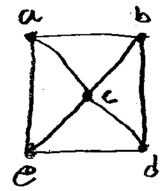
Diskret matematik 2018-05-08 #18

<u>Sats</u> (Eulerväg)

En graf G har en Eulerväg omm den har högst 2 noder med udda grad och den är sammanhängande.

$d(a)=3$
$d(b)=3$
$d(c)=4$
$d(d)=3$
$d(e)=3$



<u>Varför ingen Eulerväg?</u>/ Varför går det inte att rita utan att lyfta pennan eller rita längs samma sträcka?

Låt oss säga att vi inte börjar vid noden a.

Någon gång måste vi rita en linje som går in till a.
→ använder en kant hos a.
Sedan måste vi lämna a
→ använder en kant till hos a.
Eftersom vi har en kant kvar måste vi återvända till a längs dess sista kant.
→ använder en kant till.
Då är vi fast vid a: det finns inga fler kanter att fortsätta längs ut därifrån.

SÅ: om vi inte börjar vid a så måste vi sluta vid a.
samma sak gäller för b, d & e.

Men vi kan inte börja eller sluta vid ≤ 2 noder, och detta säger att vi måste börja eller sluta vid 4 → omöjligt

Samma resonemang hade gällt även om
$d(a) = 5, 7, 9, 11, \ldots$
– om vi inte började vid a måste vi sluta där.

Så vid varje nod med udda grad måste vi börja eller sluta.

<u>Sats</u> En sammanhängande graf kan endast ha en Eulerväg om den har högst 2 noder med udda grad.

<u>Bevis</u> Som ovan: om vi inte börjar vid en udda nod måste vi sluta där. Kan endast börja eller sluta vid max 2 noder. ∎

$\boxed{\text{OBS}}$ Varje graf har ett jämnt antal noder med udda grad för $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$ är jämnt

$$\sum_{\substack{v\in V\\ d(v)\text{ jämn}}} d(v) + \sum_{\substack{v\in V\\ d(v)\text{ udda}}} d(v)$$

Så $\sum_{\substack{v\in V\\ d(v)\text{ udda}}}$ = jämnt. Antalet termer måste vara udda

Sats Om en graf är sammanhängande och högst 2 noder har udda grad finns en Eulerväg i grafen.

redan bevisat { Om grafen har 2 noder med udda grad måste Eulervägen börja & sluta vid dessa noder.

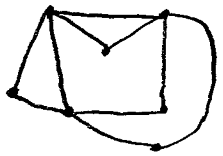
Eulerkrets: En sluten Eulerväg.

Sats (Eulerkrets)

En graf har en Eulerkrets omm den är S.H och alla noder har jämn grad. Vidare, man kan börja vid vilken nod som helst.

En graf som har en Eulerkrets kallas "Eulersk"

Ex Har grafen



en Eulerkrets?

Metod (Hitta Eulerkrets)

Given en graf G där alla noder har jämn grad kan vi hitta en Eulerkrets genom:

1) Bestäm godtyckligt en startnod v för Eulerkretsen.
2) Börja gå längs en väg i grafen från v. Till slut kommer vägen återvända till v, för alla andra noder har jämn grad (så vi kan aldrig köra fast vid dem).
3) Om denna väg använder alla kanter → klar, för vi har en Eulerkrets.
   Annars: ta en nod längs vägen som har oanvända kanter, och skapa en ny väg som börjar och slutar vid denna. "Splica" in denna väg i den ursprungliga.
4) Repetera tills alla kanter har använts.

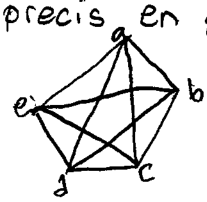
Detta bevisar att en graf är Eulersk om varje nod har jämn grad. Varför endast? Använd tidigare satser:

För att det ska finnas en Eulerkrets måste en Eulerväg.
För att en Eulerväg ska finnas kan högst 2 noder ha udda grad.
Om 2 noder har udda grad så skulle Eulervägen vara tvungen att börja och sluta där → ingen Eulerkrets. ■

Defn En Hamiltonstig är en stig som besöker varje nod i grafen precis en gång.

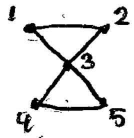
En Hamiltoncykel är en cykel som besöker varje nod i grafen precis en gång, förutom att sista noden = första noden.

T.ex.



Då är a-b-c-d-e en Hamiltonstig och a-b-c-d-e-a är en Hamiltoncykel

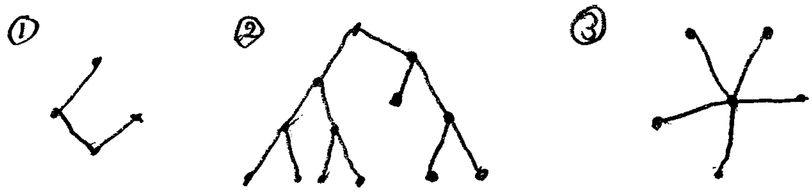
En graf med Hamiltoncykel kallas Hamiltonsk.



Har en Hamiltonstig, 1-2-3-4-5, men ingen Hamiltoncykel,

för oavsett om vi börjar på den övre eller undre sidan, eller vid 3, måste vi passera nod 3 ≥ 2 gånger.

Def^{n} Ett träd är en sammanhängande graf utan cykler/acyklisk. En nod av grad 1 i ett träd kallas ett löv.



Sats För ett träd med v noder och e kanter gäller

$v = e + 1.$