SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 5

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Derivata

Derivata: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

(om gränsvärdet existerar)

Viktigt faktum: Om f är deriverbar i a, så är f kontinuerlig i a.

Viktigt exempel: Funktionen $|x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar i 0.

Derivata

Tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ har ekvation:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linjär approximation:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \qquad \text{för } x \text{ nära } a$$

Derivata

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a) \qquad x \text{ nära } a$$

$$\underbrace{f(x)-f(a)}_{\Delta f} \approx f'(a)\underbrace{(x-a)}_{\Delta x}$$

Deriveringsregler

Sats: Om f och g är deriverbara så gäller

$$\frac{d}{dx}kf(x) = kf'(x) \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \text{(produktregeln)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{(kvotregeln, } g(x) \neq 0\text{)}$$

$$\frac{d}{dx}f((g(x)) = f'(g(x))g'(x) \qquad \text{(kedjeregeln)}$$

Program

1. Vanliga derivator. Vi har tagit fram derivator till de enklaste av de elementära funktionerna.

2. Deriveringsregler. Vi har formulerat och bevisat deriveringsregler som vi nu måste bli bra på att använda.

3. Beräkna derivator. Med hjälp av punkt 1 och 2 ovan kan vi derivera ”alla” elementära funktioner (där de är deriverbara).

4. Tillämpa derivator. Vi ska sedan använda derivator för att avgöra frågor om approximation, växande/avtagande, max/min mm.

(Detta kommer vi att jobba med under ett par veckor till.
Bara i nödfall, när inget annat funkar, kommer vi att använda derivatans definition för att derivera)

Exempel. Derivera och säg var derivatan existerar!

a) $f(x) = 4x\cos\sqrt{x}$

$$f'(x) = 4\cos\sqrt{x} + 4x\left(-\sin\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 4\cos\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}, \quad x>0 \quad //$$

b) $g(x) = \dfrac{\sin\sqrt{1+x^2}}{x}$

$$g'(x) = \frac{\cos\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\cdot x - 1\cdot\sin\sqrt{1+x^2}}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Exempel. Bestäm den linjära approximationen av $f(x) = \tan x$ när x ligger nära $\pi/4$ och ange ett närmevärde till $\tan(\pi/5)$.

$f(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$

Tangent: $y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Linj. appr: $f(x) = \tan x \approx 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, x nära $\frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{5}) = \tan\frac{\pi}{5} \approx 1 + 2\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\left(-\frac{\pi}{20}\right) = 1 - \frac{\pi}{10}$

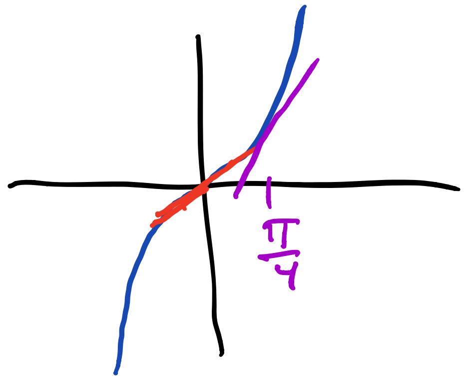
$\approx \underline{\underline{0{,}7}}$

Tangent/Linjarisering

På föreläsningen igår sa vi att $\tan x \approx x$ om x nära 0

På föreläsningen idag är $\tan x \approx 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ om x nära $\frac{\pi}{4}$.

Är något fel?



Max och min

Definition. Om $f(c) \geq f(x)$ för alla $x \in D_f$ så sägs $f(c)$ vara f:s *största värde* eller *maximum*. Om olikheten bara gäller för x i en liten omgivning till c talar man om ett *lokalt maximum.*

(På motsvarande sätt definieras minimum.)

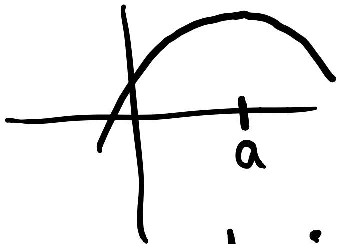
Max och min

Sats. Om f är definierad på ett öppet intervall (a, b) och antar sitt maximum (eller minimum) i en punkt c i (a, b) och $f'(c)$ existerar, så är $f'(c) = 0$.

Definition. Punkter x sådana att $f'(x) = 0$ kallas **kritiska punkter** till f eller **stationära punkter** till f

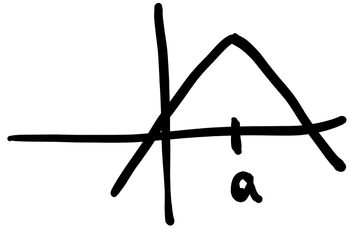
Definition. En **extrempunkt** till en funktion är antingen en maxpunkt eller en minpunkt

Var kan maximum antas?



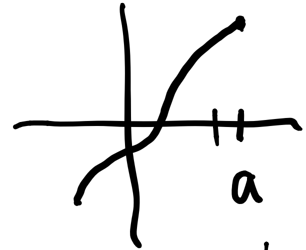
max antas i kritisk punkt

$f'(a) = 0$



max antas i punkt där derivata saknas

singulär punkt



max antas i ändpunkt

randpunkt

Definition. Anta att f är definierad på ett intervall I. Vi säger att f är **strängt växande** på I om för alla par av punkter x_1 och x_2 i I gäller att $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.

På samma sätt definieras

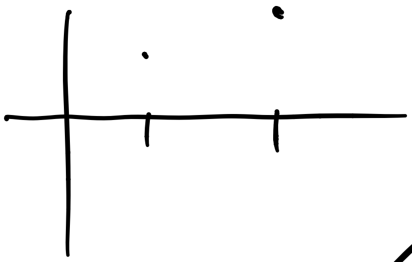
växande: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

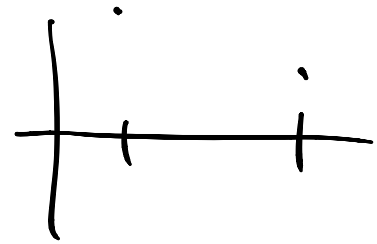
strängt avtagande: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

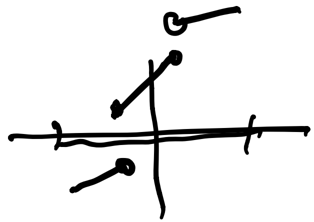
avtagande: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

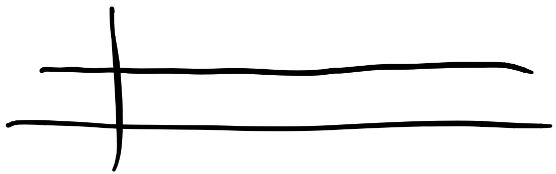
Varför använder vi inte derivata för att definiera vad vi menar med (strängt) växande och avtagande? Finns det några funktioner som är både växande och avtagande?

(Strängt) Växande/avtagande









$f(x) = 1$

både växande och avtagande.

Medelvärdessatsen

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bevis. Bilda funktionen

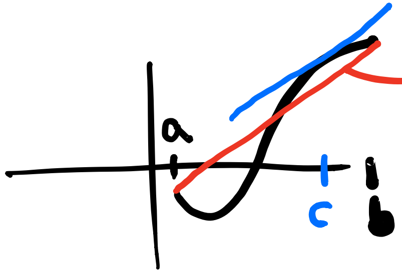
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Då gäller att $g(a) = g(b) = f(a)$. Då måste g anta ett största eller ett minsta värde i en punkt c sådan att $a < c < b$. Det följer av förra satsen att $g'(c) = 0$. Men

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Att detta är 0 var precis vad vi skulle bevisa.

Medelvärdessatsen



lutning $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

lutning $f'(c)$

Exempel på en användning av medelvärdessatsen. Om man kör en sträcka med medelhasighet 100 km/h så har man vid någon tidpunkt hållit hastigheten 100 km/h

Medelvärdessatsens följdsatser

Följdsats 1. Om $f'(x) > 0$ för alla x i ett intervall (a, b), så måste f vara strängt växande i (a, b).

Följdsats 2. Om $f'(x) \geq 0$ för alla x i ett intervall (a, b), så måste f vara växande i (a, b).

Tillägg: *För kontinuerliga funktioner sprider sig växandet till ändpunkterna på intervallet. Att derivatan är* > 0 *utom i enstaka punkter där derivatan är* $= 0$ *räcker i 1).*

Följdsats 3. Om $f'(x) < 0$ för alla x i ett intervall (a, b), så måste f vara strängt avtagande i (a, b).

Följdsats 4. Om $f'(x) \leq 0$ för alla x i ett intervall (a, b), så måste f vara avtagande i (a, b).

Tillägg: *För kontinuerliga funktioner sprider sig växandet/avtagandet till ändpunkterna på intervallet. Att derivatan är* > 0 *utom i några punkter där derivatan är* $= 0$ *räcker i 3).*

Medelvärdessatsens följdsatser

Följdsats 5. Om $f'(x) = 0$ för alla x i ett intervall (a, b), så är f konstant i (a, b).

Följdsats 6. Om $g'(x) = h'(x)$ för alla x i ett intervall (a, b), så är $g(x) = h(x) + C$ för någon konstant i C.

Ett par viktiga exempel

Exempel 1: Funktionen $f(x) = x^3$ är strängt växande på hela reella axeln. (Dvs att derivatan är noll i enstaka punkter gör ingenting, om den är positiv i alla andra punkter)

Exempel 2: Funktionen $g(x) = x^2$ är strängt avtagande på $[-1, 0]$ och strängt växande på $[0, 1]$. (Dvs för kontinuerliga funktioner sprider sig växandet/avtagandet till intervallets ändpunkter)

Exempel

På vilka intervall är funktionen $f(x) = x^3 - 3x - 1$ strängt växande respektive strängt avtagande?

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	lok max	↘	lok min	↗

Strängt avt: $[-1, 1]$

str. väx $(-\infty, -1]$ och $[1, \infty)$

Exempel

På vilka intervall är funktionen $g(t) = t - \sin t$ strängt växande respektive strängt avtagande?

$g'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ för alla t

med likhet bara då $t = n2\pi$

$\Rightarrow$ g strängt växande på $\mathbb{R}$

Exempel

Har $h(t) = t - \tan t$, $0 \leq t \leq \pi/4$, något största och minsta värde? Bestäm dessa i så fall.

$$h'(t) = 1 - (1 + \tan^2 t) = -\tan^2 t \leq 0$$

$\Rightarrow$ h avtagande. Max $h(0) = 0$

$$\text{Min } h(\pi/4) = \frac{\pi}{4} - 1$$

(Vi vet att max och min måste finnas, ty h kontinuerlig på slutet begränsat intervall).

Högre ordningens derivator

Att derivera derivatan:

Om $f(x)$ är deriverbar så är $f'(x)$ en funktion som talar om hur $f(x)$ förändras.

Om $f'(x)$ är deriverbar så är $f''(x)$ en funktion som talar om hur $f'(x)$ förändras.

Andraderivatan $f''(x)$ skrivs ibland också $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

Och så vidare! Om f är n gånger deriverbar skrivs den n:te derivatan $f^{(n)}(x)$ eller $\dfrac{d^n f}{dx^n}$

Läxa / Förberedelse

Att göra:

Se Film 6 Användning av derivata före nästa föreläsning

(Film 5 om sinusfunktionens derivata är frivillig)

Jobba med Moduluppgifter 2 på övningen

Jobba med Hemuppgifter2.pdf hemma