Serier

Def 1 En serie är en summa

$$\boxed{\sum_{k=p}^{\infty} a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} \ldots\ldots}$$

k = Där du startar ifrån, en indexering

av oändligt många termer.

(p, godtyckligt heltal oftast 1 eller 0)

I serier ökar det alltid med 1.

Def 2 En ändlig summa $S_n = \sum_{k=p}^{n} a_k$ kallas för delsumma / partialsumma.

$(n \in \mathbb{Z})$

Def 3 Om följande gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{n} a_k$ existeras säger vi att serien konvergerar, annars divergerar den.

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$, $\cancel{\Longleftarrow}$

eller

$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar. ($\cancel{\Longleftarrow}$)

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerar trots att $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Ex. 1

Konvergerar eller divergerar följande serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+2} \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$$

Vi undersöker $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+2}$!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+1}{n^2}}{\frac{4n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4} \neq 0$$

Eftersom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+2}$ divergerar.

Vad kan vi drar för slutsats ifall $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

Speciella serier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a x^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{om } |x|<1 \\ \text{divergent} & \text{om } |x|\geq 1 \end{cases}$$ (geometriska serien)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om } p>1 \\ \text{divergent} & \text{om } p\leq 1 \end{cases}$$ (p-serier, spec. fall då $p=1$ kallas för harmon serien)

Geometriska serien kan även skrivas som,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot x^n = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{om } |x|<1 \\ \text{divergent} & \text{om } |x| \geq 1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

konstant i serie kan dras utanför

170109

(2)

b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{n \to \infty} \{a_n\}$, $a_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i}$. (1)

Detta kan ni se som "vad går serien, $a_n = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i}$ mot"?

Vi observerar att följande serie $\sum_{i=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i = \begin{cases} a=2 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$

$= \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$ (2)

Skillnaden (1) o (2) är att vi startar från $i=0$ i (2) o $i=2$ i (1).

Dvs $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^i}}_{=3} - \underbrace{\frac{2}{3^0}}_{=a_0} - \underbrace{\frac{2}{3^1}}_{=a_1} = 3 - 2 - \frac{2}{3} = 1$

Majorantprincipen / Jämförelse kriterium

Om $0 \le a_n \le b_n$ så gäller följande:

$$\sum_{k=N}^{\infty} b_k \text{ konvergerar } \Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} a_k \text{ konvergerar}$$

"större serien" $\not\Leftarrow$

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \text{ divergerar } \Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} b_k \text{ divergerar}$$

"mindre serien" $\not\Leftarrow$

Cauchys integralkriterium

Antag att $f(x)$ är en positiv, kontinuerlig, avtagande (PKA) på ett intervall $[p, \infty)$, $p \in \mathbb{Z}$. Då är $\sum_{k=N}^{\infty} f(k)$ e dess integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ antingen både konvergenta eller divergenta.

$$\boxed{\int_N^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=N}^{\infty} f(k) \le \int_{N-1}^{\infty} f(x)\,dx}$$

alt.

$$\boxed{\int_N^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=N}^{\infty} f(k) \le \int_N^\infty f(x)\,dx + f(N)}$$

120317 7

(a) Avgör om serien konvergerar/divergerar.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7+1}.$$

$\lim_{k\to\infty} \frac{k^5}{k^7+1} = 0$, ingen slutsats

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7+1} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

Vi vet att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergerar för alla $p > 1$, därmed konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Enligt jämförelsekriterium kommer även $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7+1}$ att konvergera.

Alt. undersök om $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergerar
notera att $f(x) = \frac{1}{x^2}$ är PKA

120607

1) Visa att

$$\frac{\pi}{20} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+100} \leq \frac{\pi}{20} + \frac{1}{100} \quad *$$

Vi använder oss av Cauchys I.K.

$f(x) = \frac{1}{x^2+100}$ är PKA i $[0, \infty)$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+100)} < 0$, $f(x) \geq 0$

Därmed gäller följande:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+100}\,dx}_{1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+100} \leq \underbrace{f(0)}_{2} + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+100}\,dx$$

2: $f(0) = \frac{1}{0^2+100} = \frac{1}{100}$ (verkar stämma!, se $*$)

1 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+100}\,dx = \frac{1}{100}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{10}\right)^2+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l|l} t = \frac{x}{10} & t_n = 0 \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow dx = 10\,dt & \text{"}t_\theta = \infty\text{"} \end{array} \right\} =$

$$= \frac{1}{100} \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R \frac{1}{t^2+1} \cdot 10\,dt \right) = \frac{1}{10} \cdot \lim_{R\to\infty} \left(\Big[\arctan(t) \Big]_0^R \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \lim_{R\to\infty} \Big(\underbrace{\arctan(R)}_{\text{"}\to \frac{\pi}{2}\text{"}} - \underbrace{\arctan(0)}_{\text{"}\to 0\text{"}} \Big) = \frac{\pi}{20}$$

V.S.B.

⑦ Låt $$S = \sum_{x=4}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$

(a) Visa att S är Konvergent. $\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k^2} = 0}$

(b) Visa att $S \leq 1$.

(a) Vi hoppar direkt till (b), för lyckas vi visa det följer det att S är Konvergent.

(b) Vi använder oss av cauchys Kriterium.

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} > 0$ i $[4, \infty)$ & Kontinuerlig.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3}$$

Scanned by CamScanner

$f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3} < 0$ i $[4,\infty)$,

ty $1-2\ln x < 0$ i $[4,\infty)$

eftersom $\ln x > \frac{1}{2}$ -11-

$\ln(e)=1$

$\ln x > \ln(e) = 1$ i $[4,\infty)$

Därmed är den PXA i $[4,\infty)$ o då gäller att

$$\left(\int_N^\infty f(x) \leq\right) \sum_{x=N}^{\infty} f(x) \leq \int_{N-1}^{\infty} f(x)\,dx$$ dvs.

$$\sum_{x=4}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} \leq \int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} \text{partiell int.} & \\ u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=\frac{1}{x^2} & v=-\frac{1}{x} \end{array}\right\} =$$

$$= \left[\ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_3^\infty - \int_3^\infty -\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{R\to\infty}\left(\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_3^R + \int_3^R \frac{1}{x^2}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_3^R + \left[-\frac{1}{x}\right]_3^R\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\left(\underbrace{\left(-\frac{\ln R}{R}\right)}_{\text{"}\to 0\text{"}} - \left(-\frac{\ln 3}{3}\right)\right) + \left(\underbrace{-\frac{1}{R}}_{\text{"}\to 0\text{"}} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\ln 3 + 1}{3} < 1, \text{ ty } \ln(3) < 2$$

$\ln(e^2) = 2\ln e = 2$

130109

9 (a)

Avgör $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n^2}}$ är konv/div.

$-\frac{1}{n^2} \geq -1$, $n \geq 1$

$\Updownarrow$

$e^{-\frac{1}{n^2}} \geq e^{-1} = \frac{1}{e} > 0.$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n^2}} = 0$, dvs ingen slutsats.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n^2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar,

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergerar $p \geq 1$) så kommer även $\frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ också att divergera. Enligt jämförelsekriterium så kommer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n^2}}$ divergera.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ har samma konvergensegenskap som $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

11-10-18

(7) (a) $\int_0^1 e^{x^2} \cdot \sin(5x)\, dx \leq 10,$

$$0 \leq e^{x^2} \cdot \sin(5x) \leq e^{x^2} \cdot 1 \leq e \quad , \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\int_0^1 e^{x^2} \cdot \sin(5x) dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e\, dx = \left[ex\right]_0^1 = e < 10$$

V.S.V.

(b) Visa att det finns ett tal N s.a.

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log(n)} \geq 100 \quad *$$

$$\lim_{K \to \infty} \sum_{n=2}^{K} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log(n)} , \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log(n)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} + \frac{n^2}{n^2} + \underbrace{\frac{\log(n)}{n^2}}_{\to 0}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \text{ divergerar}$$

Eftersom a_n är positiv så innebär det att

$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=2}^{N} a_n = \infty$. Därmed finns det ett tal N s.a. $*$ uppfylls.