Jämförelsesatsen för generaliserade integraler

<u>Mål</u> Kolla om den generaliserade integralen $\int_I f(x)\,dx$ konv./div.

I ← något intervall

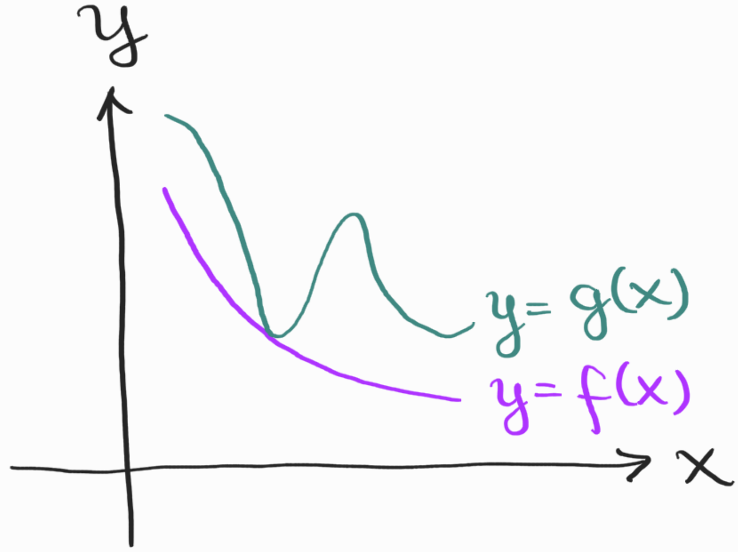
(Antag att det är praktiskt omöjligt eller svårt att primitivisera f.)

<u>Sats</u> Låt f, g vara kontinuerliga funktioner på I sådana att

$0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Då gäller att

$$0 \leq \int_I f(x)\,dx \leq \int_I g(x)\,dx$$



Om $\int_I f(x)\,dx$ divergerar,

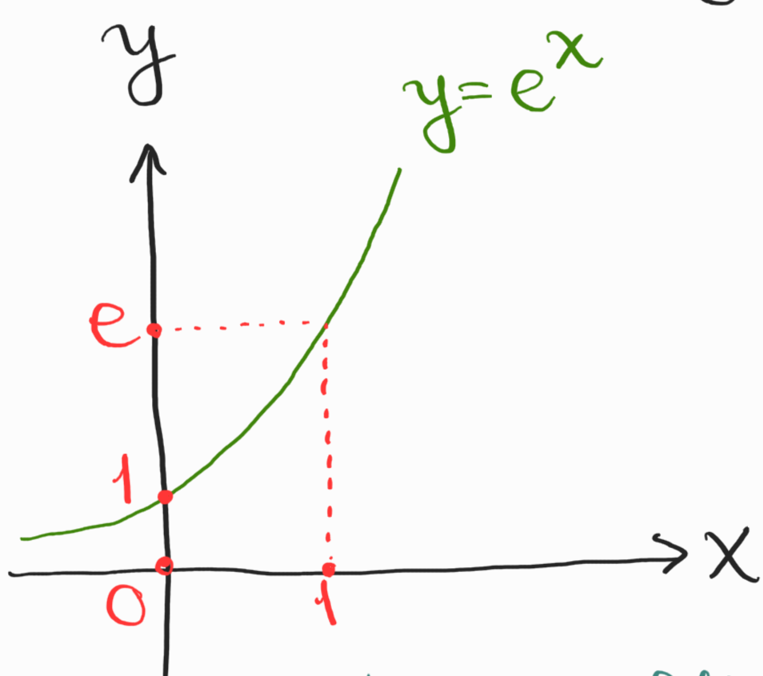
divergerar även $\int_I g(x)\,dx$.

Om $\int_I g(x)\,dx$ konvergerar,

konvergerar även $\int_I f(x)\,dx$.

2020.06.03 #4 #KTH

a) Avgör om $\int_0^1 \overbrace{\frac{e^{-x}}{x}}^{=\frac{1}{x\cdot e^{x}}} dx$ konvergerar.



just den funktion som integreras här

Idé För alla $0 \leqslant x \leqslant 1$ gäller

$$e \geqslant e^{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{e^{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e} \leqslant \underbrace{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{x}}}$$

Alltså

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\frac{1}{e^x}\,dx$$

$$\geqslant \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e}\,dx$$

$$= \frac{1}{e}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx}_{\text{divergerar}}$$

divergerar enligt p-testet

$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx$ — a: tal $a>0$; 0: t

konvergerar om $p<1$

divergerar (mot ∞) om $p \geqslant 1$

om t.ex. $p=2$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$

Slutsats $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ divergerar enligt jämförelsesatsen. $\boxtimes$

Tips 2018.01.02 #5(6) #4u

Liknande uppgift

Anmärkning

Icke-elementära integraler ("omöjliga" integraler)

Några exempel:

$\int e^{-x^2}\,dx$ Gaussisk integral

$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ exponentialintegral

$\int \sin(x^2)\,dx$ men $\int (\sin x)^2\,dx$ är enklare!

$\int \frac{1}{\ln x}\,dx$