Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

2. Gränsvärde och kontinuitet

Innehåll. Vi definierar två viktiga begrepp, gränsvärde och kontinuitet. Definitionerna är till för att slå fast vad dessa begrepp betyder. Med hjälp av definitionerna bevisar vi sedan satser som är användbara, t ex räkneregler för gränsvärden. Vi observerar att det finns en stor klass av funktioner, kallade elementära funktioner, där man kan avgöra kontinuiteten bara genom att titta på dem. Vi går igenom ett par viktiga satser, om kontinuerliga funktioner på slutna begränsade intervall. Sådana funktioner antar alltid ett största och ett minsta värde och antar dessutom alla mellanliggande värden.

Introduktion. Betrakta funktionerna

- $g(x) = \sin x$
- $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$

De är båda definierade på hela reella axeln. Men en viktig skillnad mellan dem är att funktionsgrafen till g är en enda sammanhängande kurva, medan funktionsgrafen till h består av två bitar som inte sitter ihop. Begreppet som används för att beskriva denna skillnad är kontinuitet: g är kontinuerlig, men h är inte kontinuerlig.

För kontinuerliga funktioner f får man gränsvärdet av $f(x)$ när $x \to a$ genom att bara sätta in a i funktionen och räkna ut funktionsvärdet $f(a)$ — om a tillhör definitionsmängden. Det är bara när f inte är definierad i a som man behöver göra något mer avancerat för att ta reda på gränsvärdet. Eftersom de elementära funktionerna är kontinuerliga överallt där de är definierade gäller detta också dem. De vanligaste exemplen på funktioner som inte är kontinuerliga är styckvis definierade funktioner. Dessa är ibland kontinuerliga och ibland inte.

Definition av kontinuitet: Funktionen f är **kontinuerlig** i en punkt $a \in D_f$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Definitionen säger alltså att en funktion är kontinuerlig i en viss punkt om följande gäller:

- Funktionen är definierad i punkten, dvs det finns ett funktionsvärde i punkten
- Funktionen har ett gränsvärde när x närmar sig punkten
- Funktionsvärdet och gränsvärdet är lika

Definitionen ovan talar om vad det betyder att en funktion är kontinuerlig i en punkt. Om en funktion uppfyller denna definition för alla punkter i definitionsmängden säger man att det är en **kontinuerlig funktion**.

Vanliga ingenjörsmässiga **tolkningar av kontinuitet:**

> ”Små ändringar i variabeln ger bara små ändringar i funktionen (inga hopp).”
> ”Funktionsgrafen är sammanhängande.”
> ”Man kan rita funktionsgrafen utan att lyfta pennan.”

Dessa tolkningar är inte precisa, men ger en bild av hur man ofta tänker.

Observera att med uttrycket ”kontinuerlig funktion” menar man en funktion som är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd. Om definitionsmängden är ett intervall så har en kontinuerlig funktion en funktionsgraf som är sammanhängande. Men om definitionsmängden inte är ett intervall så behöver grafen inte hänga ihop. Ett enkelt exempel är funktionen $f(x) = 1/x$ vars graf består av två bitar trots att funktionen är kontinuerlig i hela sin definitiosmängd — den är ju inte definierad i origo.

Som ni såg användes gränsvärde i definitionen av kontinuitet. För att vi ordentligt ska förstå begreppet kontinuitet behövs därför nu också en definition av begreppet gränsvärde. Den följer här:

Definition av gränsvärde. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ betyder: för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - L| < \epsilon$ för alla x sådana att $0 < |x - a| < \delta$.

På ren svenska betyder detta: vi kan få funktionsvärdena $f(x)$ hur nära talet L som helst bara genom att välja x tillräckligt nära (men inte lika med) a. Obs att funktionsvärdet $f(a)$ inte spelar någon roll för gränsvärdet när x närmar sig a.

Alternativt skrivsätt: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ kan också skrivas $f(x) \to L$ då $x \to a$.

Syftet med gränsvärdesdefinitionen är att tala om vad begreppet gränsvärde betyder. Sedan använder vi definitionen för att härleda räkneregler för gränsvärden som gör det lättare att räkna på gränsvärden. Man använder sällan definitionen för att räkna, men i svåra fall, när inget annat hjälper, måste vi använda den.

Räkneregler för gränsvärden. Om vi vet att $f(x) \to L$ och $g(x) \to M$ då $x \to a$ så gäller att

> $f(x) + g(x) \to L + M$ då $x \to a$
> $f(x)g(x) \to LM$ då $x \to a$
> $f(x)/g(x) \to L/M$ då $x \to a$ förutsatt att $M \neq 0$

Bevis. Vi bevisar den första. Låt $\epsilon > 0$. Om $f(x) \to L$ då $x \to a$ så finns ett tal δ_1 så att $|f(x) - L| < \epsilon/2$ när $0 < |x - a| < \delta_1$. Och om $g(x) \to M$ då $x \to a$ så finns ett tal δ_2

så att $|g(x) - M| < \epsilon/2$ när $0 < |x - a| < \delta_2$. Låt nu δ vara det minsta av de två talen δ_1 och δ_2. Om $0 < |x - a| < \delta$ gäller då att

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| = |f(x)-L+g(x)-M| \leq |f(x)-L|+|g(x)-M| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

och eftersom ϵ var vilket positivt tal som helst så har vi visat att $f(x) + g(x) \to L + M$ när $x \to a$.

Instängningslagen: Om $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ för x i en omgivning av a och dessutom $g(x)$ och $h(x)$ har samma gränsvärde när $x \to a$, så måste även $f(x)$ ha detta gränsvärde. Denna lag är intuitivt ganska uppenbar och vi överlåter det formella beviset åt läsaren.

Gränsvärde av sammansättning: Om $g(x) \to M$ då $x \to a$ och $f(y) \to N$ då $y \to M$ så gäller att $f(g(x)) \to N$ då $x \to a$. Vi lämnar det formella beviset som övning åt läsaren.

Ett viktigt standardgränsvärde. Om vi använder vinkelmåttet radianer så gäller att

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Detta kan bevisas med instängningslagen och olikheten $\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$ som gäller för t nära 0.

Ett par exempel.

1. Med hjälp av standardgränsvärdet ovan får man att $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{t} = 2$.

2. Låt $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$. Då är $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$.
   (Obs att f inte har något funktionsvärde i punkten 4)

Högergränsvärde: Om man i gränsvärdesdefinitionen begränsar sig till x som ligger till höger om a talar man om högergränsvärde, skrivet $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Vänstergränsvärde: Om man i gränsvärdesdefinitionen begränsar sig till x som ligger till vänster om a talar man om vänstergränsvärde, skrivet $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Krav för gränsvärde: För att gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ ska existera krävs att höger- och vänstergränsvärdena existerar och är lika.

Gränsvärde i oändligheten. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ betyder att vi kan få $f(x)$ hur nära L som helst bara genom att välja x tillräckligt stort. Med matematiskt språk: för varje positivt tal ϵ finns ett tal ω så att $|f(x) - L| < \epsilon$ för alla $x > \omega$.

Oändliga gränsvärden: Om man kan få $f(x)$ större än vilket tal som helst bara genom att välja x tillräckligt nära (men inte lika med) a så säger man att $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Detta är ett s k oegentligt gränsvärde, eftersom ∞ inte är ett tal. (Motsvarande kan förstås göras för $-\infty$ också)

Några exempel.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+142}{-x^2+13} = -2$. (Bryt ut x^2 från täljare och nämnare)

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ saknas (det är inte heller ∞ eller $-\infty$). Däremot gäller:

4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

5. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Sats (Viktigt faktum): De elementära funktionerna är kontinuerliga,

dvs alla polynom, rationella funktioner, trigonometriska funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, inversa trigonometriska funktioner

samt

alla kombinationer av sådana funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning

är kontinuerliga överallt där de är definierade.

Bevisidé: Kontinuitet bevaras av de fyra räknesätten och sammansättning. Detta följer av de räkneregler med mera för gränsvärden som vi redan har bevisat. För att bevisa satsen räcker det alltså att bevisa att några särskilt enkla funktioner är kontinuerliga: konstanta funktioner, x, $\sin x$, e^x och några till. Detta gör man med definitionen.

Exempel. Om $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x^2+3}$, så är $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/3$. Det ser man direkt på detta sätt: Eftersom f är elementär så är den kontinuerlig överallt där den är definierad, och den är definierad i 0, därför är gränsvärdet när x närmar sig 0 lika med $f(0)$ som är $1/3$.

Konvention: Vi kommer ofta att prata om funktioner som är kontinuerliga på slutna och begränsade intervall. När vi säger att en funktion är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$, så menar vi att funktionen är kontinuerlig i den mening vi angett tidigare i alla punkter mellan a och b samt att $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ och $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Sats om största/minsta värde: Om f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ så antar f ett största och ett minsta värde när x varierar i $[a, b]$.

Bevisskiss. Vi bevisar först att f som är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ måste vara uppåt begränsad. Om f inte är uppåt begränsad så går det att i intervallet $[a, b]$ hitta en följd av tal $x_1, x_2, x_3, \dots$ så att $f(x_n) \to \infty$. Det går också att välja denna följd av punkter så att den konvergerar mot någon punkt x^* i intervallet $[a, b]$ (detta är inte helt självklart, men det följer av något som kallas Bolzano-Weierstrass sats). Nu har vi alltså att $f(x_n) \to \infty$ samtidigt som $f(x_n) \to f(x^*)$ eftersom f är kontinuerlig. Men det är en motsägelse, eftersom $f(x^*)$ är ett ändligt tal. Om f inte är uppåt begränsad får vi alltså en motsägelse och vi drar slutsatsen att f måste vara uppåt begränsad. På liknande sätt bevisar man att f måste vara nedåt begränsad. Nu ska vi visa att f måste anta ett största värde. Vi vet att mängden av alla funktionsvärden $f(x)$, när x tillhör intervallet $[a, b]$, är icke-tom och uppåt begränsad. Enligt supremumegenskapen måste det då finnas en minsta övre gräns till den mängden. Sätt $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Vi ska se att M måste vara funktionens största värde. Vi vet redan att $M \geq f(x)$ för alla x i $[a, b]$ så det vi behöver visa är att det finns ett x i $[a, b]$ så att $f(x) = M$. Om det inte finns något sådant x så är $M - f(x) > 0$ för alla x i $[a, b]$ och därför är funktionen $g(x) = 1/(M - f(x))$ kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ och enligt vårt resonemang ovan måste då g vara begränsad. Det finns alltså en konstant C sådan att $g(x) < C$ dvs $1/(M - f(x)) < C$ för alla x i $[a, b]$. Det betyder att $f(x) < M - 1/C$ för alla x i $[a, b]$ vilket motsäger det vi vet om M, dvs att M är det minsta tal som är större än eller lika med alla funktionsvärden. Om det inte finns något x sådant att $f(x) = M$ får vi alltså en motsägelse och vi drar slutsatsen att det finns ett sådant x, dvs f antar ett största värde. På samma sätt visar man att f antar ett minsta värde.

Sats om mellanliggande värden: Om f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ och f antar värdet r och värdet s, så måste f också anta alla värden mellan r och s.

Bevisskiss. Beviset liknar beviset för att f antar ett största och ett minsta värde och involverar supremumegenskapen för de reella talen. Vi antar att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och r och s är två funktionsvärden och γ är något tal sådant att $r < \gamma < s$. Bilda mängden av alla x i $[a, b]$ sådana att $f(x) < \gamma$. Denna mängd är icke-tom och uppåt begränsad så den har ett supremum, kalla detta supremum för c. Nu ska vi visa att $f(c) = \gamma$. Om $f(c) < \gamma$ så finns något intervall runt c så att $f(x) < \gamma$ för alla x i det intervallet, eftersom f är kontinuerlig. Men detta motsäger att c är en övre gräns till mängden av alla x sådana att $f(x) < \gamma$. Om $f(c) > \gamma$ så finns något intervall runt c så att $f(x) > \gamma$ för alla x i det intervallet, eftersom f är kontinuerlig. Men detta motsäger att c är den minsta övre gränsen till mängden av alla x sådana att $f(x) < \gamma$. Vi måste alltså ha att $f(c) = \gamma$ och att alla mellanliggande värden antas.

Ett par exempel.

1. Ekvationen $x^3 + x + 1 = 0$ har garanterat en lösning i intervallet $[-1, 1]$. Detta följer av satsen om mellanliggande värden, eftersom $f(x) = x^3 + x + 1$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[-1, 1]$ och $f(-1) < 0$ medan $f(1) > 0$. (Med samma metod kan man visa att lösningen, som är unik (varför?), ligger mellan -1 och $-1/2$.)

2. Funktionen

$$f(x) = \frac{\sin^3 x + \tan x}{x^5 + \cos x}$$

måste anta ett största och ett minsta värde när x varierar i $[0, 1]$. Detta följer av satsen om största/minsta värde, eftersom f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0, 1]$.