

**Problem till övning nr 3 den 29 mars, SF1610 Diskret matematik CINTE, vt2018**

1. (E) Visa med ett induktionsbevis att

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

för varje naturligt tal  $n \geq 1$ .

2. (D) Visa genom induktion att  $n^3 - n$  är delbart med 6 för varje positivt heltal  $n$ . (Kan du också visa detta genom modulär aritmetik?)
3. (C) Den oändliga talföljden  $a_0, a_1, \dots$  definieras rekursivt genom

$$a_n := 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad \text{för } n = 2, 3, 4, \dots$$

samt  $a_0 := 2$  och  $a_1 := 7$ . Visa att  $a_n = 3^n + 4^n$  för  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

4. (E) Bestäm antalet element i mängden  $\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2\}$ .

5. (E) Betrakta mängderna

$$A = \{1, 2, 4, 8, 9, 11, 17\}, \quad B = \{4, 5, 6, 8, 9\}, \quad C = \{2, 4, 7, 9\}.$$

Bestäm

$$(A \cup B) \setminus (B \cap C)^\sim,$$

där  $X^\sim$  betecknar komplementet till mängden  $X$ .

6. (E) Mängden  $\{\emptyset, \{0\}, \{0, \emptyset\}\}$  har tre element och därmed åtta olika delmängder. Bestäm samtliga dessa delmängder.

7. (E) Låt

$$A = \{4, 5, 6\}, \quad B = \{5, 6, 9\}.$$

Skriv ned alla element i mängden  $A \times B$ . Hur många element finns det i  $A \times B$ ?

8. (D) Bestäm om följande funktioner är injektiva, surjektiva eller t.o.m. bijektiva.

(a)  $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ,  $f(X) = |X|$  för  $X \subseteq A$ , där  $A$  är en mängd med  $n$  element.

(b)  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $g(n, m) = (n + 2m, n + m)$ .

9. (C) Låt  $f$  vara en funktion från  $A$  till  $B$  och låt  $g$  vara en funktion från  $B$  till  $C$ . Visa att om både  $f$  och  $g$  är bijektiva funktioner så är också sammansättningen  $g \circ f$  en bijektiv funktion från  $A$  till  $C$ .

10. (C) Visa att unionen av två uppräknligt oändliga mängder är en uppräknligt oändlig mängd.

11. (B) Antag att mängderna  $A_1, A_2, A_3, \dots$  bildar en oändlig samling uppräknligt oändliga mängder. Är unionen av sådana mängder en uppräknligt oändlig mängd?

**Svar**

1. –
2. –
3. – (Glöm inte att basfallet behöver täcka två termer!)
4. 2.
5.  $\{4, 9\}$ .
6.  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{0, \emptyset\}\}, \{\emptyset, \{0, \emptyset\}\}, \{\{0\}, \{0, \emptyset\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, \emptyset\}\}$ .
7.  $A \times B = \{(4, 5), (4, 6), (4, 9), (5, 5), (5, 6), (5, 9), (6, 5), (6, 6), (6, 9)\}$ .  
9 element.
8. (a) För  $n \geq 2$  är  $f$  är surjektiv men inte injektiv. För  $n = 0, 1$  så är den bijektiv.  
(b)  $g$  är injektiv men inte surjektiv.
9. – (Använd definitionerna!)
10. – (Prova att varva elementen — ett från den första mängden, ett från den andra mängden, ett från den första, ...)
11. Ja. Prova att skriva elementen i  $A_1, A_2, A_3, \dots$  i en (oändlig) rektangel.