SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 17

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Konvergent eller divergent?

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx$$ konv.

$$\int_4^\infty \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x\sqrt{x}+1}\, dx$$ div

$$\int_1^\infty \frac{x+xe^{-x}}{x^3+x}\, dx$$ konv.

Konvergent eller divergent?

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ x=e \text{ gör } \text{att } u=1 \\ x=R \text{ gör till } u=\ln R \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^{\ln R} \frac{1}{u^3}\,du = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2u^2} \right]_1^{\ln R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2(\ln R)^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \quad \text{Konv.}$$

Konvergent eller divergent?

$$\int_4^\infty \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x\sqrt{x}+1}\,dx$$ divergent, ty

$$\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x\sqrt{x}+1} \geq \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \geq \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} \geq 0$$

$x \in [4, \infty)$

och $\int_4^\infty \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergent.

Konvergent eller divergent?

$$\int_1^\infty \frac{x + xe^{-x}}{x^3 + x}\,dx$$ konvergent ty

$$0 \le \frac{x + xe^{-x}}{x^3 + x} = \frac{x(1+e^{-x})}{x^3 + x} \le \frac{2x}{x^3 + x} \le \frac{2x}{x^3} = 2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

alla $x \in [1, \infty)$

och $\int_1^\infty 2 \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ som är konvergent.

Integraler som Riemannsummor: Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så vet vi att

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum f(x_j)\Delta x_j$$

där högerledet är en Riemannsumma. Detta är ofta grunden när integraler tillämpas.

Integraltillämpningar

Geometriska tillämpningar:

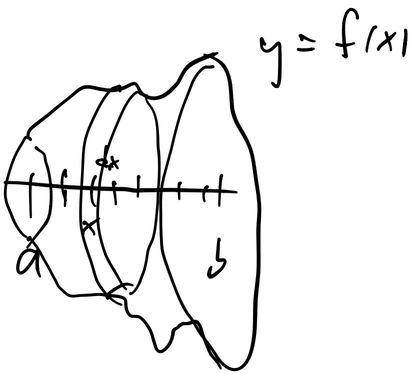
Area, volym, båglängd, ...

Andra tillämpningar:

Massa, tyngdpunkt, tröghetsmoment, arbete, ...

Rotationsvolymen V som genereras när ytan mellan kurvan $y = f(x)$, då $a \leq x \leq b$, och x-axeln roteras ett varv runt x-axeln ges av

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$



En bit har volym $f(x)^2 \pi \, dx$

Hela har volym $\int_a^b f(x)^2 \pi \, dx$

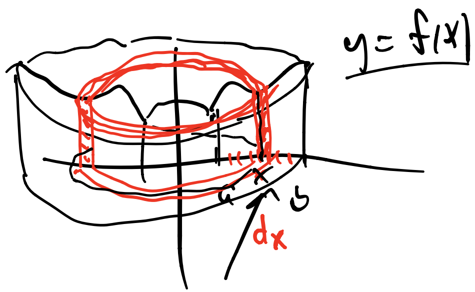
Integraltillämpningar

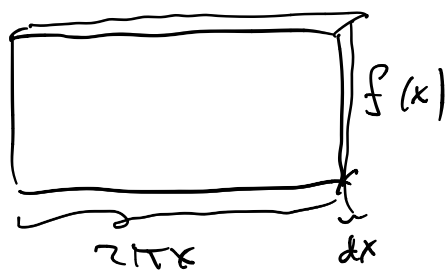
Rotationsvolymen V som genereras när ytan mellan kurvan $y = f(x)$, då $a \leq x \leq b$, och x-axeln roteras ett varv runt y-axeln ges av

$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

volymen på litet intervall dx vid x blir $2\pi x f(x) dx$

Hela volymen får genom summation $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$





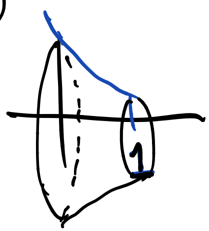
Rotationsvolym, exempel

Bestäm rotationsvolymen som genereras när området mellan x-axeln och kurvan $y = \dfrac{1}{x+1}$, $0 \leq x \leq 1$, roteras

a. runt x-axeln

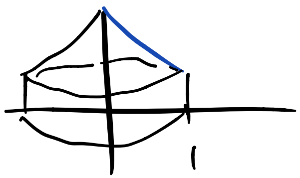
b. runt y-axeln

a.



$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \pi \, dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \pi\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\pi}{2}.$$



$$V = \int_0^1 2\pi x \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= 2\pi \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^1 = 2\pi(1 - \ln 2)$$

Ett gammalt tentaproblem

Härled följande formler med hjälp av rotationsvolymsteknik.

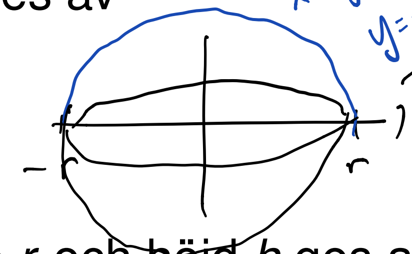
A. Volymen V av ett klot med radie r ges av

$x^2+y^2=r^2$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$

$V = \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\pi \, dx = \ldots\ldots .$

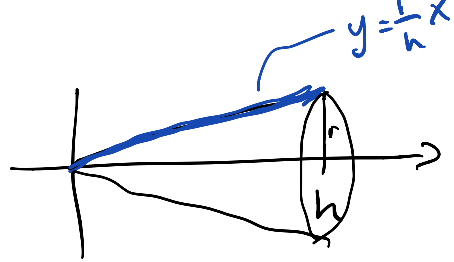
$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



B. Volymen V av en kon med basradie r och höjd h ges av

$V = \int_{0}^{h} \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \pi \, dx = \ldots$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

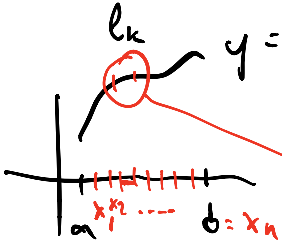


Ett gammalt tentaproblem

Integraltillämpningar

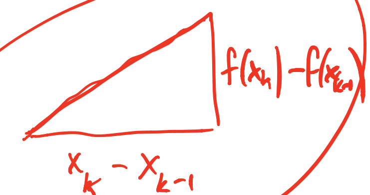
Kurvlängd.

Längden av kurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$, ges av



$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ungefär



$$\ell_k \approx \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,(x_k - x_{k-1})$$

$$\overset{MVS}{=} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$$

Hela längden $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)}\,\Delta x_k$

Beräkna längden av kurvan $y = \underbrace{\ln(1 - x^2)}_{f(x)}$, $0 \le x \le 0.5$.

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x)$$

$$\text{Längden} = \int_0^{0.5} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{0.5} \sqrt{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx$$

$$= \int_0^{0.5} \sqrt{\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx \int_0^{0.5} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{0.5} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{0.5} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx = \int_0^{0.5} \left(-1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \ldots = \underline{\ln 3 - \frac{1}{2}}.$$

Beräkna längden av kurvan $y = \ln(1 - x^2), \;\; 0 \leq x \leq 0.5.$

Rotationsarea.

Arean A som genereras när kurvan $y = f(x),\ a \leq x \leq b$, roteras runt x-axeln ges av

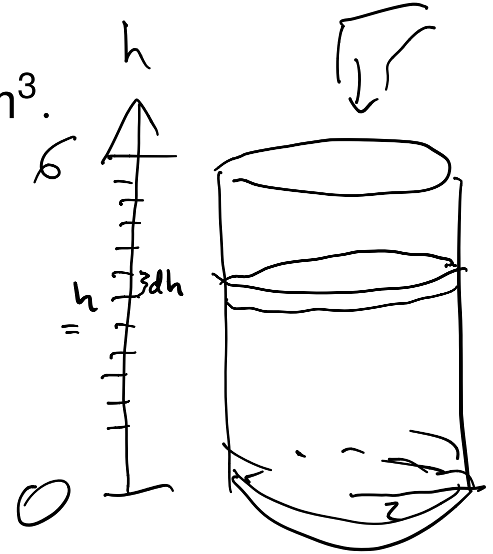
$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Läs mer i boken. Ett exempel: Rotation av $y = 1/x$.

Integraltillämpningar

En cylindrisk silo med radie 2 meter och höjd 6 meter är fullpackad. Densiteten ρ av innehållet varierar med höjden h enligt formeln

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2}}} \quad \text{ton/m}^3.$$



Beräkna massan av innehållet i silon.

På höjden h har vi en skiva med tjocklek dh som väger ungefär $2^2\pi\, dh \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2}}}$

Hela massan fås genom summation NU

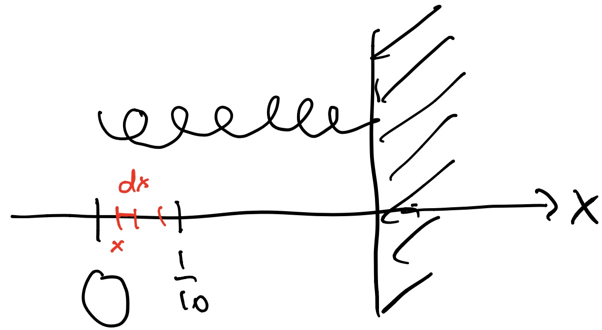
En cylindrisk silo med radie 2 meter och höjd 6 meter är fullpackad. Densiteten ρ av innehållet varierar med höjden h enligt formeln

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2}}} \quad \text{ton/m}^3.$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

$$\text{Massan} = \int_0^6 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2}}} \cdot 4\pi \, dh \qquad \text{ton.}$$

För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern x meter är $F(x) = x/2$ N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop denna fjäder $1/10$ meter?



Arbetet på ett litet delintervall dx vid x är ung. $\frac{x}{2}\,dx$

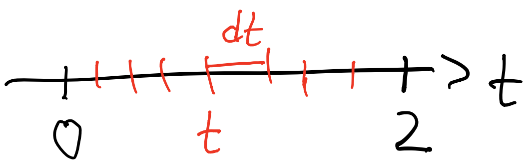
Hela arbetet fås gm summation till $\int_0^{1/10} \frac{x}{2}\,dx$ Nm.

$\left(F(x) = \frac{x}{2} \text{ kontinuerlig}\right)$

För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern x meter är $F(x) = x/2$ N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop denna fjäder $1/10$ meter?

Integraltillämpningar

En bil startar och kör längs en väg med en hastighet som vid tiden t timmar ges av $v(t)$ km/h. Hur långt har bilen kört efter 2 timmar?



$$\text{hast} = \frac{\text{sträcka}}{\text{tid}}$$

hast · tid = sträcka.

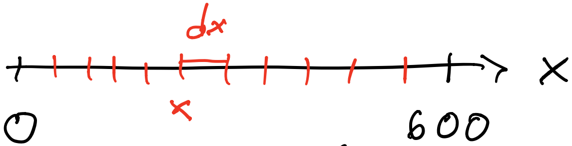
På ett litet tidsintervall dt vid tid t blir sträckan ung. $v(t) \cdot dt$. Hela sträckan fås genom summation till $\int_0^2 v(t)\,dt$ km (ty $v(t)$ kontinuerlig).

Integraltillämpningar

En bil startar och kör längs en 600 km lång väg med en hastighet som vid x körda km ges av $v(x)$ km/h (pga hastighetsbegränsningar mm beror alltså hastigheten på körsträckan). Hur lång tid tar det att köra 600 km?

$$\text{hast} = \frac{\text{str}}{\text{tid}}$$

$$\text{tid} = \frac{\text{str}}{\text{hast}}$$



Tiden att köra en liten sträcka dx vid x körda km ung. $\frac{dx}{v(x)}$. Tiden att köra hela sträckan fås gm summation till $\int_0^{600} \frac{dx}{v(x)}$ timmar. ($v(x)$ kontinuerlig)

En minitenta

1. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då $y = \cos x$, på intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$, roteras kring y-axeln.

2. Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x} + x^2}{x + x^4}$ är konvergent.

3. Bestäm värdemängden till $f(x) = xe^{2x-1}$.

4. Bestäm Taylorpolynomet p av grad 1 kring $x = 1/2$ till $f(x) = \arcsin x$. Avgör om felet garanterat är mindre än 0.1 om $f(x)$ approximeras med $p(x)$ för x mellan $1/2$ och $3/4$.

Läxa

Att göra.

Se Film18 Parameterkurvor. Gör moduluppgifter och Hemruppgifter6.pdf