Implicit derivering

Bakgrund Ex.

$\underbrace{y}_{\text{ensam } y} = \underbrace{x^2 \sin x}_{f(x)}$ y är explicit uttryckt i x

$xy + \sqrt{y} = 3y^2 + \sin(xy)$ y är implicit uttryckt

2014.10.24 #8 (delvis)   #KTH

Givet att $(x^2+y^2)^2 - 7x^2 + 3y^2 = 0$

och $y(2) = 1$, dvs. $y(x) = 1$ då $x = 2$.

Bestäm $y'(2)$, dvs. $y'(x)$ där $x = 2$.

Strategi Derivera båda led av ekvationen med avseende på x.

$\frac{d}{dx}(-7x^2) = -14x$ Obs! $\frac{d}{dx} 3y^2 \neq 6y$

$$\frac{d}{dx} 3y^2 = \underbrace{\frac{d}{dy} 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx}}_{\text{kedjeregeln}} = 6y \cdot y'$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}(x^2+y^2)^2}_{} = 2(x^2+y^2)\cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2+y^2)}_{\text{inre derivatan}}$$

annat exempel:

$f(x) = (\sin x)^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$

$$= 2(x^2+y^2)\cdot(2x + \underbrace{2y\cdot y'}_{\text{från kedjeregeln också}})$$

Alltså Om vi deriverar båda led av

$$(x^2+y^2)^2 - 7x^2 + 3y^2 = 0$$

med avseende på x, får vi

(*)

$$2(x^2+y^2)\cdot(2x+2y\cdot y') - 14x + 6yy' = 0$$

Mål Bestäm $y'(2)$ givet att $y(2)=1$:

$x=2$

Sätt in $x=2$ och $y=1$ i (*) och lös ut $y' = y'(2)$:

$$2\cdot 5\cdot(4+2y') - 14\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow 40 + 20y' - 28 + 6y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{6}{13}$$

Svar $y'(2) = -6/13$ ☒

Taylorpolynom & approximationer

Teori En "vettig" funktion f kan skrivas $f(x) = P_n(x) + R(x)$, där $P_n(x)$ är Taylorpolynomet av grad n och $R(x)$ är den motsvarande resttermen.

Sats $P_n(x)$ kring punkten $x=a$ ges av

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k$$

Motsvarande resttermen $R(x)$ ges av

$$R(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Lagrangeform}}$$

där c är något tal mellan x och a.

2019·08·19 #2 $f(x) = \sin x$ #UU

(a) Bestäm $\underbrace{\text{Maclaurinpolynomet}}_{\text{Taylorpolynom kring } x=0}$ av

grad 5. Visa att $\sin 1 \approx \frac{101}{120}$.

Lösning Vill hitta

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1$$

Slutsats

$$P_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Innebörd

$$f(x) = \sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

där $x \approx 0$

$$\sin 1 = f(1) \approx P_5(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \dots = \frac{101}{120}$$