Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

8. Arc — Inversa trigonometriska funktioner

Innehåll. Vi ska definiera arcus-funktionerna, eller de cyklometriska funktionerna som de också kallas, som är ett slags inverser, så gott det går, till de trigonometriska funktionerna.

Introduktion. Ofta vore det praktiskt att kunna säga vilken vinkel ett givet sinusvärde kommer ifrån. Tyvärr går det inte! För till varje sinusvärde hör oändligt många vinklar som har detta sinusvärde. Till exempel om $\sin v = 0$ så kan v vara vilken som helst av vinklarna $n\pi$, n heltal. Detta betyder att sinusfunktionen inte är inverterbar. Men om man inskränker definitionsmängden och bara tittar på sinus av vinklar i något lämpligt intervall, t ex $[-\pi/2, \pi/2]$, så finns det bara en vinkel till varje sinusvärde och då har vi en invers. Inversen till denna inskränkta sinusfunktion kallas arcussinus, eller $\arcsin$.

De vanliga trigonometriska funktionerna är inte inverterbara. De trigonometriska funktionerna $\sin$, $\cos$, $\tan$ och $\cot$ är periodiska och alltså inte injektiva. De saknar därför inverser.

Definition av $\arcsin$**.** Låt $S(v) = \sin v, \ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Observera att denna funktion inte är identisk med sinusfunktionen, eftersom sinusfunktionen är definierad för alla reella tal v, men den överensstämmer med sinusfunktionen för v i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Funktionen S är strängt växande och därför en bijektion mellan definitionsmängden och värdemängden $[-1, 1]$. Det följer att S är inverterbar. Inversen kallas arcussinus, eller $\arcsin$. Vi har alltså att $\arcsin t$ är den vinkel mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$ som har sinusvärde t. Eller på matematiska:

$$\arcsin t = v \iff t = \sin v \text{ och } -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Definitionsmängden till $\arcsin$ är $[-1, 1]$ och värdemängden är $[-\pi/2, \pi/2]$.

Definition av $\arccos$**.** Låt $C(v) = \cos v, \ 0 \leq v \leq \pi$. Observera att denna funktion inte är identisk med cosinusfunktionen, eftersom cosinusfunktionen är definierad för alla reella tal v, men den överensstämmer med cosinusfunktionen för v i intervallet $[0, \pi]$. Funktionen C är strängt avtagande och därför en bijektion mellan definitionsmängden och värdemängden $[-1, 1]$. Det följer att C är inverterbar. Inversen kallas arcuscosinus, eller $\arccos$. Vi har alltså att $\arccos t$ är den vinkel mellan 0 och π som har cosinusvärde t. Eller på matematiska:

$$\arccos t = v \iff t = \cos v \text{ och } 0 \leq v \leq \pi.$$

Definitionsmängden till $\arccos$ är $[-1, 1]$ och värdemängden är $[0, \pi]$.

Definition av $\arctan$**.** Låt $T(v) = \tan v,\ \ -\pi/2 < v < \pi/2$. Observera att denna funktion inte är identisk med tangensfunktionen, eftersom tangensfunktionen är definierad för alla reella tal $v \neq \pi/2 + n\pi$, men den överensstämmer med tangensfunktionen för v i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$. Funktionen T är strängt växande och därför en bijektion mellan definitionsmängden och värdemängden $(-\infty, \infty)$. Det följer att T är inverterbar. Inversen kallas arcustangens, eller $\arctan$. Vi har alltså:

$$\arctan t = v \Longleftrightarrow t = \tan v \text{ och } -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}.$$

Definitionsmängden till $\arctan$ är $(-\infty, \infty)$ och värdemängden är $(-\pi/2, \pi/2)$.

Med samma metod som ovan definierar man arcuscotangens.

Arcusfunktionernas derivator. Vi ska härleda arcusfunktionernas derivator. Vi har ju tidigare sett att en inversfunktion är deriverbar i punkter som motsvarar punkter där den ursprungliga funktionen är inverterbar och dess derivata är nollskild. Ofta är det enklast att ta fram derivatan genom implicit derivering av sambandet $f(f^{-1}(x)) = x$ som ju gäller för en funktion och dess invers i alla punkter där inversen är definierad.

Derivatan av arcustangens. För alla rella tal x gäller $\tan(\arctan x) = x$. Om vi deriverar detta samband med avseende på x får vi

$$(1 + \tan^2(\arctan x))\frac{d}{dx}\arctan x = 1$$

och här kan vi lösa ut den derivata vi söker och få

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Derivatan av arcussinus. För alla x mellan -1 och 1 gäller $\sin(\arcsin x) = x$. Om vi deriverar detta samband med avseende på x får vi

$$(\cos(\arcsin x))\frac{d}{dx}\arcsin x = 1$$

och här kan vi lösa ut den derivata vi söker och få

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Derivatan av arcuscosinus. För alla x mellan -1 och 1 gäller $\cos(\arccos x) = x$ Om vi deriverar detta samband med avseende på x får vi

$$-(\sin(\arccos x))\frac{d}{dx}\arccos x = 1$$

och här kan vi lösa ut den derivata vi söker och få

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$