Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 15: Partialbråksuppdelning

Innehåll. Partialbråksuppdelning

Introduktion. Genom att sätta på gemensam nämnare får vi att

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{4x-5}{x^2-3x+2}.$$

Partialbråksuppdelning är att göra den här processen baklänges, dvs att givet det mer komplicerade bråket $\frac{4x-5}{x^2-3x+2}$ skriva det som en summa av enklare partialbråk, dvs som $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2}$. Detta är användbart vid integration av rationella funktioner. Det är svårt att på rak arm se en primitiv funktion till det komplicerade bråket, men det är lätt att hitta primitiva funktioner till partialbråken.

Partialbråksuppdelning. Givet en rationell funktion $p(x)/q(x)$ där p och q är polynom och graden för q är större än graden för p. Börja med att faktorisera nämnaren q så långt som möjligt. Om t ex q har grad 3 och nollställena är a, b och c så gäller enligt faktorsatsen att $q(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$. Nu är målet att skriva

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c},$$

för några konstanter A, B och C. Hur ska man välja dessa så att det stämmer? Man gör liknämigt i högerledet och sedan jämför man täljaren i det bråk man då får med $p(x)$ och bestämmer A, B och C så att det blir lika. Vi ska se i några exempel hur man gör.

Exempel. Vi vill beräkna integralen $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ genom att partialbråksuppdela integranden. Vi börjar med att kontrollera att nämnarens grad är större än täljarens. Sedan faktoriserar vi nämnaren. Med hjälp av pq-formeln får vi $x^2 - 5x + 6 = 0$ om och endast om $x = 2$ eller $x = 3$. Enligt faktorsatsen för polynom får vi nu att $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Vi vill nu hitta konstanter A och B så att

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Om vi gör liknämigt till höger, så får höger led samma nämnare som vänster led och likheten följer då om täljarna är lika. Det betyder att vi ska välja A och B så att $1 = A(x-3) + B(x-2)$. Det betyder att $0 = A + B$ (eftersom vänster led inte har några x) och $1 = -3A - 2B$. Detta gäller om och endast om $A = -1$ och $B = 1$.

Alltså har vi att

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

och därför får vi att

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C.$$

Detta ansättningsförfarande fungerar då nämnaren kan faktoriseras fullständigt i linjära faktorer utan multiplicitet. Om nämnaren har en dubbelrot måste man göra en annorlunda ansättning, liksom om nämnaren har andragradsfaktorer som inte har reella lösningar och därför inte kan faktoriseras reellt ytterligare. Ett par exempel illustrerar hur man gör i dessa fall.

Exempel. Vi vill beräkna integralen $\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,dx$ genom att partialbråksuppdela integranden. Vi börjar med att kontrollera att nämnarens grad är större än täljarens. Sedan faktoriserar vi nämnaren. Vi får $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$. Ansättningen för partialbråksuppdelning är nu denna: vi vill hitta konstanter A, B och C så att

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Om vi gör liknämigt till höger, med minsta gemensamma nämnare, så får höger led samma nämnare som vänster led och likheten följer då om täljarna är lika. Det betyder att vi ska välja A, B och C så att $1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$. Detta gäller om och endast om $A = 1$ och $B = -1$ och $C = 1$. Alltså har vi att

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

och därför får vi att

$$\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Exempel. Vi vill beräkna integralen $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$ genom att partialbråksuppdela integranden. Vi börjar med att kontrollera att nämnarens grad är större än täljarens. Sedan faktoriserar vi nämnaren. Vi får $x^3+x = x(x^2+1)$. Ansättningen för partialbråksuppdelning är nu denna: vi vill hitta konstanter A, B och C så att

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Om vi gör liknämigt till höger, med minsta gemensamma nämnare, så får höger led samma nämnare som vänster led och likheten följer då om täljarna är lika. Det betyder att vi ska välja A, B och C så att $1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$. Detta gäller om och endast om $A = 1$ och $B = -1$ och $C = 0$.

Alltså har vi att

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

och därför får vi att

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Exempel. Hur gör man om nämnarens grad inte är större än täljarens? Om vi t ex vill integrera $\frac{x^2}{x^2-1}$ så gör vi inte någon ansättning för partialbråksuppdelning, utan vi gör först polynomdivision och får

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}.$$

Det sista bråket kan vi göra partialbråksuppdelning på och vi får med metoden vi lärde oss i inledningen att

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}.$$

Sätter vi ihop detta så får vi att

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right)\,dx = x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$