SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 12

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Taylorpolynom

Taylors formel (sammanfattning). Om f är $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar i ett intervall som innehåller a och x så gäller att

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

där höger led kallas Taylorpolynomet av grad n till f kring $x = a$, ofta skrivet $p_n(x)$. Felet i approximationen ges av

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ för något c mellan x och a

OBS: Taylorpolynomet har samma värde och samma derivator upp till ordning *n* som funktionen i punkten *a*. Om *a* är 0 säger man ofta Maclaurinpolynom.

$f(x) = e^x$, vid $a=0$, grad 2

$$f(x) = e^x \approx \underbrace{1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2}_{\text{TP av grad 2 till } e^x \text{ kring } 0.} = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{p(x)}$$

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2} = 1,105 \quad |\text{Felet}| = \left|\frac{e^c}{3!} 0,1^3\right| \leq \frac{1}{3} \cdot 0.001 = \underline{0.000333\ldots}$$

Exempel på Taylors formel

Några standardutvecklingar. För x nära 0 gäller att

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

(Funktionerna kan utvecklas kring andra punkter också!)

Feltermen i linjär approximation

Linjär approximation. Om f är deriverbar i a så gäller att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a), \quad \text{för } x \text{ nära } a.$$

Taylors formel svarar på frågan vad ”nära” egentligen betyder!
Linjär approximation = Taylorpolynom av grad 1.

Feltermen i linjär approximation

Taylors formel för $n = 1$**:** Om f är 2 gånger deriverbar i ett intervall som innehåller både a och x så gäller att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

med ett fel som ges av $\dfrac{f''(c)}{2!}(x - a)^2$ för något c mellan a och x.

Taylors formel

Exempel. Bestäm TP av grad 1 till $f(x) = e^x$ kring punkten $x = 0$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $e^{0.1}$ dvs till $f(0.1)$. Analysera felet! Motsv för grad 2 och 3.

Grad 1: $e^x \approx 1 + x$ dvs $e^{0,1} \approx 1,1$

$$|\text{Felet}| = \left| \frac{e^c}{2!} 0.1^2 \right| \leq 0.01$$

Grad 2: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$; $e^{0,1} \approx 1,105$

$$|\text{Felet}| = \left| \frac{e^c}{3!} 0.1^3 \right| \leq \frac{1}{3} 0,001 = 0,000333\ldots$$

Grad 3

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \quad ;$$

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} = 1,105166\ldots$$

$$|\text{Felet}| = \left|\frac{e^c}{4!} 0,1^4\right| \leq \frac{2}{4!} 0.0001 \leq 0.00001$$

c mellan 0 och $0,1$

Exempel. Bestäm TP av grad 1 till $f(x) = \ln x$ kring punkten $x = 1$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\ln 1.1$ dvs till. Analysera felet! Motsv för grad 2 och 3.

$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \ldots$

$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2, \quad \ldots$

Grad 1 $\quad \ln x \approx f(1) + f'(1)(x-1) = x - 1$

$\ln 1.1 \approx 1.1 - 1 = 0.1 \; . \quad |\text{Felet}| = \left| \frac{-\frac{1}{c^2}}{2!} (1.1-1)^2 \right| \leq$

$= \frac{1}{2} \cdot 0.01 = 0.005$

Taylors formel

Grad 2.
$$\ln x \approx 0 + 1\cdot(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2$$
$$= x-1 - \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\ln 1.1 \approx 0,1 - \frac{0,01}{2} = 0.095$$

$$|\text{Felet}| = \left|\frac{2/c^3}{3!}(1.1-1)^3\right| \leq \frac{1}{3}0.001 = 0,00033\ldots$$

Grad 3.
$$\ln x \approx x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$
$$\ln 1,1 \approx \ldots$$

$$1 \quad c \quad 1,1$$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, ...

$x = 0$: 0, 1, 0, -1, 0, 1 ...

Exempel. Bestäm TP av grad 1 till $f(x) = \sin x$ kring punkten $x = 0$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\sin 0.1$ dvs till $f(0.1)$. Analysera felet! Motsv för grad 2,3,4,5.

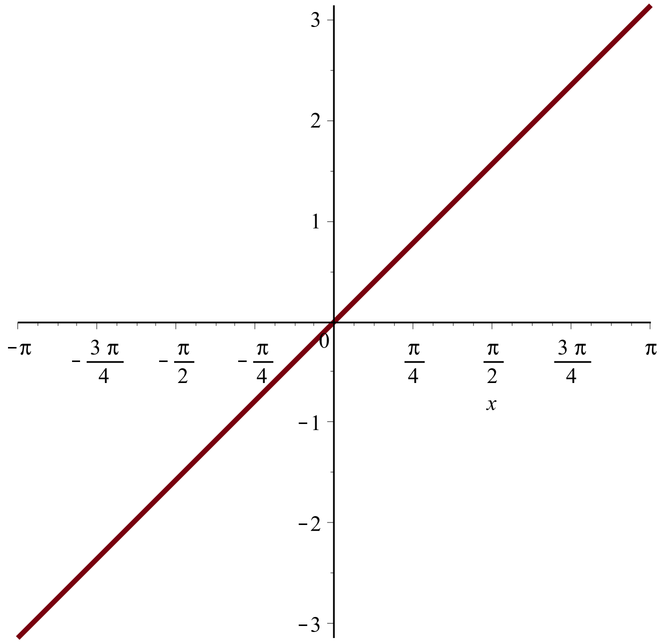
Grad 1. $\sin x \approx x$, $\sin 0.1 \approx 0.1$

$$|\text{Felet}| = \left|\frac{-\sin c}{2} 0.1^2\right| \leq 0.005$$

Grad 2. $\sin x \approx 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 = x$, $\sin 0.1 \approx 0.1$

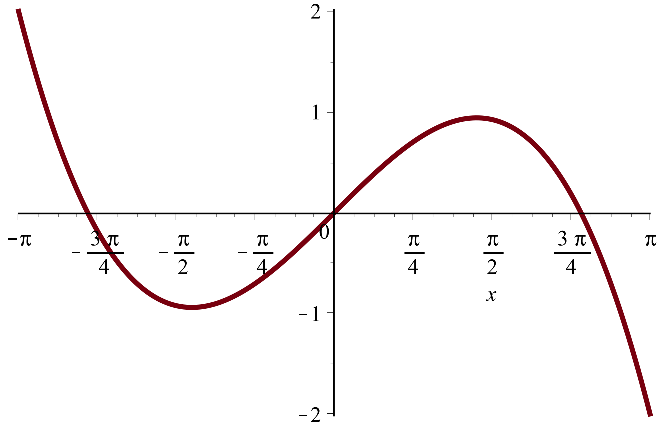
$$|\text{Felet}| = \left|\frac{-\cos c}{3!} 0.1^3\right| \leq \frac{1}{6} \cdot 0.001 = 0.00016\ldots$$

Taylors formel



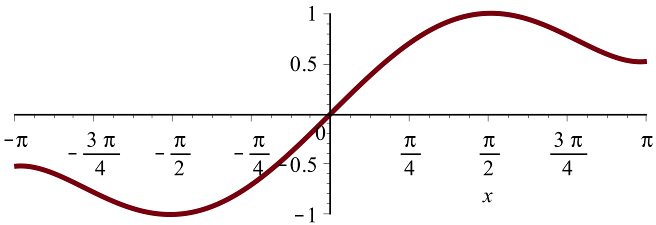
$$y = x$$

Taylors formel



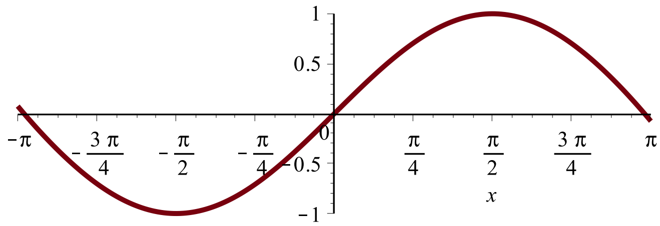
$$y = x - \frac{x^3}{3!}$$

Taylors formel



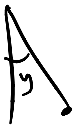
$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Taylors formel



$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Inte bara närmevärden! Även teori! Ex: Pendel beskrivs av diffekvation $y''(t) + k \sin y(t) = 0$. Svårlöst. Byt ut mot $y''(t) + ky(t) = 0$. Lätt och ungefär rätt.



3b1b: nåt med potentiella energin hos pendeln innehåller $R(1 - \cos\theta)$. Byt ut mot $R\theta^2/2$. Mycket lättare och ungefär rätt.

Osv

Entydighetssatsen. Om vi har ett polynom av grad *n* som approximerar *f* i närheten av en punkt *a* med ett fel av samma storleksordning som i Taylors formel, så måste polynomet vara Taylorpolynomet.

Exempel på användning: Bestäm TP av grad 2 till $f(x) = e^{2x}$ kring punkten $x = 0$.

$e^t \approx 1 + t + \frac{t^2}{2}$ t nära 0

$e^{2x} \approx 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} = 1 + 2x + 2x^2$ x nära 0

Beräkna med Taylors formel: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} =$

$\mathcal{O}(x^3)$ $\mathcal{O}(x^3)$ $\mathcal{O}(x^4)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\boxed{\frac{e^{c_1}}{3!}x^3} - \left(x + \frac{-\cos c_2}{3!}x^3\right) - \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos c_3}{4!}x^4\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \left(\frac{e^{c_1}}{3!} + \frac{-\cos c_2}{3!}\right)x^3 - \frac{\cos c_3}{4!}x^4}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + (\quad)x - (\quad)x^2\right) = 1$$

Taylor till ln x kring 1 grad 2

Ett svårare tentaproblem: Avgör om $|\ln(\frac{3}{2}) - \frac{3}{8}|$ är större eller mindre än 0.05.

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{i } 1: \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1$$

$$\ln x \approx 0 + 1\cdot(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\ln\frac{3}{2} \approx \frac{3}{2} - 1 - \frac{(\frac{3}{2}-1)^2}{2} = \frac{3}{8}$$

$$|\text{Felet}| = \left|\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\right| = \left|\frac{2/c^3}{3!}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3\right| \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24} \leq \frac{5}{100} = 0.05$$

Taylor igen

Bestäm ett närmevärde till $9^{1/3}$ med hjälp av andra gradens Taylorpolynom kring $x = 8$ till funktionen $x^{1/3} = f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x\,x^{2/3}}$$

$$f(8) = 2, \quad f'(8) = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}, \quad f''(8) = -\frac{2}{9\cdot 8\cdot 2^2} = -\frac{2}{9\cdot 32} = \frac{-2}{288}$$

$$x^{1/3} \approx 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$$

$$9^{1/3} \approx 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = \ldots = \frac{599}{288} = 2.07986\ldots$$

Taylor igen

Bestäm ett närmevärde till $9^{1/3}$ med hjälp av andra gradens Taylorpolynom kring $x = 8$ till funktionen $x^{1/3}$

Se boken kap 4.10 uppgift 9