Diskret Matematik 2018-04-12 #9

Exempelbeskrivningar finns i PPT på Canvas

Ex 1 $\binom{14}{4} = \frac{14!}{4!10!} = 1001$

Multinomialkoe

Def^n Låt $k_1, \ldots, k_m \geq 0$ vara heltal med $k_1 + \ldots + k_m = n$

Multinomialkoefficienten

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$$

betyder antalet sätt att dela upp en mängd med n element i m olika etikerade delmängder, med k_1 element i första delmängden, k_2 element i andra, osv, till k_m element i mängd nummer m.

Ex 3 $\binom{20}{8,5,5,2} = \binom{20}{8}\binom{12}{5}\binom{7}{5}\binom{2}{2} = \frac{20!}{8!\cancel{12!}} \cdot \frac{\cancel{12!}}{5!\cancel{7!}} \cdot \frac{\cancel{7!}}{5!2!} = \frac{20!}{8!5!5!2!} \approx 2$ miljarder

Sats Låt $k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0$ vara heltal med $k_1 + \ldots + k_m = n$. Då är

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

Bevis i anteckningar på Canvas

Ex 5 $\binom{60}{20,20,20} = \frac{60!}{20!20!20!} \approx 6 \times 10^{26} = 600$ miljoner miljarder miljarder

Ex 6 $\dfrac{\binom{60}{20,20,20}}{3!}$

Def^n En permutation av elementen i en mängd är en ordning av elementen i mängden.

Sats Det finns $n!$ premutationer av elementen i en mängd av storlek n.

Ex 9 $5! = 120$

Ex 10 $5! - 3! = 120 - 6 = 114$

Vi räknar bort från ovan $5!$ permutationerna alla de som innehåller OST.

Dessa är premutationer av F, R och OST. Det finns $3!$ sådana.

<u>Ex 11</u> $\frac{4!}{2!}$ $\left.\begin{array}{l} S_1 A T S_2 \\ S_2 A T S_1 \end{array}\right\}$ En ordning

<u>Sats</u> (Multinomialkoefficienter som ordningar)

Låt $k_1, \ldots, k_m \geq 0$ vara heltal med $k_1 + \ldots + k_m = n$

Multinomialkoefficienten

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m}$$

är lika med antalet sätt att ordna n objekt där det finns

k_1 stycken identiska objekt av slag 1
k_2 ——— " ——— 2
⋮
k_m stycken identiska objekt av slag m

<u>Bevis</u>

Vi har n möjliga positioner $(1, 2, \ldots, n)$ för de n objekten. Vi gör detta genom att välja

- k_1 positioner för de k_1 objekten av slag 1
- k_2 ——— " ——— k_2 ——— " ——— 2
  ⋮
- k_m ——— " ——— k_m ——— " ——— m

och sedan sätta ut objekten där. ▨

<u>Ex. 13</u> Enligt Satsen om multinomialkoeff. som ordningar är svaret.

$$\binom{12}{3, 4, 5} = \frac{12!}{3!\,4!\,5!}$$

<u>Ex. 14</u> $\binom{6}{1, 1, 2, 1, 1} = \frac{6!}{2!}$

<u>Ex. 15</u> $\frac{6!}{2!} - (4! + 4! - 2!)$

ord som innehåller ost

ord som innehåller bit

ord som innehåller ost & bit

BITOST & OSTBIT subtraheras två gånger

"Inklusion-exklusion"

Stirlingtal och partitioner

Def^n En partition av en mängd A är en mängd icke-tomma delmängder

$$E_1, \ldots, E_k \subseteq A \text{ så att}$$

(i) $A = E_1 \cup \ldots \cup E_k$
(varje element i A finns med i någon delmängd E_i)

(ii) $E_i \cap E_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$
(inget element finns med i två olika E_i)

Talet k kallar vi för antalet delar i partitionen.

Ex $\{\{1,2\},\{3\},\{4,6\},\{5,7\}\}$

är en partition av $\rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i 4 delar.

Med andra ord: En partition i k delar motsvarar ett sätt att dela upp n objekt i k icke-tomma "högar".

Def^n Stirlingtalen (av den andra ordningen)

$S(n,k)$ = antalet sätt att partitionera en mängd av storlek n i k delar.

Sats $S(n,k)$ uppfyller, för $n,k \geq 0$

1) $S(n,1) = 1 = S(n,n)$ för alla $n \geq 1$
2) $S(n,k) = S(n-1,k-1) + S(n-1,k) \cdot k$ för $n > k > 1$
3) $S(n,k) = 0$ annars

Ex (Beräkning av $S(n,k)$)

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

$S(3,2) = S(2,1) + 2 \cdot S(2,2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$S(4,2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$2 \cdot 7 + 1$

Verkar som $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$

Ex Bestäm antalet sätt att fördela 5 olika böcker bland barnen Anna, Bertil & Cecilia.

$S(5,3)$ Sätt att dela upp böckerna i 3 högar. För varje av dessa finns det $3!$ sätt att ordna böckerna bland barnen.

Svar: $3!\, S(5,3) = 6 \cdot 25 = 150$