Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

4. Derivata

Innehåll. Vi ska definiera begreppet derivata, härleda derivatan av några grundläggande funktioner, samt formulera och bevisa deriveringsreglerna: produktregeln, kvotregeln och kedjeregeln. Dessutom ska vi diskutera hur derivatan kan tolkas och användas. Mer om detta kommer också i senare föreläsningar.

Introduktion. Ett av huvudbegreppen i denna kurs är **derivata**. Begreppets betydelse slås fast i en precis definition, men oftast är det inte definitionen man använder för att räkna ut derivator. Istället använder man de **deriveringsregler** som man härleder med hjälp av definitionen: produktregeln, kvotregeln och kedjeregeln. Med hjälp av dessa kan man räkna ut derivatorna av många funktioner. Men det är definitionen som säger vad det är man då har räknat ut.

Derivatan av en funktion i en punkt är ett mått på funktionens förändringstakt i punkten. Derivatan i punkten är lutningen av grafen där och är riktningskoefficienten för tangenten. Detta betyder också att man kan använda derivatan i en punkt för att approximera funktionen i näraliggande punkter, s k linjär approximation.

Definition av derivata. Funktionen f sägs vara deriverbar i en punkt a om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas i så fall derivatan av f i a, vilket skrivs $f'(a)$ eller $\frac{df}{dx}(a)$ eller $Df(a)$.

En funktion som är deriverbar på detta sätt i varje punkt av sin definitionsmängd sägs vara en deriverbar funktion. Derivatan till en sådan funktion f är då en ny funktion f'.

Tolkningar av derivata. Derivatan av en funktion i en punkt anger lutningen av funktionsgrafen och är riktningskoefficienten för tangenten. Om funktionen anger position och variabeln anger tid, så anger derivatan hastighet. Allmänt är derivatan ett mått på funktionens förändringstakt. Alla funktioner är inte deriverbara, och definitionen ger ett villkor som ska gälla för att funktionen ska vara deriverbar.

Alternativa formuleringar. Observera att det finns flera ekvivalenta sätt att skriva definitionen, ty (t ex)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Tangent. En ekvation till tangentlinjen till funktionsgrafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ kan med enpunktsformeln skrivas

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Linjär approximation. Derivatan av en funktion i en punkt kan användas för att approximera funktionen i näraliggande punkter. Detta kallas linjär approximation:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \qquad \text{för } x \text{ nära } a.$$

Sats. Om f är deriverbar i a så måste f också vara kontinuerlig i a.

Bevis Om f är deriverbar i a så gäller när x går mot a att

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \to f'(a) \cdot 0 = 0$$

dvs $f(x) - f(a) \to 0$ när $x \to a$ vilket betyder att f är kontinuerlig i a.

Exempel. Omvändningen till satsen ovan gäller inte. En exempel som visar detta är absolutbeloppsfunktionen $f(x) = |x|$ som är kontinuerlig i $x = 0$ men inte deriverbar i $x = 0$. Ty gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

saknas: högergränsvärdet är 1 medan vänstergränsvärdet är -1. Så absolutbeloppsfunktionen är inte deriverbar i 0. Detta syns på funktionsgrafen så att den har en spets i origo. Däremot är förstås absolutbeloppsfunktionen deriverbar i alla $x \neq 0$.

Några grundläggande funktioners derivator. Med hjälp av derivatans definition kan vi härleda derivatorna av några grundläggande funktioner, t ex visa att

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$$

Ni kommer säkert ihåg från gymnasiet också att e^x är sin egen derivata och att derivatan av $\ln x$ är $1/x$. Det är också lätt att med definitionen visa att derivatan av en konstant funktion är noll.

Deriveringsregler. För att kunna derivera kombinationer av funktioner använder man deriveringsreglerna, som gäller om f och g är deriverbara:

$kf(x)$ har derivata $kf'(x)$ (k konstant)

$f(x) + g(x)$ har derivata $f'(x) + g'(x)$

Produktregeln: $f(x)g(x)$ har derivata $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Kvotregeln: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ har derivata $\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (om $g(x) \neq 0$)

Kedjeregeln: $f(g(x))$ har derivata $f'(g(x))g'(x)$

Bevis. Vi antar att f och g är deriverbara och använder derivatans definition. Enligt definitionen ges derivatan av $kf(x)$ av

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}=\\&k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\\&kf'(x).\end{aligned}$$

Enligt definitionen ges derivatan av $f(x)+g(x)$ av

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=\\&f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

Enligt definitionen ges derivatan av $f(x)g(x)$ av

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=\\&f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Kvotregeln bevisar man enklast genom att använda produktregeln på $f(x)\cdot(1/g(x))$ och använda kedjeregeln när man deriverar $1/g(x)$. Och kedjeregeln kan man bevisa (åtminstone då g uppfyller att $g(x+h)-g(x)\neq 0$ för alla tillräckligt små h) genom att studera gränsvärdet

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\\&f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

Med hjälp av några grundläggande derivator och deriveringsreglerna kan man nu derivera fler funktioner utan att använda derivatans definition, t ex kan man med kvotregeln räkna ut att $\tan x$ har derivata $\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$ vilket kan förenklas till $1/\cos^2 x$ eller lika gärna till $1+\tan^2 x$ (det är samma sak).

Derivator av högre ordning. Eftersom derivatan till en deriverbar funktion är en ny funktion så kan vi försöka derivera den. Om den är deriverbar så har vi så fall tagit fram andraderivatan till den ursprungliga funktionen. Skrivs ofta $f''(x)$ eller $\frac{d^2f}{dx^2}$. Och så vidare! Vi återkommer till hur detta kan tolkas.

Träna mycket på att använda deriveringsreglerna. De måste sitta i fingrarna!

Vi kommer senare att använda derivata för att hitta max och min. Då är följande sats användbar:

Sats. Om funktionen f antar sitt största eller minsta värde i en inre punkt a i definitionsmängden och funktionen är deriverbar i a, så måste $f'(a) = 0$.

Bevis. Vi vet att $f'(a)$ är gränsvärdet när $h \to 0$ av

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Om $f(a)$ är funktionens största värde så är täljaren här negativ (eller möjligtvis noll), oavsett om h är positiv eller negativ. Det betyder att för positiva h är differenskvoten negativ (eller noll) och för negativa h är differenskvoten positiv (eller noll). I det första fallet blir gränsvärdet negativt (eller noll) och det andra fallet blir gränsvärdet positivt (eller noll). Men gränsvärdet blir samma oavsett om h går mot noll från höger eller vänster. Så gränsvärdet, dvs derivatan, måste vara noll. På samma sätt bevisar man motsvarande för minsta värde.