**Institutionen för Matematik**

SF1625
Envariabelanalys
Lars Filipsson

# Uppgifter att träna på i Modul 1

## REKOMMENDERADE UPPGIFTER UR KURSBOKEN CALCULUS

Kapitel P1: 7, 11, 19, 29, 39. Kapitel P2: 13, 15, 17, 23. Kapitel P3: 3, 7, 43, 49. Kapitel P4: 1, 3, 7, 11, 31, 33, 53. Kapitel P5: 9, 25. Kapitel P6: 1, 7, 17. Kapitel P7: 1, 3, 7, 19, 25, 26, 51. Kapitel 1.2: uppg 9, 13, 21, 25, 30, 49, 50, 78, 79. Kapitel 1.3: uppg 3, 6, 11, 13, 53. Kapitel 1.4: uppg 7, 8, 12, 15, 17, 20, 21, 29. Kapitel 1.5: uppg 13, 29.

Om uppgifterna nedan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken som listas ovan.

## SKARPA ÖVNINGSUPPGIFTER

**Uppgift 1.** Beräkna nedanstående gränsvärden.

A. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2}$

B. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sin^2(x-2)}{x-2}$

C. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-4x+4}{(x+2)^2}$

D. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2-4}$

**Uppgift 2.** Avgör i vilka punkter funktionen $f$ är kontinuerlig. Är $f$ en kontinuerlig funktion? Svara på dessa frågor för nedanstående funktioner $f$.

A. $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

B. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{om } x \neq 0 \\ 1, & \text{om } x = 0 \end{cases}$

C. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{om } x \neq 0 \\ 2, & \text{om } x = 0 \end{cases}$

D. $f(t) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

**Uppgift 3.** Bestäm definitionsmängden till nedanstående funktioner. Är de kontinuerliga? Är de udda eller jämna? Är de begränsade?

A. $f(x) = \sqrt{7 - x^2}$

B. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

C. $f(x) = \tan x, \quad 0 \leq x < \pi/2$

D. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 11x + 30}$

**Uppgift 4.** Visa att $x^5 + 2x^4 - x = 1$ har minst en lösning i intervallet $-1 \leq x \leq 0$.

**Uppgift 5.** Förklara hur du kan veta att

$$f(x) = \frac{\sin^3 x - \tan x}{x^2 + \sqrt{x} + 1}$$

måste anta ett största och ett minsta värde när $x$ varierar i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Blir det likadant på intervallet $0 < x < 1$? Eller på intervallet $0 \leq x \leq 2$?

**Uppgift 6.** För vilka $x$ gäller olikheten $|x - 2| \leq 3$ ?

**Uppgift 7.** Lös nedanstående ekvationer.

A. $|2x - 3| = 5$

B. $|2x + 1| = |x|$

**Uppgift 8.** Lös nedanstående ekvationer.

A. $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$.

B. $\tan 3x = 1$.

**Uppgift 9.** Ange alla nollställen till $\sin x$. Ange alla nollställen till $\tan x$. Ange alla nollställen till $\cos x$

**Uppgift 10.** Skriv med hjälp av enpunktsformeln upp en ekvation för linjen genom punkten $(7, -1)$ med riktningskoefficient $-5$.

**Uppgift 11.** Ange en ekvation för den räta linje genom punkten $(1, 2)$ som är normal (vinkelrät) mot linjen i föregående uppgift.

**Uppgift 12.** Ge exempel på en funktion med definitionsmängd $[1, 2]$ som inte är kontinuerlig.

**Uppgift 13.** Ge exempel på en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $(1, 2)$ som inte har något största värde.

**Uppgift 14.** Ge exempel på en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $(1, 2)$ som har ett största värde.

**Uppgift 15.** Ge exempel på en funktion som inte är kontinuerlig men som ändå antar ett största och ett minsta värde.

## FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. $0$
B. $0$
C. $1$
D. $1/3$

2. A. Alla $x \neq 0$. Ja.
B. Alla $x$. Ja.
C. Alla $x \neq 0$. Nej.
D. Alla $x$ utom $x = 3$ och $x = 2$. Ja.

3. A. $D_f = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$. $f$ är kontinuerlig, jämn, begränsad.
3. B. Definitionsmängden är alla $x \neq 0$. $f$ är kontinuerlig, udda, begränsad.
3. C. Definitionsmängden är $[0, \pi/2)$. $f$ är kontinerlig, inte begränsad, varken udda eller jämn.
3. D. Definitionsmängden är alla $x$ utom $5$ och $6$. $f$ är kontinuerlig, inte begränsad, varken udda eller jämn.

4. Sätt $f(x) = x^5+2x^4-x-1$. Ekvationen i uppgiften är ekvivalent med att $f(x) = 0$. Nu är $f(-1) = 1$ och $f(0) = -1$ och eftersom $0$ är ett tal mellan $-1$ och $1$ och funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[-1, 0]$ så följer av satsen om mellanliggande värden att funktionen antar värdet noll i någon punkt i intervallet. (OBS att din lösning måste innehålla dessa ord: kontinuerlig, slutet, begränsat, satsen om mellanliggande värden)

5. $f$ är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[0, 1]$, så $f$ måste anta ett största och ett minsta värde. På intervallen $(0, 1)$ och $[0, 2]$ gäller inte detta och vi kan inte säga något utan att tänka efter. Problemet med $(0, 1)$ är att det inte är slutet. Problemet med $[0, 2]$ är att funktionen inte är kontinuerlig på hela intervallet – vi får division med noll i punkten $\pi/2$ som ju tillhör intervallet $[0, 2]$ (men inte $[0, 1]$).

6. $-1 \leq x \leq 5$ (obs att olikheten i uppgiften kan utläsas: avståndet från $x$ till 2 ska vara högst 3)

7. A. Lösningarna är $x = -1$ och $x = 4$ (dela upp i två fall: för $x \geq 3/2$ (men bara då) blir ekvationen ekvivalent med att $2x - 3 = 5$ och för $x < 3/2$ (men bara då) blir ekvationen ekvivalent med att $-(2x - 3) = 5$).

B. Lösningarna är $x = -1$ och $x = -1/3$ (se ledningen ovan, dela in i tre fall: $x \geq 0$ respektive $-1/2 \leq x < 0$ respektive $x < -1/2$)

8. A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n$ godt heltal
B. $x = \frac{\pi}{12} + n\pi/3,\ n$ godt heltal

9. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, n godt heltal
$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, n godt heltal
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + n\pi$, n godt heltal

10. $y = -1 - 5(x - 7)$

11. $y = 2 + (1/5)(x - 1)$

12. T ex (det finns många!) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{om } x = 2 \end{cases}$

13. T ex (det finns många!) $f(x) = x,\ 1 < x < 2.$

14. T ex (det finns många!) $f(x) = -|x - \frac{3}{2}|,\ 1 < x < 2.$

15. T ex (det finns många!) heavisidefunktionen (den som är $0$ för negativa $x$ och $1$ för ickenegativa $x$).