2018.01.08 #5 #KTH

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \quad \text{konv./div.?}$$

Lösning Försök

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \geqslant \int_2^\infty \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^3}}}\,dx$$

större nämnare ger mindre kvot

$$= \int_2^\infty \frac{1}{(x^3)^{1/2}}\,dx$$

$$= \int_2^\infty \underbrace{\frac{1}{x^{3/2}}\,dx}$$

$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerar om $p>1$, divergerar om $p \leqslant 1$ (mot ∞)

a tal $a>0$

$p=\frac{3}{2}>1$

konvergerar enligt p-testet

Vi kan dock inte dra någon slutsats från dessa beräkningar.

Användbar sats relevant för $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Jämförelsesatsen på gränsvärdesform

Låt f, g vara kontinuerliga, icke-negativa funktioner för alla $x \geq a$.

Om $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M > 0$

reellt tal (inte $\pm\infty$)

så är $\int_a^\infty f(x)\,dx$ och $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ekvikonvergenta, dvs. antingen konvergerar båda integraler eller så divergerar båda integraler. $\boxtimes$

Tillbaka till uppgiften:

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \quad \text{där } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$$

Betrakta

$$\int_2^\infty \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}_{\text{välj själv!}}\,dx \quad \text{där } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Studera nu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}}}$$

förkorta med x^3

$$= \sqrt{1} = 1 > 0$$

Slutsats

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \text{ konvergerar}$$

(enligt p-testet)

$$\Rightarrow \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \text{ konvergerar,}$$

enligt

Jämförelsesatsen på gränsvärdesform

$\boxtimes$