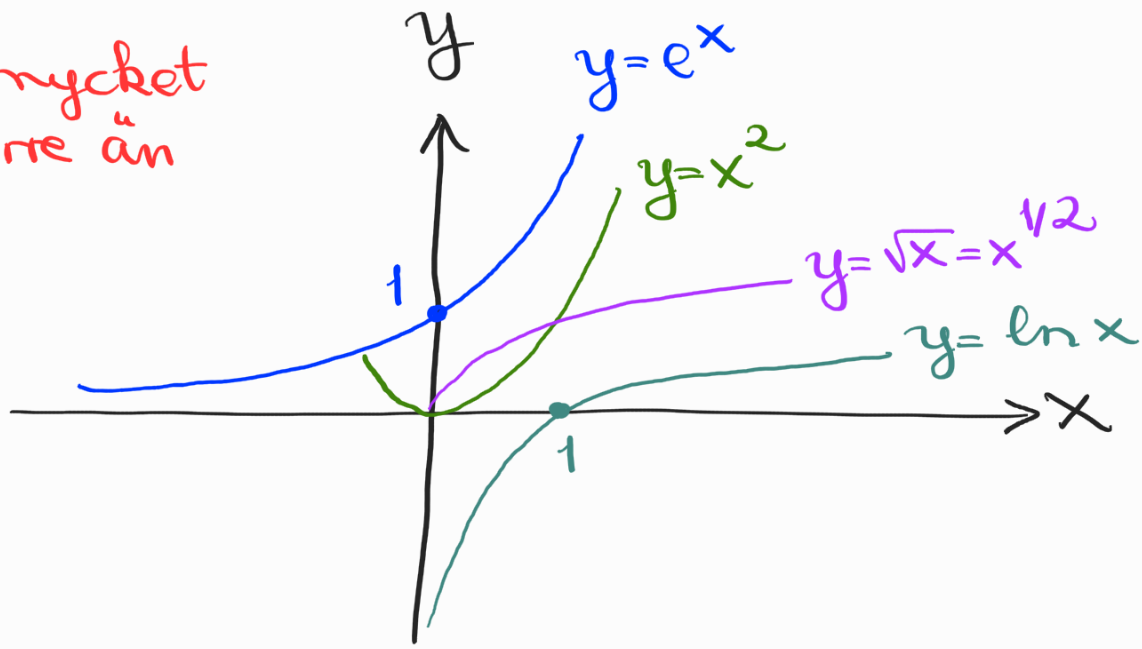
II) Snabbväxta funktioner

Erfarenhet För stora x gäller

godtycklig $\alpha > 0$

$$e^x \gg x^\alpha \gg \ln x$$

är mycket större än



Praktisk innebörd

(*)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$$ då e^x växer mycket snabbare än x^α

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = \infty$$

$k > 1$

(*) Mer generellt: $$\lim_{x \to \infty} \frac{k^x}{x^\alpha} = \infty$$

På samma sätt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

2014.10.20 #1 #KTH

(b) Beräkna $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ (*)

Knep Förkorta bråket med den dominerande termen x^2:

$$(*) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \left\{ \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} \right\}$$

Inse nu att l'Hospitals regel faktisk är bättre!

Alternativ metod

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$$ faktorisera

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{\underbrace{(x+3)(x-1)}}$$ konjugatregeln

motivering x^2+2x-3 har nollställen $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$ (enligt t.ex. pq-formeln)

$$\Rightarrow x^2+2x-3 = (x-x_1)(x-x_2) = (x-1)(x+3)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Svar

(c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5e^{-x}}{2x^2+\ln x} \quad (*)$$

Knep Förkorta bråket med den dominerande termen x^2:

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5e^{-x}}{x^2}}{2+\frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1-0+0}{2+0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Svar

Notera att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2 e^{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$ då x^2 växer mycket snabbare än $\ln x$