KTH Matematik
Examinator: Maurice Duits

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	programkod

Kontrollskrivning 5A till Diskret Matematik SF1610, för CINTE, vt2016

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd KS nr n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna; använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Antalet kanter i den kompletta grafen K_n är $\binom{n+1}{2}$ för alla $n \geq 2$.		X
b)	Antalet kanter besökta av en Eulerkrets är alltid ett jämnt tal.		X
c)	Varje sammanhängande graf med åtminstone två noder har ett spännande träd.	X	
d)	En graf med 1000 noder och 1234 kanter måste ha minst en cykel.	X	
e)	Varje sammanhängande bipartit graf har en Hamiltoncykel.		X
f)	I varje sammanhängande planär graf med åtminstone 2 noder så är antalet kanter minst lika med antalet områden i en plan ritning av grafen, ytterområdet medräknat.	X	

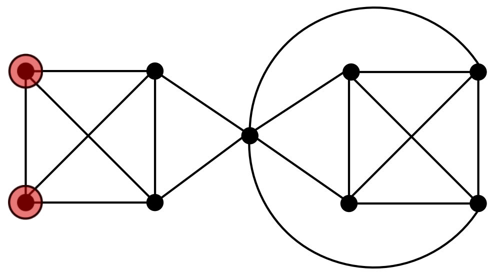
poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) En graf har 6 noder med grader 1, 1, 2, 2, 3 respektive 5. Bestäm antalet kanter i grafen.
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 7.

b) (1p) Om följande graf har en Eulerväg, markera vid vilka noder Eulervägen måste börja eller sluta. Om den inte har det, skriv att den inte har det.



(Det räcker att ange rätt svar.)

c) (1p) Rita en graf med 8 noder som har en Hamiltonstig men ingen Hamiltoncykel.
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar:

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) En graf G består av 12 träd som inte delar någon nod, och grafen har totalt 50 kanter. Bestäm antalet noder i G.

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning: I varje träd med v noder och e kanter gäller sambandet $v = e + 1$. Låt oss säga att de 12 träden har $v_1, \ldots, v_{11}$ respektive v_{12} noder, och $e_1, \ldots, e_{11}$ respektive e_{12} kanter. Då har vi att det totala antalet noder är

$$v_1 + \cdots + v_{12} = e_1 + \cdots + e_{12} + 12 = 50 + 12 = 62.$$

Svar: 62.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) En sammanhängande planär graf G har 32 kanter, och varje nod i grafen har grad (valens) 4. Bestäm antalet områden i en plan ritning av grafen. **OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.**

Lösning: Enligt Eulers formel gäller

$$v + r = e + 2$$

där v är antalet noder i grafen, e är antalet kanter i grafen och r är antalet områden i en plan ritning av grafen. Vi vet att $e = 32$ och vi vill ta reda på r, så vi hittar först v, antalet noder. Enligt handskakningslemmat vet vi att

$$2 \cdot 32 = 2e = \sum_{x \in V} d(x) = 4v,$$

där V är grafens nodmängd. Alltså har grafen $v = 16$ noder. Enligt Eulers formel får vi då:

Svar: $r = 18$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Den kompletta bipartita grafen $K_{9,9}$ har ingen Eulerkrets. Bestäm det minsta antalet kanter som måste tas bort från denna för att den graf som därvid bildas ska ha en Eulerkrets.
OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning: En graf har en Eulerkrets om och endast om varje nod har jämn grad. I $K_{9,9}$ har varenda nod udda grad, nämligen 9, så vi måste ta bort några kanter.

Det räcker att ta bort 9 kanter för att varje nod ska få jämn grad: låt $V = U \cup W$ vara bipartitionen av grafens nodmängd V, så att $|U| = |W| = 9$ och alla kanter går mellan U och W. Låt $u_1, \ldots, u_9$ vara noderna i U och $w_1, \ldots, w_9$ noderna i W. Vi tar bort kanterna $u_i - w_i$ för varje $i = 1, \ldots, 9$. Då har vi tagit bort 9 kanter, och varje nod i den nya grafen har grad 8 — alltså finns en Eulerkrets.

Går det att ta bort färre kanter och ändå få en Eulersk graf? Nej: när vi tar bort en kant så kan vi påverka graden av högst en nod i varje del av bipartitionen — alltså måste vi ta bort åtminstone 9 kanter från grafen för att varje nod i en av delarna ska få jämn grad.

Eftersom vi har visat både att det räcker att ta bort 9 kanter för att få en Eulersk graf, och att man alltid måste ta bort åtminstone så många kanter, så är det minsta antalet:

Svar: 9.