$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

minns att $a = 0$ från deluppgift (a)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

innebär $h \neq 0$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{h}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{begränsat ty } -1 \leq \sin\theta \leq 1 \text{ för alla } \theta \in \mathbb{R}} = 0$$

dvs. $f'(0) = 0$ och f är alltså deriverbar i origo.

Anmärkning

Om f är deriverbar i $x = a$ är f också kontinuerlig $x = a$.

Om f är kontinuerlig i $x = a$ är f inte säkert deriverbar i $x = a$.

Ex. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$ är kont. överallt

men $f'(0)$ existerar inte.

Differentialekvationer av 2:a ordning

Homogent fall

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{där } y = y(x)$$

konstanter

Steg 1 Lös den karakteristiska ekv.

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (\text{pq-formeln})$$

och få rötterna r_1 och r_2.

Steg 2 Om

1) r_1, r_2 är reella, olika:

Svar: $y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$

godt. konstanter

2) $r_1 = r_2$ är reella:

Svar: $y(x) = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}$

3) r_1, r_2 är komplexa konjugat:

$$\begin{cases} r_1 = \alpha + \beta i \\ r_2 = \alpha - \beta i \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \big(C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)\big)e^{\alpha x}$

Inhomogent fall

$$y'' + py' + qy = \overbrace{g(x)}^{\text{godt. funktion}}$$

som inte är identiskt 0

Lösningsgång

Del 1: Bestäm den $\overbrace{\text{homogena lösn.}}^{y_h(x)}$, dvs. den allmänna lösn. till

$$y'' + py' + qy = 0$$

noll

Del 2: Bestäm en $\overbrace{\text{partikulär lösn.}}^{y_p(x)}$, dvs. en lösning till den inhomogena ekv.

obs!

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

Svar $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

2014.05.28 #5 #UU

Lös $y'' - 2y' + 5y = \underbrace{5x^2 - 4x}_{\text{inhomogent fall !}}$.

Del 1 Bestäm $y_h(x)$:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

med karak. ekv. $r^2 - 2r + 5 = 0$

$\Downarrow$

$\vdots$

$\Downarrow$ $\begin{cases} r_1 = 1 + 2i \\ r_2 = 1 - 2i \end{cases}$, dvs. $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

Alltså: $y_h(x) = \left(C\sin(2x) + D\cos(2x)\right)e^x$

Del 2 Bestäm en par. lösn. $y_p(x)$

genom att ansätta y_p så att den

liknar högerledet $5x^2 - 4x$:

ANSATS: $y_p(x) = Ax^2 + Bx + K$