Envariabelanalys 2018-01-26 #6

Idag först om inversfunktioner

En kurva i planet ($\mathbb{R}^2$) är grafen för en funktion, $y=f(x)$ omm den skär varje vertikal linje, $x=$ konstant, i högst en punkt.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)$ finns då $x\in D(f)$

Om motsvarande gäller för horisontella linjer, $y=$ konstant, är kurvan grafen för en funktion $x=g(y)$.

Om båda gäller kan samma kurva beskrivas som $y=f(x)$ och $x=g(y)$

$y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ $\quad D(f)=R(g) \quad R(f)=D(g)$

Def: En funktion $f(x)$ är enentydig (injektiv) omm varje värde i $R(f)$ antas exakt en gång.

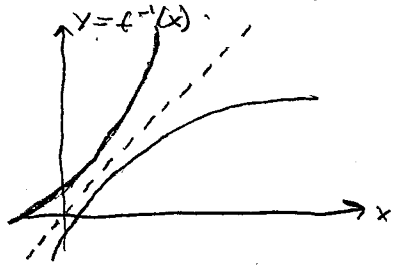
$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2\text{, alla } x_1,x_2\in D(f)$$

Inversfunktionen f^{-1} ges då av att

$$x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow y=f(x)$$

f^{-1} beskrivs (om den finns) av $\begin{cases} f\circ f^{-1}=id_{R(f)} \\ f^{-1}\circ f=id_{D(f)}\end{cases}$ (båda behövs)

id_A är funktionen som ges av $id_A(x)=x$, alla $x\in A$



om f inverterbar (d.v.s. enentydig, injektiv)

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

ex. $y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$

ex. $f(x)=x^2$, $x\geq 0$ är enentydig $\quad D(f)=[0,\infty[\quad R(f)=[0,\infty[$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ $\quad D(f^{-1})=[0,\infty[\quad R(f^{-1})\ [0,\infty[$

Om $f(x)$ är växande/avtagande: $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)</>f(x_2)$, alla $x_1,x_2\in D(f)$ så är $f(x)$ entydig och f^{-1} är också växande/avtagande

Om $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

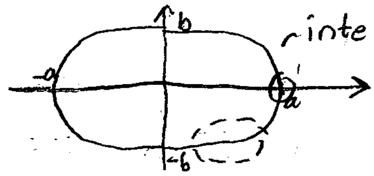
så $\Leftrightarrow$

dvs $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)\Leftrightarrow y_1<y_2$, så f^{-1} är växande.

Implicit derivering

En funktion kan beskrivas av en ekvation som kan "lösas"

ex. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$, en ellips



inte en funktionsgraf

"lokalt" kan y ses som en funktion av x

$y(x) = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ $\quad -a \le x \le a$

y' existerar då $x = \pm a$

y' fås enklare med implicit derivering

i ex. derivera: $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, så $y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$

m.a.p. x

kedjeregeln, $(y(x))^2$

Vad är tangentens riktning i punkten $(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}b)$

jo, $y'(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}b) = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}b} = \frac{b}{\sqrt{3}a}$

Ex. $y(x)$ definieras implicit av $e^y + x\sin y = x^3+\tan x+1$

$(0,0)$ ligger på kurvan. Tangentriktningen där?

$De^x = e^x$

Derivera implicit: $\underset{\text{y.d.}}{e^y}\cdot\underset{\text{i.d.}}{y'} + 1\cdot\sin y + x\cdot\underset{\text{y.d.}}{\cos y}\cdot\underset{\text{i.d.}}{y'} = 3x^2+\frac{1}{\cos^2 x}$

$x=0=y$ ger $1y'+1\cdot 0+0\cdot 1\cdot y' = 0+1$, $y'=1$ i $(0,0)$

Hur vet vi att y' existerar i $(0,0)$?

Jo, enligt "implicita funktionssatsen" finns y' om "den kan räknas ut med implicit derivering"

se flervariabelkursen

ex. $y=y(x)$ definieras av $y^3+3y=x$. Bestäm $\frac{dy}{dx}$ som funktion av x,y.

$y(x)$ är inversfunktionen till $f(x)=x^3+3x$, $f'(x)=3(x^2+1)$

Derivera implicit:

$3y^2\cdot y'+3y'=1$, $\quad y'=\frac{1}{3(y^2+1)}$

även högre derivator:

$6y\cdot y'\cdot y'+3y^2\cdot y''+3y''=0$, så $\quad y''=\frac{-2yy'^2}{y^2+1}\ldots$

Om derivatan av inversfunktionen:

Om $f'(x) > 0$ i $]a,b[$ så är f växande, så inverterbar där och derivering av

$f(f^{-1}(x)) = x$ ger (kedjoregeln): $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$,

så $$Df^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ex. $f(y) = y^2,\ y \geq 0,\ y = f^{-1}(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$

$$D\sqrt{x} = \left.\frac{1}{2y}\right|_{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Primitiva funktioner o begynnelsevärdesproblem

$\quad$ = antiderivator

Givet $f(x)$ är $F(x)$ en primitiv funktion till $f(x)$ omm $F'(x) = f(x)$, alla $x \in D(f)$

ex.

$F(x)$	$f(x)$
$x^3 + 8x + 7$	$3x^2 + 8$
$\cos x^2$	$-2x \sin x^2$
?	e^{x^2}

Primitiv funktion skrivs som en obestämd integral $\int f(x)dx = F(x) + C$

Om $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ på ett intervall är $F(x) = G(x) + C$ konstant

ty $(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Primitiva funktioner ger lösningen till problem som $\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

eller $\begin{cases} y'' = f(x) \\ y'(x_0) = y_0' \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Mer intressanta differensialekvationer: $y'' - 4y' + 8y = x \cdot \sin x$

finn alla funktioner $y(x)$ som uppfyller ekvationen.