Envariabelanalys 2018-02-26 #19

Talföljder, 9.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (en funktion : $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$)

ex. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ växande, begränsad uppåt och nedåt, konvergent $\to 1$
$1, 2, 1, 2, \ldots$ begränsad uppåt och nedåt
$1, -2, 3, -4, \ldots$

Egenskaper: följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är växande omm $a_{n+1} \geq a_n$, alla n
avtagande omm $a_{n+1} \leq a_n$, alla n

den är begränsad uppåt omm $a_n < M$, alla n, något M
nedåt omm $a_n > m$, alla n, något m

begränsad: begr. uppåt och nedåt

Följden är konvergent omm $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existerar i $\mathbb{R}$.

dvs. för varje $\varepsilon > 0$ finns N så att $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Sats: Om en följd är konvergent så är den begränsad.

Sats: Om en reellvärd följd är växande och begränsad uppåt så är den konvergent. (avtagande) (nedåt)

Serier, 9.2, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ← gränsvärde, inte detsamma som en summa...

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, partialsumma för serien.

Def: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent/divergent beroende på om $\lim_{N\to\infty} S_N$ existerar ändligt eller inte.

ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, $S_N = 1 - \frac{1}{2^N} \to 1$ då $N \to \infty$ så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ är konvergent. $(= 1)$

ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \ldots$, $S_N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{N}} \geq N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \to \infty$ då $N \to \infty$ (divergent)

ex. geometrisk serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a x^n$ konv/div? för olika a, x)

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} = \begin{cases} a\frac{1-x^{N+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ a(N+1) & x = 1 \end{cases}$$

så $S_N \to \frac{a}{1-x}$ om $-1 < x < 1$
om $|x| \geq 1$ divergent, (utom då $a = 0$)

Sats: Ett nödvändigt villkor för konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ty: $\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} (S_N - S_{N-1}) = S - S = 0$

Sats: Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ båda är konvergenta:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{cases}$$

ty, gäller för alla partialsummor...

Kriterier för konvergens (mest om icke-negativa satser, dvs $a_n > 0$, alla n)

Sats: Om $a_n \geq 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ är begränsad

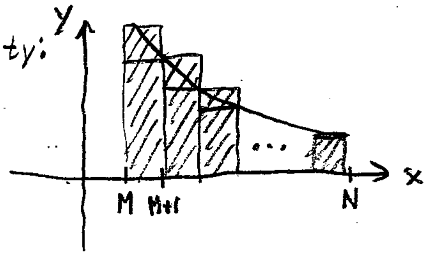
ty $\{S_n\}$ en växande följd (då $a_n \geq 0$), konvergent omm begränsad (uppåt)

Om $a_n \geq 0$ skrivs ofta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ för att uttrycka att den är konvergent.

Integraluppskattning:

Om $f(x)$ är avtagande gäller för $M < N$, heltal,

$\sum_{n=M}^{N-1} f(n) \geq \int_M^N f(x)dx$, $\sum_{n=M+1}^{N} f(n) \leq \int_M^N f(x)dx$, ty:



så $f(N) + \int_M^N f(x)dx \leq \sum_{n=M}^{N} f(n) \leq f(M) + \int_M^N f(x)dx$

dvs $f(N) \leq \sum_{n=M}^{N} f(n) - \int_M^N f(x)dx \leq f(M$

så om $f(x) \geq 0$ är $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ och $\int_1^N f(x)dx$ samtidigt begränsat då N växer.

Sats (Cauchys integralkriterium):

Om $f(x)$ är ≥ 0 och avtagande: $\sum f(n) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$

dvs konvergenta samtidigt.

ex. eftersom $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ är konvergent omm $\alpha > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergent omm $\alpha > 1$

spec. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, den "harmoniska serien" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

uppskattningen ovan (med $f(x) = \frac{1}{x}$, $M = 1$): $\frac{1}{N} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \underbrace{\int_1^N \frac{dx}{x}}_{\ln N} \leq 1$

och $\underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N}_{\xrightarrow{N \to \infty} \gamma \approx 0{,}5772}$ är avtagande och nedåt begränsad

forts. på nästa sida

$$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n}-\ln(N+1)-\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N)\right)=\frac{1}{N+1}-\ln(N+1)+\ln N<0$$

ty $\ln(N+1)-\ln N=\frac{1}{c}\cdot 1$, något c, $N<c<N+1$, $\frac{1}{c}>\frac{1}{N+1}$

ex. $f(x)=\ln x$ (satsen med $-f(x)$: $\ln N \geq \underbrace{\sum_{n=1}^{N}\ln n}_{\ln N!}-\underbrace{\int_1^N \ln x\,dx}_{[x\ln x-x]_1^N=N\ln N-N+1}\geq \ln 1=0$

$e^{(\ldots)}$ ger $e\left(\frac{N}{e}\right)^N\leq N!\leq eN\left(\frac{N}{e}\right)^N$

Bättre uppskattning ger $N!=\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N\cdot e^{\frac{\theta_N}{12N}}$, $\theta_N\to 1$ då $N\to\infty$

Stirlings formel.

Majorantprincipen: Om $0\leq a_n\leq b_n$:

$\sum^{\infty}a_n$ div $\Rightarrow \sum^{\infty}b_n$ div

$\sum^{\infty}b_n$ konv $\Rightarrow \sum^{\infty}a_n$ konv

ty: $\sum^{\infty}b_n$ konv $\Rightarrow \sum^{N}b_n<A$, alla N, något $A\Rightarrow \sum^{N}a_n<A$, alla $N\Rightarrow \sum^{\infty}a_n$ konv.

Jämförelseprincipen: Om $a_n, b_n>0$ och $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L\neq 0,\infty$

så: $\sum^{\infty}a_n$ konv. $\Leftrightarrow \sum^{\infty}b_n$ konv.

ty för stora n: $\frac{L}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3L}{2}$, så $\frac{L}{2}b_n<a_n<\frac{3L}{2}b_n$, klart m. majorantprincipen..

ex. avgör om serierna är konvergenta eller divergenta:

- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ $\quad \dfrac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{n^2-1}\to 1$ då $n\to\infty$, så konvergent (jämförelseprincipen och $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konv.)

  alt. $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{n-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{n+1}$, så $S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\right.$

  $\left.+\ldots+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\to\frac{3}{4}$ då $N\to\infty$

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ divergent, ty $0<\frac{1}{n}<\frac{\ln n}{n}$ $(n<2$

  maj. princ. $\sum^{\infty}\frac{1}{n}$ div

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ konv., $0<\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n^{3/2}}$, stora n ($\ln n<\sqrt{n}$, stora n)

- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x\ln x}>0$, avt. då $x\geq 2$; $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx\left\{\begin{array}{ll} t=\ln x & \begin{array}{c|c} x & t\\ \infty & \infty\\ 2 & \ln 2\end{array} \\ dt=\frac{1}{x}dx & \end{array}\right\}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t}$ div

  divergent, integralkriteriet ..