1,a3,b1,b2,b3,b4,c2,c4,d1,d2,u,v)
  implicit none
  integer, intent(in):: n
  real, intent(inout), dimension(n):: a1,a3,b1,b2,b3,b4, &
    c2,c4,d1,d2
  real, intent(out):: u(n),v(n)
  ! --- Local variables ---
  integer:: i
  real:: my
  real, parameter:: one = 1.0e0
  my = one/(b1(1)*b4(1) - b2(1)*b3(1))
  a1(1) = (b4(1)*c2(1) - b2(1)*c4(1))*my
  a3(1) = (b1(1)*c4(1) - b3(1)*c2(1))*my
  u(1) = (b4(1)*d1(1) - b2(1)*d2(1))*my
  v(1) = (b1(1)*d2(1) - b3(1)*d1(1))*my
  ! --- Elimination ---
  do i = 2,n
    b2(i) = b2(i) - a1(i)*a1(i-1)
    b4(i) = b4(i) - a3(i)*a1(i-1)
    d1(i) = d1(i) - a1(i)*u(i-1)
    d2(i) = d2(i) - a3(i)*u(i-1)
    my = one/(b1(i)*b4(i) - b2(i)*b3(i))
    a1(i) = (b4(i)*c2(i) - b2(i)*c4(i))*my
    a3(i) = (b1(i)*c4(i) - b3(i)*c2(i))*my
    u(i) = (b4(i)*d1(i) - b2(i)*d2(i))*my
    v(i) = (b1(i)*d2(i) - b3(i)*d1(i))*my
  end do
  ! --- Backsubstitution ---
  do i = n-1,1,-1
    u(i) = u(i) - a1(i)*v(i+1)
    v(i) = v(i) - a3(i)*v(i+1)
  end do
  return
end

```

## ANDRE BANDSYSTEM

### PENTADIAGONALT SYSTEM

Når vi diskretiserer en 3. ordens ordinær differensielligning med bruk av sentraldifferanser, får vi et system med pentadiagonal koeffisientmatrise. Et typisk eksempel er Blasius ligning som vist i avsnitt 3.5.

Et slikt system kan skrives:

$$e_j \cdot x_{j-2} + a_j \cdot x_{j-1} + b_j \cdot x_j + c_j \cdot x_{j+1} + f_j \cdot x_{j+2} = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{I.0.29})$$

På matriseform:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 & c_3 & f_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_j & a_j & b_j & c_j & f_j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & f_{n-2} \\ e_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \\ e_n & b_n & c_n & & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.0.30})$$

Her er en algoritme for å løse dette systemet:

### Eliminering

Sett  $\beta_1 = b_1$ ,  $\zeta_1 = c_1$ ,  $\delta_1 = d_1$ ,  $\alpha_2 = a_2$

Utfør for  $k = 2, 3, \dots, n-1$ :

$$q = \alpha_k / \beta_{k-1}$$

$$\beta_k = \beta_{k-1} - q \cdot \zeta_{k-1}, \quad \zeta_k = c_k - q \cdot f_{k-1}, \quad \delta_k = \delta_{k-1} - q \cdot \delta_{k-1}$$

$$q = e_{k+1} / \beta_{k-1}$$

$$\alpha_{k+1} = a_{k+1} - q \cdot \zeta_{k-1}, \quad \beta_{k+1} = b_{k+1} - q \cdot f_{k-1}, \quad \delta_{k+1} = d_{k+1} - q \cdot \delta_{k-1}$$

### Innsetting

$$q = \alpha_n / \beta_{n-1}$$

$$\beta_n = \beta_{n-1} - q \cdot \zeta_{n-1}$$

$$x_n = (\delta_n - q \cdot \delta_{n-1}) / \beta_n$$

$$x_{n-1} = (\delta_{n-1} - \zeta_{n-1} \cdot x_n) / \beta_{n-1}$$

Utfør for  $k = n-1, n-2, \dots, 1$ :

$$x_k = (\delta_k - f_k \cdot x_{k+2} - \zeta_k \cdot x_{k+1}) / \beta_k$$

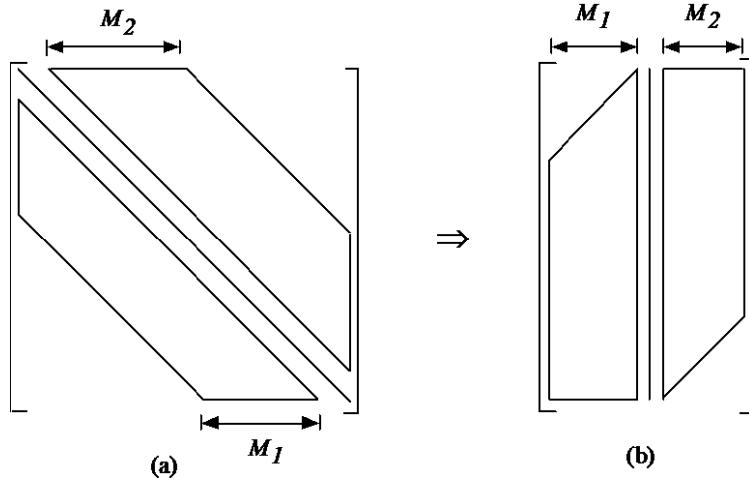
Nedenfor er gitt en rutine **penta** skrevet i Fortran90 basert på denne algoritmen. Vi har skrevet over inngangsvektorene for å spare lagerplass.

```

subroutine penta(n,e,a,b,c,f,d,x)
  implicit none
  integer, intent(in):: n
  real, intent(inout),dimension(n):: e,a,b,c,f,d
  real, intent(out):: x(n)
  ! --- Local variables ---
  integer:: i
  real:: q
  do i = 2,n-1
    q = a(i)/b(i-1)
    b(i) = b(i) - q*c(i-1)
    c(i) = c(i) - q*f(i-1)
    d(i) = d(i) - q*d(i-1)
    q = e(i+1)/b(i-1)
    a(i+1) = a(i+1) - q*c(i-1)
    b(i+1) = b(i+1) - q*f(i-1)
    d(i+1) = d(i+1) - q*d(i-1)
  end do
  q = a(n)/b(n-1)
  b(n) = b(n) - q*c(n-1)
  x(n) = (d(n) - q*d(n-1))/b(n)
  x(n-1) = (d(n-1) - c(n-1)*x(n))/b(n-1)
  do i = n-2,1,-1
    x(i) = (d(i) - f(i)*x(i+2) - c(i)*x(i+1))/b(i)
  end do
  return
end

```

## GENERELLE BANDMATRISER



Figur I.3

Figur I.3a viser en bandmatrise med en hoveddiagonal,  $M_1$  underdiagonaler og  $M_2$  overdiagonaler. På neste side gir vi et program **bdsolv** som løser dette bandsystemet der koeffisientmatrisa i figur I.3a blir lagret - som vist i figur I.3b - i en matrise  $A(1 : N, 1 : M1 + M2 + 1)$  der  $N$  er antall ligninger. For å gjøre lagringen helt klar, viser vi et eksempel med 6 diagonaler der  $M_1 = 2$ ,  $M_2 = 3$  og  $N = 9$ :

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ 1 & 2 & 3 & & & \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} \times & \times & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \times & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \times \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \times & \times \\ 1 & 2 & 3 & \times & \times & \times \end{array} \right]$$

I matrisa  $A(1 : 9, 1 : 6)$  til høyre brukes ikke elementene som er markert med kryss. Programmet som er skrevet i Fortran 90, utfører eliminasjonen med pivotering. Det kan derfor brukes til å teste andre program der pivotering ikke brukes, f.eks. **bitric** og **bitris**. Dersom parameteren *ifail* får verdien -1, angir dette at matrisa er singulær.

Ligningsystemet som løses, skrives symbolsk:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

```

subroutine bdsolv(n,m1,m2,a,b,x,ifail)
  implicit none
  integer, intent(in):: n,m1,m2
  integer, intent(out):: ifail
  real, intent(inout):: a(n,1:m1+m2+1),b(n)
  real, intent(out):: x(n)
  ! --- Local variables ---
  integer:: m3,l,i,j,k,i2
  real:: q,q1
  real, parameter:: zero = 0.0e0
  ifail = 0
  ! --- Reordering ---
  m3 = m1 + 1
  l = m1
  do i = 1,m1
    do j = 1 - i + m3,m2 + m3
      a(i,j - 1) = a(i,j)
    end do
    l = l - 1
    do j = m2 - l,m2
      a(i,j+m3) = zero
    end do
  end do
  ! --- Elimination ---
  l = m1
  do k = 1,n
    q = a(k,1)
    i = k
    if(l < n) l = l + 1
    do j = k + 1,l
      q1 = a(j,1)
      if(abs(q1) > abs(q)) then
        q = q1
        i = j
      endif
    end do
    if( q == zero) then
      ifail = - 1
      return
    endif
    if(i /= k) then

```

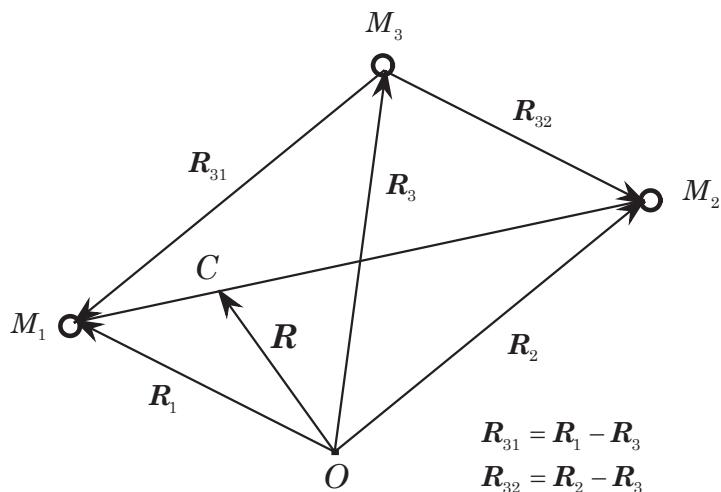
```

q = b(k)
b(k) = b(i)
b(i) = q
do j = 1,m2 + m3
  q = a(k,j)
  a(k,j) = a(i,j)
  a(i,j) = q
end do
endif
do i = k + 1,l
  q = a(i,1)/a(k,1)
  b(i) = b(i) - q*b(k)
  do j = 2,m2 + m3
    a(i,j-1) = a(i,j) - q*a(k,j)
  end do
  a(i,m2+m3) = zero
end do
end do
! --- Backsubstitution ---
l = - m1
do i = n,1,-1
  q = b(i)
  x(i) = q
  i2 = i + m1
  do k = 1 - m1,l
    q = q - a(i,k+m3)*x(k + i2)
  end do
  x(i) = q/a(i,1)
  if(l < m2) l = l + 1
end do
return
end

```



## DET AVGRENSA 3-LEGEME PROBLEMET



Figur J.1

Figuren viser tre legemer med masse \$M\_1, M\_2\$ og \$M\_3\$ i et inertialsystem med origo i \$O\$. Legemene er gjensidig påvirket av hverandre gjennom Newtons gravitasjonslov som gir:

$$M_3 = \frac{d^2\mathbf{R}_3}{d\tau^2} = G \cdot \left[ \frac{M_1 M_3}{R_{31}^3} \mathbf{R}_{31} + \frac{M_2 M_3}{R_{32}^3} \mathbf{R}_{32} \right] \quad (\text{J.0.1})$$

\$G\$ = gravitasjonskonstanten

(J.0.1) beskriver det generelle 3-legeme problemet, mens vi ønsker å se på problemet der en av massene, her \$M\_3\$, er mye mindre enn de andre. Dette kalles det sirkulære, avgrensa 3-legeme problemet. Et typisk tilfelle er et romskip som beveger seg i nærheten av jorda og månen. Dessuten antar vi at alle legemene beveger seg i samme plan.

Massesenter  $C$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \frac{M_1\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_2 + M_3\mathbf{R}_3}{M_1 + M_2 + M_3} \approx \frac{M_1\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_2}{M_1 + M_2} \\ &= \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) \cdot \mathbf{R}_1 + \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right) \cdot \mathbf{R}_2\end{aligned}\quad (\text{J.0.2})$$

Setter

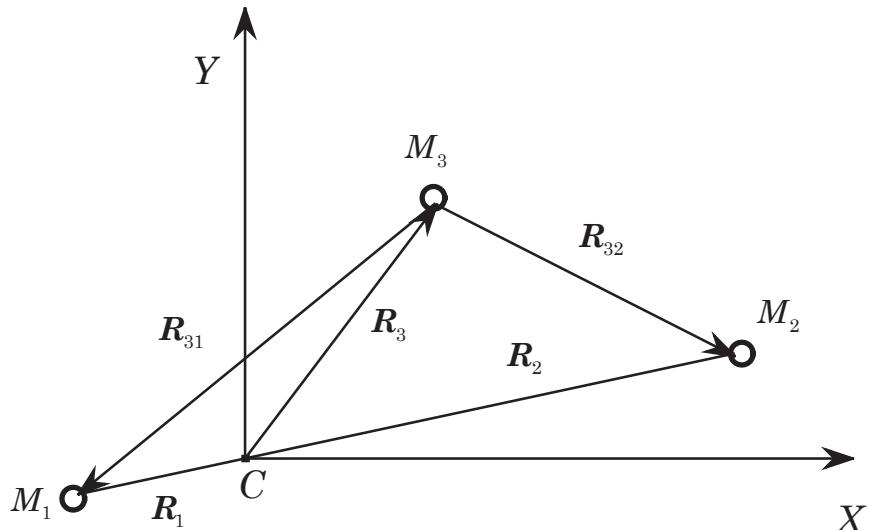
$$M = M_1 + M_2 \quad (\text{J.0.3})$$

og definerer:

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2}{M} = m_2, \quad 1 - \mu = \frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M} = m_1 \quad (\text{J.0.4})$$

Derav:

$$\mathbf{R} = (1 - \mu) \cdot \mathbf{R}_1 + \mu \cdot \mathbf{R}_2 = m_1 \cdot \mathbf{R}_1 + m_2 \cdot \mathbf{R}_2 \quad (\text{J.0.5})$$



Figur J.2

Flytter origo til massesenteret  $C$  som impliserer  $\mathbf{R} = 0$  i (J.0.5):

$$(1 - \mu) \cdot \mathbf{R}_1 + \mu \cdot \mathbf{R}_2 = 0 \quad (\text{J.0.6})$$

Kaller avstanden mellom  $M_1$  og  $M_2$  for  $L$ .

Derav følger:

$$R_1 = |\mathbf{R}_1| = \mu L, \quad R_2 = |\mathbf{R}_2| = (1 - \mu)L$$

Innfører et kartesisk koordinatsystem  $[X, Y]$  med origo i  $C$  (Fig. J.2) med

$\mathbf{R}_1 = (X_1, Y_1)$ ,  $\mathbf{R}_2 = (X_2, Y_2)$ ,  $\mathbf{R}_3 = (X, Y)$  gir:

$$\mathbf{R}_{31} = (X_1 - X, Y_1 - Y), \quad \mathbf{R}_{32} = (X_2 - X, Y_2 - Y) \quad (\text{J.0.7})$$

(J.0.3) og (J.0.7) innsatt i (J.0.1) gir:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_3}{d\tau^2} = GM \left[ \frac{(1-\mu)\mathbf{R}_{31}}{R_{31}^3} + \frac{\mu\mathbf{R}_{32}}{R_{32}^3} \right] \quad (\text{J.0.8})$$

eller på komponent form:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\tau^2} &= GM \left[ \frac{(1-\mu)(X_1 - X)}{R_{31}^3} + \frac{\mu(X_2 - X)}{R_{32}^3} \right] \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2} &= GM \left[ \frac{(1-\mu)(Y_1 - Y)}{R_{31}^3} + \frac{\mu(Y_2 - Y)}{R_{32}^3} \right] \end{aligned} \quad (\text{J.0.9})$$

Her er

$$R_{31} = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}, \quad R_{32} = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2} \quad (\text{J.0.10})$$

Innfører dimensjonsløse koordinater:

$$\zeta = \frac{X}{L}, \quad \eta = \frac{Y}{L} \quad (\text{J.0.11})$$

som gir:

$$\begin{aligned} X_1 - X &= L(\zeta_1 - \zeta), \quad X_2 - X = L(\zeta_2 - \zeta) \\ Y_1 - Y &= L(\eta_1 - \eta), \quad Y_2 - Y = L(\eta_2 - \eta) \end{aligned} \quad (\text{J.0.12})$$

som videre innsatt i (J.0.9) og (J.0.10) gir:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} &= \frac{GM}{L^3} \left[ \frac{(1-\mu)(\zeta_1 - \zeta)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(\zeta_2 - \zeta)}{r_{32}^3} \right] \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= \frac{GM}{L^3} \left[ \frac{(1-\mu)(\eta_1 - \eta)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(\eta_2 - \eta)}{r_{32}^3} \right] \end{aligned} \quad (\text{J.0.13})$$

$$\begin{aligned} R_{31}^3 &= L^3[(\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2]^{\frac{5}{2}} = L^3 \cdot r_{31}^3 \\ R_{32}^3 &= L^3[(\zeta - \zeta_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2]^{\frac{5}{2}} = L^3 \cdot r_{32}^3 \end{aligned} \quad (\text{J.0.14})$$

I dette systemet blir avstanden mellom massene  $m_1$  og  $m_2$  lik 1:

$$R_1 + R_2 = m_1 L + m_2 L \rightarrow m_1 + m_2 = \frac{R_1}{L} + \frac{R_2}{L} = (1 - \mu) + \mu = 1$$

Fra Keplers 3. lov:

$$\omega^2 \cdot L^3 = GM \rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{L^3} \quad (\text{J.0.15})$$

der  $\omega$  er den midlere vinkelhastighet av linja  $M_1 - M_2$  (eventuelt  $m_1 - m_2$ ).  $\omega \cdot \tau$  er da rotasjonsvinkelen for  $m_1 - m_2$  i løpet av tiden  $\tau$ .

Innfører en dimensjonsløs tid  $t$ . La  $\Omega \cdot t$  være vinkelen som linja roterer i løpet av tiden  $t$  med dimensjonsløs vinkelhastighet  $\Omega$ . Setter  $\omega \cdot \tau = \Omega \cdot t$  slik at rotasjonsvinkelen blir den samme. Velger spesielt  $\Omega = 1$ .

Relasjonen mellom tidene blir da:

$$t = \omega \cdot \tau \quad (\text{J.0.16})$$

Dette betyr at den dimensjonsløse tiden  $t$  blir lik rotasjonsvinkelen.

Den virkelige tiden er da gitt ved:

$$\tau = \frac{t}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{L^3}} \quad (\text{J.0.17})$$

Derav:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{GM}{L^3} \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{dt^2}$$

Ligningsystemet blir da:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{(1-\mu)(\zeta_1 - \zeta)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(\zeta_2 - \zeta)}{R_{32}^3} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{(1-\mu)(\eta_1 - \eta)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(\eta_2 - \eta)}{r_{32}^3} \end{aligned} \quad (\text{J.0.18})$$

Vi ser at dette er det samme som å sette  $G = 1, M = 1$  og  $L = 1$  i utgangspunktet.

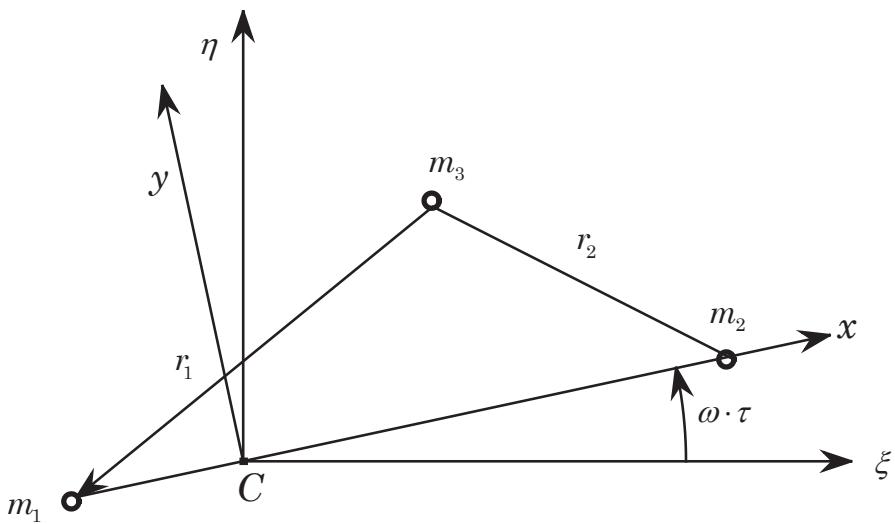
Foretrekker å arbeide i et  $x-y$  system (Fig. J.3) som roterer med vinkelhastighet  $\omega$  (eller  $\Omega = 1$  for den dimensjonsløse tiden). Massen  $m_1$  har koordinatene  $(x_1, 0)$  der  $x_1 = -\mu$  og  $m_2$  har koordinatene  $(x_2, 0)$  der  $x_2 = 1 - \mu$  slik at  $|x_1| + |x_2| = 1$ . Massen  $m_3$  har koordinatene  $(x, y)$ .

Får nå:

$$\begin{aligned} r_{31} &\equiv r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}, \quad x_1 = -\mu \\ r_{32} &\equiv r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}, \quad x_2 = 1 - \mu \end{aligned} \quad (\text{J.0.19})$$

Med  $\Omega = 1$ , blir sammenhengen mellom  $(\zeta, \eta)$  og  $(x, y)$  - systemene:

$$\begin{aligned} \zeta &= x \cos t - y \sin t, \quad \eta = x \sin t + y \cos t \\ x &= \zeta \cos t + \eta \sin t, \quad y = -\zeta \sin t + \eta \cos t \end{aligned} \quad (\text{J.0.20})$$



Figur J.3

Ved derivasjon av (J.0.20), der prikk betyr mh.p. tiden  $t$ :

$$\dot{\zeta} = (\dot{x} - y) \cos t + (x + \dot{y}) \sin t, \quad \dot{\eta} = (x + \dot{y}) \cos t + (\dot{x} - y) \sin t$$

$$\ddot{\zeta} = (y - 2\dot{x} - \ddot{y}) \sin t + (\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \cos t, \quad \ddot{\eta} = (\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \sin t + (2\dot{x} + \ddot{y} - y) \cos t$$

Dessuten:

$$\zeta_1 - \zeta = (x_1 - x) \cos t + y \sin t, \quad \zeta_2 - \zeta = (x_2 - x) \cos t + y \sin t$$

$$\eta_1 - \eta = (x_1 - x) \sin t - y \cos t, \quad \eta_2 - \eta = (x_2 - x) \sin t - y \cos t$$

(J.0.18) blir nå:

$$(y - 2\dot{x} - \ddot{y}) \sin t + (\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \cos t = \\ \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} [(x_1 - x) \cos t + y \sin t] + \frac{\mu}{r_2^3} [(x_2 - x) \cos t + y \sin t]$$

$$(\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \sin t + (2\dot{x} + \ddot{y} - y) \cos t = \\ \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} [(x_1 - x) \sin t - y \cos t] + \frac{\mu}{r_2^3} [(x_2 - x) \sin t - y \cos t]$$

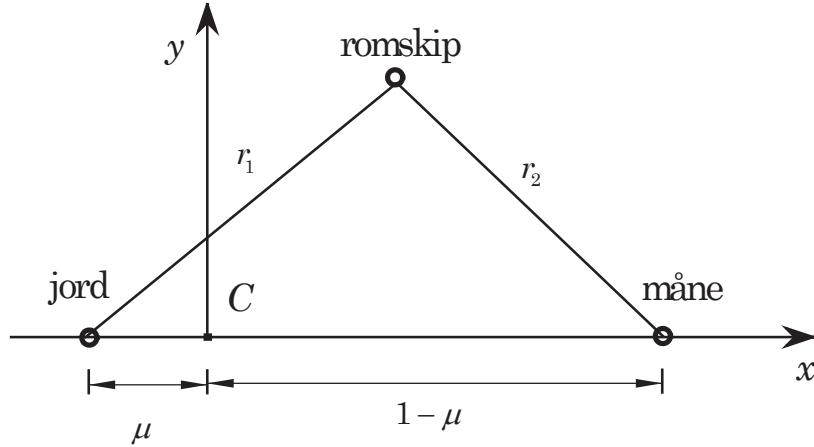
Disse ligningene kan forenkles. Multipliserer den første med  $\cos t$ , den andre med  $\sin t$  og adderer. Deretter multipliserer vi den første med  $-\sin t$  og den andre med  $\cos t$  og adderer.

Sluttresultatet blir:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 2\dot{y} - \frac{(1 - \mu)}{r_1^3}(x - x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x - x_2) \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - \left[ \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] \cdot y \end{aligned} \tag{J.0.21}$$

der  $x_1 = -\mu$ ,  $x_2 = 1 - \mu$

### J.1 Romskip i jord-måne systemet.



Figur J.4

Robert R. Newton (1959) gjorde en rekke beregninger med jord-måne systemet og han brukte:

$$\mu = \frac{1}{82.45}, \quad 1 - \mu = 0.98787 \quad (\text{J.1.1})$$

Erwin Fehlberg(1963) brukte Newtons data ved løsning av (J.0.21) med bruk av høy-ordens Runge-Kutta metoder.

Vi har tenkt å bruke Newtons data som utgangspunkt. Han beregnet 11 periodiske baner der han starter i  $(x_0, y_0)$  med  $y_0 = 0$  i alle tilfellene.  $x_0$  varierer mellom 1.0 og 1.2, dvs.: på bortsiden av månen. Hastigheten  $\dot{x}_0$  i alle tilfellene, mens hastigheten  $\dot{y}_0$  er negativ i alle tilfellene.

De forskjellige bane-dataene er gitt i tabellen nedenfor.

Bane nr	$x_0$	$-\dot{y}_0$	Periode
1	1.00	2.3314	7.8925
2	1.05	1.7739	6.5227
3	1.10	1.6604	6.3841
4	1.15	1.5842	6.3335
5	1.20	1.4980	6.3020
6	1.00	1.5364	5.4292
7	1.019981	1.0200	5.5718
8	1.05	0.8475	5.7574
9	1.10	0.8303	5.9750
10	1.15	0.9124	6.1081
11	1.20	1.0490	6.1920

Perioden er den (dimensjonsløse) tiden romskipet bruker for å vende tilbake til utgangspunktet.(her: månen).

Fehlberg brukte bane nr. 11 i sine beregninger, fordi denne banen gir den største forskjellen mellom storrelsen på tidskrittene for en gitt nøyaktighet. Fehlberg regnet mer nøyaktig og fant  $\dot{y}_0 = -1.04935\ 75098\ 30343$  med periode  $6.19216\ 93313\ 19632$ . Det er disse verdiene som ofte blir brukt i tester.

Da summen av kinetisk og potensiell energi er bevart for den relative bevegelsen, finner vi ved å integrere (J.0.21):

$$C = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (\text{J.1.2})$$

(J.1.2) kalles Jacobi-integralet og kan brukes til å sjekke nøyaktigheten av beregningen. Ved  $t = 0$  med bruk av (J.0.19):

$$\begin{aligned} C &= x_0^2 + y_0^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) \\ r_1 &= \sqrt{(x_0 + \mu)^2 + y_0^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_0 + \mu - 1)^2 + y_0^2} \end{aligned} \quad (\text{J.1.3})$$

For beregningen ovenfor med  $y_0 = 0$  og  $\dot{x}_0 = 0$ :

$$C = x_0^2 + \frac{2(1-\mu)}{\mu} + \frac{2\mu}{x_0 + \mu - 1} - \dot{y}_0^2 \quad (\text{J.1.4})$$

## Noen data

$$M_1 = M_{\text{jord}} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{kg}, \quad M_2 = M_{\text{måne}} = 0.07349 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

$$GM = G(M_1 + M_2) = 4.035 \cdot 10^{14} \text{Nm}^2/\text{kg}$$

$$\text{Midlere avstand jord-måne} = L = 3.84467 \cdot 10^8 \text{m}$$

Fra (J.0.3):

$$m_2 \equiv \mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{1}{82.2845}, \quad m_1 = 1 - \mu = 0.987847 \quad (\text{J.1.5})$$

Verdiene i (J.1.5) er nyere og skiller seg litt fra verdiene i (J.1.1).

I baneberegninger brukes vanligvis  $\mu = \frac{1}{82.300590}$  (fra år 1976)

Tiden for en omdreining av jord-måne systemet blir  $t_0$  som med  $\Omega \cdot t_0 = 2\pi$  og  $\Omega = 1$  blir:  $t_0 = 2\pi$ ,  $t_0$  er dimensjonsløs. Fra tabellen ser vi at noen av banene har en periode som er større enn  $t_0$ , mens andre har en mindre periode.

Fra (J.0.17):

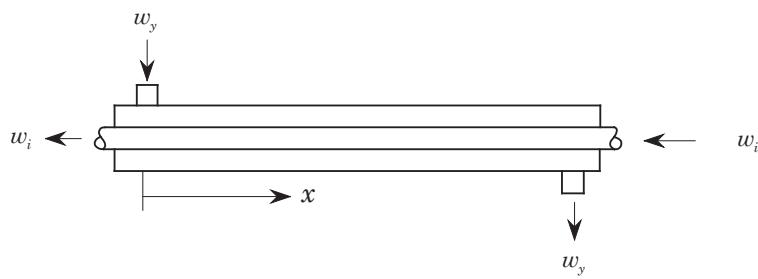
$$\tau_0 = \frac{t_0}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{L^3}} \rightarrow \tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{GM}}$$

som med de gitte data gir:  $\tau_0 = 2.358015 \cdot 10^6 s \approx 655\text{timer} = 27\text{døgn og 7timer}$ .

**Referanser:** Newton [23] og Fehlberg [12]

---

## OPPSTART AV VARMEVEKSLER



Figur K.1

I kapittel 3 regnet vi på et eksempel med stasjonær varmeledning i en varmeveksler. Figuren viser varmeveksleren i motstrøm fra fig. 3.11 i kapittel 3.  $w_y$  er hastigheten for væska i det ytre røret mens  $w_i$  er hastigheten for væska i det indre røret.  $w_i$  og  $w_y$  er konstante størrelser.

Fra lign. 3.3.9 i kapittel 3:

$$\begin{aligned} w_y \frac{\partial T_y}{\partial X} &= -\frac{\bar{h}P}{\rho_y A_y c_y} (T_y - T_i) \\ -w_i \frac{\partial T_i}{\partial X} &= \frac{\bar{h}P}{\rho_i A_i c_i} (T_y - T_i) \end{aligned} \quad (\text{K.0.1})$$

Har satt  $w_i \rightarrow -w_i$  p.g.a. motstrøm. Her er  $T_y$  og  $T_i$  temperaturen i henholdsvis ytre og indre rør,  $\bar{h}$  varmeovergangstallet mellom indre og ytre rør,  $P$  er periferien av det indre røret,  $\rho$  er tethet,  $A$  er areal av rørtverrsnitt,  $c$  er egenvarmen og  $w = \dot{m}/\rho A$  fra K.1.6. (Flere detaljer i kapittel 3).

(K.0.1) gjelder for stasjonære forhold. For ikke-stasjonære forhold:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_y}{\partial \tau} + w_y \frac{\partial T_y}{\partial X} &= -\frac{\bar{h}P}{\rho_y A_y c_y} (T_y - T_i) \\ \frac{\partial T_i}{\partial \tau} - w_i \frac{\partial T_i}{\partial X} &= \frac{\bar{h}P}{\rho_i A_i c_i} (T_y - T_i)\end{aligned}\quad (\text{K.0.2})$$

$\tau$  er fysisk tid.

## K.1 Innføring av dimensjonsløse størrelser

Dimensjonsløs temperatur for ytre rør:

$$u = \frac{T_y - T_{ir}}{T_{yr} - T_{ir}} \quad (\text{K.1.1a})$$

Dimensjonsløs temperatur for indre rør:

$$v = \frac{T_i - T_{ir}}{T_{yr} - T_{ir}} \quad (\text{K.1.1b})$$

$T_{ir}$  og  $T_{yr}$  er her referanse temperaturer for henholdsvis det indre og det ytre røret og velges slik at  $0 \leq u, v \leq 1$ . (Spesifikke verdier er gitt i lign. (K.1.11))  
Løst m.h.p.  $T_i$  og  $T_y$ :

$$\begin{aligned}T_i &= T_{ir} + v \cdot (T_{yr} - T_{ir}) \\ T_y &= T_{ir} + u \cdot (T_{yr} - T_{ir}) \\ T_y - T_i &= (T_{yr} - T_{ir}) \cdot (u - v)\end{aligned}\quad (\text{K.1.2})$$

La  $L$  være lengden av hvert av rørene.

Dimensjonsløs tid:

$$t = w_y \frac{\tau}{L} \quad (\text{K.1.3})$$

Dimensjonsløs lengde:

$$x = \frac{X}{L} \quad (\text{K.1.4})$$

Lign. (K.1.2) - (K.1.4) innsatt i (K.0.2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\bar{h}PL}{\rho_y A_y w_y c_y} (u - v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{w_i}{w_y} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\bar{h}PL}{\rho_i A_i w_i c_i} \left( \frac{w_i}{w_y} \right) (u - v)\end{aligned}\quad (\text{K.1.5})$$

La  $\dot{m}_i$  og  $\dot{m}_y$  være massestrømmen (kg/s) i henholdsvis det indre og det ytre røret.

$$\begin{aligned}\dot{m}_i &= \rho_i A_i w_i \\ \dot{m}_y &= \rho_y A_y w_y\end{aligned}\quad (\text{K.1.6})$$

Setter da:

$$\begin{aligned}\alpha_y &= \frac{\bar{h}PL}{\rho_y A_y w_y c_y} = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_y c_y} \\ \alpha_y &= \frac{\bar{h}PL}{\rho_i A_i w_i c_i} \left( \frac{w_i}{w_y} \right) = \frac{\bar{h}PL}{\dot{m}_i c_i} \left( \frac{w_i}{w_y} \right)\end{aligned}\quad (\text{K.1.7})$$

Lign. (K.1.7) innsatt i (K.1.5) gir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= -\alpha_y(u - v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{w_i}{w_y} \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha_i(u - v)\end{aligned}\quad (\text{K.1.8})$$

### Eksempel K.1 Talleksempel

Bruker de samme tallverdiene som vi brukte for det stasjonære tilfellet. Vi skal avkjøle smøreoljen for et gassturbinanlegg. Oljen har en temperatur på 100 °C. Til disposisjon har vi vann med temperatur på 30 °C. Andre data:

- Rørlengde:  $L = 61m$
- Diameter av indre rør:  $d = 0.025m$
- Omkrets av indre rør:  $P = \pi \cdot d = 0.07854m$
- Massestrøm:  $\dot{m}_y = 0.1$  og  $\dot{m}_i = 0.23 \frac{kg}{s}$
- Totalt varmeovergangstall:  $\bar{h} = 40 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$
- Egenvarme:  $c_y = 2130$  og  $c_i = 4180 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$
- Tetthet:  $\rho_i = 1000 \frac{kg}{m^3}$  (vann),  $\rho_y = 850 \frac{kg}{m^3}$  (olje)

Med disse verdiene får vi:

$$\begin{aligned}\alpha_y &= 0.8997 \approx 0.9 \\ \alpha_i &= 0.1993 \approx 0.2\end{aligned}\quad (\text{K.1.9})$$

Dette er de samme verdiene som for det stasjonære tilfellet i kapittel 3.

Setter  $b = \frac{w_i}{w_y}$  som gir:  $\frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_y} = 2.3 = \frac{\rho_i A_i w_i}{\rho_y A_y w_y} = \frac{1000}{850} \cdot \frac{d_i^2}{(d_y^2 - d_i^2)} \cdot b$   
eller løst m.h.p.  $d_y$ :

$$d_y = \sqrt{0.5115 \cdot b + 1} \cdot d_i \quad (\text{dimensjon meter}) \quad (\text{K.1.10})$$

Med  $b = \frac{w_i}{w_y} = 1$  gir dette  $d_y \approx 0.031m$  og med  $b = 1.5$  gir dette  $d_y \approx 0.033m$ .

### Valg av referanse temperaturer i lign. (K.1.2)

Setter

$$T_{yr} = T_{y(X=0)} = 100 \text{ } ^\circ C \text{ og } T_{ir} = T_{y(X=L)} = 30 \text{ } ^\circ C \quad (\text{K.1.11})$$

Får da:

$$\begin{aligned}u &= \frac{T_y - 30}{70}, 0 \leq u \leq 1, \text{ og } T_y = 70 \cdot u + 30, 30 \leq T_y \leq 100 \\ v &= \frac{T_i - 30}{70}, 0 \leq v \leq 1, \text{ og } T_i = 70 \cdot v + 30, 30 \leq T_i \leq 100\end{aligned}\quad (\text{K.1.12})$$

### Diskretisering

Bruker nå Wendroffs implisitte skjema fra avsnitt 6.7:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right)\end{aligned}\quad (\text{K.1.13a})$$

$$u \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(u_j^{n+1} + u_j^n + u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n) \quad (\text{K.1.13b})$$

Diskretiserer (K.1.8) med bruk av (K.1.13) for både  $u$  og  $v$ . Setter  $b = \frac{w_i}{w_y}$ .

Ytre rør:

$$\begin{aligned}& \left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \right) + 1 \right] \cdot u_{j-1}^{n+1} + \\ & \left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \right) + 1 \right] \cdot u_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1} - v_j^{n+1} = \\ & \left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \right) - 1 \right] \cdot u_{j-1}^n + \\ & \left[ \frac{2}{\alpha_y} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \right) - 1 \right] \cdot u_j^n + v_{j-1}^n - v_j^n\end{aligned}\quad (\text{K.1.14a})$$

Indre rør:

$$\begin{aligned}u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} - & \left[ \frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta t} \right) + 1 \right] \cdot v_{j-1}^{n+1} + \\ & \left[ \frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta t} \right) - 1 \right] \cdot v_j^{n+1} = \\ -u_{j-1}^n - u_j^n + & \left[ \frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta t} \right) + 1 \right] \cdot v_{j-1}^n + \\ & \left[ -\frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{b}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta t} \right) + 1 \right] \cdot v_j^n\end{aligned}\quad (\text{K.1.14b})$$

### Start- og randbetingelser

Når vi starter,  $t = 0$ , har vannet i det indre røret en temperatur på  $30^\circ C$  som fra lign. (K.1.12) gir  $v = 0$  for alle x-verdier.

For det ytre røret tenker vi oss at vi har konstant temperatur  $T_y = 30^\circ C$  i hele røret når vi starter, unntatt for  $x = 0$ . Dette betyr at  $u = 0$  i hele intervallet  $0 < x \leq 1$ . (Se lign. (K.1.12)). Setter  $u = u_0$  for  $x = 0$ . Vi kan nå tenke oss flere muligheter til å spesifisere  $u_0$ . Dersom vi setter  $u_0 = 1$ , betyr dette at vi setter  $T_y = 100^\circ C$  for  $x = 0$ . Vi kan også tenke oss at vi øker  $T_y$  for  $x = 0$  trinnvis slik at vi starter med  $30^\circ C$  for  $t = 0$ , øker trinnvis og ender på  $100^\circ C$  etter f.eks. 5 tidsskritt.

La oss se på noen måter å utføre denne trinnvise økningen på.

Starter med  $u_0 = 0$  og øker trinnvis til  $u_0 = 1$  (Fra  $30^\circ C$  til  $100^\circ C$ ) La  $n$  stå for et vilkårlig trinn slik at  $u_0 = 0$  for  $n = 0$  og  $u_0 = 1$  for  $n = n_s$ , der  $n_s$  er antall tidskritt fram til  $u_0 = 1$ .

**Noen formler** Lineær relasjon:

$$u_0 = \frac{n}{n_s}, \quad n = 0, 1, \dots, n_s \quad (\text{K.1.15a})$$

2. grads polynom:

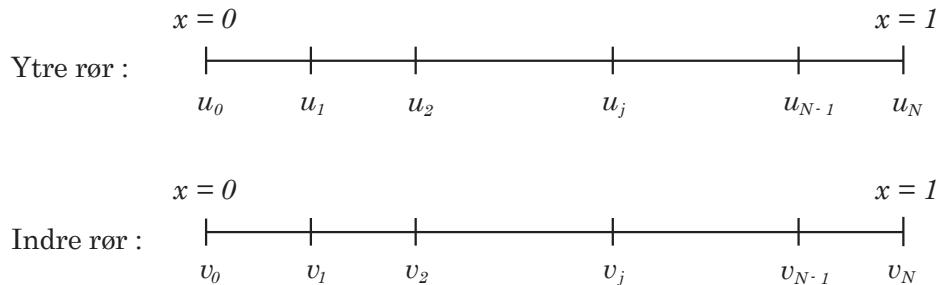
$$u_0 = \frac{n}{n_s} \left( 2 - \frac{n}{n_s} \right), \quad n = 0, 1, \dots, n_s \quad (\text{K.1.15b})$$

3. grads polynom:

$$u_0 = \frac{n}{2n_s} \left[ 3 - \left( \frac{n}{n_s} \right)^2 \right], \quad n = 0, 1, \dots, n_s \quad (\text{K.1.15c})$$

(K.1.15b) og (K.1.15c) oppfyller betingelsen  $\frac{du_0}{dn} = 0$  for  $n = n_s$  for å gi en myk overgang.

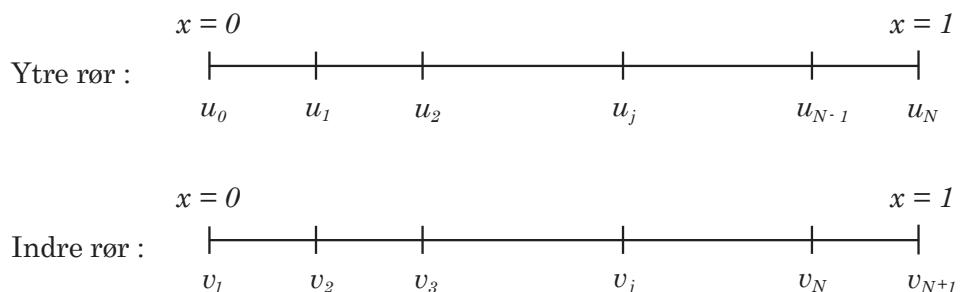
### Indeksering



Figur K.2

Randbetingelser:  $u_0$  er spesifisert,  $v_N = 0$ .

Bruker igjen Douglas-algoritmen fra kapittel 3 som krever at den første ukjente har indeks 1 og den siste indeks  $N$ . Som fig. K.2 ovenfor viser, stemmer dette for det ytre røret, men ikke for det indre der  $v_0$  er den første ukjente. Som i kapittel 3 forandrer vi indeksene som vist nedenfor:



Figur K.3

Får da følgende indeksering:

For  $u$ :  $u_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $u_0$  er spesifisert

For  $v$ :  $v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N + 1$ ,  $v_{N+1} = 0$

Dette betyr at indeksene i lign. (K.1.14) for  $v$ -leddene skal økes med 1 slik at  $v_{j-1} \rightarrow v_j$  og  $v_j \rightarrow v_{j+1}$ . Vi har totalt  $N + 1$  punkt og  $N$  ukjente med  $\Delta x = 1/N$  slik at  $u_j = \Delta x \cdot j$ ,  $j = 1, \dots, N$  og  $v_j = \Delta x \cdot j$ ,  $j = 1, \dots, N$

Vi ser mer detaljert på to tilfeller.

### Tilfelle 1

$$\Delta t = \Delta x \text{ og } w_i = w_y \rightarrow b = 1$$

Lign. K.1.14 blir i dette tilfellet:

Ytre rør:

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1 \right) \cdot u_j^{n+1} - v_j^{n+1} - v_{j+1}^{n+1} = \\ \left( \frac{4}{\alpha_y \Delta x} - 1 \right) \cdot u_{j-1}^n - u_j^n + v_j^n + v_{j+1}^n \end{aligned} \quad (\text{K.1.16a})$$

Indre rør:

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} - \left( \frac{4}{\alpha_i \Delta x} + 1 \right) \cdot v_j^{n+1} - v_{j+1}^{n+1} = \\ - u_{j-1}^n - u_j^n + v_j^n + \left( -\frac{4}{\alpha_i \Delta x} + 1 \right) \cdot v_{j+1}^n \end{aligned} \quad (\text{K.1.16b})$$

Vi gjengir her Douglas-algoritmen fra lign. (3.3.19) i kapittel 3, eventuelt lign. I.0.27 i appendiks I:

$$\begin{aligned} a_j^{(1)} u_{j-1} + a_j^{(2)} v_{j-1} + b_j^{(1)} u_j + b_j^{(2)} v_j + c_j^{(1)} u_{j+1} + c_j^{(2)} v_{j+1} &= d_j^{(1)} \\ a_j^{(3)} u_{j-1} + a_j^{(4)} v_{j-1} + b_j^{(3)} u_j + b_j^{(4)} v_j + c_j^{(3)} u_{j+1} + c_j^{(4)} v_{j+1} &= d_j^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{K.1.17})$$

For  $1 < j \leq N - 1$ . (Merk at  $v_{N+1} = 0$ )

Ved å sammenligne (K.1.16) og (K.1.17), får vi:

$$\begin{aligned} a_j^{(1)} &= 1, \quad a_j^{(2)} = 0, \quad b_j^{(1)} = \frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1, \quad b_j^{(2)} = -1, \\ c_j^{(1)} &= 0, \quad c_j^{(2)} = -1 \end{aligned} \quad (\text{K.1.18a})$$

$$\begin{aligned} a_j^{(3)} &= 1, \quad a_j^{(4)} = 0, \quad b_j^{(3)} = 1, \quad b_j^{(4)} = -\left(\frac{4}{\alpha_i \Delta x} + 1\right), \\ c_j^{(3)} &= 0, \quad c_j^{(4)} = -1 \end{aligned} \quad (\text{K.1.18b})$$

$d_j^{(1)}$  og  $d_j^{(2)}$  er gitt ved høyresidene i lign. (K.1.16)

Skriver ut (K.1.16) for  $j = 1$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1\right) \cdot u_1^{n+1} - v_1^{n+1} - v_2^{n+1} &= \\ \left(\frac{4}{\alpha_y \Delta x} - 1\right) \cdot u_0^n - u_0^{n+1} - u_1^n + v_1^n + v_2^n & \end{aligned} \quad (\text{K.1.19a})$$

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} - \left(\frac{4}{\alpha_i \Delta x} + 1\right) \cdot v_1^{n+1} - v_2^{n+1} &= \\ -(u_0^n + u_0^{n+1}) - u_1^n + v_1^n + \left(1 - \frac{4}{\alpha_i \Delta x}\right) \cdot v_2^n & \end{aligned} \quad (\text{K.1.19b})$$

$d_1^{(1)}$  og  $d_1^{(2)}$  er gitt ved høyresidene.

Legg spesielt merke til at vi har fått  $u_0^{n+1}$  over på høyre side av ligningene. Dette er nødvendig dersom vi ønsker å forandre  $u_0$  trinnvis. Dersom  $u_0$  er konstant, blir  $u_0^n = u_0^{n+1} = u_0 = \text{konstant}$ .

## Tilfelle 2

$$\Delta t = \Delta x \text{ og } w_i = 1.5 \cdot w_y \rightarrow b = 1.5$$

Ligningen for det ytre røret, lign. (K.1.16a), blir uforandret, men tar den med for oversiktens skyld .

Ytre rør:

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1\right) \cdot u_j^{n+1} - v_j^{n+1} - v_{j+1}^{n+1} &= \\ \left(\frac{4}{\alpha_y \Delta x} - 1\right) \cdot u_{j-1}^n - u_j^n + v_j^n + v_{j+1}^n & \end{aligned} \quad (\text{K.1.20a})$$

Indre rør:

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} - \left(\frac{5}{\alpha_i \Delta x} + 1\right) \cdot v_j^{n+1} + \left(\frac{1}{\alpha_i \Delta x} - 1\right) \cdot v_{j+1}^{n+1} &= \\ -u_{j-1}^n - u_j^n + \left(\frac{1}{\alpha_i \Delta x} + 1\right) \cdot v_j^n + \left(-\frac{5}{\alpha_i \Delta x} + 1\right) \cdot v_{j+1}^n & \end{aligned} \quad (\text{K.1.20b})$$

Koeffisientene i Douglas-algoritmen:

$$\begin{aligned} a_j^{(1)} &= 1, \quad a_j^{(2)} = 0, \quad b_j^{(1)} = \frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1, \quad b_j^{(2)} = -1, \\ c_j^{(1)} &= 0, \quad c_j^{(2)} = -1 \end{aligned} \quad (\text{K.1.21a})$$

$$\begin{aligned} a_j^{(3)} &= 1, \quad a_j^{(4)} = 0, \quad b_j^{(3)} = 1, \quad b_j^{(4)} = -\left(\frac{5}{\alpha_i \Delta x} + 1\right), \\ c_j^{(3)} &= 0, \quad c_j^{(4)} = \frac{1}{\alpha_i \Delta x} - 1 \end{aligned} \quad (\text{K.1.21b})$$

Skriver ut for  $j = 1$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{\alpha_y \Delta x} + 1\right) \cdot u_1^{n+1} - v_1^{n+1} - v_2^{n+1} &= \\ \left(\frac{4}{\alpha_y \Delta x} - 1\right) \cdot u_0^n - u_0^{n+1} - u_1^n + v_1^n + v_2^n & \end{aligned} \quad (\text{K.1.22a})$$

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} - \left(\frac{5}{\alpha_i \Delta x} + 1\right) \cdot v_1^{n+1} + \left(\frac{1}{\alpha_i \Delta x} - 1\right) \cdot v_2^{n+1} &= \\ -(u_0^n + u_0^{n+1}) - u_1^n + \left(\frac{1}{\alpha_i \Delta x} + 1\right) \cdot v_1^n + \left(-\frac{5}{\alpha_i \Delta x} + 1\right) \cdot v_2^n & \end{aligned} \quad (\text{K.1.22b})$$

$d_j^{(1)}, d_j^{(2)}, d_1^{(1)}$  og  $d_1^{(2)}$  er gitt ved høyresidene.

Programmet **bitri** og **bitric** løser ligningsystemet i (K.1.17) med bruk av Douglas-algoritmen. I kapittel 3 skrev vi en spesiell variant av **bitric** som ble kalt **bitris**, for å spare plass. (se appendiks I). Både tilfelle 1 og 2 ovenfor er mye enklere enn det generelle tilfellet, slik at også her bruker vi en spesiell variant som vi kaller **bitris2** som vist nedenfor. Vi ser at det er bare høyresidene i tilfellet 1 og 2 som er nødvendig å legge inn som vektorer, resten av koeffisientene er konstanter.

```
function [u,v] = bitris2(d1,d2)
global b1 b4 c4;
n = length(d1);
u = zeros(size(d1)); v = u;
ga2 = u; ga4 = u; da1 = u; da2 = u;
ba2 = u; ba4 = u; g1 = u; g2 = u;
ba2(1) = -1; ba4(1) = b4;
da1(1) = d1(1); da2(1) = d2(1);
%
my = 1.0/(b1*b4 + 1);
ga2(1) = -(b4 - c4)*my;
ga4(1) = (b1*c4 + 1)*my;
g1(1) = (b4*da1(1) + da2(1))*my;
g2(1) = (b1*da2(1) - da1(1))*my;
```

```
%      ===== Elimination ====
for k = 2:n
    ba2(k) = -1 - ga2(k-1);
    ba4(k) = b4 - ga2(k-1);
    da1(k) = d1(k) - g1(k-1);
    da2(k) = d2(k) - g1(k-1);
    my = 1.0/(b1*b4 - ba2(k));
    ga2(k) = -(ba4(k) + ba2(k)*c4)*my;
    ga4(k) = (b1*c4 + 1)*my;
    g1(k) = (ba4(k)*da1(k) - ba2(k)*da2(k))*my;
    g2(k) = (b1*da2(k) - da1(k))*my;
end
%      ===== Backsubstitution ====
u(n) = g1(n); v(n) = g2(n);
for k = n-1:-1:1
    u(k) = g1(k) - ga2(k)*v(k+1);
    v(k) = g2(k) - ga4(k)*v(k+1);
end
```

Wendroffs implisitte skjema er et spesialtilfelle av Preissmanns skjema som er mye brukt for beregning av strømning i åpne kanaler og elver. I dette skjemaet brukes en nettfaktor  $\theta$  akkurat som i  $\theta$ -skjemaet for parabolske ligninger, der  $\theta = 0$  er et eksplisitt skjema, mens  $\theta = 1$  er et fullstendig implisitt skjema.

### Diskretiseringer med nettfaktor

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\theta \cdot (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{\Delta x} + \frac{(1 - \theta) \cdot (u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x}$$

$$u \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\theta}{2}(u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + \frac{1}{2}(1 - \theta)(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Vi ser at for  $\theta = \frac{1}{2}$  får vi Wendroffs skjema. For ikke-lineære ligninger blir skjemaet regnet å være stabilt for  $0.55 \leq \theta \leq 1$ . I praksis velges  $\theta \in [0.6, 0.7]$ . Ved skarpe fronter får vi oscillasjoner bak frontene for de laveste verdiene av  $\theta$ . Disse kan elimineres ved å velge  $\theta$  nær 1, men da blir frontene litt utsmurt. Preissmann brukte opprinnelig nettfaktor også for tiden  $t$ .

I Rosenberg [26], kapittel 6, er Wendroffs skjema brukt på et gassdynamisk problem. Også her får vi bedre resultat ved å øke  $\theta$  til 0.6 – 0.7



---

## Bibliografi

- [1] Anderson D. A. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, 1997.
- [2] Harvey J. K Bearman P.W. *Golf Ball Aerodynamics*, volume 27. Aeronautical Quarterly, 1976.
- [3] Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Elsevier, 2. edition, 2007.
- [4] Bradshaw P. Cebeci T. *Momentum Transfer in Boundary Layers*. Hemisphere Publishing Corporation, 1977.
- [5] Kincaid D. Cheney W. *Numerical Mathematics and Computing*. Brooks/Cole Publishing Company, 4. edition, 1999.
- [6] Smith G. D. *Numerical Solution of Partial Diff. Equations : Finite Difference Methods*. Oxford, 3. edition, 1985.
- [7] Forsythe G. E. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice-Hall, 1977.
- [8] Forsythe G. E. et al. *Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems*. Prentice-Hall, 1977.
- [9] Press W. H. et al. *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*, volume 1 & 2. Cambridge Univ. Press, 2. edition, 1992.
- [10] Liu C. Evett J. B. *Fluid Mechanics and Hydraulics*. McGraw-Hill, 1989.
- [11] Shampine L. F. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Chapman & Hall, 1994.
- [12] Erwin Fehlberg. Runge-kutta type formulas of high-order accuracy and their application to the numerical integration of the restricted problem of three bodies. *Actes- proceedings*, september 1963.
- [13] Moler Cleve B. Forsythe George E. *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*. Prentice-Hall, 1967.

- [14] Schlichting H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 7. edition, 1978.
- [15] Young David M. Hageman Louis A. *Applied Iterative Methods*. Academic Press, 1981.
- [16] Wanner G. Hairer E., Norsett S.P. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, 1987,1993.
- [17] Keller H. B. Isaacson E. *Analysis of Numerical Methods*. Dover, 1994.
- [18] Fletcher C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, volume 1 & 2. Springer Verlag, 2. edition, 1991.
- [19] Briggs William L. *A Multigrid Tutorial*. SIAM, 2. edition, 2000.
- [20] Evans H. L. *Laminar Boundary-Layer Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [21] White F. M. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, 2. edition, 1991.
- [22] White F. M. *Fluid Mechanics*. WCB/McGraw-Hill, 4. edition, 1999.
- [23] Robert R. Newton. *Periodic orbits of a planetoid passing close to two gravitating masses*, volume 3. Smithsonian Institution, 1959.
- [24] Nakamura S. *Applied Numerical Methods with Software*. Prentice-Hall, 1991.
- [25] Kelley C. T. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. SIAM, 1995.
- [26] Rosenberg D. U. *Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. American Elsevier Publishing Company, 1969.
- [27] Patanker S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, 1980.
- [28] Saad Yousef. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2. edition, 2003.
- [29] Hoffman J. D. Zucrow M. J. *Gas Dynamics*, volume I & II. John Wiley & Sons, 1976-77.