Diskret matematik 2018-03-29 #6

<u>Idag</u> • The foundations: mängdlära
funktioner
kardinalitet

<u>Mängdlära</u>

<u>Ex.</u> $A = \{1, 11, 12, 2\}$ $[= \{11, 12, 1, 1, 1, 12, 1, 2\}]$

$B = \{\sin, \cos\}$ $C = \{n : n$ är ett heltal och $n \equiv 0 \pmod 2\}$
$= \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$

element/medlem i C

$2 \in C$ "2 ligger i/är medlem i C"

$3 \notin C$ "3 ligger <u>inte</u> i C"

<u>Standardmängder</u>

$\emptyset$ = tomma mängden (inga element)
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ "naturliga talen"
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ $\mathbb{R}, \mathbb{C} \ldots$

<u>Operationer på mängder</u>

- $A \cup B = \{x : x \in A$ <u>eller</u> $x \in B\}$

"union"

- $A \cap B = \{x : x \in A$ <u>och</u> $x \in B\}$

"snitt"

- $A \setminus B = \{x : x \in A$ och $x \notin B\}$
$= \{x \in A : x \notin B\}$

"A minus/utan B"

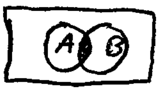
- Om $A \subseteq U$, $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$ = $A^\sim$

"universum/alla objekt"

"A:s komplement"

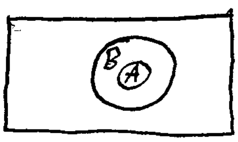
Def^n

- Om $A \cap B = \emptyset$ kallas A & B disjunkta
- Om $A \cap B \neq \emptyset$ sägs det att A & B stör varandra



- $A \subseteq B$ betyder att alla element i A också ligger i B.

"A delmängd till B" "För alla $x \in A$ gäller $x \in B$"



$\underline{\text{Ex}}$ $\{0,1,2\} \not\subseteq \{0,10,20\}$  $B \subseteq A$

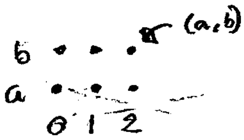
inte delmängd till

$\{0,1,2\} \cap \{0,10,20\} = \{0\}$
$\{0,1,2\} \setminus \{0,10,20\} = \{1,2\}$
$\{0,1,2\} \cup \{0,10,20\} = \{0,1,2,10,20\}$

Om $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2 | x\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} : 3 | x\}$
då är $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} : 6 | x\}$

"produkt"
Def^{n} $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$
= mängden av alla ordnade par $\quad (5,\pi) \neq (\pi, 5)$

$\{0,1,2\} \times \{a,b\} = \{(0,a), (0,b), (1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$



$(a,1,1) \times \{a,b\} = \{(a,a), (a,b), (1,a), (1,b)\}$
"$\{a,1\}$ $\quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\underline{\text{Def}^{n}}$ $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ – alla delmängder till A
"potensmängd"

Om $A = \{a,b,c\}$ då är

$\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
$|A| = 3 \Rightarrow |\mathbb{P}(A)| = 8 \qquad |A| = n \Rightarrow |\mathbb{P}(A)| = ??$

<u>Funktioner</u>

<u>Def^{n}</u> Låt A & B vara mängder. En funktion $f : A \to B$ från A till B är en "regel" som till varje $x \in A$ specificerar ett (och endast ett) element i B.
Detta element betecknas $f(x)$. ("f av x")

A är f:s definitionsmängd. B är f:s målmängd.

<u>Ex</u> Låt $A = B = \mathbb{Z}$

Då är $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som ges av

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 10 \\ f(1) = 10 \\ f(x) = x + 2 \text{ för } x \notin \{0,1\} \end{array}\right\} \text{ en funktion}$$

Obs! Kan inte definiera $f(0) = 10$
$f(0) = 5$

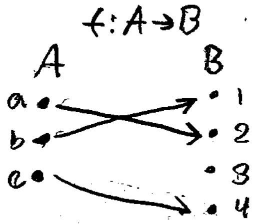
Def^n (Viktiga sorters funktioner)

$f: A \to B$ kallas

i) injektiv om "$f(x) = f(t)$ innebär att $x = t$"
Det finns inte två olika inputs som ger samma output.

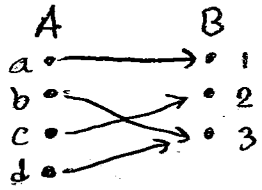
ii) surjektiv om det för alla $y \in B$ finns något $x \in A$ så att $f(x) = y$
Alla 'värden' i B uppnås som output (av någon input från A)

iii) bijektiv om den är både injektiv och surjektiv.
För varje värde $y \in B$ finns det en unik $x \in A$ så att $f(x) = y$.

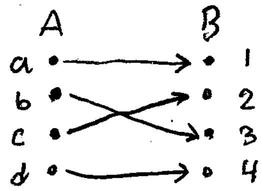
Ex


är injektiv men är inte surjektiv.

(det finns t.ex. inget $x \in A$ med $f(x) = 3$)

Ex


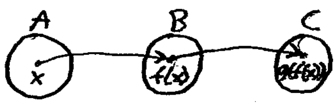
inte injektiv: $f(b) = f(d)$ men $b \neq d$
men är surjektiv (alla av 1, 2, 3 kan skrivas som $f(x)$)

Ex


är injektiv och surjektiv och därmed bijektiv.

Def^n Låt $f: A \to B$ och $g: B \to C$ vara funktioner.
Då definierar vi den sammansatta funktionen

$g \circ f: A \to C$
via $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Problem Hitta två funktioner $f, g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ så att $f \circ g \neq g \circ f$

[Dvs det finns något $x \in \mathbb{Z}$ så att $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

Def^n Låt $f: A \to B$ vara en funktion

En funktion $g: B \to A$ sådan att
$(g \circ f)(x) = x$ för alla $x \in A$
och $(f \circ g)(y) = y$ för alla $y \in B$,

kallas för en invers till f.
Då är $y = f(x)$ omm $g(y) = x$.

Sats Om en invers finns till $f: A \to B$ så är den unik.

Bevis Om g & h är inverser, visa mha def^n att $g = h$

Övning ∎

Def^n Om f har en invers g så kallas g för inversen till f och betecknas f^{-1}.

Ex Vad är inversen till

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$f(x) = x + 2$?
$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$g(y) = y - 2$

Ex Har $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $h(x) = 2x$ någon invers?

En invers skulle vara en f^n $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ så att $f(g(y)) = y$ för alla $y \in \mathbb{Z}$.

Det finns ingen invers eftersom $g(y) = y/2$ inte alltid är i $\mathbb{Z}$. ∎

Sats $f: A \to B$ har en invers omm f är bijektiv.

Bevis Övning! ∎

Övning Vilka av följande är (i) injektiva, (ii) surjektiva, (iii) bijektiva?

(a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$f(x) = 2x$

(b) $g: \mathbb{Z} \to 2\cdot\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$
$g(x) = 2x$

(c) $h: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$
$h(x) = 2x$

(d) $k: \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$
$k(x) = 2x$

Kardinalitet

Def^n Låt A vara en mängd.

Om det finns en bijektion från $\{1, 2, \ldots, n\}$ till A så säger vi att A har kardinalitet, eller storlek, n, och skriver

$|A| = n$

Vi definierar $|\emptyset| = 0$.

Def^{n} En mängd kallas ändlig om den har kardinalitet n för något $n = 0, 1, 2, \ldots$ Annars kallas den oändlig.

Def^{n} En mängd A kallas uppräknerligt oändlig om det finns en bijektion från $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ till A.

Ex. $\mathbb{N}$ är uppräknerligt oändlig

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ är bijektiv
$f(x) = x$

- $2 \cdot \mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

Finns det en bijektiv
$f: \mathbb{N} \to 2 \cdot \mathbb{N}$?

Ja: t.ex $f(x) = 2x$

Inj: "om $f(x) = f(t)$, då är $x = t$"
"om $2x = 2t$, då är $x = t$"

Surj: ja, för att få $y = 2k$, ta $x = k$
då är $f(x) = y$.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	...
$2 \cdot \mathbb{N}$	2	4	6	8	10	12	...
	4	6	2	8	10	12	...

- Är $\mathbb{Z}$ upp. oändlig?

Ja:

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...

- $\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$?

t.ex. $3/2, 10, \frac{-100}{37}, \ldots$

a\b	1	2	3	4
1	1/1	1/2	1/3	1/4
2	2/1	2/2	2/3	2/4
3	3/1	3/2	3/3	3/4
4	4/1	4/2	4/3	4/4

Det finns ingen bijektion $\mathbb{N} \to \overset{[0,1]}{\mathbb{R}}$ "Cantor"