2020.06.03 #1

#KTH

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} + \ln x + 2e^{2x}}{3e^{2x} + x^{100} - 7}$$

(bra tecken för att knepet skulle kunna funka

Förkorta bråket med den dominerande e^{2x} (som växer som snabbast)

från $\frac{e^{x/2}}{e^{2x}} = e^{\frac{x}{2}-2x} = e^{-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}x}} \to 0$ när $x\to\infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{\ln x}{e^{2x}} + 2}{3 + \frac{x^{100}}{e^{2x}} - \frac{7}{e^{2x}}} = \frac{0+0+2}{3+0+0}$$

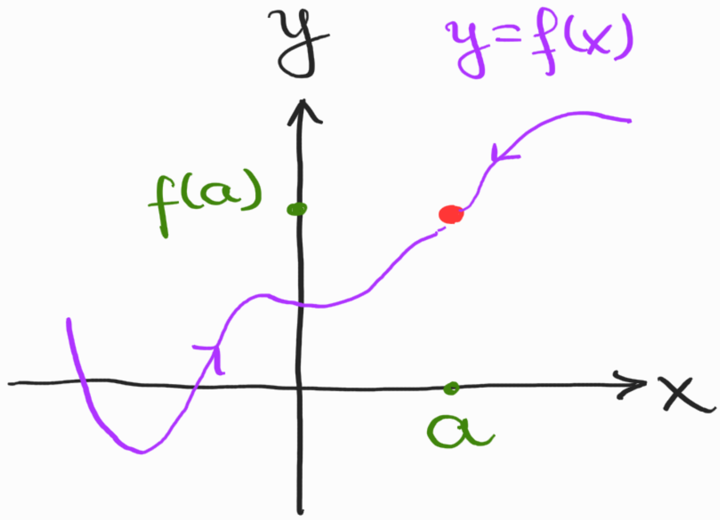
$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Svar

Kontinuitet av funktioner

Def. f sägs vara kontinuerlig i punkten $x=a$ om

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$



2015.10.19 #3 #UU

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ a & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten a så att f blir kontinuerlig.

Lösning Räcker med att se till att f blir kontinuerlig i $x=0$. Krav:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \underbrace{f(0)}_{\text{givet värde}} = a$$

Betrakta nu

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{begränsat värde}} = 0$$

begränsat värde (måste anges på tentan för full poäng)

Allmänna tips

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

   $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

   för alla $\alpha \in \mathbb{R}$

Slutsats

$$\underline{\underline{a = 0}}$$

Svar $\boxtimes$

Anmärkning $0 \cdot \infty$ räknas som en obestämd form, dvs. det inte går att säga vad $\lim_{x \to a} \underbrace{f(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to \infty}$ blir om vi inte känner till f och g.

Ex.

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{8}{x}}_{\to \infty} = 8$$

Deriverbarhet av funktioner

Definition Låt f vara def. och kont. i en punkt $x=a$. Om

något tal (dvs. inte $\pm\infty$)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = c$$

säg att f är deriverbar i $x=a$.
Vi skriver då att $f'(a) = c$.

2015.10.19 #3 #UU

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ a & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

b) Är f med $a=0$ deriverbar i alla punkter?

$x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ är säkert deriverbar för alla $x \neq 0$

Lösning Räcker att kolla om f är deriverbar i $x=0$. Betrakta då