SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 7

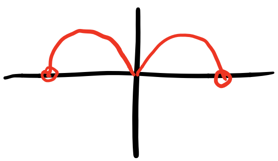
Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Från förra veckan...

Derivera $f(x) = |\sin x|$, $-\pi < x < \pi$, ange var f är deriverbar.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{om } \sin x \geq 0 \text{ dvs } 0 \leq x < \pi \\ -\sin x & \text{om } \sin x < 0 \text{ dvs } -\pi < x < 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{om } 0 < x < \pi \\ \text{saknas} & x = 0 \\ -\cos x & \text{om } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|\sin(0+h)| - |\sin 0|}{h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{|\sin h|}{h}}_{\text{saknas}} = \begin{cases} 1 & \text{om } h \to 0^+ \\ -1 & h \to 0^- \end{cases}$$

Att göra denna vecka

Översikt över modul 3

- Exp Log Arc (3.1-3.5)
  - Invers
  - Exponentialfunktioner
  - Logaritmer
  - Arcusfunktioner (inversa trigonometriska)
- Derivataundersökningar (linjarisering, max/min, växande/avtagande, inverterbarhet, etc)
- Ordinära linjära differentialekvationer (3.7 och 18.6)
  - Homogena
  - Inhomogena (även med resonans)

Att göra denna vecka

Missa inte: Man måste bli bra på potenslagar, log-lagar och på att hantera arcusfunktioner! Kunna egenskaperna hos exp, log, arc, kunna derivera dem och dra slutsatser av derivatan! Grejen denna vecka är att vi lägger till exp-, log- och arc-funktioner till vårt bibliotek av elementära funktioner som vi KAN.

Injektiva funktioner

Funktioner kan ibland upprepa sig och ha samma funktionsvärde i flera olika punkter. Vissa funktioner upprepar sig dock aldrig och de har ett särskilt namn:

Injektiva funktioner avbildar alltid olika x på olika y, dvs:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ett annat sätt att säga exakt samma sak är:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Invers

För injektiva funktioner går det (i princip) att för alla funktionsvärden y tala om precis vilket x de kom ifrån.

Exempel. Om $y = f(x) = 2x + 1$, så måste $x = \dfrac{y-1}{2}$. Detta ger oss en ny funktion som kallas **inversen** till f och skrivs f^{-1}.

I vårt exempel är $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$.

Invers

I allmänhet kan man för injektiva $f : D_f \to V_f$ definiera inversen $f^{-1} : V_f \to D_f$ genom

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Obs att definitionsmängden för f^{-1} är värdemängden för f och värdemängden för f^{-1} är definitionsmängden för f

Invers forts.

En inverterbar funktion och dess invers uppfyller alltid:

$f^{-1}(f(x)) = x$, för alla x i definitionsmängden för f

$f(f^{-1}(y)) = y$, för alla y i definitionsmängden för f^{-1}

Obs att strängt växande och strängt avtagande funktioner alltid är injektiva och alltså inverterbara.

Invers forts.

Ofta vill man ha x som variabel i funktionen, även för inversen. Det är smidigt när man ritar grafer i xy-planet t ex att man får det som man är van vid.

Om man byter y mot x så motsvarar det geometriskt en spegling i linjen $y = x$. Alltså gäller:

Funktionsgraferna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ är varandras **spegelbilder** i linjen $y = x$

Exempel

Exempel. Bestäm inversen till funktionen f som ges av

$$f(x) = 2 + 3x^2, \quad x \geq 0.$$

Ange inversens definitionsmängd och värdemängd samt rita kurvorna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem. Kan du utan att räkna bestämma inversens minsta värde?

$D_f = [0, \infty) = V_{f^{-1}}$ $\qquad$ $V_f = [2, \infty) = D_{f^{-1}}$

Exempel

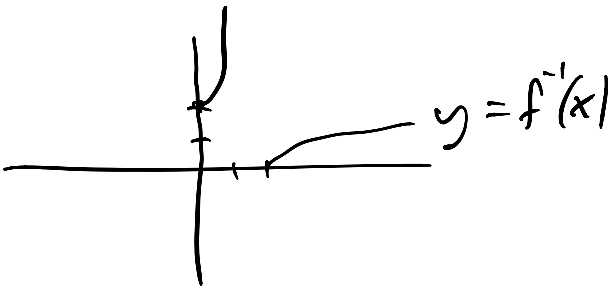
$f(x) = 2 + 3x^2, \quad x \geq 0.$

$$y = 2 + 3x^2, \quad x \geq 0$$

$$\frac{y-2}{3} = x^2, \quad x \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{y-2}{3}} = x, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-2}{3}}$$



Exempel

Exempel. Visa att $h(x) = x^7 + x^3 + x$ är inverterbar (utan att skriva upp inversen).

$h'(x) = 7x^6 + 3x^2 + 1 > 0$ för alla x

$\Rightarrow$ h str. väx på $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ h^{-1} finns.

Exponentialfunktionen. Det finns en funktion $\exp(x) = e^x$ som är definierad för alla x och har värdemängd alla $y > 0$.

Vi har **potenslagarna** som gäller för alla s och t:

$$e^s e^t = e^{s+t} \qquad 1/e^t = e^{-t}$$

$$e^s/e^t = e^{s-t} \qquad e^0 = 1$$

$$(e^s)^t = e^{st}$$

$e^{1/2} \cdot e^{1/2} = e^1 = e$, $e^{1/2} = \sqrt{e}$

$e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$ $\quad e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}$

Potenslagar

$$e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot e \cdots e}_{n \text{ st.}}$$

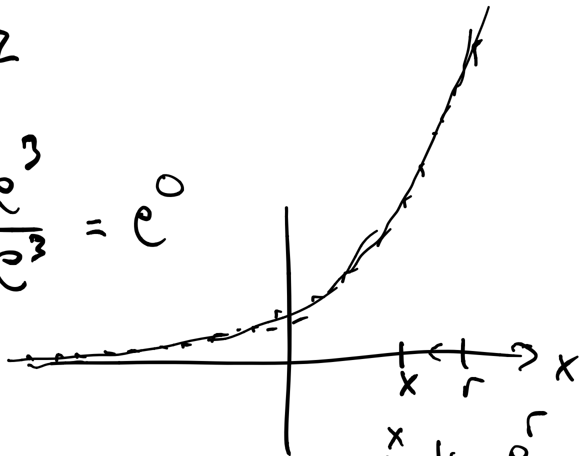
$$e^3 \cdot e^2 = (e \cdot e \cdot e) \cdot (e \cdot e) = e^{3+2}$$

$$\frac{e^3}{e^2} = \frac{e \cdot \cancel{e} \cdot \cancel{e}}{\cancel{e} \cdot \cancel{e}} = e^{3-2}$$

$$1 = \frac{e^3}{e^3} = e^0$$

$$e^{-1} \quad \frac{e^2}{e^3} = \frac{e \cdot e}{e \cdot e \cdot e} = \frac{1}{e}$$

$$(e^3)^2 = (e \cdot e \cdot e) \cdot (e \cdot e \cdot e) = e^{3 \cdot 2}$$



$$e^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbb{Q}}} e^r$$

Exp forts

Exponentialfunktionen är **deriverbar** för alla x och har derivata

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Exponentialfunktionen är **strängt växande** på hela reella axeln.

Dessutom:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Den naturliga logaritmfunktionen

Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande är den injektiv och har därmed invers. Inversen kallas den **naturliga logaritmfunktionen**, skrivs ln.

Vi har alltså:

$$\ln y = x \Longleftrightarrow y = e^x$$

Eller på ren svenska:

logaritmen för y är det tal man ska höja e till för att få y.

Vi har **logaritmlagarna** som gäller för alla positiva u och v och alla t:

$\ln(uv) = \ln u + \ln v$

$\ln(1/v) = -\ln v$

$\ln(u/v) = \ln u - \ln v$

$\ln 1 = 0$

$\ln(u^t) = t \ln u$

$$\ln(uv) = \ln(e^r e^s) = \ln(e^{r+s}) = r+s = \ln u + \ln v$$

ln forts

Definitionsmängden för den naturliga logaritmfunktionen ln är alla positiva reella tal och **värdemängden** är alla reella tal.

$\ln x$ är **deriverbar** för alla $x > 0$ och

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Den naturliga logaritmfunktionen är **strängt växande** för $x > 0$. Dessutom:

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Självklarheter

Två självklara saker:

$\ln e^x = x$, för alla x.

$e^{\ln x} = x$, för alla $x > 0$

Andra exponentialfunktioner

Om vi vill använda andra baser än talet e så kan vi göra så här:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Dvs a^x kan alltid skrivas som e^{kx} med nån konstant k. Här tänker vi oss att a är något positivt tal men inte 1. På samma vis kan man översätta mellan logaritmer med olika baser.

$$\frac{d}{dx} 10^x = \frac{d}{dx} e^{\ln 10^x} = \frac{d}{dx} e^{x \ln 10} = e^{x \ln 10} \cdot \ln 10$$

$$= 10^x \cdot \ln 10$$

Dessa standardgränsvärden måste man kunna ($a > 0$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

$a=1$ $\quad 0 \le \frac{x}{e^x} \le \frac{n+1}{(1+p)^n} = \frac{n+1}{1+np+\frac{n(n-1)}{2}p^2+\dots+p^n} \le \frac{n+1}{\frac{n(n-1)}{2}p^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

binom. satsen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

$a=1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

$$\ln x << x^a << e^x$$

Talet e

Talet e är ett specifikt reellt tal, det är inte rationellt, och det brukar definieras genom ett gränsvärde eller en summa:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Ett annat sätt kan vara att först definiera exponentialfunktionen $\exp$ och sedan sätta $e = \exp(1)$.

Hur som helst gäller att $e \approx 2.71828$

Bevis?

För att bevisa allt det vi har sagt om $\exp$ och $\ln$ kan man i princip utgå från vad e^r betyder om r är rationellt och sedan definiera e^x som ett gränsvärde av e^r när r är rationellt och går mot x. Då blir e^x definierat för alla x. Sedan får man bevisa potenslagarna och derivatan av e^x. Man måste visa att e^x är strängt växande och då vet man att den har invers som man kan kalla $\ln$. Potenslagar ger då loglagar, osv osv.

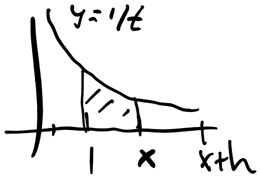
Detta går att göra, men problemet är att det är väldigt svårt att göra det ordentligt. Bara att bevisa att potenslagarna gäller för icke-rationella exponenter blir ganska knöligt.

Bevis?

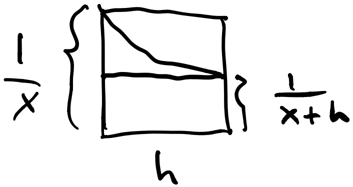
Därför gör jag (och boken) på ett annat sätt. Vi börjar med att definiera $\ln x$ som en integral (se teori-pdf 7 Expolog eller bokens kap 3.3). Med den definitionen är det lätt att bevisa loglagarna och härleda derivatan av $\ln x$. Med derivatan visas lätt att $\ln x$ är strängt växande. Därmed har den en invers som vi kan kalla *exp*. Potenslagarna härleds ur loglagarna och derivatan av $\exp(x)$ får vi med hjälp av derivatan av $\ln x$. På detta sätt lyckas vi bevisa alla fakta som vi vill ha kring $\exp$ och $\ln$ utan att det blir för krångligt.

Teori skiss

Def $\underbrace{\text{Ellen}(x)}_{\ln x} = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \begin{cases} A_x & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ -A_x & 0 < x < 1 \end{cases}$



$$\frac{d}{dx}\text{Ellen}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_1^{x+h} 1/t\,dt - \int_1^x 1/t\,dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$



$$\frac{1}{h}\,\frac{1}{x+h}\cdot h \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt \le \frac{1}{x}\,h \cdot \frac{1}{h}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\text{Ellen}(x) - \ln x\right) = 0 \Rightarrow \text{Ellen}(x) - \ln x = C$$

$x = 1$ ger $C = 0$

Teori skiss

Bevis av loglagar

$$\frac{d}{dx}\left(\ln xy - \ln x\right) = \frac{1}{x\cancel{y}} \cdot \cancel{y} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln xy - \ln x = C \qquad x = 1 \text{ ger } C = \ln y$$

så $\ln xy = \ln x + \ln y$

Exempel

Uppgift. Bestäm ett närmevärde till $e^{0.1}$. $f(x) = e^x$, $a = 0$

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$, x nära a. L.A.

$f(a) = f(0) = e^0 = 1$, $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$

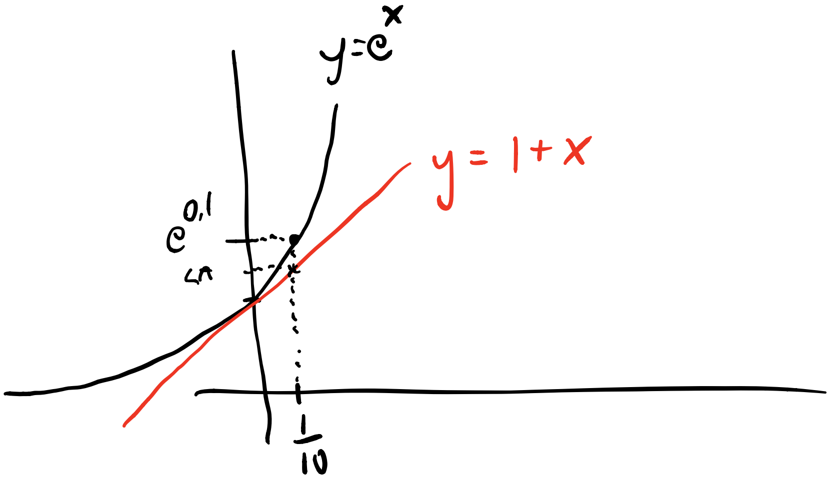
så $f(x) = e^x \approx 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x$, x nära 0.

$f(0.1) = e^{0.1} \approx 1 + 0.1 = \underline{\underline{1.1}}$

Exempel

Uppgift. Bestäm ett närmevärde till $\ln 1.2$.

Grafiskt



Exempel

Uppgift. Undersök funktionen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ med hjälp av dess derivata. Var är f strängt växande resp avtagande? Har den max? min? Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 1/2$?

$D_f = (0,\infty)$, f kontinuerlig på $(0,\infty)$.

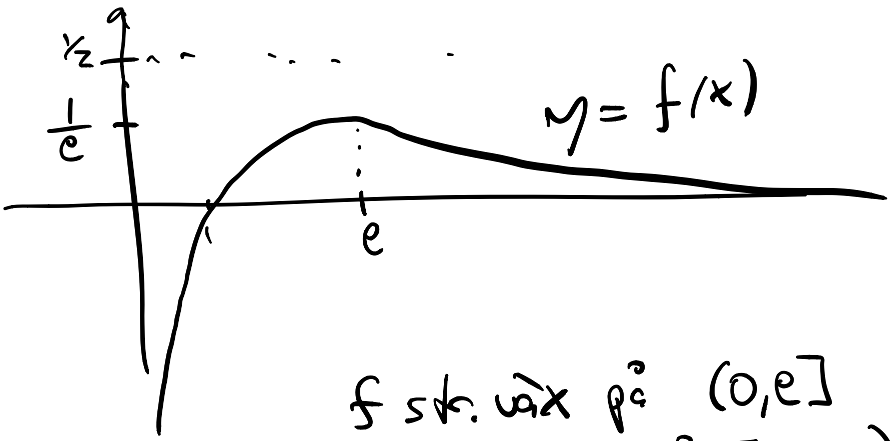
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \text{alla } x \in (0,\infty)$$

$f'(x) = 0 \iff x = e$

Teckenschema:

x	0		e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$



f str. väx på $(0, e]$

f str. avt. på $[e, \infty)$

Exempel

Uppgift. Undersök funktionen $g(x) = xe^{-x^2}$ med hjälp av dess derivata. Var är g strängt växande resp avtagande? Har den max? min? Hur många lösningar har ekvationen $g(x) = 1/8$?

Forts