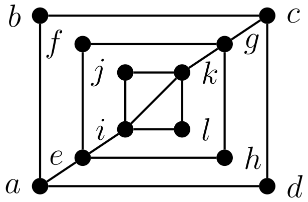
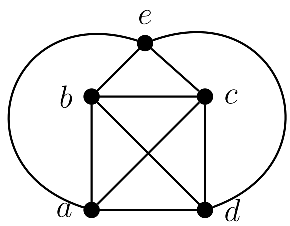
Problem till övning nr 9 den 9 maj, SF1610 Diskret matematik CINTE, vt2018

1. (E) Om en graf har gradsekvensen 2, 4, 4, 4, 5, 5, 6 — dvs har 7 noder som har dessa grader — hur många kanter har grafen? Kan du rita en sådan graf?
2. (E) Visa att det inte finns någon graf med gradsekvensen 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5.
3. (E) I graferna nedan, hitta en Eulerväg eller Eulerkrets om det finns. Om det inte finns, ange en anledning till varför.

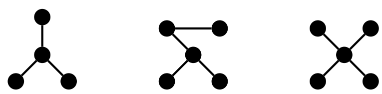


(A)

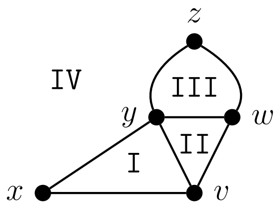


(B)

4. (E) Rita fyra grafer som uppfyller nedanstående
   (a) Varken Hamiltonsk eller Eulersk.
   (b) Eulersk men inte Hamiltonsk
   (c) Hamiltonsk men inte Eulersk.
   (d) Både Hamiltonsk och Eulersk.
5. (E) Hitta ett spännande träd till grafen (B) ovan.
6. (E) Hur många kanter har en graf som består av 3 disjunkta träd, med v_1, v_2 resp. v_3 noder i träden? Dvs om grafen har följande form



7. (D) En acyklisk graf, dvs grafen saknar cykler, består av 143 noder och 100 kanter. Hur många komponenter består grafen av?
8. (E) Tas en kant bort från K_5 blir den så erhållna grafen planär. Visa detta.
9. (D) Denna uppgift illustrerar ett bevis av olikheten $e \leqslant 3v - 6$ för sammanhängande planära grafer. I grafen nedan har områdena getts namnen `I`,...,`IV`.



Skriv ned en lista över alla par (område, kant) där kanten gränser till området (t.ex. $(\mathtt{I}, xy)$), på följande två sätt.
   (a) Först grupperat efter områdena.
   (b) Sedan grupperat efter kanterna.

Var god vänd...

Förklara varför antalet par du skrev ned på det första sättet är $\geqslant 3r$, där r är antalet områden i grafen. Förklara varför antalet par du skrev ned på det andra sättet är $\leqslant 2e$, där e är antalet kanter i grafen. Dra slutsatsen att $2e \geqslant 3r$, och använd Eulers formel för att visa att $e \leqslant 3v - 6$.

10. (D) Antag att G är en sammanhängande 4-regulär graf som dessutom är planär. Hur många områden har en plan ritning av G om G har 16 kanter?

Svar

1. 15.
2. Handskakningslemmat.
3. (A) har en Eulerväg: $a-b-c-d-a-e-f-g-h-e-i-j-k-l-i-k-g-c$, men ingen Eulerkrets eftersom graden har noder med udda grad.
   (B) har både en Eulerväg och en Eulerkrets: $a-b-e-c-d-a-c-b-d-e-a$.
4. —.
5. Upprepa: om det finns en cykel, ta bort en kant från den.
6. $v_1 + v_2 + v_3 - 3$ kanter.
7. 43.
8. Rita.
9. (a) Grupp $\mathtt{I}$: $(\mathtt{I}, xy)$, $(\mathtt{I}, yv)$, $(\mathtt{I}, xv)$
   Grupp $\mathtt{II}$: $(\mathtt{II}, yv)$, $(\mathtt{II}, vw)$, $(\mathtt{II}, vw)$
   Grupp $\mathtt{III}$: $(\mathtt{III}, yz)$, $(\mathtt{III}, zw)$, $(\mathtt{III}, yw)$
   Grupp $\mathtt{IV}$: $(\mathtt{IV}, xy)$, $(\mathtt{IV}, yz)$, $(\mathtt{IV}, zw)$, $(\mathtt{IV}, wv)$, $(\mathtt{IV}, xv)$

   (b) Grupp xy: $(\mathtt{I}, xy)$, $(\mathtt{IV}, xy)$
   Grupp yz: $(\mathtt{III}, yz)$, $(\mathtt{IV}, yz)$
   ...
10. 10.

E-mail address: `sisask@kth.se`