



## Uppgifter att träna på i Modul 3

### REKOMMENDERADE UPPGIFTER UR KURSBOKEN CALCULUS

**Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus.** Kapitel 3.1: 3, 9, 23. Kapitel 3.2: 3, 5, 9, 15, 25, 29. Kapitel 3.3: 3, 5, 7, 9, 19, 21, 31, 33, 43, 51, 59. Kapitel 3.4: 1, 3, 5, 9, 11, 17, 23, 25. Kapitel 3.5: 1, 3, 5, 7, 13, 19, 21, 23, 35. Kapitel 3.7: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 29. Kapitel 18.6: 1, 3, 5, 7.

Om uppgifterna nedan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken som listas ovan. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

### SKARPA ÖVNINGSUPPGIFTER

**Uppgift 1.** Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

A.  $\ln 16 - \ln 8$       B.  $\frac{e^{2x}}{e^x} \cdot e^{-x}$       C.  $\ln x^2 - 2 \ln x$

**Uppgift 2.** Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

A.  $\ln tx - \ln x$       B.  $\arctan 1$       C.  $\arcsin \frac{1}{2}$

**Uppgift 3.** Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

A.  $\arccos \frac{1}{2}$       B.  $\arccos 0$       C.  $\lim_{u \rightarrow \infty} \arctan u$

**Uppgift 4.** Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

A.  $\ln e^t$       B.  $e^{\ln t}$       C.  $\ln e$

**Uppgift 5.** Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

A.  $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$       B.  $\sin(\arcsin \frac{1}{3})$       C.  $\cos(\arccos \frac{1}{3})$

**Uppgift 6.** Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

A.  $\sin(\arccos \frac{1}{3})$       B.  $\tan(\arctan x)$       C.  $\arctan(\tan \frac{5\pi}{4})$

**Uppgift 7.** Derivera med avseende på  $x$  och ange för vilka  $x$  derivatan existerar.

A.  $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$   
B.  $f(x) = \ln \sqrt{1+x^2}$   
C.  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$   
D.  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$   
E.  $f(x) = x \arccos x$   
F.  $f(x) = x \ln x - x$   
G.  $f(x) = \ln |x|$   
H.  $f(x) = e^{\arcsin x}$

**Uppgift 8.** Låt  $f(x) = \arctan x$ . Bestäm en ekvation för tangenten till funktionskurvan  $y = f(x)$  i origo. Använd linjär approximation kring  $x = 0$  för att ge ett närmevärde till  $\arctan \frac{1}{5}$ .

**Uppgift 9.** Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan  $y = e^x$  i den punkt på kurvan där  $x$ -koordinaten är 0. Bestäm med hjälp av linjär approximation ett närmevärde till  $e^{1/10}$ .

**Uppgift 10.** Avgör om  $f(x) = x - \arctan x$  är (strängt) växande eller avtagande. Har  $f$  något största eller minsta värde? Bestäm dessa i så fall.

**Uppgift 11.** Låt  $f(t) = t - \arcsin t$ . Har  $f$  något största eller minsta värde? Bestäm dessa i så fall!

**Uppgift 12.** Hur många lösningar har ekvationen  $e^x - \arccos x = 0$ ?

**Uppgift 13.** Hur många lösningar har ekvationen  $\arcsin x = \arccos x$ ?

**Uppgift 14.** Lös dessa differentialekvationer:

A.  $y'(t) + 17y(t) = 0$

B.  $y'(t) + 17y(t) = 1$

C.  $y'(t) + 17y(t) = e^t$

**Uppgift 15.** Lös dessa differentialekvationer:

A.  $y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = 0$

B.  $y''(t) + 2y'(t) + 17y(t) = 1$

C.  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t + 1$

D.  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$

**Uppgift 16.** Lös dessa initialvärdesproblem:

A.  $y'(t) + 15y(t) = 0$ , med initialvillkoret  $y(0) = 10$

B.  $y''(t) + 2y'(t) + 17y(t) = 1$  med initialvillkoren  $y(0) = 1/17$  och  $y'(0) = 4$

**Uppgift 17.** Avgör om dessa funktioner är inverterbara och bestäm inversen om det går. Bestäm också inversens definitions- och värdemängd.

A.  $f(x) = |x + 1| + 2$

B.  $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$

#### FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A.  $\ln 2$

B. 1

C. 0

2A.  $\ln t$  (förutsatt att både  $t$  och  $x$  är positiva)

B.  $\pi/4$

C.  $\pi/6$

3A.  $\pi/3$

B.  $\pi/2$

C.  $\pi/2$

4A.  $t$

B.  $t$

C. 1

5A.  $-1/2$

B.  $1/3$

C.  $1/3$

6.A.  $2\sqrt{2}/3$

B.  $x$

C.  $-\pi/4$

7. A.  $\frac{4x^2e^{x^2}-2e^{x^2}}{4x^2}$  (kan förenklas),  $x \neq 0$

B.  $\frac{x}{1+x^2}$  för alla  $x$

C.  $-\frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \neq 0$

D.  $\frac{1}{1-x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $0 < x < 1$

E.  $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $-1 < x < 1$

F.  $\ln x$ ,  $x > 0$

G.  $\frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$

H.  $\frac{e^{\arcsin x}}{1-x^2}$ ,  $-1 < x < 1$

8. Tangent:  $y = x$ .  $\arctan \frac{1}{5} \approx \frac{1}{5}$

9. Tangent:  $y = 1 + x$ .  $e^{1/10} \approx 1 + \frac{1}{10} = 1.1$

10.  $f$  är strängt växande på hela  $\mathbf{R}$  (derivatan är positiv överallt utom i origo där den är noll). Största och minsta värde saknas.

11. Funktionen  $f$  är kontinuerlig på hela sin definitionsmängd, som är det slutna begränsade intervallet  $[-1, 1]$  så den har ett största och ett minsta värde. Derivatan är negativ på det inre av intervallet utom i en punkt, origo, där den är noll, så  $f$  är strängt avtagande. Därmed är största värdet  $f(-1) = -1 + \pi/2$  och minsta värdet  $f(1) = 1 - \pi/2$

12. En. (Derivatan är positiv så funktionen är strängt växande och av detta följer att det finns högst en lösning. Minst en lösning följer av satsen om mellanliggande värden för funktionen  $f(x) = e^x - \arccos x$ . Obs att ekvationen bara är relevant för  $x$  mellan  $-1$  och  $1$ .)

13. En. Se ledtråd till förra uppgiften.

14. A.  $y(t) = Ce^{-17t}$ ,  $C$  godt reellt tal.

B.  $y(t) = \frac{1}{17} + Ce^{-17t}$ ,  $C$  godt reellt tal.

C.  $y(t) = \frac{1}{18}e^t + Ce^{-17t}$ ,  $C$  godt reellt tal.

15. A.  $y(t) = Ae^{5t} + Be^{3t}$ ,  $A, B$  godt reella tal.

B.  $y(t) = \frac{1}{17} + e^{-t}(A \cos 4t + B \sin 4t)$ ,  $A, B$  godt reella tal.

C.  $(At + B)e^{-t} + t - 1$ ,  $A, B$  godt reella tal.

D.  $(At + B)e^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}$ ,  $A, B$  godt reella tal. (obs resonans)

16. A.  $y(t) = 10e^{-15t}$

B.  $y(t) = e^{-t} \sin 4t + \frac{1}{17}$

17. A. Ej inverterbar (t ex är funktionsvärdena i 0 och  $-2$  lika, så funktionen är inte injektiv)

B. Inversen ges av  $f^{-1}(x) = e^{x-2} - 1$ . Inversens definitionsmängd är alla tal och inversens värdemängd är alla tal större än  $-1$ .