Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

5. Derivatans medelvärdessats och följdsatser

Innehåll. Vi ska formulera och bevisa derivatans medelvärdessats, och dess följdsatser, som är grunden för att man kan använda derivata för att undersöka var funktioner är växande eller avtagande.

Introduktion. Om $f(t)$ är körsträckan vid tidpunkten t för ett fordon, så har vi tidigare sagt att $f'(t)$ anger den momentana hastigheten vid tidpunkten t. Ett exempel på hur medelvärdessatsen, som vi ska lära oss nu, kan tolkas i denna situation är följande. Anta att fordonet har körsträcka 0 vid tidpunkten $t = 0$, dvs $f(0) = 0$, och anta att körsträckan vid tidpunkten $t = 1$ timme är 100 km. Då är medelhastigheten 100 km/h. Det medelvärdessatsen säger i denna situation är att det då måste finnas en tidpunkt c, mellan 0 och 1, då den momentana hastigheten varit precis 100 km/h, dvs $f'(c) = 100$.

Medelvärdessatsen. Om f är deriverbar på intervallet (a, b) och kontinuerlig på $[a, b]$ så finns en punkt c mellan a och b så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bevis. Anta att f uppfyller villkoren i satsen och bilda funktionen

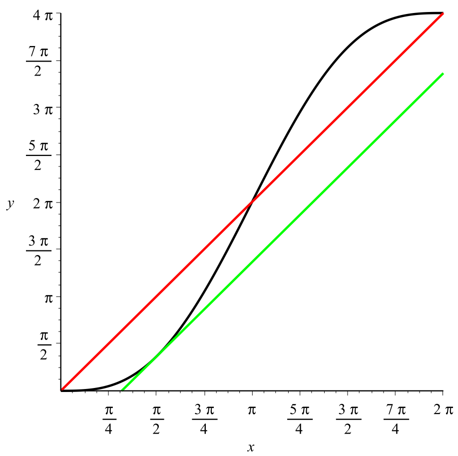
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Denna funktion är deriverbar på (a, b) och kontinuerlig på $[a, b]$ (eftersom f är det) så enligt en tidigare sats antar den ett största och ett minsta värde. Samtidigt är funktionsvärdena i ändpunkterna lika, dvs $g(a) = g(b)$. Om funktionen inte är konstant på intervallet så antas antingen max eller min i en inre punkt c mellan a och b där derivatan måste vara 0, enligt en tidigare sats. Om funktionen är konstant är derivatan noll i alla punkter mellan a och b. Hur som helst finns minst en punkt c mellan a och b där $g'(c) = 0$. Men

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

och att detta är 0 är precis vad vi skulle bevisa.

Tolkning. Det medelvärdessatsen säger är att om villkoren i satsen är uppfyllda så finns en punkt i intervallet där derivatan är lika med medeltillväxten av funktionen över intervallet. Se exemplet med hastighet i introduktionen.



Figur. Den svarta kurvan är grafen $y = f(x)$ på intervallet $[0, 2\pi]$. Medeltillväxten av funktionen är lutningen av den röda linjen. Det medelvärdessatsen säger är att det finns minst en punkt i intervallet där den momentana tillväxten är lika med medeltillväxten (om f uppfyller villkoren). I det här fallet är $\pi/2$ en sådan punkt. Tangenten där är grön.

Rolles sats. I beviset argumenterade vi för att en kontinuerlig funktion som har samma värde i båda ändpunkterna på ett intervall och som är deriverbar på det inre av intervallet måste ha en derivata som är 0 i någon punkt mellan ändpunkterna. Detta brukar ibland kallas Rolles sats.

Följdsatser. Med hjälp av medelvärdessatsen kan man bevisa ett antal följdsatser, som säger hur man kan använda derivata för att avgöra var en funktion är växande, respektive avtagande. Vi måste först definiera dessa begrepp.

Definition. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. Om för alla punkter x_1 och x_2 i intervallet I gäller att

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

så sägs f vara strängt växande i I. Om den sista olikheten byts ut mot icke-sträng olikhet ($\leq$) så sägs funktionen vara växande i I.

En funktion är alltså strängt växande i ett intervall om så fort man tar två punkter i intervallet så är funktionsvärdet större i den högra punkten än i den vänstra.

Definition. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. Om för alla punkter x_1 och x_2 i intervallet I gäller att

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

så sägs f vara strängt avtagande i I. Om den sista olikheten byts ut mot icke-sträng olikhet ($\geq$) så sägs funktionen vara avtagande i I.

En funktion är alltså strängt avtagande i ett intervall om så fort man tar två punkter i intervallet så är funktionsvärdet större i den vänstra punkten än i den högra.

Följdsats 1. Om f är deriverbar på intervallet (a, b) och $f'(x) > 0$ för alla x i (a, b) så är f strängt växande på (a, b).

Bevis. Anta att $f'(x) > 0$ för alla x i (a, b). Ta vilka två punkter som helst, x_1 och x_2, i intervallet och anta att $x_1 < x_2$. Enligt medelvärdessatsen finns då en punkt c mellan x_1 och x_2 sådan att

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Detta betyder att $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Eftersom höger led är positivt (både $f'(c)$ och $x_2 - x_1$ är ju positiva enligt antagandena) så måste också vänster led vara positivt, vilket betyder att $f(x_2) > f(x_1)$. Vi har alltså visat att f är strängt växande.

På samma sätt visar man:

Följdsats 2. Om f är deriverbar på intervallet (a, b) och $f'(x) \geq 0$ för alla x i (a, b) så är f växande på (a, b).

Följdsats 3. Om f är deriverbar på intervallet (a, b) och $f'(x) < 0$ för alla x i (a, b) så är f strängt avtagande på (a, b).

Följdsats 4. Om f är deriverbar på intervallet (a, b) och $f'(x) \leq 0$ för alla x i (a, b) så är f avtagande på (a, b).

Följdsats 5. Om f är deriverbar på intervallet (a, b) och $f'(x) = 0$ för alla x i (a, b) så är f konstant på (a, b).

Tillägg. Om funktionen f är kontinuerlig ut till ändpunkterna så sprider sig växandet och avtagandet till dem också, dvs slutsatsen i följdsatserna blir att funktionen är växande respektive avtagande på $[a, b]$ även om derivatan bara uppfyller villkoret på (a, b). I följdsats 1 och 3 fortsätter slutsatsen att gälla även om derivatan skulle vara 0 i någon enstaka punkt (eller ändligt många punkter). Exempel: $f(x) = x - \sin x$ är strängt växande på $[0, 8\pi]$ eftersom $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ för alla x i intervallet utom enstaka punkter där $1 - \cos x = 0$.

Följdsats 6. Om $g'(x) = h'(x)$ för alla x i ett intervall, så finns en konstant C så att $g(x) = h(x) + C$ i intervallet. Dvs två funktioner som har samma derivata i ett intervall skiljer sig åt med en konstant.

Bevis för Följdsats 6. Detta följer av Följdsats 5 om man där tar $f(x) = g(x) - h(x)$. Denna funktions derivata är ju 0 så den måste vara konstant enligt Följdsats 5.

Exempel. Funktionen $f(x) = x^3$ är strängt växande på intervallet $(-\infty, \infty)$. Det kan man se antingen genom att använda definitionen på strängt växande eller genom att använda Följdsats 1 tillsammans med det som står under Tillägg.

Exempel. Funktionen $f(x) = \cos x - 2x$ är strängt avtagande på intervallet $(-\infty, \infty)$. Det bevisar man med Följdsats 3 eftersom $f'(x) = -\sin x - 2$ som är negativt för alla x.