Generellt

Geometrisk serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{om } -1<r<1$$

Ex. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$= \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2013.08.22 #7 #UU

b) Beräkna $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^k}}$

Fel lösning

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{k/2}$$

geometrisk serie med kvot $r = \frac{1}{e}$

Fel för att en geometrisk serie ska ha formen $\sum_{k} r^{k}$. bara k

Rätt lösning

kvot: $r = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{1/2}}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}}$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$$

Svar

Jämförelsesatsen för positiva serier

Låt $\underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} a_k}_{S_a}$ och $\underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} b_k}_{S_b}$ vara 2

positiva serier med $0 \leq a_k \leq b_k$

för alla $k \geq N$. Då gäller

$$0 \leq S_a \leq S_b \quad \underline{\text{samt}}$$

Om S_a divergerar, divergerar S_b.

Om S_b konvergerar, konvergerar S_a.

<u>Anmärkning</u> p-testet

$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergerar om $p > 1$
divergerar om $p \leq 1$

heltal $N > 0$

2013.08.22 #7 #UU

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}}$ konv./div. ?

Anm. $\displaystyle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}}$

Lösning

$$0 < \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}} < \underbrace{\frac{2k}{\sqrt{k^5}}}_{\text{mindre nämnare ger större kvot}} \text{ för alla } k \geq 1$$

$\Downarrow$

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{k^5}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^{5/2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{3/2}} = 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}}_{p=3/2>1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$ konvergerar enligt p-testet

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$ konvergerar

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}}$$ konvergerar

enligt jämförelsesatsen. $\boxed{}$

Jämförelsesatsen på gränsvärdesform för serier

Tag 2 positiva serier

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \quad \text{och} \quad \sum_{k=N}^{\infty} b_k .$$

Om $\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = C > 0$

något tal

så är $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$

ekvikonvergenta.

Kvottestet för serier

är oftast användbart om termerna i serien innehåller $k!$, $\underbrace{a^k \text{ eller } k^k}_{k \text{ i exponenten}}$.

Sats Låt $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ vara en positiv serie. Betrakta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = R.$$

Om $0 \leq R < 1$: serien konv.

Om $R > 1$: serien div.

Om $R = 1$: ingen säker slutsats kan dras

2015.05.28#7 #UU

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ konv./div.?

Kvottestet $a_n = \frac{n^{10}}{2^n}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}$$

Betrakta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^{10}}$$ förkorta med 2^n

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}$$

Rikvottestet

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^{10}}_{\to 1} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ den givna serien konvergerar.

Cauchy:s integraltest för serier

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ konv./div. ?}$$

$$\text{Ex. } \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2+k^2}$$

Sats Låt $f(k)$ vara en

- kontinuerlig,
- positiv och
- avtagande ("KPA")

viktigaste villkoret

funktion för alla $k \geq N$.

Då är $\sum_{k=N}^{\infty} f(k)$ och $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$

ekvikonvergenta. $\boxtimes$

2011.12.15 #7 #KTH

$$S = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$

a) Visa att S konvergerar.

b) Visa att $S \leq 1$.

Lösning a) Låt $f(k) = \dfrac{\ln k}{k^2}$ och prova tillämpa Cauchy integraltest. Se att

$f(k) = \dfrac{\ln k}{k^2}$ uppenbarligen är kontinuerlig och positiv för alla $k \geq 4$.

För att visa att f är avtagande, titta på $f'(k)$:

$$f(k)=\underbrace{\frac{\ln k}{k^2}}_{\text{kvotregeln}} \Rightarrow f'(k)=\frac{\frac{1}{k}\cdot k^2-2k\cdot\ln k}{k^4}$$

$k\geq 4$

$$=\frac{k-2k\ln k}{k^4}=\frac{1-2\ln k}{k^3}$$

$e\approx 2{,}7$

$$<\frac{1-2\ln e}{k^3}=\frac{1-2\cdot 1}{k^3}=\frac{-1}{k^3}<0$$

$\Rightarrow$ $f(k)$ är avtagande.

$\Rightarrow$ Vi kan nu använda Cauchys test.

Betrakta motsvarande int.

$$\int_4^\infty f(x)\,dx = \int_4^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \int_4^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2}\cdot \ln x \, dx}_{\substack{\text{partiell integration} \\ \text{LÄXA}}} = \ldots = \frac{1+\ln 4}{4}$$

$$\Rightarrow \int_4^\infty f(x)dx \text{ konvergerar}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=4}^\infty f(k) \text{ konvergerar också.}$$

b) Visa att $S = \sum_{k=4}^\infty \frac{\ln k}{k^2} \leq 1.$

Populär metod:

Cauchys integraltest, del 2

Om $S = \sum_{k=N}^{\infty} f(k)$ konv. gäller

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

I denna uppg.

$$S = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} \leq f(4) + \int_4^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{\ln 4}{4^2} + \frac{1+\ln 4}{4}$$

2^2 $\approx 2{,}7^2$

$$= \frac{4+5\ln 4}{16} \leq \frac{4+5\ln(e^2)}{16}$$

$$= \frac{4+5\cdot 2}{16} = \frac{14}{16} < 1$$

Mål: visa att $S \leq 1$

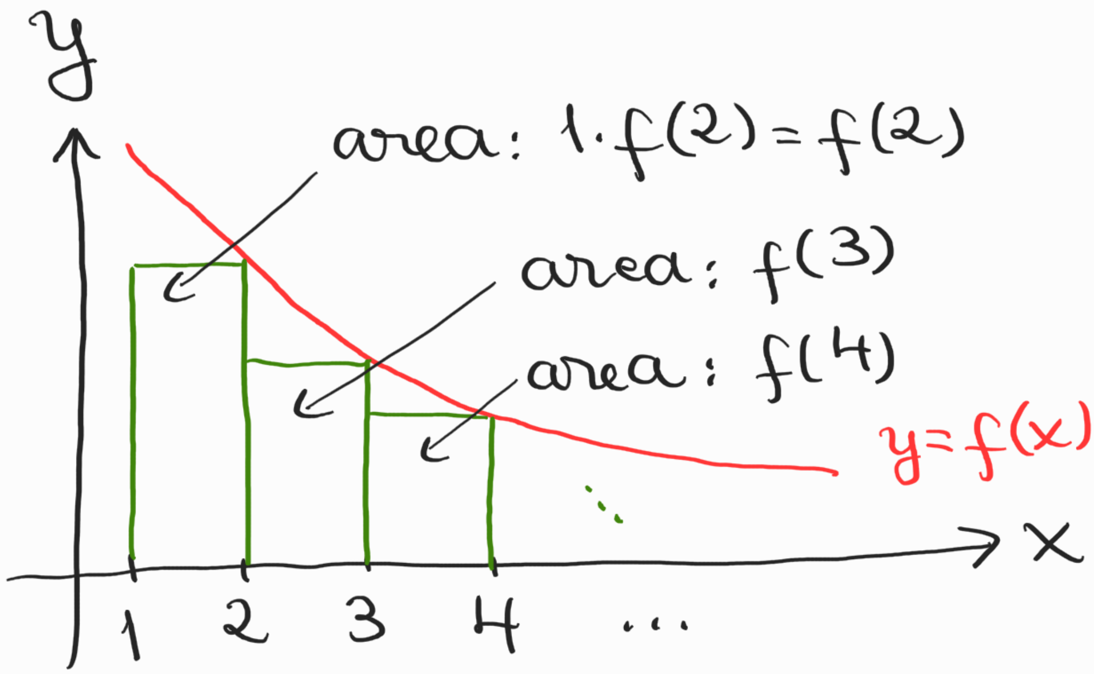
dvs. $S < 1 \Rightarrow S \leq 1$.

$\boxtimes$

Bevis för $\displaystyle\int_N^\infty f(x)\,dx \le S \le f(N) + \int_N^\infty f(x)\,dx$

$$S = \sum_N^\infty f(k) = f(N) + f(N+1) + \dots$$

För enkelhetens skull visar jag beviset för fallet där $N = 1$:

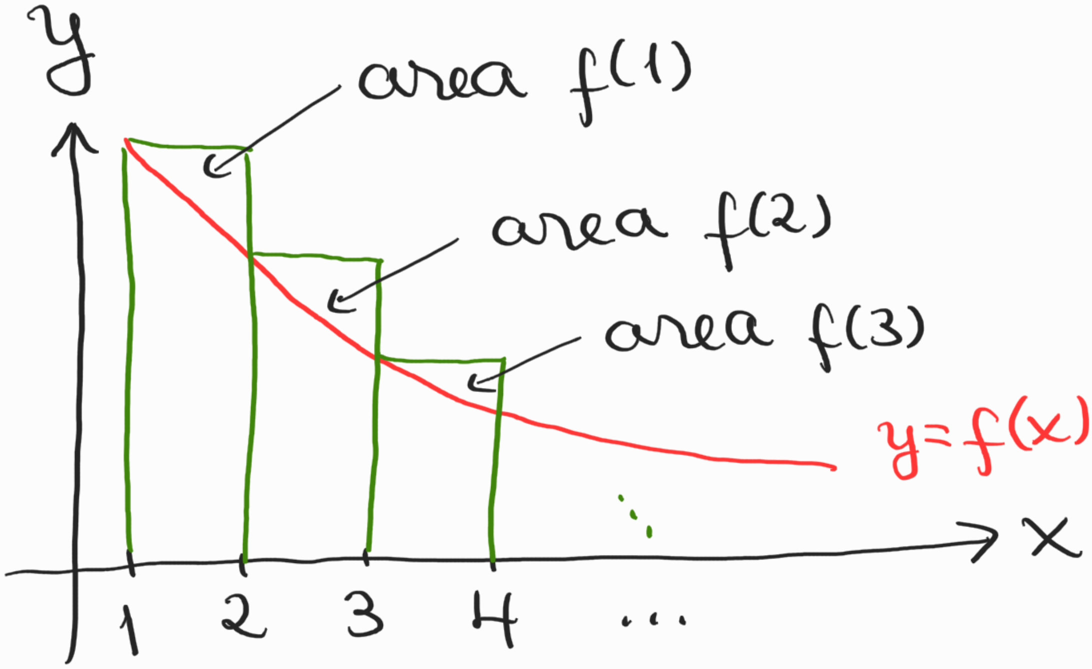


areasumman

$$= f(2) + f(3) + f(4) + \dots \le \int_1^\infty f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \overbrace{f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots}^{S}$$

$$\le f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx \Rightarrow S \le f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$$



areasumman

$$= \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)+\dots}_{S} \geqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \leqslant S$$

Nu är det bevisat att

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^\infty f(k) \leqslant f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$$

Saken är biff. Jag vilar min väska.