Envariabelanalys 2018-02-27 #20

Minns $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent omm $\lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n}_{S_N}$ existerar (ändligt)

Två konvergenskriterier till (för icke-negativa serier)

Sats: Rotkriteriet — Kvotkriteriet

Om $a_n \geq 0$ och $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ — $a_n > 0$ och $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$

så $A < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

$A > 1 \Rightarrow$ -ll- divergent

$A = 1$?

Ty: $A<1$: för $n > N$: $\sqrt[n]{a_n} < \frac{A+1}{2} < 1$ (ngt)

$0 \leq a_n < \left(\frac{A+1}{2}\right)^n$, $\sum^{\infty} \left(\frac{A+1}{2}\right)^n < \infty$

(majorantprincipen)

-ll- $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{A+1}{2}$; $a_{n+1} < \left(\frac{A+1}{2}\right) a_n \ldots$ -ll-

$A > 1$: $\sqrt[n]{a_n} > \frac{A+1}{2} > 1$, $a_n > \underbrace{\left(\frac{A+1}{2}\right)^n}_{>1}$

div. enl. maj.princ.

$A = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ger $A=1$ oberoende av α.

Serier som inte (säkert) är icke-negativa?

Sats: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. Serien sägs då vara absolut konvergent.

ty: låt $a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$, $a_n^+ \geq 0$

$a_n^- = \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ -a_n & a_n < 0 \end{cases}$, $a_n^- \geq 0$

då är $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$0 \leq a_n^\pm \leq |a_n|$ så (med förutş.) $\sum^{\infty} a_n^\pm$ konv. (maj. princ) så $\sum^{N} a_n = \sum^{N} (a_n^+ - a_n^-) =$
$= \sum^{N} a_n^+ - \sum^{N} a_n^-$.

En serie som är konvergent men inte absolut konvergent sägs vara betingat konvergent.

Leibnitz kriterium: Om
1) $\operatorname{sgn} a_n = -\operatorname{sgn} a_{n+1}$ (alternerande serie)
2) $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ (avtagande belopp)
3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

ty: (om $a_1 > 0$) $S_{2N+2} - S_{2N} = \overset{>0}{a_{2N+1}} + \overset{<0}{a_{2N+2}} \geq 0$, $S_{2N+2} \geq S_{2N}$

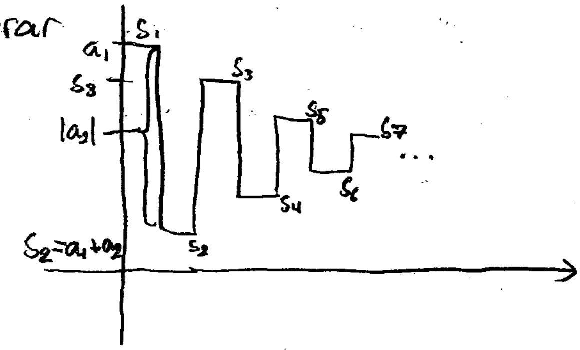
$S_{2N+1} - S_{2N-1} = \underset{<0}{a_{2N}} + \underset{>0}{a_{2N+1}} \leq 0$, $S_{2N+1} \leq S_{2N-1}$

så $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots$
$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \ldots$ och $s_{2N} \leq \underbrace{s_{2N+1}}_{s_{2N}+\underbrace{a_{2N+1}}_{>0}} \leq \ldots < s_1 = a_1$

så $\{s_{2N}\}_{N=1}^{\infty}$ växande, begränsad
$\{s_{2N+1}\}_{N=1}^{\infty}$ avtagande, begränsad

så $\lim\limits_{N\to\infty} s_{2N}$, $\lim\limits_{N\to\infty} s_{2N+1}$ existerar, men $s_{2N+1} - s_{2N} = a_{2N+1} \to 0$ då $N \to \infty$

så lika och serien konvergerar



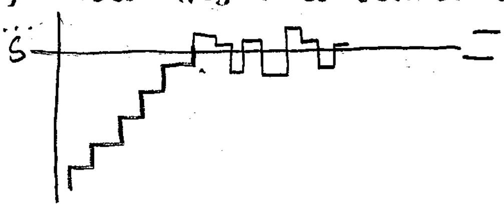
ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ är konvergent omm $\alpha > 0$

$(\alpha \leq 0: \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \not\to 0)$

betingat konvergent då $0 < \alpha \leq 1$
absolut konvergent då $\alpha > 1$

Om $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ är betingat konvergent, dvs konv. men $\sum\limits^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits^{\infty} a_n^-$ divergenta, kan omkastning av termerna ge ett godtyckligt värde för summan (!),

ty: För att få värdet s: tag positiva termer tills summan av dem $> s$, sedan negativa termer tills summan är $< s$, så positiva tills $> s, \ldots$



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ så nya serien konvergerar mot s

Potensserier, 9.5 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (eller $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$) a_n konst, x "variabel"

Sats: För $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ finns $R \in [0, \infty]$ s.a. serien är absolutkonvergent för $|x| < R$ och divergent för $|x| > R$

för $|x| = R$: abs.konv/bet.konv./div. ($R = 0$ konv.)

ty: Om serien är konv. för x_0 och $|x| < |x_0|$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n x_0^n|}_{\leq K \text{ ngt}} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} K r^n = \frac{K}{1-r} < \infty$$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| = r < 1$ / så konvergensintervallet $]-R, R[$, $]-R, R]$, $[-R, R[$, $[-R, R]$

R kallas konvergensradien

Sats (Abel): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är kontinuerlig på hela konv. intervallet.

spec. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to R-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n & \text{om serien konv} \\ \quad -R+ \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n & \text{"} \end{cases}$

R kan (ofta) bestämmas med rot- eller kvotkriteriet enl.

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ om det existerar (alltid $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$)

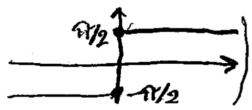
ty: $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ger att serien är konv/div då $L|x| < 1$ / > 1, $|x| < R$ / $> R$

ex. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ger $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, så $R = \infty$, serien är (absolut) konv för alla x $(= e^x)$

Sats: Om $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ för $|x| < R$ $(R > 0)$ så

1) $f(x)$ är deriverbar för $|x| < R$ och $f'(x) = \sum\limits_{n=0/1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ då $|x| < R$

2) $f(x)$ är integrerbar över slutna intervall $\subset\ ]-R, R[$ och $\int_0^x f(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ för $|x| < R$ "derivera och integrera term för term"

(ex. $f_n(x) = \arctan(nx) - \arctan((n-1)x)$ ger $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x) = \arctan Nx \xrightarrow[N\to\infty]{}$ 

)

ex. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konv. för alla x

enl satsen $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n \cdot x^{n-1}}{n!}}_{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$, så (ODE) $f(x) = C \cdot e^x$, ngn konst C

$f(0) = 1$, så $C = 1$, $\underline{f(x) = e^x}$

ex. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ då $|x| < 1$

så $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ $|x| < 1$

integrera: $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+t} \underset{\text{enl. satsen}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ konv. då $|x| < 1$

Abels sats: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (konv. enl. Leibniz)