SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 9

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Derivata i tillämpningar

Många samband kan formuleras med hjälp av **derivator**, t ex:

Tillväxttakten i en bakteriekoloni är proportionell mot mängden bakterier:

$$\frac{dM}{dt} = kM \qquad M(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Avsvalningstakten är proportionell mot temperaturskillnaden:

$T(t)$

$T(0) = 20$

$$\frac{dT}{dt} = k(T + 10) \qquad T(t) = -10 + Ce^{kt}$$

Kraften är massan gånger **accelerationen**:

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Exempel. Lös differentialekvationen

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 0$$

Om $y(t) = e^{rt}$ så är $y'(t) = re^{rt}$

$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 0 \iff re^{rt} + \frac{1}{2}e^{rt} = 0 \iff$

$e^{rt}\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0 \iff \underbrace{r + \frac{1}{2} = 0}_{\text{kar. ekv.}} \iff r = -\frac{1}{2}$

Lösning: $y(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t}$, C godt. konst.

En tentauppgift. När en kondensator med kapacitans C laddas ur över ett motstånd med resistans R gäller att spänningen $u(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0.$$

$u'(t) + \frac{1}{RC} u(t) = 0$

Lös differentialekvationen och bestäm hur lång tid det tar för spänningen att halveras.

Kar. ekv. $\left(r + \frac{1}{RC}\right) = 0$ har lösn. $r = -\frac{1}{RC}$ så

$u(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$, A godt. konst.

Homogena linjära ODE m konst koeff

Forts. $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{RC} = 0$ har lösn. $u(t) = A e^{-\frac{1}{RC}t}$

Ser $u(0) = A$. Söker t_0 s.a.

$u(t_0) = \frac{1}{2}A$ dvs $\cancel{A} e^{-\frac{1}{RC}t_0} = \frac{1}{2}\cancel{A}$ dvs

$e^{-\frac{1}{RC}t_0} = \frac{1}{2}$ dvs $-\frac{1}{RC}t_0 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

dvs $t_0 = RC\ln 2$

Andra ordningen. En homogen ordinär linjär DE av ordning 2 med konstanta koefficienter kan skrivas

kar. ekv.

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \qquad ar^2+br+c=0$$

för några konstanter a, b, c. (Bevis för nedanst i pdf o i boken)

Lösning: Vi ser att $y(t) = e^{rt}$ löser diffekvationen omm r löser den karaktäristiska ekvationen $ar^2 + br + c = 0$. Vi får tre fall:

Fall 1. Om $r_1 \neq r_2$ är reella, så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad A, B \text{ godt konst}$$

Fall 2. Om $r_1 = r_2$, reell, så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = (A + Bt)e^{r_1 t}, \quad A, B \text{ godt konst}$$

Fall 3. Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \quad A, B \text{ godt konst}$$

Exempel

Lös differentialekvationerna!

A. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ $\quad r^2 + 3r + 2 = 0$

B. $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$ $\quad r^2 + 6r + 9 = 0$

C. $y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$ $\quad r^2 - 4r + 13 = 0$

Exempel

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ kar. ekv. $r^2 + 3r + 2 = 0$

har lösn. $r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ dvs $r = -2, -1$

D.E. allm. lösning:

$$y(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t},$$ A, B godt. konst.

Exempel

$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$ kar. ekv. $r^2 + 6r + 9 = 0$

har lösn. $r = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$

DE har allm. lösn.

$y(t) = (At + B)e^{-3t}$, A, B godt tal

Exempel

$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$ Kar. ekv. $r^2 - 4r + 13 = 0$

har lösning $r = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9}$
$= 2 \pm 3i$

DE-lösning:
$$y(t) = e^{2t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$$
$A, B \in \mathbb{R}$.

Tillämpningsexempel

Diffekvationen $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ kallas ibland svängningsekvationen. Olika val av konstanterna a och b beskriver olika typer av svängning.

Odämpad svängning beskrivs då $a > 0$, $b = 0$ och $c > 0$, dvs

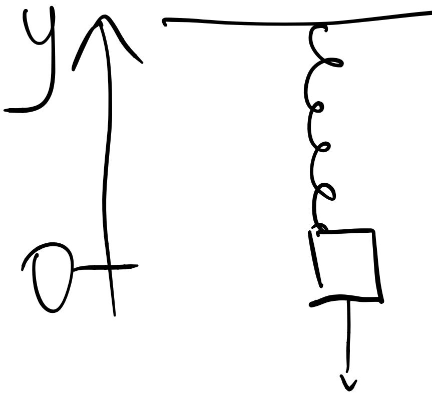
$r^2 + \omega^2 = 0$

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

$A\cos\omega t + B\sin\omega t$

För positiva a, b och c skiljer man på dämpad svängning, kritiskt dämpad svängning och överdämpad svängning (se slutet av kap 3.7 i boken).

Tillämpningsexempel



tot. $F = ma = my''(t)$

$F_{fj} = -ky(t)$

$F_{fr} = -cy'(t)$

$my''(t) = -ky(t) - cy'(t)$

$$\boxed{ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0}$$

$f(t)$

$y'' + 4y' + 4y = 0$

kar. ekv. $r^2 + 4r + 4 = 0$

har lösn. $r = -2$

så DE lösning är

$(At+B)e^{-2t}$, $A, B \in \mathbb{R}$

$Ce^{-2t} + Dte^{-2t}$

Lös diffekvationen:

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 1$$

Lösn. $y = y_h + y_p$ där y_h är allm. lösn. till homogena ekv.

y_p är ngn partikulärlösn.

$$\left.\begin{array}{l} y_h = Ce^{-\frac{1}{2}t}, \quad C \in \mathbb{R}. \\ y_p = 2 \end{array}\right\}$$

Svar: $\underline{y(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t} + 2}$, $C \in \mathbb{R}$

Lös diffekvationen:

$y_h = Ce^{-\frac{1}{2}t}, \; C \in \mathbb{R}.$

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = t$$

$y = y_h + y_p$

Ansätt (gissa) $y_p = at + b$. Då $y_p' = a$

$y_p' + \frac{1}{2}y_p = t \iff a + \frac{1}{2}(at+b) = t \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

Har $y_p = 2t - 4$.

Svar: $\underline{y(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t} + 2t - 4}$, C godt tal

Lös diffekvationen

$y = y_h + y_p$

$y_p = C$
$y_p' = 0$
$y_p'' = 0$

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 10$$

y_h allm. lösn. till $y'' - 2y' + y = 0$. Kar. ekv. $r^2 - 2r + 1 = 0$ har lösn. $r = 1$ så $y_h = (At + B)e^t$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Ser kan ta $y_p = 10$

Svar $y(t) = (At + B)e^t + 10 \quad A, B \in \mathbb{R}$

Lös diffekvationen

$y = y_h + y_p$

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 3e^{2t}$$

y_h allm lösn. t. $y'' - 2y' + y = 0$ dvs $y_h = (At+B)e^t$, $A, B \in \mathbb{R}$

Ansätt (gissar) $y_p = ce^{2t}$. Då $y_p' = 2ce^{2t}$ och $y_p'' = 4ce^{2t}$

Insättn: $y_p'' - 2y_p' + y_p = 3e^{2t} \Leftrightarrow 4ce^{2t} - 2 \cdot 2ce^{2t} + ce^{2t} = 3e^{2t}$

$\Leftrightarrow ce^{2t} = 3e^{2t} \Leftrightarrow c = 3$. Så $y_p = 3e^{2t}$.

Svar: $y(t) = (At+B)e^t + 3e^{2t}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Lös initialvärdesproblemet $y = y_h + y_p$

$$\begin{cases} y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 6 \\ y(0) = 1 \text{ och } y'(0) = 1 \end{cases}$$

P.s.s. som tidigare: $y_h = Ae^{3t} + Be^{2t}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

$y_p = 1$

DE lösn. är $y(t) = Ae^{3t} + Be^{2t} + 1$. $y(0) = 1 \Leftrightarrow A + B + 1 = 1$

dvs $A + B = 0$ dvs $B = -A$. $y' = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t}$. $y'(0) = 1 \Leftrightarrow$

$3A + 2B = 1$. För $A = 1$, $B = -1$ Svar: $\underline{y(t) = e^{3t} - e^{2t} + 1}$

Forts! Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 6 \\ y(0) = 1 \text{ och } y'(0) = 1 \end{cases}$$

Mer om inhomogena fallet

Lösningsgången för en **inhomogen** ekvation
$y'' + ay' + by = f(t)$ är:
- Finn y_h
- Finn y_p (se kap 18.6 - ansätt y_p som liknar högerledet)
- Addera: $y = y_h + y_p$
- Sist: Bestäm ev konstanter med hjälp av villkor.

Vid ansättning i steg 2 när man söker y_p ska man gissa att partikulärlösningen ser ut ungefär som högerledet. Om högerledet är ett polynom, ansätt ett polynom. Om högerledet är en exp-funktion, ansätt en exponentialfunktion. Om högerledet är sin eller cos, ansätt en kombination av sin och cos.

Vid ansättning av y_p får ingen term finnas med i y_h. Om någon term av y_p finns med i y_h - mulitplicera ansättningen med variabeln och försök igen.

Exempel

Lös initialvärdesproblemet (resonans)

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t \\ y(0) = 0 \text{ och } y'(0) = 1 \end{cases}$$ DE lsn. $y = y_h + y_p$

y_h homog. lsn. kar. ekv. $r^2 - 3r + 2 = 0$ har lsn.

$r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ dvs $r = 2$ el. $r = 1$

$y_h = Ae^{2t} + Be^t$, $A, B \in \mathbb{R}$ Ans. $y_p = ce^t$ funkar ej

Ansätt $y_p = tce^t$. $y_p' = ce^t + cte^t$. $y_p'' = ce^t + ce^t + cte^t$
$= 2ce^t + cte^t$

Forts! Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t \\ y(0) = 0 \text{ och } y'(0) = 1 \end{cases}$$

... insättn. ger $c = -1$ så $y_p = -te^t$

DE lösn. är $y(t) = Ae^{2t} + Be^t - te^t$, $A, B \in \mathbb{R}$

initialvillkoren ger $A = 2$, $B = -2$

Lösn. på IVP blir $\underline{y(t) = 2e^{2t} - 2e^t - te^t}$

Uppgift. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0 \end{cases}$$

1. $y_h = C\cos t + D\sin t$, där C och D är godtyckliga konstanter.

2. $y_p = -\dfrac{t}{2}\cos t$.

3. Lösningen till DE är $y(t) = C\cos t + D\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t$.

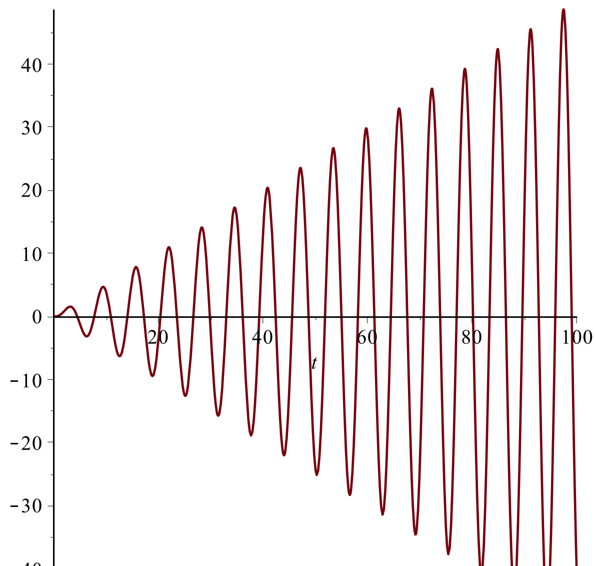
4. Lösningen till IVP är $y(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t$.

Uppgift. Initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

har alltså lösningen

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t.$$



Resonans

https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw