SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 8

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Rest från igår

Uppgift. Undersök funktionen $g(x) = xe^{-x^2}$ med hjälp av dess derivata. Var är g strängt växande resp avtagande? Har den nåt max? Min? Hur många lösningar har ekvationen $g(x) = 1/8$?

$D_f = \mathbb{R}$, g kontinuerlig på $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2), \text{ alla } x.$$

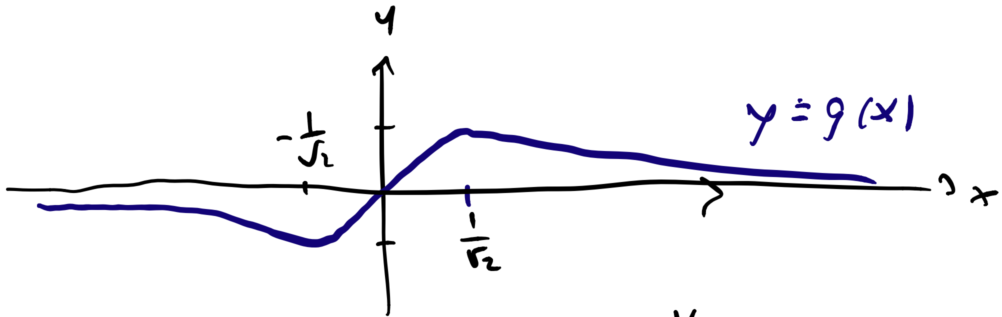
$$g'(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Teckenschema för g'

x		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	lok max	$\searrow$

Rest från igår

$g(x) = xe^{-x^2}$. $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$



$g(x) = \frac{1}{8}$ har två lösn.

Största värde $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

Minsta $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$

Att göra denna vecka

Översikt över modul 3

- Exp Log Arc (3.1-3.5)
    - Invers
    - Exponentialfunktioner
    - Logaritmer
    - Arcusfunktioner (inversa trigonometriska)
- Derivataundersökningar (linjarisering, max/min, växande/avtagande, inverterbarhet, etc)
- Ordinära linjära differentialekvationer (3.7 och 18.6)
    - Homogena
    - Inhomogena (även med resonans)

Missa inte: Man måste bli bra på potenslagar, log-lagar och på att hantera arcusfunktioner! Kunna egenskaperna hos exp, log, arc, kunna derivera dem och dra slutsatser av derivatan!

Chatten

Ha en respektfull ton i chatten
Undvik allmänt snack och irrelevanta frågor

Inversa trigonometriska funktioner

Eftersom sinus, cosinus, tangens och cotangens är periodiska funktioner så kan de inte inverteras. Man skulle kunna tro att det var end of story men så är det inte. Om man **begränsar definitionsmängderna** till dessa funktioner så får man nämligen funktioner som går att invertera. Inverserna kallas **cyklometriska funktioner**, eller **arcusfunktioner**.

Funktionen $S(v) = \sin v,\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, är inverterbar och inversen heter arcsin, eller $\sin^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

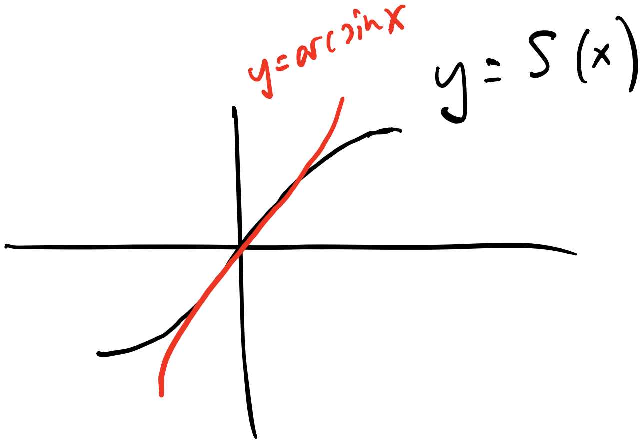
$\arcsin t = v \iff t = \sin v$ och $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$.

Eller på ren svenska:

$\arcsin t$ är den vinkel (i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) vars sinusvärde är t.

Defintionsmängd för arcsin är $[-1, 1]$ och värdemängd $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Graf av S och arcsin



Funktionen $C(v) = \cos v,\ 0 \leq v \leq \pi$, är inverterbar och inversen heter arccos, eller $\cos^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

$\arccos t = v \iff t = \cos v$ och $0 \leq v \leq \pi$.

Eller på ren svenska:

$\arccos t$ är den vinkel (i intervallet $[0, \pi]$) vars cosinusvärde är t.

Defintionsmängd för arccos är $[-1, 1]$ och värdemängd $[0, \pi]$.

Funktionen $T(v) = \tan v, \ -\pi/2 < v < \pi/2$, är inverterbar och inversen heter arctan, eller $\tan^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

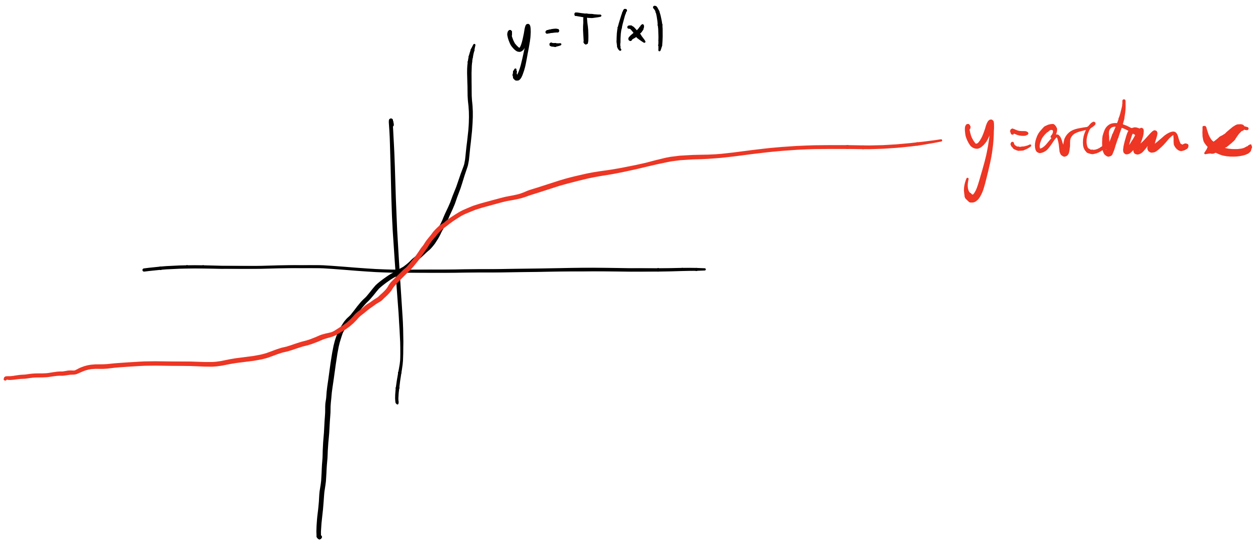
$\arctan t = v \iff t = \tan v$ och $-\pi/2 < v < \pi/2$.

Eller på ren svenska:

$\arctan t$ är den vinkel (i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) vars tan-värde är t.

Defintionsmängd för arctan är $\mathbb{R}$ och värdemängd $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Graf av T och arctan



Exempel/Övning

Uppgift. Förenkla så långt som möjligt:

$$\arcsin 0, \quad \arcsin 1, \quad \arccos 0, \quad \arccos 1$$

$$= 0 \qquad = \pi/2 \qquad = \pi/2 \qquad = 0$$

$$\arctan 0, \quad \arctan 1, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan \sqrt{3}$$

$$= 0 \qquad = \pi/4 \qquad = \pi/3 \qquad = \pi/3$$

$$\ln \frac{1}{e}, \quad \underbrace{2 \ln x + \ln \frac{3}{x^2}}_{= \ln 3} \quad \ln e^{\ln x}$$

$$= -1 \qquad\qquad = \ln x$$

Uppgift. Förenkla så långt som möjligt:

$$\tan(\arctan x), \qquad \cos(\arccos \frac{1}{2}), \qquad \arcsin(\sin \pi)$$

$= x \qquad = 1/2 \qquad = 0$

$$\cos(\arcsin 0.1), \qquad \sin(\arccos \frac{1}{2})$$

$= \sqrt{3}/2$

$\cos(\arcsin 0{,}1) = \sqrt{1-0{,}1^2} = \sqrt{0{,}99}$

Viktiga derivator

De inversa trigonometriska funktionernas derivator:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{för alla } x$$

(Ni får själva lista ut arccot.)

Härledning

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad -1 \le x \le 1$$

$$\cos(\arcsin x)\cdot \frac{d}{dx}\arcsin x = 1$$

$$\underline{\frac{d}{dx}\arcsin x} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}, \quad -1 < x < 1$$

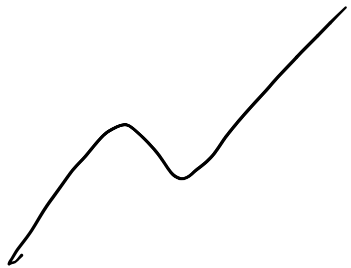
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

Exempel. Låt $f(x) = x - 2\arctan x$. På vilka intervall är f strängt växande respektive strängt avtagande?

f kont på $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Teckenschema:

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	str. väx		str. avt		str. väx



Exempel/Övning

Derivera m a p x och ange var derivatan existerar.

$$f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$$

$$g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$k(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

(Tid över? Gör teckenschema för derivatan o skissa grafen till någon av funktionerna)

Exempel

$$f(x) = \ln \sqrt{1+x^2} = \ln \left(1+x^2\right)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{alla } x$$

Exempel

$$g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \arccos\left(x^{-1/2}\right) \qquad D_g = [1, \infty)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)$$

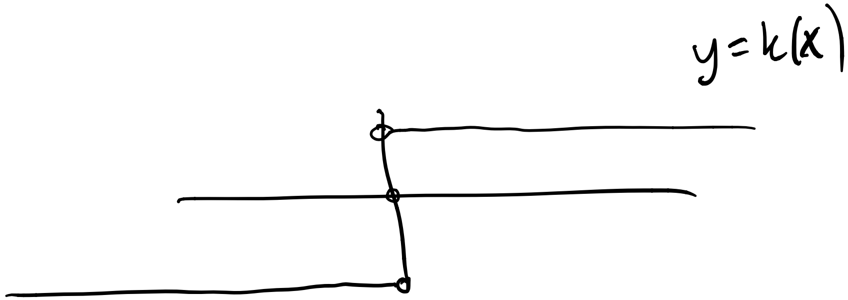
$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad , \quad x > 1$$

Exempel

$k(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

D_k är alla $x \neq 0$

$$k'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \quad x \neq 0$$



Exempel. Bestäm ett närmevärde till $\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2}$

Linjär approx kring 0:

$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$ med $f(x) = e^x$

$e^x \approx 1 + x$ x nära 0

$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} \approx 1 + (-1/2) = 1/2$

Exempel. Bestäm ett närmevärde till $\arctan\left(\frac{3}{10}\right)$

Linjär approx kring 0:

$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$ med $f(x) = \arctan x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\arctan x \approx 0 + 1 \cdot (x-0) = x$

x nära 0

$\arctan 0{,}3 \approx 0{,}3$

Dagens tentaproblem.

Hur många lösningar har ekvationen $e^x + \arcsin x = 0$?

Låt $f(x) = e^x + \arcsin x$ Ekv $\iff f(x) = 0$

f kont. på $[-1,1]$ sl. & begr.

$f(-1) = e^{-1} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$, $f(1) = e^1 + \frac{\pi}{2} > 0$

SOMV ger: finns x s.a. $f(x) = 0$.

<u>Minst en</u> lösn. till ekv.

Forts.

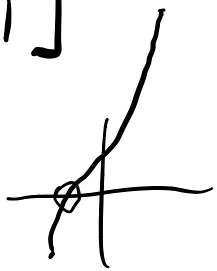
$f(x) = e^x + \arcsin x \qquad -1 \le x \le 1$

$f'(x) = e^x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad -1 < x < 1$

Ser $f'(x) > 0$ för $-1 < x < 1$

$\Rightarrow$ f strängt växande på $[-1,1]$

$\Rightarrow$ Finns högst en lösning.



Svar: Exakt en lösn

Viktiga gränsvärden

Dessa standardgränsvärden måste man kunna ($a > 0$):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

Exempel

Exempel. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^9 + 9\ln x + e^{9x}}{9x^9 - \ln x - e^{9x}} = -1$$

$$\frac{x^9 + 9\ln x + e^{9x}}{9x^9 - \ln x - e^{9x}} = \frac{\cancel{e^{9x}}\left(\frac{x^9}{e^{9x}} + \frac{9\ln x}{e^{9x}} + 1\right)}{\cancel{e^{9x}}\left(\frac{9x^9}{e^{9x}} - \frac{\ln x}{e^{9x}} - 1\right)}$$

$$\left(\frac{x^9}{e^{9x}} + \frac{9\ln x}{e^{9x}} + 1\right) \to 1$$

$$\to -1$$

$$\left(\frac{9x^9}{e^{9x}} - \frac{\ln x}{e^{9x}} - 1\right) \to -1$$

$$x \to \infty$$

Exempel. Vad är dubbleringstakten för e^x? Dvs hur stor ökning i x krävs för att e^x ska dubbleras?

Sök x_1 s.a. $e^{x_1} = 2e^x$

$$\iff \frac{e^{x_1}}{e^x} = 2 \iff e^{x_1 - x} = 2$$

$$\iff x_1 - x = \ln 2$$