Envariabelanalys 2018-02-07 #11

Kandidater till (lokala) extrempunkter:

- kritisk punkt $f'(x)=0$
- singulär punkt $f'(x)$ inte definierad
- randpunkt till $\mathcal{D}(f)$

Ex. Finn alla lokala extrempunkter och extremvärden för
$f(x) = x^4 - 32|x-1|, \quad -3 \leq x \leq 3$

- singulära punkter: endast $x=1$
- kritiska punkter: $x=-2, x=2$
  $x<1$: $f(x) = x^4 + 32(x-1)$, $f'(x) = 4x^3 + 32 = 4(x^3+8) = 4(x+2)\overbrace{(x^2-2x+4)}^{>0}$
  $x>1$: $f(x) = x^4 - 32(x-1)$, $f'(x) = 4(x^3-8) = 4(x-2)\underbrace{(x^2+2x+4)}_{>0}$
- randpunkter: $x=-3, x=3$

tabell:

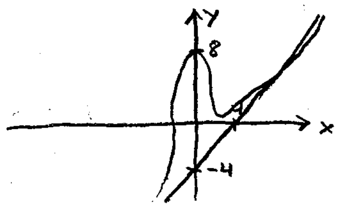
x	-3		-2		1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	odef	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-47	$\searrow$	-80	$\nearrow$	1	$\searrow$	-16	$\nearrow$	17
	lokalt max		lokalt min, globalt min		lokalt max		lokalt min		lokalt max, globalt max

tydligen: $\mathcal{R}(f) = [-80, 17]$

Hur många rötter har ekvationen $f(x)=0$? 3st enl. tabellen.

Om asymptoter, hur ser grafen ut "långt bort"?
räta linjer som en punkt på kurvan närmar sig då punkten "närmar sig ∞".

ex. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2+1} = x - 4 + \underbrace{\dfrac{-x+12}{x^2+1}}_{\to 0 \text{ då } x \to \pm\infty}$



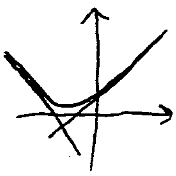
$f(x) - (x-4) \to 0$ då $x \to \pm\infty$
linjen $y=x-4$ är en sned asymptot till grafkurvan $y=f(x)$

Allmänt: om $f(x) - (ax+b) \to 0$ då $x \to +/-\infty$ är $y=ax+b$ en (sned) asymptot till $y=f(x)$ då $x \to +/-\infty$.

[För att finna dem: $y=ax+b$ är en sned asymptot då $x \to +/-\infty$
omm $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ och $\lim_{x\to\infty} (f(x)-ax) = b$

Ex. Finn (ev.) asymptoter till $y = \sqrt{x^2+rx+s}$ då $x \to \infty$ $\quad r, s$ konstanter

enl. ovan: 1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+rx+s}}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{r}{x}+\frac{s}{x^2}}}{x} = 1$, så $a=1$ om sned asymptot finns

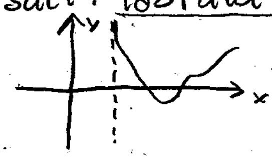


2) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+rx+s} - 1\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+rx+s-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+rx+s}+x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{rx+s}{x(\sqrt{1+\frac{r}{x}+\frac{s}{x^2}}+1)} = \dfrac{r}{2}$

så $y = x + \frac{r}{2}$ är en asymptot då $x \to \infty$ (pss $y = -(x+\frac{r}{2})$ då $x \to -\infty$)

Kurvan kan närma sig en linje på ett annat sätt: <u>lodräta asymptoter</u>.

$x=a$ är en lodrät asymptot till $y=f(x)$
omm $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ eller $\lim_{x\to a-} f(x) = +/-\infty$



Konvexitet

I x är $f(x)$ konkav uppåt om $f'(x)$ existerar och är växande.

——— || ——— nedåt ——— || ——— avtagande

x_0 är en <u>inflexionspunkt</u> omm
- $y=f(x)$ har en tangent i x_0
- konkaviteten växlar där

(andraderivatatestet för max/min)

Att skissa kurvor

kombinera info från extrempunkter, asymptoter, gränsvärden, konkavitet...

Ex. Skissa grafen för $f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2}$ $x\neq 0$; en jämn funktion ($f(-x)=f(x)$)

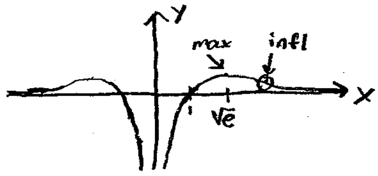
$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\ln|x|\cdot\frac{-2}{x^3}=\frac{1}{x^3}(1-2\ln|x|)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{e}\approx\pm 1{,}649$ $(\ln|x|=\frac{1}{2})$

$f''(x)=\frac{-3}{x^4}(1-2\ln|x|)+\frac{1}{x^3}\cdot\frac{-2}{x}=\frac{1}{x^4}(6\ln|x|-5)$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm e^{5/6}\approx\pm 2{,}301$ $(\ln|x|=\frac{5}{6})$

asymptoter $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$, $x=0$ är en lodrät asymptot

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0+$, $y=0$ är en sned asymptot

$f(x)=0$ då $x=\pm 1$ $f'(1)=1$



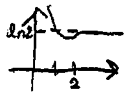
x	$\cdots 0$		1		$e^{\frac{1}{2}}$		$e^{\frac{5}{6}}$		"∞"
$f''(x)$	odef	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	odef	$+$	1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	odef	↗	0	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}}$	↘	0 ↖ gränsvärdet
		∩		∩		∩		∪	

Ex. Finn värdemängden för $f(x)=\underbrace{\ln\frac{x^2+4}{2x^2}}_{\ln(x^2+4)-\ln(2x^2)}+2\arctan\frac{x}{2}$, $x>0$

$f'(x)=\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x-\frac{1}{2x^2}\cdot 4x+2\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2x^2-2x^2-8+4x}{(x^2+4)x}=\frac{4(x-2)}{(x^2+4)x}$

x	"0"		2		"∞"
$f'(x)$	odef	$-$	0	$+$	
$f(x)$	"∞"	↘	$\frac{\pi}{4}$	↗	"$\pi-\ln 2$"

så $R(f)=[\frac{\pi}{2},\infty)$



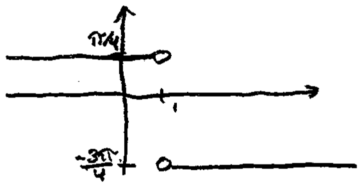
Ex. Finn $R(f)$, $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x$, $x\neq 1$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

så $f(x)$ konstant på $(-\infty,1)$ och på $(1,\infty)$

$f(0)=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\arctan(-1)-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}$



Varför? $\tan(\frac{\pi}{4}+\arctan x)=\frac{1+x}{1-1\cdot x}=\frac{1+x}{1-x}=\tan(\arctan\frac{1+x}{1-x})$

$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\tan\alpha=\tan\beta \Leftrightarrow \beta=\alpha+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

Ex. Visa olikheten $x\arctan x\leq\frac{1}{2}(x^2+\ln(1+x^2))$, alla $x\in\mathbb{R}$

dvs visa att $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+\ln(1+x^2))-x\arctan x\geq 0$

så en fråga om $R(f)$!

$f'(x)=x+\frac{1}{1+x^2}\cdot x-\arctan x-\frac{x}{x^2+1}=\underbrace{x-\arctan x}_{f'(x)=0 \text{ då } x=0}$ $f(0)=0$

$f''(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}\geq 0$ $(=0$ bara då $x=0)$

x		0	
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	↗	0	↗
$f(x)$	↘	0 min	↗

så $f(x)\geq 0$, alla $x\in\mathbb{R}$

$(=0$ bara för $x=0)$