O.S.

Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till övningsblad nr 5, SF1610 Diskret matematik CINTE, vt2018

1. (E) Bestäm antalet tal mellan 1 och 900 som inte är delbara med något av talen 4, 5 eller 6.

Det är lättare att arbeta med tal i $U := \{1, 2, \ldots, 900\}$ som *är* delbara med något visst tal snarare än med tal som *inte är* det, så vi räknar helt enkelt ut antalet tal som är delbara med 4, 5 eller 6 och tar bort det från 900.

Utförlig lösning
Mängden av tal i U som är delbara med 4, 5 eller 6 är uppgjord av tre mängder som är enklare att arbeta med, nämligen

$$\begin{aligned} A &= \{n \in U : 4 \text{ delar } n\} = \{4, 8, 12, 16, \ldots, 900\} \\ B &= \{n \in U : 5 \text{ delar } n\} = \{5, 10, 15, 20, \ldots, 900\} \\ C &= \{n \in U : 6 \text{ delar } n\} = \{6, 12, 18, \ldots, 900\}. \end{aligned}$$

Vi har då att $\{n \in U : 4, 5 \text{ eller } 6 \text{ delar } n\} = A \cup B \cup C$. Enligt principen om inklusion-exklusion har vi då att

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

så vi räknar ut storleken på dessa mängder. Vi har att $|A| = 900/4 = 225$, $|B| = 900/5 = 180$, och $|C| = 900/6 = 150$. För snitten ser vi att

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in U : 4 \text{ och } 5 \text{ delar } n\} = \{n \in U : \mathrm{lcm}(4, 5) = 20 \text{ delar } n\} \\ A \cap C &= \{n \in U : 4 \text{ och } 6 \text{ delar } n\} = \{n \in U : \mathrm{lcm}(4, 6) = 12 \text{ delar } n\} \\ B \cap C &= \{n \in U : 5 \text{ och } 6 \text{ delar } n\} = \{n \in U : \mathrm{lcm}(5, 6) = 30 \text{ delar } n\} \\ A \cap B \cap C &= \{n \in U : \mathrm{lcm}(4, 5, 6) = 60 \text{ delar } n\}. \end{aligned}$$

Alltså är antalet tal i U som är delbara med 4, 5 eller 6

$$|A \cup B \cup C| = 225 + 180 + 150 - 900/20 - 900/12 - 900/30 + 900/60 = 420.$$

Svar: $900 - 420 = 480$. ■

Kortare lösning. Det finns $900/4 = 225$ multiplar av 4 i U, $900/5 = 180$ multiplar av 5 och $900/6 = 150$ multiplar av 6, vilket ger totalt $225+180+150$ tal. Men då har vi räknat med multiplar av $\mathrm{lcm}(4, 5) = 20$ två gånger, och detsamma för multiplar av $\mathrm{lcm}(4, 6) = 12$ och $\mathrm{lcm}(5, 6) = 30$, så vi tar bort dessa en gång, vilket ger $225 + 180 + 150 - 45 - 75 - 30$. Men då har vi räknat bort alla multiplar av $\mathrm{lcm}(4, 5, 6) = 60$, som det finns 15 av: alltså måste vi lägga tillbaka dessa. Så vi får

$$225 + 180 + 150 - 45 - 75 - 30 + 15 = 420$$

tal mellan 1 och 900 som är delbara med 4, 5 eller 6. Alltså finns det $900-420 = 480$ tal som inte är det. ■

2. (E) Bestäm antalet ord en kan bilda med hjälp av bokstäverna i ordet `DISKRET` som är sådana att inget av orden `SIK`, `RET` eller `DIS` förekommer som delord. T.ex. är ordet `DSIKRTE` otillåtet eftersom bokstäverna `S`, `I` och `K` kommer direkt efter varandra.

Det finns $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt att ordna de 7 bokstäverna i `DISKRET` på. (Varför?) För att räkna ut hur många av dessa innehåller `SIK`, `RET` eller `DIS` använder vi inklusion-exklusion. Hur många av orden innehåller `SIK`? Detta är permutationerna av `SIK`, `D`, `R`, `E`, `T`, varav det finns 5!. Det finns lika många som innehåller `RET`, och lika många som innehåller `DIS`. Hur många innehåller både `SIK` och `RET`? Detta är permutationerna av `SIK`, `RET`, `D`, varav det finns 3!. Det finns lika många som innehåller både `RET` och `DIS`, men det finns inga som innehåller `SIK` och `DIS` (för både `SI` och `IS` kan inte båda förekomma), och inga som innehåller alla tre `SIK`, `RET` och `DIS`. Enligt inklusion-exklusion finns det därför

$$5! + 5! + 5! - 3! - 3! = 348$$

ord som innehåller något av orden `SIK`, `RET` eller `DIS`. Antalet ord som *inte* innehåller något av dessa är därför

$$\text{Svar: } 7! - 348 \quad (= 4692).$$

■

3. (D) Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$

som är sådana att $0 \leqslant x_1 \leqslant 3$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 4$ och $0 \leqslant x_3 \leqslant 5$.

Vi använder metoden av prickar och pinnar. Vi tänker oss att vi vill fördela 20 prickar mellan x_1, x_2, x_3 och x_4, och vi gör detta genom att lägga ut prickarna i en rad med 3 pinnar emellan för att separera prickarna in i 4 grupper: de till vänster om den första pinnen går till x_1, de mellan första och andra pinnen går till x_2, osv. T.ex. är

$$\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

en sådan fördelning; den ger 3 till x_1, 2 till x_2, 4 till x_3 och 11 till x_4.

Eftersom vi vill att $0 \leqslant x_1 \leqslant 3$ så finns det 4 möjligheter för var vi lägger pinne 1. För varje sådan möjlighet finns det sedan 5 möjligheter för var vi lägger pinne 2 (så att $0 \leqslant x_2 \leqslant 4$), och för varje sådan finns det 6 möjligheter för var vi lägger pinne 3. Enligt multiplikationsprincipen finns det därför $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ möjligheter totalt; alltså finns det

Svar: 120

lösningar till ekvationen som uppfyller kraven. ■

Alternativt: det finns 4 val för x_1 (något av talen $\{0, 1, 2, 3\}$), och för varje av dessa finns det 5 val för x_2, och för varje av dessa finns det 6 val för x_3 — sedan är x_4 bestämt. Enligt multiplikationsprincipen finns det alltså $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ möjligheter. ■

(Vilken förklaring förstår du bäst?)

4. (C) Bestäm antalet sätt att dela in mängden $\{1, 2, \ldots, 7\}$ i tre icketomma delmängder på ett sådant sätt att elementen 1 och 2 hamnar i olika delmängder.

Det finns $S(7, 3)$ sätt att dela in denna mängd med 7 objekt i 3 icketomma delmängder — detta enligt definitionen av Stirlingtalen. I hur många av dessa ligger 1 och 2 i samma delmängd? Om 1 och 2 alltid ska vara tillsammans kan vi tänka på dem som ett enda objekt 1-2, och det finns $S(6, 3)$ sätt att dela upp $\{1\text{-}2, 3, \ldots, 7\}$ i tre icketomma delmängder. Alltså finns det $S(7, 3) - S(6, 3)$ sätt att dela upp $\{1, 2, \ldots, 7\}$ i tre icketomma delmängder så att elementen 1 och 2 hamnar i olika delmängder.

För att räkna ut dessa Stirlingtal kan vi bygga upp en tabell genom att använda rekursionen $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$ och basfallen $S(n, 1) = S(n, n) = 1$. Vi bygger upp rad per rad:

$n \backslash k$	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4			
5			
6			
7			

$\longmapsto$

$n \backslash k$	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5			
6			
7			

$\longmapsto$

$n \backslash k$	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6			
7			

$\longmapsto$

$\longmapsto$

$n \backslash k$	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6	1	31	90
7			

$\longmapsto$

$n \backslash k$	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6	1	31	90
7	$*$	$*$	301

Som ett räkneexempel, hur fick vi fram att $S(7, 3) = 301$? Vi använde $S(7, 3) = S(6, 2) + 3 \cdot S(6, 3) = 31 + 3 \cdot 90 = 301$.

Alltså är svaret

$$\text{Svar: } S(7, 3) - S(6, 3) = 301 - 90 = 211. \qquad \blacksquare$$

5. (C) En klass som består av 14 flickor och 15 pojkar skall utse tre delgrupper: den gröna, den blå och den gula gruppen, med vardera fem barn. På hur många olika sätt kan dessa grupper bildas om varje grupp skall innehålla minst en flicka?

Vi använder multinomialkoefficienter. Vi definierade multinomialkoefficienten $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ som antalet sätt att dela upp n olika objekt i m etikerade grupper, där grupp 1 ska ha storlek k_1, grupp 2 storlek k_2 osv.

Om vi bortser från att varje grupp ska innehålla minst en flicka så finns det

$$\binom{29}{5,5,5,14}$$

sätt att dela upp de 29 barnen i grupperna (grön, blå, gul, övriga). Nu tar vi bort sätten där någon grupp får endast pojkar, och för att räkna ut hur många sådana det finns använder vi inklusion-exklusion med mängderna

$$\begin{aligned} A &= \{\text{sätten där gröna gruppen får endast pojkar}\} \\ B &= \{\text{sätten där blåa gruppen får endast pojkar}\} \\ C &= \{\text{sätten där gula gruppen får endast pojkar}\}. \end{aligned}$$

Bland alla ovan sätt så är antalet där grupp grön får endast pojkar

$$|A| = \binom{15}{5}\binom{24}{5,5,14},$$

för det finns $\binom{15}{5}$ sätt att välja pojkarna för grupp grön, och för varje av dessa så finns det $\binom{24}{5,5,14}$ sätt att välja 5 av de återstående barnen till grupp blå, 5 till grupp gul, och 14 till grupp övriga. Detsamma gäller för $|B|$ och $|C|$.

Ett liknande resonemang ger att antalet sätt där både grupp grön och grupp blå får endast pojkar är

$$|A \cap B| = \binom{15}{5,5,5} \cdot \binom{19}{5}.$$

(Av 15 pojkar går 5 till grön, 5 till blå, och 5 blir över. Utav dessa sista 5 och de 14 flickorna ska en sedan välja 5 som går till grupp gul.) Detsamma gäller för $|A \cap C|$ och $|B \cap C|$.

På hur många sätt får alla tre grupperna endast pojkar? $|A \cap B \cap C| = \binom{15}{5,5,5}$.

Enligt principen om inklusion-exklusion blir därför svaret

$$\text{Svar: } \binom{29}{5,5,5,14} - 3\binom{15}{5}\binom{24}{5,5,14} + 3\binom{15}{5,5,5}\binom{19}{5} - \binom{15}{5,5,5}. \quad \blacksquare$$

6. (B) En ”vanlig” sexsidig tärning kastas 8 gånger. Hur stor är sannolikheten att varje antal ”ögon” kommer att förekomma minst en gång?

Enligt multiplikationsprincipen finns det 6^8 olika möjligheter för hur tärningskastssekvensen kan se ut: 6 möjligheter för det första kastet, och för varje av dessa finns det 6 möjligheter för det andra, osv. I hur många av dessa sätt förekommer *inte* varje av numren $1, 2, 3, 4, 5, 6$?

Låt

$$A_1 = \{\text{sekvenserna där 1 inte förekommer}\},$$
$$A_2 = \{\text{sekvenserna där 2 inte förekommer}\},$$

osv. Vi är intresserade av $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6|$. Enligt principen om inklusion-exklusion kan vi räkna ut detta genom att räkna ut storleken på alla de möjliga snitten av mängderna.

Först har vi att $|A_1| = 5^8$, för A_1 består av alla sekvenser av längd 8 som en kan få med symbolerna $2, 3, 4, 5, 6$. Liknande är $|A_j| = 5^8$ för varje j.

Sedan ser vi att $|A_1 \cap A_2| = 4^8$, för denna mängd består av alla sekvenser av längd 8 som en kan få med symbolerna $3, 4, 5, 6$. Detsamma gäller för varje snitt $A_i \cap A_j$ med $i < j$; notera att det finns $\binom{6}{2}$ sådana snitt.

Liknande ser vi att $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^8$, och detsamma för alla de $\binom{6}{3}$ möjliga snitten av tre av mängderna.

Sedan har vi förstås att $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2^8$, och detsamma för alla de $\binom{6}{4}$ möjliga snitten av fyra av mängderna.

Nästan slutligen har vi att $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1^8$ (bara 6:an får förekomma) och detsamma för alla de $\binom{6}{5}$ möjliga snitten av fem av mängderna.

Slutligen är $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 0$. (Varför?)

Enligt principen om inklusion-exklusion har vi därför att antalet kastsekvenser av längd 8 där det finns åtminstone ett tal som inte förekommer någon gång är

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6| = \binom{6}{1}5^8 - \binom{6}{2}4^8 + \binom{6}{3}3^8 - \binom{6}{4}2^8 + \binom{6}{5}1^8.$$

Antalet sekvenser där varje tal förekommer åtminstone en gång är därför 6^8 minus detta, och eftersom varje sekvens är lika sannolik får vi

$$\text{Svar:} \quad \frac{6^8 - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \binom{6}{4}2^8 - \binom{6}{5}1^8}{6^8}. \qquad \blacksquare$$

7. (B) På hur många olika sätt kan 15 barn i en klass ställa upp sig i tre olika led?

   Vi börjar med att be barnen ställa sig upp i ett led: detta går på 15! olika sätt.

   För varje sådant sätt delar vi sedan upp ledet i 3 delar genom att välja två av de 14 möjliga mellanrummen mellan barnen som skärpunkter: dessa går att välja på $\binom{14}{2}$ sätt.

   T.ex, om barnen heter $\mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots, \mathtt{15}$ och vi i första steget väljer ordningen

   `1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15`

   så väljer vi kanske skärpunkterna

   `1 2 3 4 5 | 6 7 8 9 10 | 11 12 13 14 15.`

   Varenda möjliga kombination av tre leder kan fås på detta sätt, men en får varje kombination 3! gånger: t.ex. får vi de tre leden ovan också från

   `11 12 13 14 15 | 1 2 3 4 5 | 6 7 8 9 10`

   (där vi började med en annan ursprunglig ordning).

   Alltså får vi dela de $15! \cdot \binom{14}{2}$ sätten vi hade att få fram 3 ordnade led med antalet ordningar 3! av leden, för att ge

   $$\text{Svar:} \quad 15! \cdot \binom{14}{2} / 3!$$ ■

8. (D) Visa att om 14 tal väljs på måfå så finns bland dessa 14 tal två vars differens är delbar med 13.

   Använd postfacksprincipen, med de 14 talen som brev och med postfacken $0, 1, \ldots, 12$ motsvarande resten vid division med 13. ■

E-mail address: `sisask@kth.se`