Diskret matematik 2018-04-09 #7

Repetition inför KS1 på föreläsningen imorgon (del av

Gamla KS ligger under "Uppgifter" på Canvas

"Relationer" utgår denna kursomgång

__Ex 1__ En restaurang serverar 4 olika maträtter och 3 olika drycker, vatten, saft och juice.

Hur många olika möjliga kombinationer av mat+dryck finns?

Svar: 12

Rätt 1	Rätt 2	Rätt 3	Rätt 4	← 4 val
Vatten Saft Juice	V S J	V S J	V S J	← 3 val

Vi har 4 grupper med 3 delval i varje, vilket ger $4 \cdot 3 = 12$ olika kombinationer.

(R1, V), (R1, S), (R1, J),

(R2, V), (R2, S), (R2, J),

(R3, V), (R3, S), (R3, J),

(R4, V), (R4, S), (R4, J),

<u>Sats</u> (Multiplikationsprincipen)

Om det finns

- x möjligheter för ett utfall X, och det för varje av dessa finns
- y möjligheter för ett utfall Y

då finns det $x \cdot y$ möjligheter för kombinationen/paret (X, Y).

Exempel 2: 10 personer tävlar, 1:a, 2:a och 3:e-plats utses.

Det finns 10 möjligheter för 1:a plats.
För varje av dessa finns 9 möjligheter för 2:a plats.
För varje av dessa finns 8 möjligheter för 3:e plats.

Så enligt MP finns $10 \cdot 9$ möjligheter för 1:a och 2:a plats.
För varje av dessa finns 8 möjligheter för 3:e plats

Totalt $10 \cdot 9 \cdot 8$ möjligheter för 1:a, 2:a och 3:e plats.

Ex. 4: Hur många portkoder av längd 4 finns med siffrorna 0 – 5?

Vi har 6 möjligheter för 1:a siffran och FVAD 6 möjligheter för 2:a o.s.v.

Så $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ olika möjligheter.

Om koden inte får innehålla två lika siffror har vi 6 val för 1:a siffran och 5 val för var och en av de följande sifrorna.

Så enl. MP finns $6 \cdot 5^3$ möjligheter

Ex 6. 10 flickor och 10 pojkar ska hålla hand, två och två med en flicka och en pojke i varje par.

Vi numrerar flickorna 1 – 10.

För F1 finns det 10 möjliga pojkar
F2 finns det 9 möjliga pojkar
⋮
F10 finns det 1 möjlig pojke

Enligt MP finns $10!$ möjligheter

Om flicka A och pojke B vägrar hålla hand finns $9 \cdot 9!$ möjligheter.

För flicka A finns 9 möjligheter, och för resterande $9!$ möjligh.

Alternativ lösning: Om flicka A håller hand med pojke B finns 9! olika parmöjligheter för resterande. $10! - 9! = 10 \cdot 9! - 9! = 9 \cdot 9!$

Sats 8 Om A är en mängd med $|A| = n$ så har den 2^n delmängder, dvs $|P(A)| = 2^n$.

Bevis Lista elementen i A som $a_1, a_2, \dots, a_n$. En delmängd till A motsvarar ett val för varje a_i, om a_i ligger i mängden eller inte.

Det finns två möjligheter för varje element.

Totalt finns $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} = 2^n$ möjligheter enligt MP

Ex 10: Patienter ska delas upp i kategorier efter om de är diabetiker och hur mycket de väger.

diabetiker: $\underbrace{<50 \quad 50\text{–}70 \quad >70}_{3}$

inte diabetiker: $\underbrace{<50 \quad \geq 50}_{2}$

Det finns $3 + 2 = 5$ kategorier totalt (Additionsprincipen)

Binomialkoefficienter

Antalet delmängder till A, en mängd med n element, är 2^n. Hur många delmängder av storlek k?

Def^{n} Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$

"n välj k" / "n choose k"

är antalet delmängder av storlek k i en mängd av storlek n.

$$\binom{n}{k} = \left| \{ B \subseteq \{1, 2, \dots, n\} : |B| = k \} \right|$$

Dvs, det är antalet sätt att välja k saker från n olika saker (där ordningen vi väljer på inte spelar roll). "icke-ordnade urval"

Ex $\binom{n}{k} \leq 2^n \qquad \binom{n}{1} = n$.

Ex Hur många olika 5-korts-kombinationer finns det om man delar ut kort från en kortlek med 52 kort?

Svar: $\binom{52}{5}$

* **Sats** Låt $n \geq k \geq 0$ vara heltal. Då är
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$
Så antalet 5-korts-kombinationer av 52 kort är
$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2598960$$

Sats Antalet sätt att ställa k olika objekt i ordning är $k!$

(Bevis: MP)

Bevis av *: Vi visar att
$$\underset{①}{\binom{n}{k} k!} = \underset{②}{n(n-1)\dots(n-k+1)}$$
"Bijektivt bevis" Låt A vara en mängd av storlek n,
(t ex $\{1,2,3\dots n\}$)

② är antalet sätt att välja ut k olika saker från A där ordningen spelar roll:

n val för 1:a saken
$(n-1)$ — " — 2:a saken
⋮
$n-(k-1)$ – " — k:e saken

Så enligt MP finns det ② olika möjligheter

Men ① räknar samma sak: $\binom{n}{k}$ är antalet sätt att välja ut k objekt från A, utan någon ordning. Sedan finns det fvad $k!$ sätt att ordna dessa k objekt på. Så enligt MP finns det $\binom{n}{k}\cdot k$ sätt att ordna k objekt valda från n olika. ▨

Sats (Ordnade urval)

Antalet sätt att ordna k element som väljs från n olika är
$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Sats För alla $n \geq k \geq 0$ så är
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Bevis Att välja k element från n är detsamma som att välja bort $n-k$ element. ▨

Också $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$

Pascals triangel

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

$\binom{6}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

<u>Sats</u> $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

<u>Bevis</u> $\binom{n}{k}$ är antalet sätt att välja k saker från $\{1,2,\ldots,n\}$.

Jag kan göra detta genom att välja k saker från $\{1,2,\ldots,n-1\}$ och lägga till elementet n. ▨

de som inte innehåller 'n'	de som innehåller 'n'

Delmängder till $\{1,2,\ldots,n\}$ av storlek k.

<u>Sats</u>

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \ldots$$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$$