Övning 6

Andra ordningens linjära diffentialekvationer

$$\boxed{a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0} \; * \quad [\text{homogena}]$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

"Metod"

1) skriv om $*$ till $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ (Karakteristiska ekvationen) & Lös ut r!

2) Analysera r_1 & r_2. (Vi har 3 fall)

(i) Om $r_1 \neq r_2$ $r_{1,2} \in \mathbb{R}$

Lösning har formen : $\boxed{y = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}}$, där A & B är godtyckliga konstanter.

(ii) Om $r_1 = r_2$, $r_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y = e^{r_1 \cdot t}(A + B \cdot t)}$$

(iii) Om $r_{1,2} = k \pm w \cdot i$, $r_{1,2} \in \mathbb{C}$

$$y = A \cdot e^{k \cdot t} \cdot \cos(wt) + B \cdot e^{k \cdot t} \cdot \sin(wt)$$

Beräkna A & B mha begynnelsevillkoren om det behövs.

20161025

4 Vi betraktar en LCR-krets med en spänningskälla, en spole med induktans 1 H; ett motstånd med 15 Ω & en kondensator med $\frac{1}{50}$ F. Strömmen genom kretsen uppfyller följande d.e.

$$i''(t) + 15\,i'(t) + 50\,i(t) = 0$$

Lös. D.E. & bestäm strömmen vid tiden t om $i(0) = 0$ A & $i'(0) = 1$ A/s

1) $r^2 + 15r + 50 = 0$

ger oss $r_1 = -5$ & $r_2 = -10$ (fås mha PQ-formeln)

2) Eftersom $r_1 \neq r_2$ & $r_{1,2} \in \mathbb{R}$ använder vi oss av följande ansats.

$$\boxed{i(t) = Ae^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}}$$

dvs, $i(t) = A \cdot e^{-5 \cdot t} + B \cdot e^{-10t}$, (Allmänna lösningen)

där A & B är godt. Konstanter

4) Då vi får B.V. $i(0) = 0$ & $i'(0) = 1$, kan man med hjälp av dessa beräkna A & B.

$$i(t) = A \cdot e^{-5 \cdot t} + B \cdot e^{-10 \cdot t}$$

$$i'(t) = -5 \cdot A \cdot e^{-5t} - 10 \cdot B \cdot e^{-10t}$$

$$i(0) = A \cdot e^{-5 \cdot 0} + B \cdot e^{-10 \cdot 0} = A + B = 0$$

$$i'(0) = -5A e^{-0} - 10 \cdot B \cdot e^{-10 \cdot 0} = -5A - 10B = 1$$

dvs vi kan skapa ett ekvationssystem.

$$\begin{cases} A + B = 0 \iff A = -B & (1) \\ -5A - 10B = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) ger $-5(-B) - 10B = 1 \iff B = -\frac{1}{5}$ (3)

(3) + (1) ger $A = \frac{1}{5}$

dvs, Svar: $i(t) = \frac{1}{5} \cdot A \cdot e^{-5t} + \overset{..}{B} \cdot e^{-10 \cdot t}$

3.7.5

Bestäm den allmänna lösningen till $y''+8\cdot y'+16y=0$

1) $r^2+8r+16=0$ ger $r_{1,2}=-4$

2) $r_1=r_2=-4$ samt $r_{1,2}\in\mathbb{R}$ ger

$\boxed{y(t)=e^{r\cdot t}(A+B\cdot t)}$ dvs, $y(t)=e^{-4\cdot t}(A+B\cdot t)$

Svar: $y(t)=e^{-4t}(A+B\cdot t)$, A o B godt. konstanter

2015 04 07

Odämpad svägning beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2}+w^2\cdot y=0 ,$$

där $y(t)$ är avvikelsen från jämviktsläge vid tidpunkten t o w är en konstant.

A. Lös D.E. om $w=4$

B. Lös DE om $w=4$ o $y(0)=-6$, $y'(0)=32$

C. Bestäm perioden o amplituden.

$$\frac{d^2y}{dt}+4^2\cdot y=0$$

A.

1) $r^2+0\cdot r+4^2=0$

$r_{1,2}=0\pm 4i \quad (K\pm wi)$

2) Eftersom $r_{1,2}\in\mathbb{C}$ blir

$$y=A\cdot e^{K\cdot t}\cdot\cos(wt)+B\cdot e^{K\cdot t}\cdot\sin(wt)\text{ , dvs }\begin{cases}K=0\\ w=4\end{cases}$$

$$y(t)=A\cdot e^{0\cdot t}\cdot\cos(4t)+B\cdot e^{0\cdot t}\cdot\sin(4t)=$$

$$=A\cdot\cos(4t)+B\cdot\sin(4t)$$

Svar: $y(t)=A\cdot\cos(4t)+B\cdot\sin(4t)$, A & B godt. konstanter.

B. Nu får vi B.V. givna, dvs $y(0)=-6$ & $y'(0)=32$.
Mha dessa kan vi beräkna A & B.

$$y(t)=A\cdot\cos(4t)+B\cdot\sin(4t)$$
$$y'(t)=-A\cdot\sin(4t)\cdot 4+B\cdot\cos(4t)\cdot 4$$

$$y(0)=A\cdot\cos(4\cdot 0)+B\cdot\sin(4\cdot 0)=A=-6\text{ , dvs } A=-6$$
$$y'(0)=-(-6)\cdot\sin(4\cdot 0)\cdot 4+B\cdot\cos(4\cdot 0)\cdot 4=4B=32\text{, dvs } B=\tfrac{32}{4}=8$$

Svar: $y(t)=-6\cdot\cos(4t)+8\cdot\sin(4t)$

C. gör själva :)

Icke homogena 2:a ordningens linjära D.E.

$$\boxed{a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)} \; * , \; f(x) \neq 0$$

Lösningen till * har formen $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$,

där $y_h(t)$ är den homogena lösningen & $y_p(t)$

är den partikulära.

1) y_h fås genom att sätta $f(x) = 0$ &

därefter lösa den homogena D.E.

2) y_p fås genom att den antas ha samma

typ av funktion som $f(x)$.

Ex. $f(x) = x^2$, anta då $y_p = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x+1$, —"— $y_p = ax + b$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = 5 \cdot e^{3x}$, —"— $y_p = a \cdot e^{3x}$

detta gäller för s.k. "enkla fall".

För resonansfall använder man samma ansats

som för enkla fall men vi multiplicerar med

en term x^v, dvs. $y_{p,resonans} = x^v \cdot y_{p,enkel}$.

(3) Derivera y_p 2 gånger o stoppa in i $*$.

(4) Lös ut konstanterna i y_p.

(5) Bestäm konstanterna i y_h om det behövs

20160111

③ Lös D.E.

$$2 \cdot y''(t) - 20 \cdot y'(t) + 50 y(t) = t \quad *$$

H.L $\neq 0$, dvs $*$ är inhomogen.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

① y_h

Lös $2 \cdot y'' - 20 y' + 50 = 0$

$2r^2 - 20r + 50 = 0$

$r_{1,2} = 5$, dvs $y_h = e^{5 \cdot t}(A + B \cdot t)$

y_p

② H.L $= t$, dvs 1:a gradspolynom.

Anta då $y_p = a\cancel{t} + b$ (1:a gradspolynom)

③ $\left.\begin{array}{l} y_p = a \cdot t + b \\ y_p' = a \\ y_p'' = 0 \end{array}\right\}$ Stoppa in i $*$ ger oss

$$2 \cdot y_p'' - 20 y_p' + 50 y_p = t \iff 2 \cdot 0 - 20 \cdot a + 50(at+b) = t$$

$$\iff -20a + 50 \cdot at + 50 \cdot b = t$$

Nu får vi ett ekvationssystem.

$$\begin{cases} -20a + 50b = 0 & ① \text{ (Konstanter)} \\ 50a = 1 & ② \text{ (}t\text{-termer)} \end{cases}$$

① ＋ ② ger $-20 \cdot \frac{1}{50} + 50b = 0 \iff b = \frac{20}{2500} = \frac{1}{125}$

$$y_p = ax + b = \frac{1}{50} \cdot t + \frac{1}{125}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p = e^{5t}(A + B \cdot t) + \frac{1}{50}t + \frac{1}{125}}$$, där A & B

är godt. Konstanter.

Scanned by CamScanner

20140111

a) Lös följande D.E.

$$y'' - 5y' + 6y = 10\sin x \quad *$$

b) Bestäm lösningen då $y(x)$ passerar origo o tangerar x-axeln där.

y_h:

$r^2 - 5r + 6 = 0$ ger $r_1 = 2$, $r_2 = 3$,

dvs $\boxed{y_h = A \cdot e^{2x} + B \cdot e^{3x}}$

y_p:

HL = trigonometrisk funktion ($\sin x$)

② $y_p = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$

③ $\left.\begin{aligned} y_p' &= -a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \\ y_p'' &= -a \cdot \cos x - b \cdot \sin x \end{aligned}\right\}$ stoppa in i $*$

$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = \sin x \iff (-a \cdot \cos(x) - b \cdot \sin(x)) - 5(-a\sin(x) + b \cdot \cos(x))$
$+ 6(a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)) = \sin(x)(-b + 5a + 6b) + \cos(x)(-a - 5b$
$+ 6a) = \sin(x)(5a + 5b) + \cos(x)(5a - 5b) = 10\sin x$

$$\sin(x)(5a+5b)+\cos(x)(5a-5b) = 10\cdot\sin x$$

Nu ställer vi upp ett ekvationssystem,

$$\begin{cases} 5a+5b = 10 \quad (1) \quad (\text{sin-termer}) \\ 5a-5b = 0 \quad (2) \quad (\text{cos-termer}) \end{cases}$$

(1) − (2) ger $10b = 10 \iff b = 1$ (3)

(3) i (2) ger $a = 1$

$y_p = a\cdot\cos(x) + b\cdot\sin(x)$ blir då $\boxed{y_p = 1\cos(x) + 1\sin(x)}$

Svar: $y = y_h + y_p$ ger $y = A\cdot e^{2x} + B\cdot e^{3x} + \cos(x) + \sin(x)$,

där A & B är godt. konstanter.

20131026

3 a) Bestäm allmänna lösningen till

$$y'' - 4y' + 4y = 8\cdot e^{2x} \quad *$$

b) Bestäm lösningen då $y(0) = 3$ & $y'(0) = 4$

a) $\underline{y_h}$

1) $r^2-4r+4=0$ ger $r_{1,2}=2$,

dvs $y_h=e^{2x}(A+B\cdot x)=Ae^{2x}+B\cdot x\cdot e^{2x}$

2)

$HL=8\cdot e^{2x}$, vanligtvis $y_p=a\cdot e^{2x}$, men det är en "del" av y_h, därmed har vi resonansfall!

Vi testar då $y_p=a\cdot e^{2x}\cdot x$? samma sak.

$y_p=x^2\cdot a\cdot e^{2x}$!

3) $y_p=a\cdot x^2\cdot e^{2x}$

$y_p'=2ax\cdot e^{2x}+a\cdot x^2\cdot 2\cdot e^{2x}=2ax\cdot e^{2x}(1+x)=a(2x+2x^2)\cdot e^{2x}$

$y_p''=a(2+4x)\cdot e^{2x}+a(2x+2x^2)\cdot 2\cdot e^{2x}=a\cdot e^{2x}(2+4x+4x+4x^2)=$

$=a\cdot e^{2x}(2+8x+4x^2)$

* $y_p''-4y_p'+4y_p=8\cdot e^{2x}$ $\iff$ $a\cdot e^{2x}(2+8x+4x^2)-4\cdot a\cdot e^{2x}(2x+2x^2)$

$+4\cdot a\cdot x^2\cdot e^{2x}=a\cdot e^{2x}(2+\cancel{8x}+\cancel{4x^2}-\cancel{8x}-\cancel{8x^2}+\cancel{4x^2})=$

$=2\cdot a\cdot e^{2x}=8\cdot e^{2x}$

4) $2a=8$ (e^{2x}-termer) ger $a=4$

$$y_p = 4\cdot x^2\cdot e^{2x}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p = (A+Bx)\cdot e^{2x} + 4\cdot x^2\cdot e^{2x}, \quad A \,\&\, B \text{ godt. konstanter.}}$$

b) $y(0)=3$

$y'(0)=4$

$$\cancel{y(x) = (A+Bx)\cdot e^{2x} + 4\cdot x^2\cdot e^{2x}}$$
$$\cancel{y'(x) = 2\cdot(A+Bx)\cdot e^{2x} + B\cdot(2e^{2x}) + 8\cdot x\cdot e^{2x} + 8\cdot x^2\cdot e^{2x} =}$$
$$\cancel{= 2\cdot e^{2x}(A+Bx+B+4x+4x^2)}$$

$$y = (A+Bx)\cdot e^{2x} + 4x^2\cdot e^{2x} = e^{2x}(A+Bx+4x^2)$$

$$y' = 2\cdot e^{2x}(A+Bx+4x^2) + e^{2x}(B+8\cdot x) = e^{2x}(2A+2Bx+8x^2+B+8x)$$

$$y(0) = e^{2\cdot 0}(A+B\cdot 0+4\cdot 0^2) = A = 3 \quad (1)$$

$$y'(0) = e^{2\cdot 0}(2A+2B\cdot 0+8\cdot 0^2+B+8\cdot 0) = 2A+B = 4$$

$$\begin{cases} A = 3 \\ 2A+B=4 \end{cases} \quad \text{ger} \quad \begin{aligned} &A=3 \\ &B=4-2\cdot 3=-2 \end{aligned}$$

$$y = e^{2x}(3-2\cdot x+4x^2)$$