Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 17: Tillämpningar av integraler

Innehåll. Tillämpningar av integraler.

Introduktion. Tillämpnigar av integraler bygger ofta på idén om Riemannsummor: om man räknar på någonting som naturligt är en summa av termer som var och en är ett funktionsvärde gånger längden på ett litet intervall, så leds man till en integral. Area under en kurva är det första exemplet, men det finns många fler. I det här avsnittet går vi igenom några sådana, t ex rotationsvolym och båglängd.

Areor. Om vi vill beräkna arean mellan funkitonskurvan $y = f(x)$ och x-axeln på intervallet $[a, b]$, så ges denna area av integralen $\int_a^b f(x)\,dx$, om f är positiv och integrerbar. Detta följer direkt av integralens definition. På liknande sätt får vi att arean mellan funktionskurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ ges av $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

Exempel. Vi ska bestämma arean av det begränsade område som helt innesluts av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$. Skärningspunkterna mellan kurvorna fås då $\sqrt{x} = x^2$, dvs $x = 0$ och $x = 1$. På intervallet $0 \leq x \leq 1$ innesluter kurvorna ett begränsat område. Arean av detta får vi med formeln ovan som

$$\int_0^1 |\sqrt{x} - x^2|\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = [x^{3/2}/(3/2) - x^3/3]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Rotationsvolym runt x-axeln. Om vi vill beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då arean mellan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, och x-axeln roterar runt x-axeln så ges denna, om f är kontinuerlig, av

$$\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx.$$

Detta kan man se om man delar in intervallet $[a, b]$ i små delintervall genom en partition $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, väljer en punkt x_i^* i varje delintervall och bildar Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_i^*))^2 \Delta x_i.$$

Varje term i Riemannsumman ger då en approximation av rotationsvolymen som genereras på ett delintervall och hela summan ger en approximation av hela volymen. Genom val av finare och finare partitioner får man bättre och bättre approximationer och man får då en följd av Riemannsummor som konvergerar mot integralen ovan.

Exempel. Vi ska bestämma rotationsvolymen som genereras då $y = \sin x$ på intervallet $[0, \pi]$ roteras runt x-axeln. Volymen fås enligt formeln ovan som

$$\int_0^\pi \pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Rotationsvolym runt y-axeln. Om vi vill beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då arean mellan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, och x-axeln roterar runt y-axeln så ges denna, om f är kontinuerlig, av

$$\int_a^b 2\pi x f(x) \, dx.$$

Detta kan man se om man delar in intervallet $[a, b]$ i små delintervall genom en partition $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, väljer en punkt x_i^* i varje delintervall och bildar Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Varje term i Riemannsumman ger då en approximation av rotationsvolymen som genereras på ett delintervall och hela summan ger en approximation av hela volymen. Genom val av finare och finare partitioner får man bättre och bättre approximationer och man får då en följd av Riemannsummor som konvergerar mot integralen ovan.

Exempel. Vi ska bestämma rotationsvolymen som genereras då $y = \sin x$ på intervallet $[0, \pi]$ roteras runt y-axeln. Volymen fås enligt formeln ovan som

$$\int_0^\pi 2\pi x \sin x \, dx = 2\pi[-x \cos x]_0^\pi - 2\pi \int_0^\pi - \cos x \, dx = 2\pi^2.$$

Båglängd. Om vi vill beräkna längden av funktionskurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, så ges denna, om f är kontinuerligt deriverbar, av

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Detta kan man se om man delar in intervallet $[a, b]$ i små delintervall genom en partition $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ och bildar summan

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} (x_i - x_{i-1}).$$

Varje term i summan ger då via Pythagoras sats en approximation av längden av kurvan på ett delintervall och hela summan ger en approximation av hela längden av kurvan. Av medelvärdessatsen följer att det i varje delintervall finns en punkt c_i så att

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i).$$

Så summan ovan som approximerar längden på kurvan kan alltså skrivas som

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1+f'(c_i)^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Detta är en Riemannsumma till inegralen

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

och eftersom integranden är kontinuerlig så konvergerar Riemannsumman mot integralen när antalet delintervall går mot oändligheten samtidigt som längden av alla delintervallen går mot 0.

Exempel. Vi ska bestämma längden av kurvan $y = x^{3/2}$ på intervallet $[0, 1]$. Längden fås enligt formeln ovan som

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13^{3/2}}{8} - 1\right).$$