KTH Matematik
Examinator: Maurice Duits
Kursansvarig: Olof Sisask

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	programkod

Kontrollskrivning 5A till Diskret Matematik SF1610, för CINTE, vt2017

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd KS nr n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna; använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	En graf på 10 noder kan inte ha mer än 45 kanter.	X	
b)	Det finns en graf vars noder har grader 1, 2, 2, 2, 3, 3 respektive 4.		X
c)	Varje träd med 10 noder har 9 kanter.	X	
d)	Om en graf är Hamiltonsk då är den planär.		X
e)	En Eulerväg i en graf måste passera varje nod precis en gång.		X
f)	Det finns inga planära grafer på 6 noder som har 14 kanter.	X	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) En graf G har 30 noder, 24 kanter och inga cykler. Hur många sammanhängande komponenter har G?
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 6.

b) (1p) Hur många olika spännande träd har den kompletta bipartita grafen $K_{2,2}$?
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 4.

c) (1p) En graf har 7 noder och 8 kanter, och sex av de sju noderna har grad 2. Vilken grad har den återstående noden?
(Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 4.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) En bipartit graf $G = (V, E)$ har bipartition $V = X \cup Y$, dvs det finns inga kanter mellan två noder i X, och inga kanter mellan två noder i Y.
X består av 16 noder, samtliga av grad 5. Grafen har $|V| = 26$ noder totalt, och samtliga noder i Y har grad δ. Bestäm δ.
OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning: Eftersom det finns 16 noder i X, och varje sådan nod har 5 kanter utgående från sig, så har grafen totalt $16 \cdot 5$ kanter totalt. Räknat på precis samma sätt med nodmängden Y som utgångspunkt ser vi att grafen har $|Y| \cdot \delta$ kanter. Eftersom $|X| + |Y| = |V| = 26$, så är $|Y| = 10$. Alltså är

$$16 \cdot 5 = 10\delta,$$

från vilket vi ser att $\delta = 8$.

Svar: $\delta = 8$.

	poäng
Namn	uppg.4

4) (3p)

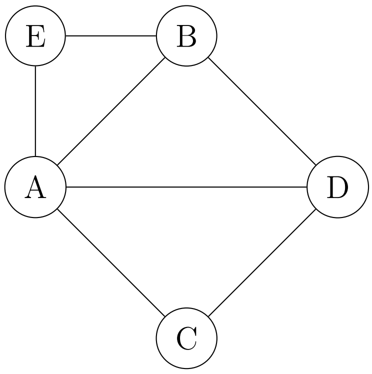
(a) Rita en graf G med 5 noder och 7 kanter sådan att G har en Eulerväg men ingen Eulerkrets.

(b) Rita en graf med 4 kanter som har en Hamiltonstig.

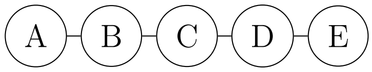
(c) Rita en sammanhängande graf G som inte har någon Eulerväg eller Hamiltonstig, men som har en cykel.

Exempel på lösningar (det kan finnas andra):

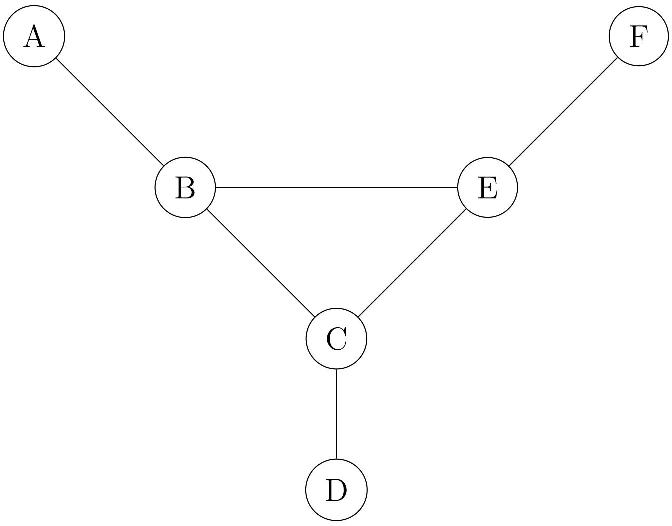
(a)



(b)



(c)



Namn	poäng uppg.5

5) (3p) En planär graf G har två sammanhängande komponenter. Totalt har grafen 100 noder och 150 kanter. Bestäm de möjliga antalen områden (inklusive ytterområdet) det kan finnas i en plan ritning av grafen.
OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning: Vi arbetar i varje komponent separat, men vi måste vara försiktiga med att vi bara räknar ytterområdet, som båda komponenterna delar, endast en gång. Eulers formel säger att för en plan ritning av en sammanhängande planär graf med v noder, e kanter och r områden (inkl. ytterområdet) gäller

$$v + r = e + 2.$$

Om vi låter $s = r - 1$ vara antalet områden exklusive ytterområdet så gäller då

$$v + s = e + 1$$

för varje sådan plan ritning. Låt nu v_1, e_1 och s_1 vara antalet noder, kanter respektiv interna områden som det finns i plana ritningar av den ena av G:s sammanhängande komponenter, och liknande för v_2, e_2 och s_2 för den andra komponenten. Då gäller

$$v_1 + s_1 = e_1 + 1$$
$$v_2 + s_2 = e_2 + 1.$$

Eftersom $v_1 + v_2 = 100$ och $e_1 + e_2 = 150$ så lägger vi ihop dessa och förenklar:

$$v_1 + v_2 + s_1 + s_2 = e_1 + e_2 + 2,$$

vilket ger

$$100 + s_1 + s_2 = 152,$$

dvs

$$s_1 + s_2 = 52.$$

Detta är det totala antalet interna områden i de sammanhängande komponenterna. Vi räknar nu tillbaka in ytterområdet för att få:

Svar: 53 områden.