SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 16

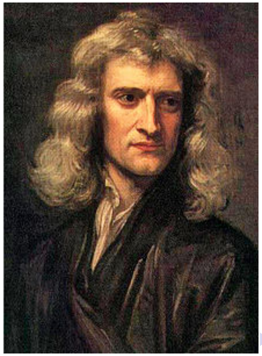
Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Envariabelanalys — bakgrund och motivation

$v = \dfrac{s}{t}$?

$A = \pi r^2$?



Slutet av kursen

Viktiga saker som återstår:

1. Generaliserade integraler
2. Tillämpningar av integraler
3. Parameterkurvor och kurvlängd
4. Serier

Översikt över modul 6

- Generaliserade integraler
  - Obegränsade intervall
  - Obegränsade funktioner
- Tillämpningar av integraler
  - Rotationsvolym, båglängd mm
- Kurvor i planet
  - Parametrisering
  - Kurvlängd

Generaliserade integraler

Integral över obegränsat intervall.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^{R} f(x)\,dx \quad \text{om gränsvärdet existerar.}$$

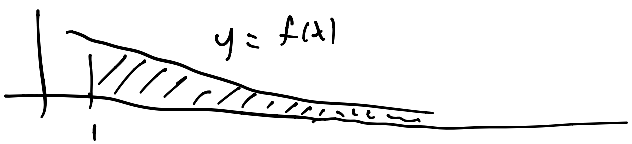
Om gränsvärdet i höger led existerar ändligt så är integralen **konvergent** och annars är den **divergent**.

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\underbrace{e^{-R}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-1}}_{\to \frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e} \quad \text{konv.}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(2\sqrt{R} - 2\right) = \infty$$

div.



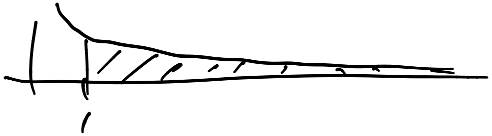
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$ är konvergent (den blir ett tal)

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{1}\right) = \underline{\underline{1}}$$

och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$ är divergent (den blir oändlig)

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\ln x\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(\ln R - 0\right) = \infty$$



Generaliserade integraler

Ofta kan man avgöra om en generaliserad integral är konvergent eller divergent utan att räkna ut den, till exempel genom att **jämföra** den med någon av ovanstående generaliserade integraler.

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ på $[a, \infty)$. Då gäller följande:

1. $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\implies \displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent

2. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent $\implies \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ är divergent

$$\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+\ln x}\,dx$$ är konvergent, ty

$$0 \le \frac{x-1}{x^3+\ln x} \le \frac{x}{x^3+\ln x} \le \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad \text{för } x \in [1,\infty)$$

och $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent, enligt satsen.

Generaliserade integraler

$$\int_1^\infty \frac{x + x\sqrt{x}\cancel{1}}{x^{5/2} - \ln x}\,dx$$ är divergent, ty

$$\frac{x + x\sqrt{x}}{x^{5/2} - \ln x} \geq \frac{x\sqrt{x}}{x^{5/2} - \ln x} \geq \frac{x\sqrt{x}}{x^{5/2}} = \frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \geq 0$$

$x \in [1, \infty)$

och $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$, divergent, enl. satsen.

Ett gammalt tentaproblem.

Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx$$

är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, beräkna den!

Konvergent ty $0 \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2}$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konv.

Generaliserade integraler

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2+x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{partial-} \\ \text{bråks-} \\ \text{uppdeln.} \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{R\to\infty} \Big[\ln x - \ln(x+1) \Big]_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\ln R - \ln(R+1) - \ln 1 + \ln 2 \right)$$

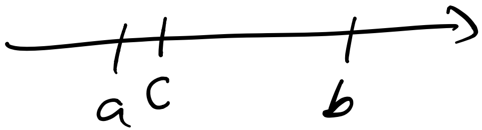
$$= \lim_{R\to\infty} \Big(\underbrace{\ln \underbrace{\frac{R}{R+1}}_{\to 1}}_{\to 0} + \ln 2 \Big) = \ln 2 .$$

Obegränsad funktion

Om $f(x)$ är obegränsad när $x \to a^+$ så sägs integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ också vara generaliserad (fast det inte syns på gränserna). Motsv för b^-.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{om gränsvärdet existerar,}$$

annars är integralen divergent.



Obegränsad funktion

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2 \quad \text{konv.}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_c^1$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-1 + \frac{1}{c}\right) = \infty \quad \text{div.}$$

Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx$$

är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, beräkna den!

$$= \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \left(\ln 1 - \ln 2 - \ln c + \ln c+1\right)$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \left(\ln 1 - \ln 2 + \ln \frac{c+1}{c}\right) = \infty \quad \underline{\underline{\text{div.}}}$$

Generaliserade integraler

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x}\, dx$$

Konvergent eller divergent?

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{8+6\cos x}{x^2+1}\,dx$ konv.

2. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x + x}{x^2-1}\,dx$ div

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ div

Konvergent eller divergent?

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{8+6\cos x}{x^2+1}\,dx$ är konvergent ty

$$0 \le \frac{8+6\cos x}{x^2+1} \le \frac{14}{x^2+1} \le 14\cdot\frac{1}{x^2} \quad \text{för } x\in[1,\infty)$$

och $\displaystyle\int_1^{\infty} 14\,\frac{1}{x^2}\,dx = 14\cdot\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent.

Konvergent eller divergent?

2. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x + x}{x^2-1}\,dx$ divergent ty

$$\frac{\ln x + x}{x^2-1} \geq \frac{x}{x^2-1} \geq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \geq 0, \quad x \in [2,\infty)$$

och $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ är divergent.

Konvergent eller divergent?

$$3.\ \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$ och

för konvergens krävs att <u>båda</u> är konvergenta.

Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ är divergent så följer

att vår integral är divergent.

Mer om substitution och partiell integration. Knepiga fall:

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot\arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} 1-x^2=u \\ \vdots \end{array} \right\} = \ldots$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x}=u \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du \end{array} \right\} = \int 2u e^u\,du = \text{partiell int.}$$

$$dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du$$

$$= \ldots$$

$= \text{byt till } x.$

Mer om Integraler

inversa trig. subst. kap 6,3.

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = 2\sin t \\ \arcsin\frac{x}{2} = t \\ x=0 \text{ ger } t=0 \\ x=1 \text{ ger } t=\pi/6 \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array}\right| = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt$$

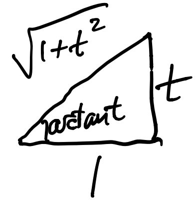
$$4\underbrace{(1-\sin^2 t)}_{\cos^2 t}$$

$$= \int_0^{\pi/6} 4\cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \ldots$$

Mer om Integraler

6.3

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = t \quad \left(x = 2\arctan t\right) \\ \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx = dt \end{array} \right\}$$



$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \sin(2\arctan t) =$$

$$= 2\sin(\arctan t)\cos(\arctan t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \ldots\ldots = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2}{3+t^2}\,dt = \ldots$$

sätt in x.

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$$

Läxa

Att göra. Se film 17 Tillämpningar av integraler.