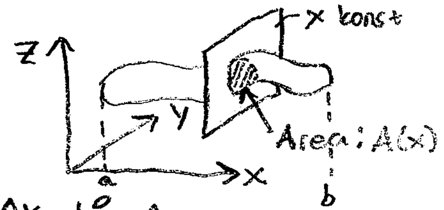
Envariabelanalys 2018-02-20 #17

Idag om användning av integraler för att beräkna volymer m.m.

- Om skärningen mellan planet $x=$ konst och en kropp har arean $A(x)$ är volymen mellan x och $x+\Delta x$:

$$\Delta V = A(x)\Delta x + \text{"mindre"}$$

avtar snabbare än Δx då $\Delta x \to 0$



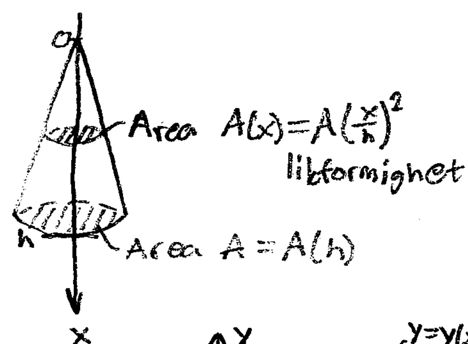
vi skriver $dV = A(x)dx$ "oändligt tunn skiva"

så (alt. m. R-summa) volymen $V = \int dV = \int_a^b A(x)dx$

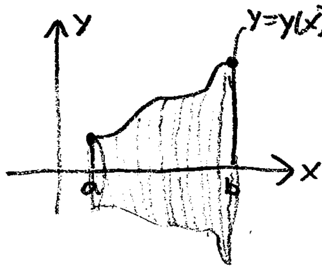
ex. Volymen av en kon m. basarea A, höjd h

$dV = A\left(\frac{x}{h}\right)^2 dx$

Volymen $V = \int dV = \int_0^h A\left(\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{A}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{Ah}{3}$



Ett viktigt fall: rotationsvolymer, området $0 \leq y \leq y(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras kring x-axeln

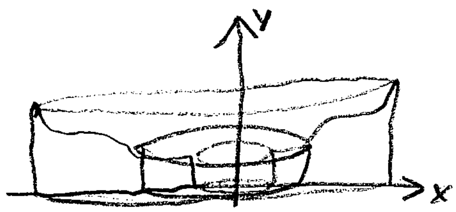


Volymen? $A(x) = \pi y(x)^2$

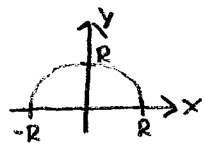
så $V_x = \pi \int_b^a y(x)^2 dx$

om rotation kring y-axeln: $dV = \overbrace{2\pi x\, y(x)}^{\text{cylinderns mantelarea}} \cdot dx$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\, y(x)dx \qquad b > a \geq 0$$



Ex volymen för ett klot med radie R



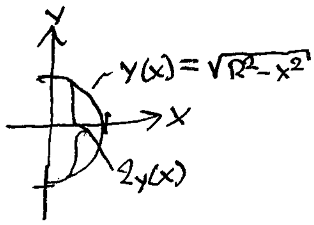
1) $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$

$V_x = \pi \int y(x)^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2)dx =$

$= 2\pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - 0\right) = \frac{4\pi}{3}R^3$

2) $V_y = \int_0^R x\, 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 4\pi\left[-\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R =$

$= 4\pi\left(0 - \left(-\frac{1}{3}R^3\right)\right) = \frac{4\pi}{3}R^3$

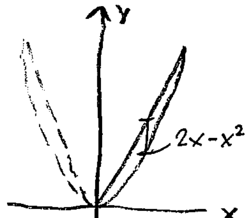


ex Volymen av en "$\frac{1}{x}$-tratt" från 1 till ∞: ($\frac{1}{x}$ roterad kring x-axeln)

$$V_x = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \pi\left(0 - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \pi$$

ex. Vad blir volymen då området $x^2 \le y \le 2x$, $0 \le x \le 2$ roteras kring y-axeln?

$\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$, $0 \le y \le 4$

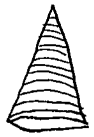


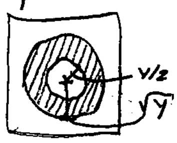
1) med skal: $V = 2\pi\int x(2x-x^2)dx = 2\pi\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$

$(dV = 2\pi x(2x-x^2)dx)$ $\quad = 2\pi\left(\frac{16}{3} - 4\right) = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$ V.e.

2) med skivor vinkelrät mot y-axeln

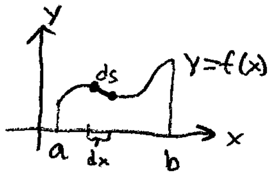
$dV = \pi\left(\sqrt{y}^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)dy \quad V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \pi\left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$ V.e.





Båglängder, 7.3

För att beräkna längden av en funktionsgraf $y = f(x)$



$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$

"dvs" $\quad ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$

båglängden: $s = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$

ex. längden av en halvcirkel, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$

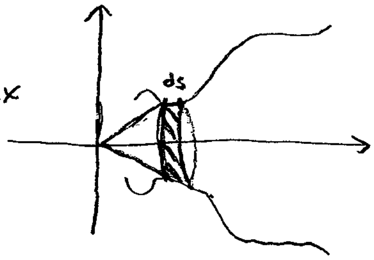
$$s = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}\,dx \quad \begin{cases} t = \frac{x}{R} \\ dx = R\,dt \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline R & 1 \\ -R & -1 \end{array}$$

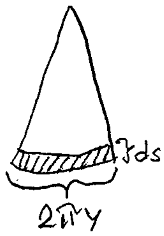
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} R\,dt = R\left[\arcsin t\right]_{-1}^{1} = R\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi R$$

generaliserad

Rotationsytors area $\quad dS = 2\pi y\,ds = 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$

$$S = \int dS = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$





ex. arean av "$\frac{1}{x}$-tratten":

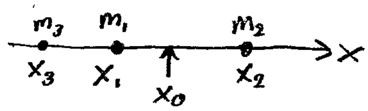
$$A = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}_{> \frac{1}{x} > 0}\,dx$$

, divergent, ty $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ är divergent och mot ∞

så trattens area är oändlig!

Lite om masscentrum och centroider
(tyngdpunkter)

Moment från en massa m_i i punkten x_i
m.a.p. x_0 : $m_i(x_i - x_0)$



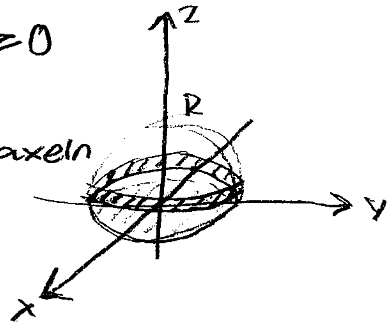
totalt: $\sum_i m_i(x_i - x_0) = \sum_i m_i \cdot x_i - x_0 \sum_i m_i$

masscentrum är det x_0 som ger jämvikt, $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \rightsquigarrow \bar{x} = \dfrac{\int x\,dm}{\int dm}$ kont. massfördelning

Speciellt. Centroiden för en kurva/yta/kropp: masscentrum då densiteten är konstant.

ex. centroiden för en halvsfär: $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$

$(dm = dS)$ av symmetriskäl $\bar{x} = \bar{y} = 0$



ytan fås då $x = \sqrt{R^2 - z^2}$ roteras ett varv kring z-axeln

$dS = 2\pi x(z)\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dz =$

$= 2\pi\sqrt{R^2 - z^2}\underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}}\right)^2}}_{\frac{R^2}{R^2 - z^2}}\,dz = 2\pi R\,dz$, så $\bar{z} = \dfrac{\int z\,dS}{\int dS} =$

$$= \frac{\int_0^R z \cdot 2\pi R\,dz}{\int_0^R 2\pi R\,dz} = \frac{2\pi R \cdot \frac{R^2}{2}}{2\pi R \cdot R} = \underline{\underline{\frac{R}{2}}}$$