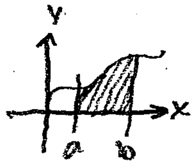
Envariabelanalys 2018-01-16 #1

Bengt Ek bek@math.kth.se Se Canvas

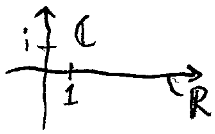
Innehåll:
- Reella tal →
- Funktioner $f(x)$
- Gränsvärden och kontinuitet
- Derivator $f'(x)$
- Taylors formel: approximera funktioner med polynom $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \underset{\uparrow \text{begr.}}{B(x)}$
- Differentialekvationer $y'' - 2y' - 3y = 9x$
  $y(x) = Ae^{3x} + Be^{-x} - 3x + 2$
- Integraler



$\int_a^b f(x)dx$

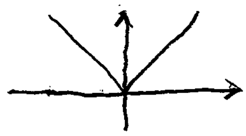
- Oändliga serier $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$

Idag: olika talmängder: $\underset{\{0,1,2,\ldots\}}{\mathbb{N}} \subset \overset{\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}}{\mathbb{Z}} \subset \underset{\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}}{\mathbb{Q}} \subset \overset{\text{reella}}{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$ - komplexa



Absolutbelopp $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ ≥ 0 för alla x

reellt tal



$|a-b|$ avståndet mellan a och b på tallinjen

Ex. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är $|x-5| < 1$? Jo alla på avstånd < 5, dvs
alla x med $4 < x < 6$
ett intervall $(4,6)$
$]4,6[$

Beteckningar $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ öppet intervall

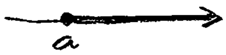
$]a,b[$

$[a,b]$ $\leq$ $\leq$ slutet intervall

$[a,b)$ $\leq$ $<$ halvslutna intervall

$(a,b]$ $<$ $\leq$

$[a,\infty) = \{x \mid a \leq x\}$



$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Ex. Finn alla x sådana att $\left|\frac{2}{x} - 1\right| \leq 3$

$\Updownarrow$

$-3 \leq \frac{2}{x} - 1 \leq 3$

$\Updownarrow (+1)$

$-2 \leq \frac{2}{x} \leq 4$

$-2 \leq \frac{2}{x} < 0$ eller $0 < \frac{2}{x} = 4$

$\Updownarrow (-1) \cdot_{<0}$

$2 \geq -\frac{2}{x} > 0$

$\Updownarrow *$

$0 < \frac{1}{2} \leq -\frac{x}{2}$

$\Updownarrow 2\cdot$

$1 \leq -1$

$\Updownarrow$

$-1 \geq x$

$\Updownarrow *$

$(0<)\frac{1}{4} \leq \frac{x}{2}$

$\Updownarrow 2\cdot$

$\frac{1}{2} = x$

lösning: alla x s.a. $x \leq -1$ eller $x \geq \frac{1}{2}$

$a < b$

$\Updownarrow$

$a + c < b + c$

$a > b > 0$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$ *

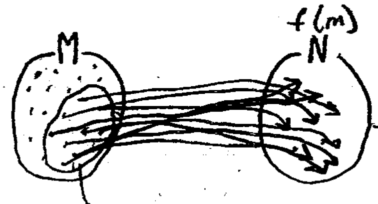
$a < b$

$\Updownarrow$

$ac < bc$ då $c > 0$

$ac > bc$ då $c < 0$

Om funktioner $f: M \to N$

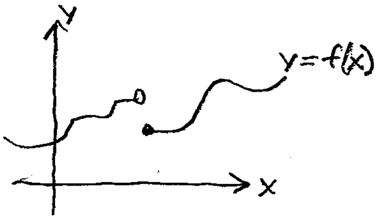


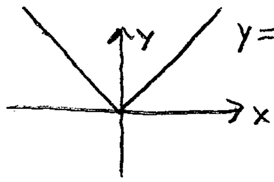
f:s definitionsmängd D_f $D(f)$

f:s värdemängd V_f $R(f)$

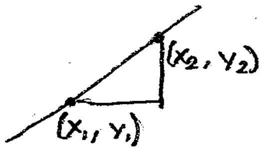
Vi sysslar med $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ex. $f(x) = |x|$, $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

f:s graf





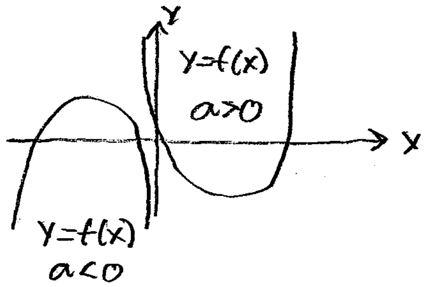
Räta linjer $f(x) = mx + b$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Andragradsfunktioner $f(x) = ax^2 + bx + c$

om $a \neq 0$ parabler



Andragradskurvor

ex. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ Vilken kurva?

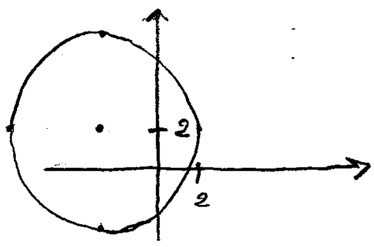
Kvadratkomplettera!

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 6x + 9} + \underbrace{y^2 - 4y + 4} - 9 - 4 - 12 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25 = 5^2$$

Enligt Pythagoras:
alla (x,y) m. avstånd 5
till $(-3, 2)$ = En cirkel
m. radie 5.

medelpunkt



Inte en funktionsgraf,
ty linjen $x = -3$ skär den
i två olika punkter.

$$y = 2 \pm \sqrt{25 - (x+3)^2}$$

Symmetri för funktioner:

$f(x)$ kallas jämn omm $f(-x) = f(x)$, alla $x \in D(f)$
udda $f(-x) = -f(x)$

ex. $f(x) = x^n$ är jämn omm n är jämnt
udda udda

$\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \text{ om } f(x) \text{ är udda}\right)$

Om vi vet hur grafen för $f(x)$ ser ut, hur ser grafen för

$f(ax)$ $a<0$ "vänd"; $|a| \neq 1$: hoptryckt med faktorn $|a|$
$af(x)$ utdragen faktor $|a|$ i y-led; $a<0$: vänd i y-led
$f(x-b)$ $b>0$: grafen förskjuts b steg åt höger
$f(x)-b$ $b>0$: grafen förskjuts b steg nedåt.
ut?

Med funktioner $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan man skapa nya funktioner

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \cap \{x \in D(g) | g(x) \neq 0\}$

Om vi börjar med $f(x) = c$ och $f(x) = x$ får vi med
$+, -, \cdot$ alla polynom

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}$

polynomets grad
det största
m med $a_m \neq 0$

med division också alla rationella funktioner
(kvoter av polynom)

Sammansatta funktioner

$f(g(x)) = f \circ g(x)$ (ofta $fg(x)$)

$D(f \circ g) = \{x \in D(g) | g(x) \in D(f)\}$

· Man kan alltid dividera polynom med rest av lägre grad än det man delar med.

ex. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 4$ delas med $g(x) = x^2 + 2x - 4$

$$
\begin{array}{rl}
x^2 + x - 5 & \text{- kvot} \\
\hline
x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 4 & \big| \; x^2 + 2x - 4 \\
-(x^4 + 2x^3 - 4x^2) & \\
\hline
x^3 - 3x^2 + 4 & \\
-(x^3 + 2x^2 - 4x) & \\
\hline
-5x^2 + 4x + 4 & \\
-(-5x^2 - 10x + 20) & \\
\hline
14x - 16 & \text{- rest}
\end{array}
$$

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

där $q(x) = x^2 + x - 5$

$r(x) = 14x - 16$

Faktorsatsen: Om polynomet $p(x)$ har ett nollställe α (dvs $p(\alpha) = 0$) så är $p(x) = (x - \alpha)\underbrace{q(x)}_{\text{något polynom}}$

ty: division ger $p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$ — lägre grad än $(x - \alpha)$, dvs $r(x) = c$ en konstant

ger $\underbrace{p(\alpha)}_{=0} = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + c$, så $c = 0$

Ex Finn alla lösningar till ekv. $p(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12 = 0$

Prövning ger att $x = 2$ är en lösning

division ger $p(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 6)$

så alla lösningar: $x = 2$

$x = -2 \pm \sqrt{2}\, i$

Om $p(x)$ har reella koefficienter är alla nollställen reella eller parvis konjugerade