Envariabelanalys 2018-02-01 #9

Linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$

homogen ekvation: $f(t)=0$, alla t

En lösning: en funktion $y(t)$ som uppfyller ekvationen.

här: a_i konstanter

ex. $y' + ky = 0$

mult. med $e^{kt} \Rightarrow y'e^{kt} + y\underbrace{ke^{kt}}_{(e^{kt})'} = 0 \Leftrightarrow (ye^{kt})' = 0 \Leftrightarrow ye^{kt} = A$, ngt $A \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y(t) = Ae^{-kt}$

"den allmänna lösningen"

Linjär ekv: y_1, y_2 lösningar $\Rightarrow A_1y_1 + A_2y_2$ lösn.

(homogena ekvationer)

ex. $y'' + y' - 6y = 0$

Pröva med $y(t) = e^{rt}$, r konst; $(r^2 + r - 6)e^{rt} = 0$ så en lösning omm $r^2 + r - 6 = 0$

$y'(t) = re^{rt}$

$y''(t) = r^2e^{rt}$

Den karakteristiska ekvationen för ODE:n

lösn $r = -\frac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} + 6}}_{5/2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Så $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}$ är lösningar (för alla $A, B \in \mathbb{R}$). Ger det alla lösningar?

Sätt $y(t) = z(t)e^{2t}$, $y'(t) = z'e^{2t} + z\,2e^{2t} = (z' + 2z)e^{2t}$

$y''(t) = (z'' + 2z')e^{2t} + (2z' + 4z)e^{2t} = (z'' + 4z' + 4z)e^{2t}$

insatt i ekv: $(z'' + 4z' + \cancel{4z} + z' + \cancel{2z} - \cancel{6z})e^{2t} = 0 \Leftrightarrow z'' + 5z' = 0$

allm. lösn. enl. ovan: $z'(t) = B_0e^{-5t}$, B_0 godt. konst.

så $z(t) = \underbrace{\frac{-B_0}{5}}_{B}e^{-5t} + A$, A konst.

Så allm. lösn. $y(t) = z(t)e^{2t} = Ae^{2t} + Be^{-3t}$, A, B godt. konstanter.

ex. $y'' - 4y' + 4y = 0$

kar.ekv. $r^2 - 4r + 4 = 0 = (r-2)^2 \quad r = 2$ (dubbelrot)

så e^{2t} är en lösning. Fler?

Låt $y(t) = z(t)e^{2t}, \quad y' = (z' + 2z)e^{2t}, \quad y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2t}$

insatt $0 = y'' - 4y' + 4y = (z'' + \cancel{4z'} + \cancel{4z} - \cancel{4z'} - \cancel{8z} + \cancel{4z})e^{2t} = z''e^{2t}$

Så ekv $\Leftrightarrow z'' = 0 \Leftrightarrow z' = A$, ngt $A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z(t) = At + B$, några $A, B \in \mathbb{R}$

ex. $y'' + 2y' + 5y = 0$

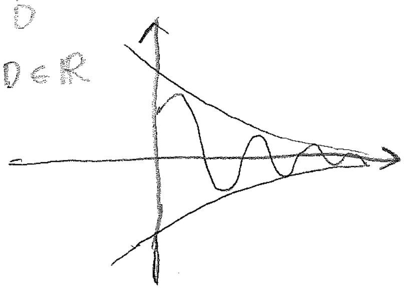
kar.ekv. $r^2 + 2r + 5 = 0, \quad r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 5} = -1 \pm 2i$

så $e^{(-1+2i)t}$ och $e^{(-1-2i)t}$ är lösningar

$= e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t)$

allmänna lösningen: $y(t) = Ae^{-t}(\cos 2t + i\sin 2t) + Be^{-t}(\cos 2t - i \sin 2t) =$
$= e^{-t}(\underbrace{(A+B)}_{C}\cos 2t + \underbrace{i(A-B)}_{D}\sin 2t)$

för att få reella lösningar, låt $C, D \in \mathbb{R}$



Satser: Om $L(r) = (r-r_1)^{m_1} \cdots (r-r_k)^{m_k}$ ($r_i \neq r_j$ om $i \neq j$)

så är den allmänna lösningen till $L(D)y = 0$

$y'' + y' - 6y =$
$= (D^2 + D - 6)y$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} P_i(t) e^{r_i t}$$

godtyckligt polynom av grad $\leq m_i - 1$

[om $r_i = \alpha + i\beta, \quad r_j = \alpha - i\beta, \quad m_i = m_j$ ger

$e^{\alpha t}(p(t)\cos\beta t + q(t)\sin\beta t)$, $p(t), q(t)$ godt. polynom av grad $\leq m_i - 1$

Inhomogena ekvationer: $L(D)y = f$

Om $y_p(t)$ är <u>en</u> lösning, $L(D)y_p = f$

så $L(D)y = f \Leftrightarrow L(D)y = L(D)y_p \Leftrightarrow L(D)(y - y_p) = 0$

linjärt

så allmänna lösningen till inhomogena ekv. är $y = y_h + y_p$

en lösning till inhomogena

allmänn lösning till homogena

ex. finn allmänna lösningen till $y' - 3y = 3x^2 + x - 4$

1) y_h, allm. lösn. t. homogena ekv.: kar.ekv. $r - 3 = 0$, $r_1 = 3$, $y_h(t) = Ce^{3t}$

2) y_p, part.lösn. t. inhomogena

<u>ansätt</u> $y(t) = at^2 + bt + c$ och sätt in: $\underbrace{2at+b}_{y'}\underbrace{-3at^2-3bt-3c}_{-3y} = 3t^2 + t - 4$

(dvs. gissa form)

så $\begin{cases} t^2: & -3a = 3 \\ t: & 2a - 3b = 1 \\ 1: & b - 3c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{matrix}$ så $y_p(t) = -t^2 - t + 1$

allm. lösn. t. ekv: $y = y_h + y_p = \underline{Ce^{3t} - t^2 - t + 1}$, C godt. konst.

ex. $y'' - 6y' + 10y = 24e^{2t}$ allm. lösn.

1) $y_h \ldots$, kar.ekv. $r^2 - 6r + 10 = 0$, $r_{1,2} = 3 \pm i$; $y_h(t) = e^{3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

2) $y_p \ldots$, ansätt $y = ae^{2t}$, $y' = 2ae^{2t}$, $y'' = 4ae^{2t}$

och sätt in: $\underbrace{(4a - 12a + 10a)}_{2a}e^{2t} = 24e^{2t}$ så $a = 12$ fungerar, $y_p(t) = 12e^{2t}$

allm. lösn. $y(t) = y_h + y_p = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^{3t} + 12e^{2t}$

Vi klarar HL av formen: $\sum \text{polynom} \cdot e^{at} \cdot {\cos \atop \sin} bt$

ex. $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$

1) y_h: $r^2 - 5r + 6 = 0$, $r_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ $y_h(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$

2) y_p: ansats $y = ae^{2t}$ ger $y'' - 5y' + 6y = \underbrace{(4a - 10a + 6a)}e^{2t} = e^{2t}$

ansatsen <u>räcker inte</u>

resonans

Skriv $y(t) = z(t)e^{2t}$, $y' = (z' + 2z)e^{2t}$ $y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2t}$

insatt: $\underbrace{(z'' + 4z' + \cancel{4z} - 5z' - \cancel{10z} + \cancel{6z})}_{z'' - z'}e^{2t} = e^{2t}$, så $z'' - z' = 1$

Vi kan ta $z' = -1$

$z_p = -t \Rightarrow y_p(t) = -te^{2t}$

så allm. lösn.: $y(t) = Ae^{3t} + \underline{Be^{2t} - te^{2t}}$

kunde ansatt $y(t) = ate^{2t}$

Förskjutningsregeln: $L(D)(z(t)e^{\alpha t}) = e^{\alpha t} L(D+\alpha)z$ ex $D^2(ze^{\alpha t}) = e^{\alpha t}(D+\alpha)^2 z$

$= e^{\alpha t}(D^2 + 2\alpha D + \alpha^2)z$

$L(D)(y_1 + y_2) = \underbrace{L(D)y_1}_{f_1} + \underbrace{L(D)y_2}_{f_2}$

Något om linjär approximation av funktioner

ex. vi approximerar $f(x) = \sqrt{x}$ nära $x = 16$ med tangenten i $(16, 4)$

$L(x) = f(16) + f'(16)(x-16)$ = linjär approximation $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 4 + \frac{1}{2\cdot 4}(x-16$

t.ex. $L(17) = 4 + \frac{1}{8}\cdot 1 = 4{,}125$ approximerar $\sqrt{17} = 4{,}123105626$

$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$

Sats: Om $f''(t)$ existerar för alla t mellan a och x är

$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2$ för något s mellan a och x.

(visas med generaliserade medelvärdessatsen)

I vårt ex. $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

så $E(17) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s\sqrt{s}}(17-16)^2 = \frac{1}{8s\sqrt{s}}$ för ngt s, $16 < s < 17$

så $\sqrt{17} = 4{,}125 - \frac{1}{8s\sqrt{s}}$, så $\sqrt{17} < 4{,}125$ och ($x\sqrt{x}$ växande)

$16\sqrt{16} < s\sqrt{s} < 17\sqrt{17} < 17 \cdot 4{,}125$

så $\frac{1}{17\cdot 4{,}125} < \frac{1}{s\sqrt{s}} < \frac{1}{16\cdot 4}$ så $0{,}00178 < \frac{1}{8s\sqrt{s}} < 0{,}00196$

så $\underbrace{4{,}125 - 0{,}00196}_{4{,}12304} < \sqrt{17} < \underbrace{4{,}125 - 0{,}00178}_{4{,}12322}$