Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Lars Filipsson

Uppgifter att träna på i Modul 5

REKOMMENDERADE UPPGIFTER UR KURSBOKEN CALCULUS

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 5.1: 1, 3, 7, 9, 17, 33. Kapitel 5.2: 1, 3. Kapitel 5.3: 1, 5, 9, 11, 17. Kapitel 5.4: 1, 3, 23. Kapitel 5.5: 3, 8, 27, 33, 39, 40, 41. Kapitel 5.6: 5, 6, 7, 9, 21, 23, 43. Kapitel 5.7: 11, 17. Kapitel 6.1: 1, 3, 5, 7, 13, 21. Kapitel 6.2: 1, 5, 9, 11, 13, 23.

Om uppgifterna nedan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken som listas ovan. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

SKARPA ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1. Bestäm med hjälp av variabelsubstitution alla primitiva funktioner till

A. $f(x) = \cos^3 x \sin x$

B. $g(x) = e^{\cos x} \sin x$

C. $h(x) = x\sqrt{1+x}$

Uppgift 2. Bestäm med hjälp av partiell integration alla primitiva funktioner till

A. $f(x) = x^2 \sin x$

B. $g(x) = x^n \ln x$

C. $h(x) = x\sqrt{1+x}$

Uppgift 3. Bestäm med hjälp av partialbråksuppdelning alla primitiva funktioner till

A. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

B. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

Uppgift 4. Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

B. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^{-x}\, dx$

C. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

D. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$

E. $\displaystyle\int_{0}^{1} x \arctan x\, dx$

F. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

G. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

H. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} e^x \sin x\, dx$

I. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \arccos x\, dx$

J. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+5x+6}\, dx$

Uppgift 5. Om man i integralen $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$ gör substitutionen $x = 2\sin t$, vad blir då de nya gränserna?

Uppgift 6. Skriv upp en Riemann-summa med fyra delintervall till integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ och förklara varför summan ger en approximation av $\ln 2$.

Uppgift 7. Visa, utan att räkna ut integralerna, att .....

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\cos x\,dx = 0$

B. $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx \le 1$

C. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sin x\,dx \le \frac{1}{2}$

D. $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} x\ln x\,dx < 0$

Uppgift 8. Derivera med hjälp av huvudsatsen nedanstående funktioner f och g med avseende på x. Är derivatorna positiva eller negativa? Är funktionerna f och g växande eller avtagande?

A. $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt,\ x > 0$

B. $g(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{0} e^{-t^2}\,dt,\ x > 0$

Uppgift 9. Är $(x) = e^{-x^2}$ integrerbar på intervallet $[0,1]$? Kan du räkna ut integralen $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ med hjälp av primitiv funktion? Kan du approximera integralen med hjälp av en taylorutveckling av integranden så att felet i approximationen blir mindre än $1/10$?

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$, C godt konst
B. $-e^{\cos x} + C$, C godt konst
C. $\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$, C godt konst (kan förenklas)

2.A. $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$, C godt konst
B. $\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, C godt konst
C. $\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$, C godt konst (kan förenklas)

3. A. $\frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + C$, C godt konst
B. $-2\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + C$, C godt konst

4. A. $\pi/2$
B. $2 - \frac{5}{e}$
C. 1
D. $\ln(\ln x) + C$, C godt konst
E. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

F. $2\cos 1 - 2\cos 2$
G. $\pi/6$
H. $\frac{1}{2}(1 + e^{\pi/2})$
I. $1 + \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$
J. $x - 10\ln|x+3| + 5\ln|x+2| + C$, C godt konst

5. 0 och $\pi/6$

6. T ex (fyra lika stora delintervall med längd $1/4$ och funktionsvärdet tas i högra ändpunkterna):
$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$
Summan blir $533/840$ vilket är en approximation av integralens värde. Eftersom integralen kan räknas ut exakt till $\ln 2$ så är Riemannsummans värde också en approximation av detta.

7. A. integranden är udda och intervallet symmetriskt runt origo
B. integranden är mindre än 1 och integralen av 1 över samma intervall är 1
C. integranden är mindre än x
D. integranden är negativ över hela intervallet

8.A. $f'(x) = e^{-x^2}$, $f'(x)$ är positiv och f är strängt växande
B. $g'(x) = -e^{-x^4} \cdot 2x$, $g'(x)$ är negativ för $x > 0$ och g är strängt avtagande

9. I tur och ordning:
Ja (den är ju kontinuerlig)
Nej
Ja (med fjärde gradens taylorpolynom istället för e^{-x^2} blir integralen $23/30$ och integrerar man värsta tänkbara felet över intervallet så ser man att noggrannheten blir den önskade)