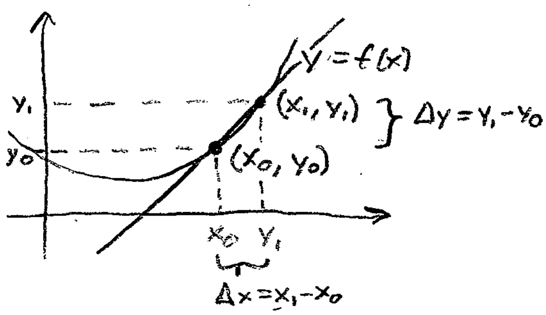
Envariabelanalys 2018-01-23 #4

Derivator



Tangenten till kurvan $y = f(x)$

punkten (x_0, y_0)

Tag sekanten genom (x_0, y_0) och (x_1, y_1) och låt $x_1 \to x_0$.

Lutningen för sekanten $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Då $|h|$ blir litet $(h \to 0)$ närmar sig sekanten tangenten genom (x_0, y_0) (om tangenten finns) och dess lutning blir

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

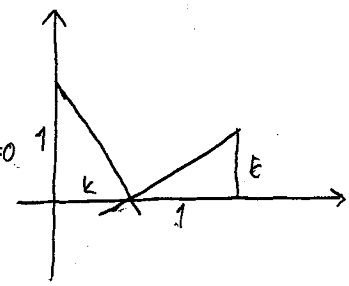
f': derivatan av f

Tangentens ekvation: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Andra beteckningar av derivatan

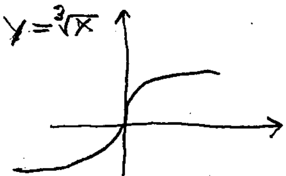
$\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$

Normalens ekvation
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0 & f'(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & f'(x_0) = 0 \end{cases}$$



Om $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$ eller $-\infty$ har $y = f(x)$ en vertikal tangent.

ex. $y = \sqrt[3]{x}$



Allmänt är derivatan en förändringshastighet

ex. en hastighet

ex. Om $f(x) = x^3$ fås $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3x h^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

Om $f(x) = c$ fås $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$

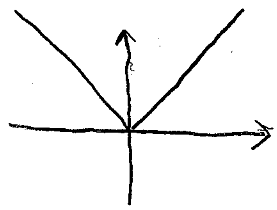
Vänster- och högerderivata

$$\lim_{\substack{h \to 0^- \\ 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_{\mp}(x)$$

$f(x)$ är deriverbar i $x = c$ omm $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$

ex. $f(x)=|x|$ har $f'_+(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=1$

$f'_-(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=-1$



$f(x)$ är <u>deriverbar</u> i $[a,b]$ om $f'(c)$ existerar för alla $c\in(a,b)$
<u>och</u> $f'_+(a)$ och $f'_-(b)$ existerar.

c är en <u>singulär</u> punkt för $f(x)$ om det är en inre punkt i $D(f)$ men $f'(c)$ inte existerar

ex. $c=0$ för $f(x)=|x|$

$f(x)$ är deriverbar omm den är deriverbar för alla $c\in D(f)$

Sats: Om $f(x)$ är deriverbar i x_0 är den kontinuerlig i x_0.

ty: $\lim_{h\to 0}\underbrace{(f(x_0+h)-f(x_0))}_{\text{Gränsvärde}}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right)=f'(x_0)\cdot 0=0$ om $f'(x_0)$ existerar.

Det finns kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara i någon punkt (!).

Det kan hända att $f'(x)$ inte är kontinuerlig (även om $f(x)$ är deriverbar för alla x). (se senare)

Deriveringsregler (med dem beräknar vi "normalt" derivator)

Om f,g är deriverbara (i en punkt) så

$(cf)'=cf'$, $(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

Visas med definition av derivata & räkneregler för gränsvärden.

ex. $Dx^n=nx^{n-1}$ för $n=0,1,2,\dots$

ty: för $n=0$: $Dx^0=D1=0=0\cdot x^{-1}$ stämmer (bas)

Antag att påståendet är sant för $n=k$, $k=1,2,3,\dots$

då är $Dx^{k+1}=D(\underset{f}{x}\cdot\underset{g}{x^k})=Dx\cdot x^k+x\cdot Dx^k=1\cdot x^k+x\cdot\overset{\text{enligt antagande}}{k\cdot x^{k-1}}=(k+1)x^k$

Så <u>om</u> påståendet är sant för $n=k$ så är det sant för $n=k+1$ (steget)

Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för $n=0,1,2,3,\dots$

Induktionsbevis s.110 i boken

Och $Dx^n=nx^{n-1}$ för $n=-1,-2,\dots$

ty. $x^n=\frac{1}{x^{-n}}$ $(-n>0)$: $Dx^n=D\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)=\frac{D1\cdot x^{-n}-1\cdot Dx^{-n}}{(x^{-n})^2}=\frac{-(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2}=\underline{nx^{n-1}}$

ex. $D\frac{1}{x^2} = Dx^{-2} = (-2)\cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Sats (kedjeregeln): Om $g(x)$ är deriverbar i x och $f(t)$ är deriverbar för $t=g(x)$ är

$$\left(f(g(x))\right)' = \underbrace{f'(g(x))}_{f'(t)\big|_{t=g(x)}}\cdot g'(x)$$

Ex. $D(x^2+2)^6 = \underbrace{6(x^2+2)^5}_{f'(g(x))}\cdot 2x$ "inre derivatan" "yttre derivatan"

$f(t)=t^6 \quad g(x)=x^2+2$

ex. $f(x(t))$ läge, temp som funktion av läge

temp-ändr/t.e.: $°/s = °/m \cdot m/s$

Bevis för kedjeregeln $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}$ $\quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$

$\to f' \quad \to g'$ men om $\Delta g = 0$ för $\Delta x \neq 0$

Striktare:

Låt $E(k) = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u), & k\neq 0 \end{cases}$

$u = g(x)$

$E(k)$ är kontinuerlig för $k=0$ (ty f deriverbar i $u=g(x)$)

och $f(u+k)-f(u) = (f'(u)+E(k))k$ för alla k (med $u+k \in D(f)$).

tag $k = g(x+h)-g(x)$, så $u+k = g(x+h)$ och

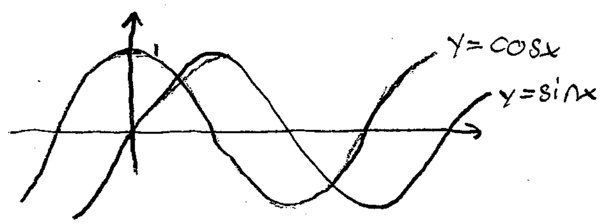
$f(g(x+h)) - f(g(x)) = (f'(g(x)) + E(k))(g(x+h)-g(x))$

$g(x)$ deriverbar för x, spec. kontinuerlig, så $\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0}(g(x+h)-g(x)) = 0$

och $\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}(f'(g(x))+E(k))\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$

$= (f'(g(x))+0)\cdot g'(x)$

Derivator av trigonometriska funktioner



Först $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0 = \sin 0$, $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 = \cos 0$

ty: då $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$0 < \sin\theta < \theta$

instängning: $0 \le \lim_{\theta\to 0+}\sin\theta \le \underbrace{\lim_{\theta\to 0+}\theta}_{=0}$

pss (sin θ udda funktion) $\lim_{\theta\to 0-}\sin\theta = 0$ $\quad$ så $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$

Då $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ är $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\sqrt{\ }$ är kontinuerlig, så $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = \sqrt{\lim_{\theta\to 0}(1-\sin^2\theta)} = 1$

$1-0^2=1$

Så $\sin x$, $\cos x$ är kontinuerliga funktioner!

$\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x \sin h \to \sin x$ ($h\to 0$)

$\cos(x+h) = \cos x\cos h - \sin x\sin h \to \cos x$