SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 15

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Gör partialbråksuppdelning och beräkna integralen:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1/4}{x-3} - \frac{1/4}{x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\ln 3$$

pq: $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ el. $x=-1 \Rightarrow x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

PBU. $\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)} \Leftrightarrow$

$1 = A(x+1) + B(x-3) \Leftrightarrow A+B=0$ och $A-3B=1 \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-1/4 \end{cases}$

Så: $\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1/4}{x-3} - \frac{1/4}{x+1}$

Anmäl er till tentan

Anmäl er till tentan nu.

Det görs via ”mina sidor”.

Om det inte går, mejla studentexpeditionen (se canvas)

$$
\begin{array}{r}
x - 3 \\
x^2+3x+2 \,\big)\, \overline{x^3+1} \\
-(x^3+3x^2+2x) \\
\hline
-3x^2-2x+1 \\
-(-3x^2-9x-6) \\
\hline
7x+7
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+3x+2} = \int \left(x-3 + \frac{7x+7}{x^2+3x+2} \right)$$

Idag:

- Variabelsubstitution i integraler forts
- Partiell integration forts
- **Partialbråksuppdelning**
- Mini-tenta på integraler

Problemet vi löser är detta: om man inte direkt ser en primitiv funktion – vad kan man göra då?

De flesta uppgifter vi räknar idag är gamla tentauppgifter!

Variabelsubstitution

$$\textbf{Med gränser:} \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Villkor: g är kontinuerligt deriverbar och f är kontinuerlig på g:s värdemängd (när x varierar i $[a, b]$)

Bevis: Av villkoren följer att f har en primitiv F. Kedjeregeln för derivator ger tillsammans med huvudsatsen:

$$VL = F(g(b)) - F(g(a)) = HL$$

$$\textbf{Utan gränser:} \int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Exempel på variabelsubstitution

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1+e^x \\ \frac{du}{dx} = e^x \\ du = e^x\,dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \text{ ger } u=2 \\ x=\ln 3 \text{ ger } u=4 \end{array} \right\} = \int_2^4 \frac{1}{u}\,du = \ldots$$

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2+4 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ dt = 2x\,dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \text{ ger } t=4 \\ x=2 \text{ ger } t=8 \end{array} \right\}$$

$$= \int_4^8 \frac{1/2}{t^{1/3}}\,dt = \frac{1}{2}\int_4^8 t^{-1/3}\,dt = \ldots$$

Partiell integration (med gränser)

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Villkor: F och g har kontinuerliga derivator och $F' = f$

Bevis: Se film 14b

Partiell integration (utan gränser)

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Exempel på partiell integration

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \overset{\text{p.i.}}{=} \Big[e^x \sin x \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \overset{\text{p.i.}}{=} e^{\pi/2} -$$

$$\left(\Big[e^x \cos x \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (-\sin x) \, dx \right) = e^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$$

$$I = e^{\pi/2} - 1 - I \Rightarrow I = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

$$\int_0^1 \arctan x \, dx$$

Partialbråksuppdelning

Partialbråksuppdelning. Görs vid rationella integrander:

$$\int_1^2 \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right)\,dx = \ldots$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x-12}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-6}\right)\,dx = \ldots$$

(Att tänka på: 1. Nämnaren ska ha högre grad än täljaren, annars görs polynomdivision först. 2. Särskild ansättning krävs vid dubbelrot och komplexa rötter i nämnaren)

Exempel på partialbråksuppdelning

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx = \int\left(\frac{4/5}{x-4}+\frac{1/5}{x+1}\right)dx = \frac{4}{5}\ln|x-4| + \frac{1}{5}\ln|x+1| + C$$

$x^2-3x-4=0$ när $x=4$ el. $x=-1$ $\quad \dfrac{x}{x^2-3x-4} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)}$

$\Leftrightarrow x = A(x+1)+B(x-4)$ Ger $A=\frac{4}{5}$

$B = 1/5$

$$\int_0^1 \frac{3x+10}{x^3+2x^2-4x-8}\,dx$$

Se att $x=2$ är nollst. till nämnaren.

Div: $\quad x-2 \,\big)\, x^3+2x^2-4x-8$, kvot $x^2+4x+4 = (x+2)^2$

$\vdots$

0

Exempel på partialbråksuppdelning

$$\int_0^1 \frac{3x+10}{x^3+2x^2-4x-8}\,dx \text{ forts}$$

$$\frac{3x+10}{x^3+2x^2-4x-8} = \frac{3x+10}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x+10 = A(x+2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A-4B-2C=10 \\ 4A+C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

Svar: $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}$

Exempel på partialbråksuppdelning

$$\int_0^1 \frac{3x+10}{x^3+2x^2-4x-8}\,dx \text{ forts}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx =$$

$$= \left[\ln|x-2| - \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} \right]_0^1 = -\ln 3 - \frac{1}{6}$$

Lika men ändå ack så olika:

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx = \frac{1}{6}\ln|3+x| - \frac{1}{6}\ln|3-x| + C$$

PBU

$$\int \frac{1}{9+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$$

Bryt ut $\frac{1}{9}$

$$\int \frac{x}{9+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(9+x^2) + C$$

subst. $9 + x^2 = u$

Exempel på partialbråksuppdelning

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan x + C$$

$$\frac{x+1}{x^4+x^2} = \frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)} \iff$$

$$x+1 = Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2 \iff \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \\ D=-1 \end{cases}$$

Exempel på partialbråksuppdelning

Läxa

Att göra:

Räkna Hemuppgifter5.pdf. Läs vid behov exempel i boken och gör några enklare övningsuppgifter där. Viktigt att kunna variabelsubstitution, partiell integration och partialbråksuppdelning.

Mini-tenta på integraler

1. Beräkna $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ och $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$

2. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \arcsin x$

3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x^2+x}$

4. Låt $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till F kring 0.

Mini-tenta på integraler

Vi anv. variabelsubst :

1. Beräkna $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ och $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$

$$= \left\{\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} x=1 \text{ ger } u=1 \\ x=4 \text{ ger } u=2 \end{array}\right)$$

$$= \int_1^2 2e^u\,du = 2\Big[e^u\Big]_1^2$$

$$= 2(e^2-e)$$

Med partiell int. får vi:

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx \overset{p.i.}{=} \Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x(-\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2x\cos x\,dx \overset{p.i.}{=} \Big[2x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\sin x\,dx$$

$$= \pi - \Big[2(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

Vi använde i första steget part. integration.

2. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \arcsin x$

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \text{ godt. konst.}$$

$$\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x\,dx \\ -\frac{du}{2} = x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{-1}{2\sqrt{u}} \, du = -\sqrt{u} + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

Vi anv. part.bråksuppdeln. av integranden:

3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x^2+x}$

$$\int_1^n \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \Big[\ln x - \ln(x+1)\Big]_1^n = \ln n - \ln(n+1) + \ln 2$$

$$= \underbrace{\ln \frac{n}{n+1}}_{\to 0} + \ln 2 \longrightarrow \ln 2 \quad \text{när } n \to \infty$$

4. Låt $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till F kring 0.

vi använde huvudsatsen:

$$F(0) = \int_0^0 \cdots = 0, \quad F'(x) = e^{-x^2} \text{ så } F'(0) = 1$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt \approx 0 + 1\cdot(x-0) = \underline{\underline{x}}$$

T.P. av grad 1 till F kring 0.