Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 12: Taylors formel

Innehåll. Taylors formel för approximation av funktioner nära någon punkt med hjälp av polynom. Restterm. Tillämpningar.

Introduktion. Linjär approximation säger att $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ för x nära a om f är deriverbar. Vi ska nu se vad ”$\approx$” och ”nära” betyder i denna formel. Vi ska också ge en allmän formel för approximation av tillräckligt deriverbara funktioner med hjälp av polynom och studera feltermen i denna allmänna formel.

Inledande exempel. Anta att vi vill approximera $f(x) = \sqrt{x}$ för olika värden på x som ligger nära 1. En första grov approximation skulle vi kunna få genom att säga att eftersom $\sqrt{1} = 1$ så måste

$$\sqrt{x} \approx 1 \qquad \text{för } x \text{ nära } 1.$$

Vi approximerar då $\sqrt{x}$ med ett polynom av grad noll som har rätt funktionsvärde i punkten 1. Till exempel får vi då att $\sqrt{1.2} \approx 1$. Vill vi förbättra approximationen kan vi ta hänsyn också till derivatan i punkten, och göra det vi tidigare kallat för linjär approximation. Med $f(x) = \sqrt{x}$ är $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ och alltså är $f'(1) = 1/2$. Med linjär approximation får vi alltså att

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) \qquad \text{för } x \text{ nära } 1.$$

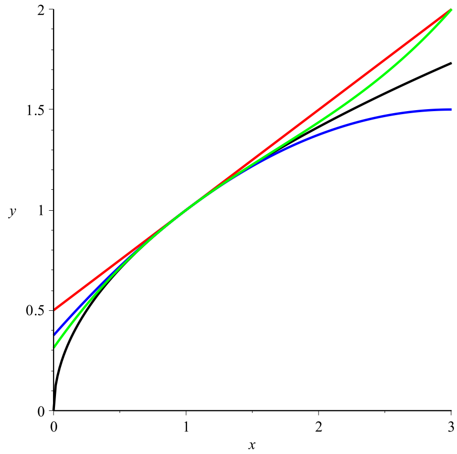
Vi approximerar då $\sqrt{x}$ med ett polynom av grad ett som har rätt funktionsvärde och rätt derivata i punkten 1.Till exempel får vi då att $\sqrt{1.2} \approx 1.1$. Vill vi förbättra approximationen kan vi ta hänsyn också till andraderivatan. Eftersom $f''(x) = -(1/4)x^{-3/2}$ och alltså $f''(1) = -1/4$ bygger vi på vår linjära approximation med en andragradsterm och får

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-1/4}{2!}(x-1)^2 \qquad \text{för } x \text{ nära } 1.$$

Vi approximerar då $\sqrt{x}$ med ett polynom av grad två som har rätt funktionsvärde, rätt derivata och rätt andraderivata i punkten 1.Till exempel får vi då att $\sqrt{1.2} \approx 1.095$. Vill vi förbättra approximationen kan vi ta hänsyn också till tredjederivatan. Eftersom $f'''(x) = (3/8)x^{-5/2}$ och alltså $f'''(1) = 3/8$ bygger vi på vår andragradsapproximation med en tredjegradsterm och får

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-1/4}{2!}(x-1)^2 + \frac{3/8}{3!}(x-1)^3 \qquad \text{för } x \text{ nära } 1.$$

Vi approximerar då $\sqrt{x}$ med ett polynom av grad tre som har rätt funktionsvärde, rätt derivata, rätt andraderivata och rätt tredjederivata i punkten 1.Till exempel får vi då att $\sqrt{1.2} \approx 1.0955$. Och så vidare! I grafen nedan ses våra successiva approximationer av $\sqrt{x}$, som är den svarta kurvan.



Figur. Den svarta kurvan $y = \sqrt{x}$ approximeras av $y = p_1(x)$ (röd), $y = p_2(x)$ (blå) och $y = p_3(x)$ (grön).

På detta sätt får vi en allmän metod att approximera funktioner lokalt nära en punkt. För att approximationen ska vara värdefull behöver vi veta hur stort felet är. Det ska vi se nu.

Taylors formel. Taylorpolynomet av grad n till f kring a är:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Detta Taylorpolynom har samma funktionsvärde och samma derivator upp till ordning n som f i punkten a och kan användas för approximation av f i näraliggande punkter. Felet när man approximerar $f(x)$ med $p_n(x)$ ges av

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för någon punkt c mellan x och a. Villkoret för att detta ska funka är att f är $n+1$ gånger deriverbar på något intervall som innehåller a och x.

Bevis. Anta att f uppfyller villkoren och anta att vi har valt någon punkt x där vi ska studera skillnaden $f(x) - p_n(x)$. Bilda funktionen

$$g(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{\lambda}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

där talet λ väljs så att $g(x) = 0$ i den där punkten x. Det är uppenbart att detta går. Vi vill bevisa att $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ för någon punkt c mellan a och x. Man kan lätt kolla att

$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0.$$

Eftersom $g(a) = g(x) = 0$ följer av ett argument vi använt flera gånger tidigare att det finns en punkt x_1 mellan a och x sådan att $g'(x_1) = 0$. Eftersom $g'(a) = g'(x_1) = 0$ följer av samma argument att det finns en punkt x_2 mellan a och x_1 sådan att $g''(x_2) = 0$. Vi upprepar argumentet om och om igen tills vi kommer fram till att det finns en punkt $c = x_{n+1}$ mellan a och x_n sådan att $g^{(n+1)}(c) = 0$. Men

$$g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \lambda$$

och att detta är noll är precis vad vi vill bevisa.

Exempel. Taylorpolynomet av grad 2 till $\ln(1+x)$ kring origo är

$$p_2(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

Om vi använder detta för approximation får vi

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \quad \text{för } x \text{ nära } 0$$

och speciellt att

$$\ln 1.5 = \ln(1+0.5) \approx 0.5 - \frac{0.5^2}{2} = 0.375.$$

Feltermen i denna approximation är

$$\frac{2/(1+c)^3}{3!} \cdot 0.5^3$$

för något c mellan 0 och 0.5, vilket gör att i värsta fall är felet $0.125/3 \approx 0.04167$. (I själva verket är $\ln 1.5 = 0.4054651$......)

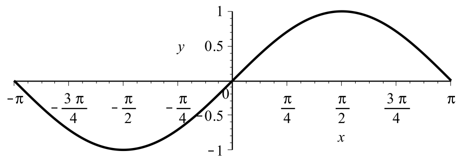
Terminologi. Om, som i sista exemplet, punkten a är 0 så brukar Taylorpolynom kallas Maclaurinpolynom.

Tillämpning. Med hjälp av Taylorutveckling får vi att

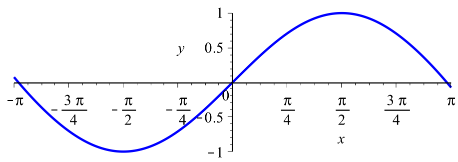
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Här har vi skrivit feltermen som $\mathcal{O}(x^3)$ som utläses stort ordo x^3 vilket betyder någon begränsad funktion gånger x^3. För gränsvärdet spelar det ju ingen roll exakt hur den där resttermen ser ut, det viktiga är att den är av storleksordningen x^3.

Taylorpolynomets uppgift är att approximera funktionen i närheten av den valda punkten. Här nedan ses grafen $y = \sin x$, som är svart, och grafen $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, som är blå, på intervallet $[-\pi, \pi]$. Som ni ser är den blå kurvan väldigt lik den svarta. Den blå är grafen till 7:e gradens Taylorpolynom till $\sin x$ kring origo.



Figur. Grafen ovan är $y = \sin x$ på intervallet $[-\pi, \pi]$.



Figur. Grafen ovan är $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ på intervallet $[-\pi, \pi]$.

INLEDANDE ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 25$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\sqrt{24}$.

Uppgift 2. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 3 till $\ln(1 + x)$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\ln 1.3$. Kan du vara säker på att felet i ditt närmevärde är till beloppet mindre än 0.005?

Uppgift 3. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 3 till $\sin x$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\sin 0.3$. Kan du vara säker på att felet i ditt närmevärde är till beloppet mindre än 0.005?

Uppgift 4. Använd ett lämpligt valt Taylorpolynom för bestämma ett närmevärde till $\cos \frac{1}{10}$ med tre korrekta decimaler.

Uppgift 5. Använd ett lämpligt valt Taylorpolynom för bestämma ett närmevärde till $\sqrt{e}$ med en avvikelse som är mindre än en hundradel.

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. Taylorpolynomet är $p_2(x) = 5 + \frac{1}{10}(x-25) - \frac{1}{1000}(x-25)^2$ och närmevärdet är 4.899

2. Maclarinpolynomet är $p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ och närmevärdet är 0.264. Ja! (uppskatta feltermen, i värsta fall är felets belopp $0.0081/4$)

3. Polynomet är $p_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ och närmevärdet är 0.2955. Ja!

4. Andragrads maclaurin räcker bra. Närmevärdet blir då 0.995.

5. Tredje gradens Taylorpolynom kring origo ger att $\sqrt{e} \approx 79/48 = 1.6458......$ En analys av feltermen ger att avvikelsen till beloppet är mindre än $e^c/384$ för nåt c mellan 0 och $1/2$ och eftersom $e^c \leq 3$ för sådana c så är felet mindre än en hundradel.