

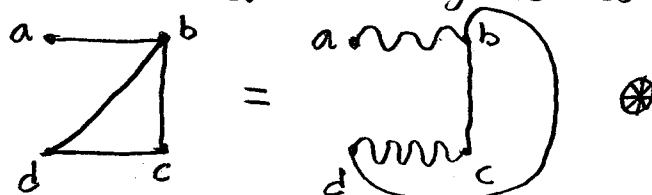
"Expander graphs"

Defⁿ En graf G på en mängd V består av ett par (V, E) där E är en mängd av par av element i V :

$$E \subseteq \{\{a, b\} \subseteq V : a \neq b\}.$$

T.ex. bildar $V = \{a, b, c, d\}$ och paren $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$ en graf.

Man brukar visualisera grafen som



Om $\{a, b\}$ är en kant skriver vi $a \sim b$ och säger att a & b är grannar i grafen.

T.ex. $c \sim d$ ovan, men $a \not\sim d$.

Sats En graf på n noder kan ha som mest $\binom{n}{2}$ kanter

Bevis $\binom{n}{2}$ är antalet delmängder av storlek 2 till en mängd av storlek n .

Defⁿ Om alla möjliga kanter finns med i en graf $G = (V, E)$, dvs om $E = \{\{a, b\} \subseteq V : a \neq b\}$, då kallas G en komplett graf.

När $|V| = n$ brukar detta kallas $G = K_n$

Ex. K_2 :  K_3 :  K_4 :  K_5 : 

Fråga: Kan K_4 , eller diagrammet  ritas utan att lyfta pennan från pappret eller att rita längs samma linje två gånger?

Defⁿ Graden (degree)/valensen av en nod $v \in V$ i en graf $G=(V,E)$ är antalet kanter som går ut från noden, och betecknas $d(v) = d_G(v)$.

Så $d(v) = |\{w \in V; w \sim v\}| = \text{antalet grannar till } v$.

1 ☉:

v	$d(v)$
a	1
b	3
c	2
d	2

 } denna sekvens av grader kallas grafens gradsekvens.

Sats (Handskakningslemmat)

För en graf $G=(V,E)$ gäller

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

"Summan av alla" = $2 \times$ "antalet kanter"
grader

Bevis

$\sum_{v \in V} d(v)$ räknar kanterna från v , summerat över v .

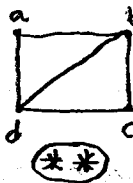
Varje kant räknas precis två gånger:

kanten $\{v_1, v_2\}$ räknas både i $d(v_1)$ och $d(v_2)$. ▣

Stigar, kretsar, cykler, vägar, ...

Defⁿ En vandring i en graf är en sekvens av noder $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ där varje par av konsekutiva noder formar en kant i grafen.

T.ex. i ☉☉ är $a-b-c-b-a-d$ en vandring
men (a, b, c, a) är inte det då $\{c, a\}$
inte är en kant



En stig är en vandring som inte passerar samma nod mer än en gång, förutom eventuellt att den sista noden är samma som den första.

T.ex. $a-b-c-b-a-b$ är inte en stig eftersom b används mer än en gång. (och a)

$a-b-c$ är en stig

$a-b-c-d-a$ är en stig.

Defⁿ En cykel är en sluten stig, dvs
sista noden = första noden.

T.ex. $a-b-c-d-a$.

Defⁿ En väg är en vandring som inte använder någon kant mer än en gång. (Men noder får användas flera gånger).

T.ex. $a-b-c$ är en väg i **(*)**

$a-b-c-d-b$ är en väg.

Men $\underline{b-c-d-b}$ är inte en väg.

Defⁿ En krets är en sluten väg, dvs som börjar och slutar i samma nod.

T.ex. $b-c-d-b$



Defⁿ En graf kallas sammanhängande om det för varje par $v \neq w \in V$ av noder finns en stig från v till w .

T.ex. är S.H., men är inte det.

En graf kan alltid skrivas som en union av sammanhängande 'delgrafer':

$G=(V,E)$ har $V=V_1 \cup \dots \cup V_k$ } Partitioner
 $E=E_1 \cup \dots \cup E_k$ } av $V \cap E$
dvs disjunkta unioner.

där varje par (V_i, E_i) är en sammanhängande graf.

Dessa grafer (V_i, E_i) kallas för G 's sammanhängande komponenter.

Defⁿ En Eulerväg är en väg som använder varje kant i grafen exakt en gång. (och där varje nod förekommer).

Sats En sammanhängande graf har en Eulerväg om och endast om den har högst två noder med udda grad.