SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 1

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Kurstart för Envariabel

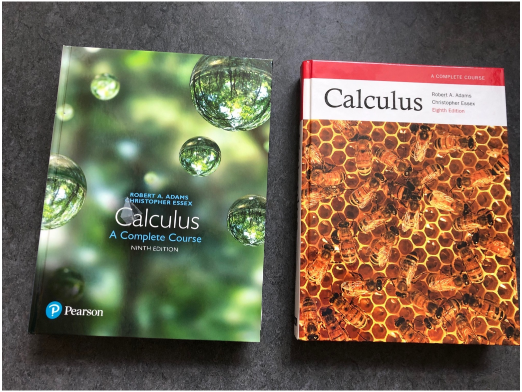
Välkomna till Envariabelanalys, CMETE och COPEN!

Föreläsningar: Lars Filipsson, Lfn@kth.se

Övningar och seminarier: John Liu, Martin Andrae, Claes Henriksson, Darko Mitrovic, Nils Henningsson, Ask Ellingsen

Examination: Kristian Bjerklöv, bjerklov@kth.se

Adams/Essex: Calculus, 8 el 9 ed



Båda upplagorna går bra. Inget behov av lösningsmanual mm.
Obs: finns mycket material på canvas!

Kursens innehåll

Vad handlar den här kursen om?

Reellvärda funktioner av en reell variabel:

- Gränsvärde och kontinuitet (Modul 1)
- Derivator (Modul 2-4)
- Integraler (Modul 5-6)
- Serier (Modul 7)

Denna ”förändringens matematik”
har SJUKT mycket tillämpningar!

Tidigare års studenter

Goda råd till er från tidigare års studenter:

- ”Häng med från början”
- ”Lägg ner mycket tid varje vecka”
- ”Se till att klara alla seminarier”
- ”Plugga 100 % från dag 1”

PS. Nästan alla klarade kursen!

Administration

Administrativt för SF1625 Envariabelanalys:

- Info i canvas,
  https://kth.instructure.com/courses/20303
- Registrera dig på kursen nu!
  Sker via ”mina sidor”
- Hur man pluggar och varför

Att göra denna vecka

Översikt över modul 1 (avslutas med seminarium)

- Tal och funktioner (kap P)
  - Definitionsmängd, Värdemängd
  - Funktionsgraf
  - Udda, Jämn
  - Begränsad
  - Absolutbelopp, Trigonometriska funktioner, Polynom
  - Klassen av elementära funktioner
- Gränsvärde (kap 1)
  - Precis definition
  - Räkneregler
  - Ett standardgränsvärde
- Kontinuitet (kap 1)
  - Precis definition
  - Satser om kontinuerliga funktioner
    - Min/Max
    - Mellanliggande värden

Nu börjar det

Once upon a time ....

Tal, funktioner, Zenons paradoxer, Arkimedes approximationer, Newton, Leibniz —
Men vad är egentligen förändring? Vad är area?

Vad är förändringen av $f(x)$ när x ändras från a till b? Kan det finnas flera olika tänkbara mått på förändring?

Vad är area? Har alla områden area?

Tal

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{a/b : \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ och } b \neq 0\}$$
$$\mathbb{R} = \{ \text{"Alla decimaltal"}\}$$
$$\mathbb{C} = \{z = a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Obs att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Obs Supremumegenskapen för $\mathbb{R}$: varje icke-tom uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre gräns, supremum.

3. Obs att $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definition

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Tolkning: storlek och avstånd på tallinjen.

$|x|$ mäter storleken av x och avståndet från x till 0

$|a - b|$ mäter avståndet från a till b på tallinjen

Linjer i planet

Alla punkter (x, y) som uppfyller $y = kx + m$ för fixa tal k och m utgör en linje med riktningskoefficient k och y-intercept m.

Enpunktsformeln: om a, b och k är fixa tal så är

$$y = b + k(x - a)$$

ekvationen för en rät linje genom punkten (a, b) med riktningskoefficient k. (Samma linje kan förstås också skrivas som $y = kx + m$ om man väljer $m = b - ka$ men det är smidigare att skriva upp ekvationen med enpunktsformeln!)

Polynom

Med ett **polynom** menar man en funktion p vars värde i x är

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

där n är ett icke-negativt heltal och $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är tal som kallas koefficienter. Graden av p är n (om $a_n \neq 0$).

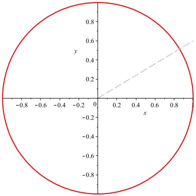
Division: Givet polynom p och h finns polynom q och r så att

$$\frac{p(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

där graden av r är mindre än graden av h.

Faktorsatsen: $p(a) = 0 \iff p(x) = (x - a)q(x)$ för något polynom q. Bevis: division.

Sinus, cosinus, tangens, cotangens



1. Enhetscirkeln och radianer
2. Def av $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$
3. Värden i enkla vinklar
4. Samband och formler
5. Funktionsgrafer

Resten av Modul 1

Admin: Läs på canvas och registrera dig via ”mina sidor”

Förberedelse till onsdag: Film 1 Tal och funktioner och Film 2 Gränsvärde och kontinuitet från spellistan av föreläsningsfilmer.

Dessutom förberedelse till onsdagens övning: några övningsfilmer.

Räkna redan nu några Hemuppgifter1.pdf. Förslag: tre-fyra om dagen.

Exempel: absolutbelopp

Lös ekvationen $|2x - 3| = 4$

Svar: Lösningarna är $x = 7/2$ och $x = -1/2$

Exempel: division av heltal

$$\frac{143}{4} = 35 + \frac{3}{4}$$

eller om man hellre vill

$$143 = 4 \cdot 35 + 3$$

Exempel: division av polynom

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x + 1} = x^2 - 3x + 3 + \frac{-2}{x + 1}$$

eller om man hellre vill

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 - 3x + 3) + (-2)$$

Exempel: faktorsatsen

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Eftersom nollställena till polynomet är 2 och 3 så är $x - 2$ och $x - 3$ faktorer i polynomet.

Obs sambandet mellan rötter och koefficienter!

Faktorsatsen, bevis

Faktorsatsen: $p(a) = 0 \iff p(x) = (x - a)q(x)$
för något polynom q.

$(\Rightarrow)$ Med division kan vi skriva $p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$ där graden för polynomet r är 0 ty den är mindre än graden för $(x - a)$ som är 1. Så $r(x)$ måste vara en konstant. Om $p(a) = 0$ så måste därför konstanten vara 0 och vi har
$p(x) = (x - a)q(x)$ för något polynom q.

$(\Leftarrow)$ Syns direkt att om $p(x) = (x - a)q(x)$ så är $p(a) = 0$.

Exempel: faktorsatsen

Faktorisera polynomet $p(x) = 2x^3 - 22x^2 + 60x$

Svar: $p(x) = 2x(x-5)(x-6)$

Exempel: trigekvation

Lös ekvationen $2\sin 3x = 1$

Svar:

$$x = \frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3} \quad \text{eller} \quad x = \frac{5\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}, \qquad n \text{ godt. heltal.}$$

Exempel: trigekvation

Lös ekvationen $\tan 4x = 1$

Svar:

$$x = \frac{\pi}{16} + n\frac{\pi}{4}, \quad n \text{ godt. heltal.}$$