Diskret matematik 2018-04-13 #10

Exempelbeskrivningar i PPT på Canvas

Ex 1 6 smaksättningar 3 kakor
Vanilj och choklad får inte vara i samma kaka

$\{V, C\ S_3, S_4, S_5, S_6\}$

Antalet kakmöjligheter = antalet sätt att dela upp de 6 smakerna i 3 högar $\underset{\text{def.}}{\overset{\text{enl.}}{=}}$ $S(6,3)$

Extra krav: V & C får inte förekomma tillsammans.

Vi räknar bort alla möjligheter där V & C förekommer tillsammans. Det finns $S(5,3)$ möjliga kakor där det förekommer.

Alltså får vi: $S(6,3) - S(5,3)$

n \ k	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6	1	31	90

Så svar: $S(6,3) - S(5,3) = 90 - 25 = 65$.

Ex 2 10 identiska pepparkakor till 4 personer

"Prickar & pinnar"/"Stars & bars"

$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{\text{P1 får 3}} | \underbrace{\bullet\ \bullet}_{\text{P2 får 2}} | \underbrace{\ }_{\text{P3 får 0}} | \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{\text{P4 får resterande 5}}$

→ 10 + 3 positioner. 3 av dessa ska väljas till pinnar.

→ $\binom{13}{3}$ sätt

Ex 3 Hur många heltalslösningar $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

finns det?

Samma problem i annan form, så $\binom{13}{3}$ lösningar.

Sats

Antalet sätt att dela upp n identiska objekt i m grupper (som får vara tomma är

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

Ex 5 10 pepparkakor till 4 personer, minst en var.

Dela ut 4 så alla får en. 6 kvar, som kan delas ut på $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3}$ sätt.

$\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet$

9 positioner $\sqcup$ att placera 3 pinnar i $\rightarrow \binom{9}{3}$ sätt

$\binom{n-1}{m-1}$ antalet sätt att fördela n identiska objekt bland m etikerade grupper, där ingen får vara tom.

Ex 6 5 identiska blommor och 7 identiska chokladkakor fördelas bland 4 vänner.

Det finns $\binom{5+3}{3}$ sätt att fördela blommorna på enligt stars & bars, och för varje av dem finns det $\binom{7+3}{3}$ sätt att fördela chokladkakorna på.

Enl. MP finns det $\binom{8}{3} \cdot \binom{10}{3}$ sätt totalt.

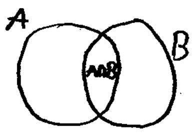
Inklusion-exklusion

Grundtanke: för att räkna alla objekt som har egenskap A eller B,

- räkna separat alla med egenskap A
- räkna sep B
- räkna sedan bort en kopia av alla som har båda egenskaperna – för dessa har räknats två gånger

Sats Låt A, B vara mängder. Då är $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Ex 8 Permutationer av bokstäverna i ordet OSTBIT som innehåller delorden OST eller BIT



$A = \{$ord som innehåller OST$\}$
$B = \{$ord som innehåller BIT$\}$

Vill räkna $|A \cup B| \overset{\text{ink-}}{\underset{\text{exk}}{=}} |A| + |B| - |A \cap B| = 4! + 4! - 2!$

"eller"-krav $\rightarrow$ "och"-krav

Ex 9

A = {studenter som tog LA}
B = {studenter som tog DM}

$|A \cup B| = ?$

$= |A| + |B| - |A \cap B| = 10 + 100 - 5 = 105$

Sats 10 (Inklusion-exklusionsprincipen för tre mängder)

Låt A, B, C vara mängder. Då är

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|;$$

och om $A_1, \dots, A_n$ är mängder så är

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$
$$- \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < i_4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + \dots$$

$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

$\ominus$ storlekarna av alla parvisa snitt
$\oplus$ storlekarna av 3-snitten
$\ominus$ storlekarna av 4-snitten
o.s.v.

Ex 11 Hur många av talen $1, 2, \dots, 120$ är delbara med 2, 3 eller 5?

- Mängden vi är intresserade av: $\{2, 3, \dots, 120\}$ – svårhanterlig
- Men union av enkla mängder!

Låt $X = \{1, 2, \dots, 120\}$

$A = \{n \in X : 2 \mid n\}$
$B = \{n \in X : 3 \mid n\}$
$C = \{n \in X : 5 \mid n\}$

Vi vill veta $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A| = \frac{120}{2} = 60$
$|B| = \frac{120}{3} = 40$
$|C| = \frac{120}{5} = 24$

$|A \cap B| = \frac{120}{6} = 20, \ |A \cap C| = \frac{120}{10} = 12, \ |B \cap C| = \frac{120}{15} = 8, \ |A \cap B \cap C| = \frac{120}{30} = 4$

Ex 12 Derangemang

$A_1 = \{$alla permutationer av $1, 2, \ldots, n$ där 1 förekommer i pos $1\}$
$A_2 = \{$ — " — 2 — " — $2\}$
$\vdots$
$A_n = \{$ — " — n — " — $n\}$

Derangemang motsvarar att inga av dessa händer.

Hur många sådana?
= antalet samtliga perm. − antalet där något av ovan händer.

$$= n! - \underbrace{|A_1 \cup \ldots \cup A_n|}_{\text{inkl. exkl.}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k! \approx e^{-1}$$

Sannolikheten att 2 kort matchar $\approx 1 - e^{-1} \approx 0{,}63\ldots$

Sats (Postfacksprincipen)

Låt $n \geq 1$ vara ett heltal. Om $n+1$ brev delas ut mellan n postfack, då måste något postfack få åtminstone två brev.

OBS: Poängen är att detta gäller oavsett hur breven delas ut!

Sats Låt A och B vara ändliga mängder med $|A| = |B|$. Om funktionen $f : A \to B$ är en injektion är den också en surjektion.

Sats Låt A och B vara ändliga mängder med $|A| = |B|$. Om funktionen $f : A \to B$ är en surjektion är den också en injektion.