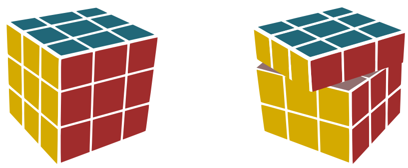
Problem till övning nr 7 den 26 april, SF1610 Diskret matematik CINTE, vt2018

1. (E) Skriv permutationen π nedan på cykelform, dvs som en produkt av disjunkta cykler:
$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 1 & 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$
Skriv den sedan som en produkt av transpositioner/2-cykler.
Skriv permutationen $\sigma = (1\ \ 5\ \ 2\ \ 7\ \ 3)(6\ \ 4)$ i tablåform. Bestäm också ordningen av dessa permutationer π, σ samt avgör om permutationerna är udda eller jämna.

2. (E) Låt nu $\pi = (1\ \ 5\ \ 4)(2\ \ 3)$ och $\sigma = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 4)$. Bestäm ordningen av permutationerna $\sigma\pi$, $\pi\sigma$ och $\pi\sigma\pi$ samt avgör vilka som är udda resp jämna permutationer.

3. Låt π och σ vara som i föregående uppgift.
   (a) (E) Bestäm en permutation x sådan att
   $$\sigma x = \pi.$$
   (b) (D) Undersök om det finns någon permutation γ sådan att
   $$\gamma^2\sigma = \pi^2.$$

4. (E) Rubiks kub är ett pussel i kubform, där varje sida av kuben består av 9 små klossar, och varje sida kan roteras runt sin mittenkloss.



Ett drag skulle t.ex. kunna vara att rotera framsidan av kuben 90° motsols. Alla dragen som går att göra med kuben fås från kombinationer av rotationer av kubens 6 sidor. Låt G vara gruppen som genereras av dessa rotationer (under operationen sammansättning — dvs, gör ett drag, sedan det andra). Visa att $|G|$ är en multipel av 4.

5. (C) Visa att om H och K är delgrupper till en grupp G, och varken av mängderna är en delmängd till den andra (dvs $H \not\subseteq K$ och $K \not\subseteq H$), då är $H \cup K$ inte en delgrupp till G.

6. (C) Visa att om varje element i en grupp G har ordning $\leqslant 2$, då är gruppen kommutativ.

7. (B) Mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ bildar en grupp som vi betecknar $\mathcal{S}_4$. Bestäm den minsta delgrupp H till gruppen $\mathcal{S}_4$ som är sådan att permutationerna $(1\ \ 2\ \ 3)$ och $(3\ \ 4)$ tillhör H.

8. (D) Mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ bildar en grupp som vi betecknar $\mathcal{S}_n$. Visa att mängden
$$A_n = \{\pi \in \mathcal{S}_n : \pi \text{ är en jämn permutation}\}$$
bildar en delgrupp till $\mathcal{S}_n$. (Denna grupp brukar kallas den *alternerande gruppen.*) Hur stor är A_n?

Svar

1. På cykelform är
$$\pi = (1\ \ 4\ \ 6\ \ 5)(2\ \ 3\ \ 7\ \ 8).$$
Som produkt av transpositioner:
$$\pi = (14)(46)(65)(23)(37)(78),$$
men det finns fler än ett sätt att göra det på.
För σ gäller
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
π har ordning 4 och är jämn. σ har ordning 10 och är udda.
2. $\sigma\pi = (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 5)$ så av ordning 5 och jämn.
$\pi\sigma = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$ så av ordning 5 och jämn.
$\pi\sigma\pi = (2\ \ 4)$ så ordning 2 och udda.
3. (a) $x = (1\ \ 3\ \ 2)(4)(5)$
(b) Finns ingen sådan permutation γ.
4. Vilken sats säger något om att något delar storleken på en grupp? Går denna att tillämpa här?
5. Eftersom $H \not\subseteq K$ finns det ett element $h \in H \setminus K$, och liknande finns det ett element $k \in K \setminus H$. Ligger $hk \in H \cup K$?
6. I symboler, vad är det du behöver visa? Vad vet du om elementet $(xy)(xy)$?
7. $\mathcal{S}_4$.
8. Hur kollar vi om något är en delgrupp? $|A_n| = n!/2$.

E-mail address: `sisask@kth.se`