KTH Teknikvetenskap

Envariabelanalys

Tomas Ekholm

Institutionen för matematik

7 januari 2018

Innehåll

Föreläsningsplan

Nr	Namn	Innehåll	Uppgifter
1	Matematisk struktur, utsagor och reella tal	1 – 2	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.4, 2.6
2	Funktioner, inverterbarhet och trigonometri	3.1 – 3.4	3.1, 3.5, 3.7, 3.8, 3.9
3	Cyklometriska funktioner, $x \mapsto a^x$ och $x \mapsto \log_a x$	3.5 – 3.9	3.11, 3.13, 3.15, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24
4	Talföljder, Binomialsatsen	4.1 – 4.2	4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.8
5	Talet e, standardgränsvärden vid ∞	4.3 – 4.5	4.5, 4.10, 4.12, 4.14, 4.15
6	Gränsvärden för funktioner vid ∞ och lokalt	5 – 6	5.1, 5.5, 5.4, 6.2, 6.3
7	Kontinuitet och lokala standardgränsvärden	7	7.1, 7.2, 7.4, 7.5
8	Derivata, linjär approximation	8.1 – 8.5	8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.24
9	Extrempunkter, konvexitet och optimering	8.6 – 8.14	8.7, 8.8, 8.10, 8.13, 8.17, 8.18, 8.26
Ö9	Återkopplingsmoment 1		
10	Taylors formel m.h.a. derivata	9	9.1, 9.3, 9.6, 9.8, 9.9
11	Serier	10	10.1, 10.2, 10.5, 10.6
12	Integralens definition och räkneregler	11.1 – 11.5	11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.7
13	Analysens huvudsats och integrationstekniker	11.6 – 11.10	11.5, 11.6, 11.13, 11.19 11.22
14	Taylors formel m.h.a. integration	11.11	11.14, 11.15, 11.16, 11.21
15	Generaliserade integraler vid ∞	12	12.3, 12.4, 12.6, 12.7, 12.8
16	Lokal integrerberhet	13	13.1, 13.2, 13.3, 13.4
Ö16	Återkopplingsmoment 2		
17	Integralens tillämpningar	14	14.5, 14.11, 14.13, **??**
18	Differentialekvationer	15	15.4, 15.10
19	Repetition teorifrågor	1 – 15	
20	Extenta 2017-01	1 – 15	
21	Extenta 2017-04	1 – 15	

Återkopplingsmoment

Förekommer på övningarna 6 oktober respektive den 21 november.

Syfte

- Studenterna skall träna sig i att utrycka sig matematiskt,
- utveckla förmåga att själv bedöma korrekthet i lösningar, egna och andras,
- utvärdera sin egen kunskapsnivå.

Praktiskt

Givet är påståenden, som är antingen sanna eller falska. Uppgiften är att

- avgöra vilka som är sanna och vilka som är falska,
- bevisa de sanna,
- hitta motexempel mot de falska (och bevisa att det är ett motexempel).

Fokus är på att skriva en presentationsmässigt så bra lösning som möjligt. Bevis- och förklaringsbördan ligger på er. Lösningen skall vara helt begriplig även för någon som inte själv kan lösa problemet, och som aldrig har löst ett liknande problem.

Därefter samlas lösningarna in, och delas ut till andra studenter. Uppgiften är sedan att läsa igenom lösningarna och svara på:

- Är det här övertygande? Är jag helt övertygad om att de sanna påståendena är sanna och att de falska är falska? Är det bortom allt rimligt tvivel rätt, eller finns några logiska luckor?
- Förstår du varför allting är rätt? Är alla implikationer riktiga (och åt rätt håll)?
- Om det inte är perfekt (det är det inte):
  - vilka är de logiska luckorna?
  - vilka saker är oklara eller svåra att förstå?

Därefter samlas lösningarna in som närvarokontroll, och alla närvarande som arbetat seriöst blir godkända och får bonuspoäng.

Därutöver ges en möjlighet att lämna in en ”perfekt” lösning till nästa gång, som ni får lärarfeedback på. Detta sker helt utom tävlan, men skall ses som en utmaning.

1 Att läsa innan vi börjar

1.1 Varför läsa matematik?

Studier av matematisk teori är ett ypperligt tillfälle att lära sig att analysera, resonera, argumentera, strukturera och ordna. Matematik bygger på abstraktion och den som behärskar abstraktion besitter en enorm styrka i analytiska sammanhang.

Många fenomen i vår värld beskrivs av matematiska modeller vars analys kräver en förtrogenhet med mer eller mindre avancerad matematik.

1.2 Uppmaning till läsaren av detta häfte

Detta är ett häfte, som på ett kompakt vis beskriver de grundläggande begreppen inom envariabelanalys. Läsaren uppmanas att läsa häftet med ett räkneblock bredvid sig för att komplettera med de steg som utelämnas. Dessa steg ska förhoppningsvis vara möjliga för den engagerade läsaren att genomföra. Det är med andra ord inte förväntat att läsaren endast ska kunna sitta med häftet och tillgodogöra sig innehållet. Till varje kapitel finns det övningar för att läsaren ska kunna se om vederbörande har tillgodogjort sig materialet.

För de läsare som inte är vana att arbeta med abstrakta synsätt kommer häftet kanske att verka onödigt komplicerat skrivet. Abstraktioner kan verka krångligt för den som är ovan, men för den som blivit van med abstraktioner är de en enorm källa till förenkling. Abstraktion möjliggör att metoder, designer och förhållningssätt kan få större genomslagkraft och bli applicerbara i många konkreta situationer. Det är i denna anda som detta häfte är skrivet. Se detta som en möjlighet att lära dig det abstrakta synsätt, som är ett så ovärderligt redskap inom alla vetenskapliga discipliner.

Till de flesta definitioner och satser följer konkretiserande exempel. Dessa exempel är inte i fokus, utan tjänstgör som redskap för att förstå vad definitionen eller satsen innebär.

Att läsa matematik är svårt. Det finns inte några genvägar till att bemästra dess struktur. Fokuserat, målinriktat och reflekterande arbete är den enda vägen till insikt. Med denna insikt följer självförtroende inom abstraktion, generaliserande och analytiskt tänkande. De flesta företags frontlinje utgör utforskning av det okända. Det är inför den situationen en ingenjör måste förbereda sig.

Använd gärna wikipedia för att söka på de begrepp och metoder som ni grubblar på.

I lydelsen till en del uppgifter finns ett datum angivet. Det hör till en tentamen som återfinns på denna sida
http://www.math.kth.se/math/GRU/Extentor2/SF1625.html.

1.3 Lärandemål i SF1673

Studenten förväntas/skall efter genomgången godkänd kurs

- Visa förståelse av funktionsbegreppet, inklusive definitions- och värdemängd, sammansatta och inversa funktioner. (3.1 – 3.2)
- Kunna egenskaperna hos, och definitionen av, de elementära funktionerna: polynom, rationella funktioner, potensfunktioner, exponential- och logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner samt deras inverser, arcusfunktionerna. Kunna deras derivator inkl. härledning. (3.4 – 3.7, 3.9, 8.1 – 8.2, 8.5)
- Kunna definitionen av kontinuitet och gränsvärde samt använda dessa för att beräkna gränsvärden i enklare fall. (4.1, 5.1, 6.1, 7.1)
- Kunna gränsvärdeslagarna inkl. härledning, samt kunna beräkna allmänna gränsvärden med hjälp av dessa samt med Taylors formel och L'Hospitals regel. (4.1, 5.1, 6.1, 8.8, 9)
- Kunna derivatans definition samt kunna härleda allmänna deriveringsregler och tillämpa dem. (8.1, 8.3)
- Kunna formulera, och härleda, medelvärdessatsen (differentialkalkylens), dess konsekvenser för att bestämma var funktioner växer resp. avtar. Kunna använda detta i problem. (8.7)
- Kunna formulera och använda satserna om mellanliggande värden och existens av största och minsta värden för kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade intervall. (7.2)
- Kunna med derivatans hjälp karakterisera lokala och globala extrempunkter, utföra kurvundersökning, samt härleda olikheter. (8.6 – 8.13)
- Kunna bestämma primitiva funktioner till enklare elementära funktioner, inkl. allmänna metoder för detta, bl. a. substitution och partialintegrering samt deras härledning. (11.7 – 11.10)
- Kunna formulera, och härleda, integralkalkylens huvudsats och hur den används för att beräkna integraler med hjälp av primitiva funktioner. (11.7)
- Kunna avgöra huruvida givna enklare generaliserade integraler och serier konvergerar eller divergerar. (10, 12, 13)
- Kunna använda integraler för att härleda formler för kurvlängd, areor och volymer, samt kunna använda formlerna. (14)
- Kunna lösa enklare första ordningens differentialekvationer, specifikt linjära och separabla differentialekvationer. (15.1, 15.4)

- Kunna lösa andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter, inklusive begynnelse- och liknande problem, samt bestämning av partikulärlösning i enklare fall. (15.2 – 15.3)

- Kunna formulera Taylors formel och bestämma Taylorpolynom samt skatta resttermen i enklare fall. (8.4, 9, 11.11)

- Läsa, tolka och tillgodogöra sig en matematisk text, samt att kunna uttrycka sig matematiskt korrekt i beräkningar och bevis. (1 – 15)

- Kunna tolka matematiska koncept och satser intuitvt och grafiskt, t.ex. genom att skissa grafer, förklara den geometriska innebörden av ett argument, eller rita en enkel skiss som belyser idéen bakom ett bevis.

- Visa förståelse för matematiskt teoribygge, t.ex rollen av satser, definitioner och bevis och hur dessa hjälper oss att genomföra beräkningar. Visa förståelse för den matematiska (axiomatiska) metoden genom att kunna analysera satser, skapa motexempel och kunna avgöra vad som är ett bevis och vad som är ett informellt argument.

För högre betyg ska studenten också:

- Kunna lösa svårare, mer sammansatta problem och visa större insikt i teorin och begreppen.

- Visa god förståelse för teorin om kontinuerliga funktioner och reella tal. Specifikt skall rollen av kompletthetsaxiomet kunna förklaras och användas för att visa existens av gränsvärden, mellanliggande värden etc.

- Kunna generalisera och anpassa metoderna till delvis nya situationer.

Kursen är även en inkörsport till den högre matematiken. Detta innebär att ni troligen kommer att på att ändra uppfattning om vad matematik är. Ni kommer att fokusera på analysen av begrepp och på satser, definitioner och bevis. Målsättningen är att ni, efter avslutad kurs, skall ha en annan bild av vad matematik är och vad matematisk kunskap innebär och en mycket djupare förståelse av den matematik som ni lärde er i gymnasiet.

1.4 Definitioner, satser och bevis

Matematik struktureras i huvudsak med hjälp av definitioner och satser. En **definition** är ett införande av ett begrepp. Följande är ett exempel på en definition

Definition 1.1. Ett heltal a är **jämnt** om det finns ett heltal b sådant att $a = 2b$.

En **sats** är inget annat än ett påstående, och ett **bevis** av satsen är ett logiskt bindande resonemang som visar att satsen är sann. Exempelvis har vi

Sats 1.2. *Produkten av två jämna tal är ett jämnt tal.*

BEVIS: Låt a_1 och a_2 vara två jämna tal, d.v.s. enligt definitionen finns det tal b_1 och b_2 sådana att $a_1 = 2b_1$ och $a_2 = 2b_2$. Produkten kan skrivas som

$$a_1a_2 = (2b_1)(2b_2) = 4b_1b_2 = 2c,$$

där $c = 2b_1b_2$. Eftersom c är ett heltal är produkten återigen enligt definitionen ett jämnt tal. ■

1.5 Ekvivalenser och Implikationer

För att kunna resonera och formulera påståenden så används oftast implikationer och ekvivalenser. **Påståenden** eller **utsagor** är information som antingen är sanna eller falska. Exempelvis är det sant att *Människan är ett djur* och att $42 = 42$. Exempel på ett falskt påstående är att $39 = 41$. Ett uttryck som exempelvis $\sqrt{\pi}$ skiljer sig från ett påstående ty det har inget sanningsvärde.

För att kunna analysera ett påståendes sanningsvärde så används ofta sanningsvärdetabeller. Exempelvis definieras sanningsvärdena för **och** (notation $\wedge$) och **eller** (notation $\vee$) följande:

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	S	F
S	F	F
S	S	S

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	S	S
S	F	S
S	S	S

(1.1)

Låt A vara ett påstående. Symbolen $\neg A$ betecknar **icke** A. Påståendet $\neg A$ är sant om A är falskt och falskt om A är sant.

Exempel 1.3. Påståendet ($42 = 42$ och $7 = 9$) är falskt. Medan påståendet ($42 = 42$ eller $7 = 9$) är sant. ▲

Definition 1.4. Låt A och B vara påståenden. Vi definierar påståendet A är **ekvivalent** med B eller i notation $A \iff B$ till att ha sanningsvärdet som ges av följande tabell

A	B	$A \iff B$
F	F	S
F	S	F
S	F	F
S	S	S

(1.2)

Sanningstabellen säger att A är ekvivalent med B om och endast om A och B är sanna eller om A och B är falska.

Exempel 1.5. Påståendet ($7 = 9$ om och endast om $15 = 21$) är sant. ▲

Exempel 1.6. Påståendet ($x^2 = 4$ om och endast om $x = \pm 2$) är sant. ▲

Definition 1.7. Låt A och B vara påståenden. Vi definierar påståendet A **implicerar** B eller i notation $A \implies B$ eller $B \impliedby A$ till att ha sanningsvärdet som ges av följande tabell

A	B	$A \implies B$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

(1.3)

Notera att $A \iff B$ om och endast om $A \implies B$ och $A \impliedby B$.

Exempel 1.8. Påståendet (om $7 = 9$ så är $15 = 15$) är sant. ▲

Det är förnuftigt att definiera implikationen så som det är gjort. Ett exempel som hjälper till med intuitionen är kanske följande: Om du ska bevisa *Om det regnar i morgon så har Kalle paraply.* så räcker det med att konstatera att Kalle har paraply givet att det regnar i morgon. Fallet att det inte regnar är ointressant!

1.6 Mängder

En **mängd** är en samling ting, exempelvis tal, symboler eller andra mänger. Dessa ting kallar vi för **element** i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Vi använder oss då av en kommaseparerad uppräkning av elementen innanför symbolerna $\{\}$. Ett sådant exempel är mängden

$$A = \{1, 3, a, 7, Pelle\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a, 7$ och $Pelle$. Vi säger att A är mängden av $1, 3, a, 7$ och $Pelle$.

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x **tillhör** A. Exempelvis gäller att $3 \in \{1, 3, 7\}$ och $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett element x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den **tomma mängden** innehåller ingenting och betecknas $\varnothing$.

Ett annat sätt att beskriva en mängd är att skriva

$$\{x \in D : \text{villkor på } x\}. \tag{1.4}$$

Med detta menar man mängden av alla element i D som uppfyller de givna villkoren. Vi tar oss även friheten att utelämna mängden D om den är given utifrån villkoren på x. Som exempel tar vi

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \colon n \text{ är udda}\} = \{n \colon n \text{ är ett positivt udda heltal}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} : y > 2\}.$$

Mängden B innehåller alla udda positiva heltal, medan C innehåller alla element från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ som är större än 2. Alltså har vi

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Det finns ytterligare ett sätt att beskriva mängder, nämligen att skriva dem på formen

$$\{\text{uttryck i } x \colon x \in D\}.$$

Med detta menar man mängden av värden som uttrycket kan anta när x löper genom alla element i mängden D. Som exempel tar vi

$$E = \{2n \colon n \in \{1, 2, 3, \ldots\}\}.$$

Detta är helt enkelt ett alternativt sätt att beskriva mängden av jämna positiva heltal. Med andra ord gäller att

$$\{2n \colon n \in \{1, 2, 3, \ldots\}\} = \{n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \colon n \text{ är jämnt}\}.$$

Exempel 1.9. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A : x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A : x < 3\} = \varnothing$. Vidare har vi att $4 \in A$ och $4 \notin B$. ▲

Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

Vi använder även notationen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ för att säga att $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ och $a_n \in A$.

Definition 1.10. Låt A och B vara mängder. Vi säger att A är en **delmängd** av B om för varje $x \in A$ så gäller att $x \in B$. Detta betecknas $A \subset B$.

Exempel 1.11. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subset \{1, 3, a\}$. ▲

Definition 1.12. Antag att A och B är mängder. **Unionen** av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. **Snittet** av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.

Exempel 1.13. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$ och $B = \{5, 3, 4711\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 4711\}$ och $A \cap B = \{3, 5\}$. ▲

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de **naturliga talen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Tar vi med negativa tal får vi **heltalen**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Beteckningen kommer från tyskans *zahl* som betyder tal. Bråken eller de **rationella talen**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \colon a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Här kommer beteckningen från engelskans *quotient*. Med $\mathbb{R}$ betecknar vi de **reella talen**. De reella talen kan ses som mängden av alla tal på tallinjen, exempelvis $0, -1, 3/2, -527/3, \sqrt{2}$ och π. Det ligger utanför ramarna för detta häfte att göra en stringent definition av de reella talen. Vi betecknar med

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \colon a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i} \text{ är den imaginära enheten}\}$$

de **komplexa talen**. Notera att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Det sista, att $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, följer eftersom de komplexa talen med endast realdel kan identifieras med det reella talen.

Exempel 1.14. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant 0\}$. ▲

Exempel 1.15. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} : n = 2k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2k \colon k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. ▲

Exempel 1.16. Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att $\{-1, 1\} \in A$, det vill säga mängden $\{-1, 1\}$ är ett element i mängden A. Observera att $-1 \notin A$. ▲

Låt A vara en mängd. För att ta bort element ur A används symbolen $\setminus$. Vi definierar $A \setminus B = \{x \in A \colon x \notin B\}$. Exempelvis är $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mängden av alla reella tal utom 0 och 1.

1.7 Lite historik om mängdlära

Under den senare delen av 1800-talet chockerade Georg Cantor den matematiska världen genom att visa att det finns flera oändligheter. Speciellt visade han att antalet delmängder till en given mängd är större än antalet element i mängden. Intresset för mängdteori växte och en av pionjärerna för den formella aspekten av ämnet var Gottlob Frege. Han försökte se mängdteorin som en grund för matematiken. Mitt under skrivandet av sin bok i ämnet fick han ett brev från en viss ung herre vid namn Bertrand Russell. Russell hade noterat att allt inte stod rätt till i Freges system. Enligt Frege kunde en mängd specificeras med en formel som utgör en restriktion på de element som ingår i mängden. Det var möjligt att bilda mängden av alla x som uppfyller villkoret $P(x)$, där $P(x)$ är ett påstående som beror av x. I symboler blir det

$$\{x\colon P(x)\},$$

jämför med (1.4).

Russells paradox bestod av att han valde $P(x)$ till $x \notin x$ och bildade mängden

$$A = \{x\colon x \notin x\},$$

som är som en oändlig rekursion. Vi får då att $A \in A$ medför att $A \notin A$ och omvänt att $A \notin A$ medför att $A \in A$. Detta är uppenbarligen en logisk motsägelse.

Många försökte rädda mängdteorin på olika sätt. Russell själv införde sin så kallade typteori med olika nivåer av mängder, där han kunde undvika paradoxer. Det mest framgångsrika förslaget kom 1908 från Ernst Zermelo och sedemera Adolf Fraenkel. Deras huvudidé var att man bara kunde bilda mängder på formen $\{x \in A\colon P(x)\}$, där A var en given mängd. I praktiken underförstår man ofta mängden A och skriver lite slarvigt $\{x\colon P(x)\}$. Dock bör man således vara en smula försiktig vid handhavandet av mängder.

Ett tack till Lars Svensson för detta delavsnitt.

1.8 Övningar

Övning 1.1. Definiera vad som menas med ett udda heltal. Visa därefter med hjälp av definitionen att

a) summan av tre udda tal är udda

b) produkten av två udda tal är udda

Övning 1.2. Lös ekvationerna

a) $\sqrt{2-x} = x$

b) $\sqrt{2x+9} - 1 = x$

Reflektera över användningen av implikationer och/eller ekvivalenser i lösningen.

Övning 1.3. Låt A och B vara påståenden. Visa med hjälp av sanningsvärdetabeller att

a)

$$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B) \tag{1.5}$$

b) De Morgans lagar gäller:

$$(\neg A \wedge \neg B) \iff \neg(A \vee B) \tag{1.6}$$

Övning 1.4. Låt $X = \{-1, \{-2\}, 0, \varnothing, \{\varnothing, 1\}\}$. Vilka av följande påståenden är sanna?

a) $-1 \in X$

b) $\varnothing \subset X$

c) $\varnothing \in X$

d) $1 \in X$

e) $\{\varnothing\} \in X$

f) $-2 \in X$

g) $\{0, \{\varnothing, 1\}\} \subset X$

Övning 1.5. Betrakta följande påståenden:

a) Min hatt, den har tre kanter.

b) Tre kanter har min hatt.

c) Och har den ej tre kanter, så är den ej min hatt.

Låt $A(x)$ vara påståendet *x är min hatt* och låt $B(x)$ vara påståendet *x har tre kanter*. Skriv ovanstående påståenden med hjälp av $A(x)$, $B(x)$, implikationspilar ($\implies$) och negationer ($\neg$).

Är några av dessa påståenden ekvivalenta? Implicerar något av dem något av de andra? Skriv upp alla implikationer som gäller mellan dessa påståenden.

Övning 1.6. Visa med hjälp av sanningstabeller att $A \implies B$ är ekvivalent med $\neg B \implies \neg A$.

Övning 1.7. Låt $b \geqslant 2$ vara ett heltal. Definiera vad som menas med att ett heltal är delbart med b. Visa därefter med hjälp av definitionen att

a) om a_1 och a_2 båda är delbara med b så är $a_1 - a_2$ också delbart med b,

b) om a är delbart med 13 så är $a + 1$ inte delbart med 13.

Övning 1.8. Låt $A(x)$ vara påståendet $x^2 = 25$ och låt $B(x)$ vara påståendet $x \leqslant 10$. Bestäm sanningsvärdet för alla påståenden i nedanstående tabell.

$A(0)$	$B(0)$	$A(0) \implies B(0)$
$A(5)$	$B(5)$	$A(5) \implies B(5)$
$A(10)$	$B(10)$	$A(10) \implies B(10)$
$A(15)$	$B(15)$	$A(15) \implies B(15)$

Visa att det gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att $A(x) \implies B(x)$.

2 Delmängder av reella tal

2.1 Intervall

Låt a och b vara reella tal. Följande mängder kallas **intervall**

a) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\}$,

b) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x < b\}$,

c) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leqslant b\}$,

d) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$,

e) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x\}$,

f) $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\}$,

g) $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant b\}$,

h) $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$,

i) $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Här står tecknet $:=$ för att vänsterledet är definierat som högerledet. Talen a och b kallas **ändpunkter** eller **randpunkter** till intervallet. Vi använder symbolen [om a tillhör intervallet och (om a inte tillhör intervallet. De fem sista intervallen är obegränsade och har färre randpunkter. Oändlighetssymbolen ∞ används bara för att beteckna att intervallet inte tar slut och den är alltså inte beteckningen för någon märklig sorts randpunkt.

Om alla randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **slutet**. Om inga av randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **öppet**.

Exempel 2.1. Intervallen $(1, 5)$, $(-\infty, 4)$, $(-3, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är öppna intervall eftersom alla randpunkter till intervallen ej tillhör intervallen. Intervallen $[1, 4]$, $[-2, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är slutna för alla randpunkter till intervallen även tillhör intervallen. Intervallet $[2, 3)$ är varken öppet eller slutet. Läsaren kan notera att intervallet $(-\infty, \infty)$ både är öppet och slutet, eftersom det inte finns några randpunkter. ▲

2.2 Egenskaper för delmängder av reella tal

En **omgivning** till en punkt $a \in \mathbb{R}$ är ett öppet intervall I som innehåller a. Exempelvis är det öppna intervallet $(0, 1)$ en omgivning till talet $3/4$

och intervallen $(-1/n, 1/n)$ för $n > 0$ är alla omgivningar till 0. En **punkterad omgivning** till en punkt a är en omgivning till a där vi har tagit bort talet a.

Exempel 2.2. Mängden $\{x \in (-1, 2) : x \neq 0\} = (-1, 0) \cup (0, 2)$ är en punkterad omgivning till 0. ▲

Definition 2.3. Ett tal m sägs vara en **övre begränsning** av en mängd A om $x \leqslant m$ för varje $x \in A$. En mängd som har en övre begränsning kallas **uppåt begränsad**, annars **uppåt obegränsad**.

Undre begränsning till en mängd, en **nedåt begränsad** mängd och en **nedåt obegränsad** mängd definieras på ett analogt sätt. En mängd som är uppåt begränsad och nedåt begränsad sägs vara **begränsad**, annars **obegränsad**. Exempel på begränsade mängder är $[1, 3]$, $(-2, 10)$ och $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 25\}$. Talet 5 är en övre begränsning av $[1, 3]$ och 6 är en övre begränsning av mängderna $(1, 6)$ och $[1, 6]$. Ett exempel på en obegränsad mängd är intervallet $[2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon 2 \leqslant x\}$ som är uppåt obegränsad och nedåt begränsad.

Definition 2.4. Ett tal m sägs vara **supremum** av en mängd A och betecknas $\sup A$ om m är den minsta övre begränsningen av A.

Exempel 2.5. Supremum är enkelt att finna för uppåt begränsade intervall. Vi har att

$$\sup[a, b] = \sup[a, b) = \sup(-\infty, b) = b.$$

▲

På samma vis definieras **infimum** av en mängd A som den största undre begränsningen av A och betecknas $\inf A$.

Man kan visa att de reella talen uppfyller **supremumegenskapen**, som säger att varje uppåt begränsad delmängd av de reella talen har en minsta övre begränsning. I denna text kommer vi ta de reella talen och supremumegenskapen för givna.

Supremumegenskapen säger med andra ord att om A är en mängd av reella tal som är uppåt begränsad så finns talet $\sup A$.

Exempel 2.6. Låt

$$A = \left\{ \frac{4n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Visa att $\sup A = 4$.

LÖSNING: Enligt definitionen för supremum gäller det att visa att 4 är en övre begränsning av A och att det inte finns en övre begränsning av A som är mindre än 4.

För att se att 4 är en övre begränsning av A räcker det med att notera att för en godtycklig punkt i A gäller att

$$a_n := \frac{4n}{n+1} \leqslant \frac{4n}{n} = 4.$$

Alltså är alla $a_n \leqslant 4$ och därmed är 4 en övre begränsning av A. Faktiskt gäller att $a_n < 4$ med strikt olikhet, men det kvittar, givet det vi ska visa.

Det återstår att visa att det inte kan finnas några mindre övre begränsningar av A än 4. Låt oss utföra ett motsägelsebevis. Anta att det finns en mindre övre begränsning av A än 4. Vi kan skriva detta tal på formen $4-\varepsilon$, där något $\varepsilon > 0$. För att få en motsägelse måste vi visa att det finns tal i A som är större än $4-\varepsilon$, vilket skulle motsäga att $4-\varepsilon$ är en övre begränsning.

Vi kan skriva om a_n enligt följande:

$$a_n = \frac{4n}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1}. \tag{2.1}$$

Frågan är med andra ord om vi kan finna ett n sådant att

$$4 - \frac{4}{n+1} > 4 - \varepsilon? \tag{2.2}$$

Löser vi ut n får vi att (2.2) gäller om och endast om

$$n > \frac{4}{\varepsilon} - 1. \tag{2.3}$$

För alla n som uppfyller att $n > 4/\varepsilon - 1$ gäller alltså att $a_n > 4 - \varepsilon$. Vi har fått en motsägelse och alltså är 4 den minsta övre begränsningen. ▲

Exempel 2.7. Ett sätt att illustrera supremumegenskapen är att visa att de rationella talen $\mathbb{Q}$ inte uppfyller denna egenskap, d.v.s. varje uppåt begränsad delmängd av $\mathbb{Q}$ har inte en minsta övre begränsning i $\mathbb{Q}$. Studera mängden $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$. Om vi godkänner reella tal så är $\sup A = \sqrt{2}$. Detta tal är dock inte ett rationellt tal (se wiki-link om ni inte har sett det tidigare). Antag att vi har funnit ett rationellt tal q som är supremum av A, d.v.s. q är en övre begränsning av A och q är den minsta övre begränsningen av A.

Eftersom $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ så följer att q är antingen större eller mindre än $\sqrt{2}$. Om $q < \sqrt{2}$ så följer att det finns rationella tal i intervallet $(q, \sqrt{2})$ som strider mot att q är en övre begränsning. Om $q > \sqrt{2}$ så finns det rationella tal i intervallet $(\sqrt{2}, q)$ som är mindre övre begränsningar än q. Alltså är q inte den minsta övre begränsningen av A. ▲

2.3 Övningar

Övning 2.1. Visa att mängden

$$M = \left\{ \frac{6}{(x-2)^3} : x \leqslant 0 \right\} \tag{2.4}$$

är begränsad och bestäm $\inf M$ och $\sup M$. Gissa först och visa därefter att dina gissningar stämmer.

Övning 2.2.

a) Bevisa att det inte finns något största reellt tal. Med andra ord, visa att det för varje reellt tal a finns ett reellt tal b sådant att $b > a$.

b) Kan man på liknande sätt visa att det inte finns något största naturligt tal?

Övning 2.3. Visa att mängden

$$M = \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{2}{m} : n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \tag{2.5}$$

är begränsad och bestäm $\inf M$ och $\sup M$.

Övning 2.4. Visa att mängden

$$M = \left\{ x - \frac{1}{x} : x > 0 \right\} \tag{2.6}$$

varken är uppåt eller nedåt begränsad.

Övning 2.5. Låt

$$M = \left\{ \frac{3n+2}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}. \tag{2.7}$$

Bestäm $\sup M$ och $\inf M$.

Övning 2.6. Låt

$$M = \left\{ \sqrt{2+x^2} - x : x \geqslant 0 \right\}. \tag{2.8}$$

Bestäm $\sup M$ och $\inf M$.

Övning 2.7. Skriv följande mängder som ett enda intervall

a) $(1, 5) \cup (2, 7)$

b) $(1, 5) \cap (2, 7)$

c) $(1, 5) \setminus (2, 7)$

d) $(2, 5) \cup (1, 7)$

e) $(2, 5) \cap (1, 7)$

Övning 2.8. Hitta reella tal $a < b$ och $c < d$ så att $(a, b) \cup (c, d)$ inte är ett intervall.

Övning 2.9. Låt

$$A = \{d \in \mathbb{N} \colon d \text{ är udda}\}.$$

Beskriv mängden $\{d \in A \colon d \text{ är jämnt}\}$.

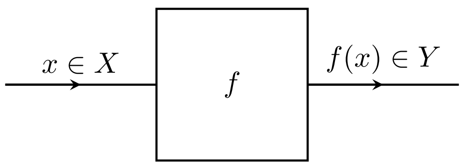
3 Funktioner

3.1 Funktionsbegreppet

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som $f(x) = x^2 + 1$, för $x > 0$. Formeln säger att om vi tar ett tal $x > 0$ så får vi ett nytt tal $f(x) \in \mathbb{R}$ genom att göra beräkningen $x^2 + 1$; till exempel får vi $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi säger att f är en funktion från de positiva reella talen till de reella talen, eftersom det vi stoppar in, x, är ett positivt reellt tal och det vi får ut, $f(x)$, är ett reellt tal. Vi betecknar detta med $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Nu till den allmänna definitionen.

Definition 3.1. Låt X och Y vara mängder. En **funktion** $f\colon X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi skriver $f(x) = y$. Vi säger att x **avbildas** på y och att y är **bilden** av x. Elementet x kallas **argument** till f. Mängderna X och Y kallas **definitionsmängd** respektive **målmängd**. För definitionsmängden för f används även beteckningen D_f.

Kommentar 3.2. Beteckningen $f\colon X \to Y$ utläses: f är en funktion från X till Y. Ett vanligt alternativ till ordet funktion är **avbildning**. Vi kan se funktionen som ett eget objekt som utför en handling som bilden nedan visar.



Exempel 3.3. Ett exempel på en funktion från de positiva reella talen till de reella talen är $f\colon \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\} \to \mathbb{R}$, sådan att $f(x) = 1 + 2 \cdot 3^x$. Definitionsmängden är $D_f = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$ och målmängden är $\mathbb{R}$. ▲

Värdemängden till en funktion $f\colon X \to Y$ definieras som

$$V_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

och beskriver mängden av alla element vi kan få.

Exempel 3.4. Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Ett exempel på funktion $f : A \to B$ ges av $f(n) = 2n$ för $n \in A$. Vi har alltså att $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ och $f(3) = 6$. Per definition måste vi ha $f(x) \in B$ för alla $x \in A$, och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 2 \in B, \quad f(2) = 4 \in B, \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

Vi ser här att värdemängden $V_f = \{2, 4, 6\}$.

I detta exempel definieras funktionen f av formeln $f(n) = 2n$, men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden $A = \{1, 2, 3\}$ kan man till exempel definera funktionen med hjälp av en tabell:

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

Om inget anges om definitionsmängden antas funktionen vara definierad på så stor delmängd av de reella talen som möjligt och målmängd antas alltid vara $\mathbb{R}$. Detta är en konvention mellan er som läsare och oss som skribenter.

Exempel 3.5. Låt $h(x) = 3x^2/2 - x^3$. Detta definierar en funktion h från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vi har exempelvis att

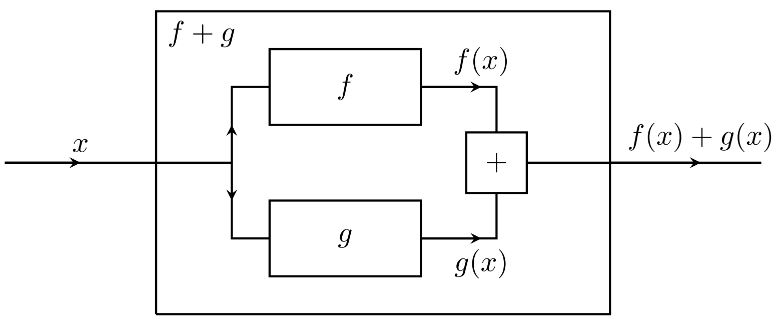
$$h(1) = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad h(-2) = 14.$$

▲

Vi kommer tydligt skilja på f och $f(x)$, det första är funktionen f, medan det andra är funktionens värde i punkten x. Som ett exempel på denna notation så definierar vi summan och produkten av två reellvärda funktioner f och g, sådana att $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$ enligt

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x)\\ (f \cdot g)(x) &:= f(x)g(x)\end{aligned}$$

Bildmässigt kan vi se additionen som



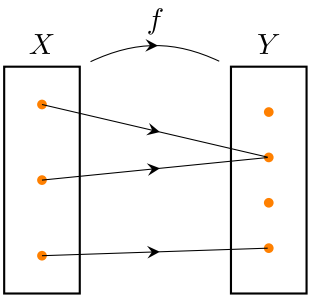
Om vi inte vill namnge den funktion som vi arbetar med eller introducerar används notationen $x \mapsto 1 + x^2$ istället för $f(x) = 1 + x^2$. Denna notation är väldigt vanlig i programmering när man vill definiera anonyma funktioner.

3.2 Inverser och inverterbarhet

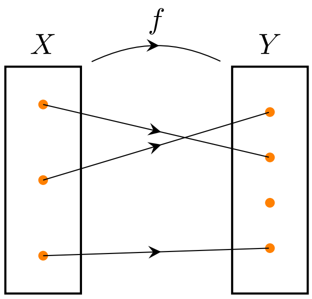
Definition 3.6. En funktion $f\colon X \to Y$ säges vara **injektiv** om det för varje $x, y \in X$ gäller att om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$.

Exempel 3.7. Funktionen $f : [0, 3] \to [0, 10]$ som ges av $f(x) = 2x$ är injektiv ty om $f(x) = f(y)$ så gäller att $2x = 2y$ och därmed att $x = y$. ▲

En logisk omskrivning av definitionen ger att en funktion $f\colon X \to Y$ är injektiv om och endast om det för varje $x, y \in X$ gäller att om $x \neq y$ så är $f(x) \neq f(y)$. Uttryckt i ord säger den här definitionen att funktionen aldrig skickar två olika element i X på samma element i Y.



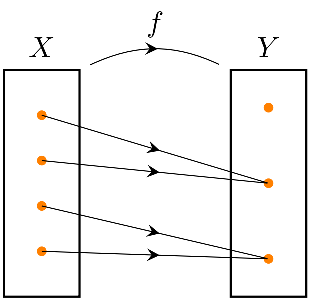
Exempel då f ej är injektiv



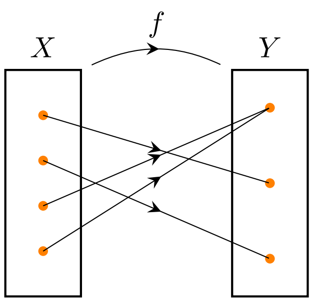
Exempel då f är injektiv

Definition 3.8. En funktion $f\colon X \to Y$ säges vara **surjektiv** om $V_f = Y$.

Varje element i Y är alltså bilden av något x under funktionen f om funktionen är surjektiv. En funktion är surjektiv om och endast om dess målmängd sammanfaller med dess värdemängd.



Exempel då f ej är surjektiv



Exempel då f är surjektiv

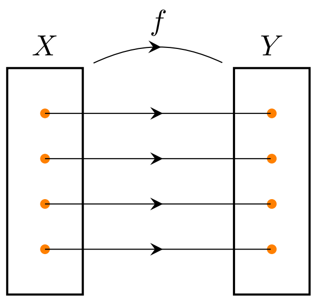
En funktion kan vara surjektiv utan att vara injektiv, och tvärtom.

Exempel 3.9. Låt $\mathbb{R}_+$ beteckna de icke-negativa reella talen. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ som definieras av $f(x) = x^2$. Då är f surjektiv, men inte injektiv — till exempel har vi $f(-2) = f(2) = 4$.

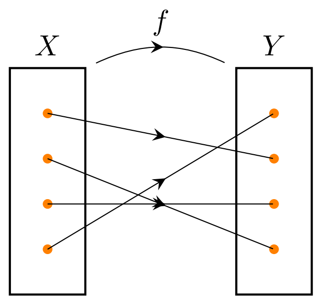
Ett exempel på en funktion som är injektiv men inte surjektiv ges av funktionen i exempel 3.4. Det finns till exempel inget $n \in \{1, 2, 3\}$ sådant att $f(n) = 3$.

▲

Definition 3.10. En funktion $f\colon X \to Y$ som både är injektiv och surjektiv säges vara **bijektiv**, eller en **bijektion**.



Exempel då f är bijektiv



Exempel då f är bijektiv

Definition 3.11. Låt $f\colon X \to Y$ vara en bijektiv funktion. **Inversen** till f är avbildningen $f^{-1}\colon Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där x är det entydiga element i X som uppfyller $f(x) = y$. En funktion som har en invers kallas **inverterbar**.

Vi ser här att både injektivitet och surjektivitet är viktigt. Om f inte är injektiv kan det finnas många $x \in X$ med $f(x) = y$. Om f inte är surjektiv kan det vara så att det inte finns något x med $f(x) = y$. För inversen gäller att $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ för alla $y \in Y$ och $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ för alla $x \in X$.

Exempel 3.12. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^3$. Denna funktion är injektiv och surjektiv, och därmed en bijektion. Inversen till f ges av funktionen $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av $f^{-1}(y) = y^{1/3}$. ▲

Exempel 3.13. Både definitionsmängden och värdemängden måste beaktas när vi undersöker om en funktion är en bijektion. Funktionen $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ med $f(x) = x^2$ är en bijektion, med invers $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Som vi såg tidigare är detta påstående falskt om vi betraktar f definierad på hela $\mathbb{R}$. ▲

Antag att $f\colon X \to Y$ är en injektiv funktion. Då vet vi att vi kan, för varje $y \in V_f$, finna ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$. Men, om Y innehåller element som inte finns i V_f är funktionen f inte surjektiv och därmed inte bijektiv. I detta fall är förutsättningarna för en invers inte uppfyllda. Detta kan i många fall, men inte alla, ses som en teknikalitet. Ty, om vi bara skulle ändra på definitionen av f så att målmängden Y är exakt de element vi kan få, nämligen V_f, så skulle vi ha en bijektiv funktion och alltså en invers. Vi kan säga att varje funktion som är injektiv har en invers definierad på funktionens värdemängd V_f. Dvs, om $g\colon X \to V_g$ är injektiv så är den inverterbar.

Exempel 3.14. Låt $f(x) = x + 2$ vara en funktion definierad för $x \in [0, 3]$. Det är en enkel verifikation att se att f är injektiv. Värdemängden till f är $V_f = [2, 5]$. Alltså är f inverterbar om f ses som funktionen $f\colon [0, 3] \to [2, 5]$. I detta fall är $f^{-1}\colon [2, 5] \to [0, 3]$ och $f^{-1}(y) = y - 2$. ▲

3.3 Egenskaper för reella funktioner

Definition 3.15. Vi säger att en reellvärd funktion f, där $D_f \subset \mathbb{R}$, är **växande på en mängd** $M \subset D_f$ om det för varje $x, y \in M$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) \leqslant f(y)$. Om en funktion är växande på hela sin definitionsmängd kallas f **växande**.

Exempel 3.16. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definierad som $f(x) = x^2$ är växande på mängden $[0, \infty)$, men är inte en växande funktion. ▲

Observera att den konstanta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $f(x) = 42$ är växande. Den är däremot inte strängt växande som definieras enligt:

Definition 3.17. Vi säger att en reellvärd funktion f, där $D_f \subset \mathbb{R}$, är **strängt växande på en mängd** $M \subset D_f$ om det för varje $x, y \in M$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) < f(y)$. Om en funktion är strängt växande på hela sin definitionsmängd kallas f **strängt växande**.

Exempel 3.18. Funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = 3x$ och $g : [1, 3) \to \mathbb{R}$ som ges av $g(x) = \sqrt{x}$ är strängt växande funktioner. ▲

Definition 3.19. En funktion f är **uppåt obegränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt obegränsad och **uppåt begränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt begränsad.

Egenskaper som **avtagande**, **strängt avtagande**, **nedåt obegränsade** och **nedåt begränsade** funktioner definieras på ett analogt sätt. Vi säger att en funktion är **monoton** eller **strängt monoton** i ett intervall om den är växande respektive strängt växande i intervallet eller avtagande respektive strängt avtagande i intervallet.

Exempel 3.20. Funktionen $x \mapsto x^2$ är nedåt begränsad, uppåt obegränsad och varken växande eller avtagande. Om vi betraktar den på intervallet $(-\infty, 0]$ är den dock strängt avtagande och på intervallet $[0, \infty)$ är den strängt växande. ▲

Exempel 3.21. Låt $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ vara en given positiv funktion. Visa att om $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ med $g(x) = xf(x)$ uppfyller att $V_g = [1, 2]$ så är f obegränsad.

Vi visar detta med hjälp av en motsägelse. Antag att f är uppåt begränsad, d.v.s. V_f är uppåt begränsad, vilket i sin tur ger att det existerar ett tal N

sådant att $f(x) \leqslant N$ för varje $x \in (0,1)$. Välj nu ett $M > 1$ sådant att $M \geqslant N$. Vi observerar att $1/2M \in (0,1)$ och att

$$g(1/(2M)) = \frac{1}{2M} \cdot f(1/(2M)) \leqslant \frac{1}{2M} \cdot M = \frac{1}{2} < 1.$$

Detta strider mot att $V_g = [1,2]$, alltså är f obegränsad. ▲

Definition 3.22. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Några exempel på jämna funktioner är: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$ och $x \mapsto |x|$.

Definition 3.23. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Några exempel på udda funktioner är: $x \mapsto x^3$ och $x \mapsto x^7$.

Observera att en funktion som inte är jämn inte behöver vara udda. Exempelvis är $x \mapsto 1 + x$ varken jämn eller udda.

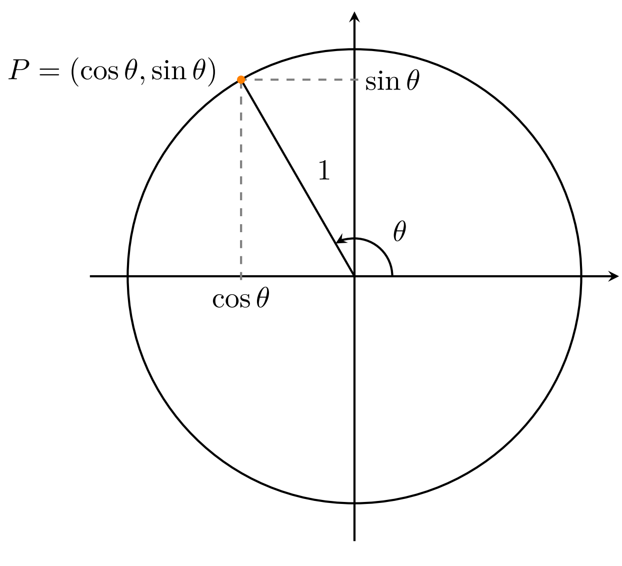
3.4 Trigonometriska funktioner

Vi ska i detta delkapitel definiera sinus och cosinus och vilka grundläggande egenskaper som de besitter.

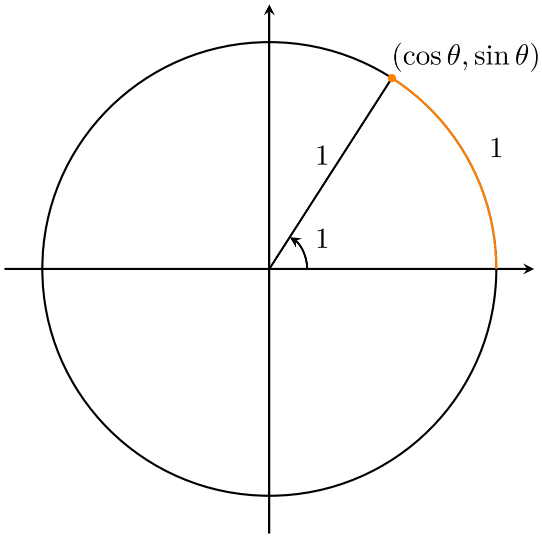
Låt oss betrakta en punkt P på enhetscirkeln vars linje in mot origo bildar vinkeln θ till den positiva delen av x-axeln om vi använder orienteringen moturs från x-axeln. Vi kallar koordinaterna i P för $(\cos\theta, \sin\theta)$. Direkt får vi från Pythagoras sats att

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

vilket kallas för den **trigonometriska ettan**. Där $\sin^n\theta$ för $n \in \mathbb{N}$ är definierat som $(\sin\theta)^n$.



Det är viktigt att vi inför en enhet eller skala för vinkeln θ. Låt oss säga att vinkeln $\theta = 1$ om längden på den cirkelbåge som bildas har längden 1. Denna enhet kallas **radianer** och är på många sätt den naturliga skalan för vinklar. Vi kommer i detta häfte alltid förutsätta att vinklar mäts i radianer.



Vi har bildat funktionerna $\theta \mapsto \cos\theta$ och $\theta \mapsto \sin\theta$ för $\theta \in [0, 2\pi)$. Vi utvidgar dessa funktioner periodiskt till hela $\mathbb{R}$, d.v.s.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\theta + n2\pi),\\ \sin\theta &= \sin(\theta + n2\pi)\end{aligned}$$

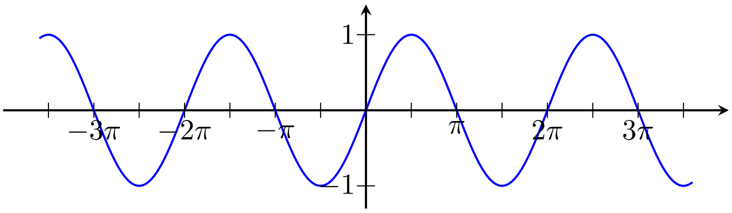
för alla $n \in \mathbb{Z}$. Funktionen $x \mapsto \sin x$ kallas **sinus** och $x \mapsto \cos x$ kallas **cosinus**.

Av symmetriskäl får vi följande relationer direkt från definitionen ovan

$$\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2), \tag{3.1}$$
$$\cos\theta = \sin(\theta + \pi/2), \tag{3.2}$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \tag{3.3}$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \tag{3.4}$$
$$\cos\theta = -\cos(\theta + \pi), \tag{3.5}$$
$$\sin\theta = -\sin(\theta + \pi). \tag{3.6}$$

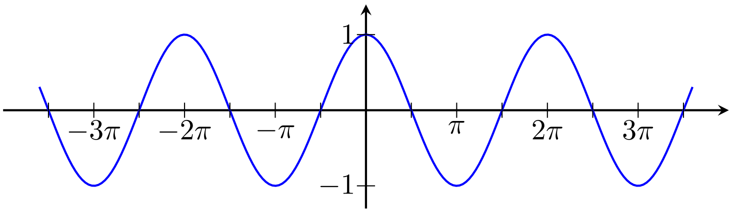
Relationerna (3.3) och (3.4) säger att cosinus och sinus är en jämn respektive udda funktion.

Grafen till funktionerna sinus och cosinus är



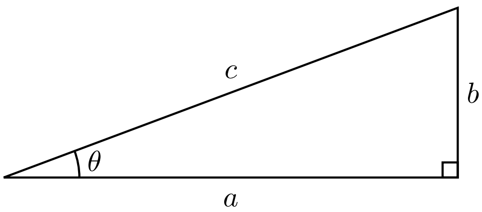
Figur 3.1: Grafen till funktionen $x \mapsto \sin x$.

respektive

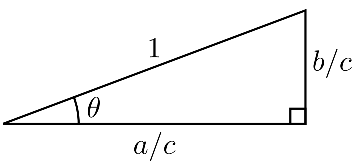


Figur 3.2: Grafen till funktionen $x \mapsto \cos x$.

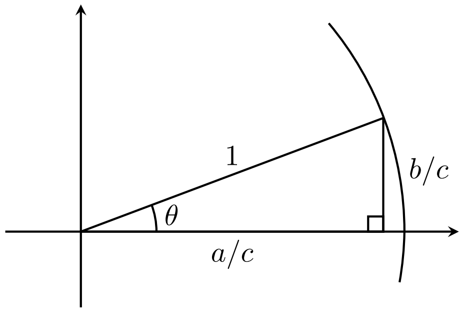
Exempel 3.24. Observera att vi kan med hjälp av sinus och cosinus relatera sidor och vinklar med varandra i rätvinkliga trianglar. Låt oss börja med den rätvinkliga triangeln med sidorna a, b och c



Om vi skalar denna triangel så att hypotenusan får längden 1 så får vi den likformiga triangeln



Om vi nu skriver in denna triangeln i enhetscirkeln så får vi de önskade relationerna



Vi ser att

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \quad \text{och} \quad \sin\theta = \frac{b}{c}. \tag{3.7}$$

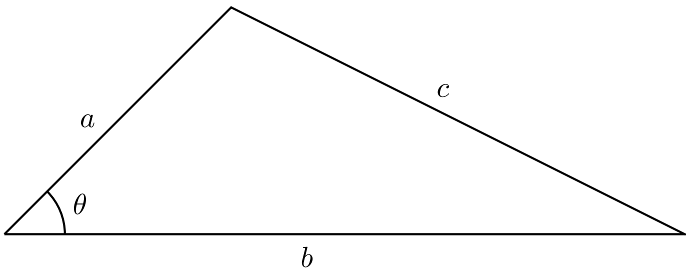
▲

Vi behöver en generalisering av Pythagoras sats som heter Cosinussatsen, nämligen

Sats 3.25 (Cosinussatsen)**.** *Låt a, b och c vara sidlängderna i en triangel. Då gäller att*

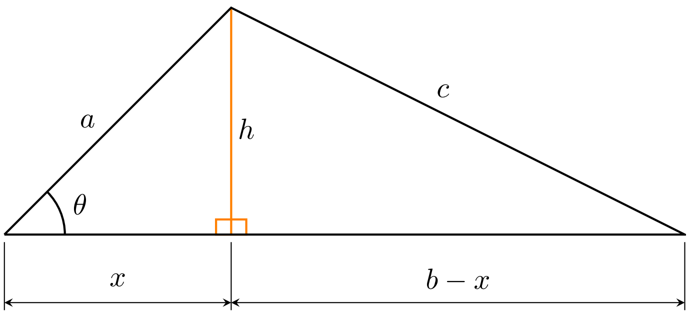
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta, \tag{3.8}$$

där θ är den vinkel i triangeln där sidlängderna a och b möts.



Bevis: I fallet $\theta = \pi/2$ så återfår vi Pythagoras sats. Vi bevisar cosinussatsen för spetsiga och trubbiga vinklar var för sig.

Vi börjar med fallet då vinkeln $\theta < \pi/2$, alltså då θ är spetsig. Vi inför höjden h och låter x vara en del av sidan b som i figuren nedan



Vi använder nu Pythagoras sats i de två rätvinkliga trianglarna och får

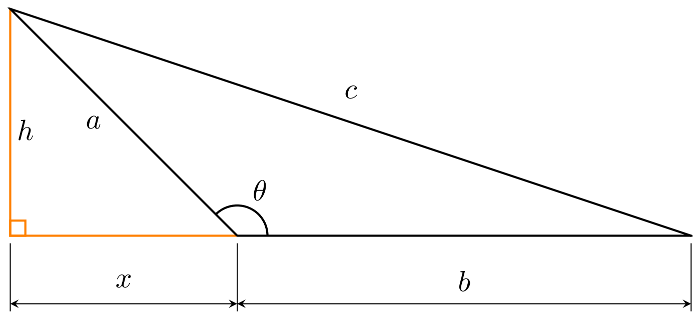
$$\begin{cases} a^2 = h^2 + x^2 \\ c^2 = h^2 + (b-x)^2 \end{cases}$$

Vi löser ut h^2 i den första ekvationen och sätter in resultatet i den andra ekvationen och får

$$c^2 = a^2 - x^2 + (b-x)^2 = a^2 + b^2 - 2bx.$$

Det återstår att konstatera att $x = a\cos\theta$ vilken följer från formel (3.7).

Det andra fallets lösning är näst intill lika. Med hjälp av en bild lämnar vi det som en övning åt läsaren.



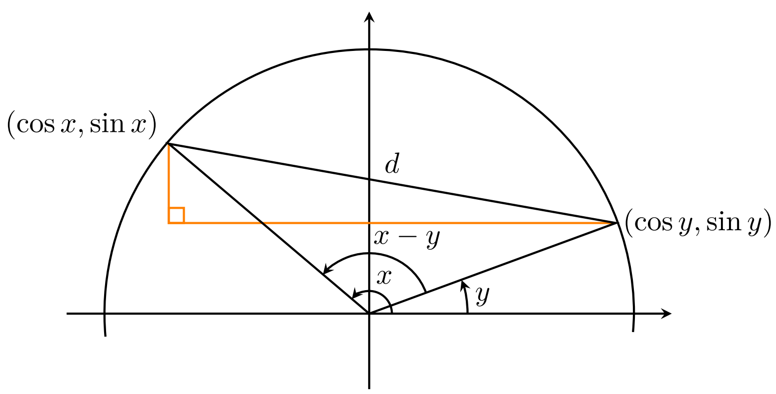
■

Sats 3.26. *Följande identitet gäller*

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \tag{3.9}$$

Bevis: Observera att vi med hjälp av Pythagoras sats får att d i figuren nedan ges av

$$d = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2}.$$



Cosinussatsen 3.25 ger att

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 1 + 1 - 2\cos(x - y).$$

Om vi förenklar med hjälp av den trigonometriska ettan får vi

$$\begin{aligned}
&2 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y = 2 - 2\cos(x - y) \\
&\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)
\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas. ■

Följdsats 3.27. *Följande identiteter gäller*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{3.10}$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{3.11}$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{3.12}$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{3.13}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \tag{3.14}$$

Bevis: Vi bevisar här (3.10). Låt $y = -z$ i (3.9). Vi får då

$$\begin{aligned}
\cos(x + z) &= \cos x \cos(-z) + \sin x \sin(-z) \\
&= \cos x \cos z - \sin x \sin z
\end{aligned}$$

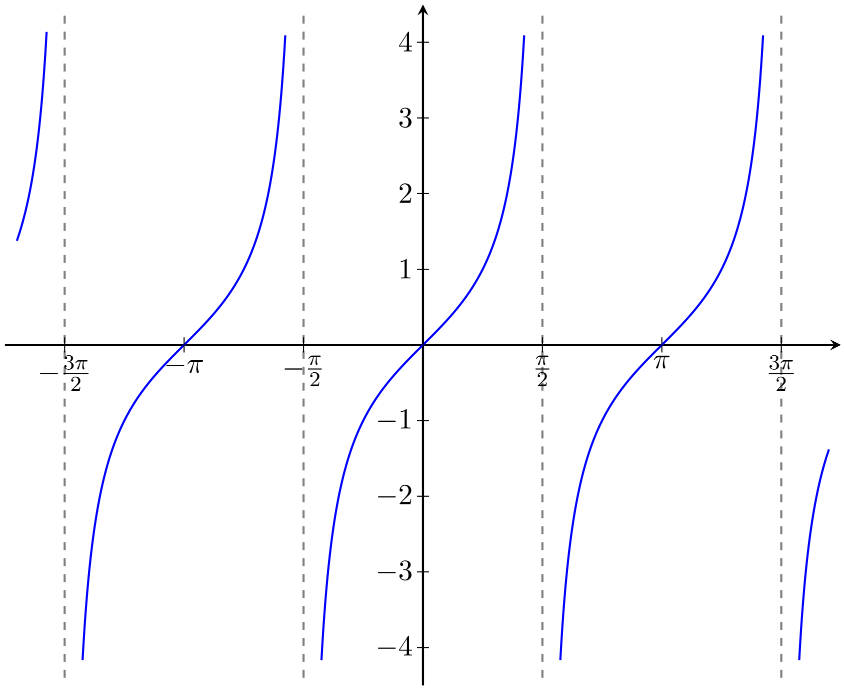
Bevisen för (3.11) – (3.14) följer på liknande vis och med hjälp av (3.1) – (3.6) och lämnas som en övning åt läsaren. ■

Definition 3.28. Funktionen $\tan\colon \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq n\pi/2, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, sådan att

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \tag{3.15}$$

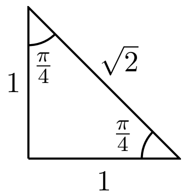
kallas **tangens**.

Grafen för tangens är



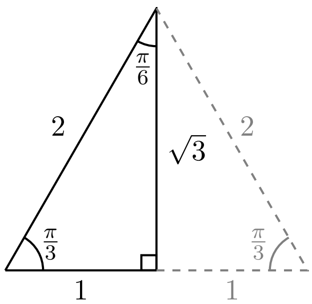
Figur 3.3: Grafen till funktionen $x \mapsto \tan x$.

Exempel 3.29. Låt oss studera två speciella trianglar som ger oss möjlighet att exakt beräkna värdet av de trigonometriska funktionerna för punkterna $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{\pi}{3}$. Vi börjar med en likbent och rätvinklig triangel där kateterna är av längden 1, alltså



som ger att $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och därmed är $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

Nästa triangel är en liksidig triangel med sidan 2 som vi delar mitt itu.



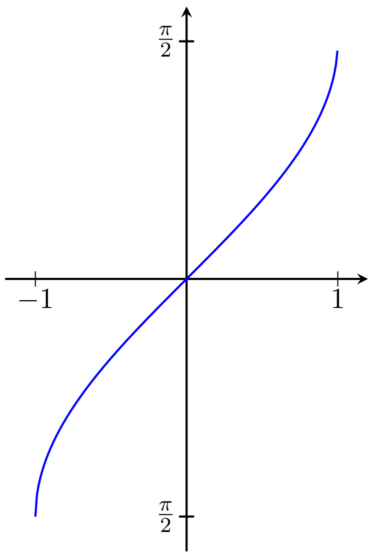
Vi ser att $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ och $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ därmed är $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. ▲

3.5 Cyklometriska funktioner

Vi börjar med att observera att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ sådan att $f(x) = \sin x$ inte är injektiv, ty vi har t.ex. att $f(0) = f(\pi)$, och är därmed inte inverterbar. Om vi däremot begränsar definitionsmängden D_f till det slutna intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ blir f bijektiv och har en invers. Vi gör följande definition:

Definition 3.30. Låt $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till f kallas **arcussinus** och betecknas $f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Observera att den generella formeln $\sin(\arcsin y) = y$ gäller för alla $y \in [-1,1]$ och $\arcsin(\sin x) = x$ gäller för alla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Grafen för arcussinus är



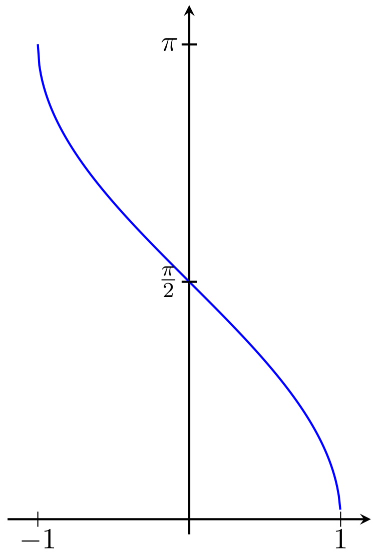
Figur 3.4: Grafen till funktionen $x \mapsto \arcsin x$.

Kommentar 3.31. Vi skulle ha kunnat välja något annat intervall än $[-\pi/2, \pi/2]$ för att få $x \mapsto \sin x$ bijektiv. Detta intervall är dock standardiserat runt om i världen, så om inget annat anges kan man med säkerhet anta att det är detta intervall man menar när man pratar om inversen till $x \mapsto \sin x$.

På liknande sätt konstaterar vi att funktionerna $x \mapsto \cos x$ och $x \mapsto \tan x$ kan göras inverterbara genom att inskränka definitionsmängden. Ett naturligt sätt att välja ett intervall där funktionerna är injektiva är att välja det intervall som är närmast origo.

Definition 3.32. Låt $f\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till f kallas **arcuscosinus** och betecknas $f^{-1}(y) = \arccos y$.

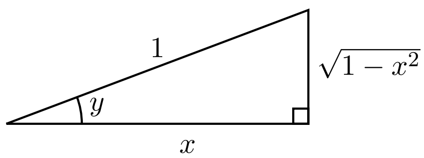
Grafen för arcuscosinus är



Figur 3.5: Grafen till funktionen $x \mapsto \arccos x$.

Exempel 3.33. Visa att $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

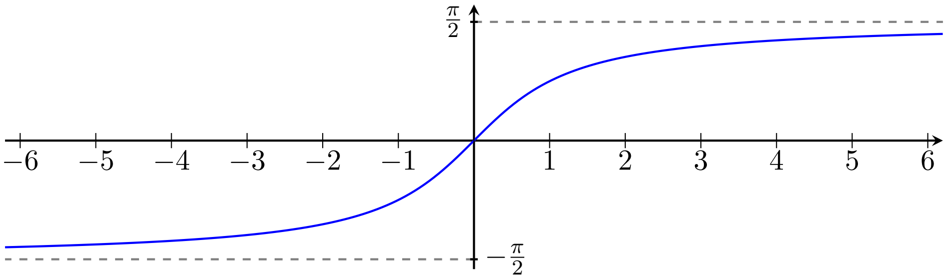
LÖSNING: Låt $y = \arccos x$. Alltså är $x = \cos y$ och vi kan illustrera relationen mellan x och y med hjälp av triangeln



Att en katet är $\sqrt{1-x^2}$ följer av Pythagoras sats och därmed följer att $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. ▲

Definition 3.34. Låt $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till f kallas **arcustangens** och betecknas $f^{-1}(y) = \arctan y$.

Grafen för arctangens är



Figur 3.6: Grafen till funktionen $x \mapsto \arctan x$.

3.6 Exponentialfunktionen

Vi kommer inte i detta häfte definiera exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, där $a > 1$. Istället antas att läsaren är bekväm med funktionen som en strängt växande funktion med värdemängd $(0, \infty)$ som uppfyller räknelagarna

a) $a^0 = 1$

b) $a^1 = a$

c) $a^{x+y} = a^x a^y$

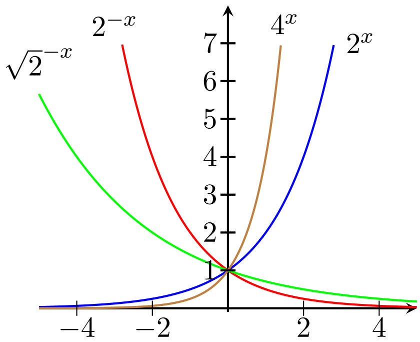
d) $a^{-x} = 1/a^x$

e) $(a^x)^y = a^{xy}$

Att introducera exponentialfunktionen på ett korrekt vis är långt ifrån en enkel sak och ligger utanför ramarna för detta häfte. Med hjälp av d) kan vi definiera exponentialfunktionen för $0 < a < 1$. Vi har för $0 < a < 1$ att $1/a > 1$ och

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

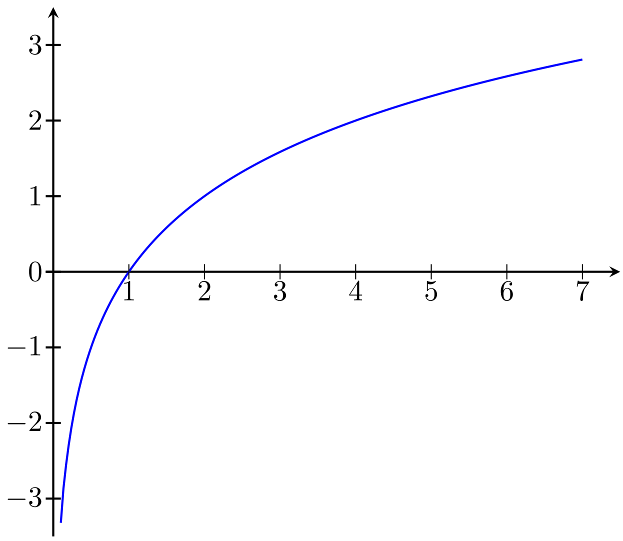
Grafen för exponentialfunktionen är



Figur 3.7: Exponentialfunktioner av typen $x \mapsto 2^{ax}$ för olika värden på a.

3.7 Logaritmfunktionen

Låt $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sådan att $f(x) = a^x$, för något $a > 1$. Då gäller att f är inverterbar. Vi definierar **logaritmfunktionen** som inversen till f och betecknar $f^{-1}(y) = \log_a y$. Alltså har vi att $D_{f^{-1}} = (0, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Grafen för logaritmfunktionen är



Figur 3.8: Grafen till funktionen $x \mapsto \log_2 x$.

Inversen uppfyller följande räknelagar:

Sats 3.35. *Låt $a > 1$, då gäller att logaritmfunktionen uppfyller*

a) $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad x > 0, y > 0$

c) $\log_a x^y = y \log_a x, \qquad x > 0$

BEVIS: Generellt gäller att vi vill överföra exponentialfunktionens räknelagar till dess inversfunktion. Vi kommer hela tiden att använda oss av att $x = y$ om och endast om $a^x = a^y$. Detta är en direkt följd av att $x \mapsto a^x$ är injektiv.

a) Vi vill visa att $\log_a 1 = 0$ eller ekvivalent att $a^{\log_a 1} = a^0$. Vänsterledet uppfyller att $a^{\log_a 1} = 1$ och högerledet att $a^0 = 1$. Alltså stämmer alla påståenden.

b) Vi vill visa att $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ eller ekvivalent att $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$. För vänsterledet gäller att $a^{\log_a(xy)} = xy$ och för högerledet via exponentialfunktionens räknelagar att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.

c) Vi vill visa att $\log_a x^y = y \log_a x$ eller ekvivalent att $a^{\log_a x^y} = a^{y \log_a x}$. Vänsterledet är x^y och högerledet är $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$ och vi är klara.

■

3.8 Absolutbelopp

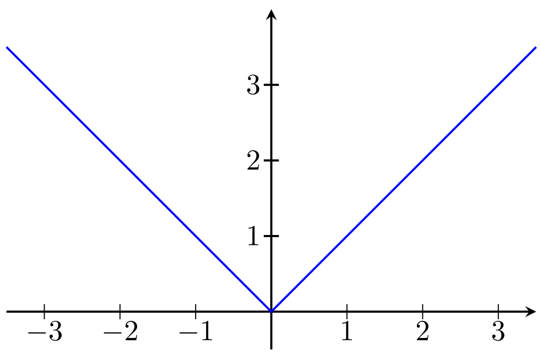
Definition 3.36. Låt $x \in \mathbb{R}$, då definieras **absolutbeloppet** alternativt **beloppet** av x som

$$|x| = \sqrt{x^2}. \tag{3.16}$$

Absolutbeloppet beskriver avståndet från x till origo. En direkt följd av definitionen är att

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Grafen har följande utseende



Figur 3.9: Grafen till funktionen $x \mapsto |x|$.

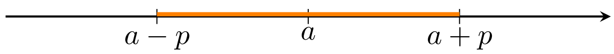
Observera att funktionen $x \mapsto |x|$ är jämn.

Exempel 3.37. Vi har enligt definitionen att $|-5| = -(-5) = 5$, $|5| = 5$, $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$ och $|0| = 0$. Vi har här varit övertydliga med användningen av minustecken. ▲

I detta häfte kommer vi i ett flertal tillfällen att använda absolutbeloppet på formen $|x - a| = b$ som betyder att avståndet från $x - a$ till origo, eller avståndet från x till a, är b.

Exempel 3.38. Skissa mängden $A = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - a| \leqslant p\}$, där $p > 0$.

LÖSNING:



▲

Observera att definitionen direkt ger att

$$x \leqslant |x|, \tag{3.18}$$

för varje $x \in \mathbb{R}$. Följande sats visas exempelvis med hjälp av fallindelning.

Sats 3.39. *Låt $x, y \in \mathbb{R}$, då gäller*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \tag{3.19}$$

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{3.20}$$

Olikheten (3.20) kallas för triangelolikheten.

BEVIS: Vi lämnar beviset av (3.19) till läsaren som en övning.

Beviset av (3.20) gör vi med hjälp av fallindelning.

Antag att $x \geqslant 0$ och $y \geqslant 0$. Olikheten är i detta fall en likhet, ty

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

Antag nu att $x \geqslant 0$ och $y \leqslant 0$. Symmetriskäl gör att fallet $x \leqslant 0$ och $y \geqslant 0$ kan behandlas analogt, varför vi utelämnar det. Även här vill vi dela upp i två fall. Det ena är då $x + y \geqslant 0$ och det andra då $x + y < 0$. Vi börjar med fallet då $x + y \geqslant 0$. Vi får (kom ihåg att $y < 0$)

$$|x + y| = x + y \leqslant x - y = x + (-y) = |x| + |y|.$$

Nu till delfallet att $x + y < 0$. Vi får

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leqslant x - y = x + (-y) = |x| + |y|.$$

Slutligen det sista fallet då $x < 0$ och $y < 0$. Vi får

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$$

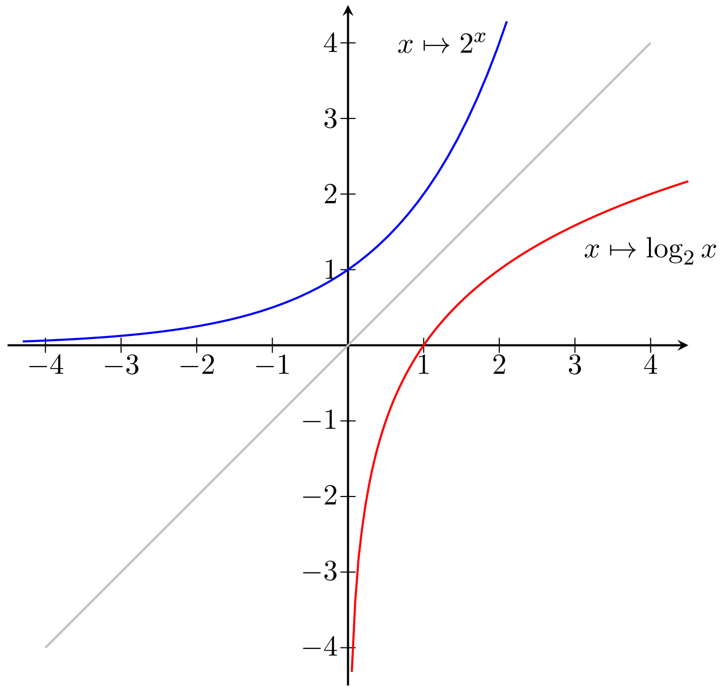
och olikheten är visad. ■

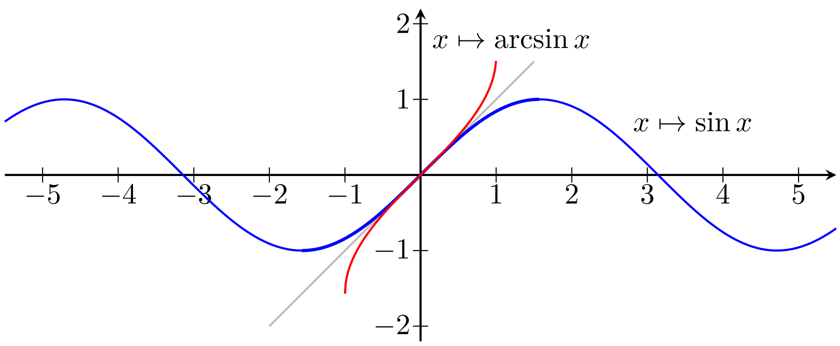
Definition 3.40. För ett komplext tal $z = x + \mathrm{i}y$ så definieras **absolutbeloppet** av z som

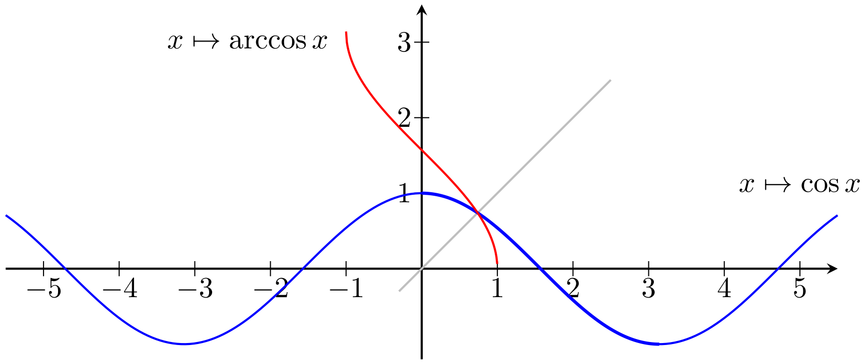
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.21}$$

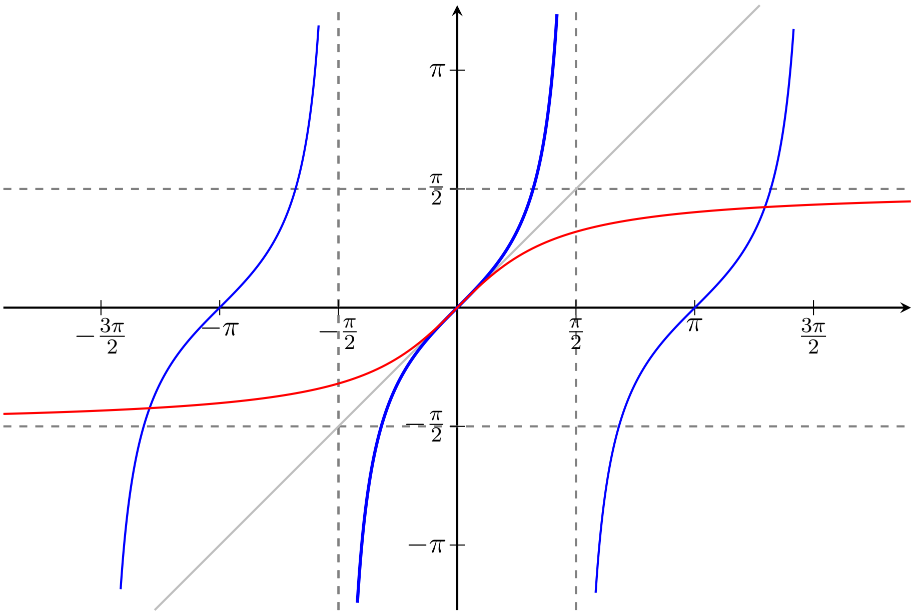
3.9 De elementära funktionernas grafer

I detta delkapitel ritas graferna ut till delar av de elementära funktionerna. Dessa grafer är lämpliga att kunna. Vi ritar funktionerna och dess inverser gemensamt för att illustrera sambanden.

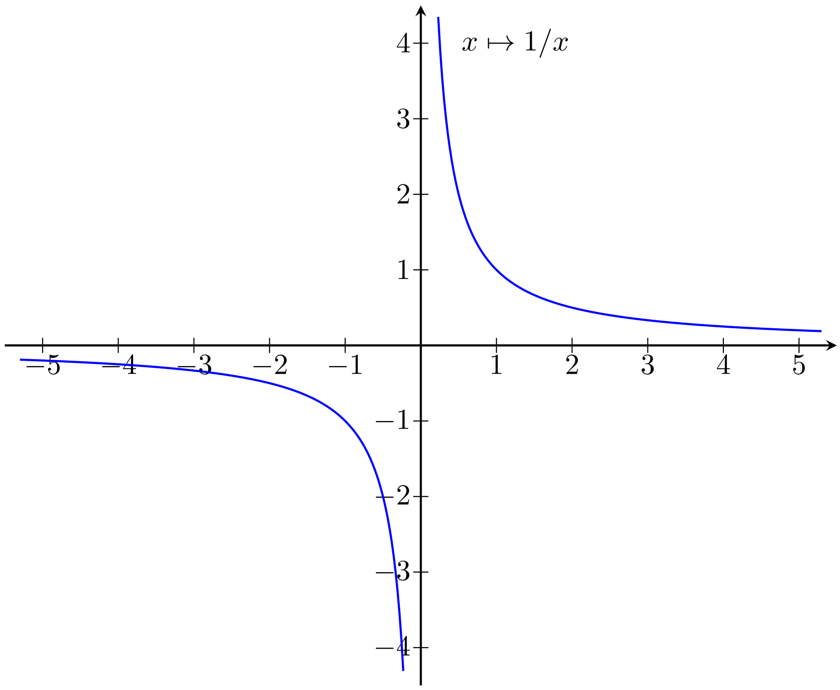


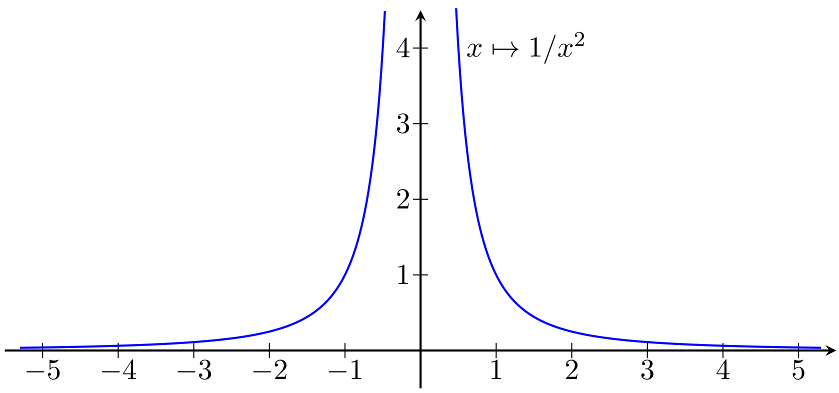






Figur 3.10: Den röda grafen är $x \mapsto \arctan x$ och den blåa grafen är $x \mapsto \tan x$.





3.10 Övningar

Övning 3.1. Ange definitions- och värdemängd till $f(x) = h(g(x))$ om $g(x) = x + 1$ och $h(x) = \sin\sqrt{x}$.

Övning 3.2. [2006-12-20, uppgift 2] Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}$$

är uppenbarligen definierad då $x \neq 0$ och $x \neq 1$. Bestäm värdemängden för f då $D_f = (0, 1)$.

Övning 3.3. [2008-06-04, uppgift 2] Låt $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x+1)}$

a) Bestäm alla reella x för vilka f är definierad som en reellvärd funktion.

b) Bestäm tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(0, 1)$.

Övning 3.4. Bestäm definitionsmängd, värdemängd och inversen för funktionerna

a) $x \mapsto \ln(\sqrt{1-x})$,

b) $x \mapsto e^{\sqrt{x-4}}$,

c) $x \mapsto x$

Övning 3.5. Går det att bestämma en målmängd så att följande funktioner är inverterbara? Bestäm i så fall inversen

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $D_f = [-1, \infty)$,

b) $f(x) = \sqrt{1 + 1/x}$, $D_f = (0, \infty)$.

Övning 3.6. Går det att bestämma en målmängd så att följande funktioner är inverterbara? Bestäm i så fall inversen

a) $f(x) = x/(x^2+1)$, $D_f = [1, \infty)$,

b) $f(x) = 1/x$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Övning 3.7. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en udda funktion och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en jämn funktion. Visa att

a) $f(0) = 0$,

b) produkten av f och g är en udda funktion.

c) summan av f och g inte nödvändigtvis är en udda funktion.

Övning 3.8. Lös följande ekvationer

a) $\sin x = \frac{1}{2}$,

b) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Övning 3.9. Visa att $\sin^2 2x = 4\tan^2 x(1 - \sin^2 x)(\cos 2x + \sin^2 x)$.

Övning 3.10. Beräkna $\cos(\pi/12)$ genom att använda att $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Övning 3.11. Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionerna

a) $x \mapsto \arcsin x$,

b) $x \mapsto \arccos x$,

c) $x \mapsto \arctan x$.

Övning 3.12. [2007-03-13, uppgift 1] Beräkna $\sin(\arcsin(7/8) + \arccos(1/4))$.

Övning 3.13. Lös ekvationerna

a) $\arcsin x = -\frac{5\pi}{6}$,

b) $\arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Övning 3.14. Bestäm

a) $\sin(\arcsin(1/2))$,

b) $\arcsin(\sin(2\pi/3))$.

Övning 3.15. Visa att

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

för varje $x \in [-1, 1]$.

Övning 3.16. Visa att

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

för varje $x \in [-1, 1]$.

Övning 3.17. Visa att

a)

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

b)

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Övning 3.18. Visa den andra delen i beviset av cosinussatsen.

Övning 3.19. Visa (3.11) – (3.14).

Övning 3.20. Visa att

a) $\log_a(x^3 - xy^2) - \log_a(x + y) - \log_a x = \log_a(x - y)$,

b) $((3^a)^b - 3^a)3^{-a} + 1 = 3^{ab-a}$.

Övning 3.21. Lös ekvationen $3 + \ln x = \ln \sqrt{x}$.

Övning 3.22. Visa likhet (3.19).

Övning 3.23. Lös olikheten $|x^2 - 4| < 5$.

Övning 3.24. Visa att om $|x - 1| < 1$ så är $|x + 1| < 3$.

Övning 3.25. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en strängt växande funktion. Visa att f är injektiv.

Övning 3.26. [2008-06-04, uppgift 1] För vilka reella tal a har ekvationen

$$4^x + 2^{x+1} = a$$

någon reell lösning? Bestäm de reella lösningarna för dessa a.

Övning 3.27. Låt funktionen $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definieras av $g(z) = 1/z^2$. För vilka $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gäller att $g(g(z)) = g(z)$?

Övning 3.28. Låt $f\colon A \to B$ och $g\colon B \to C$ vara funktioner och låt $h = g \circ f$ vara deras sammansättning. Med andra ord gäller att $h(x) = g(f(x))$.

a)
- Antag att f och g är surjektiva. Visa att h också är surjektiv.
- Antag att f och g är injektiva. Visa att h också är injektiv.

b)
- Antag att h och f är surjektiva. Är g nödvändigtvis surjektiv?
- Antag att h och f är injektiva. Är g nödvändigtvis injektiv?

c)
- Antag att h och g är surjektiva. Är f nödvändigtvis surjektiv?
- Antag att h och g är injektiva. Är f nödvändigtvis injektiv?

Övning 3.29. Lös ekvationerna

a) $1 + |x + 1| - |x - 2| = x$,

b) $1 + |x + 1| - |x - 2| = x + 2$,

c) $1 + |x + 1| - |x - 2| = x + 3$,

d) $1 + |x + 1| - |x - 2| = 2x$.

e) Finns det något $\alpha \in \mathbb{R}$ så att ekvationen $1 + |x + 1| - |x - 2| = \alpha x$ har exakt en lösning?

Övning 3.30. Lös ekvationerna

a) $\ln |x| = 1$,

b) $|\ln x| = 1$,

c) $|\ln |x|| = 1$.

Övning 3.31. Lös ekvationen

$$\ln(x^3 - 3x) = \ln(x).$$

Övning 3.32.

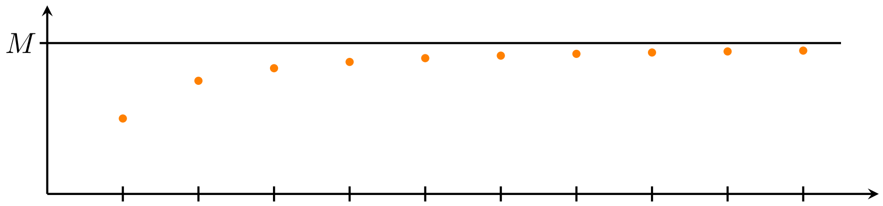
a) Visa att ekvationen $\ln(x+2) = \ln(x)\ln(2)$ saknar lösningar.

b) Lös ekvationen $\ln(x+1) = \ln(x)\ln(1)$.

4 Talföljder

4.1 Definitionen och konvergens

Definition 4.1. En följd av tal $a_1, a_2, a_3, ...$ kallas för en **talföljd** och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är **växande** om $a_{n+1} \geqslant a_n$ för varje $n \geqslant 1$ och att den är **uppåt begränsad** om det finns ett tal M sådant att $a_n \leqslant M$ för varje $n \geqslant 1$.



Figur 4.1: Exempel på en talföljd som är växande och uppåt begränsad av M.

Vi definierar på ett analogt sätt vad som menas med att en talföljd är **avtagande** och **nedåt begränsad**. En talföljd sägs vara **begränsad** om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Exempel 4.2. Om $a_n = \frac{2n}{n+1}$ så blir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ talföljden $2/2, 4/3, 6/4, 8/5, \ldots$. Talföljden är uppåt begränsad av talet 2 men även av talet 14, ty

$$a_n = 2 - \frac{2}{n+1} \leqslant 2.$$

Den är dessutom växande eftersom

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0.$$

Figur 4.1 illustrerar denna talföljd. ▲

Definition 4.3. En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs **konvergera mot gränsvärdet** A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

En talföljd med denna egenskap kallas **konvergent**, annars kallas talföljden **divergent**.

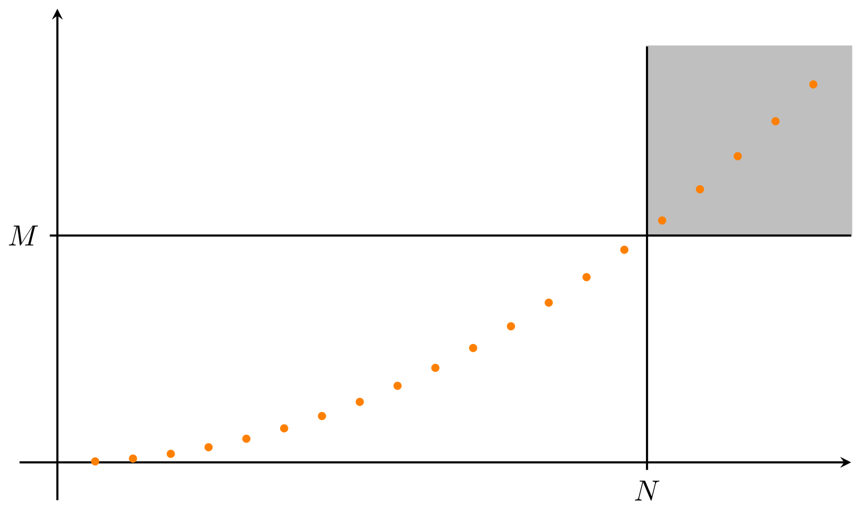
Figuren nedan illustrerar definitionen.

Exempel 4.4. Visa att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där talen ges av $a_n = 2 + 3^{-n}$ konvergerar mot 2 då $n \to \infty$.

LÖSNING: Enligt definitionen ska vi först låta ett tal $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill nu finna ett N, som kommer att bero av ε, sådant att $|a_n - 2| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Vi ser att $|a_n - 2| < \varepsilon$ är ekvivalent med $3^{-n} < \varepsilon$ och därmed även med $1/\varepsilon < 3^n$. Eftersom logaritmfunktionen $x \mapsto \log_3 x$ är strängt växande så följer att $1/\varepsilon < 3^n$ är ekvivalent med $-\log_3 \varepsilon < n$. Alltså har vi att om $n > -\log_3 \varepsilon$ så är $|a_n - 2| < \varepsilon$. Vi kan därmed välja N till något tal större än eller lika med $-\log_3 \varepsilon$, låt oss ta $N = -\log_3 \varepsilon$. ▲

Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ om det för varje M existerar ett N sådant att $a_n > M$ för varje $n > N$. Vi betecknar detta med

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$



Observera att talföljder som har oegentliga gränsvärden är divergenta. Det finns även talföljder som helt saknar gränsvärde, exempelvis $a_n := (-1)^n$, som pendlar mellan -1 och 1. Det är lämnat till läsaren att visa att en konvergent talföljd är begränsad.

Sats 4.5. *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vara konvergenta talföljder med gränsvärdena A respektive B. Då följer att* *a)* $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet* $A + B$*,*

b) $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet* AB*,*

c) om $B \neq 0$ *har vi att* $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet* A/B*,*

d) om $a_n \leqslant b_n$*, för varje* n *så gäller att* $A \leqslant B$*.*

Kommentar 4.6. Den observante noterar att vi i c) måste anta att $b_n \neq 0$ för alla de n som är inkluderade i (a_n/b_n). Eftersom vi är intresserade av gränsvärdet då $n \to \infty$ kan vi exkludera tal i början av följden. Då vi vet att $B \neq 0$ så kan vi välja ett N sådant att $|b_n - B| < |B|/2$. Alltså följer att $b_n \neq 0$, då $n > N$. Vi kan nu omformulera c) som att $(a_n/b_n)_{n=N}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet A/B.

Bevis: Vi använder oss av definitionen.

a) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Enligt triangelolikheten (3.20) har vi

$$|a_n + b_n - A - B| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B|$$

Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 så att

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

då $n > N_1$ och

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2},$$

då $n > N_2$. Detta ger att

$$|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon,$$

då $n > \max\{N_1, N_2\}$. Alltså kan vi välja $N = \max\{N_1, N_2\}$.

b) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Enligt triangelolikheten (3.20) har vi

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &\leqslant |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A|. \end{aligned}$$

Eftersom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent så är den begränsad, d.v.s. det finns ett tal $K > 0$ sådant att $|a_n| < K$ för varje $n \geqslant 1$. Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 sådana att

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K},$$

då $n > N_1$ och

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|},$$

då $n > N_2$. Detta ger att

$$|a_n b_n - AB| < \varepsilon,$$

då $n > \max\{N_1, N_2\}$. Alltså kan vi välja $N = \max\{N_1, N_2\}$.

c) Detta bevis lämnas som en övning åt läsaren.

d) Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att $B < A$. Bilda talföljden $c_n = b_n - a_n$. Vi har att $c_n \geqslant 0$, för varje $n \geqslant 1$. Talföljden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ har gränsvärdet $C := B - A < 0$. Tag $\varepsilon = -C/2 > 0$. Från definitionen existerar det ett N sådant att $C + C/2 < c_n < C/2$, för varje $n > N$. Men då $C < 0$ så får vi att $c_n < C/2 < 0$ för $n > N$. Detta strider mot att $c_n \geqslant 0$, för varje $n \geqslant 1$. Alltså är $A \geqslant B$.

■

Sats 4.7. *Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

BEVIS: Eftersom $\{a_n : n \geqslant 1\}$ är en delmängd av de reella talen som är uppåt begränsad så finns enligt supremumegenskapen en minsta övre begränsning. Låt oss kalla denna minsta övre begränsning till $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ för K, d.v.s. $K = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}$. Då K är den minsta övre begränsningen till talföljden så finns det element i talföljden godtyckligt nära K och i vissa fall även lika stora som K. Alltså, för varje givet $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_N - K| < \varepsilon$. Men då talföljden är växande kommer $|a_n - K| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Vi är klara och har visat att gränsvärdet av talföljden är precis K, d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K.$$

■

På samma sätt visas att om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande och nedåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

Satsen som följer säger att n^2, $\sqrt{n}$ och n har det oegentliga gränsvärdet ∞, då $n \to \infty$, medan n^{-1} och $n^{-1/2}$ går mot noll, då $n \to \infty$. Beviset är lämnat som en övning för läsaren.

Sats 4.8. *Följande gränsvärde gäller*

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty, & \text{om } p > 0, \\ 0, & \text{om } p < 0. \end{cases}$$

4.2 Binomialsatsen

Vi börjar med några exempel för att illustrera vad vi vill åstadkomma i detta delavsnitt.

Exempel 4.9. Antag att det finns fem personer och vi frågar oss följande: På hur många sätt kan dessa bilda en kö, d.v.s. en ordnad följd?

Svaret är att vi har fem möjligheter att välja den första personen, fyra möjligheter att välja den andra personen, o.s.v.. Vi får alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ möjligheter. ▲

Definition 4.10. Låt $n \in \mathbb{N}$, då definieras

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, & n \geqslant 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Beteckningen kallas n-**fakultet**.

Exempel 4.11. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en kö bestående av fyra personer. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Svaret är att vi kan välja första personen på tio olika sätt, andra personer på nio olika sätt, tredje personen på åtta olika sätt och slutligen den fjärde personen på sju olika sätt. Alltså finns det

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

olika sätt. Den sista identiteten är där för att illustrera hur svaret beror av parametrarna från frågeställningen. ▲

Läsaren kan själv verifiera att detta resonemang leder till att vi kan välja ut en kö på k personer från n stycken på

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

olika sätt. Här förutsätts att $k \leqslant n$.

Exempel 4.12. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en grupp bestående av fyra personer. Där ordningen på de utvalda inte spelar någon roll. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Vi vet från det tidigare exemplet att varje kö av fyra personer från tio kan väljas ut på $10!/(10-4)!$ olika sätt. Det betyder att om vi nu tar bort den inbördes ordningen så finns varje grupp med $4!$ gånger för mycket. Det vi vill är att dessa $4!$ olika köer är en och samma grupp. Vi måste alltså dividera med $4!$. Svaret är att vi kan välja ut fyra personer av tio till en grupp på

$$\frac{10!}{(10-4)!4!}$$

olika sätt. Det är värt att bekräfta att detta svar är symmetriskt i 4 och $10-4$. Jag menar att vi kunde lika gärna ha valt ut fyra personer genom att välja ut vilka sex personer som inte ska vara med. Att välja ut sex personer från tio till en grupp kan enligt ovan göras på

$$\frac{10!}{(10-6)!6!}$$

olika sätt. I båda fallen är svaret

$$\frac{10!}{4!6!}.$$

▲

Mer allmänt

Definition 4.13. Låt $n, k \in \mathbb{N}$ sådana att $k \leqslant n$. Vi definierar n**-över-**k som

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Vi har alltså definierat en notation och talesätt för svaret på den viktiga frågan: På hur många sätt kan vi välja ut k stycken saker från n stycken?

För att beskriva satsen som delavsnittet handlar om så använder vi symbolen $\sum$ för att summera termer. Vi definierar uttrycket

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{4.1}$$

Sats 4.14 (Binomialsatsen)**.** *Låt $n \in \mathbb{N}$, då gäller att*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bevis: Vänsterledet består av en multiplikation av n stycken faktorer av typen $(a+b)$. Om vi utför parentesmultiplikation så får vi termer av typen $a^k b^{n-k}$, så att den totala antalet faktorer är n. Frågan är hur många termer av denna typ vi får. Att välja ut k stycken a ur n parenteser kan göras på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Alltså är vi klara. ■

4.3 Talet e

Exempel 4.15. Antag att vi har x kr på banken och att banken ger oss xr kr i ränta varje år. Efter ett år har vi alltså $(1+r)x$ kr. Antag vidare att banken ger oss halva räntan om vi endast har pengarna insatta halva året och analogt för andra tidsperioder av året. I vårt fall betyder det att vi har $(1+r/2)x$ kr efter ett halvår. Vi kan då utnyttja detta genom att ha x kr insatta ett halvår för att ta ut $(1+r/2)x$. Nu sätter vi in $(1+r/2)x$ samma dag och plockar vid årets slut ut $(1+r/2)$ gånger pengarna, dvs. $(1+r/2)(1+r/2)x$. Det senare kan skrivas om som

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)x = \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 x = \left(1+r+\frac{r^2}{4}\right)x.$$

Vi har vunnit $r^2x/4$ på kuppen.

Om vi nu gör så här varje dag blir det

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} x = \left(1+r+\frac{r^2}{4}+\dots\right)x.$$

Om vi gör det n gånger så blir det

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n x,$$

vad händer nu då $n \to \infty$?

Vi kommer senare (se exempel 7.14) se att detta gränsvärde går mot $e^r x$, där e är ett tal. Alltså har vi $e^r x$ pengar efter ett år. Banken kan nu använda strategin att de betalar ut ränta utefter denna modell redan från början. Om en kund vill ta ut pengar efter halva året så får de $e^{r/2}$ gånger pengarna. Med denna modell så kan de inte tjäna mer genom att ta ut och sätta in pengarna vid upprepade tillfällen. För en kund som har x pengar och gör detta efter ett halvår får vi, $e^{r/2}e^{r/2}x = e^r x$. Alltså är ränta på ränta redan inkluderad. Årsräntan är $1 + r_{year} = e^r$ eller $r_{year} = e^r - 1$. ▲

Definition 4.16. Vi definierar talet

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

För att definitionen ovan skall vara av någon mening så måste vi visa att gränsvärdet existerar.

Sats 4.17. *Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ med*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

Bevis: Vi vill verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad och använda sats 4.7. Låt oss använda binomialsatsen 4.14

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Vi studerar varje term i detalj.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\end{aligned}$$

För att nu inse att talföljden är växande studerar vi a_n och a_{n+1}.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

och analogt följer att

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Låt oss jämföra de termer vi får för ett givet k. Vi har att

$$1-\frac{i}{n} < 1-\frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, ..., k-1$$

vilket ger att

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

För varje k i summorna är termen från a_{n+1} större än den från a_n. Dessutom innehåller a_{n+1} en term mer än a_n som också ger ett positivt bidrag. Alltså är $a_{n+1} > a_n$ för alla $n \geqslant 1$.

Låt oss nu även verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad. Återigen använder vi oss av framställningen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},$$

då varje parantes är mindre än 1.

Vi behöver olikheten $k! > 2^k$ för alla $k \geqslant 4$. Olikheten kan ekvivalent beskrivas som $k!/2^k > 1$, för alla $k \geqslant 4$. Vi har följande

$$\frac{k!}{2^k} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2} = \frac{k}{2}\frac{k-1}{2}\cdots\frac{5}{2}\frac{4}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{2}\frac{1}{2} > \frac{k}{2}\frac{k-1}{2}\cdots\frac{5}{2} > 1,$$

eftersom varje faktor är större än 1.

Detta passar nu perfekt för vår uppskattning.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{2^k}\\ &= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} < 1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

Vi påminner oss nu om formeln för en geometrisk summa,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1, \tag{4.2}$$

där x^0 definieras till 1 för $x = 0$. Formeln lämnas som en övning att verifiera (se övning 4.11). I vårt fall får vi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 3.$$

Vi har nu visat att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ både är växande och uppåt begränsad vilket ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent. ■

Exempel 4.18. Vi får även talet e som gränsvärde ifall vi låter $n \to -\infty$. Nämligen,

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

LÖSNING: Låt $m = -n$, vi får

$$\begin{aligned}\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m.\end{aligned}$$

Låt nu $k = m - 1$ och nyttja 4.5 b). Alltså är

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k}\right) = e.$$

▲

Definition 4.19. Inversen till exponentialfunktionen med e som bas kallas för den **naturliga logaritmfunktionen** och betecknas $x \mapsto \ln x$.

4.4 Standardgränsvärden vid ∞

Nästa sats säger oss att exponentiell tillväxt är snabbare än polynomiell tillväxt och fakultet växer snabbare än exponentiell tillväxt.

Sats 4.20. *Låt $a > 1$ och $b > 0$. Då gäller att*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^b} = \infty, \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{b^n} = \infty. \tag{4.4}$$

BEVIS: Vi börjar med att visa (4.3). Eftersom $a > 1$ så gäller att $a^{1/b} > 1$. Vi låter $a^{1/b} = 1 + p$, där $p > 0$. Vi har att

$$\frac{a^n}{n^b} = \left(\frac{a^{n/b}}{n}\right)^b = \left(\frac{(1+p)^n}{n}\right)^b.$$

Det räcker nu att visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+p)^n}{n} = \infty.$$

Med hjälp av binomialsatsen (se sats 4.14), där vi endast kommer att utnyttja en term, får vi

$$\frac{(1+p)^n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k \geqslant \frac{1}{n}\binom{n}{2}p^2 = \frac{n(n-1)p^2}{2n} = \frac{(n-1)p^2}{2} \to \infty,$$

då $n \to \infty$.

Låt oss nu visa (4.4). Bilda

$$c_n = \frac{n!}{b^n}.$$

Låt N vara sådant att $N > 2b$ och notera att

$$c_{n+1} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} = \frac{(n+1)\cdot n!}{b \cdot b^n} = \frac{n+1}{b}c_n.$$

Vi har att

$$c_{N+j} = \frac{N+j}{b}\cdot\frac{N+j-1}{b}\cdots\frac{N+1}{b}c_N \geqslant 2^j c_N \to \infty,$$

då $j \to \infty$. ∎

Exempel 4.21. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} + n^2 + 2}{4\cdot 4^n - 4}.$$

LÖSNING: Låt oss dividera täljare och nämnare med det uttryck som växer snabbast. I detta fall är det 4^n, alltså får vi

$$\frac{2^{2n} + n^2 + 2}{4\cdot 4^n - 4} = \frac{\frac{2^{2n}}{4^n} + \frac{n^2}{4^n} + \frac{2}{4^n}}{\frac{4\cdot 4^n}{4^n} - \frac{4}{4^n}} = \frac{1 + \frac{n^2}{4^n} + \frac{2}{4^n}}{4 - \frac{4}{4^n}} \to \frac{1}{4}, \tag{4.5}$$

då $n \to \infty$. Att vi får ta gränsvärdet för täljare och nämnare var för sig och dessutom termvis följer från sats 4.5. Att exponentialfunktioner växer snabbare än potensfunktioner följer av sats 4.20. ▲

Exempel 4.22. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot n! + 2^n}{n^3 + (n+1)!}.$$

LÖSNING: Låt oss dividera täljare och nämnare med det uttryck som växer snabbast. I detta fall är det $(n+1)!$, alltså får vi

$$\frac{2n \cdot n! + 2^n}{n^3 + (n+1)!} = \frac{\frac{2n \cdot n!}{(n+1)!} + \frac{2^n}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{(n+1)!} + 1} = \frac{\frac{2}{1+\frac{1}{n}} + \frac{2^n}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{(n+1)!} + 1} \to 2, \tag{4.6}$$

då $n \to \infty$. Att fakultetsfunktionen växer snabbare än exponentialfunktioner följer av sats 4.20. ▲

4.5 Bolzano-Weierstrass sats

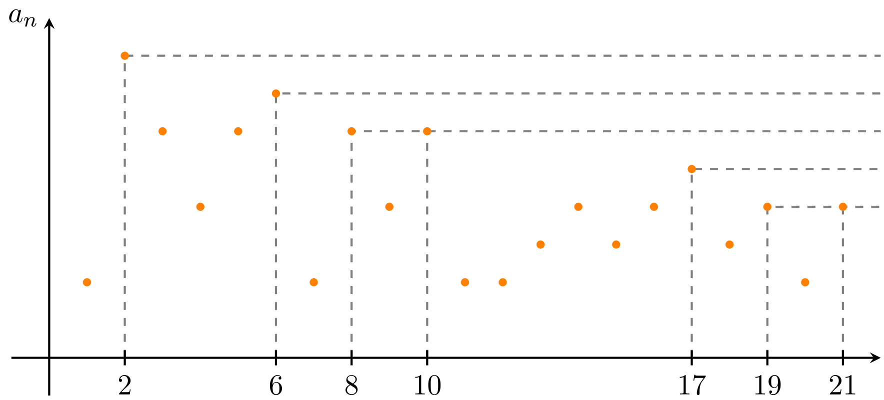
Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Om vi endast studerar en del av talen a_n, men fortfarande oändligt många, och bildar en egen talföljd av dessa så sägs denna nya talföljd vara en **delföljd** av den ursprungliga talföljden. Den nya talföljden betecknas ofta $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k \in \mathbb{N}$ är en strängt växande talföljd. Vi ger ett exempel för att klargöra notationen.

Exempel 4.23. Låt $a_n = 2n$. Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ges då av 2, 4, 6, 8, ... En delföljd till denna är när vi endast betraktar var femte tal, alltså 2, 12, 22, 32, ... Den nya talföljden betecknas $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k = 5(k-1)+1$. D.v.s., för n_1 (då $k=1$) får vi $a_{n_1} = a_1 = 2$, för n_2 (då $k=2$) får vi $a_{n_2} = a_6 = 12$, o.s.v. ▲

Sats 4.24 (Bolzano-Weierstrass sats)**.** *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då finns det en konvergent delföljd.*

BEVIS: Om vi lyckas visa att det finns en växande eller avtagande delföjd så vet vi från sats 4.7 att den kommer att vara konvergent.

Låt $A = \{n \colon a_n \geqslant a_m, \text{ för varje } m \geqslant n\}$. Mängen A beskriver alla index n_k av tal i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att alla resterande tal i följden är mindre eller lika med talet a_{n_k}.



I figuren ovan innehåller A indexen 2, 6, 8, 10, 17, 19, 21, $\ldots$.

Om antalet index n_k i A är oändligt många bildar $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ en avtagande delföljd. Vi är färdiga i detta fall.

Om antalet index i A är ändligt många och A inte är tomma mängden så finns det ett största index i A, låt oss kalla detta index för M. Nu kan vi välja vårt första tal i talföljden $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ till a_{M+1} eller a_1 i fallet att A var tomma mängden. Eftersom detta index är större än M så finns det större tal än a_{M+1} i talföljden $(a_n)_{n=M+1}^{\infty}$. Låt n_2 vara ett index sådant att $a_{n_2} > a_{M+1}$. Eftersom $n_2 \notin A$ så finns det ett index $n_3 > n_2$ sådant att $a_{n_3} > a_{n_2}$. Denna process leder till en växande talföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ som är konvergent enligt sats 4.7.

■

4.6 Övningar

Övning 4.1. Bestäm följande gränsvärden

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{1 + 2n^2},$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{2^{2n} + 2^{-2n}}.$$

Övning 4.2. Visa att talföljden

$$1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{6}, \frac{1}{7}, \ldots,$$

d.v.s. talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, där

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ udda} \\ 3/n, & n \text{ jämnt} \end{cases}$$

är konvergent.

Övning 4.3. Bevisa sats 4.5 c).

Övning 4.4. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{n^2 + 1} = 2.$$

Övning 4.5. Visa att om $n^2 - n \leqslant a_n \leqslant n^2 + n$ gäller för $n \geqslant 1$ så gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n} - a_n}{n^2} = 3.$$

Övning 4.6. Visa att en konvergent talföljd är begränsad.

Övning 4.7. Bevisa sats 4.8. Ett tips är att först visa satsen för $p \geqslant 1$, därefter för $0 < p < 1$ och slutligen för $p < 0$.

Övning 4.8. Visa med hjälp av Binomialsatsen att

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Övning 4.9. Låt $a \in \mathbb{R}$. Lös ekvationen $(x - a)^3 = x^3 - a^3$.

Övning 4.10. Konvergerar talföljden

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

där $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$ och $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n$?

Övning 4.11. Verifiera formeln för en geometrisk summa, d.v.s. att

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

Övning 4.12. Bestäm

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{3}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$

Övning 4.13. Bestäm

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{1/n}$

b) $\lim_{n\to\infty} n^{2/n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n}$

Övning 4.14. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n! + 2^n + n^4}{(n+1)! + 3^n + n^6}.$$

Övning 4.15. [2008-03-10, uppgift 8] Vilket av talen $\sqrt[n]{n}$ är störst, där $n \geqslant 2$ är ett heltal?

Övning 4.16. Hitta talföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ som är divergenta, men ändå är sådana att $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent.

Övning 4.17. Om $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent och $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ är divergent, kan $(c_n d_n)_{n=1}^{\infty}$ vara konvergent?

Övning 4.18. Hitta talföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att $a_n < b_n$ men så att det inte gäller att $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.

Övning 4.19. Bestäm

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{\ln n}$

Övning 4.20. För vilka $x \in \mathbb{R}$ existerar gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \cos(x)^n?$$

Bestäm gränsvärdet för dessa x.

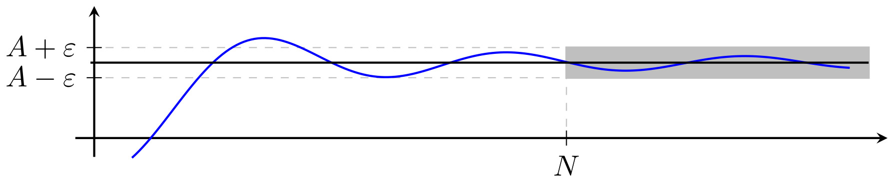
5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten

5.1 Definitionen och konvergens

Definition 5.1. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a. Vi säger att f **konvergerar** mot gränsvärdet A då x går mot ∞ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

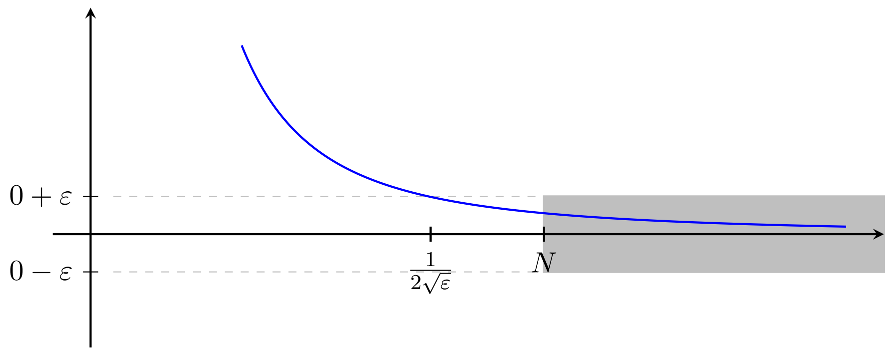
Alternativt skriver vi att $f(x) \to A$ då $x \to \infty$. Om inget sådant A existerar kallas f **divergent** då x går mot ∞.



Exempel 5.2. Visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x^2} = 0.$$

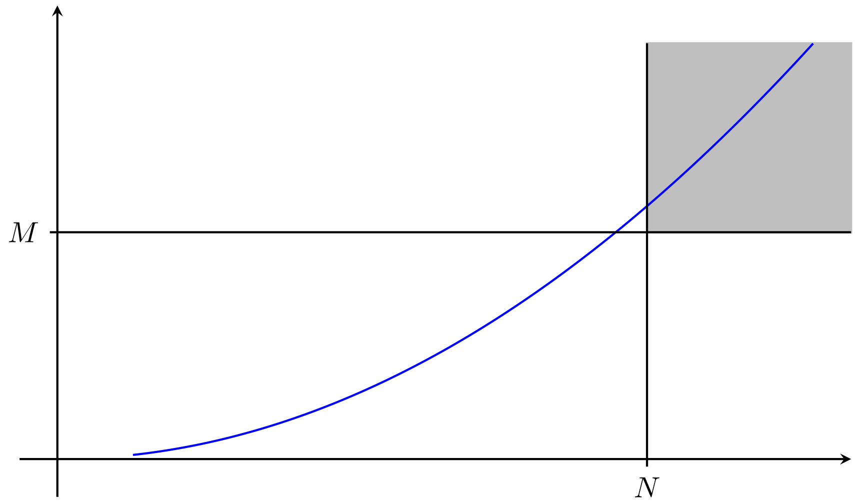
Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|f(x) - 0| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Vi har att $|f(x) - 0| < \varepsilon$ om och endast om $\frac{1}{4x^2} < \varepsilon$. Det senare gäller om och endast om $x > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Vi kan alltså välja N till något tal större än eller lika med $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$.



Observera att N är beroende av ε. Förändras ε så kan vi behöva byta värdet på N. Vi kan förtydliga detta genom att skriva $N = N(\varepsilon)$. ▲

Definition 5.3. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a. Vi säger att f har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då x går mot ∞ om det för varje M finns ett N sådant att $f(x) > M$ för varje $x > N$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$



På samma vis som ovan definierar vi gränsvärden och oegentliga gränsvärden mot $-\infty$.

Precis som för talföljder så gäller följande sats

Sats 5.4. *Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to \infty$. Då följer att*

a) $f(x) + g(x) \to A + B$, *då* $x \to \infty$,

b) $f(x)g(x) \to AB$, *då* $x \to \infty$,

c) om $B \neq 0$ *så följer att* $f(x)/g(x) \to A/B$, *då* $x \to \infty$.

d) om $f(x) \leqslant g(x)$, *för alla* $x \in (a, \infty)$ *så gäller att* $A \leqslant B$.

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis. För c) gäller att a behöver väljas tillräckligt stort så att $g(x) \neq 0$, för varje $x \in (a, \infty)$.

Det är värt att notera att vi kan tillåta att $A = \infty$ och/eller $B = \infty$ med de formella räknereglerna:

$$\begin{aligned}
&\infty \cdot \infty = \infty, \\
&\infty + \infty = \infty, \\
&x \cdot \infty = \infty, \quad \text{där } x > 0, \\
&x + \infty = \infty, \quad \text{där } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Observera dock att följande uttryck är odefinierade

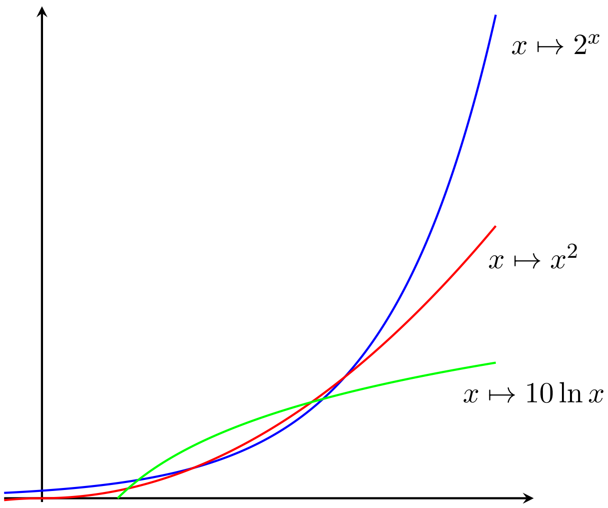
$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty.$$

Sats 5.5. *Låt $f\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ för något $a \in \mathbb{R}$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup\{f(x)\colon x \geqslant a\}.$$

Beviset är analogt med beviset av sats 4.7 och lämnat som en övning till läsaren.

5.2 Standardgränsvärden vid ∞



Sats 5.6. *Låt $a > 1$ och $b > 0$ då gäller följande gränsvärden*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty, \tag{5.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty. \tag{5.2}$$

BEVIS: Vi börjar med att visa (5.1) genom att överföra problemet på (4.3). Låt m vara ett heltal som uppfyller att $x - 1 < m \leqslant x$. Precis som i beviset av (4.3) så räcker det med att visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = \infty.$$

Vi har för $x \geqslant 1$ att

$$\frac{a^x}{x} \geqslant \frac{a^m}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^m}{m} \to \infty, \tag{5.3}$$

då $x \to \infty$, enligt (4.3).

För att visa (5.2) så låter vi $x = a^t$. Detta medför att $x \to \infty$ blir ekvivalent med att $t \to \infty$. Vi får alltså att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \lim_{t\to\infty} \frac{a^{bt}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{(a^b)^t}{t} = \infty, \tag{5.4}$$

enligt (5.1). ■

5.3 Övningar

Övning 5.1. Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm dem i förekommande fall.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{3x+x^2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-20x-5}{5x^3-4x+1}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+1}{3x^2+2x}$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+1)^3}{(x^3+2)^2}$

e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+10}{x+100}$

Övning 5.2. Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm dem i förekommande fall.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x+2x}{4e^x+x^2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^{1/5}}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x+x^2}{\ln x^3+3x^2}$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x+x^2}{3^x+x^3}$

e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x+x^{10}+2^x}{4^{x/2}}$

Övning 5.3. Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm dem i förekommande fall.

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2}-x$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-x+1$

Övning 5.4. Bevisa sats 5.4.

Övning 5.5. [2007-05-31, uppgift 1] Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x.$$

Övning 5.6. [2009-06-01, uppgift 1] Beräkna

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+2x}\right).$$

Övning 5.7. [2008-12-15, uppgift 1] Beräkna

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{5x^2+2x+1}}.$$

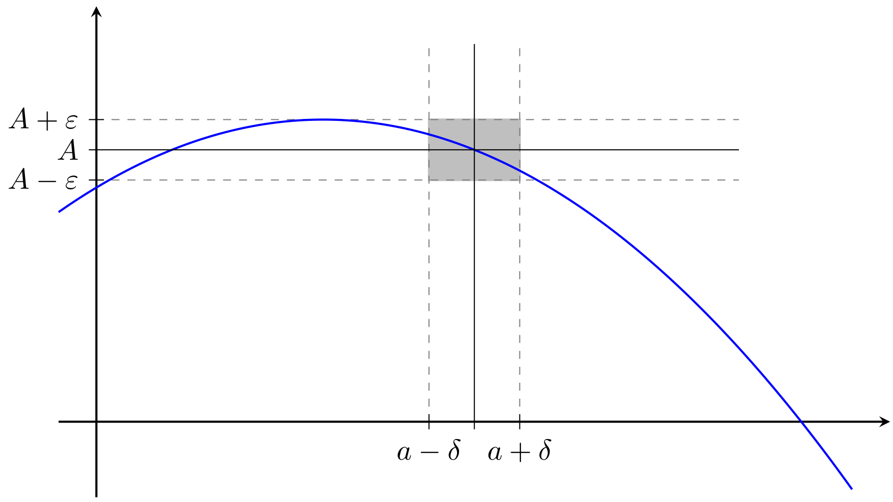
6 Lokala gränsvärden

6.1 Definitionen och konvergens

Definition 6.1. Låt f vara en reellvärd funktion, med $D_f \subset \mathbb{R}$, sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f **konvergerar mot** A då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett δ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver detta

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

eller $f(x) \to A$, då $x \to a$.



Vänster- och **högergränsvärden** definieras genom att endast studera funktionsvärdena för $x < a$, respektive $x > a$. Vi använder då notationen $x \to a-$ för vänstergränsvärde och $x \to a+$ för högergränsvärde. Om en funktion f är definierad i en punkterad omgivning till a så gäller att f har ett gränsvärde då x går mot a om och endast om vänster- och högergränsvärdena existerar och är lika, d.v.s.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

Exempel 6.2. Visa att

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9.$$

Låt $\varepsilon > 0$, vi vill finna ett δ sådant att $|x^2 - 9| < \varepsilon$, då $0 < |x - 3| < \delta$. Låt oss anta att δ kan väljas så att $\delta < 1$. Vi har att

$$|x^2 - 9| = |x + 3| \cdot |x - 3| \leqslant 20|x - 3| < 20\delta,$$

där talet 20 inte är optimalt valt (men det kvittar). Vi vill att detta ska vara mindre än ε, dvs.

$$20\delta < \varepsilon,$$

vilket är ekvivalent med att

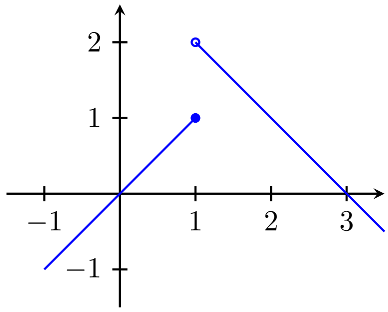
$$\delta < \frac{\varepsilon}{20}.$$

Vi väljer alltså δ till något tal mindre än $\varepsilon/20$ och 1. ▲

Exempel 6.3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } x \leqslant 1 \\ 3 - x, & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

Då $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$ så existerar inte $\lim_{x\to 1} f(x)$. Grafen nedan illustrerar vad som händer.

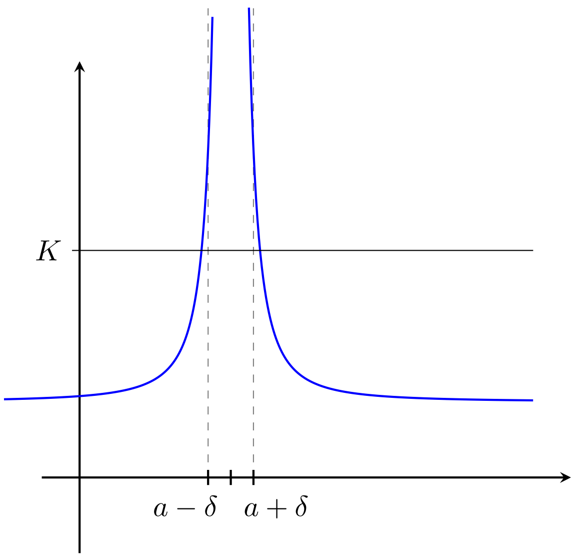


▲

Definition 6.4. Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då x går mot a om det för varje K finns ett δ sådant att $f(x) > K$ för varje $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Vi definierar oegentliga vänster- och högergränsvärden och mot $-\infty$ på ett analogt vis.



Sats 6.5. *Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to a$. Då följer att*

a) $f(x) + g(x) \to A + B$, *då* $x \to a$,

b) $f(x)g(x) \to AB$, *då* $x \to a$,

c) om $B \neq 0$ *så följer att* $f(x)/g(x) \to A/B$, *då* $x \to a$,

d) om $f(x) \leqslant g(x)$ *för varje* x *i en punkterad omgivning av* a *så följer att* $A \leqslant B$.

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis.

Exempel 6.6. Visa att

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{|x|}$$

inte existerar.

Lösningen är att studera höger- respektive vänstergränsvärde separat. Vi börjar med högergränsvärdet. Vi får

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0+} (x + 1) = 1,$$

där den sista likheter följer från övning 6.2. Vänstergränsvärdet blir

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 + x}{-x} = \lim_{x \to 0-} (-x - 1) = -1.$$

Då höger- och vänstergränsvärdet inte sammanfaller finns inte gränsvärdet. ▲

Sats 6.7. *Låt $f\colon (a - \delta, a) \to \mathbb{R}$ för något $\delta > 0$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \sup \{f(x)\colon x \in (a - \delta, a)\}.$$

Beviset är analogt med beviset av sats 4.7 och lämnat som en övning till läsaren.

6.2 Övningar

Övning 6.1. Bevisa sats 6.5.

Övning 6.2. Visa att

$$\lim_{x \to 0} (x + a) = a,$$

för alla reella tal a.

Övning 6.3. Låt $a > 0$. Visa, t.ex. genom variabelbytet $x = 1/t$, att

$$\lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0.$$

7 Kontinuitet

7.1 Definitionen och exempel

Definition 7.1. Låt f vara en reellvärd funktion, med $D_f \subset \mathbb{R}$, sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter från D_f och $a \in D_f$. Vi säger att f är kontinuerlig i a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{7.1}$$

Låt f vara definierad i en omgivning av a. Då kan vi sätta x till $a + h$ i definition 7.1 och få ett alternativt sätt att uttrycka kontinuitetsvillkoret. Vi har då att f är kontinuerlig i a om och endast om

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a) \tag{7.2}$$

eller om D_f är ett öppet intervall så gäller att f är kontinuerlig om det för varje $x \in D_f$ gäller att

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x). \tag{7.3}$$

Att en funktion f är kontinuerlig i $a \in D_f$ betyder att vänstergränsvärdet, högergränsvärdet och funktionsvärdet i a sammanfaller. Detta visar även att det finns en omgivning till a där funktionen är begränsad, vilket vi kommer att utnyttja i sats 7.9.

Kontinuitet ger följande räkneregel:

Sats 7.2. *Låt f vara kontinuerlig i punkten b och låt $g(x) \to b$, då $x \to a$. Då gäller att*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right),$$

givet att vänsterledet är definierat.

Bevis: Högerledet kan skrivas som $f(b)$ eftersom $g(x) \to b$, då $x \to a$. Vi vill visa att vänsterledet är $f(b)$. Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett δ sådant att $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$ då $0 < |x - a| < \delta$. Då f är kontinuerlig i b så följer att det finns ett δ_1 sådant att $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$, då $|y - b| < \delta_1$. Då $g(x) \to b$, då $x \to a$ så följer att vi kan välja ett δ så att $|g(x) - b| < \delta_1$, då $0 < |x - a| < \delta$. Vilket visar satsen.

■

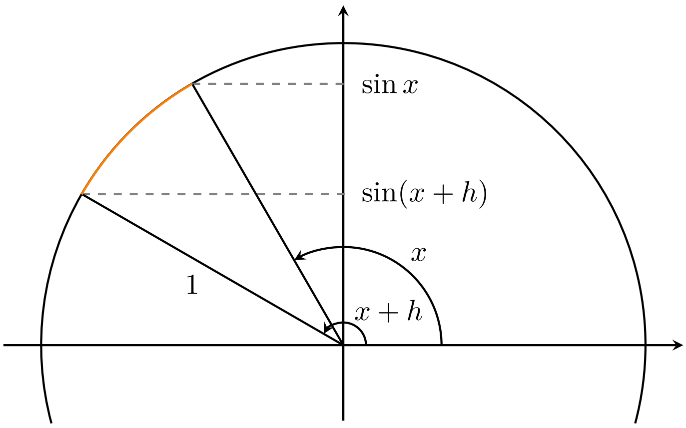
Kommentar 7.3. Vi kan även tillåta att $a = \infty$ i sats 7.2. Beviset blir då lite annorlunda och lämnas som en övning åt läsaren.

Följdsats 7.4. *Låt f och g vara kontinuerliga funktioner. Då följer att sammansättningen $x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$ är kontinuerlig.*

BEVIS: Resultatet följer direkt av sats 7.2. ■

Sats 7.5. *Funktionerna* $x \mapsto \sin x$ *och* $x \mapsto \cos x$ *är kontinuerliga.*

BEVIS: Vi använder (7.3) för att visa kontinuiteten. Vi vill visa att $\sin(x + h) - \sin x \to 0$ och $\cos(x + h) - \cos x \to 0$, då $h \to 0$. Studera bilden nedan (där vi har antagit att x och h är positiva)



Vi ser att det kortaste avståndet mellan punkterna $(\cos x, \sin x)$ och $(\cos(x + h), \sin(x + h))$ är från Pythagoras sats

$$\sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \leqslant h.$$

Att det kortaste avståndet är mindre än h följer av att h är längden av den bågnade delen av enhetscirkeln mellan de aktuella punkterna. I fallet att $h < 0$ blir olikheten

$$\sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \leqslant |h|. \tag{7.4}$$

Vi har att

$$\begin{aligned}
|\sin(x+h) - \sin x| &= \sqrt{(\sin(x+h) - \sin x)^2} \\
&\leqslant \sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \\
&\leqslant |h| \to 0,
\end{aligned}$$

då $h \to 0$. Vi har visat att $x \mapsto \sin x$ är kontinuerlig. Räkningen för att visa $x \mapsto \cos x$ är kontinuerlig är analogt från (7.4). ■

Sats 7.6. *Exponentialfunktionen* $x \mapsto a^x$ *är kontinuerlig.*

BEVIS: Enligt (7.2) så ska vi visa att

$$\lim_{h \to 0} (a^{x+h} - a^x) = 0 \tag{7.5}$$

vilket är ekvivalent med att visa att $a^h \to 1$, då $h \to 0$.

Anta först att $a = 2$ och $x > 0$.

Eftersom $x \mapsto 2^x$ är växande (se delkapitel 3.6) så räcker det att visa att $2^{1/n} \to 1$, då $n \to \infty$. Eftersom följden $(2^{1/n})_{n=1}^{\infty}$ är nedåt begränsad ty $2^{1/n} > 0$ och avtagande så konvergerar den mot ett värde A. Vi har att

$$2^{1/n} \cdot 2^{1/n} = 2^{2/n} \to A, \tag{7.6}$$

då $n \to \infty$ och från Sats 4.5b) får vi att

$$2^{1/n} \cdot 2^{1/n} \to A^2, \tag{7.7}$$

då $n \to \infty$. Alltså är $A^2 = A$ och då $A \neq 0$ så följer att $A = 1$. Vi har visat att

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{2^x} = 1. \tag{7.8}$$

Låt nu $x < 0$. Då gäller att

$$\lim_{x \to 0-} 2^x = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{2^{-x}} = 1, \tag{7.9}$$

från (7.8).

Antag nu att $a \neq 2$. Då följer att

$$a^x = 2^{x \log_2 a} = (2^x)^{\log_2 a} \tag{7.10}$$

och resultatet blir en konsekvens av Sats 7.4.

■

7.2 Satser om kontinuerliga funktioner

Sats 7.7. *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.*

Bevis: Låt oss visa att f är uppåt begränsad med hjälp av ett motsägelsebevis. Antag därför att f är uppåt obegränsad. Då gäller att för varje heltal k så finns ett x_k sådant att

$$f(x_k) > k. \tag{7.11}$$

Alltså kan vi bilda talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_n \in [a,b]$ för varje n, med egenskapen att $f(x_n) > n$.

Eftersom $x_n \in [a,b]$ för varje n, är talföljden begränsad och enligt Bolzano-Weierstrass sats (se 4.24) så finns det en konvergent delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Låt oss beteckna gränsvärdet med x, alltså $x_{n_k} \to x$, då $k \to \infty$. Eftersom $x \in [a,b]$

och f är kontinuerlig i x så har vi att $f(x_{n_k}) \to f(x)$, då $k \to \infty$. Men från (7.11) och konstruktionen av talföljden gäller att

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty.$$

Vi har en motsägelse.

På liknande sätt kan vi visa att f är nedåt begränsad. ■

Exempel 7.8. Funktionen $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = x^{-1}$ är kontinuerlig men inte begränsad. Sats 7.7 är inte applicerbar eftersom definitionsmängden inte är ett slutet intervall. ▲

Sats 7.9. *Summan och produkten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.*

Bevis: Detta är en direkt följd av sats 6.5 a) och b). ■

Följdsats 7.10. *Polynom är kontinuerliga funktioner.*

Bevis: Eftersom polynom är summor och produkter av räta linjer av typen $y = kx + m$ så räcker det enligt sats 7.9 att konstatera att dessa linjer är kontinuerliga. ■

Exempel 7.11. Polynomet $f(x) = 2x^4 - x + 3 = (2x)\cdot x \cdot x \cdot x + (-x+3)$ och kan med andra ord beskrivas som summor och produkter av de räta linjerna $2x$, x och $-x+3$. ▲

Sats 7.12. *Låt A och B vara intervall och låt $f\colon A \to B$ vara en kontinuerlig, inverterbar och strängt växande funktion. Då gäller att inversen $f^{-1}\colon B \to A$ är kontinuerlig och strängt växande.*

Bevis: Antag att $f\colon A \to B$ är kontinuerlig, inverterbar och strängt växande, där A och B är intervall. Låt oss först visa att $f^{-1}\colon B \to A$ är strängt växande.

Vi vill visa att om $y_1 < y_2$ så gäller att $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Detta följer av att f är strängt växande, ty

$$y_1 < y_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \qquad (7.12)$$

Låt oss nu visa att f^{-1} är kontinuerlig. Låt $y_0 \in B$ och tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett δ sådant att $|f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$ då $|y_0 - y| < \delta$.

Antag att $x_0 = f^{-1}(y_0)$ är en inre punkt av A, d.v.s. det finns en omgivning I till x_0 sådan att $I \subset A$. Vi kan välja $I = (a,b)$ sådan att

$$x_0 - \varepsilon < a < x_0 < b < x_0 + \varepsilon. \qquad (7.13)$$

Eftersom f är strängt växande så följer att

$$f(a) < f(x_0) = y_0 < f(b). \qquad (7.14)$$

Välj $\delta = \min\{y_0 - f(a), f(b) - y_0\}$. Om $y \in B$ uppfyller att $|y - y_0| < \delta$ så följer att $f(a) < y < f(b)$. Eftersom f är strängt växande så följer att

$$a < f^{-1}(y) < b \tag{7.15}$$

vilket ger att $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. Vi är klara. ■

Satsen kan formuleras analogt för strängt avtagande funktioner. En följd av satsen är att funktionerna $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \arctan x$, $x \mapsto \arcsin x$ och $x \mapsto \arccos x$ är kontinuerliga.

Exempel 7.13. Visa att funktionen $f : (0, \infty)$ sådan att $f(x) = x^x$ är kontinuerlig.

LÖSNING: Observera att

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

Det senare är en sammansättning av de kontinuerliga funktionerna $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x$ och $x \mapsto e^x$. Alltså är x^x kontinuerlig. ▲

Exempel 7.14. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

LÖSNING: Om $x = 0$ så följer att gränsvärdet är 1.

Om $x \neq 0$ kan uttrycket skrivas om enligt följande

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Eftersom funktionen $t \mapsto t^x$ enligt exempel 7.13 är kontinuerlig har vi identiteten

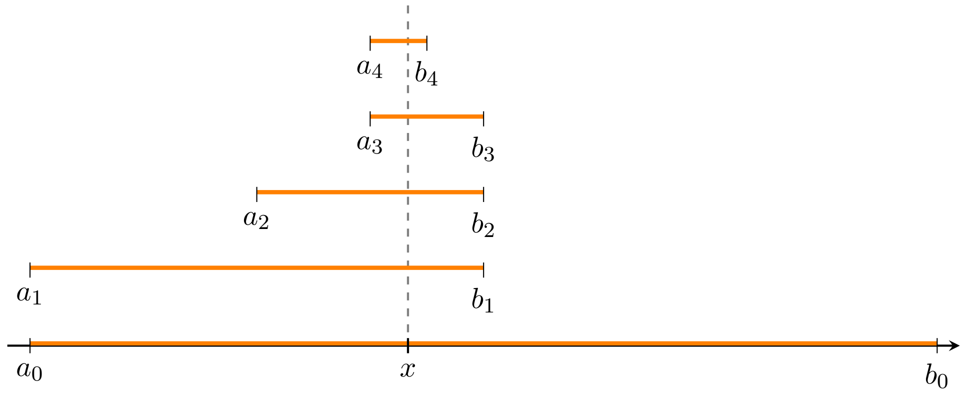
$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Med hjälp av variabelbytet $m = n/x$ och definition 4.16 eller exempel 4.18 får vi att

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^x = e^x.$$

▲

Lemma 7.15 (Intervallhalvering)**.** *Låt $[a_j, b_j]$ vara intervall, för varje $j \in \mathbb{N}$, med egenskapen att givet $[a_j, b_j]$ så väljer vi $[a_{j+1}, b_{j+1}]$ genom att låta $a_{j+1} = a_j$ och b_{j+1} vara mittpunkten på $[a_j, b_j]$ eller genom att låta a_{j+1} vara mittpunkten på $[a_j, b_j]$ och $b_{j+1} = b_j$. Då gäller att det finns ett unikt tal x sådant att $x \in [a_j, b_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$.*



Bevis: Talföljden $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad av b_0. Enligt sats 4.7 konvergerar $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ mot $x_a := \sup\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$. Även $(b_j)_{j=0}^{\infty}$ konvergerar mot $x_b := \inf\{b_j : j \in \mathbb{N}\}$ eftersom den är avtagande och nedåt begränsad av a_0.

Ett tal x ligger i alla intervallen om och endast om $x_a \leqslant x \leqslant x_b$. Satsen följer alltså om vi kan visa att $x_a = x_b$.

Från sats 4.5d) får vi att $x_b \geqslant x_a$. Eftersom $a_j \leqslant x_a \leqslant x_b \leqslant b_j$ för varje $j \in \mathbb{N}$ så får vi att

$$|x_b - x_a| = x_b - x_a \leqslant b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j} \to 0, \tag{7.16}$$

då $j \to \infty$. Alltså är $x_a = x_b$. ■

Lemma 7.16. *Låt f vara kontinuerlig i punkten a och $f(a) > \mu$, för något $\mu \in \mathbb{R}$. Då finns en omgivning I kring a sådant att $f(x) > \mu$ för alla $x \in I$.*

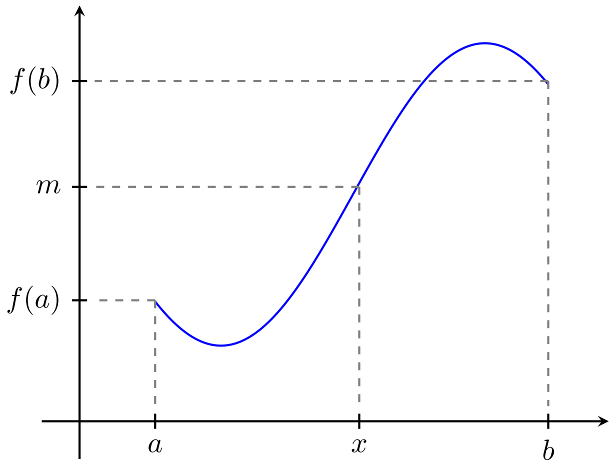
Bevis: Tag $\varepsilon > 0$ sådant att $f(a) - \mu > \varepsilon$, vilket är ekvivalent med att $f(a) - \varepsilon > \mu$. Då f är kontinuerlig i a gäller att

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

som i sin tur betyder att vi kan finna ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ då $|x - a| < \delta$. Att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ betyder att $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, vilket ger att $\mu < f(a) - \varepsilon < f(x)$ för alla $x \in I := \{x\colon |x - a| < \delta\}$. ■

Sats 7.17 (Satsen om mellanliggande värde)**.** *Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.*

Kommentar 7.18. Satsen säger att om $f(a) \leqslant m \leqslant f(b)$ (eller $f(b) \leqslant m \leqslant f(a)$) så finns det ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = m$. Observera att beviset för denna sats beskriver en algoritm som enkelt kan implementeras i något programspråk. Det teoretiska existensresonemanget måste i verkliga situationer verifieras innan algoritmen körs eftersom algoritmen kan svara med värden även i fallet då det saknas lösning.



Bevis: Antag att $f(a) < m < f(b)$. Vi vill visa att det finns ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = m$. Låt oss nyttja intervallhalveringsmetoden, alltså hjälpsats 7.15. Låt $a_0 = a$, $b_0 = b$ och c vara mittpunkten på intervallet $[a_0, b_0]$. Alltså,

$$c = a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Om $f(c) > m$, så väljer vi $a_1 = a_0$ och $b_1 = c$, annars väljer vi $a_1 = c$ och $b_1 = b_0$. Vi upprepar nu denna algoritm och konstaterar från hjälpsats 7.15 att det finns ett unikt element x som har egenskapen att $x \in [a_j, b_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Vi har att

$$f(a_j) \leqslant m \leqslant f(b_j),$$

för varje $j \in \mathbb{N}$. Om vi låter $j \to \infty$ och använder oss av 6.5 d) så får vi relationen $f(x) \leqslant m \leqslant f(x)$. Alltså är $f(x) = m$ och vi är klara. ■

Exempel 7.19. Har ekvationen $x^3 - 5x + 3 = 0$ någon lösning i intervallet $[-1, 1]$?

Lösning: Bilda funktionen $f(x) = x^3 - 5x + 3$. Eftersom f är kontinuerlig och $f(-1) = 7$ och $f(1) = -1$ så finns det enligt satsen om mellanliggande värde (se sats 7.17) ett $x_0 \in (-1, 1)$ sådant att $f(x_0) = 0$. Alltså har ekvationen någon lösning i intervallet $[-1, 1]$. ▲

Sats 7.20. *Låt $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då antar f ett största och ett minsta värde, d.v.s. det finns $x_1, x_2 \in [a, b]$ sådana att $\sup V_f = f(x_1)$ och $\inf V_f = f(x_2)$.*

Bevis: Vi visar att f antar ett största värde. Att f antar ett minsta värde bevisas på ett analogt vis. Från sats 7.7 vet vi att V_f är begränsad. Alltså existerar $M := \sup V_f$ och $f(x) \leqslant M$, för varje $x \in [a, b]$. Vi använder ett motsägelsebevis. Antag att $f(x) \neq M$, för varje $x \in [a, b]$. Då är

$$x \mapsto \frac{1}{M - f(x)} \tag{7.17}$$

definierad på $[a, b]$ och kontinuerlig. Från sats 7.7 är den begränsad, alltså finns en konstant C sådan att

$$\frac{1}{M - f(x)} \leqslant C \tag{7.18}$$

eller

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{C}. \tag{7.19}$$

Alltså är $M - 1/C$ en övre begränsning till V_f vilket motsäger att M är den minsta övre begränsningen till V_f. ■

Exempel 7.21. Funktionen $f\colon [0, 1)$ sådan att $f(x) = x^2$ är kontinuerlig, men saknar maxvärde. Sats 7.20 är inte applicerbar ty definitionsmängden är inte ett slutet intervall. ▲

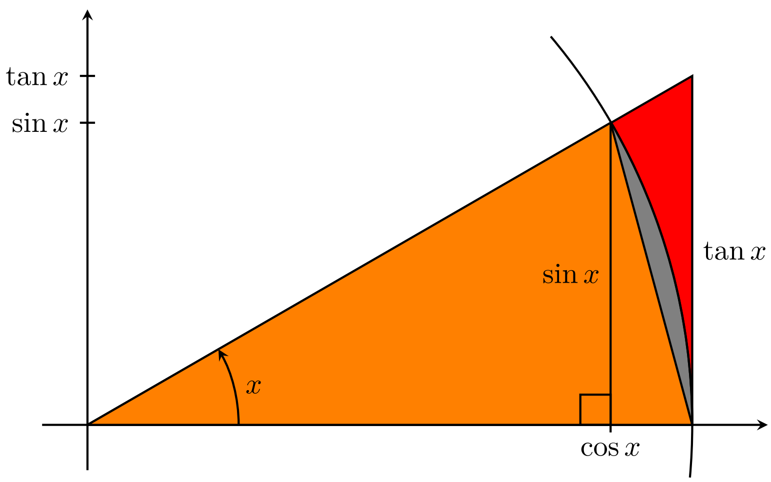
7.3 Lokala standardgränsvärden

Hjälpsats 7.22. *Olikheten*

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|, \tag{7.20}$$

gäller för alla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Bevis: Antag först att $x \in [0, \pi/2)$. Vi vill då visa att $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. Låt oss studera tre areor enligt figuren



Den minsta arean är den vi får från triangeln som har höjden $\sin x$ och bredden ett. Den mittersta arean får vi från cirkelsektorn med vinkeln x och den största arean får vi från den triangel som har höjden $\tan x$ och bredden ett. Areornas relationer är

$$\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2\pi}\pi \leqslant \frac{\tan x}{2}$$

eller enklare

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$$

Antag nu att $x \in (-\pi/2, 0)$. Då är $-x \in (0, \pi/2)$ och från den bevisade delen av satsen har vi att

$$\sin(-x) \leqslant -x \leqslant \tan(-x),$$

eller

$$-\sin x \leqslant -x \leqslant -\tan x.$$

Då $x \in (-\pi/2, 0)$ är $-\sin x = |\sin x|$, $-x = |x|$ och $-\tan x = |\tan x|$. Därmed följer att

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|$$

även gäller då $x \in (-\pi/2, 0)$. ■

Sats 7.23 (Lokala standardgränsvärden)**.** *Följande gränsvärden gäller*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{7.21}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{7.22}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{7.23}$$

BEVIS:

Bevis av (7.21): Vi börjar med att skriva om uttrycket enligt

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Låt oss utföra variabelbytet $s = 1/x$. Gränsvärdet $x \to 0$ kommer att sammanfalla med $s \to \pm\infty$ (obs två gränsvärden!). Då vi vet att logaritmfunktionen är kontinuerlig, får vi att

$$\lim_{s\to\pm\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \right) = \ln\left(\lim_{s\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \right) = \ln e = 1.$$

Bevis av (7.22): Låt oss direkt utföra variabelbytet $e^x - 1 = s$, vilket ger $x = \ln(1+s)$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{s}{\ln(1+s)} \to 1, \text{ då } s \to 0 \text{ (vilket är detsamma som } x \to 0).$$

Bevis av (7.23): Enligt sats 7.22 har vi relationen

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|, \tag{7.24}$$

för alla x i en liten omgivning av 0. Låt oss dividera med $|x|$. Vi får att

$$\frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1 \leqslant \frac{|\sin x|}{|x|} \frac{1}{\cos x} \tag{7.25}$$

och därmed att

$$\cos x \leqslant \frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1. \tag{7.26}$$

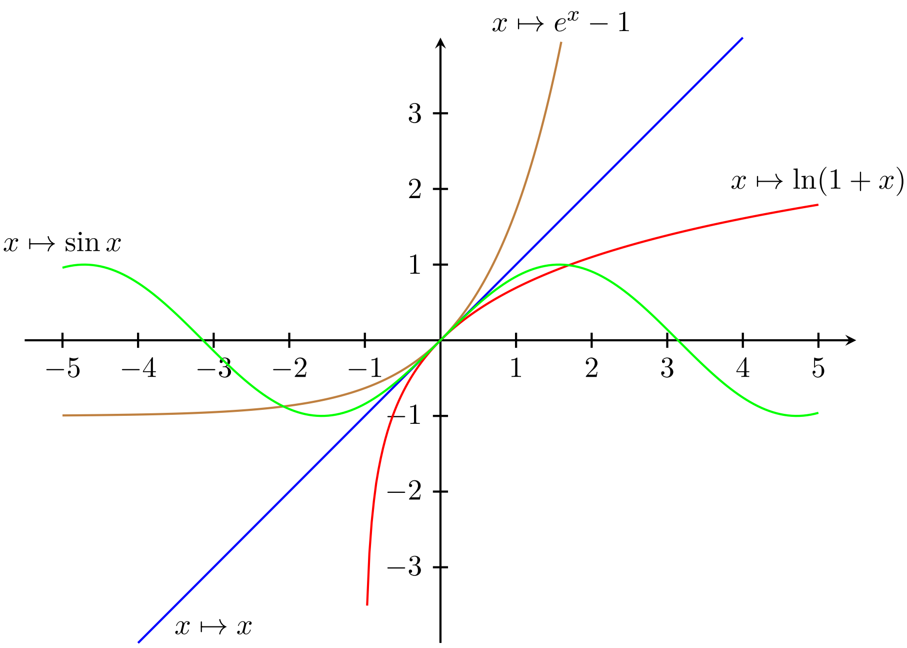
Då $x \to 0$ får vi att

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} = 1. \tag{7.27}$$

Observera till sist att

$$\frac{\sin x}{x} > 0,$$

för alla $x \neq 0$ sådana att $|x| < \pi/2$. Detta ger önskad likhet. ■



Figur 7.1: De lokala standardgränsvärdena säger att kvoten av två av dessa funktioner går mot ett då x går mot noll.

Exempel 7.24. Bestäm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x}.$$

Lösningen är att utnyttja standardgränsvärden. Vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x \right).$$

Den andra och den tredje faktorn är standardgränsvärden och går båda mot ett enligt sats 7.23. Vi utnyttjar nu sats 6.5 b) för kunna utföra dessa gränsvärden var för sig. Vi får att

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x\right)=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

▲

7.4 Övningar

Övning 7.1. [2006-12-20, uppgift 1] Bestäm talet a så att funktionen

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & x\neq 1,\\ a & x=1,\end{cases}$$

blir kontinuerlig i punkten $x=1$.

Övning 7.2. [2008-06-04, uppgift 5] Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$

d) $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$

Övning 7.3. Bestäm gränsvärdet av $x\mapsto x^{1/x}$, då $x\to\infty$.

Övning 7.4. Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x\to 0} f(x)=3,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\pi \quad \text{där} \quad f(x)=\frac{\sin(2x)}{x}+a\arctan x+b.$$

Övning 7.5. Visa att sats 7.2 gäller även för $a=\infty$, d.v.s. låt $f(x)$ vara kontinuerlig i punkten b och låt $g(x)\to b$, då $x\to\infty$. Då gäller att

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right).$$

Visa med hjälp av denna sats att

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=2.$$

Övning 7.6. Bestäm konstanten k så att funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+kx)}{x} & x \neq 0, \\ 3 & x = 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

Övning 7.7. En parkeringsmätare tar betalt enligt följande: den första påbörjade timmen kostar 4 kronor och därefter kostar det 2 kronor för varje ytterligare påbörjad timme, upp till det maximala dygnsbeloppet 10 kronor. Låt $h(t)$ vara parkeringskostnaden som funktion av tiden t timmar. Skissa funktionsgrafen $y = h(t)$ för $0 \leq t \leq 24$. Är h en kontinuerlig funktion?

Övning 7.8. Beräkna

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x},$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}.$$

Övning 7.9. För vilka $a, b > 0$ gäller att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\ln(1+bx)} = 5?$$

Övning 7.10. Bestäm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}.$$

Ledning: Börja med att bestämma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}.$$

Övning 7.11. Bestäm

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x).$$

Övning 7.12. Betrakta $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definierad av

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}.$$

Det gäller att $f(x) \geqslant 9$ för alla x och att $f(1/3) = 9$. Bestäm funktionens värdemängd.

Övning 7.13. Visa att kontinuitet är ett viktigt antagande i satsen om mellanliggande värden. Med andra ord, hitta en funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ och något $m \in [f(a), f(b)]$ så att det inte finns något $c \in [a,b]$ med $f(c) = m$.

Övning 7.14. För varje $n \in \mathbb{N}$, låt $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ definieras av

$$f_n(x) = x^n.$$

Definiera för varje x

$$f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

a) För fixerat $n \in \mathbb{N}$, är funktionen f_n kontinuerlig?

b) Bestäm funktionen f_∞. Är funktionen f_∞ kontinuerlig?

Övning 7.15. Låt $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara kontinuerliga funktioner. Antag att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{Q}$. Visa att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Ledning: Om $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ så finns det en följd $(x_n)_{n=1}^\infty$ sådan att $x_n \in \mathbb{Q}$ för varje n, och $x_n \to x$.

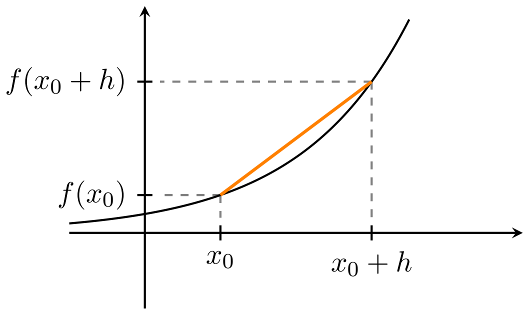
8 Derivata

8.1 Definitionen

Definition 8.1. Låt f vara en funktion definierad i en omgivning av x_0. Vi säger att f är **deriverbar** i punkten x_0 om

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8.1}$$

existerar. Värdet $f'(x_0)$ kallas **derivatan** av f i punkten x_0. Om f är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd så kallas f **deriverbar** och funktionen f' med definitionsmängden $D_{f'} = D_f$ kallas för **derivatan** av f.



Det är värt att notera att vi endast kan derivera en funktion i en punkt om funktionen är definierad i en omgivning av punkten. Alltså kan vi inte derivera funktioner i ändpunkter av intervall.

Med hjälp av derivatans definition kan vi derivera funktioner som exemplet nedan visar. Vi kommer senare i kapitlet att bestämma allmänna derivator för de elementära funktionerna för att enklare finna derivator.

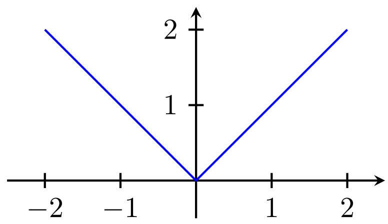
Exempel 8.2. Derivara funktionen $f(x) = 2x^3$.

LÖSNING: Enligt (8.1) finns derivatan av f i punkten x om följande gränsvärde existerar

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6x^2 + 6xh + 2h^2) = 6x^2.\end{aligned}$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = 6x^2$. ▲

Exempel 8.3. Visa att $f(x) = |x|$ ej är deriverbar i punkten 0.



LÖSNING: Låt oss visa att gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

inte existerar. Vi beräknar höger- respektive vänstergränsvärdet. Vi får

$$\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1$$

och

$$\lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Eftersom höger- och vänstergränsvärdet är olika så existerar inte gränsvärdet i punkten 0. ▲

8.2 Derivatan av elementära funktioner

Exempel 8.4. Derivera funktionen $f(x) = e^x$.

LÖSNING: Enligt definitionen och (7.22) är

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = e^x$. ▲

Exempel 8.5. Derivera funktionen $f\colon \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq 0\} \to \mathbb{R}$, där $f(x) = \ln|x|$.

LÖSNING: Låt först $x > 0$. Vi får enligt definitionen och (7.21) att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h/x} = \frac{1}{x}.$$

Låt nu $x < 0$. Vi får för tillräckligt små h, sådana att $x + h < 0$ att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(-(x+h)) - \ln(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = 1/x$. ▲

Exempel 8.6. Derivera funktionen $f(x) = \sin x$.

LÖSNING: Enligt definitionen och (7.23) är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x. \end{aligned}$$

Låt oss närmare studera uttrycket

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{1 - 2\sin^2(h/2) - 1}{h} = -\frac{2\sin^2(h/2)}{h} = -\frac{\sin(h/2)}{h/2}\sin(h/2) \to 0,$$

då $h \to 0$, ty

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

och

$$\lim_{h\to 0} \sin(h/2) = 0.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = \cos x$. ▲

Det är lämnat som en övning att verifiera att $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

Sats 8.7. *Låt funktionen f vara deriverbar i intervallet (a, b). Då är f kontinuerlig i (a, b).*

Bevis: Antag att f är deriverbar i punkten $x \in (a, b)$, d.v.s. gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar. Vi vill visa att f är kontinuerlig i x. Enligt (7.2) så vill vi visa att $f(x + h) - f(x) \to 0$, då $h \to 0$. Vi har att

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = f'(x) \cdot \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Vi är klara. ■

8.3 Derivationsregler

Sats 8.8. *Låt f och g vara funktioner deriverbara i punkten x. Då följer att $f + g$ och fg är deriverbara i punkten x. Derivatorna har följande samband:*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \tag{8.2}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{8.3}$$

Om dessutom $g(x) \neq 0$ så följer att f/g är deriverbar i punkten x och

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \tag{8.4}$$

Bevis: Om vi visar sambanden (8.2), (8.3) och (8.4) så följer att $f+g$, fg och f/g är deriverbara i punkten x, (eftersom högerleden existerar från förutsättningarna i satsen).

Låt oss visa att $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Vi har

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &\to f'(x)+g'(x),\end{aligned}$$

då $h \to 0$.

Låt oss visa produktregeln (8.3).

$$\begin{aligned}&\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}\\ &\quad= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &\quad= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\ &\quad= \frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x))}{h} + \frac{(f(x+h)-f(x))g(x)}{h}\\ &\quad= f(x+h)\frac{(g(x+h)-g(x))}{h} + \frac{(f(x+h)-f(x))}{h}g(x)\\ &\quad\to f(x)g'(x)+f'(x)g(x),\end{aligned}$$

då $h \to 0$. Det sista steget följer av sats 6.5 a) och b).

För att visa (8.4) skriver vi f/g som $f \cdot 1/g$. Om vi vet hur vi deriverar $1/g$ så kommer resultatet att följa från produktregeln (8.3).

Låt oss derivera $1/g$. Antag att $g(x) \neq 0$. Eftersom g är deriverbar i punkten x är g enligt sats 8.7 kontinuerlig i punkten x och därmed är g enligt lemma 7.16 skild från noll i någon omgivning av punkten x. Antag att $|h|$ är så litet i räkningen nedan så att $x+h$ tillhör denna omgivning och därmed är $g(x+h) \neq 0$. Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} &= \frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\\ &= -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\ &\to -\frac{g'(x)}{g(x)^2},\end{aligned}$$

då $h \to 0$. Det sista steget följer av sats 6.5 b). Alltså har vi att

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Från produktregeln (8.3) får vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) &= f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)+f'(x)\frac{1}{g(x)}\\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Vi är klara.

■

Ett specialfall av (8.3) är då funktionen g är en konstant. Då är $g' = 0$ och vi får

Följdsats 8.9. *Låt f vara en deriverbar funktion i punkten x och $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$(af)'(x) = af'(x).$$

Exempel 8.10. Derivera funktionen $h(x) = e^x \ln x$.

Lösning: Vi använder (8.2) med $f(x) = e^x$ och $g(x) = \ln x$ och får att

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}$$

▲

Exempel 8.11. Derivera funktionen $h(x) = \tan x$.

Lösning: Enligt (8.4)

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Alltså är $h'(x) = 1/\cos^2 x$. ▲

Sats 8.12 (Kedjeregeln)**.** *Antag att f är deriverbar i punkten y, g deriverbar i punkten x och $y = g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i punkten x med derivatan*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{8.5}$$

Bevis: Eftersom f är deriverbar så vet vi att funktionen ρ definierad som

$$\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{f(y+k)-f(y)}{k} - f'(y), & k \neq 0,\\ 0, & k = 0\end{cases} \tag{8.6}$$

uppfyller att $\rho(k) \to 0$, då $k \to 0$. Då $k \neq 0$ har vi

$$f(y+k) - f(y) = k(f'(y) + \rho(k)). \tag{8.7}$$

Låt $k = k(h) = g(x+h) - g(x)$ och studera förändringskvoten

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{(f'(g(x)) + \rho(k))k(h)}{h} \\ &= (f'(g(x)) + \rho(k))\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\to f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

då $h \to 0$ och därmed även $k = g(x+h) - g(x) \to 0$. ■

Exempel 8.13. Derivera funktionen $h(x) = \ln(\cos x)$.

LÖSNING: Funktionen h är en sammansättning av funktionerna $f(x) = \ln x$ och $g(x) = \cos x$, nämligen $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Kedjeregeln ger att

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x.$$

▲

Exempel 8.14. Derivera funktionen $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = x^a$, där $a \in \mathbb{R}$.

LÖSNING: Vi utför först omskrivningen

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

och använder oss av kedjeregeln och får att

$$f'(x) = e^{a \ln x} a \frac{1}{x} = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

▲

Exempel 8.15. Derivera funktionen $h(x) = \sin^3 x^4$.

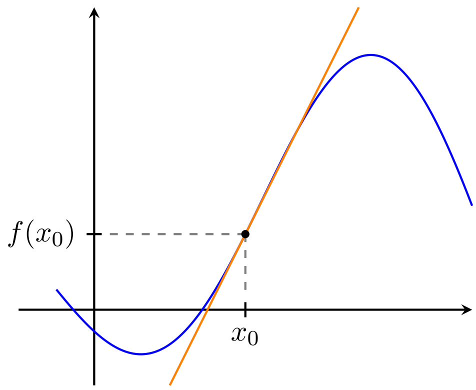
LÖSNING: Funktionen h är en sammansättning av de tre funktionerna $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \sin x$ och $f_3(x) = x^4$. Vi har att $h(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$. Kedjeregeln kan nu appliceras på detta uttryck. Låt oss först skriva $g = f_2 \circ f_3$ och använda kedjeregeln i två omgångar. Vi får att

$$\begin{aligned}h'(x) &= f_1'(g(x))g'(x) = f_1'(f_2(f_3(x)))f_2'(f_3(x))f_3'(x) \\ &= 3(\sin(x^4))^2 \cos(x^4) 4x^3 = 12x^3 \sin^2(x^4)\cos(x^4).\end{aligned}$$

▲

8.4 Linjär approximation

Antag att vi vill studera en funktion f i en omgivning av en punkt x_0 och att vi vet värdena av $f(x_0)$ och $f'(x_0)$. Då kan vi approximera f i en omgivning av x_0 med hjälp av den räta linje som går genom punkten $(x_0, f(x_0))$ och som har derivatan $f'(x_0)$. Denna linje kallas **tangenten** för f i punkten x_0 och approximation med denna tangent kallas linjär approximation.



Figur 8.1: Linjär approximation av f i punkten x_0.

Tangenten är en linje vars funktion är $T(x) = f'(x_0)x+m$. Eftersom tangenten passerar punkten $(x_0, f(x_0))$ så är $f(x_0) = f'(x_0)x_0+m$. Alltså blir tangentens funktion

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{8.8}$$

Den räta linje som går genom $(x_0, f(x_0))$ och är vinkelrät mot tangenten kallas för **normalen** till f i punkten x_0.

Exempel 8.16. Använd linjär approximation för att beräkna $\sqrt{4.01}\sin(0.01)$.
Lösning: Låt $f(x) = \sqrt{4+x}\sin x$. Enligt produktregeln (8.3) får vi

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{4+x}} + \sqrt{4+x}\cdot\cos x.$$

Tangentlinjen för f i punkten $x = 0$ ges av

$$T(x) = f'(0)x + f(0) = 2x.$$

En approximation för $f(0.01)$ med hjälp av tangenten är alltså $T(0.01) = 0.02$.
▲

Exempel 8.17. Bestäm alla tangenter till kurvan $f(x) = x^2$ som passerar punkten $(-1, -1)$.

LÖSNING: Tangentens funktion i en punkt x_0 är enligt (8.8)

$$T(x) = 2x_0x - x_0^2.$$

Eftersom linjen passerar punkten $(-1, -1)$ så är

$$-1 = -2x_0 - x_0^2.$$

Löser vi ut x_0 så får vi

$$x_0 = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Tangenterna ges alltså av

$$T_{1,2}(x) = 2(\pm\sqrt{2} - 1)x - (\pm\sqrt{2} - 1)^2.$$

▲

8.5 Derivatan av inversa funktioner

Exempel 8.18. Visa att

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

LÖSNING: Eftersom arctan är en högerinvers till tan har vi identiteten

$$\tan(\arctan x) = x, \tag{8.9}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. För att beräkna derivatan av arctan så deriverar vi vänster- och högerledet. Vänsterledet är en sammansatt funktion och derivatan är enligt exempel 8.11 och sats 8.12

$$\frac{d}{dx}\left(\tan(\arctan x)\right) = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot \frac{d}{dx}(\arctan x). \tag{8.10}$$

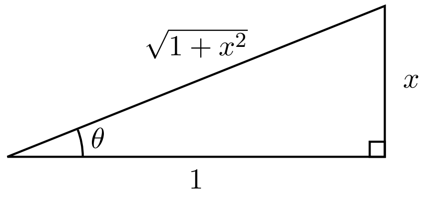
Högerledets derivata är 1. Alltså får vi

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot \frac{d}{dx}(\arctan x) = 1 \tag{8.11}$$

eller

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \cos^2(\arctan x). \tag{8.12}$$

Låt $\theta = \arctan x$. I fallet då $\theta > 0$ så har θ och x det samband som triangeln nedan visar



Hypotenusan har vi beräknat med hjälp av Pythagoras sats. Med hjälp av triangeln ser vi att

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Läser kan själv verifiera att likheten håller i fallet då $\theta < 0$.

Vi har alltså att

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \cos^2(\arctan x) = \cos^2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi har visat att derivatan av $x \mapsto \arctan x$ är $x \mapsto 1/(1+x^2)$. ▲

Exempel 8.19. På liknande sätt som exempel 8.18 så kan man visa att

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{8.13}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{8.14}$$

Det är lämnat som en övning för läsaren att verifiera dessa derivator. ▲

Exempel 8.18 och 8.19 kan generaliseras till

Sats 8.20. *Låt f vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då gäller att inversen f^{-1} är deriverbar i alla punkter $y = f(x)$, där $f'(x) \neq 0$, med derivatan*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8.15}$$

Bevis: Vi vill visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Låt $x = f^{-1}(y)$ och k vara sådant att $x+k = f^{-1}(y+h)$. Alltså är $f(x+k) = y+h = f(x)+h$. Från sats 7.12 får vi att f^{-1} är kontinuerlig och därmed följer att

$$k = f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) \to 0, \tag{8.16}$$

då $h \to 0$. Vi får

$$\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{k}{f(x+k) - f(x)} \to \frac{1}{f'(x)},$$

då $k \to 0$. ■

Kommentar 8.21. Om vi visste att f^{-1} var deriverbar så kunde vi utgå ifrån identiteten $f(f^{-1}(y)) = y$, som gäller för varje $y \in D_{f^{-1}}$. Derivation med avseende på variabeln y ger enligt sats 8.12 att

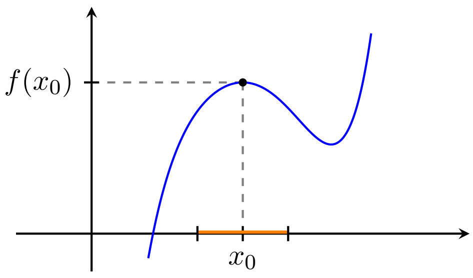
$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1. \tag{8.17}$$

Alltså har vi att

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8.18}$$

8.6 Definitioner av lokala max- och minpunkter

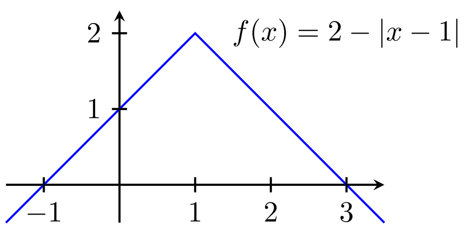
Definition 8.22. En funktion f sägs ha ett **lokalt maximum** i punkten $x_0 \in D_f$ om det finns en omgivning I till x_0 sådan att $f(x) \leqslant f(x_0)$, för varje $x \in I \cap D_f$.



Figur 8.2: Exempelbild på ett lokalt maximum i x_0. Omgivningen I är här orangemarkerad.

Läsaren kan själv förverkliga en definition av hur ett **lokalt minimum** för en funktion definieras. En funktion som har ett lokalt maximum eller lokalt minimum i en punkt x_0 sägs ha en **lokal extrempunkt** i x_0.

Exempel 8.23. Låt $f(x) = 2-|x-1|$. Då gäller att f har ett lokalt maximum i punkten 1. Ty, $f(1) = 2$ och $f(x) = 2 - |x - 1| \leqslant 2$, för varje $x \in \mathbb{R}$. I detta fall kunde alltså omgivningen i definition 8.22 väljas till $\mathbb{R}$.



▲

Sats 8.24. *Låt f vara deriverbar i punkten x_0 och ha en lokal extrempunkt i x_0. Då gäller att $f'(x_0) = 0$.*

Bevis: Vi börjar med fallet att f har ett lokalt maximum i punkten x_0.

Eftersom f är deriverbar i punkten x_0 så är f definierad i en omgivning av x_0. Enligt definitionen av derivata vill vi studera gränsvärdet av

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

då $h \to 0$. Täljaren i detta uttryck är för små h alltid icke-positiv eftersom f har ett lokalt maximum i punkten x_0. Nämnaren kommer uppenbarligen vara positiv för positiva h och negativ för negativa h. Alltså har vi att

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0,$$

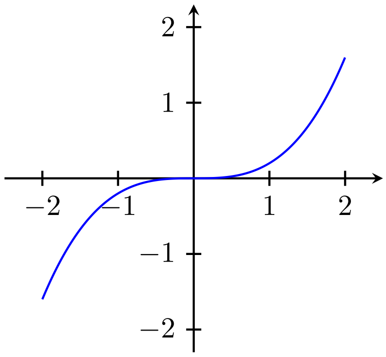
då $h < 0$ och

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0,$$

då $h > 0$. Eftersom f är deriverbar i punkten x_0 så vet vi att detta gränsvärde existerar. Alltså måste $f'(x_0) = 0$.

Beviset i fallet att f har ett lokalt minimum i punkten x_0 är analogt och lämnas till läsaren att kontrollera. ∎

Vi kallar en punkt $x_0 \in D_f$ för en **stationär punkt** om $f'(x_0) = 0$. Omvändningen av sats 8.24 gäller inte, d.v.s. om x_0 är en stationär punkt till en funktion f, så har f nödvändigtvis inte ett lokalt extremvärde i punkten x_0. Funktionen $x \mapsto x^3$ har en stationär punkt i 0, men inte ett lokalt extremvärde i punkten 0.

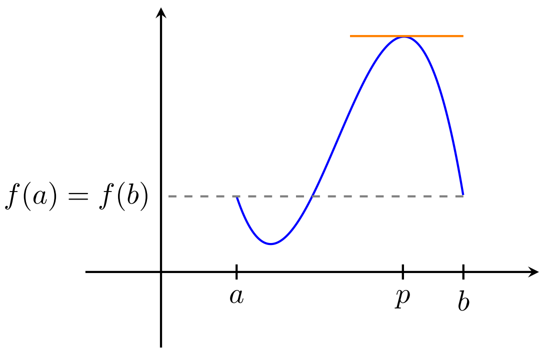


Figur 8.3: Funktionen $x \mapsto x^3/5$ kring 0.

Definition 8.25. En funktion f sägs ha ett **globalt maximum** i punkten $x_0 \in D_f$ om $f(x) \leqslant f(x_0)$, för varje $x \in D_f$.

8.7 Medelvärdessatsen

Sats 8.26 (Rolles sats)**.** *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion som är deriverbar på (a,b) och låt $f(a) = f(b)$. Då existerar det en punkt $p \in (a,b)$ sådan att $f'(p) = 0$.*



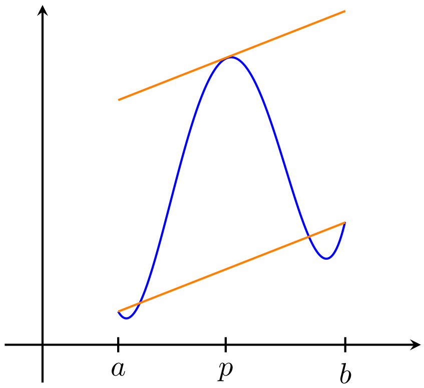
Bevis: Vi börjar med att inse att om $f(x) = f(a)$, för varje $x \in [a,b]$ så gäller att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a,b)$. Detta gör att punkten p kan väljas godtyckligt inom (a,b).

Antag nu att $f(x) > f(a)$, för något $x \in (a,b)$. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ så antar f enligt sats 7.20 sitt maxvärde. Då $f(a) = f(b)$ så gäller att maxvärdet antas i en inre punkt $q \in (a,b)$. Eftersom f är deriverbar i den punkt som ger maxvärdet så gäller enligt sats 8.24 att $f'(q) = 0$. Alltså kan p väljas till detta q.

Fallet då $f(x) < f(a)$ behandlas på ett analogt sätt. ∎

Sats 8.27 (Medelvärdessatsen)**.** *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion som är deriverbar på (a,b). Då existerar det en punkt $p \in (a,b)$ sådan* *att*

$$f'(p)(b-a) = f(b) - f(a). \tag{8.19}$$



Beviset följer genom att sätta $g(x) = x$ i följande sats:

Sats 8.28 (Generaliserade medelvärdessatsen)**.** *Låt f och g vara reellvärda och kontinuerliga funktion på $[a, b]$ som är deriverbara på (a, b). Då existerar det en punkt $p \in (a, b)$ sådan att*

$$f'(p)(g(b) - g(a)) = g'(p)(f(b) - f(a)). \tag{8.20}$$

Om $g(a) \neq g(b)$ och $g'(p) \neq 0$

$$\frac{f'(p)}{g'(p)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{8.21}$$

Bevis: Vi vill visa att det existerar en punkt p så att

$$f'(p)(g(b) - g(a)) - g'(p)(f(b) - f(a)) = 0. \tag{8.22}$$

Bilda

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) \tag{8.23}$$

och notera att

$$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a) \tag{8.24}$$

Rolles sats 8.26 säger att det existerar en punkt $p \in (a, b)$ sådan att $h'(p) = 0$. Eftersom

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)) \tag{8.25}$$

så följer (8.22). ■

Följdsats 8.29. *Låt f vara en deriverbar funktion på ett intervall $(a, b) \subseteq D_f$. Då gäller att* *a)* $f'(x) = 0$ *för varje* $x \in (a, b)$ *om och endast om* f *konstant på* (a, b).

b) $f'(x) \geqslant 0$ *för varje* $x \in (a, b)$ *om och endast om* f *är växande på* (a, b).

c) $f'(x) > 0$ *för varje* $x \in (a, b)$ *implicerar att* f *är strängt växande på* (a, b).

d) $f'(x) \leqslant 0$ *för varje* $x \in (a, b)$ *om och endast om* f *är avtagande på* (a, b).

e) $f'(x) < 0$ *för varje* $x \in (a, b)$ *implicerar att* f *är strängt avtagande på* (a, b).

BEVIS: Låt x_0 och x_1 vara två godtyckliga punkter i (a, b) sådana att $x_0 < x_1$.

Vi börjar med att visa a).

Antag först att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a, b)$. Vi vill visa att funktionsvärdena sammanfaller i dessa punkter, d.v.s. att $f(x_0) = f(x_1)$. Vi använder oss av medelvärdessatsen 8.27. Alltså finns det ett $c \in (x_0, x_1)$ sådant att

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) = 0,$$

ty $f'(c) = 0$.

Antag nu att f är konstant. Vi vill visa att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a, b)$. Detta följer direkt från definitionen.

Låt oss nu visa b).

Antag först att $f'(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$. Vi vill visa att f är växande, d.v.s. att $f(x_0) \leqslant f(x_1)$. Vi använder oss av medelvärdessatsen 8.27. Alltså finns det ett $c \in (x_0, x_1)$ sådant att

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) \geqslant 0,$$

ty $f'(c) \geqslant 0$ och $x_1 - x_0 > 0$ enligt antagande.

Antag nu det omvända, att f är växande på (a, b). Vi vill visa att $f'(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$. Från definitionen har vi att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0, \tag{8.26}$$

ty om $h > 0$ är $f(x + h) - f(x) \geqslant 0$ och om $h < 0$ är $f(x + h) - f(x) \leqslant 0$.

Bevisen av c) – e) följer på ett analogt vis. ∎

Notera att det i c) och e) är *implikation*, och inte *ekvivalens*. Ett exempel på en funktion som är strängt växande utan att ha positiv derivata överallt är $x \mapsto x^3$. På samma sätt är $x \mapsto -x^3$ ett exempel på en funktion som är strängt avtagande utan att dess derivata är negativ överallt.

8.8 L'Hôpitals regel

Sats 8.30. *Låt f och g vara reellvärda, deriverbara funktioner i en omgivning I av a sådana att*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{8.27}$$

Då gäller att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.28}$$

Bevis: Från den generaliserade medelvärdessatsen 8.22 att för varje $x \in I$ finns ett p mellan a och x sådant att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{p\to a} \frac{f'(p)}{g'(p)}. \tag{8.29}$$

Alltså gäller (8.28) som kallas **L'Hôpitals regel**. ■

Notera att L'Hôpitals regel inte kan användas för att visa standard gränsvärdena sats 7.23. Detta ty vi behöver veta att exempelvis $x \mapsto \sin x$ är deriverbar för att använda L'Hôpitals regel på

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}. \tag{8.30}$$

Detta gränsvärde behöver vi redan känna till för att veta att $x \mapsto \sin x$ är deriverbar. Vi får ett cirkelbevis.

Exempel 8.31. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{4x^2}. \tag{8.31}$$

Lösning: Bilda $f(x) = x - \ln(1+x)$ och $g(x) = 4x^2$. Vi får att $f'(x) = 1 - 1/(1+x) = x/(1+x)$ och $g'(x) = 8x$. L'Hôptials regel ger nu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{8x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{8(1+x)} = \frac{1}{8}. \tag{8.32}$$

▲

Sats 8.32. *Låt*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \textit{och} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty. \tag{8.33}$$

Då gäller att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{8.34}$$

Bevis: Vi visar att högergränsvärdet för (8.34) gäller. Vänstergränsvärdet följer på ett analogt vis.

Låt $a < b < c$. Den generaliserade medelvärdessatsen 8.22 säger att det existerar ett tal $p \in (b, c)$ sådant att

$$f'(p)(g(c) - g(b)) = g'(p)(f(c) - f(b)). \tag{8.35}$$

Låt oss lösa ut $f(b)$. Vi får

$$f(b) = f(c) + \frac{f'(p)(g(b) - g(c))}{g'(p)}. \tag{8.36}$$

Vi dividerar med $g(b)$ och får

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} + \frac{1}{g(b)}\left(f(c) - g(c)\frac{f'(p)}{g'(p)}\right) \tag{8.37}$$

vilket kan skrivas om till

$$\frac{f(b)}{g(b)} - L = \frac{f'(p)}{g'(p)} - L + \frac{1}{g(b)}\left(f(c) - g(c)\frac{f'(p)}{g'(p)}\right). \tag{8.38}$$

För att visa (8.34) så tar vi ett $\varepsilon > 0$ och vill visa att då b och c är tillräckligt nära a så gäller att

$$\left|\frac{f(b)}{g(b)} - L\right| < \varepsilon. \tag{8.39}$$

Vi använder triangelolikheten (3.20) och att det finns ett tal $\delta_1 > 0$ så att om $c - a < \delta_1$ så gäller att

$$\left|\frac{f'(p)}{g'(p)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.40}$$

för att få

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(b)}{g(b)} - L\right| &\leqslant \left|\frac{f'(p)}{g'(p)} - L\right| + \frac{1}{|g(b)|}\left|f(c) - g(c)\frac{f'(p)}{g'(p)}\right| && (8.41)\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|g(b)|}\left(|f(c)| + |g(c)||L + \varepsilon/2|\right) && (8.42)\\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K}{|g(b)|}, && (8.43)
\end{aligned}$$

där $K = |f(c)| + |g(c)||L + \varepsilon|$ är en konstant för givet c. Från (8.33) vet vi att det finns ett tal δ_2 så att om $b - a < \delta_2$ så gäller att

$$\frac{K}{|g(b)|} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.44}$$

Med andra ord är

$$\left|\frac{f(b)}{g(b)} - L\right| < \varepsilon \tag{8.45}$$

vilket ger (8.34). ■

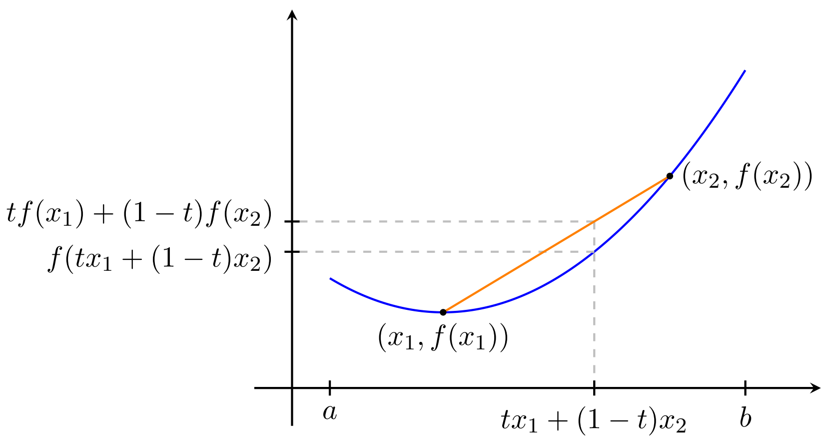
8.9 Konvexitet och konkavitet

Definition 8.33. En funktion f sägs vara **konvex** i intervallet $[a,b] \subset D_f$ om det för varje $x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller att

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{8.46}$$

för alla t sådana att $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Kommentar 8.34. En funktion f som är konvex på $[a,b]$ uppfyller att varje sekant från $(x_1, f(x_1))$ till $(x_2, f(x_2))$, med $x_1, x_2 \in [a,b]$, ligger ovanför eller sammanfaller med f.



Figur 8.4: En sekant är aldrig under en konvex funktion.

För att visa detta så tar vi fram den orangefärgade linjens funktion. Eftersom linjen passerar punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ så blir funktionen

$$L(x) = \frac{(f(x_2) - f(x_1))x + x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Om vi nu beräknar värdet i $x = tx_1 + (1-t)x_2$ får vi

$$L(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Alltså är sekanten ej under f i intervallet (x_1, x_2).

Exempel 8.35. Visa att funktionen $f(x) = 1 - |x|$ inte är konvex i intervallet $[-2, 2]$.

LÖSNING: Funktionen f är ej konvex ty för $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ och $t = 1/2$ får vi att vänsterledet i (8.46) är $f(0) = 1$ medan högerledet är

$$\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(1)}{2} = 0.$$

▲

Exempel 8.36. Visa att funktionen $g(x) = x^2$ är konvex.

Lösning: Låt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ och $0 \leqslant t \leqslant 1$. Vi vill visa att högerledet minus vänsterledet i (8.46) är icke-negativt. Alltså

$$\begin{aligned} tx_1^2 + (1-t)x_2^2 - &(tx_1 + (1-t)x_2)^2 \\ &= t(1-t)x_1^2 + t(1-t)x_2^2 - 2t(1-t)x_1x_2 \\ &= t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Detta ger att g är en konvex funktion. ▲

Sats 8.37. *Låt f vara deriverbar i intervallet $(a, b) \subset D_f$. Då gäller att f är konvex i (a, b) om och endast om f' är växande i (a, b).*

Bevis: Antag först att f' är växande i (a, b). Vi vill visa att f är konvex, d.v.s. att för varje $x_1, x_2 \in (a, b)$ gäller att

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant 0, \tag{8.47}$$

för varje $t \in [0, 1]$. Låt $c = tx_1 + (1-t)x_2$. Vi har att

$$\begin{aligned} tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(c) &= tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - (t + 1 - t)f(c) \\ &= t(f(x_1) - f(c)) + (1-t)(f(x_2) - f(c)) \end{aligned}$$

och från medelvärdessatsen 8.27 att

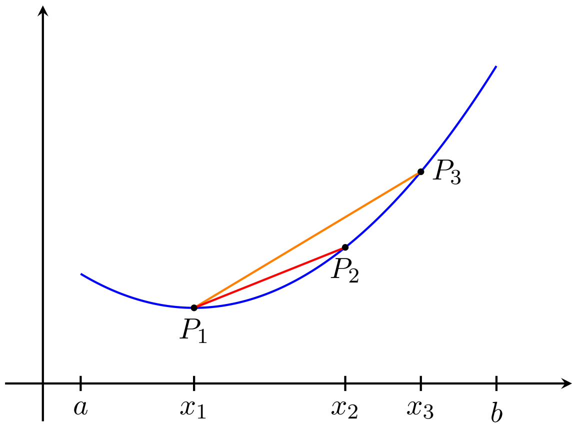
$$\begin{aligned} t(f(x_1) - f(c)) &+ (1-t)(f(x_2) - f(c)) \\ &= tf'(d_1)(x_1 - c) + (1-t)f'(d_2)(x_2 - c), \end{aligned}$$

där $d_1 \in (x_1, c)$ och $d_2 \in (c, x_2)$. Om vi nu använder oss av $c = tx_1 + (1-t)x_2$, så får vi att

$$\begin{aligned} tf'(d_1)(x_1 - c) + &(1-t)f'(d_2)(x_2 - c) \\ &= t(1-t)(f'(d_2) - f'(d_1))(x_2 - x_1) \geqslant 0, \end{aligned}$$

eftersom alla faktorerna är icke-negativa.

Antag nu att f är konvex. Vi vill visa att f' är växande, d.v.s. om $x_1 < x_3$ är $f'(x_1) \leqslant f'(x_3)$. Låt oss börja med att visa att för konvexa funktioner är sekanternas lutning växande. Låt $x_1 < x_2 < x_3$. Vi illustrerar med en bild



Figur 8.5: Relationen mellan olika sekanters lutning

Låt L_{12} och L_{13} vara räta linjer mellan punkterna P_1 och P_2 respektive P_1 och P_3. I kommentar 8.34 så visades att $f(x_2)$ är mindre än eller sammanfaller med $L_{13}(x_2)$. Alltså är lutningen på L_{12} mindre än lutningen på L_{13}. Om f dessutom är deriverbar och vi låter $x_2 \to x_1$ så får vi från sats 6.5 d) att

$$f'(x_1) \leqslant L'_{13}(x) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{8.48}$$

På samma vis kan vi visa att

$$L'_{13}(x) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant f'(x_3). \tag{8.49}$$

Alltså är $f'(x_1) \leqslant f'(x_3)$ och vi är klara. ■

Följdsats 8.38. *Låt f vara två gånger deriverbar i intervallet $(a, b) \in D_f$. Då gäller att $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$ om och endast om f är konvex.*

Bevis: Från sats 8.29 b) har vi att $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in [a, b]$ om och endast om f' är växande. Från sats 8.37 har vi att f' är växande om och endast om f är konvex. ■

Definition 8.39. En funktion f sägs vara **konkav** i $[a, b] \subseteq D_f$ om $-f$ är konvex i $[a, b]$.

Definition 8.40. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. En punkt $x_0 \in I$ sägs vara en **inflexionspunkt** till f om det finns ett $\delta > 0$ sådant att f är konvex i ett av intervallen $[x_0 - \delta, x_0]$ och $[x_0, x_0 + \delta]$, och konkav i det andra.

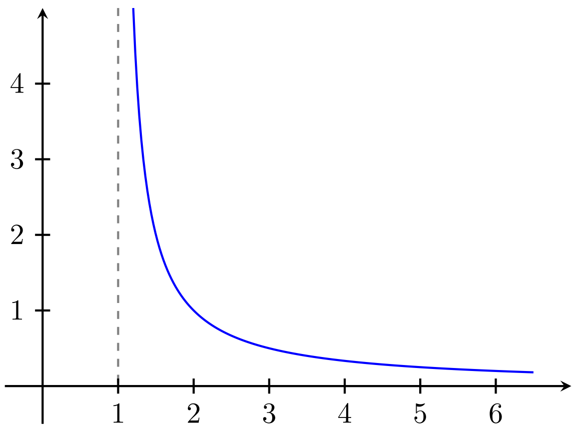
Sats 8.41. *Låt f vara två gånger deriverbar och låt f'' vara kontinuerlig. Om f har en inflexionspunkt i x_0 så är $f''(x_0) = 0$.*

BEVIS: Antag att f har en inflexionspunkt i x_0. Vi kan anta att det finns då ett $\delta > 0$ sådant att f är konvex i $[x_0 - \delta, x_0]$ och konkav i $[x_0, x_0 + \delta]$. Enligt sats 8.38 så är $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ och enligt övning 8.6 så är $f''(x) \leqslant 0$, för varje $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Eftersom f'' är kontinuerlig i x_0 så måste $f''(x_0) = 0$. ■

8.10 Asymptoter

Definition 8.42. En linje $x = a$ sägs vara en **lodrät asymptot** till en funktion f om $f(x)$ går mot $+\infty$ eller $-\infty$ då $x \to a+$ eller då $x \to a-$.

Exempel 8.43. Funktionen $f(x) = 1/(x-1)$, definierad för $x > 1$ har den lodräta asymptoten $x = 1$. Ty, $f(x) \to +\infty$, då $x \to 1+$.



Figur 8.6: Den streckade linjen är asymptoten $x = 1$.

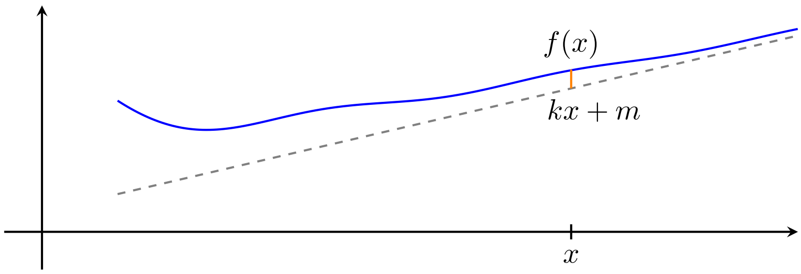
▲

Definition 8.44. En linje $y = kx + m$ är en **sned asymptot** till en funktion f om

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0 \tag{8.50}$$

eller

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0. \tag{8.51}$$



Om en funktion f har en sned asymptot då $x \to \infty$ så kan vi beräkna k och m. Vi observerar först att från (8.50) får vi att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (kx+m)}{x} = 0. \tag{8.52}$$

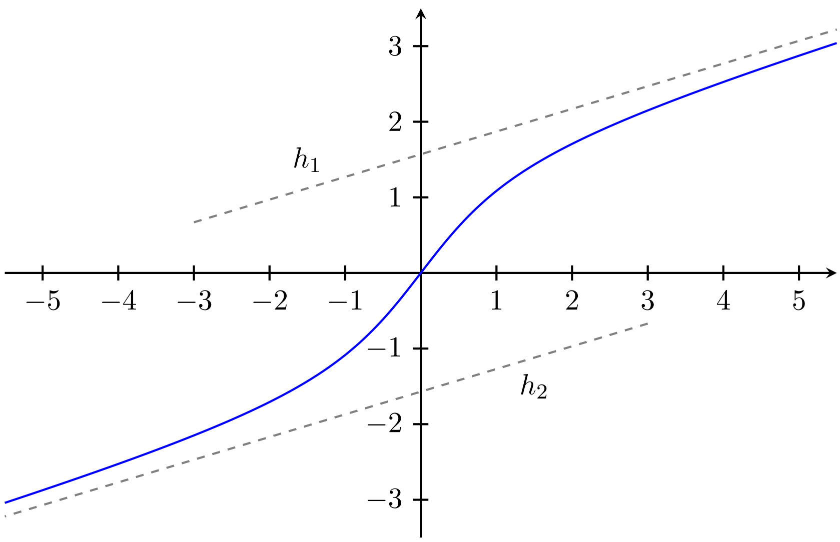
Eftersom $m/x \to 0$, då $x \to \infty$ så gäller att

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{8.53}$$

Från (8.50) har vi även att

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \tag{8.54}$$

Exempel 8.45. Funktionen $f(x) = 3x/10 + \arctan x$ har de sneda asymptoterna $h_1(x) = 3x/10 + \pi/2$ och $h_2(x) = 3x/10 - \pi/2$.



▲

8.11 Grafritning

Exempel 8.46. Rita kurvan till $f(x) = xe^{-x}$, definierad för $x \geqslant 0$, med hjälp av att

a) bestäm stationära punkter och avgör, med hjälp av ett teckenschema av f', var f är strängt avtagande och strängt växande.

b) bestäm inflextionspunkter och avgör, med hjälp av ett teckenschema av f'', var f är konvex och konkav.

c) beräkna eventuella asymptoter.

LÖSNING:

a) Låt oss derivera f. Vi får att

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x},$$

definierad för alla $x \in (0, \infty)$. I detta fall har vi endast en stationär punkt i $x = 1$. Vi gör ett teckenschema enligt följande, där symbolen $\star$ betyder att funktionen i fråga inte är definierad

x	0		1	
$f'(x)$	$\star$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

b) Vi deriverar f' och får att

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

Vi får att f har en inflextionspunkt i $x = 2$. Vi gör ett teckenschema enligt följande

x	0		2	
$f''(x)$	$\star$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\frown$	$2e^{-2}$	$\smile$

c) Eftersom funktionen är kontinuerlig på ett slutet intervall så finns det inga lodräta asymptoter. Om $y = kx + m$ är en sned asymptot så får vi k genom

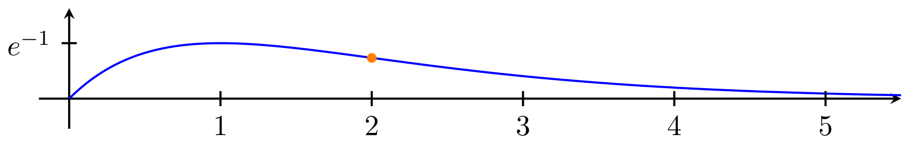
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

och m genom

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Alltså är $y = 0$ en sned asymptot.

Grafen får följande utseende



Figur 8.7: Grafen till $f(x) = xe^{-x}$.

Notera att funktionen är konkav före den orangefärgade pricken och konvex därefter. ▲

8.12 Variationsolikheter

Exempel 8.47 (Tentamen 2011-10-18, 35%)**.** Visa att $e^x \geqslant 1+\sin x$, för varje $x \geqslant 0$.

LÖSNING: Om vi sätter $f(x) = e^x - 1 - \sin x$ så blir uppgiften att visa att $f(x) \geqslant 0$ för varje $x \geqslant 0$. Eftersom $e^x > 1$ och $\cos x \leqslant 1$ då $x > 0$ så ser vi att $f'(x) = e^x - \cos x > 0$ då $x > 0$. Eftersom derivatan $f'(x)$ är positiv då $x > 0$ (och $f(x)$ kontinuerlig då $x \geqslant 0$) följer att funktionen $f(x)$ är strängt växande då $x \geqslant 0$. Eftersom $f(0) = 0$ så följer det nu att $f(x) \geqslant 0$ för alla $x \geqslant 0$. ▲

8.13 Optimering

Exempel 8.48. Ett företag vill minimera materialåtgången vid tillverkningen av cylinderformade konservburkar av en viss volym. Vilket förhållande ska då råda mellan burkens höjd och radie?

LÖSNING: Låt h och r vara höjden respektive radien av burken. Vi har att volymen är

$$V = \pi r^2 h.$$

Arean består av två ytor av storleken πr^2 samt sidan som har höjden h och bredden $2\pi r$. Alltså är arean

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}.$$

Eftersom volymen V är konstant vill vi nu minimera funktionen A, då $r > 0$.

Vi ser direkt att

$$\lim_{r\to 0+} A(r) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{r\to\infty} A(r) = \infty.$$

Då A är deriverbar måste minvärdet finnas i någon stationär punkt. Låt oss derivera,

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

De stationära punkterna uppfyller att $A'(r) = 0$, alltså

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0.$$

Vi löser ut r och får att arean är minimerad då

$$r_{\min} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

Förhållandet mellan höjden och radien ska alltså vara

$$\frac{h}{r_{\min}} = \frac{V}{\pi r_{\min}^3} = 2.$$

▲

Exempel 8.49 (Tentamen 2011-10-18, 53%)**.** Låt $x \geqslant 0$ och $y \geqslant 0$ vara två tal vars summa är 6. Ange det minimala värdet som uttrycket $2x^2 + y^2$ kan anta.

LÖSNING: Eftersom vi vet att $x + y = 6$ kan vi skriva $y = 6 - x$. Problemet är alltså att hitta minimum av funktionen $f(x) = 2x^2 + (6 - x)^2$ på intervallet $[0, 6]$. Genom att kvadratkomplettera ser vi att

$$\begin{aligned} f(x) = &2x^2 + (6^2 + x^2 - 12x) = 3x^2 - 12x + 36 = 3(x^2 - 4x + 12) \\ = &3((x-2)^2 + 8). \end{aligned}$$

Det minsta värde som f kan anta (på hela reella axeln) är $3 \cdot 8 = 24$, som antas då $x = 2$. Eftersom $x = 2$ ligger i intervallet $[0, 6]$ följer att f:s minsta värde på detta intervall är 24.

▲

Exempel 8.50. Bestäm det minsta avståndet från kurvan $y = x^2 - 4$ till origo.

LÖSNING: Vi vill minimera uttrycket $\sqrt{x^2 + y^2}$, då (x, y) är en punkt på den givna kurvan. För att slippa rottecknet så väljer vi att minimera avståndet i kvadrat, vars lösning sammanfaller med det efterfrågade svaret. Alltså vill vi minimera

$$f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (x^2 - 4)^2 = x^4 - 7x^2 + 16,$$

för $x \in \mathbb{R}$. Eftersom funktionen är deriverbar och

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty,$$

så finner vi minimivärdet i en stationär punkt. Derivation ger att $f'(x) = 4x^3 - 14x$. Alltså är det stationära punkterna $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{7/2}$. Vi beräknar funktionens värde i dessa punkter och får att $f(0) = 16$ och $f(\pm\sqrt{7/2}) = 15/4$. Alltså är det minsta avståndet från kurvan $y = x^2 - 4$ till origo $\sqrt{15}/2$.

▲

8.14 Sammanfattning av derivator av elementära funktioner

I tidigare delkapitel har vi bland annat visat följande samband

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \tag{8.55}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \tag{8.56}$$

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}, \ a \neq 0 \tag{8.57}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \tag{8.58}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \tag{8.59}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{8.60}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{8.61}$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.62}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.63}$$

8.15 Övningar

Övning 8.1. Derivera följande funktioner

a) $x \mapsto x \sin x \cos x^2$

b) $x \mapsto e^{x \sin x}$

c) $x \mapsto x \ln x^2 + 4ax$, där $a \in \mathbb{R}$

d) $x \mapsto \cos x(\sin x)^{-1}$

Övning 8.2. Visa att derivatan av $x \mapsto \cos x$ är $x \mapsto -\sin x$.

Övning 8.3. [2009-06-01, uppgift 2] Bestäm ett värde på konstanten a så att kurvorna $y = ax^2$ och $y = \ln x$ har samma tangent i någon gemensam punkt.

Övning 8.4. Visa (8.13) och (8.14).

Övning 8.5. Låt f vara deriverbar i intervallet (a, b). Visa att f är konkav om och endast om f' är avtagande i (a, b).

Övning 8.6. Låt f vara två gånger deriverbar i intervallet (a, b). Visa att f är konkav om och endast om $f''(x) \leqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$.

Övning 8.7. Bestäm det största och minsta värdet som uttrycket

$$\frac{j^2}{1 + (j-1)^2}$$

antar för $j \in \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2\}$.

Övning 8.8. [2006-12-20, uppgift 5] Visa att

$$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2x}\right) > 1,$$

då $0 < x < 1$.

Övning 8.9. [2008-12-15, uppgift 2] Låt funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

vara definierad för $1 \leqslant x < \infty$. Bestäm värdemängden för f.

Övning 8.10. Låt $f(x) = x \ln x$.

a) Vad är definitionsmängden för f?

b) Är f begränsad?

c) Är f strängt växande?

d) Finns det något intervall där f är strängt avtagande?

e) Är f inverterbar?

f) Är det sant att $f(x) > -1/3$ för alla positiva tal x?

Övning 8.11. Studera ekvationen $x^5 - 6x + 1 = 0$.

a) Visa att det finns minst en lösning i intervallet $[-1, 1]$.

b) Bestäm det exakta antalet lösningar i intervallet $[-1, 1]$.

Övning 8.12. Låt $g(t) = te^{-t^2/2}$. Bestäm alla lokala extrempunkter och alla eventuella asymptoter, skissa kurvan $y = g(t)$ och bestäm värdemängden till funktionen.

Övning 8.13. Låt $g(t) = \ln(1 + t^2) - \arctan t$. Bestäm alla lokala extrempunkter och alla eventuella asymptoter, skissa kurvan $y = g(t)$ och bestäm värdemängden till funktionen.

Övning 8.14. Bestäm det största och minsta värdet som funktionen

$$f(x) = \arcsin 4x + 2\sqrt{1 - 16x^2}$$

antar i intervallet $[-1/4, 1/4]$.

Övning 8.15. [2007-05-31, uppgift 2] Visa att $e^x(1 - x) \leqslant 1$ för alla x.

Övning 8.16. [2007-05-31, uppgift 5] Avgör om ekvationen $x^{-x} = 3$ har en lösning då $x > 0$.

Övning 8.17. [2007-12-17, uppgift 1] Låt $f(x) = xe^{-1/x}$, då $x \neq 0$. Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to 0+} f(x)$ och $\lim_{x\to 0-} f(x)$, samt bestäm eventuella sneda asymptoter då $xto \pm \infty$. Använd dessa resultat för att skissera funktionens graf.

Övning 8.18. [2007-12-17, uppgift 2] Visa att $\ln x \leqslant x - 1$ då $x > 0$.

Övning 8.19. [2007-12-17, uppgift 5] Visa att $y(x) = \sinh x \stackrel{\text{def}}{=} (e^x - e^{-x})/2$ har en invers på intervallet $(-\infty, \infty)$, samt beräkna denna.

Övning 8.20. [2008-03-10, uppgift 6] Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = \arctan\left(2x^2 + 1\right) - \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right).$$

Övning 8.21. [2008-12-15, uppgift 5] Visa att

$$\ln x > 2\frac{x - 1}{x + 1},$$

då $x > 1$.

Övning 8.22. [2009-03-09, uppgift 2] Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x) = \sqrt{1 - x} + \arcsin x$ för $x \in [-1, 1]$.

Övning 8.23. [2009-03-09, uppgift 7] Låt $f(x) = e^x + e^{-x} - x$.

a) Bestäm funktionens eventuella stationära punkter.

b) Har funktionen ett minsta värde? Bestäm i så fall en punkt där detta värde antas.

Övning 8.24. Låt $h(x) = (x^2 - 1)e^{2x-4}$.

a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = h(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 2.

b) Använd linjär approximation i $x = 2$, dvs tangentlinjen, för att uppskatta funktionsvärdet $h(2.1)$.

Övning 8.25. Vid laseroptimering försöker man minimera laserfläckens storlek på målet genom att variera strålen ut från lasern på lämpligt sätt. Man använder formeln

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2}\right)^2}$$

där ω är radien av laserfläcken på målet, ω_0 är radien ut från lasern, λ är våglängden (fix) och z är avståndet till målet. Om våglängden är 500 nm, hur liten laserfläck kan man få om lasern riktas mot ett mål på månen?

Övning 8.26. I artikeln *Weak perturbations of the p-Laplacian* av T. Ekholm, H. Kovarik och R. L. Frank finner vi att

a)
$$x^p - Ax^d \geqslant -\frac{p-d}{p}\left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{d}{p-d}} A^{\frac{p}{p-d}},$$
där x, A, p och d är positiva konstanter och $p > d$. Kan du verifiera olikheten?

b)
$$\sup_{v>0}\left(A^p v + Bv^{\frac{p}{p-d}}\right) = A^{\frac{p}{d}} B^{-\frac{p-d}{d}} \left(\frac{p-d}{p}\right)^{\frac{p-d}{p}} \frac{d}{p},$$
där A, B, p och d är positiva konstanter och $p > d$. Kan du verifiera likheten?

Övning 8.27. Använd linjärapproximation av $x \mapsto \sqrt{x}$ runt $x = 4$ för att approximera

a) $\sqrt{4.1}$,

b) $\sqrt{64}$.

Förklara varför den ena approximationen är mycket bättre än den andra.

Övning 8.28. Bestäm alla värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att kurvorna $y = ax + a$ och $y = x^2$ har samma tangent i någon gemensam punkt.

Övning 8.29. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{om } x \neq 0, \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

För $x \neq 0$ kan vi använda deriveringsreglerna för att konstatera att f är deriverbar i x och för att beräkna derivatan.

a) Visa (förslagsvis med definitionen av derivata) att f är deriverbar i $x = 0$. Bestäm $f'(0)$.

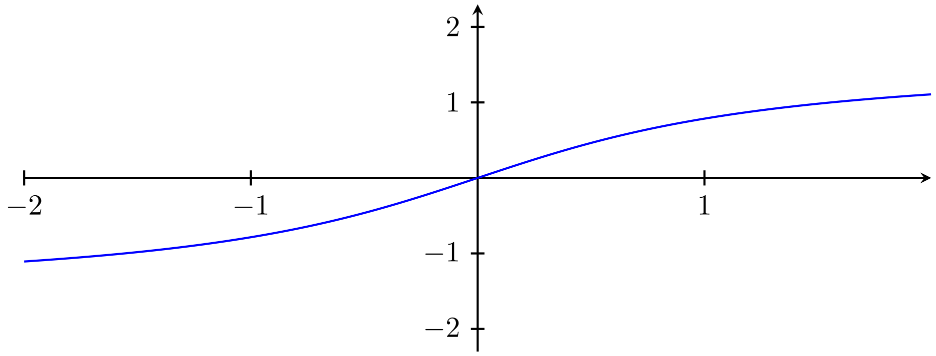
b) Bestäm $f'(x)$ för alla andra $x \in \mathbb{R}$.

c) Är f' en kontinuerlig funktion?

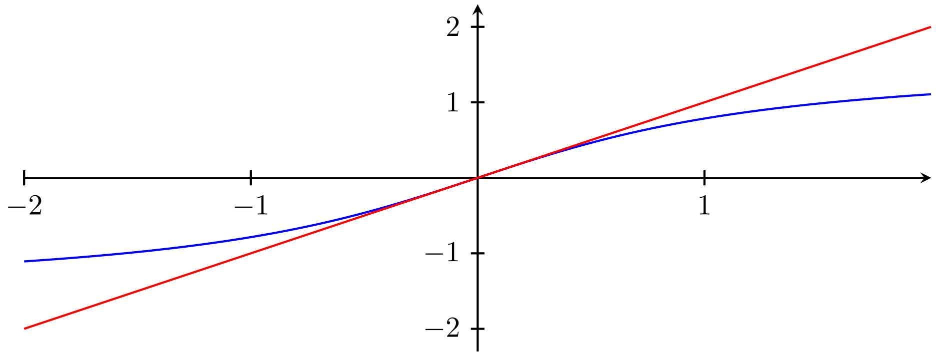
9 Taylors formel

9.1 Några trevande försök till approximation

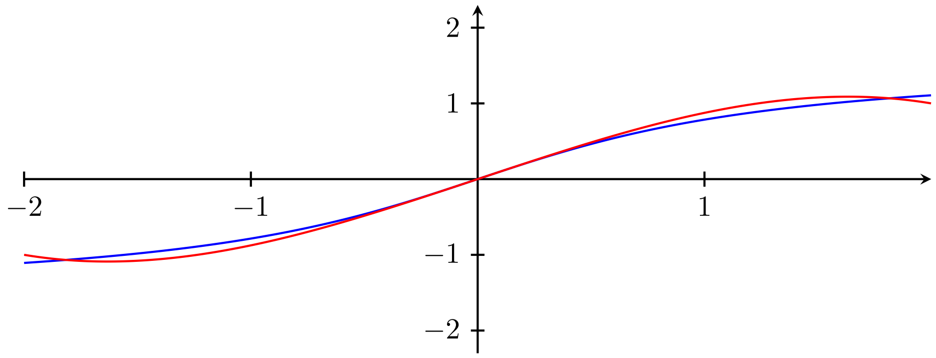
Funktionen $x \mapsto \arctan x$ har följande graf



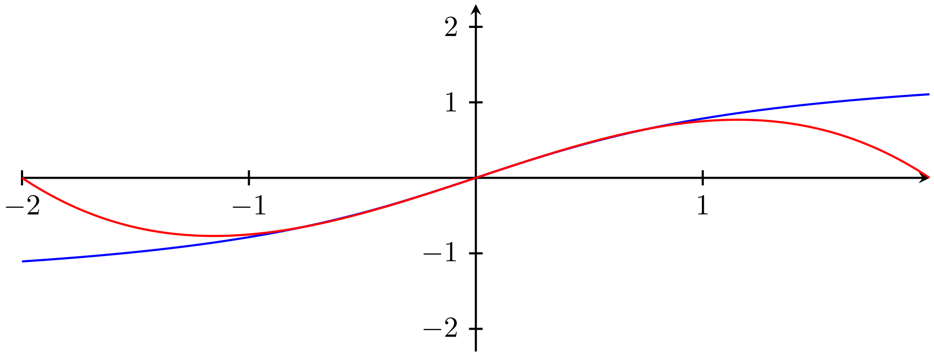
Linjär approximation i punkten 0 av $x \mapsto \arctan x$ är linjen $x \mapsto x$, alltså



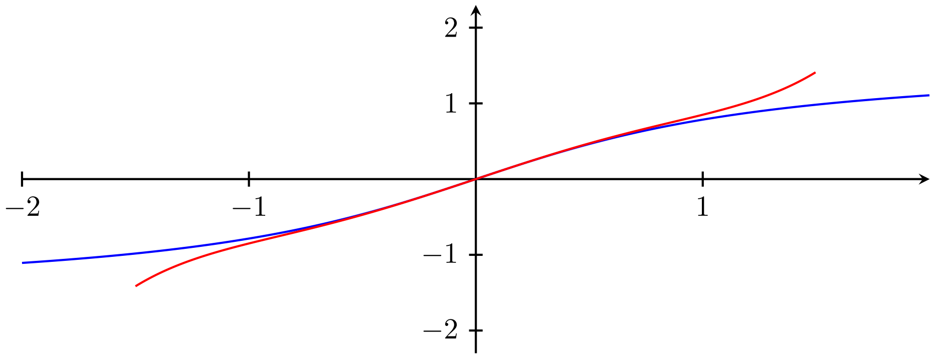
Vi skulle kunna försöka få en bättre approximation genom att lägga till högre gradtal i vår polynomapproximation. Eftersom funktionen $x \mapsto \arctan x$ är udda försöker vi korrigera med en x^3 term. Vi testar med $x \mapsto x - x^3/8$



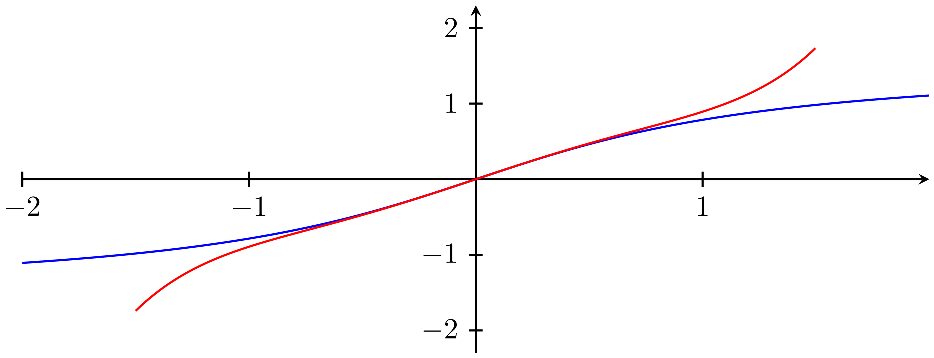
Kanske blir det bättre nära 0 med polynomet $x \mapsto x - x^3/4$



Vi fortsätter med en korrigering av en x^5 term. Vi testar med $x \mapsto x - x^3/4 + x^5/10$



eller kanske $x \mapsto x - x^3/4 + x^5/7$



I nästa delkapitel kommer vi kunna bestämma det polynom som bäst approximerar den givna funktionen.

9.2 Formulering av satsen

I detta delkapitel är det nödvändigt att derivera funktioner många gånger. Vi inför därför notationen $f^{(n)}(x)$ som den n:te derivatan av f. Exempelvis är alltså $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$ och $f^{(2)}(x) = f''(x)$.

Sats 9.1 (Taylors formel)**.** *Låt f vara en n gånger deriverbar funktion definierad i en omgivning av 0, sådan att $f^{(n)}$ är kontinuerlig. Då följer att*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\alpha) x^n}{n!}, \tag{9.1}$$

för något α mellan 0 och x.

Bevis: Vi noterar först att (9.1) stämmer för $x = 0$. Låt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{9.2}$$

och definiera för fixerat $x \neq 0$ konstanten

$$C = \frac{f(x) - p(x)}{x^n}. \tag{9.3}$$

Identitet (9.1) är ekvivalent med att visa identiteten

$$Cn! = f^{(n)}(\alpha). \tag{9.4}$$

Notera att definitionen av p medför att

$$f(0) = p(0),\ f'(0) = p'(0),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0) = p^{(n-1)}(0). \tag{9.5}$$

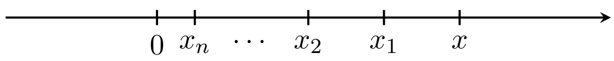
Bilda

$$g(t) = f(t) - p(t) - Ct^n.$$

Från (9.5) följer att

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0. \tag{9.6}$$

Eftersom även $g(x) = 0$ från definitionen av C så följer att medelvärdessatsen 8.27 att det finns ett x_1 mellan 0 och x sådant att $g'(x_1) = 0$. Nu följer igen av medelvärdessatsen att det finns ett x_2 mellan 0 och x_1 sådant att $g''(x_2) = 0$. Denna procedur tar slut efter n steg.



Det sista steget säger att det finns ett $\alpha = x_n$ mellan 0 och x_{n-1} sådant att $g^{(n)}(x_n) = 0$. Alltså har vi

$$0 = g^{(n)}(x_n) = f^{(n)}(x_n) - Cn!,$$

vilket ger (9.4). Alltså är satsen visad. ■

Definition 9.2. Låt f vara n gånger deriverbar. Polynomet

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{9.7}$$

kallas **Taylorpolynomet** till f kring a av gradtal n.

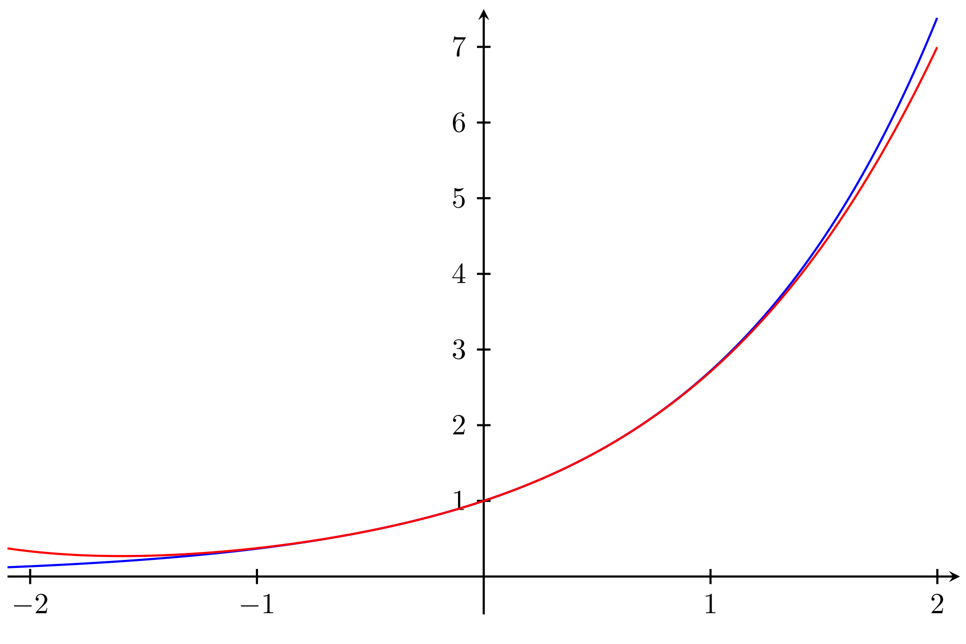
Exempel 9.3. Bestäm Taylorpolynomet av grad fyra kring 0 till $f(x) = e^x$.

LÖSNING: Det som efterfrågas är

$$\begin{aligned} p_4(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} \end{aligned}$$

Vi har att $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(4)}(0) = 1$. Alltså blir polynomet

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$



Figur 9.1: Den blå grafen är f och den röda är p_4.

▲

Exempel 9.4 (Tentamen 2011-10-18, 52%).

a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 1 i punkten $x = 0$ till funktionen

$$f(x) = (1 + x)^{3/2}.$$

b) Visa att om vi använder detta Taylorpolynom $P(x)$ för att approximera värdet $(1 + a)^{3/2}$ för tal a i intervallet $[-1/2, 1/2]$, kan vi då vara säkra på att felet, d.v.s. $\left|P(a) - (1 + a)^{3/2}\right|$, alltid blir mindre än $1/5$?

LÖSNING:

a) Eftersom $f(x) = (1+x)^{3/2}$ har vi $f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}$ och $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{1+x}}$. Taylorpolynomet av ordning 1 till f kring $x = 0$ ges av

$$P(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{3x}{2}.$$

b) Enligt Taylors formel har vi för varje $-1 < x < 1$ att

$$f(x) = P(x) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

där talet ξ ligger mellan 0 och x. Låt $a \in [-1/2, 1/2]$. Då har vi enligt formeln ovan att

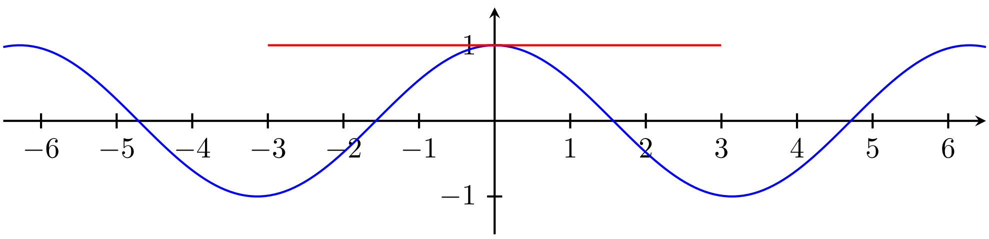
$$|f(a) - P(a)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}a^2\right| = \left|\frac{3}{8\sqrt{1+\xi}}a^2\right| \leqslant \frac{3}{8\sqrt{1-1/2}} \cdot \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{32} < \frac{6}{32} < \frac{1}{5},$$

eftersom ξ ligger mellan 0 och a, d.v.s. vi vet att $\xi \in [-1/2, 1/2]$. Alltså har vi sett att felet blir mindre än $1/5$.

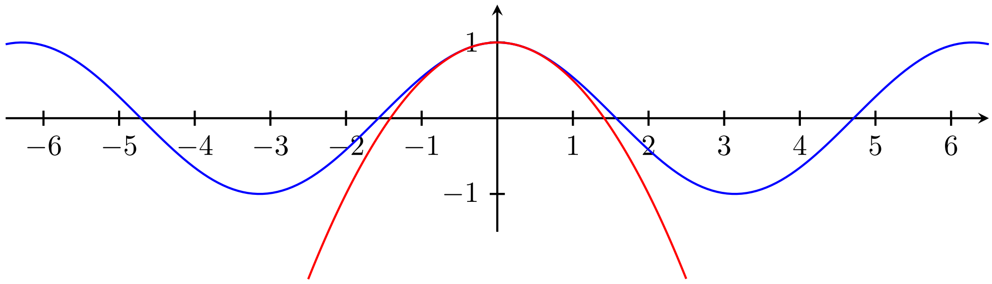
▲

Exempel 9.5. Det är intressant att se hur Taylorpolynomen till en given funktion blir bättre och bättre ju fler termer som vi inkluderar. Studera $f(x) = \cos x$. Eftersom $f^{(2i)}(0) = (-1)^i$ och $f^{(2i+1)}(0) = 0$, för $i \in \mathbb{N}$, så har vi att Taylorpolynomet p_{2n} till f ges av

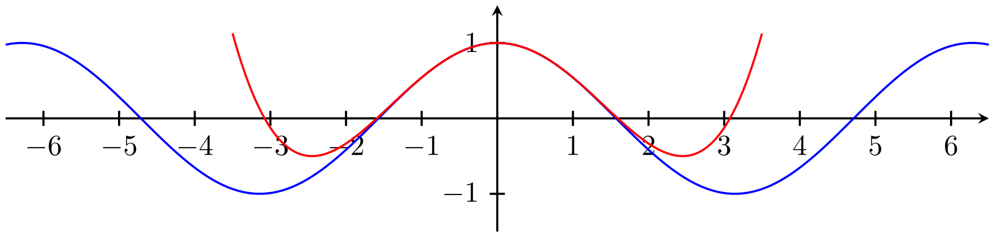
$$p_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$



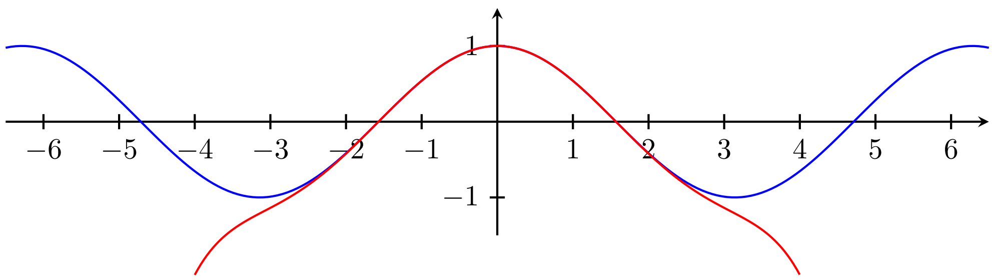
Figur 9.2: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_0(x) = 1$.



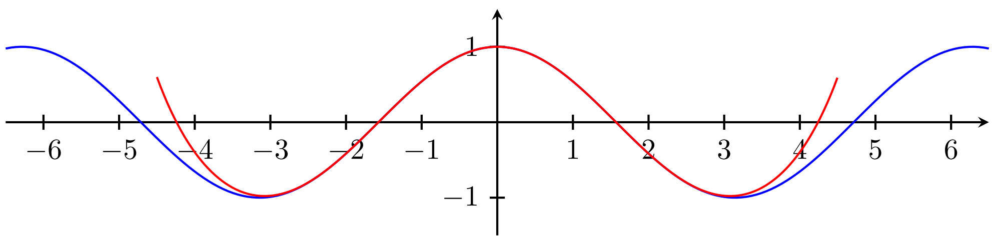
Figur 9.3: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_2(x) = 1 - x^2/2!$.



Figur 9.4: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_4(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4!$.



Figur 9.5: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_6(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!$.



Figur 9.6: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är p_8.

▲

Följdsats 9.6 (Taylors formel kring godtycklig punkt)**.** *Låt f vara en n gånger deriverbar funktion definierad i en omgivning av a, sådan att $f^{(n)}$ är kontinuerlig. Då följer att*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\alpha)(x-a)^n}{n!}, \tag{9.8}$$

för något α mellan a och x.

Bevis: Bilda funktionen $g(t) = f(t+a)$. Då gäller att g uppfyller förutsättningarna för sats 9.1. Vi får att det finns ett α_0 mellan 0 och t sådant att

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{g^{(n)}(\alpha_0)t^n}{n!}. \tag{9.9}$$

Uttryckt i f blir det

$$f(t+a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k + \frac{f^{(n)}(a+\alpha_0)t^n}{n!}, \tag{9.10}$$

eftersom $g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t+a)$, för varje $k \geqslant 0$. Låt nu $t = x-a$, vi får att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\alpha_0)(x-a)^n}{n!}. \tag{9.11}$$

Det räcker med att observera att $\alpha = a + \alpha_0$ är ett tal mellan a och x.

■

Exempel 9.7. Bestäm Taylorpolynomet i punkten π av ordning 3 till funktionen $f(x) = \sin x$.

Lösning: Det sökta polynomet p_3 är

$$p_3(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)(x-\pi)^2}{2} + \frac{f'''(\pi)(x-\pi)^3}{6}.$$

Vi deriverar därför f och får att

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad \text{och} \quad f'''(x) = -\cos x.$$

Sätter vi in de sökta värdena får vi

$$p_3(x) = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6}.$$

Man kan utveckla parenteserna om man vill, men själv tycker jag att ovanstående uttryck är den bästa formen att presentera svaret på. Med formen

$$p_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{(\pi^2-2)x}{2} - \frac{\pi^3 - 6\pi}{6}$$

är det till och med svårt att direkt se att $p_3(\pi) = 0$. ▲

9.3 Stora ordonotationen

Definition 9.8. Låt f och g vara funktioner definierade i (a, ∞), för något a. Vi säger att f tillhör mängden **stora ordo** av funktionen g då $x \to \infty$, och skriver $\mathcal{O}(g(x))$ om det finns tal M och x_0 sådana att

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|,$$

för varje $x > x_0$.

Exempel 9.9. Funktionen $x \mapsto x \ln x$ tillhör $\mathcal{O}(x^3)$ då $x \to \infty$, ty standardgränsvärden (se sats 5.6) ger

$$|x \ln x| \leqslant \left|x^3\right|,$$

för varje $x > 1$. I detta fallet är M och x_0 från definitionen båda 1. ▲

Definition 9.10. Låt f och g vara funktioner definierade i en omgivning till a. Vi säger att f tillhör mängden **stora ordo** av funktionen g kring a, och skriver $\mathcal{O}(g(x))$ om det finns tal M och $\delta > 0$ sådana att

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|,$$

för varje $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Exempel 9.11. Funktionen $x \mapsto 4x^4$ tillhör $\mathcal{O}(x^2)$ kring 0, ty för $M = 4$ och $\delta = 1$ i definitionen får vi

$$\left|4x^4\right| \leqslant 4\left|x^2\right|,$$

för varje $x \in (-1, 1)$. ▲

Vi kommer i givna situationer, då det klart framgår, att utelämna informationen om $\mathcal{O}(g(x))$ betraktas kring en punkt eller vid oändligheten.

I många sammanhang är det praktiskt att införa konventionen

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)),$$

där f och g är givna funktioner. Det vi menar är att f är någon funktion i mängden $\mathcal{O}(g(x))$. Med denna notation kan vi formulera räknereglerna

Sats 9.12. *Låt f och g vara funktioner sådana att $\mathcal{O}(f(x))$ och $\mathcal{O}(g(x))$ är definierade kring en punkt eller vid ∞, då gäller att*

$$\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(f(x)g(x)). \tag{9.12}$$

Om $m \leqslant n$ gäller kring 0 att

$$\mathcal{O}(x^m) + \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^m). \tag{9.13}$$

och kring ∞ gäller att

$$\mathcal{O}(x^m) + \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n). \tag{9.14}$$

Bevis: Låt oss visa dessa identiteter i fallet att stora ordo är kring 0. En mängdidentitet kan erhållas genom att visa att vänsterledet är en delmängd av högerledet och tvärt om.

Vi börjar med (9.12). Låt oss visa att $\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x)g(x))$. Tag $h \in \mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x))$, då finns enligt konventionen en funktion $h_f \in \mathcal{O}(f(x))$ och $h_g \in \mathcal{O}(g(x))$ sådana att $h = h_f \cdot h_g$. Vi vill visa att $h \in \mathcal{O}(f(x)g(x))$. Då $h_f \in \mathcal{O}(f(x))$, så finns det M_f och $\delta_f > 0$ sådana att

$$|h_f(x)| \leqslant M_f|f(x)|,$$

för varje $x \in (-\delta_f, \delta_f)$. Liknande gäller för h_g med konstanterna M_g och δ_g. Vi har att

$$|h| = |h_f| \cdot |h_g| \leqslant M_f M_g |f(x)g(x)|,$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$, där $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Alltså är $\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x)g(x))$.

Låt oss nu visa det omvända, att $\mathcal{O}(f(x)g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x))$. Tag $h \in \mathcal{O}(f(x)g(x))$, d.v.s. det finns tal M och $\delta > 0$ sådana att

$$|h(x)| \leqslant M|f(x)g(x)|, \tag{9.15}$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$. Antag att $g(x) \neq 0$ i en omgivning av $x = 0$. Låt oss bilda $h_1(x) = h(x)/g(x)$ och $h_2(x) = g(x)$, då gäller att $h = h_1 \cdot h_2$, där $h_1 \in \mathcal{O}(f(x))$ och $h_2 \in \mathcal{O}(g(x))$. Alltså är $\mathcal{O}(f(x)g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x))$.

Om $g(x) = 0$ i någon punkt så måste även $h(x) = 0$ för att (9.15) ska gälla. I dessa punkter kan vi definiera både $h_1(x) = h_2(x) = 0$.

Vi lämnar bevisen av (9.13) och (9.14) som en övning till läsaren. ■

Exempel 9.13. Sats 9.12 säger exempelvis att $x^2\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^5)$ och att

$$\frac{\mathcal{O}(x^4)}{x} = \mathcal{O}\Big(x^3\Big)\,.$$

▲

Sats 9.14. *Låt f vara n gånger deriverbar och $f^{(n)}$ vara kontinuerlig i en omgivning av* 0. *Då gäller att*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathcal{O}(x^n)\,, \tag{9.16}$$

kring 0.

Bevis: Vi måste visa att resttermen från sats 9.1

$$R_n(x) := \frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!},$$

där α är ett tal mellan 0 och x, tillhör $\mathcal{O}(x^n)$ kring 0. Eftersom $f^{(n)}$ är kontinuerlig i en omgivning av 0 så är den begränsad där, d.v.s. det finns ett tal K och $\delta > 0$ sådant att

$$f^{(n)}(x) \leqslant K,$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$. Alltså gäller att

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!} \leqslant \frac{K}{n!}x^n,$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$, vilket betyder att $R_n \in \mathcal{O}(x^n)$ kring 0. ■

Exempel 9.15. Visa att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{3x^3} = \frac{1}{9}.$$

LÖSNING: Låt oss Taylorutveckla $\ln(1+x)$ kring 0. Vi får

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\Big(x^4\Big).$$

Alltså gäller att

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{3x^3} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - x + \frac{x^2}{2}}{3x^3} \\ &= \frac{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{3x^3} = \frac{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x)}{3} = \frac{1}{9} + \mathcal{O}(x) \to \frac{1}{9},\end{aligned}$$

då $x \to 0$. ▲

9.4 Övningar

Övning 9.1. Visa att Taylorpolynomet av grad sex i punkten 0 för

a) $\cos x$ är

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

b) $\sin x$ är

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

c) e^x är

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

d) $\ln(1+x)$ är

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$$

e) $\arctan x$ är

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

Övning 9.2. Använd Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 0$ till $f(x) = \sqrt{100 + x}$ för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{104}$. Skriv upp feltermen och avgör om felet i ditt närmevärde är till beloppet mindre än 0.01.

Övning 9.3. [2007-12-17, uppgift 4] Visa att

$$\left| e^{-x^2} - 1 + x^2 \right| \leqslant \frac{x^4}{2}$$

för alla x.

Övning 9.4. [2007-05-31, uppgift 8] Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)^2}{(\cosh x - 1)^3},$$

där $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ och kallas cosinus hyperbolicus.

Övning 9.5. [2007-12-17, uppgift 8] Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Övning 9.6. [2006-12-20, uppgift 4] Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{2x - \sin 2x}.$$

Övning 9.7. [2008-06-04, uppgift 4] Beräkna de fem första noll-skilda termerna i MacLaurinutvecklingen av funktionen

$$f(x) = \arctan \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right).$$

Övning 9.8. [2008-06-04, uppgift 8] Funktionen f uppfyller att

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3x + 2},$$

då $x \notin \{-2, -1\}$ och att $f(1) = 2$.

a) Beräkna Taylorutvecklingen av f omkring punkten $x = 1$ till och med ordningen 2.

b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 1} \frac{3f(x) - x - 5}{(x - 1)^2}.$$

Övning 9.9. [2008-12-15, uppgift 8] Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

a) Bestäm MacLaurinpolynomet p_2 av ordning 2 och tillhörande restterm R_3 för f, så att $f(x) = p_2(x) + R_3(x)$.

b) Visa att då $x > 0$ så gäller att

$$|R_3(x)| \leqslant \frac{x^3}{16}.$$

c) Använd resultaten ovan för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{17}$ och för att uppskatta feltermen:

$$\sqrt{17} = \text{närmevärde} + \text{felterm}.$$

10 Serier

10.1 Definitionen

Definition 10.1. Låt $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ vara en talföljd och låt $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden där

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j. \tag{10.1}$$

Vi definierar **serien** $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ som

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{10.2}$$

Talen s_n kallas för seriens **delsummor**. Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar sägs serien vara konvergent och gränsvärdet kallas för **seriens summa**, i annat fall divergent. En serie sägs vara **positiv** om $a_j \geqslant 0$, för varje $j \in \mathbb{N}$.

Observera att det inte spelar någon roll var serien ovan börjar på för index, detta är endast en namngivning. Det går alltid att döpa om termerna så att serien börjar med index noll.

Läsaren kan själv verifiera att sats 4.5 ger att om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergenta serier så uppfyller de de linjära egenskaperna

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j, \tag{10.3}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} c a_j = c\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \tag{10.4}$$

där $c \in \mathbb{R}$.

Sats 10.2. *Om serien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är konvergent så gäller att $a_j \to 0$, då $j \to \infty$.*

BEVIS: Låt $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ beteckna delsummorna för serien och låt S vara seriens summa. Nu följer satsen från eftersom

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0,$$

då $n \to \infty$. ■

Exempel 10.3. Visa att

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\cos j^{-1}}$$

är divergent.

LÖSNING: Vi har att $a_j = 1/\cos j^{-1} \to 1$, då $j \to \infty$. Enligt sats 10.2 är serien divergent. ▲

10.2 Geometrisk serie

En **geometrisk serie** $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är en serie vars termer $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ bildar en geometrisk talföljd, d.v.s. $a_j = x^j$, för något $x \in \mathbb{R}$. Detta är en av få serier som vi faktiskt kan beräkna, givet att x uppfyller att $|x| < 1$.

Sats 10.4. *Om $|x| < 1$ så gäller att*

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}. \tag{10.5}$$

BEVIS: Låt s_n beteckna delsummorna till serien. Delsummorna är då geometriska summor och därav har vi att

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

se övning 4.11. Eftersom $|x| < 1$ följer att

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x},$$

då $n \to \infty$. ■

10.3 Jämförelsesatser

Sats 10.5. *Låt $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Då gäller att om $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergent så är även $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent.*

BEVIS: Antag att $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergent med summan B och att $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Vi vill visa att $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är konvergent, vilket per definition betyder att

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j$$

är konvergent då $n \to \infty$. Enligt sats 4.7 följer detta om vi visar att $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad. Talföljden $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ är växande eftersom $a_j \geqslant 0$, för varje $j \geqslant 0$. Den är även uppåt begränsad av B eftersom

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j \to B,$$

då $n \to \infty$. Vi är klara. ■

Kontrapositiven av ovanstående sats formuleras nedan.

Följdsats 10.6. *Låt $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Då gäller att om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är divergent så är även $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ divergent.*

Nästa exempel visar att en serie inte nödvändigtvis konvergerar bara för att termerna går mot noll. Tyvärr är detta en vanlig missuppfattning för den som inte tagit till sig teorin om serier på ett tillräckligt vis.

Exempel 10.7. Visa att serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

är divergent.

Lösning: Låt s_n beteckna delsummorna för serien och låt m vara det största heltal sådant att $n \geqslant 2^m$. Då gäller att

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right). \end{aligned}$$

Detta ger att

$$s_n \geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 2^2\frac{1}{2^3} + 2^3\frac{1}{2^4} \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \to \infty,$$

då $n \to \infty$ och därmed även $m \to \infty$. ▲

Sats 10.8. *Serien*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \tag{10.6}$$

är konvergent om och endast om $p > 1$.

Bevis: Vi är klara om vi lyckas visa att serien divergerar då $p \leqslant 1$ och att den konvergerar då $p > 1$.

Låt oss börja med att visa att serien divergerar då $p \leqslant 1$. Detta följer direkt från exempel 10.7, ty olikheten $j^p \leqslant j$ ger

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty.$$

Det återstår att visa att serien konvergerar då $p > 1$. Vi använder liknande metoder som i exempel 10.7, d.v.s. gruppera termerna på ett effektivt sätt. Låt s_n beteckna delsummorna för serien och låt m vara det minsta heltal sådant att $n \leqslant 2^m - 1$. Då gäller att

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leqslant 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{2^{2p}} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{1}{2^{(m-1)p}} + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^p}\right) \\
&\leqslant 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{2^{2p}} + \cdots + \frac{1}{2^{2p}}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{1}{2^{(m-1)p}} + \cdots + \frac{1}{2^{(m-1)p}}\right).
\end{aligned}
$$

Alltså har vi

$$
\begin{aligned}
s_n &\leqslant 1 + 2\frac{1}{2^p} + 2^2\frac{1}{2^{2p}} + \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^{(m-1)p}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{m-1}.
\end{aligned}
$$

Detta är en geometrisk serie och därmed får vi

$$
s_n \leqslant \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} \to \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}},
$$

då $n \to \infty$ eftersom konstruktionen av m ger att $m \geqslant \log_2(1+n) \to \infty$, då $n \to \infty$. ■

Sats 10.9. *Låt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ vara två positiva serier vars termer uppfyller att*

$$
\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = K, \tag{10.7}
$$

för något $K \neq 0$. Då gäller att $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergerar om och endast om $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergerar.

Bevis: Antag att $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergent med summan B. Vi vill visa att $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är konvergent genom att använda sats 4.7. Det är klart att $\sum_{j=1}^{n} a_j$ är växande eftersom $a_j \geqslant 0$ och alltså kvarstår det att visa att delsummorna är uppåt begränsade.

Från (10.7) vet vi att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att

$$
K - \varepsilon < \frac{a_j}{b_j} < K + \varepsilon,
$$

för varje $j > N$. Alternativt,

$$
b_j(K - \varepsilon) < a_j < b_j(K + \varepsilon),
$$

för varje $j > N$. Vi får att

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j=N+1}^{n} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{N} a_j + (K+\varepsilon) \sum_{j=N+1}^{n} b_j \leqslant \sum_{j=1}^{N} a_j + (K+\varepsilon)B$$

och alltså är $\sum_{j=1}^{n} a_j$ uppåt begränsad och därmed även konvergent.

Det omvända resultat följer av symmetriskäl eftersom

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = \frac{1}{K} \neq 0.$$

■

Exempel 10.10. Är serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \sin\left(\frac{1}{j}\right)\right)$$

konvergent?

LÖSNING: Låt $a_j := 1/j - \sin(1/j)$ och $b_j = 1/j^3$. Låt oss Taylorutveckla $\sin(1/j)$ kring 0. Vi har att

$$\frac{a_j}{b_j} = \frac{\frac{1}{j} - \sin\left(\frac{1}{j}\right)}{\frac{1}{j^3}} = \frac{\frac{1}{j} - \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{3!j^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j^5}\right)\right)}{\frac{1}{j^3}} \to \frac{1}{6},$$

då $j \to \infty$. Från sats 10.9 har vi att eftersom $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ är konvergent så är $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergent. ▲

10.4 Absolutkonvergens

Definition 10.11. Serien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ sägs vara **absolutkonvergent** om serien $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ är konvergent.

Sats 10.12. *Om en serie är absolutkonvergent så är den konvergent.*

BEVIS: Låt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ vara absolutkonvergent, d.v.s. låt $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ vara konvergent. Låt oss dela upp summan som differensen av två positiva serier,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{a_j \geqslant 0} a_j - \sum_{a_j < 0} (-a_j).$$

Den första serien innehåller alla icke-negativa termer och den andra all negativa termer. Låt oss visa att dessa två serier är konvergenta. Vi har att

$$0 \leqslant \sum_{a_j \geqslant 0} a_j \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$$

och

$$0 \leqslant \sum_{a_j<0} (-a_j) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$$

och från sats 10.5 är serierna $\sum_{a_j \geqslant 0} a_j$ och $\sum_{a_j<0}(-a_j)$ konvergenta. Härmed är även $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent. ■

Exempel 10.13. Visa att serien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{j^2}$ är konvergent för alla x.

LÖSNING: Serien är konvergent om den är absolutkonvergent. Låt oss visa att

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(jx)}{j^2} \right|$$

är konvergent. Eftersom

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin(jx)}{j^2} \right| \leqslant \frac{1}{j^2}.$$

och serien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ är konvergent så är $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{j^2}$ konvergent. ▲

10.5 Taylorserier

Låt f vara en funktion som är deriverbar godtyckligt många gånger. Differensen mellan f och det $(n-1)$:te Taylorpolynomet ges av resttermen $R_n(x)$. Enligt (9.1) är

$$R_n(x) = f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!}. \tag{10.8}$$

Låt oss fixera $x \in \mathbb{R}$ och konstatera att om $R_n(x) \to 0$, då $n \to \infty$, så har vi för detta x identiteten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}.$$

Det största talet r för vilket serien ovan konvergerar för varje $|x| < r$ kallas Taylorseriens **konvergensradie**.

Exempel 10.14. Visa att

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

LÖSNING: Låt oss först visa att termerna i Taylorutvecklingen av $f(x) := \sin x$ överensstämmer med de i serien. Därefter visar vi att för varje givet x går resttermen mot noll.

Låt oss Taylorutveckla f kring $x = 0$. Vi får för $i \in \mathbb{N}$ att $f^{(4i)}(0) = 0$, $f^{(4i+1)}(0) = 1$, $f^{(4i+2)}(0) = 0$ och $f^{(4i+3)}(0) = -1$. Alltså är Taylorpolynomet av grad $2n-1$, för $n \geqslant 1$, följande

$$p_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

och resttermen uppfyller att

$$\left|\frac{f^{(2n)}(\alpha)x^{2n}}{(2n)!}\right| \leqslant \left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \to 0,$$

då $n \to \infty$. Gränsvärdet är en direkt följd av (4.4). ▲

Exempel 10.15. Konvergensradien för $x \mapsto \ln(1+x)$ är 1. Läsaren kan själv verifiera att $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$ och allmänt gäller att

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{j+1}(j-1)!(1+x)^{-j}.$$

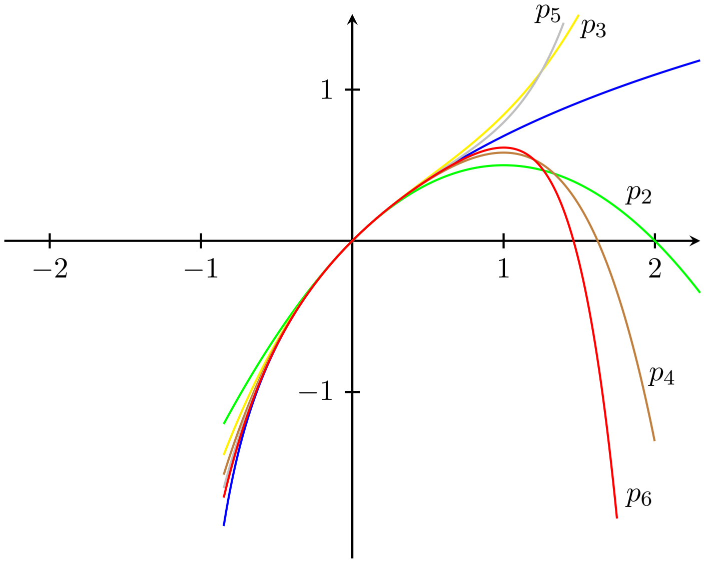
Enligt Taylors formel får vi

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + R_n(x), \tag{10.9}$$

där

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!} = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+\alpha)^n}.$$

Om $-1 < x \leqslant 1$ så går $R_n(x) \to 0$, då $n \to \infty$. Eftersom $x \mapsto \ln(1+x)$ inte är definierad för $x \leqslant -1$ så är konvergensradien 1.



Figur 10.1: Här skissas funktionen tillsammans med några Taylorpolynom.

▲

10.6 Övningar

Övning 10.1. Avgör om följande serier konvergerar

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1000n + 3^n}$

Övning 10.2. Avgör om följande serier konvergerar

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^5}{k^7 - 1}$

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^6}{k^7 - 1}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7 + 1}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^6}{k^7 + 1}$

Övning 10.3. Avgör om följande serier konvergerar

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Övning 10.4. [2007-05-31, uppgift 4] Är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^n}$$

är konvergent?

Övning 10.5. [2008-12-15, uppgift 4] Undersök huruvida serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+3}}$$

är konvergent eller inte.

Övning 10.6 (Utmaning)**.** Visa D'Alemberts kvotkriterium från år 1768. Detta kriterium säger att om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är en positiv serie som uppfyller att

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = H < 1$$

så är serien konvergent.

Övning 10.7 (Utmaning)**.** Visa Cauchys rotkriterium, d.v.s. om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är en positiv serie som uppfyller att

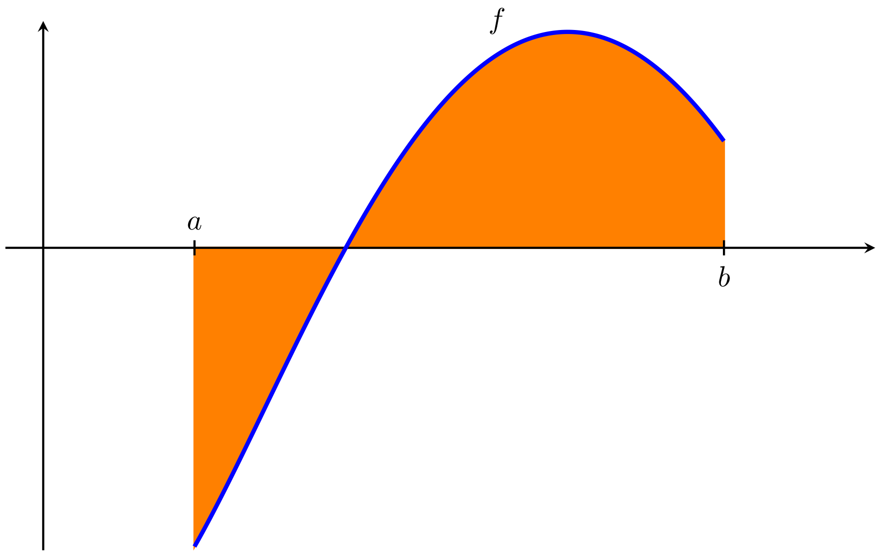
$$\lim_{j\to\infty} a_j^{1/j} = H < 1$$

så är serien konvergent.

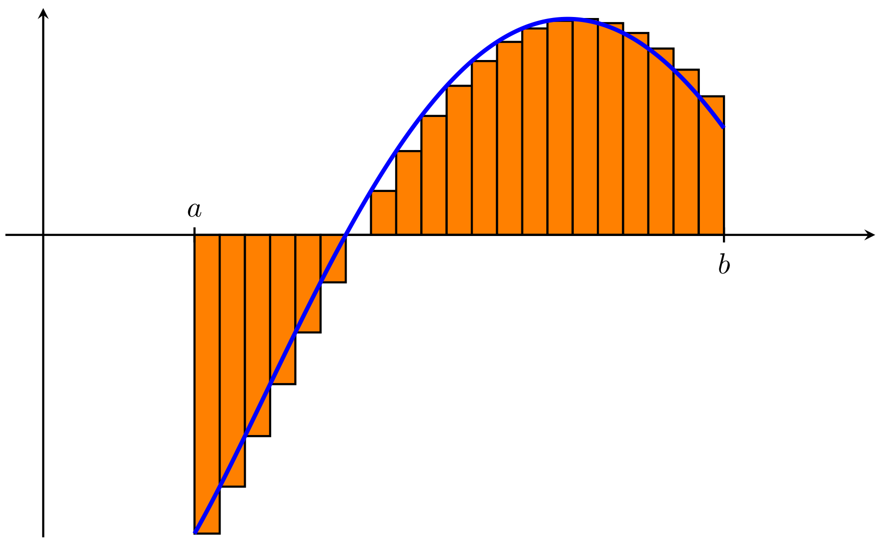
11 Integralen

11.1 Introduktion

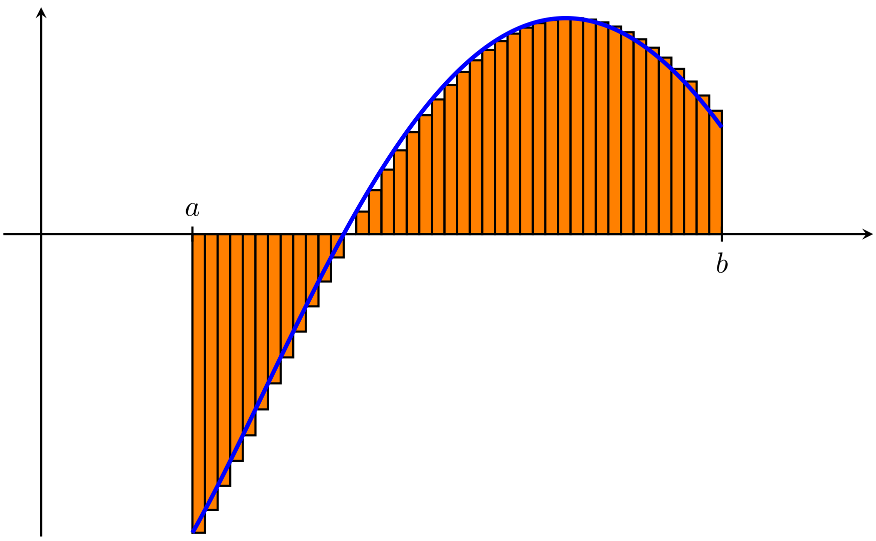
Ett skäl till att införa integraler är att vi vill beräkna arean mellan x-axeln och grafen till en funktion f i intervallet $[a, b]$. Den del av arean som är ovanför x-axeln kommer vi att definiera som positiv och den del som är under x-axeln som negativ.



Idén är att approximera arean genom att beräkna arean av ett antal rektanglar, som är inskrivna mellan grafen och x-axeln.



Till rektangelns höjd tar man, som i bilden, något funktionsvärde i stapelns intervall. Vi kan tänka oss att om vi minskar bredden, d.v.s. väljer fler och fler staplar med mindre och mindre bredd, så kommer vi att få en bättre och bättre approximation till den riktiga arean.



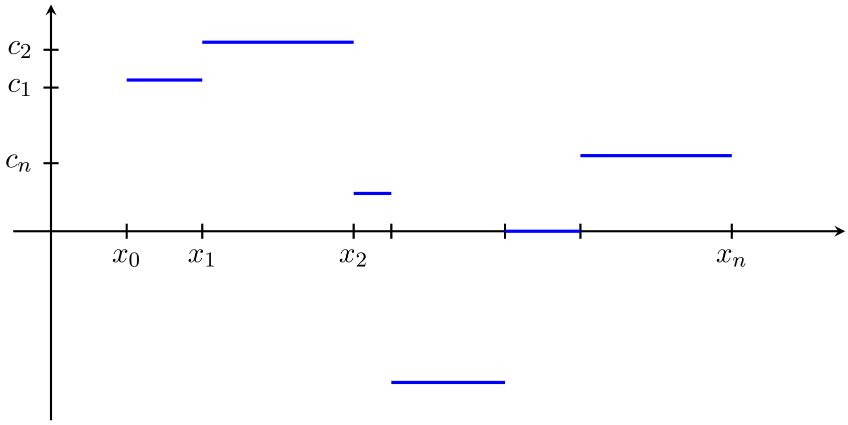
Vi ska beräkna arean genom att låta bredden av staplarna gå mot 0 och därmed antalet mot oändligheten.

11.2 Integraler av trappfunktioner på slutna intervall

En **trappfunktion** Ψ på det slutna intervallet $[a, b]$ är en funktion av typen

$$\Psi(x) = \begin{cases} c_1 & , x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ c_2 & , x_1 < x \leqslant x_2 \\ \vdots & \\ c_n & , x_{n-1} < x \leqslant x_n \end{cases} \tag{11.1}$$

där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är reella konstanter och $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Låt oss illustrera definitionen med en graf

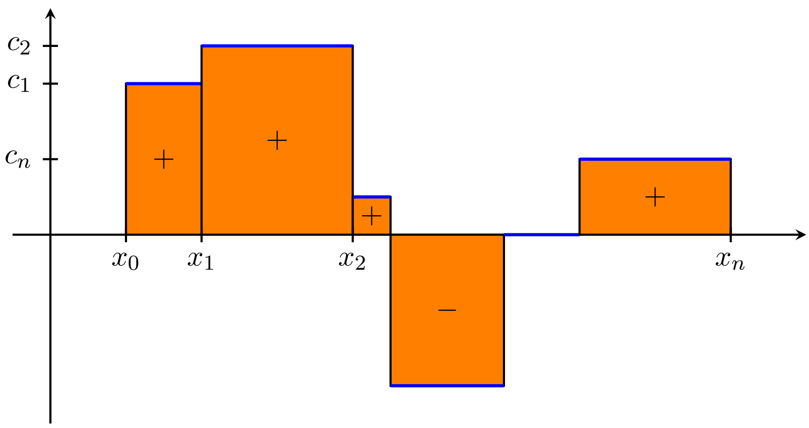


Mängden $P_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ kallas en **uppdelning** av intervallet $[a, b]$ och intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ kallas ett delintervall av uppdelningen.

Integralen av en trappfunktion $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ vill vi ska vara arean mellan x-axeln och grafen till Ψ. Därför väljer vi att definiera integralen av Ψ över $[a, b]$ som

$$\int_a^b \Psi(x)\, dx := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1}),$$

vilket är arean av n stycken rektanglar med höjden c_j och bredden $x_j - x_{j-1}$. Vänsterledet i ovanstående definition anger även vår beteckning på integralen av Ψ över det slutna intervallet $[a, b]$. Vi illustrar definitionen med en figur.



Exempel 11.1. Bestäm

$$\int_{-1}^{4} f(x)\, dx, \tag{11.2}$$

för

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ,-1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -3 & ,0 < x \leqslant 2 \\ 5 & ,2 < x \leqslant 4 \end{cases} \tag{11.3}$$

LÖSNING: Vi summerar areorna av staplarna

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= 2(0-(-1)) + (-3)(2-0) + 5(4-2) \\ &= 2 - 6 + 10 = 6. \end{aligned} \tag{11.4}$$

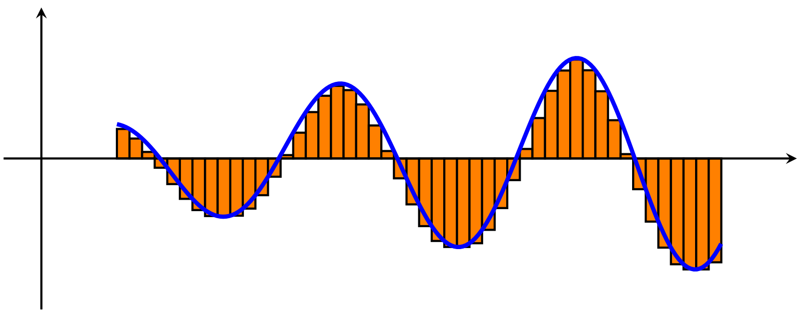
▲

11.3 Integraler av begränsade funktioner på slutna intervall

Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Eftersom f är begränsad finns det trappfunktioner Φ och Ψ sådana att

$$\Phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Psi(x),$$

för varje $x \in [a,b]$. Funktioner Φ och Ψ som uppfyller ovanstående kallas **undertrappa** respektive **övertrappa** till f och deras integraler kallas **undersumma** respektive **översumma** till f.



Figur 11.1: Här är ett exempel på en undertrappa och dess integral

Vi ser från figur 11.1 att integralen av undertrappan är en nedre begränsning av arean mellan x-axeln och grafen för f. På samma vis är integralen av övertrapporna övre begränsningar av arean. Låt $L(f)$ vara mängden av alla undersummor till f och $U(f)$ vara mängden av alla översummor till f, d.v.s.

$$L(f) = \left\{ \int_a^b \Phi(x)\,dx : \Phi \text{ är en undertrappa till } f \right\}, \tag{11.5}$$

$$U(f) = \left\{ \int_a^b \Psi(x)\,dx : \Psi \text{ är en övertrappa till } f \right\}. \tag{11.6}$$

Observera att mängderna $L(f)$ och $U(f)$ är delmängder av reella tal sådana att $L(f)$ är uppåt begränsad av varje tal i $U(f)$ och tvärt om. Supremumegenskapen säger att $\sup L(f)$ och $\inf U(f)$ existerar. A priori gäller att $\sup L(f) \leqslant \inf U(f)$. Vi gör följande definition

Definition 11.2. Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Om

$$\sup L(f) = \inf U(f)$$

så sägs f vara **integrerbar** och **integralen** av f över $[a,b]$ är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup L(f) = \inf U(f).$$

Exempel 11.3. Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Uppfyller att $\sup L(f) = 0$ och supremum antas för undertrappan $\Phi(x) = 0$, medan $\inf U(f) = 1$ och antas för övertrappan $\Psi(x) = 1$. Eftersom $\sup L(f) \neq \inf U(f)$ så är f inte integrerbar. ▲

Sats 11.4. *Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Då är f integrerbar om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en undertrappa Φ och en övertrappa Ψ till f sådana att*

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon. \tag{11.7}$$

Bevis: Antag först att f är integrerbar, d.v.s. $I := \sup L(f) = \inf U(f)$. Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $I = \sup L(f)$ så finns det en undersumma Φ som uppfyller att

$$I - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11.8}$$

och eftersom $I = \inf U(f)$ så finns det en översumma Ψ som uppfyller att

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - I < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.9}$$

Kombinerar vi (11.8) och (11.9) så får vi (11.7).

Antag nu att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en undertrappa Φ och en övertrappa Ψ till f sådana att (11.7) gäller. Vi gör ett motsägelsebevis. Antag att $\sup L(f) = I_L < I_U = \inf U(f)$, då får vi motsägelser av vårt antagande för varje ε som uppfyller att

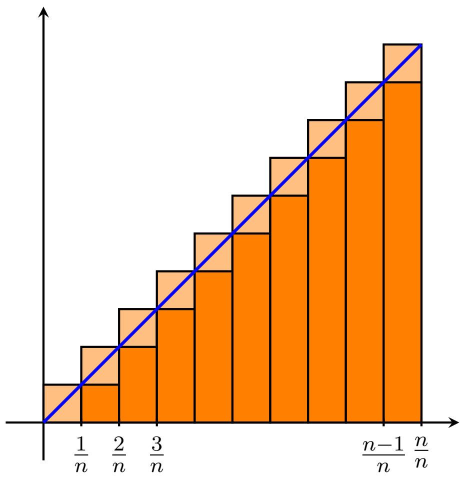
$$\varepsilon < (I_U - I_L)/2.$$

■

Exempel 11.5. Visa med hjälp av definitionen att $f(x) = x$ är integrerbar i intervallet $[0, 1]$ och beräkna med hjälp av definitionen värdet av

$$\int_0^1 x\,dx.$$

LÖSNING: Låt oss dela in intervallet $[0, 1]$ i n stycken delar med bredden $1/n$.



Låt $\Psi(n)$ vara den övertrappa till f som fås genom att låta värdet på intervallet $[i/n, (i+1)n]$ vara det $f((i+1)/n)$. Vi får överintegralen

$$U(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \Psi(n)\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \tag{11.10}$$

där vi använt att

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{11.11}$$

På liknande sätt kan vi visa att det finns en underintegral med värdet

$$L(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \tag{11.12}$$

För att visa att f är integrerbar så använder vi sats 11.4. Tag $\varepsilon > 0$,

$$U(n) - L(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{11.13}$$

om $n > 1/\varepsilon$. Alltså är f integrerbar och

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} U(n) = \lim_{n\to\infty} L(n) = \frac{1}{2}.$$

▲

11.4 Integrerbarhet av kontinuerliga funktioner

Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$ och låt $P_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ vara en uppdelning av $[a, b]$. Låt

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{och} \quad m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Vi vill i detta delkapitel visa satsen

Sats 11.6. *Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$. Då är f integrerbar på $[a, b]$. Dessutom gäller att*

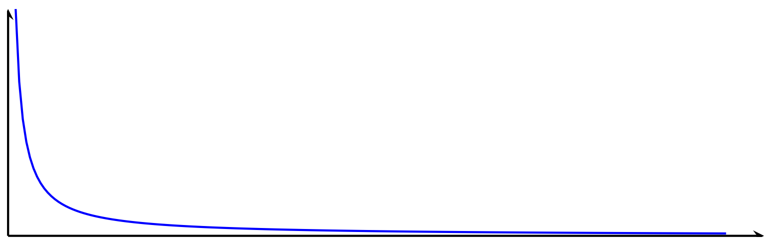
$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \to \int_a^b f(x)\, dx, \tag{11.14}$$

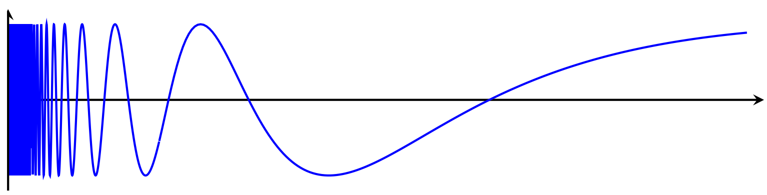
och

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \to \int_a^b f(x)\, dx, \tag{11.15}$$

då $\max \Delta_i \to 0$.

Att intervallet i satsen är slutet gör att funktionen lite slarvigt uttryckt inte kan variera okontrollbart. Se figurerna nedan på funktionerna $x \mapsto 1/x$ och $x \mapsto \sin(1/x)$ kring 0. De är båda kontinuerliga på det öppna intervallet $(0, 1)$.





Definition 11.7. En funktion f sägs vara **likformigt kontinuerlig** på intervallet I om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ för varje $x, y \in I$ som uppfyller att $|x - y| < \delta$.

Det som skiljer kontinuitet och likformig kontinuitet är att för likformigt kontinuerliga funktioner kan δ i definitionen kan väljas oberoende av inparametrarna till funktionen.

Sats 11.8. *Låt f vara kontinuerlig på intervall $[a, b]$. Då är f likformigt kontinuerlig på $[a, b]$.*

Bevis: Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att f är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig på $[a, b]$.

Tag $\varepsilon > 0$. För varje $\delta_k > 0$ finns det $x_k, y_k \in [a, b]$, sådana att $|x_k - y_k| < \delta_k$ och $|f(x_k) - f(y_k)| \geqslant \varepsilon$. Låt oss nu välja $\delta_k = 1/k$. Då gäller att $|x_k - y_k| \to 0$, då $k \to \infty$. Eftersom $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en begränsad talföljd, så ger Bolzano-Weierstrass sats, se sats 4.24, att det finns en konvergent delföljd, säg $x_{k_i}{}_{i=1}^{\infty}$, som konvergerar mot ett tal $p \in [a, b]$. Vi har även att

$$|y_{k_i} - p| \leqslant |y_{k_i} - x_{k_i}| + |x_{k_i} - p| < 1/k_i + |x_{k_i} - p| \to 0,$$

då $i \to \infty$.

Då f är kontinuerlig i p gäller att $f(x_{k_i}) \to f(p)$ och $f(y_{k_i}) \to f(p)$ då $i \to \infty$. Triangelolikheten ger nu att

$$\varepsilon \leqslant |f(x_{k_i}) - f(y_{k_i})| \leqslant |f(x_{k_i}) - f(p)| + |f(p) - f(y_{k_i})| \to 0,$$

då $i \to \infty$. Detta motsäger att $\varepsilon > 0$. Alltså är f likformigt kontinuerlig. ∎

Nu är vi redo för beviset av sats 11.6.

Bevis av sats 11.6: Låt oss bevisa satsen genom att använda oss av sats 11.4. Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill finna en övertrappa Ψ och en undertrappa Φ sådana att

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon.$$

Enligt sats 11.8 har vi att f är likformigt kontinuerlig. Välj $\delta > 0$ sådant att om $|x - y| < \delta$ så är

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Låt nu P vara en uppdelning av $[a, b]$ bestående av n delintervall $[x_{i-1}, x_i] \in P$ med egenskapen att längderna av varje delintervall är mindre än δ, alltså $\Delta_i = x_i - x_{i-1} < \delta$.

Då f är kontinuerlig så antar f ett minvärde m_i och ett maxvärde M_i på varje slutet intervall $[x_{i-1}, x_i]$. Vi kan nu konstruera en översumma och en undersumma med egenskapen

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \varepsilon. \tag{11.16}$$

Alltså är f integrerbar enligt sats 11.4. Vi har dessutom visat genom vår konstruktion att (11.14) och (11.15) är samma. ∎

11.5 Räkneregler

Antag att $a < b$ och att f är en integrerbar funktion på $[a, b]$, då *definierar* vi

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Följande räkneregler visas först för trappfunktioner och därefter generaliseras de till integrerbara funktioner. Vi lämnar beviset för trappfunktioner till läsaren och bevisar hur generaliseringen till integrerbara funktioner går till.

Sats 11.9. *Låt f och g vara integrerbara funktioner på intervallet $[a, b]$ och $c \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{11.17}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{11.18}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{11.19}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{11.20}$$

Om $f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \in [a, b]$ så gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{11.21}$$

Bevis: Vi visar (11.17) och lämnar resterande bevis som en övning till läsaren.

Även verifieringen av (11.17) i fallet att f och g är trappfunktioner lämnas till läsaren att verifiera.

Vi behöver nu utvidga (11.17) till godtyckliga integrerbara funktioner. Eftersom f och g är integrerbara finns det undertrappor $\Phi_{n,f}$ och $\Phi_{n,g}$ samt övertrappor $\Psi_{n,f}$ och $\Psi_{n,g}$ för f respektive g sådana att

$$\int_a^b \Psi_{n,f}(x)\,dx - \int_a^b \Phi_{n,f}(x)\,dx < \frac{1}{2n}$$

och

$$\int_a^b \Psi_{n,g}(x)\,dx - \int_a^b \Phi_{n,g}(x)\,dx < \frac{1}{2n}.$$

Trappfunktionerna $\Phi_n := \Phi_{n,f} + \Phi_{n,g}$ och $\Psi_n := \Psi_{n,f} + \Psi_{n,g}$ är en under- respektive övertrappa till $f + g$. Funktionen $f + g$ är därmed integrerbar eftersom

$$\int_a^b \Psi_n(x)\,dx - \int_a^b \Phi_n(x)\,dx < \frac{1}{n}.$$

Denna olikhet säger att

$$\int_a^b \Phi_n(x)\,dx \to \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx,$$

då $n \to \infty$. Med andra ord har vi att

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\Phi_{n,f}(x)+\Phi_{n,g}(x))\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_{n,f}(x)\,dx + \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_{n,g}(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

vilket visar (11.17). ■

Exempel 11.10 (Tentamen 2011-10-18, 11%)**.**

a) Visa att
$$\int_0^1 e^{x^2} \sin 5x\,dx \leqslant 10.$$

b) Visa att det finns ett tal N sådant att
$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} \geqslant 100.$$

Lösning:

a) Eftersom e^t är växande för alla t och x^2 är växande då $0 \leqslant x$, så följer att e^{x^2} är växande då $0 \leqslant x$. Alltså är $e^{x^2} \leqslant e^{1^2} = e$ om $0 \leqslant x \leqslant 1$. Därtill vet vi att $\sin t \leqslant 1$ för alla t. Om vi använder dessa två olikheter så får vi att
$$e^{x^2}\sin(5x) \leqslant e^{x^2} \leqslant e$$
om $0 \leqslant x \leqslant 1$. En egenskap hos integralen är att den bevarar olikheter och alltså är
$$\int_0^1 e^{x^2}\sin(5x)dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2}dx \leqslant \int_0^1 e\,dx = e < 10.$$

b) Betrakta serien
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n}.$$

Vi vet att om en serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ är konvergent så är $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1+\frac{\log n}{n^2}} = 1 \neq 0$$

så följer att vår serie är divergent. Eftersom serien också är positiv så följer att $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \infty$. Att $\lim_{k\to\infty} b_k = \infty$, för en talföljd b_k, betyder att b_k blir hur stor som helst bara k är tillräckligt stort. Mer precist formulerat: för varje tal B finns ett tal N sådant att $b_n > B$ för varje $n > N$. Alltså vet vi att det finns ett tal N sådant att

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} \geqslant 100.$$

▲

11.6 Medelvärdessatser för integraler

Sats 11.11 (Medelvärdessatsen för integraler)**.** *Låt f vara kontinuerlig i $[a,b]$. Då finns det ett tal $\alpha \in (a,b)$ sådant att*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)(b-a).$$

Satsen följer direkt från en något mer generell sats, nämligen genom att sätta $g(x) = 1$ i följande sats

Sats 11.12 (Generaliserade medelvärdessatsen för integraler)**.** *Låt f och g vara kontinuerliga funktioner i $[a,b]$ och $g \geqslant 0$. Då finns det ett tal $\alpha \in [a,b]$ sådant att*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\alpha)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Bevis: I fallet att $g = 0$ följer satsen direkt.

Antag att $g \neq 0$. Eftersom f är kontinuerlig så har f ett max- och minvärde på $[a,b]$. Låt M och m vara max respektive minvärdet för f på $[a,b]$. Vi har att $m \leqslant f(x) \leqslant M$, för varje $x \in [a,b]$ och därmed även

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

eller omskrivet

$$m \leqslant \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M.$$

Satsen om mellanliggande värde säger att det finns ett tal $\alpha \in [a,b]$ sådant att

$$f(\alpha) = \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

vilket ger önskad likhet. ■

11.7 Analysens huvudsats

Definition 11.13. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall $[a, b]$. En funktion F sägs vara en **primitiv funktion** till f på $[a, b]$ om $F'(x) = f(x)$, för varje $x \in (a, b)$ och F är kontinuerlig i $[a, b]$.

Låt F_1 och F_2 vara två primitiva funktioner till en funktion f, alltså $F_1' = F_2' = f$. Om vi nu studerar $G = F_1 - F_2$ så får vi att $G' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. Enligt sats 8.29 a) är $G(x) = C$, för någon konstant $C \in \mathbb{R}$. Alltså gäller att två primitiva funktioner skiljer sig endast på en konstant.

Mängden av alla primitiva funktioner till en funktion f betecknas med

$$\int f(x)\, dx.$$

Sats 11.14 (Analysens huvudsats)**.** *Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$. Då gäller att*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

är en primitiv funktion till f i intervallet $[a, b]$.

BEVIS: Låt oss använda derivatans definition. Vi vill alltså visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Vi har att

$$\frac{1}{h}(F(x + h) - F(x)) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Medelvärdessatsen 11.11 ger att det finns ett $\alpha \in (x, x + h)$ sådant att

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = \frac{1}{h}(x + h - x)f(\alpha) = f(\alpha) \to f(x),$$

då $h \to 0$. Vilket skulle visas. ■

Sats 11.15 (Insättningsformeln)**.** *Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f på $[a, b]$. Då gäller att*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

BEVIS: Låt

$$G(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, dt.$$

Enligt analysens huvudsats är $G' = f$ och därmed är $G(x) = F(x) + C$, för något $C \in \mathbb{R}$. Vi ser att $C = 0$ eftersom $G(a) = F(a)$. Nu följer satsen från

$$F(b) = G(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\blacksquare$

Det är praktiskt att i detta läget införa notationen

$$\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a),$$

här är det underförstått att x är den variabel som ska ersättas med a och b.

Exempel 11.16. Bestäm

$$\int_2^5 (2 - x + 2x^3)\,dx.$$

Lösning: Enligt sats 11.9 kan vi integrera termvis. Alltså får vi att

$$\begin{aligned}\int_2^5 (2 - x + 2x^3)\,dx &= \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\right]_2^5 \\ &= 10 - \frac{25}{2} + \frac{625}{2} - (4 - 2 + 8) = 300.\end{aligned}$$

$\blacktriangle$

Exempel 11.17. Bestäm arean mellan x-axeln, funktionen $x \mapsto (1 + x^2)^{-1}$, $x = 0$ och $x = 1$.

Lösning: Eftersom integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

beskriver just denna area så gäller det att beräkna dess värde. Eftersom

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

så får vi enligt sats 11.15 att

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Den sökta arean är alltså $\pi/4$. $\blacktriangle$

11.8 Partiell integration

Sats 11.18 (Partiell integration)**.** *Låt f, g och g' vara kontinuerliga i $[a,b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f i $[a,b]$. Då gäller att*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{11.22}$$

Bevis: Detta resultat är en integrerad version av produktregeln för derivator. Produktregeln för derivator ger att

$$(Fg)'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x).$$

Integrerar vi denna identitet får vi

$$\int_a^b (Fg)'(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Notera att

$$\int_a^b (Fg)'(x)\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b,$$

vilket ger (11.22). ■

Exempel 11.19. Bestäm en primitiv funktion till $x \mapsto \ln x$.

Lösning: Vi använder partiell integration med $f(x) = 1$ och $g(x) = \ln x$. Vi får enligt (11.22) att

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = [x\ln x] - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C,$$

där C är en reell konstant. ▲

Exempel 11.20. Beräkna integralen

$$\int_0^\pi x^2\sin(2x)\,dx.$$

Lösning: Vi använder oss av partiell integration i två etapper. Vi får att

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2\sin(2x)\,dx &= \left[x^2\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \int_0^\pi x\cos(2x)\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(2x)}{2}\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

▲

11.9 Variabelbyte

Sats 11.21. *Låt g och g' vara kontinuerliga i $[a, b]$ och låt f vara kontinuerlig mellan $g(a)$ och $g(b)$. Då gäller att*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Bevis: Detta resultat är en integrerad version av kedjeregeln för derivator. Från kedjeregeln har vi att

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = f(g(x))g'(x).$$

Integration av båda leden ger

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(g(x)))\,dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Vänsterledet kan omformas enligt

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{d}{dx}(F(g(x)))\,dx &= \big[F(g(x))\big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \big[F(x)\big]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Vilket visar satsen. ■

Exempel 11.22 (Tentamen 2011-10-18, 55%)**.** Bestäm integralen

$$\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx.$$

Lösning: Vi beräknar integralen med hjälp av variabelbyte:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx &= \left\{\begin{array}{c} t = \sqrt{x-1} \\ x = t^2+1 \\ dt = dx/(2\sqrt{x-1}) \end{array}\right\} = \int_1^2 \frac{2}{t^2+1}dt \\ &= [2\arctan t]_1^2 = 2(\arctan 2 - \arctan 1) \\ &= 2\arctan 2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

▲

11.10 Integration av rationella funktioner

Låt f vara en rationell funktion, d.v.s.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

där p och q är polynom. Vi ska visa en strategi för att beräkna integraler av denna typ av funktioner. Denna strategi består av stegen

a) utför polynomdivision,

b) faktorisera nämnaren,

c) partialbråksuppdela,

d) integrera termvis.

Arcustangenstermen

Exempel 11.23. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen

$$\frac{7}{5+20x^2}.$$

LÖSNING: Vi får att

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{5+20x^2}\,dx &= 7\int \frac{1}{5(1+4x^2)}\,dx = \frac{7}{5}\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t=2x \\ dt=2dx \end{array}\right\} \\ &= \frac{7}{5}\int \frac{1}{2(1+t^2)}dt = \frac{7}{10}\arctan t + C = \frac{7}{10}\arctan(2x) + C,\end{aligned}$$

där C är en godtycklig reell konstant. ▲

Lite mer generellt har vi för reella $a, b \neq 0$ och $c \neq 0$ identiteten

$$\int \frac{a}{b^2+c^2x^2}\,dx = \frac{a}{bc}\arctan\left(\frac{cx}{b}\right) + C. \tag{11.23}$$

En identisk lösning av föregående exempel följer

$$\begin{aligned}\int \frac{a}{b^2+c^2x^2}\,dx = a\int \frac{1}{b^2\left(1+\frac{c^2x^2}{b^2}\right)}\,dx &= \frac{a}{b^2}\int \frac{1}{1+(\frac{cx}{b})^2}\,dx \\ &= \left\{\begin{array}{c} t=\frac{cx}{b} \\ dt=\frac{c}{b}dx \end{array}\right\} = \frac{a}{b^2}\int \frac{1}{1+t^2}\frac{b}{c}\,dt \\ &= \frac{a}{bc}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{a}{bc}\arctan t + C \\ &= \frac{a}{bc}\arctan\left(\frac{cx}{b}\right) + C,\end{aligned}$$

där C är en godtycklig reell konstant.

Exempel 11.24. Bestäm alla primitiva funktioner till

$$\frac{1}{x^2+4x+5}.$$

LÖSNING: Då nämnaren inte kan faktoriseras i reella polynom, så använder vi oss av kvadratkomplettering. Notera att

$$x^2+4x = (x+2)^2 - 4,$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t + C = \arctan(x+2) + C
\end{aligned}$$

▲

Även detta fall kan beskrivas med generella konstanter. Låt a och $b > 0$ vara godtyckliga reella konstanter sådana att $b - a^2 > 0$. Med hjälp av kvadratkomplettering får vi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2ax+b}\,dx &= \int \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x+a \\ dt = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1}{b-a^2+t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Nu kan vi använda (11.23) och får

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{b-a^2+t^2}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C
\end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\int \frac{1}{x^2+2ax+b}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C \tag{11.24}$$

Logaritmtermen

Exempel 11.25. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen

$$\frac{4x-3}{x^2+3x+3}.$$

LÖSNING: Låt oss ordna så att derivatan av nämnaren, nämligen $2x+3$, återfinns i täljaren. Vi får att

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x-3}{x^2+3x+3}\,dx &= 2\int \frac{2x-\frac{3}{2}}{x^2+3x+3}\,dx = 2\int \frac{2x+3-\frac{9}{2}}{x^2+3x+3}\,dx \\
&= 2\left(\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx - \frac{9}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+3}\,dx\right).
\end{aligned}$$

Den första integralen löser vi genom variabelbytet $t = x^2+3x+3$. Vi får att $dt = (2x+3)dx$ och därmed är

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C_1 = \ln(x^2+3x+3) + C_1,$$

där C_1 är en reell konstant.

Den andra integralen uppfyller villkoren för (11.24) och vi får

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+3x+3}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{3-9/4}}\arctan\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{3-9/4}}\right)+C_2\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C_2\end{aligned}$$

där C_2 är en godtycklig reell konstant.

Sammantaget får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-3}{x^2+3x+3}\,dx &= 2\ln(x^2+3x+3)-\frac{9}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C_3\\ &= 2\ln(x^2+3x+3)-3\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C_3,\end{aligned}$$

där C_3 är en godtycklig reell konstant. ▲

Allmänt gäller att för reella konstanter a, b, c och d sådana att $d-c^2>0$

$$\int \frac{2ax+b}{x^2+2cx+d}\,dx = a\ln(x^2+2cx+d)+\frac{b-2ac}{\sqrt{d-c^2}}\arctan\left(\frac{x+c}{\sqrt{d-c^2}}\right)+C, \tag{11.25}$$

där C är en godtycklig reell konstant. Vi använder oss av vårt tidigare exempel och (11.24)

$$\begin{aligned}\int \frac{2ax+b}{x^2+2cx+d}\,dx &= a\left(\int \frac{2x+2c}{x^2+2cx+d}\,dx+\int \frac{\frac{b}{a}-2c}{x^2+2cx+d}\,dx\right)\\ &= a\ln(x^2+2cx+d)+(b-2ac)\int \frac{dx}{x^2+2cx+d}\\ &= a\ln(x^2+2cx+d)+\frac{b-2ac}{\sqrt{d-c^2}}\arctan\left(\frac{x+c}{\sqrt{d-c^2}}\right)+C,\end{aligned}$$

där C är en godtycklig reell konstant.

Partialbråksuppdelning

Vi inleder med ett exempel som illustrerar vad vi vill åstadkomma.

Exempel 11.26. Antag att vi vill finna primitiv funktion till funktionen

$$\frac{4}{x(x+1)(x+2)}.$$

Eftersom vi klarar att finna primitiv funktion till

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x+1} \quad \text{och} \quad \frac{1}{x+2},$$

så kan vi försöka skriva vår ursprungliga funktion som en kombination av dessa. Vi ansätter därför

$$\frac{4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

Högerledet kan skrivas om med hjälp av minsta gemensamma nämnare enligt

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} &= \frac{A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 + Cx}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A}{x(x+1)(x+2)}.\end{aligned}$$

Alltså har vi identiteten

$$\frac{4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A}{x(x+1)(x+2)}.$$

Det räcker nu att jämför koefficienterna för täljarnas polynom. Vi får att $A + B + C = 0$, $3A + 2B + C = 0$ och $2A = 4$. Alltså är $A = 2$. Vi kan lösa ut resterande konstanter ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} B + C = -2 \\ 2B + C = -6 \end{cases}$$

Lösningen $B = -4$ och $C = 2$ fås med lämplig metod. Vi har lyckats med omformuleringen och får att

$$\begin{aligned}\int \frac{4\,dx}{x(x+1)(x+2)} &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right) dx \\ &= 2\ln|x| - 4\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C,\end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant. ▲

Tips vid partialbråksuppdelning

Om den faktoriserade nämnaren innehåller faktorer av typen

$$(x+a)^n,$$

för något $a \in \mathbb{R}$ och något heltal $n \geqslant 2$ så ansätt termerna

$$\frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$$

och om den innehåller faktorer av typen

$$x^2 + ax + b$$

så ansätt termen

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}.$$

Exempel 11.27. Lös integralen

$$\int_0^{1/2} \frac{2\,dx}{(x^2+1)(x-1)^2}.$$

LÖSNING: Låt oss ansätt termerna

$$\frac{2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$

Genom att skapa minsta gemensamma nämnare i högerledet får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(Ax+B)(x-1)^2 + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D)}{(x^2+1)(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Genom att jämföra koefficienter i täljarna får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases}
A + C = 0 \\
-2A + B - C + D = 0 \\
A - 2B + C = 0 \\
B - C + D = 2
\end{cases}$$

Lösningen är $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ och $D = 1$. Alltså har vi

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{2\,dx}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \int_0^{1/2} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right]_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} - \ln\frac{1}{2} + 2 - 1 \\
&= \frac{1}{2}\ln 5 + 1
\end{aligned}$$

▲

11.11 Taylors formel med integration

Vi börjar med ett alternativt bevis av sats Taylors formel som bygger på partialintegration.

BEVIS AV SATS 9.1: Från insättningsformeln har vi att

$$\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0).$$

Med hjälp av partiell integration kan vi få ut term efter term enligt

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt \\
&= f(0) + [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt \\
&= f(0) + f'(0)x - \left(\left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \right) \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \left[\frac{(t-x)^3}{3!} f^{(3)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,dt \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Om vi fortsätter på samma sätt får vi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Vi tillämpar nu den generaliserade medelvärdessatsen 11.12 för integraler med

$$g(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \geqslant 0,$$

då $t \in (0, x)$. Vi får för något $\alpha \in (0, x)$ att

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + f^{(n)}(\alpha) \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

Vilket avslutar beviset. ■

Med hjälp av formeln för en geometrisk summa så kan vi på ett relativt enkelt sätt bestämma Taylorutvecklingen av funktionerna $x \mapsto \ln(1+x)$ och $x \mapsto \arctan x$.

Sats 11.28. *Följande Taylorutvecklingar gäller*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\alpha)}, \tag{11.26}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\alpha^2)}, \tag{11.27}$$

där α är något tal mellan 0 och x.

Bevis: Enligt formeln för en geometrisk summa har vi för $x \neq 1$ att

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1},$$

som kan skrivas om till

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Låt oss sätta $x = -t$. Vi får då

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}. \tag{11.28}$$

Låt oss nu integrera likheten från 0 till s. Vi får

$$\ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{s^n}{n} + (-1)^n \int_0^s \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Om vi använder den generaliserade medelvärdessatsen (se sats 11.12) så får vi för något α mellan 0 och s,

$$\begin{aligned}
\ln(1+s) &= s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}s^n}{n} + \frac{(-1)^n}{1+\alpha}\int_0^s t^n\,dt \\
&= s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}s^n}{n} + \frac{(-1)^n s^{n+1}}{(n+1)(1+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Detta visar (11.26).

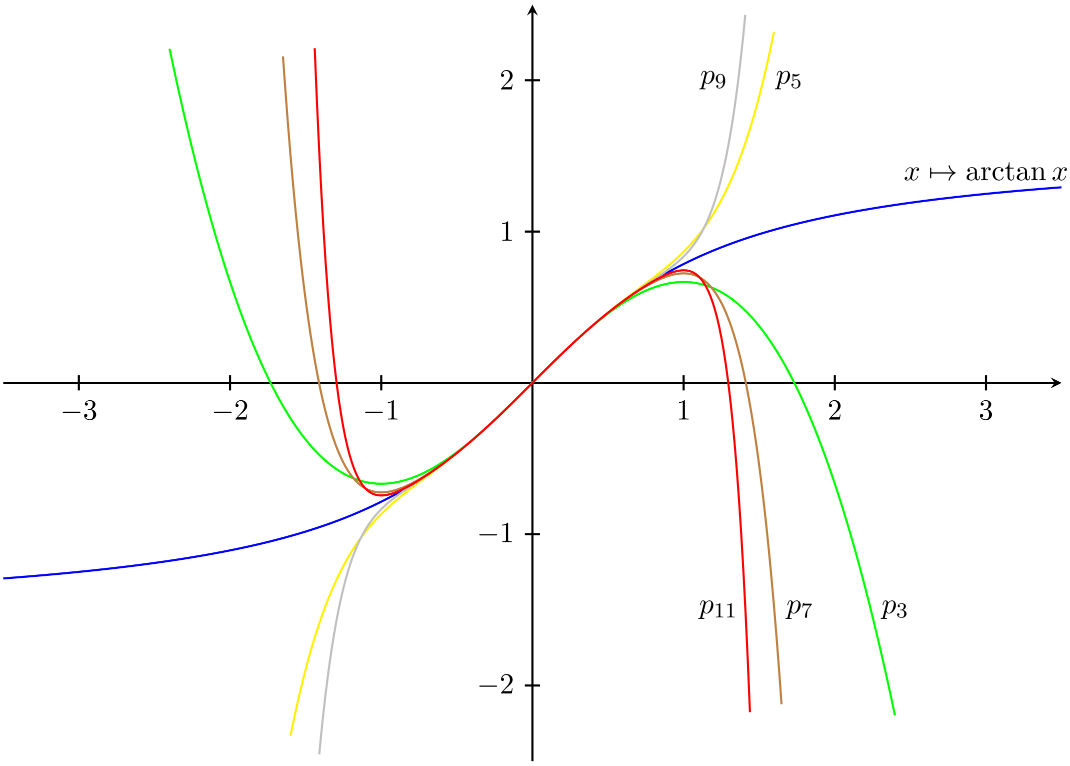
För att visa (11.27) utgår vi från (11.28). Vi sätter $t = y^2$ och får

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - \ldots + (-1)^{n-1}y^{2n-2} + (-1)^n \frac{y^{2n}}{1+y^2}.$$

Vi integrerar likheten från 0 till u och använder den generaliserade medelvärdessatsen (se sats 11.12) och får

$$\begin{aligned}
\arctan u &= u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}u^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^u \frac{y^{2n}}{1+y^2}\,dy \\
&= u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}u^{2n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)(1+\alpha^2)},
\end{aligned}$$

där α är något tal mellan 0 och u, vilket visar satsen. ∎



Figur 11.2: Här skissas funktionen tillsammans med Taylorpolynomen p_3, p_5, p_7, p_9 och p_{11}.

Exempel 11.29. Beräkna ett approximativt värde av

$$\int_0^3 \cos\sqrt{x}\,dx,$$

samt uppskatta felet i beräkningen.

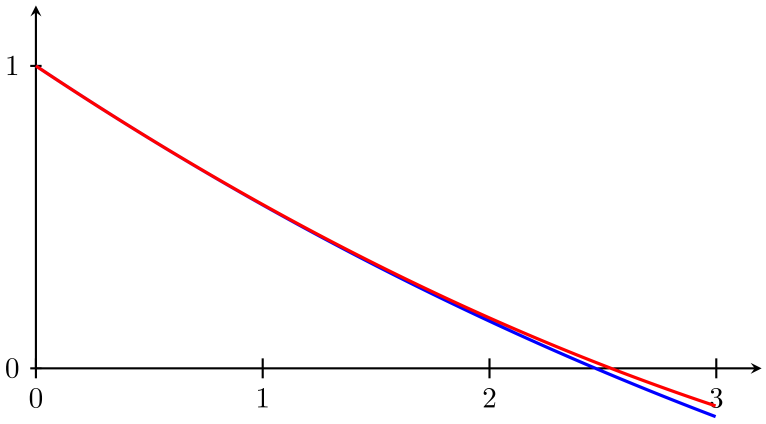
LÖSNING: Enligt Taylors formel är

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \cos(\alpha)\frac{t^6}{6!}$$

kring $t = 0$, där α är ett tal mellan 0 och t. Om vi substituerar $t = \sqrt{x}$ så får vi att

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \cos(\alpha)\frac{x^3}{6!} \tag{11.29}$$

kring $x = 0$, där nu α är ett tal mellan 0 och $\sqrt{x}$. Låt oss skissa $\cos\sqrt{x}$ och $1 - x/2 + x^2/4!$



Figur 11.3: Den blå funktionen är $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ och den röda är approximationen med hjälp av Taylorutveckling.

Det är enkelt att beräkna integralen av $1 - x/2 + x^2/4!$ över intervallet $[0, 3]$. Vi får det approximativa värdet

$$\int_0^3 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{72}\right]_0^3 = 3 - \frac{9}{4} + \frac{81}{72} = \frac{135}{72}.$$

Felet i vår uträkning ges av integralen av differensen mellan $\cos\sqrt{x}$ och $1 - x/2 + x^2/4!$ på intervallet $[0, 3]$. Enligt (11.29) får vi att felet kan uppskattas enligt

$$\left|\int_0^3 \cos(\alpha)\frac{x^3}{6!}\, dx\right| \leqslant \int_0^3 \left|\cos(\alpha)\frac{x^3}{6!}\right| dx \leqslant \int_0^3 \frac{x^3}{720}\, dx = \left[\frac{x^4}{2880}\right]_0^3 = \frac{81}{2880}.$$

Alltså gäller att

$$\int_0^3 \cos\sqrt{x}\, dx = \frac{135}{72} \pm \frac{81}{2880}.$$

▲

11.12 Övningar

Övning 11.1. Beräkna integralen

$$\int_0^5 f(x)\, dx,$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -3 & , 1 < x \leqslant 3 \\ 9 & , 3 < x \leqslant 10 \end{cases}$$

Övning 11.2.

a) Visa med hjälp av definitionen att $f(x) = x^2$ är integrerbar i intervallet $[0, 1]$. Eventuellt behövs

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Beräkna med hjälp av definitionen värdet av

$$\int_0^1 x^2\, dx.$$

Du kan använda resultatet

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Övning 11.3. Beräkna följande integraler genom att använda sats 11.15

a) $\displaystyle\int_1^2 (x - x^{-2})\, dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 (2x^{-1} + x^3)\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \cos x\, dx$

Övning 11.4. Beräkna följande integraler genom att använda sats 11.15

a) $\displaystyle\int_{-1}^5 |x|\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + |\sin x|)\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-2}^4 (x - |x|)\, dx$

Övning 11.5. Beräkna värdet av följande integraler

a) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^2 xe^{2x}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\, dx}{(1 + x^2)^3}$

f) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\theta\, d\theta}{(1 + \theta^2)^2} \right) dx$

Övning 11.6. Bestäm

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)}$

b) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Övning 11.7. [2011-10-18, uppgift 3] En stillastående bil startar från ett trafikljus och ökar farten med konstant acceleration upp tills farten är 25 m/s. Därefter fortsätter bilen med den konstanta hastigheten 25 m/s. Efter 23 s har bilen tillryggalagt sträckan 500 m. Hur lång tid efter starten nådde bilen farten 25 m/s?

Övning 11.8. [2007-12-17, uppgift 3] Beräkna $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$.

Övning 11.9. [2006-12-20, uppgift 3] Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+4x+5}\,dx.$$

Övning 11.10. [2007-05-31, uppgift 3] Beräkna integralen

$$\int_0^7 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

Övning 11.11. [2007-05-31, uppgift 7] Bestäm en primitv funktion till $\dfrac{3x}{x^3+1}$.

Övning 11.12. [2008-06-04, uppgift 3] Beräkna integralen

$$\int \frac{x}{(1-x)^3}\,dx.$$

Övning 11.13. [2009-03-09, uppgift 8] Antag att $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$ samt

$$\int_0^1 f(x)e^x\,dx = \int_0^1 f''(x)e^x\,dx.$$

Beräkna $f(1)$.

Övning 11.14. Låt f vara en oändligt deriverbar funktion sådan att $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, $f^{(3)}(0) = 0$ och $f^{(4)}(0) = 0$. Dessutom är alla derivator till f uppåt begränsade av 4 och nedåt begränsade av -2 i intervallet $[0, 1]$. Visa att

$$\frac{419}{360} \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{211}{180}.$$

Övning 11.15. Beräkna approximativt värdet av integralen

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

så att felet är mindre än en tusendel.

Övning 11.16. Bestäm det positiva talet x så att integralen

$$\int_0^x (4t - t^2)\,dt$$

maximeras. Bestäm också integralens maximala värde.

Övning 11.17. Låt f och f' vara kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, a]$ och låt $f(0) = 0$. Visa att

$$\int_0^a |f'(x)|\,dx \geqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,dx.$$

Övning 11.18. [2007-03-13, uppgift 8] Låt

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

a) Bestäm ekvationen för normalen till f i punkten $(2, 1)$.

b) Funktionen f och dess normal i punkten $(2, 1)$ begränsar tillsammans med x-axeln ett ändligt område. Beräkna dess area.

Övning 11.19. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{2-\sin x}\,dx.$$

LEDNING: Använd substitutionen $\tan x/2 = u$.

Övning 11.20. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2-\sin x}\,dx.$$

LEDNING: Använd substitutionen $\tan x/2 = u$.

Övning 11.21. Beräkna integralen

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx$$

med ett fel som är mindre än 10^{-3}.

Övning 11.22. Ett specialfall av Jensens olikhet säger att för varje kontinuerlig funktion f på $[0, 1]$ gäller att

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)^2\,dx. \tag{11.30}$$

Använd specialfallet för att visa att

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)^2\,dx. \tag{11.31}$$

gäller då $a < b$ och f är kontinuerlig på $[a, b]$.

Övning 11.23. I artikeln *Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms* av A. Laptev och T. Weidl finner vi olikheten

$$\int_\alpha^\beta |u(r)|^2 r\,dr \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\int_\alpha^\beta |u'(r)|^2 r\,dr \tag{11.32}$$

för u som uppfyller att u och u' är kontinuerliga, $u(\beta) = 0$ och $\beta \geqslant \alpha \geqslant 0$. Använd Övning 11.22 för att verifiera den.

12 Integration över obegränsade intervall

12.1 Definitionen och jämförelsesatser

Definition 12.1. Låt f vara en funktion som är integrerbar på $[a, R]$, för varje $R > a$. Då definieras integralen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Om detta gränsvärde existerar sägs integralen vara konvergent, i annat fall divergent.

Integration som inkluderar $-\infty$ definieras på ett analogt vis.

Låt f vara en integrerbar funktion på varje slutet och begränsat intervall. Om integralerna

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \tag{12.1}$$

är konvergenta så sägs integralen

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \tag{12.2}$$

vara konvergent, i annat fall divergent. Om integralen (12.2) är konvergent så definieras värdet som

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{12.3}$$

för något $a \in \mathbb{R}$. Notera att definitionen är oberoende av valet av a.

Sats 12.2. *Integralen*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

är konvergent om och endast om $p > 1$.

Bevis: Antag först att $p \neq 1$. Då gäller att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right).$$

Detta gränsvärde är konvergent om och endast om $R^{1-p} \to 0$, då $R \to \infty$, vilket sker om och endast om $p > 1$.

I fallet att $p = 1$ har vi

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} [\ln x]_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty.$$

Alltså är integralen konvergent om och endast om $p > 1$. ∎

Sats 12.3. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R > a$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \geqslant a$. Då gäller att om $\int_a^\infty g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.*

Beviset är näst intill identiskt med sats 10.5 och lämnas därför som en övning till läsaren.

Följdsats 12.4. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R > a$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \geqslant a$. Då gäller att om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är divergent så är även $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent.*

BEVIS: Resultatet är kontrapositionen av sats 12.3. ■

Exempel 12.5. Visa att integralen

$$\int_3^\infty \frac{x^2}{x^4 + x}\,dx$$

är konvergent.

LÖSNING: Notera att vi kan utföra följande uppskattningar

$$0 \leqslant \frac{x^2}{x^4 + x} \leqslant \frac{x^2}{x^4 + 0} = \frac{1}{x^2}.$$

Eftersom

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

är konvergent enligt sats 12.2 så är enligt sats 12.3 integralen

$$\int_3^\infty \frac{x^2}{x^4 + x}\,dx$$

konvergent. ▲

Exempel 12.6. Visa att integralen

$$\int_3^\infty \frac{x^2}{x^3 + x}\,dx$$

är divergent.

LÖSNING: Vi vill nyttja sats 12.4. Först konstaterar vi att $x \leqslant x^3$ för alla $x \geqslant 3$. Alltså gäller att för $x \geqslant 3$ har vi

$$\frac{x^2}{x^3 + x} \geqslant \frac{x^2}{x^3 + x^3} = \frac{1}{2x}.$$

Eftersom

$$\int_3^\infty \frac{1}{2x}\,dx$$

är divergent enligt sats 12.2 så är enligt sats 12.4 integralen

$$\int_3^\infty \frac{x^2}{x^3 + x}\,dx$$

divergent. ▲

Sats 12.7. *Låt f och g vara positiva och integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R > a$, sådana att*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K,$$

för något $K \neq 0$. Då gäller att

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerar om och endast om } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergerar.}$$

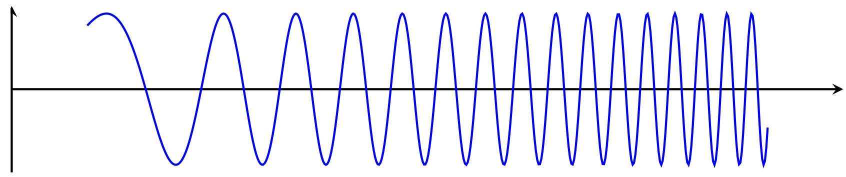
Beviset är näst intill identiskt med sats 10.9 och lämnas därför som en övning till läsaren.

Följande exempel visar att konvergenta integralers integrand inte behöver gå mot noll vid oändligheten.

Exempel 12.8. Visa att

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx \tag{12.4}$$

är konvergent. Funktionen har utseendet



Lösning: Vi utför variabelbytet $t = x^2$ och integrerar därefter partiellt och får att

$$\begin{aligned}\int_1^R \sin(x^2)\,dx &= \int_1^{R^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{2\sqrt{t}}\right]_1^{R^2} - \int_1^{R^2} \frac{\cos t}{4t^{3/2}}\,dt \\ &= -\frac{\cos(R^2)}{2R} + \frac{\cos 1}{2} - \int_1^{R^2} \frac{\cos t}{4t^{3/2}}\,dt\end{aligned}$$

Om vi nu låter $R \to \infty$ så får vi

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{\cos 1}{2} - \int_1^\infty \frac{\cos t}{4t^{3/2}}\,dt$$

och kan konstatera att (12.4) är konvergent om och endast om

$$\int_1^\infty \frac{\cos t}{4t^{3/2}}\,dt$$

är konvergent. Vi har att

$$\left|\frac{\cos t}{4t^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{4t^{3/2}}.$$

Eftersom

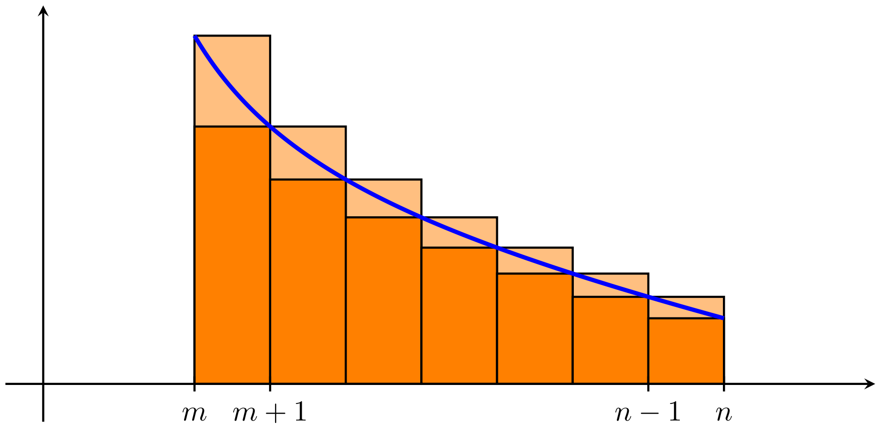
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^{3/2}}\,dt$$

är konvergent så är (12.4) konvergent. ▲

12.2 Samband mellan summor och integraler

Sats 12.9. *Låt f vara en avtagande funktion i intervallet $[m, n]$, där m och n är heltal sådana att $m < n$. Då gäller att*

$$\sum_{j=m+1}^{n} f(j) \leqslant \int_{m}^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} f(j) \tag{12.5}$$



Figur 12.1: Summor och integraler

BEVIS: Beviset följer direkt från figure 12.1. Notera att vänsterledet och högerledet är en undersumma respektive översumma till integralen. ■

Notera att (12.5) kan omformuleras till

$$f(n) + \int_{m}^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=m}^{n} f(j) \leqslant f(m) + \int_{m}^{n} f(x)\,dx. \tag{12.6}$$

Exempel 12.10. Visa att

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{3+j^2} \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{12.7}$$

LÖSNING: Eftersom funktionen $f(x) = \sqrt{3}/(3+x^2)$ är avtagande, positiv och kontinuerlig så kan vi nyttja sats 12.9. Den ger oss att

$$\int_{1}^{N+1} \frac{\sqrt{3}}{3+x^2}\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{3}}{3+j^2} \leqslant \int_{0}^{N} \frac{\sqrt{3}}{3+x^2}\,dx$$

Vi beräknar nu integralerna,

$$
\begin{aligned}
\int_0^N \frac{\sqrt{3}}{3+x^2}\,dx &= \sqrt{3}\int_0^N \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^N \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx \\
&= \left[x=\sqrt{3}t, dx=\sqrt{3}dt\right] = \int_0^{N/\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan\left(\frac{N}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}
$$

och på liknande sätt

$$
\begin{aligned}
\int_1^{N+1} \frac{\sqrt{3}}{3+x^2}\,dx = \int_{1/\sqrt{3}}^{(N+1)/\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \arctan\left(\frac{N+1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{N+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

Alltså gäller att

$$
\arctan\left(\frac{N+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{3}}{3+j^2} \leqslant \arctan\left(\frac{N}{\sqrt{3}}\right).
$$

Då $N \to \infty$ följer att

$$
\frac{\pi}{3} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{3+j^2} \leqslant \frac{\pi}{2}.
$$

▲

Exempel 12.11. Ange en delsumma till serien

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+j^4}
$$

som approximerar serien med ett fel mindre än 1/1000.

LÖSNING: Vi kan först dela upp summan enligt

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+j^4} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{1+j^4} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{1+j^4}
$$

och försöka bestämma N så att

$$
\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{1+j^4} < \frac{1}{1000}.
$$

Enligt definitionen är

$$
\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{1+j^4} = \lim_{R\to\infty} \sum_{j=N+1}^{R} \frac{1}{1+j^4}.
$$

Eftersom funktionen $f(x) := 1/(1+x^4)$ är positiv, kontinuerlig och avtagande så gäller enligt sats 12.9 att

$$\sum_{j=N+1}^{R} \frac{1}{1+j^4} \leqslant \int_N^R \frac{dx}{1+x^4}.$$

Nu följer att

$$\int_N^R \frac{dx}{1+x^4} < \int_N^R \frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_N^R = -\frac{1}{3R^3} + \frac{1}{3N^3} \to \frac{1}{3N^3},$$

då $R \to \infty$. Vi söker ett N sådant att $1/(3N^3) < 1/1000$. Vi ser att vi kan välja $N = 10$ för då är $1/(3N^3) = 1/3000$. Alltså kan vi summera 10 termer.

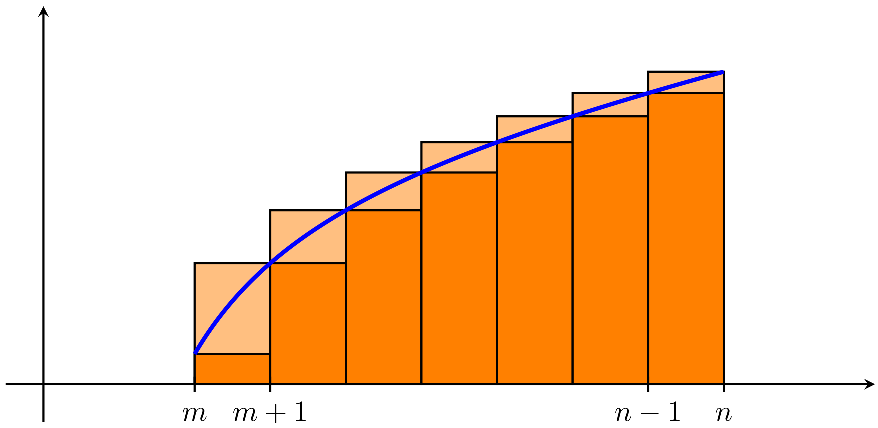
▲

Versionen av sats 12.9 för växande funktioner blir

Sats 12.12. *Låt f vara en växande funktion i intervallet $[m, n]$, där m och n är heltal sådana att $m < n$. Då gäller att*

$$\sum_{j=m}^{n-1} f(j) \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} f(j) \tag{12.8}$$

Vi illustrerar satsen med en figur



Figur 12.2: Summor och integraler

Sats 12.13 (Cauchys integralkriterium)**.** *Låt f vara en positiv och avtagande funktion i (m, ∞), då gäller att $\sum_{j=m}^{\infty} f(j)$ är konvergent om och endast om $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent.*

Bevis: Antag först att $\sum_{j=m}^{\infty} f(j)$ är konvergent med summan S. Vi vill visa att gränsvärdet

$$\lim_{R\to\infty} \int_m^R f(x)\,dx \tag{12.9}$$

existerar. Att gränsvärdet existerar följer från sats 4.7 om vi lyckas visa att $R \mapsto \int_m^R f(x)\,dx$ är växande och uppåt begränsad. Då f är positiv så är det klart att $R \mapsto \int_m^R f(x)\,dx$ är växande. Låt n vara det minsta heltalet som uppfyller att $R < n$. Enligt sats 12.9 har vi att

$$\int_m^R f(x)\,dx \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} f(j) \to S,$$

då $R \to \infty$ och då även $n \to \infty$. Alltså existerar gränsvärdet (12.9).

Omvänt gäller att om $\int_m^\infty f(x)\,dx$ existerar så visar vi på liknande sätt att $\sum_{j=m}^n f(j)$ är växande, ty f är positiv, och uppåt begränsad från sats 12.9.

■

12.3 Övningar

Övning 12.1. Avgör om den generaliserade integralen $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ är konvergent.

Övning 12.2. Bestäm det minsta antalet termer i serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4}$ som behövs för att approximera summan med ett fel som är mindre än 1/4000.

Övning 12.3. Bevisa sats 12.3.

Övning 12.4. Bevisa sats 12.7.

Övning 12.5. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + 2x^2 + x^3}}.$$

Övning 12.6. Avgör om följande serier konvergerar

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty e^{-\sqrt{n}}$

Övning 12.7.

a) Konvergerar eller divergerar integralen

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1} dx?$$

b) Bestäm värdet av

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \frac{x}{x^2+1} dx.$$

c) Bestäm värdet av

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{2R} \frac{x}{x^2+1} dx.$$

d) Kan du av svaren från b) och c) besvara a)?

Övning 12.8. Visa att

a) följande integral är divergent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{x^2+1} dx.$$

b)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1+x}{x^2+1} dx = \pi.$$

c) Bestäm värdet av

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{2R} \frac{1+x}{x^2+1} dx.$$

Övning 12.9. [2008-12-15, uppgift 3] Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Övning 12.10.

a) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

b) Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}$ är konvergent. Uppskatta seriens summa med hjälp av uppgift a).

Övning 12.11. [2006-12-20, uppgift 8]

a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

b) Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ är konvergent.

Övning 12.12. [2009-03-09, uppgift 4] Bestäm n så att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^5} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^5} + r(n),$$

där resttermen r är mindre än $1/4000$.

Övning 12.13. En integral av typen

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$$

sägs vara absolutkonvergent om

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

är konvergent. Visa att om

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

är absolutkonvergent så är den konvergent.

13 Lokal integrerbarhet

Bakgrunden är att vi vill integrera en funktion över ett intervall där det finns punkter där funktionen inte är definierad. Problemställningen är enkel: Går det? Och i så fall: Hur gör vi?

13.1 Definitionen och jämförelsesatser

Definition 13.1. Låt $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ vara en integrerbar funktion i intervallet $[a + \varepsilon, b]$, för varje litet $\varepsilon > 0$. Vi definierar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Om detta gränsvärde existerar sägs integralen vara konvergent, i annat fall divergent. Om integralen är konvergent sägs funktionen f vara **integrerbar** i intervallet $(a, b]$.

Läsaren kan själv formulera definitionen i fallet att funktionen f inte skulle vara definierad i punkten b.

Vi använder räkneregel (11.19) i fallet att f inte är definierad i en inre punkt av $[a, b]$.

Definition 13.2. Låt f vara en funktion definierad i intervallen $[a, c)$ och $(c, b]$, odefinierad i punkten $c \in (a, b)$ och integrerbar på varje slutet intervall $I \subset [a, c) \cup (c, b]$. Då definieras

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Om båda integralerna i högerledet är konvergenta så sägs integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ vara konvergent, annars divergent.

Sats 13.3. *Integralen*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,dx$$

är konvergent om och endast om $q < 1$.

Vi skulle kunna bevisa denna sats på ett liknande sätt som beviset av sats 12.2. Vi väljer här att överföra denna situation på resultatet av sats 12.2.

BEVIS: Vi har att

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right\} = -\int_\infty^1 \frac{1}{(1/t)^q}\frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^{2-q}}\,dt.$$

Vi vet från sats 12.2 har vi att integralen konvergerar om och endast om $2 - q > 1$, vilket är detsamma som $q < 1$. ∎

Sats 13.4. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon > 0$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \in (a, b]$. Då gäller att om $\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.*

Beviset är näst intill identiskt med sats 10.5 och lämnas därför som en övning till läsaren.

Följdsats 13.5. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon > 0$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \in (a, b]$. Då gäller att om $\int_a^b f(x)\,dx$ är divergent så är även $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.*

BEVIS: Resultatet är kontrapositionen av sats 12.3. ■

Sats 13.6. *Låt f och g vara positiva och integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon > 0$, sådana att*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = K,$$

för något $K \neq 0$. Då gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ konvergerar om och endast om } \int_a^b g(x)\,dx \text{ konvergerar.}$$

Beviset är näst intill identiskt med sats 10.9 och lämnas därför som en övning till läsaren.

Exempel 13.7. Visa att integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$$

är divergent.

LÖSNING: Vi väljer att jämföra med funktionen $1/x$. Vi har att

$$\frac{1/\sin x}{1/x} \to 1,$$

då $x \to 0$ och att

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

är divergent. Alltså är ursprungsintegralen divergent. ▲

Exempel 13.8 (Tentamen 2011-10-18, 31%)**.**

a) På vilket sätt är integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/3}}dx$$

generaliserad?

b) Avgör om integralen är konvergent eller divergent.

LÖSNING:

a) Integranden är funktionen $f(x) = \frac{\cos x}{x^{1/3}}$. Denna funktion är kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$, men $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$. Integralen är alltså generaliserad eftersom integranden är odefinierad i punkten 0.

b) På intervallet $(0, 1]$ är $0 < \cos(x) \leqslant 1$ och $0 < x^{1/3}$, så vi har

$$0 < \frac{\cos x}{x^{1/3}} \leqslant \frac{1}{x^{1/3}} \quad \text{för alla } x \in (0, 1].$$

Den generaliserade integralen $\int_0^1 x^{-1/3} dx$ är konvergent enligt sats 13.4 eftersom $1/3 < 1$.

▲

13.2 Övningar

Övning 13.1. Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^\pi \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\, dx$ är konvergent.

Övning 13.2. Är följande integraler generaliserade? Ange i förekommande fall på vilket sätt de är generaliserade och avgör om de konvergerar. Beräkna slutligen integralerna.

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$

b) $\displaystyle\int_0^3 |2x - 1|\, dx$

Övning 13.3. Undersök om följande integraler är konvergenta och beräkna i så fall deras värde

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

Övning 13.4. Undersök om följande integraler är konvergenta?

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sin x}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Övning 13.5. Låt $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. En integral av typen

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

sägs vara absolutkonvergent om

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

är konvergent. Visa att om

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

är absolutkonvergent så är den konvergent.

14 Integralens tillämpningar

14.1 Riemannsummor

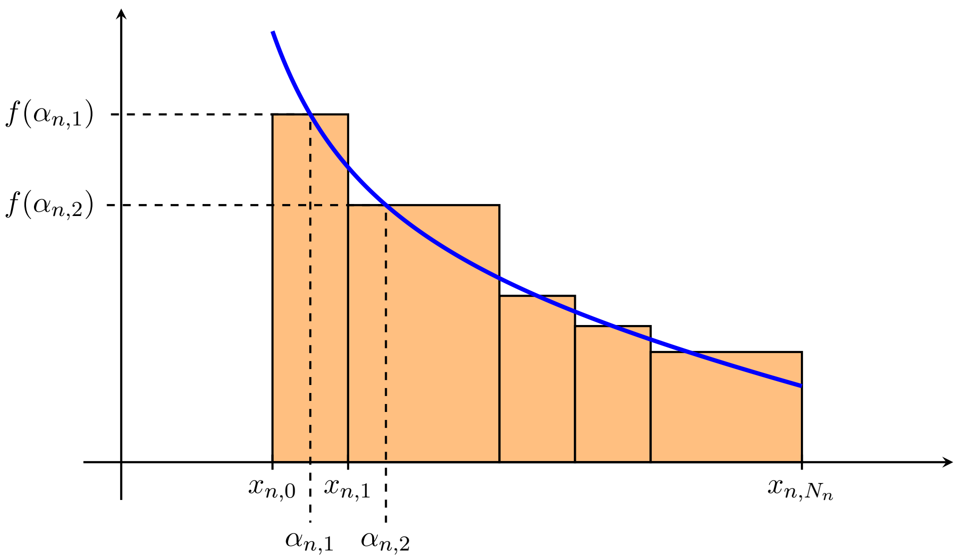
Låt $P_n = \{x_{n,i}\}_{i=0}^{N_n}$ vara en uppdelning av $[a, b]$, d.v.s. för varje givet n är P_n en uppdelning av $[a, b]$ som består av N_n antal delintervall. Vi har att

$$a = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,N_n-1} < x_{n,N_n} = b.$$

Låt $\alpha_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$ och $\Delta_{n,i} = x_{n,i} - x_{n,i-1}$.
Summan

$$\sum_{i=1}^{N_n} f(\alpha_{n,i})\Delta_{n,i},$$

kallas en **Riemannsumma** för f i intervallet $[a, b]$.



Figur 14.1: Riemannsumma för fixerat n

Exempel 14.1. Summan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \frac{1}{n}$$

är en Riemannsumma för funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

på uppdelningen $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$. Här är alla delintervall av lika längd, men så behöver inte vara fallet. ▲

Följande sats säger att Riemannsummor av kontinuerliga funktioner kan användas för att approximera integraler.

Sats 14.2. *Låt f vara kontinuerlig i intervallet $[a, b]$ och låt $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av uppdelningar av $[a, b]$ sådana att det största delintervallets längd*

$$\max\{\Delta_{n,i} \colon 1 \leqslant i \leqslant N_n\} \to 0,$$

då $n \to \infty$. Då gäller att Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{N_n} f(\alpha_{n,i})\Delta_{n,i} \to \int_a^b f(x)\, dx,$$

då $n \to \infty$.

BEVIS: För givet n låt $m_{n,i}$ och $M_{n,i}$ vara det minsta respektive största värdet av f på intervallet $[x_{n,i-1}, x_{n,i}]$. Vi har att Riemannsumman är instängd av

$$\sum_{i=1}^{N_n} m_i\Delta_{n,i} \leqslant \sum_{i=1}^{N_n} f(\alpha_{n,i})\Delta_{n,i} \leqslant \sum_{i=1}^{N_n} M_i\Delta_{n,i}.$$

Enligt (11.14) och (11.15) så gäller att både höger- och vänsterled går mot

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

och därmed följer satsen. ■

Exempel 14.3. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n + j^2/n}.$$

LÖSNING: Summan

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n + j^2/n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + (j/n)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

är en Riemannsumma för $f(x) = 1/(1 + x^2)$ över intervallet $[0, 1]$, där den högra ändpunkten i varje intervall är vald. Alltså gäller att

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + (j/n)^2} \cdot \frac{1}{n} \to \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4},$$

då $n \to \infty$. ▲

Exempel 14.4. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j + n - 1}{n}\right)^{n^{-1}}.$$

Lösning: Vi noterar först att

$$\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+n-1}{n}\right)^{n^{-1}} = \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+n-1}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}.$$

Här behöver vi justera delintervallen från $1/n$ till $2/n$ så att $\alpha_j := (2j+n-1)/n$ matchar intervallen. Låt

$$P_n = \left\{\frac{n}{n}, \frac{n+2}{n}, \frac{n+4}{n}, \ldots, \frac{3n}{n}\right\}$$

vara en uppdelning av intervallet $[1,3]$. Vi får då att intervallängderna är $2/n$. Summan ovan är en Riemannsumma av $f(x) = \ln x$ över uppdelningen P_n. Vi har valt att beräkna f i mittpunkten på varje intervall. Alltså följer att

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+n-1}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} \to \int_1^3 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^3 = 3\ln 3 - 2,$$

då $n \to \infty$. ▲

14.2 Areaberäkning

Exempel 14.5. Beräkna arean som stängs in av en ellips, alltså arean av alla punkter (x,y) som uppfyller att

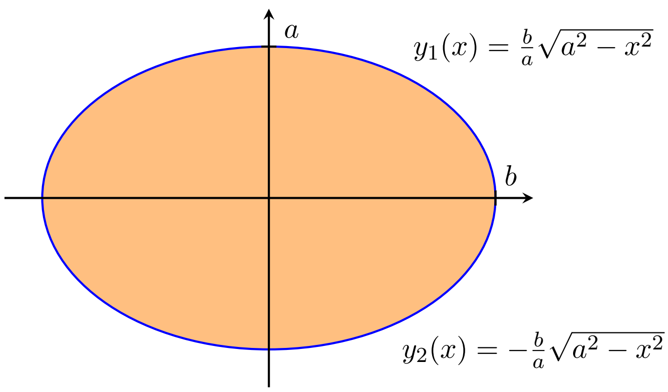
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

där a och b är positiva reella tal.

Lösning: Arean är den som bildas mellan funktionerna

$$y(x) = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

definierade för $x \in [-a,a]$.



Av symmetriskäl uppfyller arena A att

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-a}^{a} (y_1(x) - y_2(x))\,dx = 4\int_0^a y_1(x)\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \right\} = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}a\cos t\,dt \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.
\end{aligned}
$$

Vi använder nu trigonometriska identiteten

$$
\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}
$$

och får att

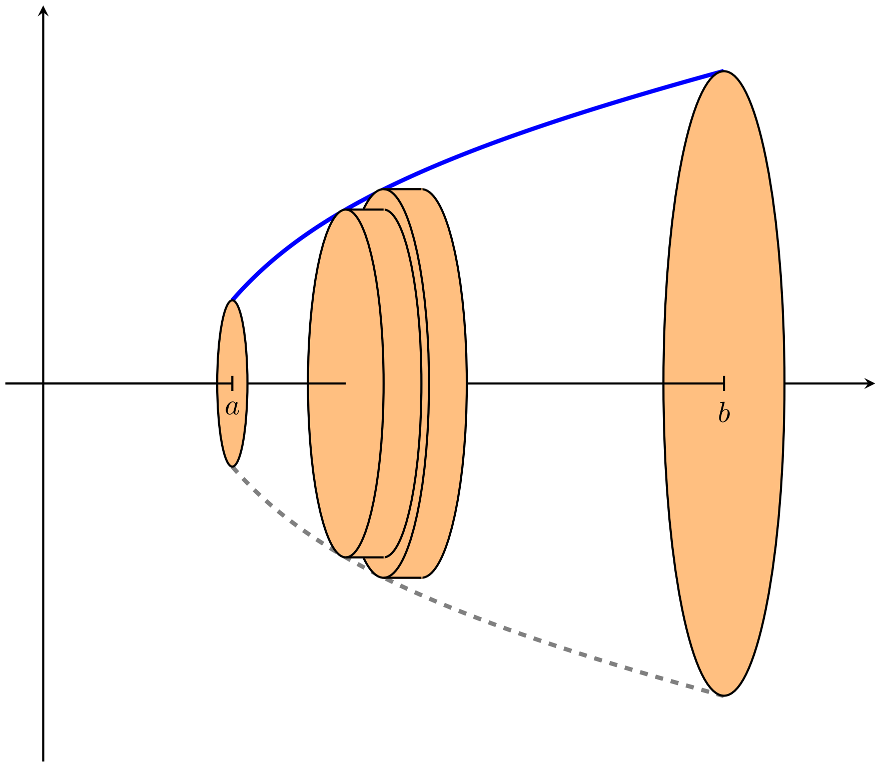
$$
\begin{aligned}
4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt &= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,dt \\
&= 4ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= ab\pi
\end{aligned}
$$

Här ser vi att cirkelskivans area, då $a = b = r$, blir πr^2. ▲

14.3 Volymberäkning

14.3.1 Rotation kring x-axeln

Antag att f är en kontinuerlig funktion definierad på intervallet $[a, b]$. Om vi låter f rotera kring x-axeln bildas en kropp som vi vill beräkna volymen av. Först approximerar vi volymen med hjälp av cirkelskivor med viss bredd och därefter förfinar vi approximationen genom att låta bredden gå mot noll.



Antag att vi delar in intervallet $[a, b]$ i n stycken delintervall $[x_j, x_{j+1}]$ av lika storlek. Bredden på varje sådant intervall blir $\Delta_x := (b-a)/n$. Vi låter radien av varje cirkelskiva vara bestämd av funktionens värde i den vänstra ändpunkten x_j på intervallet $[x_j, x_{j+1}]$. Volymen kan approximeras av summan av dessa n cirkelskivor av bredd Δ_x. Approximationen ges av

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j)^2 \Delta_x.$$

Enligt sats 14.2 gäller att volymen V uppfyller

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Exempel 14.6 (Klotets volym)**.** Låt oss beräkna volymen av ett klot. Som ni kanske redan misstänker så ska vi beräkna volymen genom att rotera en cirkel. En cirkel med radien r fås av de punkter x och y som uppfyller $x^2 + y^2 = r^2$. Ur detta uttryck kan vi lösa ut y enligt

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

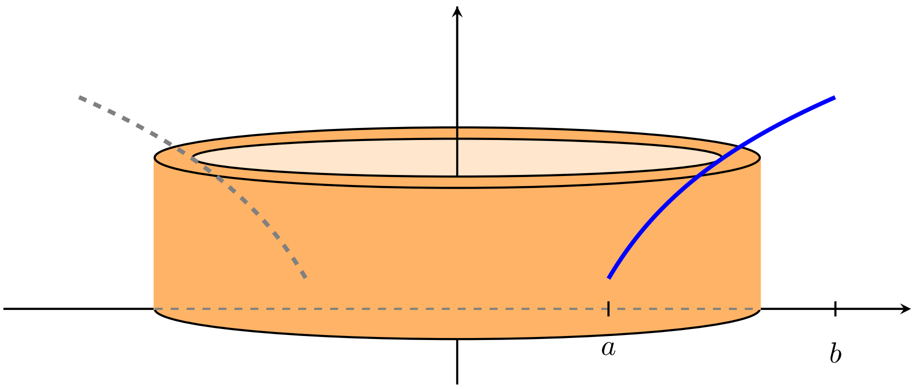
För att göra det enkelt för oss noterar vi att om vi roterar grafen av en fjärdedels cirkel kring x-axeln så får vi ett halvt klot. Alltså blir hela klotets volym två gånger rotationsintegralen av y

$$V = 2\pi \int_0^r y^2\,dx = 2\pi \int_0^r r^2 - x^2\,dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Ett svar som vi väl känner igen från geometrin. ▲

14.3.2 Rotation kring y-axeln

Låt f vara en kontinuerlig funktion definierad på intervallet $[a, b]$. Om vi låter f rotera kring y-axeln bildas en kropp *under* grafen som vi vill beräkna volymen av. Återigen delar vi in intervallet i n stycken lika stora intervall. Först approximerar vi med en Riemannsumma och därefter förfinar vi approximationen med hjälp av sats 14.2.



Approximationen ges av differensen mellan de två tårtorna med radie x_{j+1} respektive x_j. Alltså

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j)(x_{j+1}^2 - x_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j)(x_{j+1} + x_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j) \left(2x_j + \frac{b-a}{n} \right) \Delta_x \\ &= \sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j) 2x_j \Delta_x + \sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j) \frac{b-a}{n} \Delta_x, \end{aligned}$$

eftersom $\Delta_x = x_{j+1} - x_j$ och $x_{j+1} + x_j = 2x_j + (b-a)/n$. Den första summan uppfyller enligt sats 14.2 att

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j) 2x_j \Delta_x = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

och den andra summan uppfyller enligt sats 14.2 och sats 4.5 att

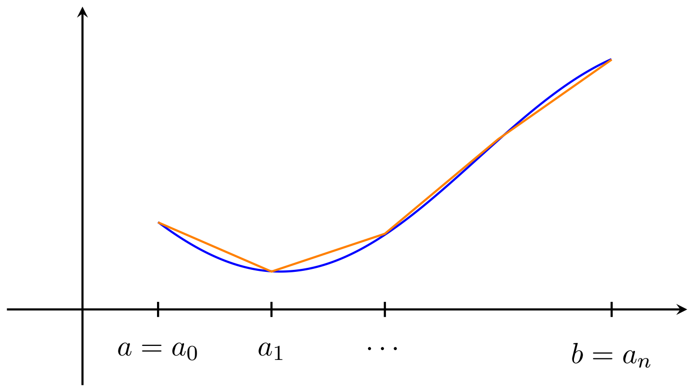
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\pi f(x_j)\frac{b-a}{n}\Delta_x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\pi f(x_j)\Delta_x = 0\cdot\pi\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Alltså är volymen V vid rotation kring y-axeln

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

14.4 Kurvlängd

Låt f vara en deriverbar funktion definierad på intervallet $[a,b]$. För att bestämma längden av kurvan så använder vi Riemannsummor. Låt $(a_i)_{i=0}^{n}$ vara en uppdelning av intervallet $[a,b]$ och bilda räta linjer genom punkterna $(a_i, f(a_i))$.



Längden av de räta linjerna blir med hjälp av Pythagoras sats

$$L_n := \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(a_{i+1}-a_i)^2 + (f(a_{i+1})-f(a_i))^2} \tag{14.1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+\left(\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}\right)^2}\,(a_{i+1}-a_i)\,. \tag{14.2}$$

Om följden $(a_i)_{i=0}^{n}$ väljs så att

$$\max_i |a_{i+1}-a_i| \to 0, \tag{14.3}$$

då $n\to\infty$ och eftersom

$$\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i} \to f'(a_i), \tag{14.4}$$

då $a_{i+1} - a_i \to 0$, så gäller enligt sats 14.2 att

$$L_n \to \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \tag{14.5}$$

då $n \to \infty$. Vi definierar därför längden av funktionen f mellan a och b som

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{14.6}$$

Exempel 14.7. [2009-06-01, uppgift 3] Beräkna längden av kurvan $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ då $0 \leqslant x \leqslant 1$.

LÖSNING: Då

$$f'(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{14.7}$$

får vi att längden ges av

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{1 - x^2}}\, dx \tag{14.8}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{1 - x^2}}\, dx = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x}} \tag{14.9}$$

$$= 2\sqrt{2} \left[\sqrt{1 + x} \right]_0^1 = 4 - 2\sqrt{2}. \tag{14.10}$$

▲

14.5 Övningar

Övning 14.1. Approximera integralen

$$\int_1^2 \frac{dt}{t}$$

med hjälp av en Riemannsumma med

a) 2 termer,

b) 4 termer.

Förklara varför dina svar på a) och b) kan användas som approximationer av $\ln 2$.

Övning 14.2. [2007-03-13, uppgift 3] Beräkna arean av det området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \arctan x\}$.

Övning 14.3. [2007-03-13, uppgift 5] En behållare full med vätska har formen av den rotationskropp som uppstår då området

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}, 5 \leqslant x\right\}$$

roterar ett varv kring x-axeln. Behållaren har en kran som släpper ut vätskan med en volym enhet per sekund. Hur mycket tid behövs för att tömma ut hela behållaren?

Övning 14.4. [2008-06-04, uppgift 7] Beräkna först arean $A(b)$ av det område i xy-planet som begränsas av x-axeln, de vertikala linjerna $x = 0$, $x = b$ (där $b > 0$) och kurvan $y(x) = x \cdot (x^2+2)^{-3/2}$. Visa sedan att $\lim_{b\to\infty} A(b)$ existerar samt beräkna detta gränsvärde.

Övning 14.5. [2008-12-15, uppgift 7] Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan parablerna $y = x^2$ och $y = 8-x^2$ roterar kring x-axeln.

Övning 14.6. Beräkna volymen av den rotationskropp, begränsad av $x = 0$ och $x = 1$, som uppkommer då vi roterar $f(x) = x^2$ kring x-axeln.

Övning 14.7. Genom att rotera funktionen $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ får vi någonting som med lite vilja kan tänkas likna ett vattenglas. Antag att du vill mäta upp exakt 4 volymenheter av vatten i glaset. Hur högt upp i glaset skall du fylla?

Övning 14.8. Beräkna volymen av den rotationskropp, begränsad av $x = 0$ och $x = \pi/2$, som uppkommer då vi roterar $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ kring x-axeln.

Övning 14.9. Bestäm det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = 4x^3 + 12x$ och $y = 16x^2$. Beräkna områdets area.

Övning 14.10. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, och x-axeln roteras ett varv runt x-axeln.

Övning 14.11. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, och x-axeln roteras ett varv runt y-axeln.

Övning 14.12.

a) Bestäm definitionsmängd för var och en av de två funktionerna $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{-32-x}$ och $g(x) = \sqrt{-x^2-32x}$.

b) Beräkna den area som dessa funktioner naturligen definierar, nämligen arean under grafen.

Övning 14.13. [2006-12-20, uppgift 7] Beräkna längden av kurvan

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

där $0 < x < \ln 2$.

15 Differentialekvationer

En **ordinär differentialekvation** (ODE) är en ekvation som innehåller en eller flera envariabelfunktioner och deras derivator. Ett exempel är ekvationen

$$-\frac{h}{4\pi m}y''(x) + V(x)y(x) = Ey(x), \tag{15.1}$$

som beskriver vågfunktionen y för en kvantmekanisk partikel i ett tillstånd med energi E. I ekvationen, som är ett exempel på en **tidsoberoende Schrödingerekvation**, är h Plancks konstant, m partikelns massa, och V en funktion som beskriver partikelns potentiella energi som funktion av positionen.

Om en differentialekvation kan skrivas på formen

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = h(x), \tag{15.2}$$

sägs den vara **linjär** och av **ordning** n. Om $h = 0$ sägs ekvationen vara **homogen** annars **inhomogen**.

15.1 Linjära ODE av första ordningen med konstanta koefficienter

Sats 15.1. *Låt $a \in \mathbb{R}$. En funktion y löser differentialekvationen*

$$y' + ay = 0$$

om och endast om

$$y(x) = Ce^{-ax},$$

där $C \in \mathbb{R}$.

Bevis: Låt oss först visa att $y(x) = Ce^{-ax}$ löser differentialekvationen. Vi har att

$$y'(x) + ay(x) = Ce^{-ax}(-a) + aCe^{-ax} = 0,$$

alltså löser $y(x) = Ce^{-ax}$ differentialekvationen.

Låt $y_1(x) = C_1e^{-ax}$, för någon konstant $C_1 \neq 0$. Antag att y är en lösning till differentialekvationen $y' + ay = 0$. Eftersom $y_1 \neq 0$ gäller att lösningen y kan skrivas på formen

$$y(x) = y_1(x)\frac{y(x)}{y_1(x)}.$$

Låt oss kalla $w(x) = y(x)/y_1(x)$. Eftersom y_1 är en lösning till differentialekvationen har vi att

$$\begin{aligned} y'(x) + ay(x) &= y_1'(x)w(x) + y_1(x)w'(x) + ay_1(x)w(x) \\ &= (y_1'(x) + ay_1(x))w(x) + y_1(x)w'(x) \\ &= y_1(x)w'(x) = 0. \end{aligned}$$

Vilket ger att $w'(x) = 0$, alltså är $w(x) = C_2$, där $C_2 \in \mathbb{R}$ är en konstant. En godtycklig lösning y är därför alltid på formen

$$y(x) = y_1(x)w(x) = C_1 e^{-ax} C_2 = Ce^{-ax}.$$

Vilket skulle bevisas. ■

15.2 Homogena linjära ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter

Definition 15.2. Låt $y'' + ay' + by = 0$ vara en differentialekvation, där a och b är reella tal. Polynomet

$$r \mapsto r^2 + ar + b,$$

kallas det **karakteristiska polynomet** till differentialekvationen och $r^2+ar+b = 0$, kallas den **karakteristiska ekvationen** för differentialekvationen.

Sats 15.3. *Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och låt r_1 och r_2 vara lösningarna till den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$.*

En funktion y löser den homogena differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{15.3}$$

om och endast om y uppfyller nedanstående

a) I fallet r_1 och r_2 är reella och $r_1 \neq r_2$, så är

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \tag{15.4}$$

b) I fallet $r_1 = r_2$, så är

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}, \tag{15.5}$$

c) I fallet $r_1 = c + d\mathrm{i}$ och $r_2 = c - d\mathrm{i}$, där $d \neq 0$, så är

$$y(x) = e^{cx}(C_1 \cos(dx) + C_2 \sin(dx)), \tag{15.6}$$

där $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. En lösning till (15.3) *kallas för en homogen lösning.*

Hjälpsats 15.4. *Låt r_1 och r_2 vara rötterna till ekvationen $r^2 + ar + b = 0$. Då gäller att $r_1 + r_2 = -a$.*

Bevis: Enligt faktorsatsen är

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2).$$

Utvecklar vi högerledet får vi $r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$. Identifierar vi koefficienter så får vi önskad identitet. ■

Bevis: Det är en direkt räkning för att verifiera att om y är på någon av formerna (15.4) – (15.6) så löser y differentialekvationen. Det svåra är att visa omvändningen, d.v.s. att det finns inga andra funktioner än dessa som löser differentialekvationen.

Antag att y är en lösning av (15.3). Eftersom en exponentialfunktion aldrig antar värdet noll så kan vi skriva y på formen

$$y(x) = y_1(x)w(x), \tag{15.7}$$

där $y_1(x) = e^{r_1 x}$. Problemet handlar nu om att ta reda på hur w ser ut. Eftersom $y_1'' + ay_1' + b = 0$ har vi att

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= y_1''w + 2y_1'w' + y_1w'' + a(y_1'w + y_1w') + by_1w \\ &= (y_1'' + ay_1' + by_1)w + 2y_1'w' + y_1w'' + ay_1w' \\ &= 2y_1'w' + y_1w'' + ay_1w' \\ &= (2r_1w' + w'' + aw')e^{r_1x} \\ &= (w'' + (a + 2r_1)w')e^{r_1x} \end{aligned}$$

Lösningen till differentialekvationen $(w')' + (a + 2r_1)(w') = 0$ är enligt sats 15.1 funktionen

$$w'(x) = C_1e^{-(a+2r_1)x}$$

och från sats 15.4 får vi att $a + 2r_1 = r_1 - r_2$. Alltså är

$$w'(x) = C_1e^{(r_2-r_1)x}. \tag{15.8}$$

I fallet att $r_2 \neq r_1$ har vi

$$w(x) = \frac{C_1}{r_2 - r_1}e^{(r_2-r_1)x} + C_2 = C_3e^{(r_2-r_1)x} + C_2,$$

där $C_3 = \frac{C_1}{r_2-r_1}$. Instoppat i (15.7) ger

$$y(x) = e^{r_1x}(C_3e^{(r_2-r_1)x} + C_2) = C_3e^{r_2x} + C_2e^{r_1x},$$

vilket visar a) i fallet att r_1 och r_2 är reella. Om r_1 och r_2 är komplexa så är $r_1 = \overline{r_2}$, ty a och b är reella. Vi kan därför skriva att $r_1 = c + d\mathrm{i}$ och $r_2 = c - d\mathrm{i}$ och får att

$$\begin{aligned} y(x) &= C_3e^{r_2x} + C_2e^{r_1x} = C_3e^{(c+d\mathrm{i})x} + C_2e^{(c-d\mathrm{i})x} \\ &= e^{cx}(C_3e^{\mathrm{i}dx} + C_2e^{-\mathrm{i}dx}). \end{aligned}$$

Här utnyttjar vi att $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ och $e^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$. Alltså är

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{cx}(C_3(\cos(dx) + \mathrm{i}\sin(dx)) + C_2(\cos(dx) - \mathrm{i}\sin(dx))) \\ &= e^{cx}((C_3 + C_2)\cos(dx) + (C_3 - C_2)\mathrm{i}\sin(dx)) \\ &= e^{cx}(C_4\cos(dx) + C_5\sin(dx)) \end{aligned}$$

där C_4 och C_5 är komplexa konstanter, vilket visar c).

I fallet att $r_1 = r_2$ så utgår vi från (15.8). Den säger i detta fall att $w'(x) = C_1$ och därmed är $w(x) = C_1 x + C_2$ och y blir därför

$$y(x) = e^{r_1 x}(C_1 x + C_2)$$

vilket visar b). ■

15.3 Partikulärlösningar

Vi ska nu studera hur man löser ekvationer av typen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = h(x), \tag{15.9}$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ och h är en reellvärd funktion.

Låt y_h vara den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0. \tag{15.10}$$

Notera att den allmänna lösningen innehåller två konstanter som kan väljas godtyckligt. För att finna en lösning till den inhomogena ekvationen (15.9) måste vi finna en funktion y_p sådan att

$$y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) = h(x). \tag{15.11}$$

Lösningen y_p kallas för en partikulärlösning till (15.9). Det är klart att y_p inte kan vara i mängden av homogena lösningar eftersom vänsterledet blir noll vid insättning av homogena lösningar.

Den allmänna lösningen till (15.9) ges då av $y = y_h + y_p$. Det räcker med att finna någon partikulärlösning. Dvs om y_{p_1} och y_{p_2} är partikulärlösningar, kan den allmänna lösningen skrivas som $y = y_{p_1} + y_h$, för något val av y_h, men också som $y = y_{p_2} + y_h$, för något val av y_h. Detta följer om vi kan visa att $y_{p_1} = y_{p_2} + y_h$, för något val av y_h. Låt nu $y = y_{p_1} - y_{p_2}$. Vi har att

$$y'' + ay' + by = y_{p_1}'' + ay_{p_1}' + by_{p_1} - y_{p_2}'' - ay_{p_2}' - by_{p_2} = h - h = 0 \tag{15.12}$$

Alltså tillhör $y_{p_1} - y_{p_2}$ den homogena lösningen. Med andra ord är

$$y_{p_1} = y_{p_2} + y_h, \tag{15.13}$$

för något val av y_h.

För att finna en partikulärlösning kan man anta att den ser ut på ett visst vis och därefter verifiera att den verkligen är sådan. Färdigheten att göra bra gissningar kommer från erfarenhet. Gissa med funktioner som påminner om det aktuella högerledet.

Exempel 15.5. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' + 2y' + y = 2x^2 + 1$.

LÖSNING: Vi börjar med att bestämma den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y''+2y'+y = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $r^2+2r+1 = 0$ har lösningen $r_1 = r_2 = -1$ och därmed ges den homogena lösningen av

$$y_h(x) = (Ax + B)e^{-x}.$$

Låt oss pröva med att ansätta $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Vi får att

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c.$$

Kan vi få detta till $2x^2 + 1$? Vi får $a = 2$, $b = -8$ och $c = 13$ och därmed ges en partikulärlösning av

$$y_p(x) = 2x^2 - 8x + 13.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{-x} + 2x^2 - 8x + 13.$$

▲

Exempel 15.6 (Tentamen 2011-10-18, 52%)**.** Betrakta differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -2xe^{-x}$

a) Visa att $y(x) = xe^{-x}$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

c) Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x)$$

i fallet då $y(x)$ löser differentialekvationen och $y(0) = 1$ och $y'(0) = -\sqrt{2}$.

LÖSNING:

a) Vi börjar med att derivera funktionen $u(x) = xe^{-x}$ och får

$$u'(x) = (1 - x)\, e^{-x} \quad \text{och} \quad u''(x) = (x - 2)\, e^{-x}.$$

Om vi nu sätter $y(x) = u(x)$ i differentialekvationens vänsterled så får vi

$$u''(x) + 2u'(x) - u(x) = e^{-x}\big((x - 2) + 2(1 - x) - x\big) = -2xe^{-x},$$

vilket är differentialekvationens högerled och alltså är $u(x)$ en lösning.

b) Det karakteristiska polynomet till den homogena ekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$$

är lika med

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda + 1 - \sqrt{2})(\lambda + 1 + \sqrt{2}).$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges därmed av

$$Ce^{(-1+\sqrt{2})x} + De^{(-1-\sqrt{2})x}$$

där C och D är godtyckliga konstanter. I föregående uppgift såg vi att $u(x) = xe^{-x}$ var en lösning till $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -2xe^{-x}$ så den allmänna lösningen till denna ekvation får vi genom att lägga till den homogena ekvationens lösningar:

$$xe^{-x} + Ce^{(-1+\sqrt{2})x} + De^{(-1-\sqrt{2})x}.$$

c) Om differentialekvationen ska uppfylla $y(0) = 1$ och $y'(0) = -\sqrt{2}$ så får vi från uttrycket för den allmänna lösningen i föregående uppgift att

$$1 = 0 \cdot e^{-0} + Ce^{(-1+\sqrt{2})\cdot 0} + De^{(-1-\sqrt{2})\cdot 0} = C + D$$

och (genom att derivera)

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} = (1-0)\, e^{-0} + C(-1+\sqrt{2})e^{(-1+\sqrt{2})\cdot 0} + D(-1-\sqrt{2})e^{(-1-\sqrt{2})\cdot 0} &= \\ = 1 - (C + D) + \sqrt{2}(C - D) = \sqrt{2}(C - D).& \end{aligned}$$

Alltså är $C + D = 1$ och $C - D = -1$ vilket ger att $C = 0$ och $D = 1$. Så lösningen är i detta fall lika med $xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}$. Om $x \to \infty$ så ser vi att $e^{(-1-\sqrt{2})x} \to 0$ (eftersom $-1 - \sqrt{2} < 0$) och $xe^{-x} \to 0$ (standardgränsvärde), och alltså är

$$\lim_{x\to\infty}(xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}) = 0.$$

Därefter har vi att

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}) = \lim_{x\to-\infty} e^{(-1-\sqrt{2})x}(xe^{\sqrt{2}x} + 1) = \infty,$$

på grund av att

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\sqrt{2}x} = \left\{t = -\sqrt{2}x\right\} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$$

och $\lim_{x\to-\infty} e^{(-1-\sqrt{2})x} = \infty$.

▲

15.4 Separabla differentialekvationer

En differentialekvation på formen

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \tag{15.14}$$

kallas en **separabel** differentialekvation.

Kedjeregeln ger att högerledet i (15.14) kan skrivas som

$$\frac{d}{dx}(G(y(x))) = f(x), \tag{15.15}$$

där G är primitiv funktion till g. Genom att ta primitiv funktion på båda leden får vi

$$G(y(x)) = F(x) + C, \tag{15.16}$$

där F är primitiv funktion till f och C en godtycklig konstant. Om G är inverterbar får vi

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C). \tag{15.17}$$

Vi illustrerar med ett exempel.

Exempel 15.7. Bestäm den lösning till $yy' = -4x$ som uppfyller $y(0) = -1$.

LÖSNING: Vi får från (15.16)

$$\frac{y(x)^2}{2} = -2x^2 + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$. Villkoret $y(0) = -1$ ger att

$$C = \frac{y(0)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Alltså är $y(x)^2 = 1 - 4x^2$ och eftersom $y(0) = -1$ är lösningen

$$y(x) = -\sqrt{1 - 4x^2},$$

för $|x| < 1/2$. ▲

15.5 Övningar

Övning 15.1. För vilka värden på konstanten $\lambda > 0$ har randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

icke-triviala lösningar, d.v.s. lösningar som inte är identiskt noll?

Övning 15.2. I X-stad bor idag 10 000 människor. Man räknar med att stadens befolkning varje år ökar med 0.1 procent, till följd av att det är fler personer som föds än som dör. Dessutom har staden en nettoinflyttning på 100 personer varje år, dvs det är 100 fler som flyttar in till staden än det är som flyttar därifrån. Gör en matematisk modell i form av en differentialekvation som beskriver befolkningsutvecklingen i staden. Vilket begynnelsevillkor bör uppfyllas? När är stadens befolkning 11 000? Hur realistisk är modellen på lång sikt?

Övning 15.3. Efter en gasolycka börjar det sippra in förorenad luft i en lokal vars volym är 2000 kubikmeter. Den förorenade luften har en koncentration av 10 procent av det giftiga ämnet och sipprar in i en takt av 0.1 kubikmeter per minut. Samtidigt sugs lika mycket av (den väl blandade) luften i lokalen ut. När är koncentrationen av det giftiga ämnet i lokalen uppe i 1 procent?

Övning 15.4. Lös differentialekvationerna

a) $4y'' + y = 3\sin x$

b) $y'' + y' - 2y = x^2 + 1$

c) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$

d) $y'' + 4y' + 5y = 10$

e) $y'' - 4y' + 4y = 2x + 8$

f) $y'' - 4y = xe^x + \sin(2x)$

Övning 15.5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\cos x.$$

Övning 15.6. [2007-03-13, uppgift 7] Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 8y' + 16y = 80x - 40 + 5e^{5x}.$$

Övning 15.7. [2008-12-15, uppgift 6] Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 4y = 2\sin x$$

som uppfyller att $y(0) = y'(0) = 0$.

Övning 15.8. Lös differentialekvationen $y' = x^2y^2$.

Övning 15.9. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = x, \\ y(0) = 2, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Övning 15.10. Lös differentialekvationerna

a) $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$, $y(0) = -1$

b) $yy' = 2x(y + 1)$, $y(1) = 0$

c) $y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$, $y(0) = 0$

d) $y'\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2}$, $y(1) = 0$

Övning 15.11. [2007-05-31, uppgift 6] Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 4y = x^2$$

vars graf tangerar den räta linjen $y = x$ i origo.

Övning 15.12. [2008-03-10, uppgift 5] Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 4y = 13 \sin x$$

som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

16 Repetitionsfrågor

Här följer några bra repetitionsfrågor om teorin i denna kurs.

a) Definiera begreppet konvergent, växande och uppåt begränsad talföljd.

b) Definiera supremum och infimum av en mängd.

c) Formulera supremumegenskapen och visa att växande och uppåt begränsade talföljder är konvergenta.

d) Låt $A \in \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att en funktion $f(x) \to A$, då $x \to \infty$.

e) Låt $a, A \in \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att en funktion $f(x) \to A$, då $x \to a$.

f) Definiera begreppet kontinuerlig funktion.

g) Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värde.

h) Bevisa att en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall har ett största och minsta värde där.

i) Bevisa att om en deriverbar funktion har ett lokalt extremvärde i en inre punkt så är derivatan noll i denna punkt.

j) Bevisa Rolles sats.

k) Bevisa den generaliserade medelvärdessatsen för derivator.

l) Visa att om $f' = 0$ på ett intervall så är f konstant i intervallet. Vad gäller om $f' > 0$, $f' \geqslant 0$, $f' < 0$ eller $f' \leqslant 0$ i intervallet? Bevisa dina påståenden. För vilka påståenden gäller omvändningen?

m) Formulera och bevisa formeln för derivation av en produkt och för partiell integration.

n) Definiera Riemannintegralen.

o) Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats.

p) Bevisa analysens huvudsats och insättningsformeln.

q) Formulera och bevisa Taylors formel.

r) Vad menas med att $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent?

s) Låt $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, vad menas med att $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ är konvergent?

17 Svar till övningar

1 Att läsa innan vi börjar

1.2.

a) $x = 1$

b) $x = 2\sqrt{2}$

1.4. a, b, c och g

1.5.

a) $A(x) \implies B(x)$,

b) $A(x) \implies B(x)$,

c) $\neg B(x) \implies \neg A(x)$

a, b och c är alla ekvivalenta.

Det är också möjligt att tolka texten på ett sådant sätt att de två första påståendena är $C \wedge (A(x) \implies B(x))$ där C är påståendet *Jag har en hatt*. I så fall gäller fortfarande att $a \iff b \implies c$, men ingen av implikationerna $c \implies a$ och $c \implies b$ gäller längre.

1.8.

F	S	S
S	S	S
F	S	S
F	F	S

2 Delmängder av reella tal

2.1. $\sup M = 0$ och $\inf M = -3/4$.

2.3. $\sup M = 3$ och $\inf M = -2$.

2.5. $\sup M = 3/2$ och $\inf M = 1$.

2.6. $\sup M = \sqrt{2}$ och $\inf M = 0$.

2.7.

a) $(1, 7)$

b) $(2, 5)$

c) $(1, 2]$

d) $(1, 7)$

e) $(2, 5)$

2.9. $\varnothing$

3 Funktioner

3.1. $D_f = [-1, \infty)$ och $V_f = [-1, 1]$

3.2. $[9, \infty)$.

3.3.

a) $[-1 + e^{-1}, \infty)$

b) $y = 1 + x/2$

3.4.

a) Definitionsmängd är $(-\infty, 1)$ och värdemängd är $\mathbb{R}$

b) Definitionsmängd är $[4, \infty)$ och värdemängd är $[1, \infty)$

c) Definitionsmängd och värdemängd är $\mathbb{R}$

3.5.

a) Ja. Målmängden blir $[2, \infty]$ och $f^{-1}(y) = -2 + \sqrt{y - 1}$

b) Ja. Målmängden blir $(1, \infty)$ och $f^{-1}(y) = 1/(y^2 - 1)$

3.6.

a) Ja. Målmängden blir $(0, 1/2]$ och $f^{-1}(y) = \frac{1}{2y}(1 + \sqrt{1 - 4y^2})$

b) Ja. Målmängden blir $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ och $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$

3.8.

a) $x = \pi/6 + 2\pi n$, för $n \in \mathbb{Z}$ eller $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, för $n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n$

3.10. $x = \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}}$

3.11.

a) Definitionsmängd är $[-1, 1]$ och värdemängd är $[-\pi/2, \pi/2]$

b) Definitionsmängd är $[-1, 1]$ och värdemängd är $[0, \pi]$

c) Definitionsmängd är $\mathbb{R}$ och värdemängd är $[-\pi/2, \pi/2]$

3.12. $11/16$

3.13.

a) Ekvationen saknar lösning.

b) 1

3.14.

a) $1/2$

b) $\pi/3$

3.21. $x = e^{-6}$

3.23. $-3 < x < 3$

3.26. $a > 0$ och $x = \dfrac{\ln\left(\sqrt{1+a}-1\right)}{\ln 2}$

3.27. $z = \pm 1$

3.28.

a) .

b) g är nödvändigtvis surjektiv, men inte nödvändigtvis injektiv. Ett i mängden av motexempel är $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

c) f är nödvändigtvis injektiv, detta gäller även om g inte är det, men inte nödvändigtvis surjektiv. Ett motexempel är $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $g(x) = x^2$.

3.29.

a) $x \in \{-2, 0, 4\}$

b) $x \in \{-4, 2\}$

c) $x \in \{-5\}$

d) $x \in [-1, 2]$

e) $\alpha \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$.

3.30.

a) $x \in \{-e, e\}$

b) $x \in \{-e^{-1}, e\}$

c) $x \in \{-5\}$

d) $x \in \{-e, -e^{-1}, e^{-1}, e\}$

3.31. $x = 2$

4 Talföljder

4.1.

a) $1/2$

b) 0

4.9. Om $a = 0$ är ekvationen uppfylld för alla $x \in \mathbb{R}$. Om $a \neq 0$ så är rötterna $x = 0$ och $x = a$.

4.10. Ja, den konvergerar.

4.12.

a) ∞

b) e^2

c) $\sqrt{e}$

d) 1

4.13.

a) 1

b) 1

c) ∞

4.14. 1

4.15. $\sqrt[3]{3}$. Ett sätt är att använda att $e^{\ln x} = x$.

4.17. Ja.

4.19.

a) 0

b) 0

4.20. Gränsvärdet existerar om och endast om x inte är en udda multipel av π, det vill säga om och endast om $x \neq (2k+1)\pi$ för alla $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{n\to\infty} \cos(x)^n = \begin{cases} 1 & \text{om } x = 2k\pi \text{ för något } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{om } x \notin \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten

5.1.

a) 3

b) 0

c) 1/3

d) 1

e) ∞

5.2.

a) 1/4

b) 0

c) 1/3

d) 0

e) 1

5.3.

a) 0

b) 1

5.5. 1/2

5.6. 1

5.7. $4/\sqrt{5}$

7 Kontinuitet

7.1. $a = 3$

7.2.

a) 0

b) 1

c) 0

d) 1

7.4. $a = 2(\pi - 1)/\pi$ och $b = 1$

7.8.

a) 2

b) 1

7.9. Alla sådana att $a/b = 5$.

7.10. 1

7.11. 0

7.12. $[9, \infty)$

7.14.

a) Ja

b) Nej, eftersom

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0,1) \\ 1 & |x| = 1 \end{cases}$$

8 Derivata

8.1.

a) $\sin x \cos x^2 + x \cos x \cos x^2 - 2x^2 \sin x \sin x^2$

b) $(\sin x + x \cos x)e^{x \sin x}$

c) $2 \ln x + 2 + 4a$

d) $-1/\sin^2 x$

8.3. $a = 1/2e$ (och $x = \sqrt{e}$)

8.7. Största värde är 2 och minsta värde saknas.

8.8. Tips är att visa att olikheten är ekvivalent med

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) - 2x > 0.$$

8.9. $[-1, 5/27]$

8.10.

a) $D_f = (0, \infty)$

b) Nej, ty $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

c) Nej, ty $f'(x) > 0$ om och endast om $x > 1/e$

d) Ja i intervallet $(0, 1/e]$ (observera att värdet $1/e$ är inkluderat)

e) Nej. Varken injektiv eller surjektiv.

f) Nej, ty $f(1/e) = -1/e$.

8.16. Lösning saknas.

8.17. $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$ och $y = x - 1$ är en sned asymptot vid både $\pm\infty$.

8.19. Inversen blir $x(y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

8.20. $\{0\}$

8.22. Minsta värdet är $\sqrt{2} - \pi/2$ och största värde är $\pi/2$.

8.23.

a) $x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

b) $x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

8.24.

a) $y = 10x - 17$

b) 4

8.26. Tips är att bilda $f(x) = x^p - Ax^d$ och studera minimum för denna funktion.

8.28. $a \in \{-2, 0\}$

8.29.

a) $f'(0) = 0$.

b) $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$

c) Nej.

9 Taylors formel

9.4. $2/9$

9.5. $1/3$

9.6. 1/8

9.7. $\dfrac{\pi}{4} - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}$

9.8.

a) $f(x) = 2 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{36}(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^3)$

b) 1/12

9.9.

a) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}}$, för något ξ mellan 0 och x.

b) -

c) närmevärdet är $4 + 1/8 - 1/512$ och felet mellan 0 och $\frac{1}{4 \cdot 16^3}$.

10 Serier

10.1.

a) konvergent

b) konvergent

c) divergent

d) konvergent

e) divergent

10.2.

a) divergent

b) konvergent

c) konvergent

d) divergent

e) konvergent

f) divergent

10.3.

a) konvergent

b) konvergent

c) konvergent

10.4. Den är konvergent.

10.5. Den är konvergent.

10.6. Ett tips är att använda definitionen av gränsvärde och geometrisk serie.

10.7. Ett tips är att använda definitionen av gränsvärde och geometrisk serie.

11 Integraler

11.1. 13

11.1.

a) -   b) $1/3$

11.3.

a) 1 b) $2\ln 2 + 15/4$ c) 1 d) $2\sin 1$

11.4.

a) 13 b) 4 c) 4 d) -4

11.5.

a) $(e^4-1)/2$ c) $\pi/6$ e) $3/16$

b) $(3e^4+1)/4$ d) $\ln 2$ f) $(1-\pi/4)/2$

11.6.

a) $-\dfrac{1}{x} - \arctan x + C$

b) $\ln|x| - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \arctan x + C$

c) $\dfrac{1}{2}\ln|1+x| - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$

d) $\dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2}\arctan x + C$

11.8. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

11.9. $\frac{\ln 2}{2} + \arctan 3 - \arctan 2$

11.10. $141/10$

11.11. $\ln|x+1| - \frac{\ln(x^2-x+1)}{2} + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

11.12. $\frac{2x-1}{2(1-x)^2} + C$

11.13. $f(1) = e^{-1}$

11.15. Genom att låta

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos(\alpha)x^5}{5!},$$

där $0 \leqslant \alpha \leqslant x$ så får vi att en approximation till integralens värde är $71/144$ och felet är $1/19200 < 1/1000$.

11.18.

a) $y = 2 - x/2$ b) $\sqrt{2}$

11.19. $\ln 2 + \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

11.20. $\frac{2\pi}{3^{3/2}}$

11.21. 0.310

12 Integration över obegränsade intervall

12.1. Konvergent. Ett sätt att visa är att nyttja att $x^2 \geqslant x$, då $x > 1$.

12.2. 12

12.5. π

12.6.

a) Divergerar, fås genom att med hjälp av Cauchys integralkriterium jämföra med lämplig integral (exempelvis $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$ vilken kan integreras eftersom $1/x$ är derivatan av $\ln x$).

b) Konvergerar, även den fås genom att med hjälp av Cauchys integralkriterium jämföra med lämplig integral (exempelvis $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$ som integreras med variabelsubstitution, lämnas som en övning till läsaren).

12.7.

a) Divergent, kan delas upp i två integraler som båda enskilt divergerar.

b) Gränsvärdet är 0.

c) Gränsvärdet är $\ln 2$.

d) Vi ser att gränsvärdena är olika beroende på hur vi låter integralens övre begränsning gå mot oändligheten, vilket inte är rimligt om integralen konvergerar.

12.8.

a) Genom uppdelning av integralen och evaluering av delintegralerna får vi att integralen är divergent. Liknar uträkningen i tidigare uppgift.

b) Fås genom direkt evaluering av integralen.

c)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{2R} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx = \pi + \ln 2.$$

12.9. $\pi/4$

12.11.

a) 2

12.12. T.ex. funkar det med $n = 11$.

13 Lokal integrerbarhet

13.1. Divergent. Observera att det finns två punkter där integralen är generaliserad.

13.2.

a) Generaliserad vid $x = 1$. Divergent.

b) Ej generaliserad. Värdet är $13/2$.

13.3.

a) Divergent

b) Konvergent med värdet 1

c) Konvergent med värdet $\pi/2$. En ledtråd är att utföra lämpligt variabelbyte.

d) Divergent

13.4.

a) Konvergent

b) Divergent

c) Divergent

d) Konvergent

14 Integralens tillämpningar

14.2. $\frac{\pi - 2\ln 2}{4}$

14.3. $\frac{\pi \ln 3}{2}$ s

14.4. $A(b) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{b^2+2}} \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, då $b \to \infty$

14.5. $512\pi/3$

14.13. $3/4$

15 Differentialekvationer

15.4.

a) $y = A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2} - \sin x$

b) $y = Ae^x + Be^{-2x} - x^2/2 - x/2 - 5/4$

c) $y = (Ax + B)e^{-x} e^{2x}/9$

d) $y = (A\cos x + B\sin x)e^{-2x} + 2$

e) $y = (Ax + B)e^{2x} + x/2 + 5/2$

f) $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - (x/3 + 2/9)e^x - \frac{\sin(2x)}{8}$

15.5. $y(x) = Ae^x + Be^x + \frac{e^{3x}}{10}(\cos x + 3\sin x)$.

15.6. $y(x) = (Ax + B)e^{4x} + 5x + 5e^{5x}$

15.7. $y(x) = \frac{1}{3}(2\sin x - \sin 2x)$

15.8. $y(x) = 0$ eller $y(x) = \frac{-3}{x^3+C}$

15.9. $y(x) = \dfrac{3e^{2x}}{4} + e^{-x} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$

15.10.

a) $y = (x + 1)/(x - 1)$

b) $y - \ln(y + 1) = x^2 - 1$

c) $y = \tan(x + x^3/3)$

d) $y = -2x\sqrt{1 - x^2}$, för $1/\sqrt{2} < x \leqslant 1$

15.11. $y(x) = \frac{\cos 2x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}$

15.12. $y(x) = e^x \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\sqrt{3}x\right) - 2\cos\left(\sqrt{3}x\right) \right) + 3\sin x + 2\cos x$

18 Lösningar till lappskrivningar

I detta avsnitt finns förslag på hur lösningar kan presenteras. Notera att resonemang förklaras i ord och kan läsas som en löpande text. Notera också att alla ekvationer och uttryck ingår i hela meningar som avslutas med punkter. Detta är mycket viktigt för att lösningen skall räknas som välpresenterad och gå att följa.

Lösningarna är avsiktligt typsatta för att efterlikna hur de skrivs för hand.

18.1 Lappskrivning 2, 2016-11-22, Lösningsförslag

Uppgift 1

Det gäller att

$$0 \leqslant \frac{2+\sin x}{1+x^2} \leqslant \frac{3}{x^2} \qquad \text{när } x \geqslant 1,$$

och integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{x^2}\,dx$ är konvergent.
Alltså är även $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx$ konvergent.

Kommentar till lösningen: Om man byter ut ”Alltså är även” mot ”På grund av jämförelsesatsen för generaliserade integraler är därför även” blir lösningen ännu bättre.

Uppgift 1

Det gäller att $\dfrac{2+\sin x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{3}{x^2}$ när $x \geqslant 1$, så för varje $R \geqslant 1$ gäller att

$$\int_1^R \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_1^R \frac{3}{x^2}\,dx = \left[-3\frac{1}{x}\right]_1^R = 3\left(1-\frac{1}{R}\right) \leqslant 3.$$

Eftersom $\dfrac{2+\sin x}{1+x^2} \geqslant 0$ för alla x gäller att $F\colon R \mapsto \displaystyle\int_1^R \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx$ är monotont växande. Eftersom F är monotont växande och uppåt begränsad existerar gränsvärdet $\lim\limits_{R\to\infty} F(R)$, så integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx$ är konvergent.

Kommentar till lösningen: Elementär lösning. Det hade varit enklare att hänvisa till jämförelsesatsen.

Uppgift 2

Det gäller att

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \left\{\begin{aligned} t &= \sqrt{x} \\ dt &= \frac{dx}{2t} \end{aligned}\right\} = \int \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = 2\left(\int \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)$$

$$= 2t - 2\arctan t + C = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + C$$

så

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \left[2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 - 2\arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Kommentar till lösningen:

- Att skriva $dt = dx/(2t)$ är missbruk av notation eftersom vi inte har definierat uttrycken dt och dx, men det är acceptabelt för variabelbyten.
- Hanteringen av integrationskonstant är inte formellt riktig, men en rimlig kompromiss i det här enkla fallet.

Uppgift 3

Standardutveckling ger för varje $t \in \mathbb{R}$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{e^\alpha}{3!}t^3$$

för något α mellan 0 och t.

Alltså gäller för varje $x \in \mathbb{R}$ att

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{e^\alpha}{6}x^6$$

för något $\alpha \in [-x^2, 0]$, vilket skulle visas.

Som approximation av integralen väljer vi

$$A = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}.$$

För alla x och alla $\alpha \in [-x^2, 0]$ gäller $|e^\alpha| \leqslant 1$, så för approximationsfelet $E = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx - A$ gäller

$$|E| = \left|\int_0^1 \left(e^{-x^2} - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\right)dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|e^{-x^2} - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\right|dx$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| \frac{x^6}{6} \right| dx = \int_0^1 \frac{x^6}{6}\, dx = \left[\frac{x^7}{6\cdot 7} \right]_0^1 = \frac{1}{6\cdot 7} = \frac{1}{42}.$$

Alltså är den här Taylorutvecklingen inte tillräcklig för att få ett fel mindre än $\frac{1}{1000}$, så något är fel i antingen lösningen eller uppgiftsformuleringen.

Kommentar till lösningen:

- Taylorserien för $x \mapsto e^x$ får användas utan härledning.
- Vad α är är ganska tydligt utskrivet. Ännu tydligare hade varit att skriva $\alpha(x)$ för att göra det tydligt att olika val av x ger potentiellt olika värden på α.
- Om man inser att någonting inte stämmer är det bra att klart och tydligt påpeka det, eventuellt med en gissning om vad som är fel.

18.2 Lappskrivning 2, 2016-11-22, Vanliga fel

Nedan finns lösningar och delar av lösningar som innehåller vanliga fel. De åtföljs av kommentarer som förklarar varför lösningarna är otillräckliga.

Uppgift 1

Det gäller att

$$\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^2}\, dx \leqslant \int_1^\infty \frac{3}{1+x^2}\, dx = 3\left[\arctan x\right]_1^\infty = \frac{3\pi}{4}$$

så integralen är konvergent.

Kommentar till lösningen:

- Uttrycket $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^2}\, dx$ är inte meningsfullt innan vi visat att integralen är konvergent, så det är **nonsens** att använda det i en olikhet på det här sättet. Undantag kan göras om integranden är ett absolutbelopp av någonting, eller möjligen om den på annat sätt är helt uppenbart ickenegativ.
- Jämförelsesatsen gäller bara för ickenegativa integrander. Lösningen nämner inte att integranden är ickenegativ, och därmed visar den bara att integralen är högst $3\pi/4$ **förutsatt att den är konvergent**. Lösningen ger oss **ingen** information om huruvida integralen är konvergent.

Uppgift 1

$$\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{2}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\left[\arctan x\right]_1^\infty < \infty$$

Vi har $\dfrac{\sin x}{1+x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ så därför är också den andra integralen konvergent.

Kommentar till lösningen:

- Det här argumentet äger **ingen beviskraft överhuvudtaget**. Jämförelsesatsen gäller bara för ickenegativa integrander, och här har vi använt den för $\sin(x)/(1+x^2)$, som definitivt är negativ ofta. Om man skall dela upp integralen på det här sättet behöver man därför istället visa att den andra integralen är absolutkonvergent och sedan använda satsen om att absolutkonvergenta integraler är konvergenta.

- De två första raderna ingår inte i några meningar. Det gör lösningen svår att följa, och gör det otydligt om det som står är någonting vi

  a) påstår är uppenbart,
  b) påstår följer från raden ovanför,
  c) påstår och snart skall visa,
  d) antar,
  e) vet sedan tidigare,
  f) vet på grund av en känd sats,
  g) ....

  Läsaren måste gissa vad som menas, vilket gör det till **mycket bristfällig kommunikation**.

Uppgift 3

...

Felet blir

$$\int_0^1 \left(e^{-x^2} - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\right)\,dx = \int_0^1 \frac{e^\alpha}{6}x^6\,dx = \left[\frac{e^\alpha x^7}{6\cdot 7}\right]_0^1 = \frac{e^\alpha}{42} \leqslant \frac{1}{42},$$

eftersom $e^\alpha \leqslant 1$ eftersom α är negativ.

...

Kommentar till lösningen: Vi vet a priori **absolut ingenting** om hur $\alpha = \alpha(x)$ beror av x. Det är helt enkelt inte sant att $(e^{\alpha(x)}x^7)/(6 \cdot 7)$ är en primitiv funktion till $(e^{\alpha(x)}x^6)/6$ för godtyckliga funktioner $\alpha(x)$. Alltså är det **nödvändigt** att göra sig av med α **innan** man försöker integrera någonting. Tydligast blir det om man skriver $\alpha(x)$ istället för α överallt. Då minskar man risken att göra den här typen av fel.