

Repetition inför KS1 på föreläsningen imorgon (del av

Gamla KS ligger under "Uppgifter" på Canvas

"Relationer" utgår denna kursomgång

Ex 1 En restaurang serverar 4 olika maträtter och 3 olika drycker, vatten, saft och juice

Hur många olika möjliga kombinationer av mat+dryck finns?

Svar: 12

Rätt 1	Rätt 2	Rätt 3	Rätt 4	
/ \ \	/ \ \	/ \ \	/ \ \	← 4 val
Vatten Saft Juice	V S J	V S J	V S J	← 3 val

V; har 4 grupper med 3 delval i varje, vilket ger  $4 \cdot 3 = 12$  olika kombinationer.

$(R_1, V), (R_1, S), (R_1, J),$

$(R_2, V), (R_2, S), (R_2, J),$

$(R_3, V), (R_3, S), (R_3, J),$

$(R_4, V), (R_4, S), (R_4, J),$

## Sats (Multiplikationsprincipen)

Om det finns

- $x$  möjligheter för ett utfall  $X$ , och det för varje av dessa finns
- $y$  möjligheter för ett utfall  $Y$

då finns det  $x \cdot y$  möjligheter för kombinationen/paret  $(X, Y)$ .

Exempel 2: 10 personer tävlar, 1:a, 2:a och 3:e-plats utses.

Det finns 10 möjligheter för 1:a plats.

För varje av dessa finns 9 möjligheter för 2:a plats.

För varje av dessa finns 8 möjligheter för 3:e plats.

Så enligt MP finns  $10 \cdot 9$  möjligheter för 1:a och 2:a plats.

För varje av dessa finns 8 möjligheter för 3:e plats

Totalt  $10 \cdot 9 \cdot 8$  möjligheter för 1:a, 2:a och 3:e plats.

Ex. 4: Hur många portkoder av längd 4 finns med siffrorna 0-5?

Vi har 6 möjligheter för 1:a siffran och FÖRVAR 6 möjligheter för 2:a o.s.v.

Så  $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$  olika möjligheter.

Om koden inte får innehålla två lika siffror har vi 6 val för 1:a siffran och 5 val för var och en av de följande siffrorna.

Så enl. MP finns  $6 \cdot 5^3$  möjligheter

Ex 6. 10 flickor och 10 pojkar ska hålla hand, två och två med en flicka och en pojke i varje par.

Vi numrerar flickorna 1-10.

För F1 finns det 10 möjliga pojkar

F2 finns det 9 möjliga pojkar

⋮

F10 finns det 1 möjlig pojke

Enligt MP finns  $10!$  möjligheter

Om flicka A och pojke B vägrar hålla hand finns  $9 \cdot 9!$  möjligheter.

För flicka A finns 9 möjligheter, och för resterande  $9!$  möjligh.

Alternativ lösning: Om flicka A håller hand med pojke B finns  $9!$  olika parmöjligheter för resterande.  $10! - 9! = 10 \cdot 9! - 9! = 9 \cdot 9!$

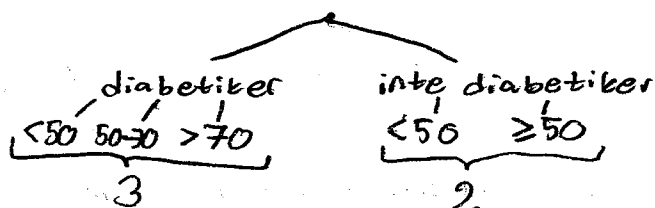
Sats 8 Om  $A$  är en mängd med  $|A| = n$  så har den  $2^n$  delmängder, dvs  $|P(A)| = 2^n$ .

Bevis Lista elementen i  $A$  som  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . En delmängd till  $A$  motsvarar ett val för varje  $a_i$ , om  $a_i$  ligger i mängden eller inte.

Det finns två möjligheter för varje element.

Totalt finns  $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_n = 2^n$  möjligheter enligt MP

Ex 10: Patienter ska delas upp i kategorier efter om de är diabetiker och hur mycket de väger.



Det finns  $3+2=5$  kategorier totalt (Additionsprincipen)

### Binomialkoefficienter

Antalet delmängder till  $A$ , en mängd med  $n$  element, är  $2^n$ .  
Hur många delmängder av storlek  $k$ ?

Def<sup>n</sup> Binomialkoefficienten  $\binom{n}{k}$

" $n$  välj  $k$ " / " $n$  choose  $k$ "

är antalet delmängder av storlek  $k$  i en mängd av storlek  $n$ .

$$\binom{n}{k} = |\{B \subseteq \{1, 2, \dots, n\} : |B| = k\}|$$

Dvs, det är antalet sätt att välja  $k$  saker från  $n$  olika saker (där ordningen vi väljer på inte spelar roll). "icke-ordnade urval"

Ex  $\binom{n}{k} \leq 2^n$   $\binom{n}{1} = n$ .

Ex Hur många olika 5-korts-kombinationer finns det om man delar ut kort från en kortlek med 52 kort?

Svar:  $\binom{52}{5}$

\* Sats Låt  $n \geq k \geq 0$  vara heltal. Då är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}$$

Så antalet 5-korts-kombinationer av 52 kort är

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960$$

Sats Antalet sätt att ställa  $k$  olika objekt i ordning är  $k!$ .

(Bevis: MP)

Bevis av \*: Vi visar att

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

①                      ②

"Bijektivt bevis" Låt  $A$  vara en mängd av storlek  $n$ ,  
(t.ex.  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ )

② är antalet sätt att välja ut  $k$  olika saker från  $A$   
där ordningen spelar roll:

$n$  val för 1:a saken  
 $(n-1) \text{ --- } 11 \text{ --- } 2:a \text{ saken}$   
 $\vdots$   
 $n-(k-1) \text{ --- } 11 \text{ --- } k:e \text{ saken}$

Så enligt MP finns det ② olika möjligheter

Men ① räknar samma sak:  $\binom{n}{k}$  är antalet sätt att välja ut  $k$  objekt från  $A$ , utan någon ordning. Sedan finns det frvrd  $k!$  sätt att ordna dessa  $k$  objekt på. Så enligt MP finns det  $\binom{n}{k} \cdot k!$  sätt att ordna  $k$  objekt valda från  $n$  olika.  $\square$

Sats (Ordnade urval)

Antalet sätt att ordna  $k$  element som väljs från  $n$  olika  
är  $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

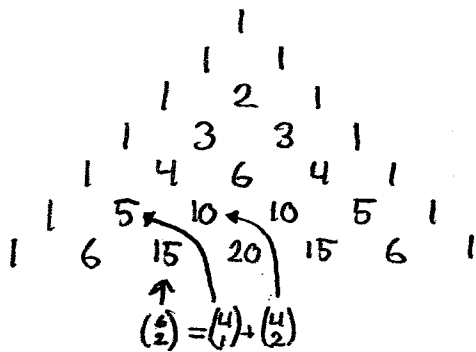
Sats För alla  $n \geq k \geq 0$  så är

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Bevis Att välja  $k$  element från  $n$  är detsamma som att  
välja bort  $n-k$  element.  $\square$

Också  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$

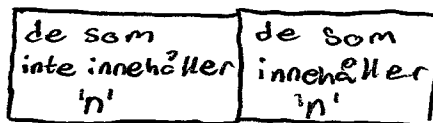
Pascals triangel



Sats  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Bevis  $\binom{n}{k}$  är antalet sätt att välja  $k$  saker från  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Jag kan göra detta genom att välja  $k$  saker från  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  och lägga till elementet  $n$ .  $\square$



← Delmängder till  $\{1, 2, \dots, n\}$  av storlek  $k$ .

Sats

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \dots$$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$$