Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

1. Tal och Funktioner

Innehåll. Envariabelanalys handlar om studiet av reellvärda funktioner av en reell variabel. Vi ska bland annat lära oss att derivera och integrera sådana funktioner och använda detta i tillämpningar av olika slag. I denna inledande föreläsning introducerar vi de reella talen och olika begrepp och beteckningar som är viktiga att kunna i samband med mängder, särskilt intervall, av reella tal. Vi introducerar också funktionsbegreppet och i samband med detta en rad andra begrepp som vi kommer att använda i vårt studium av funktioner:

- Definitionsmängd
- Värdemängd
- Funktionsgraf
- Begränsad funktion
- Udda resp jämn funktion
- Styckvis definierad funktion
- Sammansättning av funktioner
- Absolutbeloppsfunktionen
- Klassen av elementära funktioner

Dessa begrepp ska man både kunna definiera matematiskt och använda praktiskt i problemlösning.

Introduktion. Sedan mycket lång tid tillbaka har människan använt räkning och matematik för att förstå, förklara och behärska sin omvärld. Det ämne vi nu ska studera, analys, har en lång utvecklingshistoria och fortsätter att utvecklas än idag.

Redan under antiken, för sisådär 2500 år sedan, ställdes frågor som föregriper våra dagars analytiska begrepp som derivata, integral, gränsvärde och serie. I Zenons paradoxer, om Akilles och sköldpaddan och om den flygande pilen, ryms frågor som: Kan man dela in verkligheten i hur små bitar som helst? Kan man summera oändligt många tal och få en summa som är ändlig? Vad är egentligen momentan hastighet - sträcka delat med tid blir ju medelhastighet men hur blir det om tidsintervallet är noll, finns det någon hastighet då? Ungefär vid samma tid gjorde Eudoxos och Arkimedes beräkningar av areor och volymer med metoder som föregriper den moderna konstruktionen med översummor och undersummor till integraler.

Det var Newton och Leibniz som vid slutet av 1600-talet grundlade teorin om derivator och integraler som på många sätt svarar på och utvecklar de antika frågeställningarna och beräkningarna som nämns ovan. Derivatan kan tolkas som ett mått på förändringen av en funktion och har enormt många tillämpningar inom vetenskap och teknik. En av de första av dessa tillämpningar var när Newton själv ställde upp mekanikens rörelselagar och lyckades förklara planeternas rörelser kring solen med hjälp av gravitationen. Snacka om killer application!

Efter Newton och Leibniz har ämnet fortsatt att utvecklas kraftigt och gör så även idag. En intressant detalj är att begreppet gränsvärde, som derivata och integral ju egentligen bygger på, inte fick någon riktigt rigorös definition förrän på 1800-talet, då Cauchy m fl såg till att införa större stringens.

De reella talen. De reella talen brukar symboliseras med en oändlig tallinje där varje punkt representerar ett tal. Varje reellt tal har en decimalutveckling, som eventuellt är oändlig och icke-periodisk. Några viktiga delmängder av de reella talen är:

- De naturliga talen (positiva heltal): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Heltalen: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
- De rationella talen: $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z},\, m \neq 0\}$
- De reella talen: $\mathbb{R}$.

Om inget annat uttryckligen sägs är det i den här kursen underförstått att de tal vi arbetar med är reella tal. Vi kommer att studera reellvärda funktioner definierade på olika intervall av reella tal. Viktig notation att ha koll på när det gäller intervall:

- Öppet intervall: $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ (skrivs ibland även $]a, b[$)
- Slutet intervall: $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$
- Obegränsat intervall: $(a, \infty) = \{x : x > a\}$ eller $[a, \infty) = \{x : x \geq a\}$ eller $(-\infty, c) = \{x : x < c\}$ osv

Även om alla reella tal hur noggrant som helst kan approximeras med rationella tal, så finns det en viktig skillnad mellan mängden av rationella tal, $\mathbb{Q}$, och mängden av reella tal, $\mathbb{R}$. Nämligen:

Supremumegenskapen. Varje icke-tom mängd av reella tal som är uppåt begränsad har en minsta övre gräns (supremum). Supremum till en mängd M skrivs ofta $\sup M$.

På samma sätt har varje icke-tom mängd av reella tal som är nedåt begränsad en största undre gräns (kallad infimum). Infimum till en mängd M skrivs ofta $\inf M$.

Supremum och infimum till en mängd kan tillhöra mängden eller ligga utanför mängden. Det viktiga är att de finns som tal. Det är detta som garanterar att varje punkt på tallinjen motsvarar ett tal och att det allmänt sett finns "tillräckligt många" tal.

Att talet α är supremum till en mängd M av reella tal betyder alltså att α är en övre gräns till mängden (dvs $\alpha \geq x$ för alla $x \in M$) och att varje annat tal som är en övre gräns till mängden M är större än α.

En jämförelse med de rationella talen kan vara belysande. Mängden av alla rationella tal vars kvadrat är mindre än 2 är icke-tom och uppåt begränsad (t ex så tillhör talet 1 mängden och alla tal i mängden är uppenbart mindre än 1.5). Men det finns inget rationellt tal precis där mängden slutar, för roten ur 2, som skulle vara den minsta övre gränsen för mängden, är inget rationellt tal! Den här mängden har alltså inte någon minsta övre gräns bland de rationella talen. Och detsamma gäller många andra mängder av rationella tal. Om man tänker sig en tallinje som består bara av rationella tal skulle denna tallinje alltså ha hål. Faktum är att den skulle ha så många hål att det inte blev så mycket kvar av den. $\mathbb{Q}$ saknar alltså supremumegenskapen.

Funktioner. Med en funktion f från en mängd A till en mängd B menar vi en regel som till varje element $x \in A$ associerar precis ett element $f(x) \in B$. Mängden A där f är definierad kallas definitionsmängd, skrivs ofta D_f. Mängden av alla funktionsvärden $f(x)$, $x \in D_f$, kallas värdemängd, skrivs ofta V_f.

Det som är viktigt med definitionen ovan är att funktionsvärdet $f(x)$ är bestämt av inputen x. Det får inte finnas flera olika funktionsvärden för samma x. (Däremot är det tillåtet att olika x har samma funktionsvärde, som till exempel är fallet för den konstanta funktionen $f(x) = 1$.)

Exempel: Funktionen som vid input x ger output $x^2 + 1$ och är definierad på hela $\mathbb{R}$ kan vi skriva som $f(x) = x^2+1$ eller $x \mapsto x^2+1$ eller bara beskriva med vanliga ord. OBS: Med en funktion följer också definitions- och värdemängd.

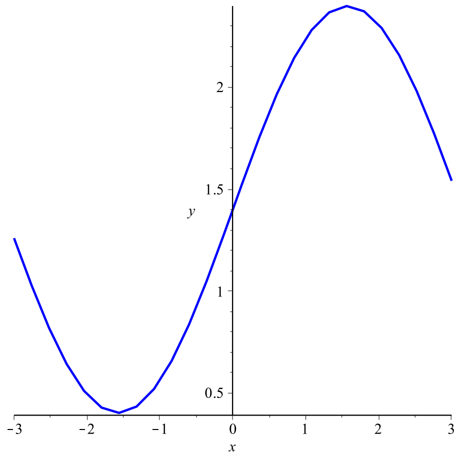
Konvention: Om definitionsmängd ej anges antas att definitionsmängden är den största möjliga mängd där funktionen är väldefinierad och ger som output ett reellt tal. Några exempel:

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = \frac{1}{x-2}$
- $h(x) = \sqrt{x}$, $x > 9$
- $k(t) = \sqrt{t}$

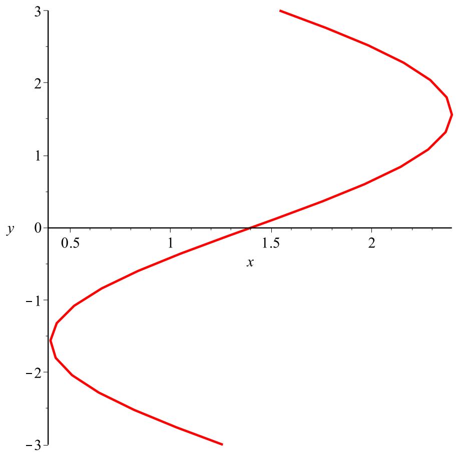
Funktionen f ovan har som definitionsmängd alla icke-negativa tal. Funktionen g har som definitionsmängd alla tal utom talet 2. Funktionen h har som definitionsmängd alla tal större än 9. Funktionen k har som definitionsmängd alla icke-negativa tal.

OBS: f och h ovan är olika funktioner (de har ju inte samma definitionsmängd) men f och k är samma funktion (det spelar ingen roll vad vi kallar variabeln, det enda som betyder något är vad funktionen gör med den).

Funktionsgrafen till f består av alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sådana att $y = f(x)$, dvs grafen är $\{(x, y) : y = f(x) \text{ och } x \in D_f\}$. Observera att funktion och funktionsgraf och kurva inte är samma sak. Observera särskilt att inte alla kurvor är funktionsgrafer!



Figur. Den blå kurvan ovan är exempel på en funktionsgraf $y = f(x)$.



Figur. Den röda kurvan ovan är exempel på en graf som *inte* är en funktionsgraf $y = f(x)$ för någon funkion f.

Absolutbeloppsfunktionen är en viktig funktion. Den definieras på olika sätt för positiva och negativa tal, så här:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Egenskaper hos absolutbeloppsfunktionen:

- $|-x| = |x|$
- $|ab| = |a||b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Tolkning: $|a-b|$ representerar avståndet på tallinjen mellan talet a och talet b. Obs att $|x| = \sqrt{x^2}$.

Kombinationer: Vi kan kombinera två funktioner f och g och skapa nya funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Sammansättningen $(f \circ g)(x)$ betyder alltså $f(g(x))$.

Definition: Funktionen f sägs vara **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla x i D_f.

Definition: Funktionen f sägs vara **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla x i D_f.

Definition: Funktionen f sägs vara **begränsad** om det finns ett tal M sådant att $|f(x)| < M$ för alla $x \in D_f$. Om olikheten bara gäller utan absolutbeloppstecken säger man att f är uppåt begränsad.

Klassen av elementära funktioner består av alla polynom, rationella funktioner, trigonometriska funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, inversa trigonometriska funktioner

samt

alla kombinationer av sådana funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.

Ni förväntas kunna hantera dessa elementära funktioner och utföra saker som polynomfaktorisering, polynomdivision, kvadratkomplettering, använda konjugatregeln, lösa trigonometriska ekvationer, använda potenslagar, loglagar, trigformler, rotuttryck osv. Man måste kunna använda enhetscirkeln och ange de trigonometriska funktionernas värden för vissa enkla vinklar. Man måste kunna hantera olikheter. Obs att absolutbeloppsfunktionen är elementär, trots att den är styckvis definierad, eftersom man också kan skriva den som $\sqrt{x^2}$.

Enpunktsformeln. Det är bra att känna till enpunktsformeln för linjens ekvation (på engelska point/slope equation): den räta linjen genom punkten (a, b) med riktningskoefficient k har ekvation

$$y = b + k(x - a).$$

Detta kan förstås också skrivas på formen $y = kx + m$ där $m = b - ka$, det blir samma linje, men skrivsättet med enpunktsformeln är praktiskt att kunna och vi ska använda det mycket i den här kursen.

En styckvis definierad funktion. Ett viktigt exempel på en funktion som *inte* är elementär är Heaviside-funktionen, som har värdet 0 för alla negativa x och värdet 1 för alla icke-negativa x. Dvs

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Heaviside-funktionen är en styckvis definierad funktion. Sådana funktioner är de vanligaste exemplen på funktioner som inte är elementära.