Välkommen till

årets crash course i

Envariabelanalys

med Kollin

Talare: Tâm Vũ

Vi börjar kl. 08:15.

Plan: crashcourse.kollin.io

l'Hospital:s regel

__Mål__ Beräkna ett gränsvärde på formen

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

__Sats__ Låt f, g vara deriverbara funktioner i $x=a$, med $g'(a) \neq 0$.

Antag att $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

obs!

Då gäller att

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

kan stå för ett reellt tal, ∞ eller $-\infty$ $\square$

__Anmärkning__ Det går också bra att ha

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \end{cases}$$

och

. Då gäller att

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2020.06.03 #1 #KTH

b) Beräkna

sätt in $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \underbrace{x\cos x}_{\text{produktregeln}}} = \left\{ \frac{0 - \sin 0}{0 - 0\cdot\cos 0} = \frac{0}{0} \right\}$$

tankeklamrar

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - (\cos x + x\cdot(-\sin x))}$$

Produktregeln

$$(F\cdot G)' = F'G + FG'$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + x\sin x} = \left\{ \frac{1 - \cos 0}{1 - \underbrace{\cos 0}_{=1} + \underbrace{0\cdot\sin 0}_{=0}} = \frac{0}{0} \right\}$$

l'Hospitals regel igen!

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(-\sin x)}{-(-\sin x) + \sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \left\{ \frac{\sin 0}{2\sin 0 + 0\cos 0} = \frac{0}{0} \right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{\cos 0}{2\underbrace{\cos 0}_{=1} + \cos 0 - 0\cdot\underbrace{\sin 0}_{=0}} = \frac{1}{2+1-0} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Svar

2016.01.08 #1 (b) Beräkna #UU

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

Minns att
$\begin{cases} e^0 = 1 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1+x} + \sin x}{2x}$$

$$= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \frac{1}{(1+x)^2} + \cos x}{2}$$

inte längre 0

$$= \frac{e^0 + 1 + \cos 0}{2} = \frac{3}{2}$$

Svar

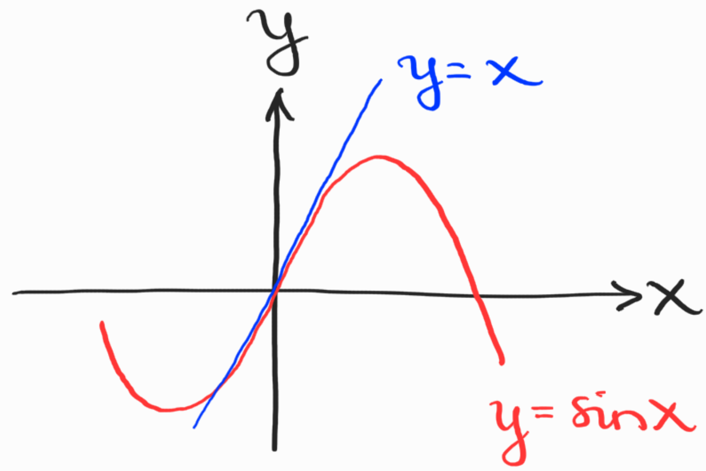
Anm. Om $h(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

så $h'(x) = -1 \cdot (1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ ☒

Andra gränsvärdestekniker

I) Populär kvot:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$\sin x \approx x$ när $x \approx 0$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \approx 1$ när $x \approx 0$

2014.10.20 #1 **#UU**

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x\cos x}$$

l'Hospitals regel går bra också

Knep $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ så länge $\cos x \neq 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x/\cos x}{x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{=\frac{1}{1^2}=1} = 1 \cdot 1 = 1$$

standard-gränsvärde

Svar 1

$\boxtimes$