Steg 2 Sätt in gränserna:

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$$

$$= \Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \tfrac{1}{2}\ln|x-2|}_{} \Big]_3^\infty \quad (*)$$

skriv om med $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln(a^c) = c \cdot \ln a$

$$\tfrac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \tfrac{1}{2}\ln|x-2|$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| - \tfrac{1}{2}\cdot 2\ln|x-1| + \tfrac{1}{2}\ln|x-2|$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln|x-1|^2 + \tfrac{1}{2}\ln|x-2|$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\ln|x| + \ln|x-2| - \ln|x-1|^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right|$$

$$(*) = \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-2x}{x^2-2x+1} \right| \right]_3^{\infty}$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-2x}{x^2-2x+1} \right| \right]_3^{R}$$

$$= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2} \ln \left| \underbrace{\frac{R^2-2R}{R^2-2R+1}}_{= \frac{1-\frac{2}{R}}{1-\frac{2}{R}+\frac{1}{R^2}} \to \frac{1-0}{1-0+0} = 1 \text{ då } R \to \infty} \right| - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{4}\right)$$

bra tecken för att vi kan förkorta bråket med dominerande term R^2

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}$$

Svar

Anm. Det står $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$ i facit.

Motivering: $-\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$

Frivillig omskrivning: $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \ln \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} = \ln \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\boxtimes$

! Tabell med ansatser vid PBU

Vill beräkna $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

$f(t) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (polynom / polynom) med $\deg p < \deg q$	Ansatz
$\frac{\cdots}{(x-a)(x-b)}$ $a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
$\frac{\cdots}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
$\frac{\cdots}{(x-a)(x-b)^2}$ $a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$
knepigt & ovanligt fall $\frac{\cdots}{(x-a)\underbrace{(x^2+bx+c)}_{\text{saknar reella nollställen och kan inte faktoriseras vidare}}}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{\overbrace{Bx+C}^{\text{polynom av grad 1}}}{\underbrace{x^2+bx+c}_{\text{polynom av grad 2}}}$

Varning Räcker inte med $\frac{B}{x^2+bx+c}$ i allmänhet!

2013.03.06 #4 #LiU

Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2}\,dx$.

Lösning Steg 1 Använd PBU:

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2} = \frac{2x^2-2x+1}{x^2\underbrace{(x^2+1)}}$$

$x^2=(x-0)^2$
0 är en dubbelrot
till $x^4+x^2=0$
FALL 2
i tabellen

går ej att
faktorisera vidare
FALL 4
i tabellen

Ansats $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

Läxa $\dfrac{-2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2x+1}{x^2+1}$

(tänk ekvationssystem)