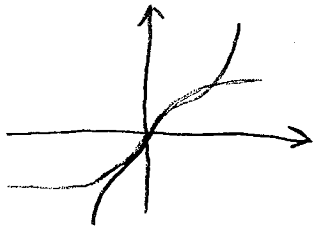
Envariabelanalys 2018-02-12 #13

Idag om integraler

(men först om "problemet" med ML-utvecklingen för $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

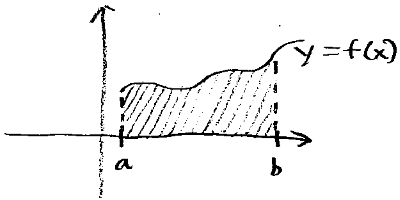
- $E_n(x) = \dots$
- $y = \arctan x$ "$\Leftrightarrow$" $x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{i}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{e^{iy}+e^{-iy}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{iy} = \frac{1+ix}{1-ix}$ singulärt då $x = \pm i$)



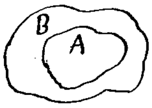
Dagens problem: Vad är arean under kurvan $y = f(x)$, mellan $x=a$ och $x=b$ $(f(x) \geq 0)$

- vad betyder det?
- vilket värde?



Vad är "area"?

area $b \cdot h$

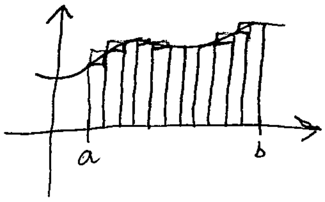


$m(A) \leq m(B)$ "mått"
arean

$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$ om $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Idé: approximera området med rektanglar

$\sum m(\text{inre rekt}) \leq$ sökta arean $\leq \sum m(\text{yttre rekt})$



Lite först: Minns notationen $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$, $m \leq n$

ex (viktiga) $\sum_{i=0}^{n-1} (a + id) = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) =$

aritmetisk summa: konstant differens mellan termerna.

$= (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \dots + (a+d) + a$

$2a+(n-1)d \quad 2a+(n-1)d \quad 2a+(n-1)d$

$= n \cdot \frac{1}{2}(2a + (n-1)d) = n\frac{a + (a+(n-1)d)}{2}$ "summan är antalet termer (n) gånger medelvärdet av första och sista termen"

Geometrisk summa: konstant kvot mellan termerna

$\sum_{i=0}^{n-1} ak^i = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = G$

$kG = ak + ak^2 + \dots + ak^n$

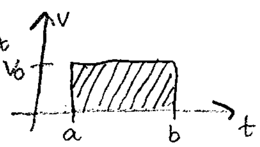
så $kG - G = (k-1)G = ak^n - a = a(k^n - 1)$

så $G = \begin{cases} n \cdot a & k=1 \\ a\frac{k^n-1}{k-1} & k \neq 1 \end{cases}$ $ak^n - a$ = "nästa term − första termen"

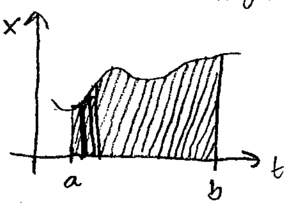
Integraler inte bara areor

ex. en bil rör sig med hastigheten $v(t)$. Hur långt når den mellan $t=a$ och $t=b$?

om $v(t) = v_0$, konstant

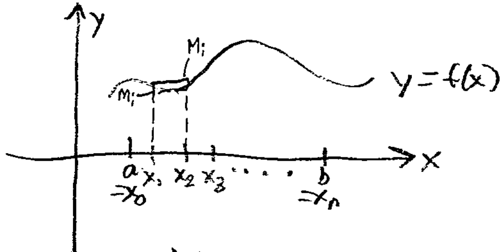


$S = v_0(b-a)$



$\int_a^b v(t)\,dt$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



En partition P av intervallet $[a,b]$:
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

i $[x_{i-1}, x_i]$ är $f(x) \leq M_i \quad (=f(u_i))$
$f(x) \geq m_i \quad (=f(l_i))$

översumman $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$

undersumman $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$

Det gäller alltid $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$
och vår sökta area $\left(\int_a^b f(x)dx\right)$ ligger mellan dem.

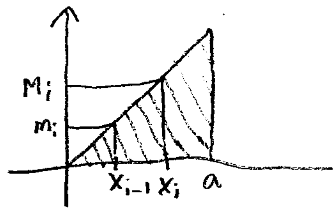
Def: $f(x)$ kallas integrerbar på $[a,b]$ omm det finns precis ett I med $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$ för alla partitioner P av $[a,b]$.
Då kallas $I = \int_a^b f(x)dx$ integralen av $f(x)$ över $[a,b]$.

ex. på en icke-inverterbar funktion på $[0,1]$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ för varje P: $M_i = 1$, $m_i = 0$ $\quad U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$
$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0$

ex. $f(x) = x \quad [0,a]$

$\int f(x)dx = ?$



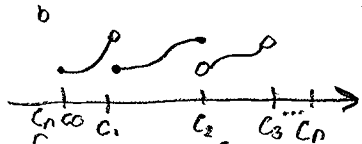
P: $x_i = i \cdot \frac{a}{n}$, $\Delta x_i = \frac{a}{n}$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}}_{\text{aritmetisk summa}} = \frac{a}{n} \cdot n \cdot \frac{0 + (n-1)\frac{a}{n}}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot n \cdot \frac{\frac{a}{n} + a}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

så $\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$ det enda värdet mellan all a $L(f,P)$ och $U(f,P)$

Sats: Alla monotona (växande eller avtagande) funktioner är integrerbara
Alla kontinuerliga funktioner är integrerbara
Alla styckvis kontinuerliga funktioner är integrerbara
på $[c_0, c_n]$ med $\underset{a}{c_0} < c_1 < c_2 < \ldots < \underset{b}{c_n}$
$f(x) = F_i(x) \quad c_{i-1} < x < c_i$
kont. på $[c_{i-1}, c_i]$



$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)dx$$

Om $f(x)$ är integrerbar på $[a,b]$ och P är en partition av $[a,b]$:
en Riemersumma för $\int_a^b f(x)dx$ $\quad R(f,P,c)$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad L(f,P) \leq R(f,P,c) \leq U(f,P)$

så $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \to \int_a^b f(x)dx$ då P blir finare och finare

Allmänna egenskaper för bestämda integraler (s 306 i boken) $\int_a^a f(x)dx = 0$

Om $f(x) \leq g(x)$ och $a \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

$a \leq b$ $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

Integralkalkylens medelvärdessats: Om $f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ så finns $c \in [a,b]$ så att $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

ty: $m \leq f(x) \leq M$, m och M minsta och största värdena i $[a,b]$
$f(x)$ kont.

$a \leq b$: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

så $m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{\text{medelvärdet av } f(x) \text{ på } [a,b]} \leq M$

medelvärdet av $f(x)$ på $[a,b]$ $= f(c)$ för något $c \in [a,b]$
enligt satsen om mellanliggande värden.

Om $f(x)$ är integrerbar och har antiderivatan (Primitiva funktionen) $F(x)$, dvs $F' = f$
så är $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ ← beteckning

ty: $F(b) - F(a) = F(\underset{\leq b}{x_n}) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(\underset{\geq a}{x_0}) =$

$$= \underset{\substack{\| \\ f}}{F'}(c_n)(x_n - x_{n-1}) + \dots + \underset{\substack{\| \\ f}}{F'}(c_1)(x_1 - x_0) = \underbrace{\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i}_{\text{Oberoende av } P} \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

- Varje kont. funktion har en primitiv funktion!

$f(x)$ kont. i $[a,b]$: Låt $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $\quad a \leq x \leq b$

ger $$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}f(c)(x+h-x) = f(c) \xrightarrow{h \to 0} f(x)$$

↑ Intkalk mvs (f kont) $\qquad$ c mellan x och $x+h$

så $\underline{F'(x) = f(x)}$