Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 14: Integrationstekniker

Innehåll. Variabelsubstitution och partiell integration

Introduktion. Eftersom derivering och integration är inversa operationer så är det kanske inte så konstigt att deriveringsregler ger upphov till integrationstekniker: kedjeregeln för derivator blir då variabelsubstitution i integraler och om man spelar produktregeln för derivator baklänges så hör man partiell integration.

Variabelsubstitution i integraler. Låt g vara deriverbar på $[a, b]$ och f kontinuerlig på g:s värdemängd. Om F är någon primitiv funktion till f så gäller att $F(g(x))$ är primitiv till $f(g(x))g'(x)$ och

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Bevis. Kedjeregeln för derivator ger att $\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. Använder vi detta får vi att

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Exempel. Med variabelsubstitutionen $\sqrt{x} = u$, vilket betyder att $dx/2\sqrt{x} = du$, får vi

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^2 e^u\,du = 2\left[e^u\right]_1^2 = 2(e^2 - e).$$

Partiell integration. Låt f vara kontinuerlig och g deriverbar på $[a, b]$. Då gäller att

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

om F är någon primitiv funktion till f.

Bevis. Om $F' = f$ så får vi med produktregeln att

$$\frac{d}{dx}F(x)g(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x).$$

Om vi integrerar båda sidor från a till b och flyttar om termerna får vi det vi ska bevisa.

Exempel. Med partiell integration får vi

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_0^1 \frac{x}{2} \, dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Obestämda versioner. Såväl variabelsubstitution som partiell integration kan användas utan integrationsgränser som metoder att hitta primitiva funktioner. Här följer några exempel som illustrerar detta.

Primitiv till $\tan x$**.** Med substitutionen $\cos x = u$, med $-\sin x \, dx = du$, får vi

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int -\frac{1}{u} \, du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

Primitiv till $\ln x$**.** Med partiell integration utförd på $\ln x = 1 \cdot \ln x$ får vi

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

Ibland kan man behöva använda flera metoder efter varandra för att få ut en integral. Här är ett exempel där vi först använder partiell integration och sedan variabelsubstitutionen $1 - x^2 = u$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \arcsin x \, dx &= [x \arcsin x]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{\pi}{12} - \int_1^{3/4} \frac{-du}{2\sqrt{u}} \\
&= \frac{\pi}{12} - \int_{3/4}^1 \frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= \frac{\pi}{12} - [\sqrt{u}]_{3/4}^1 \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.
\end{aligned}$$