Diskret matematik 2018-05-14 #19

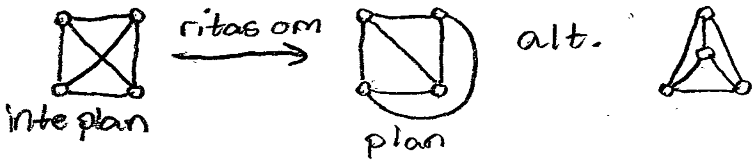
En kvadrapus (fyrfisk) är en bläckfisk med fyra "armar". Fem kvadrapus ligger på havsbotten och vill skaka händer med varandra samtidigt. Är det möjligt att göra denna hälsning utan att "armarna" korsas? Alltså: Är K_5 planär? Svar: Nej! Beviset kommer.
Anm. kvadrapus (latin) = tetrapos (grekiska)

Planära grafer

<u>Definition</u> En <u>plan</u> graf är en graf som ritas utan korsande kanter.
Anm. en plan graf = en plan ritning av en graf

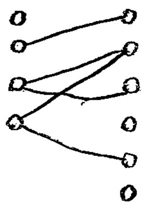
<u>Definition</u> En <u>planär</u> graf är en graf som kan ritas om så att inga kanter korsar varandra. ▨

Ex. Den kompletta grafen K_4 är <u>planär</u>.



<u>Nytt begrepp</u> <u>Bipartit</u> graf ($\underbrace{\text{Bi}}_{\text{två}}\underbrace{\text{partit}}_{\text{parter}}$)

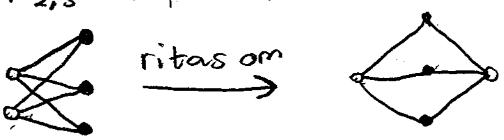
Ex.



<u>Definition</u> En graf $G=(V,E)$ sägs vara bipartit om nodmängden V kan skrivas $V = X \cup Y$ s.a. $X \cap Y = \emptyset$.
Varje kant i grafen går mellan en nod i X och en nod i Y. ▨

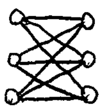
<u>Definition</u> En komplett bipartit graf $K_{m,n}$ är en bipartit graf där $|X|=m$, $|Y|=n$ och det går en kant mellan varje par av noder (en i X och en i Y). ▨

Ex. $K_{2,3}$ är planär



Anm. $K_{m,n}$ har $m+n$ noder och $m \cdot n$ kanter.

Ex. Är $K_{3,3}$ planär?



Svar Nej! Beviset kommer

Trevlig egenskap

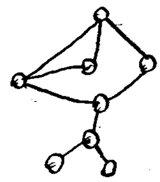
Eulers polyederformel

<u>Sats</u> Låt G vara en sammanhängande, plan graf som har

v noder (eng. vertices)
e kanter (eng. edges)
r $\underbrace{\text{ytor}}_{=\text{områden}}$ (eng. regions)

Då gäller att $v - e + r = 2$ alt. $v + r = e + 2$ ▨

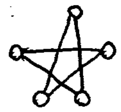
Ex.



$v = 8$
$e = 9$
$\underbrace{r = 3}_{}$
inklusive den yttre ytan

$v - e + r = 8 - 9 + 3 = 2$ najs!

Ex.



$v = 5$
$e = 5$
$r = 7$

$v - e + r = 5 - 5 + 7 = 7 \neq 2$
ty grafen/ritningen är <u>inte</u> plan ☹

<u>Ett specialfall</u>
Om G är ett träd, dvs. G är sammanhängande, plan/planär och $r = 1$ gäller

$v - e + r = 2 \Rightarrow v - e + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{v = e + 1}$ ▨

<u>Bevis</u> $v + r = e + 2$ (*)

med induktion över antalet kanter e

① Basfallet: $e = 1$

har $v = 2$ och $r = 1$

Då fås $\left.\begin{array}{l} v + r = 2 + 1 = 3 \\ e + 2 = 1 + 2 = 3 \end{array}\right]$ ok.

② Antag att (*) gäller för en graf G med e kanter.
Vill visa att (*) gäller för G^+ med $e + 1$ kanter.
Hur lägger vi till en kant? Exakt 2 sätt.

Sätt 1 En kant mellan en befintlig och en ny nod.
Då ökar både e och v med 1,
$\Rightarrow$ likheten $v + r = e + 2$ bevaras,
ty $(v + 1) + r = (e + 1) + 2$ ok

Sätt 2 En kant mellan två befintliga noder.
Då ökar både e och r med 1
$\Rightarrow$ $v + r = e + 2$ bevaras,
ty $v + (r + 1) = (e + 1) + 2$

Slutsats Klart enligt induktionsprincipen ▨

Planäritetstest

Kan vi med en formel avgöra om en graf <u>kan</u> vara planär ? Nej! Icke-planär, ja!

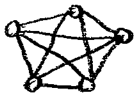
Sats #1 Antag grafen G, som är sammanhängande och planär, har minst 2 kanter.

Då gäller: $e \leq 3v - 6$ $\blacksquare$

Logisk tolkning
Om $e \leq 3v-6$ inte gäller, dvs. om $e > 3v-6$, är G garanterat icke-planär.

Omvändningen gäller inte, dvs. om $e \leq 3v-6$ uppfylls kan G fortfarande vara icke-planär.

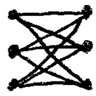
Ex. K_5 är inte planär



$v=5$
$e=10$

Då: $e > \overbrace{3v-6}^{=9}$

Ex. $K_{3,3}$ (klassisk graf)



$v=6$ är <u>inte</u> planär
$e=9$ trots att $e \leq \underbrace{3v-6}_{12}$

<u>Sats #2</u> Om G är sammanhängande, planär och saknar 3-cykler

C_3

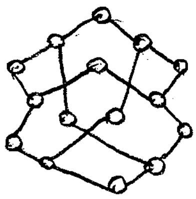
så gäller:

$e \leq 2v - 4$ $\blacksquare$

<u>Följdsats</u> $K_{3,3}$ är inte planär, ty $e > 2v-4$, dvs. $9 > 2 \cdot 6 - 4$ $\blacksquare$
(Notera att $K_{3,3}$ saknar 3-cykler)

<u>Obs!</u> Omvändningen gäller ej, dvs. det finns grafer G utan 3-cykler som uppfyller $e \leq 2v-4$ men som är <u>icke-planära</u>.

* Ex. *



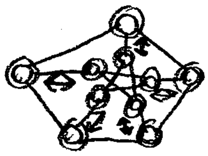
är inte planär

har $\begin{cases} v=16 \\ e=18 \end{cases}$

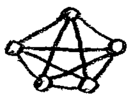
och uppfyller $e \leq \underbrace{2v-4}_{=26}$

<u>Bredvidläsning</u> Kuratowskis och Wagners sats

Ex. (kändis) Petersens graf är <u>inte</u> planär



→



KS 2014 #4 (3p)

En bipartit graf G har $V = X \cup Y$, med $|X| = 91$. Varje nod i X har valens 5 och varje nod i Y har valens 7. Sök $|Y|$.

Lösning ① G har totalt $5 \cdot 91$ kanter.
② G har totalt $7 \cdot |Y|$ kanter

$$\Rightarrow 7|Y| = 5 \cdot 91 \Rightarrow |Y| = \frac{5 \cdot 91}{7} = \frac{455}{7} = \underline{\underline{65}}$$