



Uppgifter att träna på i Modul 4

REKOMMENDERADE UPPGIFTER UR KURSBOKEN CALCULUS

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 4.1: 5, 7, 9, 16, 17. Kapitel 4.2: 7, 9. Kapitel 4.3: 1, 5, 17. Kapitel 4.4: 3, 14, 29, 35. Kapitel 4.5: 5, 11, 27, 31. Kapitel 4.6: 3, 5, 9, 17, 31. Kapitel 4.8: 1, 7, 13, 21. Kapitel 4.9: 1, 3, 13, 30. Kapitel 4.10: 1, 5, 9

Om uppgifterna nedan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken som listas ovan. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

SKARPA ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = xe^{-x}$ genom att göra en derivataundersökning, hitta alla lokala extrempunkter och beräkna relevanta gränsvärden.

Uppgift 2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ genom att göra en derivataundersökning, hitta alla lokala extrempunkter och beräkna relevanta gränsvärden.

Uppgift 3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$ genom att göra en derivataundersökning, hitta alla lokala extrempunkter och beräkna relevanta gränsvärden.

Uppgift 4. Låt $f(x) = e^{-x} \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Bestäm största och minsta värdet av funktionen om de finns.

Uppgift 5. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \arctan x - \frac{1}{1+x^2}$. Har f något största eller minsta värde?

Uppgift 6. Hur många lösningar har ekvationen $x \ln x = -1/2$?

Uppgift 7. Låt $f(x) = e^{-1/x^2}$. Gör följande:

- A. Bestäm definitionsmängden.
- B. Avgör i vilka punkter f är kontinuerlig.
- C. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- D. Beräkna $f'(x)$ och ange i vilka punkter f är deriverbar.
- E. Gör ett teckenschema för $f'(x)$
- F. Skissa grafen $y = f(x)$ med hjälp av ovanstående.

Uppgift 8. På vilka intervall är $f(x) = xe^{-x}$ (strängt) konvex respektive konkav?

Uppgift 9. Bestäm alla asymptoter till $f(x) = x - \arctan x + \frac{1}{x-1}$

Uppgift 10. Beräkna dessa gränsvärden:

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ C. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u}$

Uppgift 11. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \arctan x$ kring $x = 0$.

Uppgift 12. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \tan x$ kring $x = \pi/4$.

Uppgift 13. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till $\ln(1+x)$ kring $x = 0$ och använd det för att bestämma ett närmevärde till $\ln \frac{9}{10}$ med ett fel på högst $1/1000$.

Uppgift 14. Använd Taylorutveckling för att bestämma ett närmevärde till $1/\sqrt{e}$ med ett fel på högst $1/10$.

Uppgift 15. Använd Taylorutveckling för att bestämma ett närmevärde till $\cos \frac{1}{10}$ med ett fel mindre än 10^{-4} .

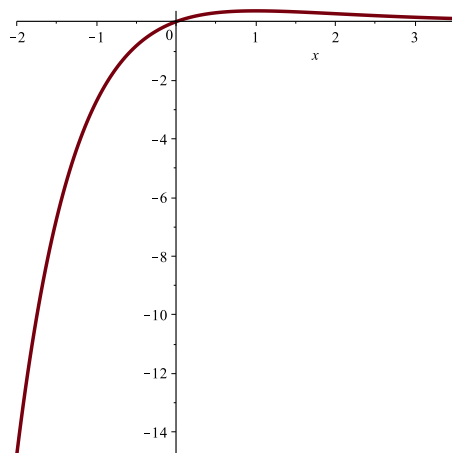
Uppgift 16. En silo i form av en 3 meter hög cylinder med radie 2 meter fylls på med vatten i en takt om 4 kubikmeter i timmen. Hur snabbt stiger vattenytan i cylindern vid den tidpunkt då vattenytan är 1 meter över bottenplattan?

Uppgift 17. Bestäm den punkt på hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ som ligger närmast punkten $(0, 1)$. Bestäm också det minsta avståndet från hyperbeln till $(0, 1)$.

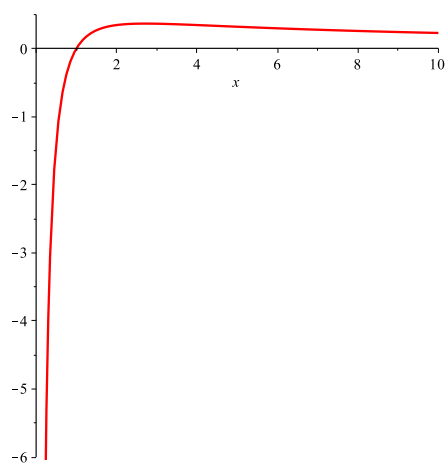
Uppgift 18. Bestäm en lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$ sådan att $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t} = 1$. Kan det finnas flera?

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

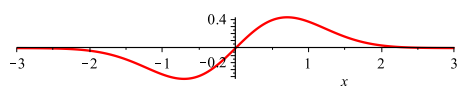
1.

(Lokal (och global) maxpunkt i $x = 1$)

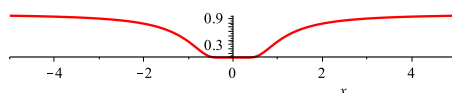
2.

(Lokal och global maxpunkt i $x = e$)

3.



- (Lokal och global maxpunkt i $x = 1/\sqrt{2}$, lokal och global minpunkt i $x = -1/\sqrt{2}$)
4. Största värdet är 1, minsta värdet är $-e^{-3\pi/4}/\sqrt{2}$.
5. $(-\pi/2, \pi/2)$, inget största eller minsta värde finns (funktionen är strängt växande)
6. Inga lösningar finns (gör en derivataundersökning av $f(x) = x \ln x$ och konstatera att minsta värdet är $-1/e$ som är större än $-1/2$)
7. A. Alla $x \neq 0$
 B. Alla $x \neq 0$
 C. 1 respektive 0
 D. $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}, x \neq 0$
 E. Derivatan är negativ då $x < 0$ och positiv då $x > 0$, derivatan i origo saknas.
 F.



8. Strängt konvex på $x \geq 2$, strängt konkav på $x \leq 2$. (kolla på andraderivatans tecken!)
9. Lodrät asymptot $x = 1$. Sned asymptot i ∞ är $y = x - \frac{\pi}{2}$. Sned asymptot i $-\infty$ är $y = x + \frac{\pi}{2}$
10. A. 1
 B. $1/2$
 C. 1
11. $p_2(x) = x$
12. $p_2(x) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2$
13. $p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ och närmevärdet är $-\frac{316}{3000}$
14. 2:a gradens taylorpolynom kring origo ger närmevärdet 0.625, där felet är mindre än $1/48$.
15. Andra gradens taylor runt origo ger närmevärdet 0.995, där felet faktiskt till och med är mindre än 10^{-5}
16. Ytan stiger med $1/\pi$ meter per timme.
17. Punkten är $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$ och avståndet är $\sqrt{3/2}$

18. $y(t) = e^{-t} \sin t$, det finns bara en.