SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 13

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Anmäl er till tentan

Anmäl er till tentan nu.

Det görs via ”mina sidor”.

Att göra denna vecka

Översikt över modul 5

- Integralens definition
  - Översummor och Undersummor
  - Riemannsummor
  - Integralens egenskaper
  - Bestämd och obestämd integral
- Huvudsatsen (the fundamental theorem)
  - Del 1: Derivata och integral är ”motsatser” till varandra
  - Del 2: Beräkna integraler med primitiv funktion
- Integrationstekniker
  - Variabelsubstitution
  - Partiell integration
  - Partialbråksuppdelning

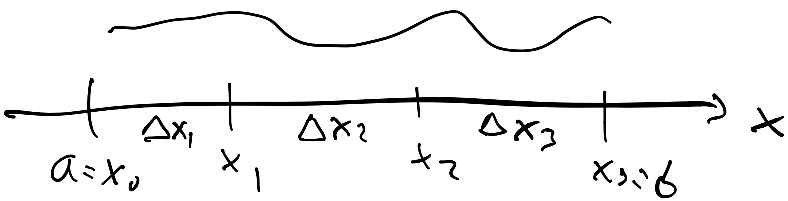
Intuitiv idé om integraler

I många tillämpningar uppkommer situationen att man behöver summera termer som består av ett funktionsvärde gånger längden på ett intervall. Exempel:

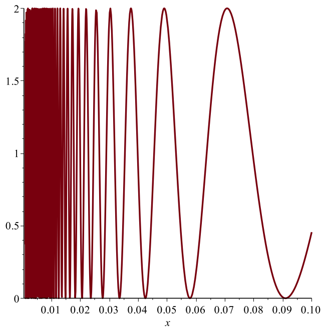
Area = Höjd x Bredd $\approx h(x_1)\Delta x_1 + h(x_2)\Delta x_2 + h(x_3)\Delta x_3$

Arbete = Kraft x Väg $\approx k(x_1)\Delta x_1 + k(x_2)\Delta x_2 + h(x_3)\Delta x_3$

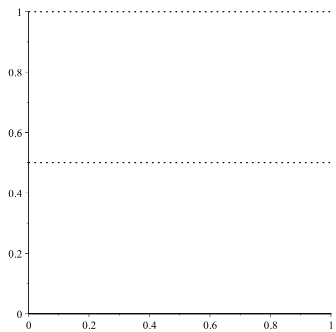
Massa = Densitet x Storlek $\approx \delta(x_1)\Delta x_1 + \delta(x_2)\Delta x_2 + \delta(x_3)\Delta x_3$



Vad är area? Har alla områden area?

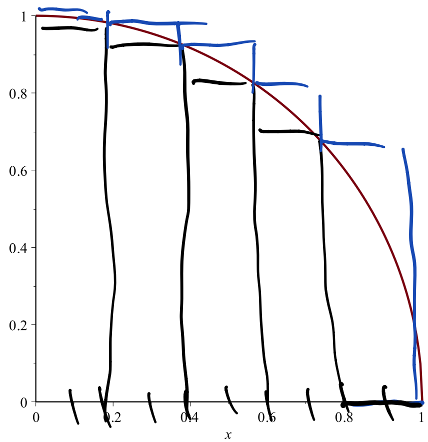


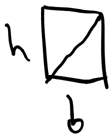
$y = \sin\frac{1}{x} + 1$ på $0 < x \le 1$



$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 1/2 & \text{om } x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Intuitiv idé om integraler





Intuitiv idé om integraler

Area = Höjd x Bredd $\int_a^b h(x)\,dx$

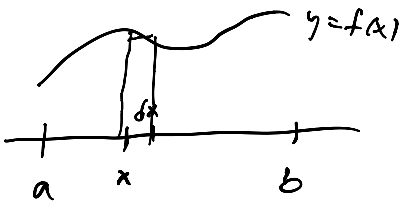
Arbete = Kraft x Väg $\int_a^b F(x)\,dx$

Massa = Densitet x Storlek $\int_a^b \delta(x)\,dx$

Definition. Låt f vara begränsad på $[a, b]$. Om det finns exakt ett tal I sådant att för alla partitioner P gäller att

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

så säger vi att f är integrerbar på $[a, b]$ och talet I är då integralen av f över $[a, b]$, dvs



$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ett villkor för integrerbarhet

Observation. Om man genom val av partition kan få skillnaden mellan övre och lägre Riemannsumma hur liten som helst, så måste f vara integrerbar. Dvs

Om det för varje $\epsilon > 0$ finns en partition P av $[a, b]$ sådan att

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

så är f integrerbar på $[a, b]$

Kontinuerliga funktioner är garanterat integrerbara

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f integrerbar på $[a, b]$.

Tänk på integraler som summor

Man kan alltså tänka på integraler som (gränsvärden av) summor. Om f är integrerbar gäller att:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j$$
$$= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n.$$

(Här är $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ och $x_{j-1} \leq c_j \leq x_j$ för $j = 1, \ldots, n$.)
Många egenskaper hos integraler känns nu självklara:

Enkla egenskaper (sats 3 i boken)

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Integralen är linjär

3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad$ om $f \leq g$ i $[a, b]$

5. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad$ (triangelolikheten)

Tentauppgift

Tentauppgift. Visa att $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1$

$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f(0) = 1$ & $f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ på $(0,1)$

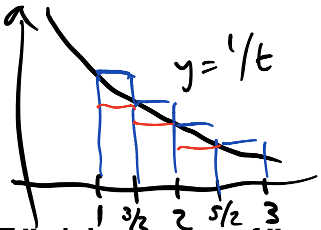
så f strängt avtagande.

$e^{-x^2} \leq 1$ på $[0,1]$

så $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx = 1$

Uppgift

Tentauppgift. Bestäm en Riemannsumma R, med fyra delintervall, som approximerar integralen



$$\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \ln 3 \approx 77/60$$

Förklara varför din Riemannsumma ger ett närmevärde till $\ln 3$.

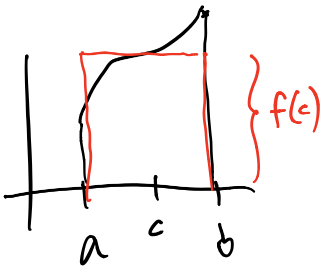
$$R = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3/2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5/2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{77/60}$$ översumma

motsv. undersumma blir $\underline{57/60}$

En ny medelvärdessats

Medelvärdessatsen för integraler. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns ett tal c mellan a och b sådant att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$



Talet $f(c)$ kallas medelvärdet av f på $[a, b]$.

Bevis för medelvärdessatsen för integraler. Då f är kontinuerlig och $[a, b]$ slutet och begränsat måste f anta ett största värde M och ett minsta värde m när x varierar i $[a, b]$. Då måste (rita figur!)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Om vi dividerar med $b-a$ ser vi att $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ligger mellan m och M som är båda är funktionsvärden till f. Med satsen om mellanliggande värden får vi att det finns ett c mellan a och b så att

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Det är precis vad vi skulle bevisa.

Huvudsatsen

Hittills har vi bara sysslat med att slå fast vad **begreppet integral** står för och härlett några enkla egenskaper hos detta begrepp. Vi har inte försökt räkna ut integraler. Man kan förstås göra det genom att ta gränsvärdet av summor. Det är jobbigt. Som tur är finns enklare sätt. Det bygger på huvudsatsen som säger att derivata och integral är ”motsatta” operationer och att man därför kan räkna ut integraler genom att anti-derivera, eller hitta primitiv funktion.

Huvudsatsen

Huvudsatsen (the fundamental theorem of calculus).

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ Då gäller:

DEL 1. Funktionen $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ är en primitiv funktion till f, dvs $S'(x) = f(x)$.

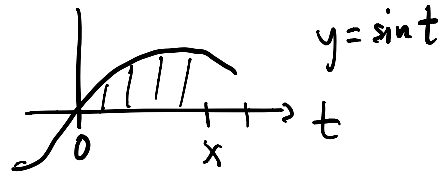
DEL 2. Om F är någon primitiv funktion till f, så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Bevis finns i Film13 tills idag.

Beräkna dessa derivator:

A. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt = \sin x$



B. $\dfrac{d}{du}\displaystyle\int_0^u \sin v\,dv = \sin u$

C. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^0 \sin t\,dt = \dfrac{d}{dx} - \int_0^x \sin t\,dt = -\sin x$

D. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \sin t\,dt = (\sin\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$S(x)$	$S'(x)$
$S(\sqrt{x})$	$S'(\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Bestämda och obestämda integraler

Observera att om f är integrerbar på $[a, b]$ så gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ är ett reellt tal.}$$

Ovanstående kallas en bestämd integral. Vi inför en obestämd integral också, utan gränser. Den har en annan betydelse:

$$\int f(x)\,dx \text{ betyder: en godtycklig primitiv funktion till } f.$$

Huvudsatsen

$$\int_4^9 \sqrt{x}\,dx \quad -$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \int_4^9 x^{1/2}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_4^9 = \frac{9^{3/2}}{3/2} - \frac{4^{3/2}}{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3}(27-8) = 38/3$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{2x} \quad ?$$

Huvudsatsen

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\arcsin x\Big]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \pi/6$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$x>0: \quad \frac{d}{dx}\Big(\ln|x| + C\Big) = \frac{1}{x}$$

$$x<0: \quad \frac{d}{dx}\Big(\ln|x| + C\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\ln(-x) + C\Big) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

Huvudsatsen

$$\int_{-9}^{9} x \cos x \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = 2\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 x}_{\frac{1-\cos 2x}{2}} \, dx = \ldots\ldots$$

Läxa till imorgon

Att göra:

Se film 14a Variabelsubstitution och 14b Partiell integration