Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Lars Filipsson

Uppgifter att träna på i Modul 2

REKOMMENDERADE UPPGIFTER UR KURSBOKEN CALCULUS

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 2.1: 5, 7. Kapitel 2.2: 1, 3, 11, 26, 27, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47. Kapitel 2.3: 1, 7, 11, 17, 25, 33, 35, 47. Kapitel 2.4: 3, 5, 11, 18, 23, 30, 31, 37. Kapitel 2.5: 13, 15, 23, 29, 31, 35, 45, 62. Kapitel 2.6: 3, 9. Kapitel 2.7: 1, 3, 11, 13, 23, 29. Kapitel 2.8: 5, 13, 21, 27. Kapitel 2.9: 3, 9, 13. Kapitel 2.11: 5, 7, 13, 16, 17, 18, 19.

Om uppgifterna nedan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken som listas ovan.

SKARPA ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

A. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ B. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ C. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Uppgift 2. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

A. $f(x) = x \tan x$ B. $f(x) = x^2 \sin x$ C. $f(x) = \sin^2 x$

Uppgift 3. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

A. $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$ B. $f(x) = \cos(\tan x)$ C. $f(x) = \tan x^2 - \tan^2 x$

Uppgift 4. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

A. $f(x) = \dfrac{2x+3}{1-5x}$ B. $f(x) = (2x-1)^2 \cos^2 x$ C. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

Uppgift 5. Bestäm tangenten till funktionsgrafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ om ....

A. $f(x) = x\sqrt{x}$ och $a = 4$

B. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ och $a = 2$

C. $f(x) = x \sin x$ och $a = \pi/3$

D. $f(x) = \cos 2x$ och $a = \pi/6$

E. $f(x) = \tan x$ och $a = \pi/4$

F. $f(x) = x^3 - 3x^2$ och $a = 2$

Uppgift 6. Låt $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Använd linjär approximation kring $x = 2$ för att ge ett närmevärde till $f(2.1)$.

Uppgift 7. Låt $f(x) = \sqrt{x}$. Bestäm en ekvation för tangenten till funktionskurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 100. Använd linjär approximation av f kring $x = 100$ för att ge ett närmevärde till $\sqrt{104}$.

Uppgift 8. Låt $f(x) = \tan x$. Använd linjär approximation av f kring $x = \pi/4$ för att ge ett närmevärde till $\tan \frac{\pi}{5}$.

Uppgift 9. Låt $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Använd linjär approximation av f kring $x = 2$ för att ge ett närmevärde till $f(2.5)$.

Uppgift 10. Avgör om f är (strängt) växande eller avtagande på intervallet $[0, 1]$ om ....

A. $f(t) = t^3 - 3t^2 + t$

B. $f(t) = t \sin t$

C. $f(t) = t^3 - 3t$

D. $f(t) = \sin t \cos t - t$

Uppgift 11. Visa att $2x^4 - x = 1$ har *exakt en* lösning x mellan -1 och 0.

Uppgift 12. Avgör om nedanstående funktioner har något största respektive minsta värde. Bestäm också max och min om de finns.

A. $f(x) = x^3 - 3x^2, \quad x \in [-1, 4]$

B. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, 1]$

C. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{om } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{om } x = 0 \end{cases}$

Uppgift 13. För nedanstående funktioner, svara på följande frågor. Vad är definitionsmängden? I vilka punkter är funktionen kontinuerlig? Vad är derivatan? I vilka punkter är funktionen deriverbar?

A. $f(x) = \sqrt{x}$

B. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

Uppgift 14. Bestäm med implicit derivering en ekvation för tangenten till kurvan $x^5 + y^4 + x^3 + y^2 + x + 1 = 0$ i punkten $(-1, 1)$.

Uppgift 15. Bestäm $f'''(0)$ om $f(x) = \ln(x + 1)$

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ eller om man hellre vill: $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ för $x > 0$
B. $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$ eller om man hellre vill: $-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$ för $x > 0$
C. $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ för $x \neq 0$

2A. $\tan x + x(1 + \tan^2 x)$ eller om man hellre vill: $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$ för $x \neq \pi/2 + n\pi$
B. $2x\sin x + x^2\cos x$ för alla x
C. $2\sin x\cos x$ för alla x (eller om man hellre vill $\sin 2x$)

3A. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cos\sqrt{x}$ för $x > 0$
B. $-(\sin(\tan x))(1 + \tan^2 x)$ för $x \neq \pi/2 + n\pi$
C. $(1 + \tan^2 x^2)2x - 2(\tan x)(1 + \tan^2 x)$ för $x \neq \pi/2 + n\pi$

4A. $\frac{17}{(1-5x)^2}$ för $x \neq 1/5$
B. $4(2x - 1)\cos^2 x - (2x - 1)^2 2\cos x\sin x$, för alla x
C. $\frac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4}$ för $x \neq 0$

5. A. $y = 8 + 3(x - 4)$
B. $y = x - 4$
C. $y = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}(x - \frac{\pi}{3})$
D. $y = \frac{1}{2} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6})$
E. $y = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4})$
F. $y = -4$

6. $f(2.1) \approx -1.9$
7. Tangent: $y = 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$. $\sqrt{104} \approx 10.2$
8. $\tan\frac{\pi}{5} \approx 1 - \frac{\pi}{10}$
9. $f(2.5) \approx 10$

10. A. Nej. (På intervallet $[0, 1]$ är derivatan positiv mellan 0 och $1 - \sqrt{2/3}$ och sedan negativ, vilket betyder att funktionen först är strängt växande och sedan strängt avtagande med ett lokalt max i $1 - \sqrt{2/3}$.)

B. Funktionen är strängt växande på intervallet $[0, 1]$ eftersom derivatan är positiv på det inre av intervallet och funktionen är kontinuerlig ut till ändpunkterna.

C. Funktionen är strängt avtagande på intervallet $[0, 1]$ eftersom derivatan är negativ på det inre av intervallet och funktionen är kontinuerlig ut till ändpunkterna.

D. Funktionen är strängt avtagande på intervallet $[0, 1]$ eftersom derivatan är negativ på det inre av intervallet och funktionen är kontinuerlig ut till ändpunkterna.

11. Sätt $f(x) = 2x^4 - x - 1$. Då är ekvationen ekvivalent med att $f(x) = 0$. Eftersom $f'(x) < 0$ på det aktuella intervallet är f strängt avtagande och det kan finnas högst en lösning till $f(x) = 0$. Eftersom $f(-1) = 2$ och $f(0) = -1$ och f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[-1, 0]$ och 0 är ett tal mellan -1 och 2, så följer av satsen om mellanliggande värden är det finns minst en lösning till $f(x) = 0$. Det finns alltså exakt en lösning till $f(x) = 0$, dvs till ekvationen i uppgiften.

12. A. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[-1, 3]$ så måste f anta ett största och ett minsta värde. Dessa kan antas bara i ändpunkter, kritiska punkter (där derivatan är noll) och i singulära puntker (där funktionen inte är deriverbar). Eftersom $f'(x) = 3x^2 - 6x$ vilket existerar överallt så finns inte några singulära punkter att ta hänsyn till. Kritiska punkter är 0 och 2 som båda ligger i intervallet. Största och minsta värde, som vi vet finns, måste alltså tas i någon av punkterna -1, 0, 2 och 4. Vi ser att

$$f(-1) = -4, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -4, \quad f(4) = 16$$

så största värdet är 16 och minsta värdet är -4.

B. Största värde saknas, minsta värdet är $\sin 1$

C. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0, 1]$ så finns garanterat ett största och ett minsta värde. Största värdet är 1, minsta värdet är $\sin 1$

(Uppgifterna B och C är svåra! Det går att se att derivatan är negativ i intervallet $(0, 1)$ men det är inte lätt!)

13. A. Definitionsmängden är alla $x \geq 0$. Funktionen är kontinuerlig för alla $x \geq 0$. Derivatan är $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Funktionen är deriverbar för alla $x > 0$.

B. Definitionsmängden är alla $x \neq n\pi$, n heltal. Funktionen är kontinuerlig för alla $x \neq n\pi$. Derivatan är $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Funktionen är deriverbar för alla $x \neq n\pi$.

14. $y = 1 - \frac{3}{2}(x + 1)$

15. 2