Diskret matematik 2018-03-28 #5

§ Rekursion

Idag: Rekursion, Induktion } "Luta dig mot tidigare fall"

definitioner och beräkningar

Ex.
```
function factorial(n) {
  if n=1 return 1
  else return factorial(n-1) • n
}
```

Ex.
```
function gcd(a,b){
  r = a mod b
  if r=0 return b  // b|a
  else return gcd(b,r)
}
```

Ex. Definiera en talföljd $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$[(a_i)_{i=0}^{\infty}]$ genom $a_0=1$, $a_n = 2\cdot a_{n-1}$ för $n \geq 1$

$$a_n = 2a_{n-1} = 2\cdot 2a_{n-2} = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = \ldots = 2^{n-1}a_1 = 2^n a_0 = 2^n.$$

Ex. Låt $a_0=0$, $a_1=1$ och $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ för $n\geq 2$ "Fibonacci-talen"
"summan av de två termerna innan"

$$a_0=0, a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, a_7=13, a_8=21$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

§ Induktion

Sats För varje heltal $n \geq 1$ gäller det att $1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$: $P(n)$

Arbetsuppgift
- Verifiera $P(n)$ för 1,2,3,4,5
- Om jag berättar att $P(100)$ är sant, dvs att $1+2+3+\ldots+100 = \frac{100\cdot 101}{2}$, kan du verifiera att $P(101)$ är sant?

$$1+2+\ldots+100 = \frac{100\cdot 101}{2}$$

$$1+2+\ldots+101 = \frac{100\cdot 101}{2} + 101 = \frac{100\cdot 101}{2} + \frac{2\cdot 101}{2} = \frac{102\cdot 101}{2}$$

Bevis av sats via induktion

① Tydligt identifiera påståendet som ska bevisas.

Låt $P(n)$ vara påståendet
"$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$".

Vi vill visa att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 1$

② Visa ett basfall

Vi ser lätt att påståendet $P(1)$ är sant
(nämligen "$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$" är sant).

③ Visa påståendet (Induktionssteg)

"Om $P(n)$ är sant, då är $P(n+1)$ sant"
(för godtyckligt n) (för $n \geq 1$)

I vårt fall: Vi får anta att $P(n)$ stämmer,
dvs att $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Vi vill visa att
$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Vi har att
$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$ enligt induktions-antagandet för $P(n)$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Alltså har vi visat att $P(n+1)$ är sant om $P(n)$ är sant.

④ Dra slutsats

Vi vet enligt ② att $P(1)$ är sant.
Enligt ③ så är därför $P(2)$ sant, o.s.v.

Så alla påståenden $P(n)$ för $n \geq 1$ är sanna. ∎

① Identifiera
② Basfall
③ Induktionssteg
④ Slutsats

Obs! Ibland kan man behöva kolla flera basfall.

Ex. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieras rekursivt genom

$a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ för $n \geq 2$

Visa via induktion att $a_n = 2^n - 1$ för alla $n \geq 1$

Svar:

① Identifiera

P(n) är påståendet
"$a_n = 2^n - 1$"

② Basfall

Vi kallar P(1): "$a_1 = 2^1 - 1$"
$VL = a_1 = 1$ enligt def^n.
$HL = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
Så P(1) är sant.

③ Induktionssteg

Vi ska visa: "Om P(n) är sant är P(n-1) sant".
Så, anta att P(n) är sant för något, specifikt $n \geq 1$.

Dvs anta att $a_n = 2^n - 1$ (induktionsantagande)
Vi vill nu visa att $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

För att se detta, använd def^n av a_{n+1}:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Detta är precis det vi vill bevisa:
att P(n+1) är sant.

④ Slutsats

Eftersom P(1) är sant (②) och "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" för alla $n \geq 1$ så är P(n) sant för alla $n \geq 1$, enl. principen om matematisk induktion.

Ex Fibonacci

Låt $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ för $n\geq 2$

Låt $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vara rötterna till den kvadratiska ekvationen $x^2=x+1$

Visa via induktion att $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ för alla $n\geq 0$

Bevis

① Identifiera: $P(n)$ är "$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$"

② Basfall: Behöver här kolla två basfall då vi lutar oss mot två tidigare fall i induktionssteget.)

Kolla $n=0$: $VL=a_0=0$ $HL=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0-\beta^0)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)=0$

$n=1$: $VL=a_1=1$ $HL=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1$

③ Induktionssteget

Anta att $P(n)$ och $P(n-1)$ är sanna för ett specifikt $n\geq 1$

Vi vill visa att $P(n+1)$ är sant. "$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$"

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^n-\beta^n]+\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^n+\alpha^{n-1}-(\beta^n+\beta^{n-1})]=\frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-1}(\alpha+1)-\beta^{n-1}(\beta+1)]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}\cdot\alpha^2-\beta^{n-1}\cdot\beta^2)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}),$$

vilket är det vi ville visa.

④ Eftersom $P(0)$ och $P(1)$ är sanna (②) och enligt ③ så gäller "$P(0)$ & $P(1)\Rightarrow P(2)$" så $P(2)$ är sant,

"$P(1)$ & $P(2)\Rightarrow P(3)$", enl. ③, så $P(3)$ är sant.

så $P(4)$ är sant, o.s.v. ∎

En kan, om en vill, anta, vid ③ Induktionssteget, att alla tidigare fall är sanna. Dvs, visa att påståendet

"Om $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ är sanna, då är $P(n+1)$ sant" är sant.

Ex. Visa att $n!>2^n$ för $n\geq 4$ via induktion.