Envariabelanalys 2018-01-18 #3

Sist $\lim_{x\to a} f(x) = L$ omm för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow x \in D(f)$ och $|f(x) - L| < \varepsilon$

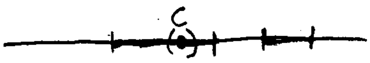
Högergränsvärden $\lim_{x\to a+} f(x) = L$ $\quad 0 < x-a < \delta \Rightarrow$

Vänstergränsvärden $\lim_{x\to a-} f(x) = L$ $\quad -\delta < x-a < 0$

de ger räknereglerna på s. 69–71

Idag om kontinuitet

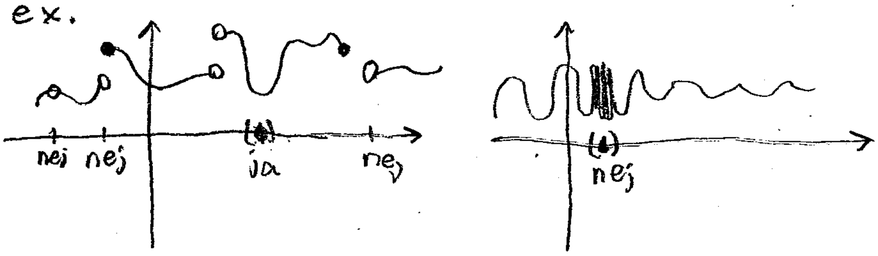
Def. c är en inre punkt i $D(f)$ omm för något $\delta > 0$:



$|x-c| < \delta \Rightarrow x \in D(f)$

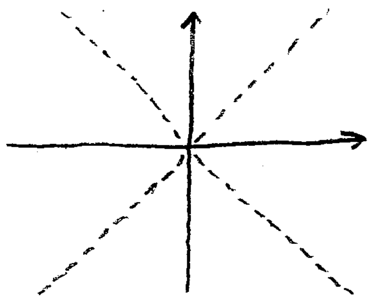
Def. Om c är en inre punkt i $D(f)$ är $f(x)$ kontinuerlig i c omm $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$

ex.



ex. alla polynom är kontinuerliga i alla punkter

ex. $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \quad (x \text{ rationellt}) \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ (x \text{ irrationellt}) \end{cases}$

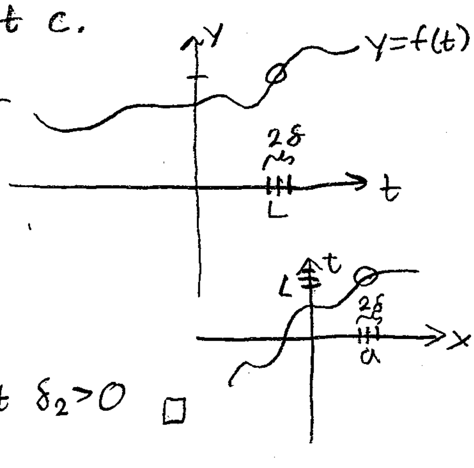


är kontinuerlig bara då $c = 0$

Det finns funktioner som är kontinuerliga för alla irrationella c, men inte för något rationellt c.

Om $\lim_{x\to a} g(x) = L$ och $f(x)$ är kontinuerlig i $x = L$

så är $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(L)$



ty för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ s.a.

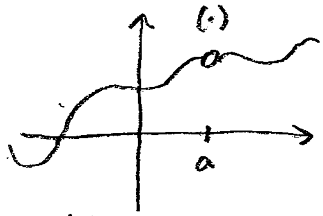
$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$ om $|g(x) - L| < \delta_1$ (f kont.)

vilket är sant om $0 < |x-a| < \delta_2$ för något $\delta_2 > 0$ $\square$

ex. $\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{2x^3-4x}{x^2-x^3}\right) \overset{\text{cos cont}}{=} \cos\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x}-1\right)}\right)=\cos(-2)$

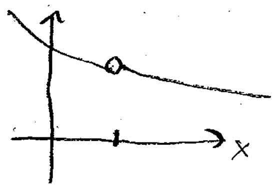
Om $\lim_{x\to a} f(x)=L$ existerar, men $f(x)$ inte är kontinuerlig för $x=a$
($f(a)\neq L$ eller $a\notin D(f)$)

är $f_1(x)=\begin{cases} f(x) & x\in D(f)\setminus\{a\} \\ L & x=a \end{cases}$ kontinuerlig för $x=a$, en hävbar diskontinuitet

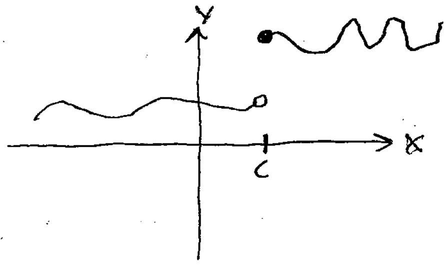


ex. $f(x)=\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2+x-2}=\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+3)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}$ har en hävbar diskontinuitet

inte def. för $x=1$ $\qquad f_1(1)=\frac{4}{3}$



$f(x)$ är inte definierad för $x=1$, men genom att lägga till ett värde $f_1(1)=\frac{4}{3}$ fås en funktion $f_1(x)$, kont. i $x=1$

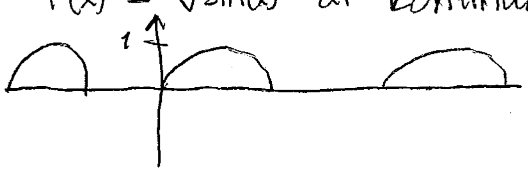


Def: $f(x)$ är högerkontinuerlig i $x=c$ omm $f(c)=\lim_{x\to c+} f(x)$
(vänsterkont. p.s.s.)

Om $c\in D(f)$ är en randpunkt till $D(f)$, dvs $(c-\delta,c+\delta)\cap D(f)=[c,c+\delta)$
för något $\delta>0$
eller $(c-\delta,c]$

så säger vi att $f(x)$ är kontinuerlig för $x=c$
om den är höger-/vänsterkont. för $x=c$

ex. $f(x)=\sqrt{\sin(x)}$ är kontinuerlig för alla $c\in[0,\pi]$ $(+k\cdot 2\pi)$
$k\in\mathbb{Z}$



Def. $f(x)$ är kontinuerlig om den är kontinuerlig i alla $c \in D(f)$

Vi säger också att $f(x)$ är kontinuerlig i isolerade punkter i $D(f)$

ex. $\sqrt{-x^2}$

Sats: Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga så är

$(f+g)(x)$, $kf(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\frac{f}{g}(x)$, $(f \circ g)(x)$ kontinuerliga

ex. $f(x) = c$, x, $|x|$, alla polynom, $\frac{1}{x}$

(Ok i alla punkter i $D(f)$, d.v.s. då $x \neq 0$)

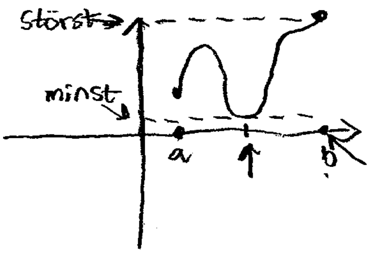
$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$

$\cos\left(\frac{x}{x^2-4}\right) + \left|\frac{\tan x}{x^2+e^{x^4}}\right|$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Två viktiga egenskaper för kontinuerliga funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
def. på slutna, begränsade intervall

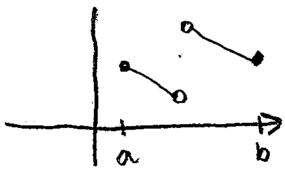
Satsen om största och minsta värden:

Om $f(x)$ är kontinuerlig och definierad på $[a, b]$ så antar $f(x)$ största och minsta värden.

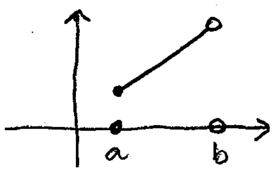


fyra villkor nödvändiga!

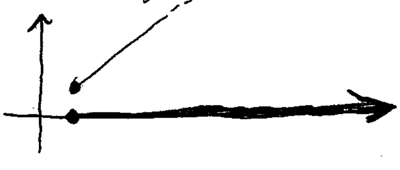
f(x) inte konti:



inte slutet



inte begränsat

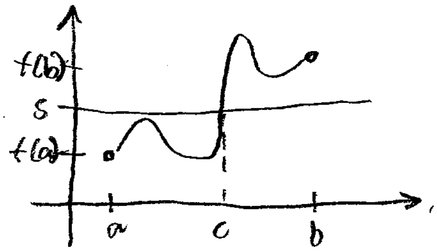


$f: \mathbb{Q} \cap [1, 2] \to \mathbb{Q}$, ex. $f(x) = -(x^2-2)^2$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \quad m = 2k \Rightarrow \cancel{4}_{2} k^2 = \cancel{2} n^2$

Satsen om mellanliggande värden

Om $f(x)$ är kontinuerlig och def. på $[a,b]$ och s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ så finns minst ett $c\in[a,b]$ med $f(c)=s$



[om $f: \mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=x^2$, $f(1)=1$, $f(2)=4$
$1<2<4$ men $f(c)\neq 2$, alla $c\in[1,2]$]

ex. Visa att det finns precis ett $x\in[1,2]$ så att $f(x)=x^7+4x^4-100=0$

Jo, $f(1)=-95$, $f(2)=92$, $-95<0<92$ ger att $f(x)=0$ för något $x\in[1,2]$ (dvs. minst ett)

$0<x_1<x_2$: $x_1^7<x_2^7$, $4x_1^4<4x_2^4$ så $f(x_1)<f(x_2)$ f strikt växande.
Så $f(x)=0$ för högst ett $x>0$. Exakt ett sådant x.

Värdet kan hittas med intervallhantering.

$f(1)=-95$ $f(2)=92$ $f(1{,}5)\approx-62{,}66$ $f(1{,}75)\approx-12{,}22$ $f(1{,}875)\approx30{,}91$
lösning i intervallet $(1{,}78125,\ 1{,}8125)$

Satserna säger tillsammans att om $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig så är $R(f)$ ett slutet begränsat intervall