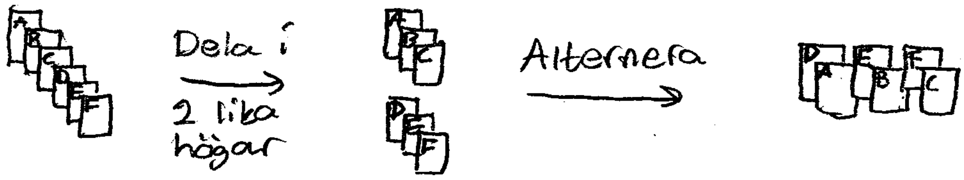
Diskret matematik 2018-04-24 #14

Exempel (Kortblandningar)



Kortet i pos 1(A) flyttar till pos 2
— || — 2(B) — || — pos 4
— || — 3(C) — || — pos 6
⋮

Permutationen för positionerna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

I cykelform: $\pi = (1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5)$

Så en produkt av 2 cykler av längd 3.

Vad är det minsta $m \in \mathbb{N}$ så att $\pi^m = id$
$(= ord(\pi))$

$\pi^2 = (1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5)(1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5) = (1\ 2\ 4)(1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5)(3\ 6\ 5) =$
OBS! Går bara att byta ordning om cyklerna är disjunkta.
$= (1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6)$

$\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi = (1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6)(1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5) =$
$= (1\ 4\ 2)(1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6)(3\ 6\ 5)$
$= (1)(2)(3)(4)(5)(6) = id$

Så efter 3 blandningar ligger alla kort tillbaka i ursprungspositionerna.

<u>Fråga</u> Med 52 kort istället, med samma blandningssätt, hur många blandningar behövs för att återfå id?

$4 \leq ? \leq 16$

Exempel/metod (Inverser)

Tvåradsform: förra föreläsningen.

I cykelform:

$(1\ 4\ 3\ 6)^{-1} = (6\ 3\ 4\ 1)$

$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{-1} = (a_n \ldots a_2 a_1)$

$[(a_1 a_2 \ldots a_n)(b_1 b_2 \ldots b_n)]^{-1} = (b_1 b_2 \ldots b_n)^{-1}(a_1 a_2 \ldots a_n)^{-1}$ och liknande för produkt av fler cykler.

$(g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}$

$(g_1 g_2 g_3)^{-1} = g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1}$

$[(1\ 2)(3\ 4\ 5)]^{-1} = (3\ 4\ 5)^{-1}(1\ 2)^{-1} = (5\ 4\ 3)(2\ 1) = (3\ 5\ 4)(1\ 2)$

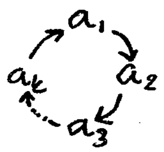
<u>Påminnelse</u> <u>Def^n</u>
Ordningen ord(π) är det minsta $m \in \mathbb{N}$ så att $\pi^m = id$.

<u>Sats</u> Ordningen av en cykel $(a_1 a_2 \dots a_k)$ är k

Om en permutation π i cykelform består av cykler av längder $k_1, k_2, \dots, k_m$, då är $\mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{lcm}(k_1, k_2, \dots, k_m)$

<u>Def^n</u> Längden av en cykel $(a_1 a_2 \dots a_k)$ är talet k.

<u>Bevis</u>



a_1 måste cyklas runt k gånger för att komma tillbaka till sig själv.
Liknande för alla andra.

<u>Ex</u> En k-cykel är en cykel av längd k
En 2-cykel kallas en transposition

<u>Sats</u> Varenda permutation kan skrivas som en produkt av transpositioner. OBS: ej nödvändigtvis disjunkta.

<u>Exempel/metod</u> (Från cykelform till produkt av transpositioner)

Skriv $\pi = (1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5)$ som en produkt av transpositioner.

Vi gör det för varje cykel:

$(1\ 2\ 4) = (1\ 2)(2\ 4) \left(\underset{\text{också}}{=} (2\ 4)(3\ 4)(1\ 3)(3\ 4) \right)$
$(3\ 6\ 5) = (3\ 6)(6\ 5)$

så $\pi = (1\ 2)(2\ 4)(3\ 6)(6\ 5)$

$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)$

I allmänhet:
$(a_1 a_2 a_3 \dots a_k) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{k-2} a_{k-1})(a_{k-1} a_k)$

<u>Sats</u> Låt π vara en permutation.
Då har vartenda sätt att skriva π som en produkt av transpositioner på antingen ett jämnt eller ett udda antal transpositioner.

<u>Bevis</u> Utelämnas – men se spelet

<u>Def^n</u> Om antalet transpositioner för π alltid är jämnt så kallas π för en jämn permutation. Om det alltid är udda så kallas π udda.

<u>Ex</u> Är $(1\ 5)(5\ 2)(3\ 4)(2\ 4)(1\ 3) = (1\ 2)(3\ 4)$?

Nej! udda antal jämnt antal