KTH Matematik
Examinator: Petter Brändén
Kursansvarig: Olof Sisask

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	programkod

Kontrollskrivning 5A till Diskret Matematik SF1610, för CINTE, vt2018

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd KS nr n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna; använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Det finns en icke-planär graf med 4 noder.		X
b)	Den kompletta grafen K_{10} har en Hamiltoncykel.	X	
c)	Den kompletta grafen K_9 har en Eulerkrets.	X	
d)	Det finns en graf med 5 noder vars grader är 3, 3, 4, 1 och 2.		X
e)	Varje bipartit graf är planär.		X
f)	Varje träd med 121 kanter har 120 noder.		X

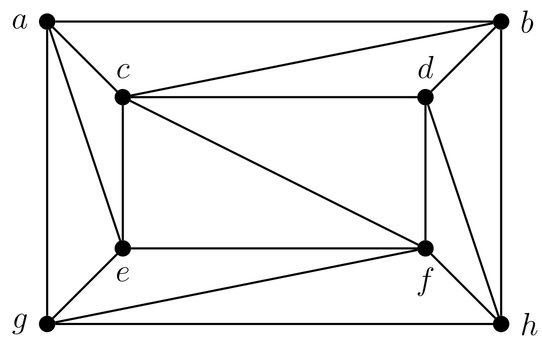
poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) En graf har 10 kanter och 6 noder. Graderna av fem av noderna är 2, 3, 3, 3, 4. Vad är den återstående nodens grad?
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 5

b) (1p) Skriv ned en Eulerväg för följande graf. (Skriv svaret som en sekvens av noder, eller rita vägen **extremt tydligt** i bilden.)



(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: t.ex. $c - a - b - h - g - a - e - g - f - h - d - b - c - e - f - c - d - f$

c) (1p) Vad är det högsta antalet kanter en sammanhängande planär graf med 6 noder kan ha?
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 12

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt $G = (V, E)$ vara en graf där nodmängden V består av alla binära ord av längd 4, och

$$E = \{\{x, y\} : \text{avståndet mellan } x \text{ och } y \text{ är } 1\},$$

dvs där två ord har en kant mellan sig om och endast om de skiljer sig i precis 1 bit. T.ex. är `0000` och `0100` grannar, men ingen av dessa är grannar med `1111`.

(1) Hur många noder har G?
(2) Hur många kanter har G? (Hint: använd handskakningslemmat.)

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning:

(1) Det finns 2^4 binära ord av längd 4; alltså har G 16 noder.
(2) Varje nod har precis 4 grannar: 1 granne för varje bit som kan ändras i ordet. Alltså uppfyller antalet kanter e att

$$2e = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} 4 = 16 \cdot 4 = 64$$

enligt handskakningslemmat.
Alltså är antalet kanter $e = 32$.

	Namn	poäng uppg.4

4) (3p) En viss sammanhängande planär graf G har 16 kanter och en plan ritning med 9 områden, ytterområdet medräknat. Visa att det måste finnas en 3-cykel i grafen, eller med andra ord ett område i ritningen som är inhängnat av precis 3 kanter.
OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning:

Om en sammanhängande planär graf inte innehåller några 3-cykler, då uppfyller den enligt känd sats olikheten

$$e \leq 2v - 4,$$

där e är antalet kanter och v är antalet noder. För denna graf är $e = 16$, och v kan räknas ut via Eulers formel $v - e + r = 2$ som håller för sammanhängande planära grafer. I vårt fall ger detta

$$v = 2 + 16 - 9 = 9.$$

Med $e = 16$ och $v = 9$ uppfylls inte olikheten ovan, och därför kan inte antagandet att G inte har några 3-cykler uppfyllas. Med andra ord måste G innehålla minst en 3-cykel.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Den kompletta grafen K_8 på 8 noder har ingen Eulerkrets. Bestäm det minsta antalet kanter som måste tas bort från denna graf för att resultatet skall ha en Eulerkrets, **och ge fullständing motivering för ditt svar**.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning:

Enligt känd sats så har en graf en Eulerkrets omm varje nod har jämn grad. I K_8 har varje nod grad 7, då varje av de 8 noderna är grannar med samtliga andra 7 noder. Alltså måste varje nods grad ändras för att det ska finnas en Eulerkrets. Varje borttagning av en kant påverkar graden hos precis 2 noder, så för att ändra på graden hos alla 8 noder så måste åtminstone 4 kanter tas bort.

Vidare räcker det att ta bort 4 kanter från grafen för att varje nod ska ha jämn grad i resultatet: om vi ger noderna namnen $v_1, v_2, \ldots, v_8$ så kan vi ta bort de 4 kanterna

$$\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}.$$

Varje nod har efter detta grad 6 — ett jämnt tal — och alltså finns det en Eulerkrets.

Svar: det minsta antal kanter som måste tas bort är 4.