# Envariabelanalys 2018-01-30 #8

Idag först: Vi söker $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ränta på ränta

$$\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t\right)=\lim_{t\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)^t=\lim_{t\to\infty}t\cdot\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)=\lim_{t\to\infty}x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\ln 1}{\frac{x}{t}}\quad\left\{\begin{array}{l}h=\frac{x}{t}\\ t\to\infty\Leftrightarrow h\to 0+\end{array}\right\}$$

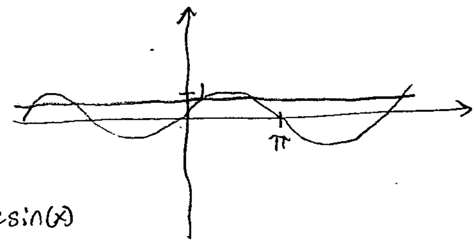
$$=\lim_{h\to 0}x\,\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=x\cdot D\ln y\Big|_{y=1}=x\cdot\frac{1}{y}\Big|_{y=1}=x,\text{ så }\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t=e^x$$

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ofta definitionen av $e$

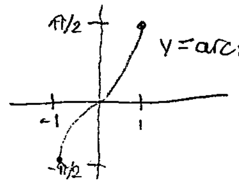
Nu: Ofta vill man finna alla $\alpha$ med $\sin\alpha=A$, $A$ något ~~godtyckligt~~ tal

$\sin x$ har ingen inversfunktion, ty många $x$ har samma $x$-värde. $(\sin x_1=\sin x_2 \not\Rightarrow x_1=x_2)$




Men arcsin är inversen till $f(x)=\sin x$, med $\mathcal{D}(f)=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\mathcal{R}(f)=[-1,1]$

så $\mathcal{D}(\arcsin)=[-1,1]$, $\mathcal{R}(\arcsin)=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$




$$\sin\alpha=A\Leftrightarrow\alpha=\begin{cases}\arcsin A\\ \pi-\arcsin A\end{cases}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

om $A\in\mathcal{D}(\arcsin)$, dvs $-1\le A\le 1$

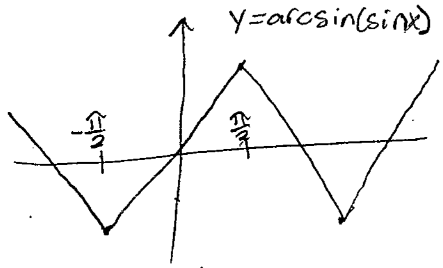
ex $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$

"$\arcsin x$ är den vinkel i $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ vars sin-värde är $x$"

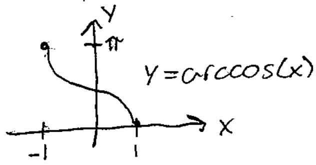
$\sin(\arcsin x)=x$ för $x\in[-1,1]$

$\arcsin(\sin x)=x$ för $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, men inte annars

def. för alla $x\in\mathbb{R}$



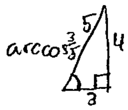

Jämför: $\sqrt{x}^2=x$, alla $x\ge 0$, $\sqrt{x^2}=|x|$ ($=x$ då $x\ge 0$)




P.s.s. $\arccos x$ är den vinkel i $[0,\pi]$ vars cos-värde är $x$

$\arctan x$ är den vinkel i $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vars tan-värde är $x$

ex. Vad är $\underbrace{\arctan 7}_{\alpha}+\underbrace{\arccos\frac{3}{5}}_{\beta}$?




$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{7+\frac{4}{3}}{1-7\cdot\frac{4}{3}}=\frac{21+4}{3-28}=-1$$

Så $\alpha+\beta$ är en vinkel med tan-värde $-1$. Vilken?

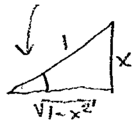
$\alpha,\beta\in]0,\frac{\pi}{2}[$, så $\alpha+\beta\in]0,\pi[$ $\qquad\tan(\alpha+\beta)=-1\Leftrightarrow\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

ty $7>0$ $\qquad$ ty $\frac{3}{5}>0$

$$\Downarrow\ \alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$$

Derivator av arc-funktionerna:

$$D\arcsin x=\frac{1}{D\sin y\big|_{y=\arcsin x}}=\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$




$$Df^{-1}(x)=\frac{1}{Df(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}}$$

$$f(f^{-1}(x))=x$$

$\arcsin x$ deriverbar då $x\in]-1,1[$

ty $\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, så $\cos(\cdot\cdot)\ge 0$

p.s.s. $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (alt. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$)

$$D\arctan x = \frac{1}{D\tan y}\Big|_{y=\arctan x} = \frac{1}{1+\tan^2 y}\Big|_{y=\arctan x} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$$

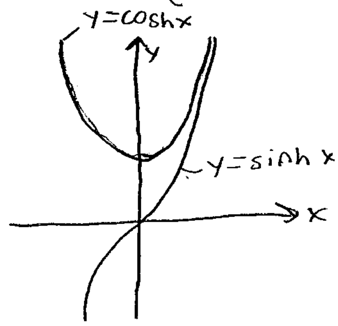
Så $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ $\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$$\begin{cases} D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \\ D\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Hyperbolisk a funktionerna

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ jämn

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ udda

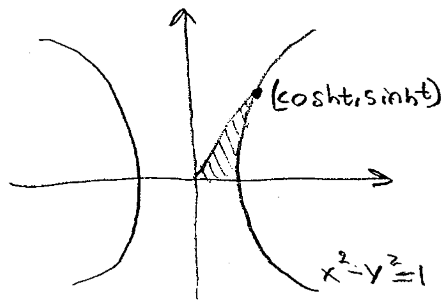



$$\begin{cases} e^x = \cosh x + \sinh x \\ e^{-x} = \cosh x - \sinh x \end{cases}$$

(allmänt, om $D(f)$ är symmetrisk:
$$f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{\text{jämn}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{\text{udda}}$$
)

Samband liknande som för cos, sin $\quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ "hyperboliska ettan"

$$\begin{cases} D\cosh x = \sinh x \\ D\sinh x = \cosh x \end{cases}$$




ex. $\cosh x \cosh y = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y})$
$\quad \sinh x \sinh y = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y})$

$\cosh x \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y = \cosh(x+y)$

p.s.s $\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \sinh(x+y)$

Vad är inversen till $\sinh x$? $\quad y = \operatorname{arsinh} x \Leftrightarrow x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \Leftrightarrow$

arsinhx

$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Leftrightarrow e^y = x \underset{(-)}{+} \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$e^y > 0$

Så $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$D\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \underbrace{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}_{\text{y.d.}} \cdot \underbrace{\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}_{\text{y.d.}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{i.d.}}\Big)}_{\text{i.d.}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

eller $D\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{D\sinh y}\Big|_{y=\operatorname{arsinh} x} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Eulers formel: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, speciellt $e^{i\pi} + 1 = 0$
$\quad x = \pi$

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \underbrace{(\cos x\cos y - \sin x \sin y)}_{\cos(x+y)} + i\underbrace{(\sin x\cos y + \cos x \sin y)}_{\sin(x+y)} = \underline{e^{i(x+y)}}$$

$De^{ix} = -\sin x + i\cos x = i \cdot e^{ix}$

Euler: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

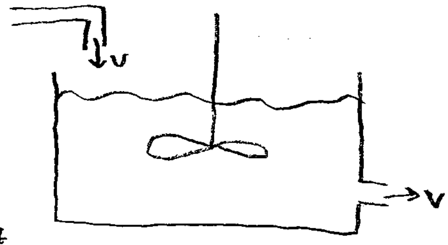
$\cos(ix) = \cosh x$, $\sin(ix) = i\sinh x$

# Lite om ODE (ordinära differentialekvationer)

Ex. En bassäng, volym $V$, innehåller en förorening, mängd $y(t)$ vid tid $t$.

Det tillförs volymen $v$ rent ~~vatten~~/tidsenhet lika mycket blandat förs bort.

Vad blir $y(t)$ om $y(0) = y_0$




Tydligen $y(t+\Delta t) = y(t) - \underbrace{v \cdot \Delta t}_{\text{bortförd volym}} \cdot \underbrace{\frac{y(t)}{V}}_{\text{konc. av förorening}} + \ldots$ ← blir litet då $\Delta t$ litet

så $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{v}{V} y(t) + \underset{\text{litet}}{\ldots}$

$\Delta t \to 0$ ger $y' = -\frac{v}{V} y$, $y' + \frac{v}{V} y = 0$