SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 14

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

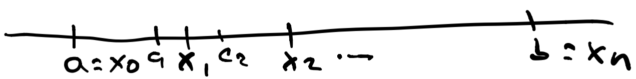
Integraler

En begränsad f på $[a, b]$ är **integrerbar** om det finns exakt ett tal som ligger mellan alla översummor och alla undersummor, med andra ord om skillnaden mellan översumma och undersumma kan fås hur liten som helst genom val av tillräckligt fin partition.

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f integrerbar på $[a, b]$

Obs. Om f är integrerbar, tänk **Riemannsumma:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n.$$



Integraler

Det går att räkna ut integraler med hjälp av (gränsvärden av) Riemannsummor. **Exempel:** Om vi delar in $[0, 1]$ i n delintervall där vi tar funktionsvärdet i högra ändpunkten får vi:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$\left[x^3/3\right]_0^1 = 1/3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Huvudsatsen

Analysens Huvudsats (the fundamental theorem of calculus).

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Då gäller:

DEL 1. Funktionen $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ är en primitiv funktion till f, dvs $S'(x) = f(x)$, för x mellan a och b.

DEL 2. Om F är någon primitiv funktion till f, så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Huvudsatsen

A. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^{-1/2}\,dx = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 = \frac{4^{1/2}}{1/2} - \frac{1^{1/2}}{1/2} = 2$

B. $\displaystyle\int_{-2}^2 \sin x\,dx = 0$

C. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(e^{3x} + x^2\right) dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{e^{-3}}{3} + \frac{1}{3}$

$= \ldots$

$\displaystyle\frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{e^{-3}}{3} + \frac{-1}{3}\right)$

Huvudsatsen

Beräkna: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{1} = 1$$

Integrerbar? Primitiv?

Ja

Inte utan integraltecken

Är $f(x) = e^{x^2}$ integrerbar på $[0, 1]$? Kan du hitta en primitiv?

Samma frågor för

$$r(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 1/2 & \text{om } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nej

Integrationstekniker

Eftersom det kan vara svårt att på rak arm komma på primitiva funktioner, så finns ett antal tekniker för att göra det. De viktigaste integrationsteknikerna är **variabelsubstitution** och **partiell integration**. För rationella funktioner är också **partialbråksuppdelning** bra att kunna.

Variabelsubstitution i integraler kommer från kedjeregeln för derivator. Partiell integration från produktregeln.

Variabelsubstitution.

$$\int_a^b \underbrace{f(g(x))g'(x)}_{\frac{d}{dx}F(g(x))} \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

Villkor: g är kontinuerligt deriverbar och f är kontinuerlig på g:s värdemängd (när x varierar i $[a, b]$)

Bevis: Kedjeregeln för derivator Finns F s.a $F' = f$

$$VL = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = H.L.$$

Exempel på variabelsubstitution

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \ln x & x=e \text{ ger } u=1 \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} & x=1 \text{ ger } u=0 \\ du = \frac{1}{x}dx & \end{array} \right\} = \int_0^1 u^2\,du = \left[u^3/3 \right]_0^1 = 1/3$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l|l} 1+x^2 = u & x\,dx = \frac{1}{2}du \\ 2x = \frac{du}{dx} & x=0 \text{ blir } u=1 \\ 2x\,dx = du & x=\sqrt{3} \text{ blir } u=4 \end{array} \right\}$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_1^4 = 2-1 = 1.$$

Exempel på variabelsubstitution

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x\,dx = du \end{cases}\right]$$

$$= \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

C godt. konst.

Partiell integration.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Villkor: F och g har kontinuerliga derivator och $F' = f$

Bevis: Produktregeln för derivator på $F(x)g(x)$

Exempel på partiell integration

$$\int_0^{\ln 3} xe^x\,dx \overset{\text{p.i.}}{=} \Big[xe^x\Big]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} 1\cdot e^x\,dx =$$

$$= (\ln 3)\cdot 3 - \Big[e^x\Big]_0^{\ln 3} = \underline{\ln 27 - 2}.$$

$$\int_0^{\pi/3} x\cos x\,dx \overset{\text{p.i.}}{=} \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} 1\cdot \sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} - 1 = \underline{\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}}.$$

Exempel på partiell integration

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C$$

C godt. konst.

Vilken metod funkar här då?

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx \overset{\text{var.sub.}}{=} \left\{ \begin{array}{l|l} t = \ln x & dt = \frac{1}{x}dx \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} & \begin{array}{l} x = e \text{ ger } t = 1 \\ x = e^2 \text{ ger } t = 2 \end{array} \end{array} \right\} = \int_1^2 \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= \int_1^2 t^{-3}\,dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = 3/8$$

$$\int_1^e x^3 \ln x\,dx \overset{\text{p.i.}}{=} \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{e^4}{4} - \int_1^e \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{e^4}{4} - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \underline{\frac{3e^4+1}{16}}.$$

Vilken metod funkar här då?

$$\int_0^2 x\ln(x^2+1)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ \frac{du}{dx} = 2x \\ du = 2x\,dx \end{array}\ \middle|\ \begin{array}{l} x=0 \text{ ger } u=1 \\ x=2 \text{ ger } u=5 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int_1^5 \ln u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u\ln u - u\right]_1^5 = \frac{1}{2}5\ln 5 - \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5\ln 5}{2} - 2$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{3+12x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{1/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \end{array}\ \middle|\ \begin{array}{l} x=0 \text{ ger } t=0 \\ x=1/2 \text{ ger } t=1 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{3\cdot 2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{6}\left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\cdot 0 = \frac{\pi}{24}.$$

$$(2x)^2 = 4x^2$$

Läxa

Att göra:

Träna på variabelsubstitution och partiell integration. Läs vid behov i boken eller i mina teori-pdf:er.

Se Film 15 Partialbråksuppdelning

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\arctan 2x\Big]_0^{1/2} =$$