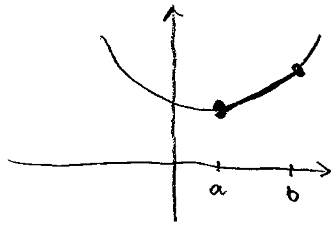
Envariabelanalys 2018-02-08 #12

Om Taylors formel

att approximera funktioner med polynom

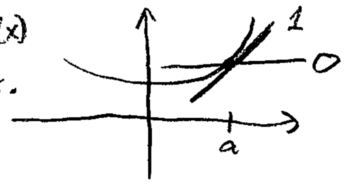


Sats (Taylors formel):

Om $f(t)$ är $n+1$ ggr deriverbar mellan x och a och n ggr deriverbar i ett intervall som innehåller a och x

så är $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+E_n(x)$

där $E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ för något s mellan a och x.



Ex. $f(x)=e^x=f^{(n)}(x)$, alla $n=1,2,3,\ldots$

så $e^x=e^a(1+(x-a)+\frac{1}{2}(x-a)^2+\ldots\frac{1}{n!}(x-a)^n)+\frac{e^s}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, ngt s mellan a och x.

speciellt om $a=0$: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^s}{(n+1)!}x^{n+1}$, ngt s mellan 0 och x

taylorpolynom med $a=0$ kallas Mclaurenpolynom

ML-

en till: ML för $\sin x$

n	0	1	2	3	4	5	6	
$f^{(n)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	
$f^{(n)}(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	$-1\ldots$

så $\sin x=0+x-\underset{3!}{\frac{x^3}{6}}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{(2k+1)}+\frac{(-1)^{k+1}\cos(s)}{(2k+3)!}x^{2k+3}$

p.s.s. $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(s)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

Obs; om man sätter in $x=it$ i ML-utvecklingen för e^x

$e^{it}=1+it-\frac{t^2}{2!}-i\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots=(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots)+i(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots)=\cos t+i\sin t$

Feltermen $E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}$ eller $(x-a)^{n+1}$

är "normalt" av formen $B(x)\cdot x^{n+1}$, där $B(x)$ är en begränsad funktion för små x, dvs, det finns K,δ s.a. $|B(x)|<K$ om $|x-a|<\delta$

man skriver $E_n(x)=\underset{\text{"stort ordo"}}{O}(x^{n+1})$ (då $x\to 0$ / a) (alt. $\frac{E_n(x)}{x^{n+1}}$ begränsad nära $x=0$)

ex. $\sin x=x+O(x^3)$

Obs: $f(x)=O(x^n)$ är <u>inte</u> en viss funktion

$f(x)=O(x^2)$ och $g(x)=O(x^2)$ betyder <u>inte</u> att $f(x)=g(x)$, men $f(x)-g(x)=O(x^2)$

"regler" för ordoräkning: $f(x)=O(x^n)\Rightarrow x^k f(x)=O(x^{n+k})$

$\Rightarrow f(x)=O(x^m)$ omm $m\le n$

$g(x)=O(x^m)$ $\Rightarrow f(x)\cdot g(x)=O(x^{m+n})$

$x^n=O(x^n)$; $\frac{1}{x^m}\cdot O(x^n)=O(x^{n-m})$, men inte (säkert) $\frac{O(x^n)}{O(x^m)}=O(x^{n-m})$

$f(t)=O(t^n)$, $t=g(x)=O(x^m)$ ger $f(g(x))=O(x^{m\cdot n})$

$\lim_{x\to 0}O(x^n)=0$ om $n>0$

Ex. $f(x)=(1+x)^{\alpha} \Rightarrow f^{(n)}(x)=\overbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}^{n\text{ st}}(1+x)^{\alpha-n}$

Så ML-utv: $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots+\underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\binom{\alpha}{n}}x^n+\binom{\alpha}{n+1}(1+s)^{\alpha-n-1}\cdot x^{n+1}$

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\dots+O(x^{n+1})$$

Sats: (ML-utvecklingens entydighet) Om $f(x)$ är $n+1$ ggr deriverbar, $Q_n(x)$ är ett polynom av grad $\le n$ och $f(x)=Q_n(x)+O(x^{n+1})$ så är $Q_n(x)=P_n(x)$, ML-polynomet av ordning n.

ty: $f(x)=Q_n(x)+O(x^{n+1})=P_n(x)+O(x^{n+1})$

så $Q_n(x)-P_n(x)=O(x^{n+1})$, så $\underbrace{\frac{Q_n(x)-P_n(x)}{x^{n+1}}}$ polynom av grad $\le n$ begränsad då $x\to 0$, så $Q_n(x)=P_n(x)$

Så vi kan finna $Q_n(x)$ "som vi vill" och vet att det är ML-polynomet.

Ex. $f(x)=\ln(1+x)$

$g(x)=f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+O(x^{n+1})$

så $g^{(k)}(0)=(-1)^k\cdot k!=f^{(k+1)}(0)$, så $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ $\quad k=1,2,\dots$

$f(0)=\ln 1=0$

så $\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+O(x^{n+1})$

$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+O(x^{n+1})=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+O(x^{n+1})$

p.s.s. $f(x)=\arctan x$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^n x^{2n}+O(x^{2n+2})$

ger $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+O(x^{2k+3})$

Ex. Finn ML-utvecklingen av ordning 5 för $f(x)=e^{\cos x}$

Vi vet: $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)=1+O(x^2)$

$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+O(t^3)$

$$e^{\cos x}=e\cdot e^{\cos x-1}=e(\underset{1}{1}+\underset{t}{(-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{24}+O(x^6))}+\underbrace{\tfrac{1}{2}(-\tfrac{x^2}{2}+O(x^4))^2}_{t^2/2}+O(x^{3\cdot 2}))=$$

$=e\left(1-\frac{x^2}{2}+(\frac{1}{24}+\frac{1}{8})x^4+O(x^6)\right)=e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)+O(x^6)$, så $f^{(4)}(0)=4!\,\frac{e}{6}=4e$

Ex. Finn $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)-(x-\frac{x^3}{3}+O(x^5))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{x^3}}_{\frac{1}{6}+O(x^2)}=\frac{1}{6}$

Ex. Har $f(x)=x\cdot\ln(1-\arctan x)+e^{2(\cos x-1)}$ en lokal extrempunkt för $x=0$?

man får $x\cdot\ln(1+\arctan x)=\dots=x^2-\frac{1}{2}x^3+O(x^5)$ $\quad$ man finner $f'(0)=0$

$e^{2(\cos x-1)}=\dots=1-x^2+O(x^4)$

så $f(x)=1-\frac{1}{2}x^3+O(x^4)$ så $f(x)$ har ingen lokal extrempunkt för $x=0$.