Envariabelanalys 2018-01-17 #2

En liten sak till om polynom

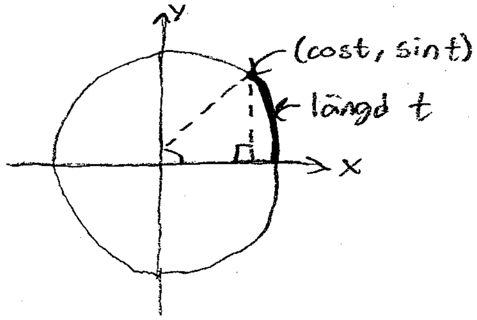
ex. Lös ekv $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

Vi hittar en lösning $x = 1$

polynomdivision ger $p(x) = (x-1)\underbrace{(x^2+2x-3)}_{(x-1)(x+3)} = (x-1)^2(x+3)$

$x=1$ är en dubbelrot
$x=-3$ är en enkelrot

Trigonometriska funktioner

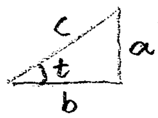


cost, sint definieras för alla $t \in \mathbb{R}$ av:

t: vinkeln mätt i radianer

$\left(1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ\right)$

om $0 < t < \frac{\pi}{2}$



$\cos t = \frac{b}{c}$

$\sin t = \frac{a}{c}$

Att minnas:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$D\binom{\cos}{\sin} = \mathbb{R} \qquad R\binom{\cos}{\sin} = [-1, 1]$

periodiska $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x + k\cdot 2\pi) = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x) \quad k \in \mathbb{Z}$

cos jämn, sin udda

Trigonometiska ettan
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+\pi) = \begin{matrix}-\cos\\ -\sin\end{matrix}(x) \qquad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(x)$

$\cos\alpha = \cos\beta \iff \beta = \pm\alpha + k\cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\sin\alpha = \sin\beta \iff \beta = \begin{cases}\alpha \\ \pi - \alpha\end{cases} + k\cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Ex. Finn alla x, sådana att $\sin(2x) = \cos x$

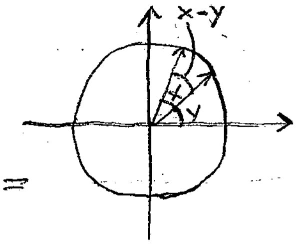
1) $\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

dvs. $2x = \begin{cases}\frac{\pi}{2} - x \\ \underbrace{\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{\frac{\pi}{2} + x}\end{cases} + k\cdot 2\pi \qquad x = \begin{cases}\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\end{cases}$

2) $\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x} = \cos x \iff (2\sin x - 1)\cos x = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}\left(= \sin\frac{\pi}{6}\right)$ eller $\cos x = 0$

Formler för summor/skillnader av/mellan vinklar:

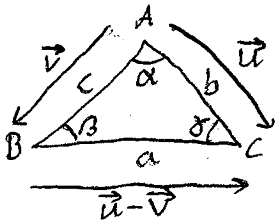
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$



Skalärprodukt

$(\cos x, \sin x)\cdot(\cos y, \sin y) =$
$= 1\cdot 1\cdot \cos(x-y)$

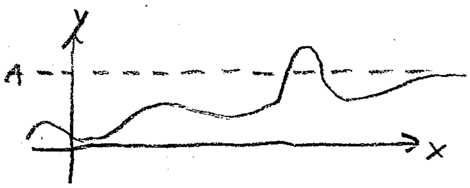
Cosinussatsen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
kan visas med skalärprodukt: $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$



$a^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\vec{v} =$
$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Om gränsvärden

Först $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$



idé $f(x)$ godtyckligt nära A om x är tillräckligt stort.

ex. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\text{"liten då } x \text{ stor"}}\right) = 1 + 0 = 1$

ex. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x^2+1}-x)}$ Förläng med $\sqrt{x^2+1}+x$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x(\sqrt{x^2+1}^2 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 1+1 = 2$

Några räkneregler för gränsvärden

$\lim_{x\to\infty} \underset{\text{konst}}{c} = c$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ så

- $\lim_{x\to\infty}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
- $\lim_{x\to\infty}(\underset{\text{konst}}{k} f(x)) = kL$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ om $M \neq 0$
- $\lim_{x\to\infty}(f(x)^a) = L^a$ om $L > 0$
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow L \leq M$; $f(x) < g(x) \Rightarrow L \leq M$

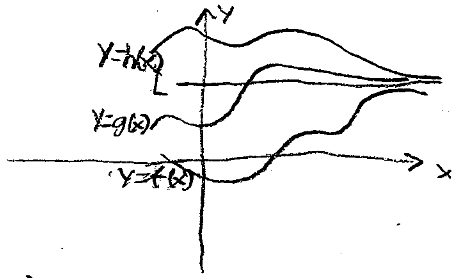
För rationella funktioner ex.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-4x^2+x-11}{3x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{11}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{11}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{7-0+0-0}{3+0} = \frac{7}{3}$$

• Instängningsprincipen

Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ för stora x och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L$
så är $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$



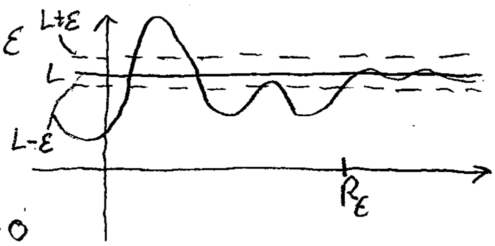
ex $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+0 = 0$

$\underset{\to 0}{-\frac{1}{x}} \leq \ldots \leq \underset{\to 0}{\frac{1}{x}}$ (då $x>0$)

Formell definition av gränsvärden ("i ∞")

<u>Def</u>: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ omm för varje $\varepsilon>0$ finns R sådant att

$x > R \Rightarrow x \in D(f)$ och $|f(x)-L| < \varepsilon$



ex. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$, ty $\left|\frac{x+\sin x}{x} - 1\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$

om $x > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{R_\varepsilon}$ $\left(\Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{x} \geq \left|\frac{\sin x}{x}\right|\right)$ $(\varepsilon > 0$

Vi visar en av gränsvärdesreglerna från definitionen

$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \leq |f(x)||g(x)-M| + |f(x)-L||M| < \varepsilon$

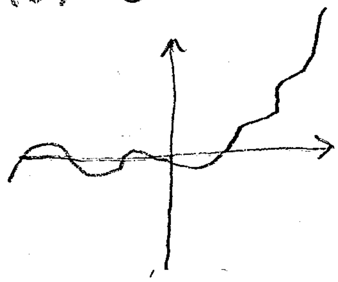
då $x>R$ om $R = \max(R_1, R_2)$ och

$|f(x)-L| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2|M|}, 1\right)$ då $x>R$, så $|f(x)| = |f(x)-L+L| \leq |f(x)-L| + |L| \leq |L|+1$

och $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$ då $x > R_2$

Oegentliga gränsvärden

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ betyder att för varje $B\in\mathbb{R}$ finns $R\in\mathbb{R}$
så att $x>R \Rightarrow x\in D(f)$ och $f(x)>B$

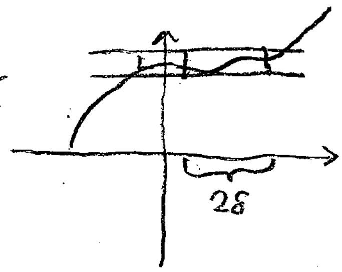


Annan "sorts" gränsvärden: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

$f(x)$ godtyckligt nära L då x tillräckligt nära a.

dvs. omm för varje $\varepsilon>0$ finns $\delta>$ s.a.

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow x\in D(f)$ och $|f(x)-L|<\varepsilon$



Obs likheten:

$x, f(x)$ nära a, L: $|x-a|, |f(x)-L| <$ något
$\infty, -\infty$: $x, f(x) \gtrless$ något

ex. $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ då $x\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ existerar inte

ty, för alla $\delta>0$ finns både x med $f(x)=1$ och x med $f(x)=-1$
som har $0<|x-0|<\delta$

men enkelsidiga gränsvärden $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=L$ omm för alla
$\varepsilon>0$ finns $\delta>0$ så att $0<x-a<\delta \Rightarrow x\in D(f)$ och $|f(x)-L|<\varepsilon$