KTH Matematik
Examinator: Petter Brändén
Kursansvarig: Olof Sisask

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	programkod

Kontrollskrivning 2A till Diskret Matematik SF1610, för CINTE, vt2018

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd KS nr n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna; använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) Om $0 \leq k \leq n$ så är $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.	X	
b) För Stirlingtalen gäller $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.	X	
c) Om $n \geq 2$ så är $n! \geq n^n$.		X
d) Om A, B, C är mängder så gäller det att $\lvert A \cup B \cup C \rvert \geq \lvert A \rvert + \lvert B \rvert + \lvert C \rvert$.		X
e) $\binom{5}{3} = 10$.	X	
f) Med 8 tillgängliga typer av pålägg kan 8! olika sorters pizza göras.		X

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Beräkna Stirlingtalet $S(4,2)$. (Det räcker att ange rätt svar.)

Svar: 7

b) (1p) Hur många olika (kombinatoriska) ord kan en få genom att ordna bokstäverna i ordet

`ABAKUSALGEBRA`?

(Svaret får innehålla kombinatoriska standarduttryck från kursen. Det räcker att ange rätt svar.)

Svar:

$$\binom{13}{4, 2, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}_{7}}$$

c) (1p) En skål glass ska serveras med 10 glasskulor. Det finns 6 olika smaker tillgängliga. Hur många olika möjliga skålar kan serveras? (Ordningen som glasskulorna serveras på spelar ingen roll, och smakerna får repeteras.)

(Svaret får innehålla kombinatoriska standarduttryck från kursen. Det räcker att ange rätt svar.)

Svar:

$$\binom{10+6-1}{6-1} = \binom{15}{5}$$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bland alla arrangemang av bokstäverna i `OMBUDSMAN`, hur många innehåller `BUD`, `DAM` eller `MAN` som delord?
(Svaret behöver ej förenklas.)

OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges.

Lösning: Vi använder principen om inklusion-exklusion. Låt

$$A = \{\text{orden som innehåller } \texttt{BUD}\}$$
$$B = \{\text{orden som innehåller } \texttt{DAM}\}$$
$$C = \{\text{orden som innehåller } \texttt{MAN}\}.$$

Det frågan ber om är $|A \cup B \cup C|$, och enligt inklusion-exklusion gäller

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Mängden A består av alla arrangemang av de 7 symbolerna `BUD`, `O`, `M`, `M`, `S`, `A`, `N`. Eftersom det finns två `M` men symbolerna annars är olika så gäller enligt satsen om multinomialkoefficienter att

$$|A| = \binom{7}{2, 1, 1, 1, 1, 1} = 7!/2!.$$

På samma sätt ser vi att

$$|B| = |C| = 7!.$$

Eftersom $B \cap C = \emptyset$ så behöver vi nu bara räkna ut $|A \cap B|$ och $|A \cap C|$.

Orden i $A \cap C$ är arrangemang av `BUD`, `MAN`, `O`, `M`, `S`, så

$$|A \cap C| = 5!.$$

Orden i $A \cap B$ är arrangemang av `BUDAM`, `O`, `M`, `S`, `N`, så

$$|A \cap B| = 5!.$$

Så

$$|A \cup B \cup C| = 7!/2 + 2 \cdot 7! - 2 \cdot 5!.$$

Svar: $7!/2 + 2 \cdot 7! - 2 \cdot 5!$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Du ska fördela 4 olika böcker och 7 likadana chokladbitar mellan 3 personer. På hur många sätt kan detta göras? (Det finns inga restriktioner på hur de måste fördelas; det är okej för personer att bli utan.)
OBS. En komplett lösning med fullständiga motiveringar skall ges. Svaret får innehålla kombinatoriska standarduttryck från kursen.

Lösning: Eftersom valen är oberoende så kan vi enligt multiplikationsprincipen behandla böckerna och chokladbitarna separat, och sedan multiplicera ihop svaren.

För böckerna finns det 3 val för vem vi ger den första till, och för varje av dessa finns det sedan 3 val för vad vi gör med den andra, osv. Enligt multiplikationsprincipen finns det $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ val totalt för hur vi delar ut böckerna.

Enligt formeln som härleds ur metoden med 'prickar och pinnar' är antalet sätt att fördela de 7 chokladbitarna bland de 3 personerna

$$\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2},$$

motsvarande antalet sätt att välja positioner för 2 pinnar och 7 prickar bland totalt 9 positioner.

Enligt multiplikationsprincipen är det totala antalet sätt då

Svar: $\quad 3^4 \cdot \binom{9}{2} \quad (= 81 \cdot 36 = 2916).$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bevisa att det för alla heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\binom{2n}{3} = \binom{n}{0}\binom{n}{3} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{1} + \binom{n}{3}\binom{n}{0}.$$

(Om det hjälper så kan du tänka dig att du har en grupp $2n$ människor, varav n studerar på CINTE och n studerar på TCOMK.)

Kom ihåg att ett bevis är en **förklaring** — skriv hela meningar — med **fullständig motivation**.

Lösning: Vänsterledet räknar antalet sätt att välja ut en grupp med 3 personer bland alla $2n$ studenter. Vi visar att högerledet räknar samma sak, vilket visar att leden är lika.

Nämligen räknar högerledet antalet 3-personsgrupper baserat på hur många från CINTE vi valde och hur många från TCOMK: termen $\binom{n}{0}\binom{n}{3}$ i högerledet är antalet sätt att välja 0 studenter från CINTE och 3 studenter från TCOMK, enligt multiplikationsprincipen. Separat från dessa finns det $\binom{n}{1}\binom{n}{2}$ sätt att välja 1 student från CINTE och 2 från TCOMK, igen enligt multiplikationsprincipen. Osv för alla termer i summan. Dessa uppdelningar ger oss varje sätt att välja totalt 3 studenter på bland alla $2n$, och det ger oss varje sätt precis en gång. Alltså är högerledet också antalet sätt att välja 3 studenter bland alla $2n$, vilket var det som skulle visas.