Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 10: Tillämpningar av derivata

Innehåll. Här ska vi se exempel på några tillämpningar av derivata: extremvärdesproblem, förändringstakt och related rates, Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationer, l'Hopitals regel för att beräkna gränsvärden.

Introduktion. Vi har tidigare gått igenom teori om hur man kan använda derivata för att ta reda på om funktioner växer eller avtar och därmed också hitta största och minsta värde: extremvärden kan ju bara antas i kritiska punkter, singulära punkter och randpunkter. Här ska vi se tillämpningar av detta. Vi har också tillämpningar av derivata som förändringstakt av en funktion. L'Hopitals regel är ett sätt att räkna ut (vissa!) gränsvärden med hjälp av derivator. Newton-Raphsons metod att lösa ekvationer är en tillämpning av linjär approximation. Även om linjär approximation är en av de allra viktigaste ideerna i den här kursen, så är Newton-Raphsons metod som sådan inte så viktig för oss.

Extremvärdesproblem, exempel. Tänk att vi vill bestämma minsta avståndet från kurvan med ekvation $y = 1 - x^2$ till origo. Hur gör vi?

Avståndet från en punkt (x, y) till $(0, 0)$ fås genom Pythagoras sats till $\sqrt{x^2 + y^2}$. Om punkten ska ligga på kurvan där $y = 1 - x^2$ så blir alltså avståndet till origo $\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}$. För att lösa vårt problem ska vi alltså hitta minsta värdet av funktionen

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Om vi vet att funktionen antar ett minsta värde så måste detta antas i någon punkt där f:s derivata är noll, i någon punkt där f inte är deriverbar eller i någon punkt som är en randpunkt till definitionsmängden. I detta fall saknas dock randpunkter till definitionsmängden och f är dessutom deriverbar överallt. Så om det minsta värdet finns så antas det i detta fall i en kritisk punkt. Vi deriverar och får (efter förenkling)

$$f'(x) = \frac{x - 2x(1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}},$$

så vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$ eller $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Funktionsvärdena i dessa punkter är

$$f(0) = 1, \quad f(\pm 1/\sqrt{2}) = \sqrt{3}/2.$$

Vi konstaterar att om f har ett minsta värde så är det $\sqrt{3}/2$. Om det finns ett minsta avstånd från kurvan till origo så är det alltså $\sqrt{3}/2$. Men hur ska vi se att det verkligen finns ett minsta avstånd?

Ett sätt att tänka är så här: På intervallet $[-1, 1]$ finns garanterat ett minsta värde, eftersom detta intervall är slutet och begränsat och f är kontinuerlig, och det minsta värdet måste då tas i kritiska punkter eller randpunkter eftersom singulära punkter saknas. Det minsta värdet är det vi har räknat fram tidigare eftersom värdet i randpunkterna är 1. Så f:s minsta värde på $[-1, 1]$ är alltså $\sqrt{3}/2$. Eftersom $f(x)$ uppenbart är större än 1 för alla x med $|x| > 1$ så måste $\sqrt{3}/2$ också vara det minsta värdet när x varierar i $\mathbb{R}$.

Förändringstakt och related rates. En fem meter lång stege står lutad mot en vägg. Nederdelen av stegen rör sig nu bort från väggen med hastigheten 2 meter per sekund. Hur snabbt faller överdelen av stegen i det ögonblick då nederdelen befinner sig tre meter från väggen?

Om vi tänker oss att golvet är plant och att väggen och golvet bildar rät vinkel med varandra, så kan vi i ett vanligt koordinatsystem låta x vara avståndet från nederdelen av stegen till väggen och y vara avståndet från överdelen av stegen till golvet, båda avstånden i meter. Pythagoras sats ger oss sambandet $x^2 + y^2 = 25$, ur vilket vi kan lösa ut $y = \sqrt{25 - x^2}$. Vi observerar att x och y båda är funktioner av tiden, t, och att de anger positioner, varför deras derivator kan tolkas som hastigheter. Om t_0 är den tidpunkt sådan att $x(t_0) = 3$ så söker vi alltså $y'(t_0)$ där $y(t) = \sqrt{25 - x(t)^2}$. Vi deriverar och får

$$y'(t) = \frac{-x(t)x'(t)}{\sqrt{25 - x(t)^2}}.$$

Om vi i detta sätter in $t = t_0$ får vi

$$y'(t_0) = \frac{-x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{25 - x(t_0)^2}} = \frac{-3 \cdot 2}{4} = -\frac{3}{2} \text{ m/s.}$$

Vid näst sista likhetstecknet har vi använt att $x(t_0) = 3$ och att $x'(t_0) = 2$. Vi ser alltså att stegens överdel faller med hastigheten $3/2$ meter per sekund i det aktuella ögonblicket.

Newton-Raphsons metod för ekvationslösning. Säg att vi vill lösa ekvationen $y = f(x)$. Grafiskt betyder det att vi vill hitta x där funktionsgrafen skär x-axeln. Om detta är svårt kan vi göra så här istället: gör en grov gissning x_0 av det sökta x-värdet, skriv upp en ekvation för tangenten till funktionskurvan i den punkt på kurvan där x-koordinaten är x_0 och ta fram den punkt där tangenten skär x-axeln istället. Tangentens ekvation är $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ och denna skär x-axeln när $y = 0$ dvs när $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Om vi här löser ut x så får vi

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

som är vår approximation. Vi kan nu upprepa proceduren, dvs vi tar vår approximation som en ny grov gissning, dvs den får rollen av x_0 och så kör vi proceduren igen. På detta sätt får vi en följd av förhoppningsvis bättre och bättre approximationer där den $n + 1$:a approximationen fås ur den n:e genom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

l'Hopitals regel för gränsvärden. Vi börjar med ett specialfall: Om f och g är kontinuerligt deriverbara funktioner på något intervall kring punkten a och $f(a) = g(a) = 0$ så gäller att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{om detta gränsvärde existerar.}$$

Bevis. Under de givna förutsättningarna har vi att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

när $x \to a$.

I själva verket gäller l'Hopitals regel även i fler situationer, t ex för funktioner som är deriverbara utom i a, de behöver inte ens vara definierade i a, bara de går mot noll när x närmar sig a. Beviset blir förstås lite svårare i dessa fall. Med hjälp av substitutionen $x = 1/t$ kan man se att l'Hopitals regel också kan användas då $f(x)$ och $g(x)$ båda går mot ∞ när x går mot a. Så regeln gäller både gränsvärden av typ $[0/0]$ och $[\infty/\infty]$. Man kan dock inte använda regeln då täljaren eller nämnaren har ett gränsvärde eller ensidigt gränsvärde i a som är ett ändligt tal $\neq 0$. Varning för detta!