SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 11

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Minitenta på kursen hittills

1. Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\tan^2 x}$ och $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x + e^{2x}}{x^{100} + e^x}$

2. Skissa kurvan $y = xe^{1/x}$ (väx/avt, extr p, gr v, asymptoter...)

3. Lös diffekvationen $y''(t) + y'(t) = 1 + e^{-t}$.

4. Går det att bestämma konstanten k så att funktionen nedan blir kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$? Deriverbar på hela $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(1/x) & \text{om } x \neq 0 \\ k & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

Minitenta

1. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\tan^2 x}$ och $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln x + e^{2x}}{x^{100} + e^x}$

$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2\tan x(1+\tan^2 x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x) + 2\tan x \, 2\tan x(1+\tan^2 x)}$

$= \frac{0}{2} = 0$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}(\quad)}{e^x(\quad)}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}\left(\frac{x}{e^{2x}} + \frac{\ln x}{e^{2x}} + 1\right)}{e^x\left(\frac{x^{100}}{e^x} + 1\right)}$

$= \lim_{x\to\infty} e^x \frac{\frac{x}{e^{2x}} + \frac{\ln x}{e^{2x}} + 1}{\frac{x^{100}}{e^x} + 1}$

$= \infty$

2. Skissa kurvan $y = xe^{1/x}$ (väx/avt, extr p, gr v, asymptoter...)

Låt $f(x) = xe^{1/x}$, D_f : alla $x \neq 0$, f kont. för $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1/x} + x e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right),$$ alla $x \neq 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

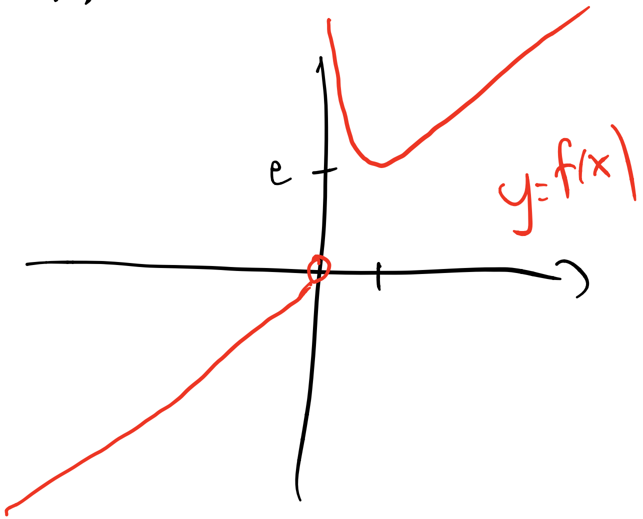
x		0		1	
$f'(x)$	+		−	0	+
$f(x)$	↗		↘	lok min	↗

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$



3. Lös diffekvationen $y''(t) + y'(t) = 1 + e^{-t}$.

$y = y_h + y_p$

y_h: $y'' + y' = 0$, k.e. $r^2 + r = 0 \iff r = 0, -1$

$y_h = Ae^{0t} + Be^{-t} = A + Be^{-t}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

$y_p = at + bte^{-t}$ ansatt. $y_p' = \underline{a + be^{-t} - bte^{-t}}$

$y_p'' = -be^{-t} - be^{-t} + bte^{-t} = \underline{-2be^{-t} + bte^{-t}}$ (resonans)

Insätt i DE: $-2be^{-t} + bte^{-t} + a + be^{-t} - bte^{-t} = 1 + e^{-t}$

$\Rightarrow a = 1$, $b = -1$ så $y_p = t - te^{-t}$

Lösn. till DE: $y(t) = A + Be^{-t} + t - te^{-t}$, $A, B \in \mathbb{R}$

Minitenta

4.
$$f(x) = \begin{cases} \arctan(1/x) & \text{om } x \neq 0 \\ k & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

f kont i 0 om $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) \text{ saknas}$$

f kan inte vara kont. i 0, oavsett k.
$\Rightarrow$ f inte vara deriverbar i 0.

Några tillämpade uppgifter

1. Hur lång tid tar det att hoppa från 10 meter på Eriksdalsbadet (om man bortser från luftmotståndet)?

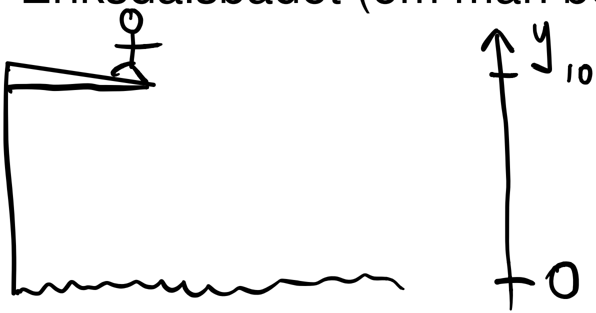
2. En benbit innehåller 80% av ursprungsmängden kol 14. Hur gammal är den? Halveringstiden är 5700 år.

3. En öppen fyrkantig låda med kvadratisk botten och raka lodräta väggar ska tillverkas. Den ska rymma 10 liter. Vad blir måtten på lådan om man vill minimera begränsningsytan?

4. Sambandet mellan tryck p och volym v när luft expanderar i en viss process ges av $p \cdot V^{1.4} = C$ för någon konstant C. Hur snabbt ändras trycket i den tidpunkt då $p = 5$ atm, $V = 56$ liter och volymen ökar med takten 4 liter per sekund.

Några tillämpade uppgifter

1. Hur lång tid tar det att hoppa från 10 meter på Eriksdalsbadet (om man bortser från luftmotståndet)?



$$g = -10 = y''(t)$$

$$\Rightarrow \quad y'(t) = -10t + \underbrace{c}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = -5t^2 + \underbrace{d}_{=10}$$

Mitt läge vid tid t är $y(t) = 10 - 5t^2$, $y(0) = 10$.

Träffar vattnet då $y(t) = 0$ dvs $10 - 5t^2 = 0$ dvs $\underline{\underline{t = \sqrt{2}}}$

Några tillämpade uppgifter

2. En benbit innehåller 80% av ursprungsmängden kol 14. Hur gammal är den? Halveringstiden är 5700 år.

$M(t)$ = mängd kol 14 vid tid t. Sönderfall

$$\frac{dM}{dt} = kM \Rightarrow M(t) = Ce^{kt}.$$ Halv. tid:

$$Ce^{k5700} = \frac{1}{2}C \Rightarrow k \cdot 5700 = -\ln 2 \Rightarrow k = \frac{-\ln 2}{5700}$$

Så $M(t) = C e^{\frac{-\ln 2}{5700}t}$. Vet $M(t_0) = 0.8C$ dvs

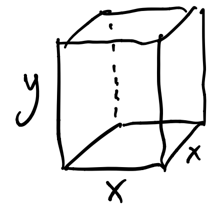
$$\cancel{C} e^{\frac{-\ln 2}{5700}t_0} = 0{,}8\cancel{C}$$ så $\frac{-\ln 2}{5700}t_0 = \ln 0{,}8$ dvs

$$t_0 = \frac{\ln 0.8}{-\ln 2} \cdot 5700 \approx 1800$$

Några tillämpade uppgifter

3. En öppen fyrkantig låda med kvadratisk botten och raka lodräta väggar ska tillverkas. Den ska rymma 10 liter. Vad blir måtten på lådan om man vill minimera begränsningsytan?

Ved: $x^2 y = 10 \Rightarrow y = 10/x^2$



Begränsningsarean: $x^2 + 4xy = x^2 + \frac{40}{x} = f(x)$

$x \in (0, \infty)$ Ser $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$f'(x) = 2x - \frac{40}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$ Enda chansen att få min är i en krit. p. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{40}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{20} \approx 2{,}7$ dm

$y = \frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2} \approx 1{,}4$ dm

Några tillämpade uppgifter

4. Sambandet mellan tryck p och volym v när luft expanderar i en viss process ges av $p \cdot V^{1.4} = C$ för någon konstant C. Hur snabbt ändras trycket i den tidpunkt då $p = 5$ atm, $V = 56$ liter och volymen ökar med takten 4 liter per sekund.

$p \cdot V^{1,4} = C$ dvs $p(t) \cdot V(t)^{1,4} = C$

Deriv: $p'(t) \cdot V(t)^{1,4} + p(t) \cdot 1,4\, (V(t))^{0,4} \cdot V'(t) = 0$

I aktuell tidpunkt t_0:

$$p'(t_0) = -\frac{5 \cdot 1,4 \cdot 56^{0,4} \cdot 4}{56^{1,4}} = -\frac{1}{2}$$

$$56^{0,4} / 56^{1,4} = 56^{-1} = \frac{1}{56}$$

Teori om max och min

Definition. Om $f(a) \geq f(x)$ för alla x i definitionsmängden så sägs $f(a)$ vara f:s **största värde**, eller f:s **globala maximum**.

Definition. Om det finns en omgivning I till a sådan att $f(a) \geq f(x)$ för alla $x \in I$ som tillhör definitionsmängden till f, så sägs $f(a)$ vara ett **lokalt maximum** till f. Och a sägs då vara en **lokal maxpunkt.**

Motsvarande definitioner med $\leq$ ger betydelserna av globalt och lokalt **minimum.**

Globala och Lokala extrempunkter

Definition. En **global extrempunkt** är en punkt som antingen är en global maxpunkt eller en global minpunkt.

Definition. En **lokal extrempunkt** är en punkt som antingen är en lokal maxpunkt eller en lokal minpunkt.

Motsvarande definitioner görs för extrem**värden**.

(Obs: terasspunkter är inte extrempunkter.)

Definition. Om $f'(a) = 0$ så sägs a vara en **kritisk** eller **stationär** punkt till f.

Var kan max och min antas?

Hitta max och min: De enda punkter där f kan anta lokala/globala max/min är **kritiska** punkter, **änd**punkter och punkter där **derivata saknas**.

Obs. Det finns ingen garanti för att f har max/min! Det krävs alltid ett argument för detta!

Exempel

Finn alla lokala extrempunkter till $f(x) = x - \dfrac{1}{1-x}$.

Andraderivatans betydelse

Konvexitet. Om man tar två punkter på funktionsgrafen och drar en linje genom dem – ligger då linjestycket mellan punkterna alltid över eller under grafen, oavsett vilka punkter man väljer? Över: konvex. Under: konkav.

Sats.

Om $f''(x) > 0$ för alla x i ett intervall I så är f konvex i I.

Om $f''(x) < 0$ för alla x i ett intervall I så är f konkav i I.

Andraderivatans betydelse

På vilka intervall är $f(x) = x - \dfrac{1}{1-x}$ konvex respektive konkav?

Asymptoter

En **asymptot** är en linje som funktionsgrafen kommer hur nära som helst. Det finns tre fall:

1. Lodrät. Om $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ så är linjen $x = a$ en lodrät asymptot.

2. Vågrät. Om $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ så är linjen $y = L$ en vågrät asymptot.

3. Sned. Om $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ så är linjen $y = ax + b$ en sned asymptot.

Asymptoter

Finn alla asymptoter till $y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Feltermen i linjär approximation

Linjär approximation. Om f är deriverbar i a så gäller att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{för } x \text{ nära } a.$$

Nu ska vi undersöka vad ”nära” egentligen betyder!

Feltermen i linjär approximation

Sats. Om f är 2 gånger deriverbar i ett intervall som innehåller både a och x så gäller att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

med ett fel som ges av $\dfrac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$ för något c mellan a och x.

Taylorpolynom

Givet en (tillräckligt deriverbar) f och en punkt a kan vi bilda:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= f(a) \\
p_1(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) \\
p_2(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
p_3(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3
\end{aligned}
$$

och så vidare

Observera att $1! = 1$ så $p_1(x)$ är precis den linjära approximationen av f kring a som vi har studerat tidigare. Användningen av Taylorpolynom är approximation, dvs

$$f(x) \approx p_n(x) \qquad \text{för } x \text{ nära } a$$

Taylorpolynom

Vi observerar att Taylorpolynomen är konstruerade med data från funktionen f i punkten a, närmare bestämt funktionens värde och funktionens derivators värden i punkten a.

Och konstruktionen är sådan att Taylorpolynomen härmar funktionen, så att

p_1 har samma värde och samma derivata i punkten a som f,

p_2 har samma värde, samma derivata och samma andraderivata i punkten a som f,

och så vidare.

Taylorpolynom

Felet i approximationen ges av ungefär hur nästa term i utvecklingen skulle se ut:

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för någon punkt c mellan x och a. Förutsättningen för att detta ska gälla är att f är $n+1$ gånger deriverbar på något intervall som innehåller x och a.

Taylorpolynom kring origo, dvs då punkten a är 0, brukar ofta kallas Maclaurinpolynom.

Taylors formel (sammanfattning). Om f är $n+1$ gånger deriverbar i ett intervall som innehåller a och x så gäller att

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

där höger led kallas Taylorpolynomet av grad n till f kring $x = a$. Felet i approximationen ges av

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{för något } c \text{ mellan } x \text{ och } a$$

Uppgift: Bestäm TP av grad 2 till $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 100$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\sqrt{104}$. Analysera felet!

Exempel på Taylors formel

Några standardutvecklingar. För x nära 0 gäller att

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Läxa till nästa gång

Att göra: Se Film12 om Taylors formel.