



Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Lars Filipsson

Uppgifter att träna på i Modul 6

REKOMMENDERADE UPPGIFTER UR KURSBOKEN CALCULUS

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 6.3: 1, 3, 9. Kapitel 6.5: 1, 3, 5, 15, 23, 33, 34, 35. Kapitel 7.1: 1, 3, 5, 13, 19, 21. Kapitel 7.2: 1, 3. Kapitel 7.3: 3, 11, 21. Kapitel 7.4: 1, 3, 5. Kapitel 7.6: 1, 7. Kapitel 7.7: 1, 5.

Om uppgifterna nedan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken som listas ovan. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

SKARPA ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1. Ange på vilket sätt nedanstående integraler är generaliserade och beräkna dem.

A. $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx$

B. $\int_0^{49} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

C. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

D. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx$

E. $\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$

Uppgift 2. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

A. $\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{2x}} dx$

B. $\int_{49}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+1} dx$

C. $\int_1^{\infty} \cos \frac{1}{x} dx$

D. $\int_1^{\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x^3 \sqrt{x} + \ln x} dx$

E. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\arctan x} dx$

F. $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$

G. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

Uppgift 3. Bestäm arean mellan x -axeln och kurvan $y = \frac{1}{4-x^2}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Uppgift 4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan x -axeln och kurvan $y = \frac{1}{x+1}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar ett varv

A. runt x -axeln

B. runt y -axeln

Uppgift 5. En 20 meter hög cylindrisk silo med radie 10 meter är packad med ett material som på höjden h meter över bottenplattan har en densitet som är $\rho(h) = \frac{1}{1+h}$ ton per kubikmeter. Hur mycket väger innehållet i silon.

Uppgift 6. Beräkna längden av kurvan $y = \cosh x$, $0 \leq x \leq 1$. Per definition är $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Funktionen kallas cosinus hyperbolicus.

Uppgift 7. Beräkna längden av kurvan med parametrisering $x = t$, $y = \ln(1 - t^2)$, då t genomlöper intervallet från 0 till $1/2$.

Uppgift 8. Parametrisera dessa kurvor:

- A. Cirkeln $x^2 + y^2 = 4$
- B. Cirkeln med medelpunkt i $(1, 2)$ och radie 3
- C. Kurvan med ekvation $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$
- D. Kurvan med ekvation $y = x^3, 0 \leq x \leq 2$
- E. Ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

- 1. A. 1
- B. 14
- C. 2
- D. $\ln 2$
- E. $1/2e$

2.A. Konvergent (integranden är mindre än e^{-x} , integralen kan också räknas ut med partiell integration)

- B. Konvergent (integranden är mindre än $1/x\sqrt{x}$)
- C. Divergent (integranden är större än $1/2$)
- D. Konvergent (samma uppskattning som i uppgift B gäller)
- E. Divergent (integranden är större än $2/\pi$)
- F. Divergent (integranden är större än x)
- G. Divergent (primitiv funktion är $\ln(\ln x)$)

3. $\frac{1}{4} \ln 3$

- 4. A. $\pi/2$
- B. $2\pi(1 - \ln 2)$

5. $100\pi \ln 21$ ton

6. $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$

7. $\ln 3 - \frac{1}{2}$

8. Till exempel (fler alternativ finns):

- A. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [0, 2\pi]$
- B. $x = 1 + 3 \cos t, y = 2 + 3 \sin t, t \in [0, 2\pi)$
- C. Samma kurva som i uppgift B och samma svar!
- D. $x = t, y = t^3, 0 \leq t \leq 3$
- E. $x = \cos t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, t \in [0, 2\pi)$