KTH Matematik
Examinator: Maurice Duits

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	programkod

Kontrollskrivning 2A till Diskret Matematik SF1610, för CINTE, vt2016

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd KS nr n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna; använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) $\binom{10}{k} < \binom{10}{k+1}$ för varje $k = 0, 1, \ldots, 9$.		X
b) Om 100 personer deltar i ett lopp så finns det 979 321 möjliga slutresultat för 1:a, 2:a och 3:e plats.		X
c) $\binom{500}{100} + \binom{500}{101} = \binom{501}{101}$.	X	
d) För Stirlingtalen $S(n,k)$ gäller rekursionen $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ för $2 \leq k < n$.	X	
e) Antalet ord av längd 5 som kan bildas med symbolerna `A`, `B`, `C`, `D` är 5^4.		X
f) Antalet delmängder till $\{1, 2, \ldots, 17\}$ av storlek 4 är samma som antalet delmängder av storlek 13.	X	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) I en grupp med 65 studenter tycker

- 40 om pizza,
- 30 om nudlar, och
- 20 om curry.

Bland dessa tycker

- 10 om både pizza och nudlar,
- 10 om både pizza och curry, och
- 10 om både nudlar och curry.

Hur många av studenterna tycker om samtliga pizza, nudlar och curry?
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 5.

b) (1p) Ange Stirlingtalet $S(5, 3)$.
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 25.

c) (1p) En restaurang har 3 val av förrätt, 4 val av huvudrätt, och 3 val av efterrätt. Vad är det största antalet människor som kan besöka restaurangen utan att några två av dem äter samma kombination av rätter?
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 36.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Hur många av orden som kan bildas genom att ordna om bokstäverna i ordet `SLUTSATS` innehåller inte `SATS` som delord? (T.ex. är `ALSSSTTU` ett sådant ord, men `STLSATSU` är förbjudet för det innehåller `SATS`.)
OBS. Lösningen ska motiveras, och svaret ska anges som produkter och/eller summor av heltal.

Lösning: Antalet sätt att ordna n objekt varav man har k_1 av sort 1, k_2 av sort 2, ..., k_m av sort m, där $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, är

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \,\cdots\, k_m!}.$$

I ordet `SLUTSATS` har vi en av varje bokstav förutom `T` och `S`, som det finns 2 respektive 3 av. Alltså finns det

$$\binom{8}{3, 2, 1, 1, 1} = \frac{8!}{3!\, 2!} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

sätt att ordna om bokstäverna i `SLUTSATS`.

Utav dessa så finns det 5! som innehåller `SATS` som delord, för detta är antalet sätt att ordna de fem symbolerna `S`, `L`, `U`, `T`, `SATS`. Alltså får vi

Svar: $4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3360 - 120 = 3240.$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Sju identiska röda ballonger och 11 identiska blåa ballonger ska fördelas bland barnen Agnes, Bertil och Cecilia så att varje barn får åtminstone en ballong av varje färg. Hur många olika fördelningar är möjliga?

OBS. Lösningen ska motiveras, och svaret ska anges som produkter och/eller summor av heltal eller standarduttryck definierade i kursen.

Lösning: Vi börjar med att ge en röd och en blå ballong till varje barn, så att varje barn har en ballong av varje färg. (Detta kan ske på endast ett sätt.) Sedan har vi 4 röda och 8 blåa ballonger kvar att fördela. Enligt känd formel som härleds från metoden med 'prickar och pinnar' är antalet sätt att fördela de röda

$$\binom{4+2}{2},$$

och för varje av dessa sätt finns det

$$\binom{8+2}{2}$$

att fördela de blåa. Enligt multiplikationsprincipen är det totala antalet sätt då

$$\text{Svar:} \quad \binom{6}{2} \cdot \binom{10}{2} = 15 \cdot 45 = 675.$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm antalet sätt att dela ut 5 olika böcker bland barnen Agnes, Bertil och Cecilia så att varje barn får åtminstone en bok.
OBS. Lösningen ska motiveras, och svaret ska anges som produkter och/eller summor av heltal eller standarduttryck definierade i kursen.

Lösning: Enligt definitionen av Stirlingtalen av den andra ordningen finns det $S(5,3)$ sätt att dela upp de 5 böckerna i 3 icke-tomma högar. För varje av dessa sätt kan vi sedan ordna de tre högarna på 3! sätt bland barnen. Enligt multiplikationsprincipen blir då det totala antalet sätt

$$\text{Svar:} \quad 3! \cdot S(5,3) = 6 \cdot 25 = 150.$$