SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 20

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Plan

Idag. Tema derivator mm.

1. Teori
2. Gränsvärde
3. Kontinuitet
4. Derivataundersökningar
5. Taylors formel

Imorgon. Tema integraler mm.

1. Teori
2. Riemannsummor och tillämpningar
3. Huvudsatsen och Integrationstekniker
4. Generaliserade integraler
5. Serier

Särskild koll på: problemlösning, strategier, uppskattningar

Teori

Teori från första halvan av kursen:

1. Supremum
2. Gränsvärde
3. Kontinuitet
    1. Elementära funktioner är kontinuerliga
    2. Satser om kontinuerliga funktioner
4. Derivata
    1. Deriverbar medför kontinuerlig, men ej tvärtom
    2. Deriveringsregler
    3. Tolkning: förändring, linjär approximation etc
    4. Medelvärdessatsen och följdsatser
    5. Derivataundersökning för max/min etc etc
    6. Taylors formel
    7. Implicit derivering
    8. Diffekvationer, andraderivatan, asymptoter mm

Tentaproblem

Uppgift. Betrakta funktionen f given av

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2}, & \text{när } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

(a) I vilka punkter är f kontinuerlig?
(b) I vilka punkter är f deriverbar?
(c) Är f integrerbar på intervallet $[-1, 1]$?

För $x \neq 0$ är $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$ som är elementärt, alltså är f kontinuerlig där. Om f ska va

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2}, & \text{när } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

kont. i $x=0$ kräver $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Se att

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} = f(0)$. Så f kont i 0 också.

$x \neq 0$: $f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x^2})^2} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)$ deriverbar. $x=0$: $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0) =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\arctan \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{2}}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+(\frac{1}{h^2})^2} \cdot \left(-\frac{2}{h^3}\right)}{1} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h^4+1} = 0$

f integrerbar på $[-1,1]$ ty f kont. & $[-1,1]$ sluten, begränsat.

Uppgifter. Beräkna gränsvärdena!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x(x^3 - \frac{1}{x^3} - 1)}{e^{-x} + 1 \to 1} \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x(x^3 - \frac{1}{x^3} - 1)}{e^{-x} + 1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\underline{e^x x^3}\left(1 - \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^3}\right)}{\underbrace{e^{-x} + 1}_{\to 1}} = \infty$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x x^3\left(1 - \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^3}\right)}{e^{-x}\left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x^3}{e^{-2x}}}_{\to 0} \cdot \frac{1 - 1/x^6 - \frac{1}{x^3}}{1 + \underbrace{1/e^{-x}}_{\to 0}} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$$

Uppgift. Betrakta funktionen f given av

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2}$$

Bestäm största och minsta värdet av f, om dessa finns.

f har definitionsmängd $x \geq 0$ och f kontinuerlig där, ty elementär.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x^2) - \sqrt{x} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(1+x^2)}, \quad x > 0$$

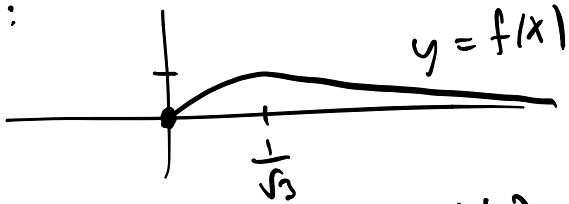
$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Teckenschema för f':

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x > 1/\sqrt{3}$
$f'(x)$	ξ	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	max $=$	$\searrow$

Ser att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Skiss:



Följer att minsta värdet är $f(0) = 0$

största värdet är $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Tentaproblem

Uppgift. Betrakta funktionen f giv en av

$$f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1 - x^2}$$

Bestäm antalet lösningar till ekvationen $f(x) = 2$.
Är f inverterbar?

f är def. & kont på $[-1, 1]$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1.$$

$f'(x) = 0 \iff x = 1/2$. Teckenschema:

Tentaproblem forts

$$f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1 - x^2}$$

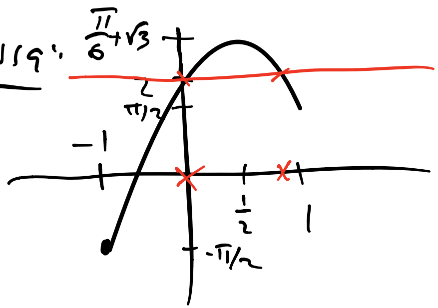
x	-1		$1/2$		1
$f'(x)$	∄	$+$	0	$-$	∄
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	max	↘	$\frac{\pi}{2}$

$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$f(1) = \pi/2$

$f(1/2) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} > 2$

Skiss:



Följer att $f(x) = 2$ har exakt två lösningar. Därmed är f ej inverterbar.

Tentaproblem

Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 kring $x = 0$ till $f(x) = \cos x$ och använd det för att bestämma ett närmevärde till $\cos 0.1$. Avgör om felet är mindre än 10^{-4}.

$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x$

$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0$

Taylorpoly blir $p(x) = 1 + 0\cdot(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3$

$= 1 - \frac{x^2}{2}$

$\cos 0,1 = f(0,1) \approx p(0,1) = 1 - \frac{0,1^2}{2} = 0,995$

$$\boxed{|\text{Felet}| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}0,1^4\right| = \left|\frac{\cos c}{4!}0,1^4\right| \le \frac{0,1^4}{4!} < 10^{-4}.}$$

Checklista

1. Har du svarat på alla frågor i uppgiften? Skriv svar.
2. Har du skrivit förklarande text?
3. Har du skrivit det som behövs för att kunna dra slutsatsen?
4. Har du kontrollerat svaret /kontrollerat om svaret är rimligt?
5. Har du ritat figur?

En minitenta på derivator

1. Bestäm den lösning $y(t)$ till $y''(t) + y(t) = e^t$ som uppfyller att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

2. Bestäm andra gradens Taylorpolynom kring $x = 1$ till $f(x) = \ln x$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\ln(3/2)$. Avgör om felet är mindre än 0.01.

3. Låt $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14$. För vilka reella tal C har ekvationen $f(x) = C$ precis två olika lösningar?

1. Bestäm den lösning $y(t)$ till $y''(t) + y(t) = e^t$ som uppfyller att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

Lösn. $y = y_h + y_p$. y_h: Kar. ekv. $r^2 + 1 = 0$

har lösn. $r = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$. Så

$y_h = e^{0t}(A\cos(1\cdot t) + B\sin(1\cdot t)) = A\cos t + B\sin t$.

Ansätt $y_p = ae^t$. Då $y_p' = ae^t$ o $y_p'' = ae^t$

och $y_p'' + y_p = e^t \Leftrightarrow ae^t + ae^t = e^t \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Så $y_p = \frac{1}{2}e^t$.

Så $y(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{2}e^t$. $y(0) = 0$ ger $A = -\frac{1}{2}$ $y'(0) = 0$ ger

$\frac{1}{2}\sin 0 + B\cos 0 + \frac{1}{2}e^0 = 0$ ger $B = -\frac{1}{2}$. Svar: $\underline{-\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t}$

En minitenta på derivator

2. Bestäm andra gradens Taylorpolynom kring $x = 1$ till $f(x) = \ln x$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\ln(3/2)$. Avgör om felet är mindre än 0.01.

$1 \quad c \quad \frac{3}{2}$

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-x^{-2}}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1$$

$$\text{TP}: \quad p(x) = 0 + 1\cdot(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\ln\frac{3}{2} = f\left(\frac{3}{2}\right) \approx p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \quad |\text{Felet}| = \left|\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3\right|$$

$$= \left|\frac{2/c^3}{3!}\,\frac{1}{8}\right| \leq \frac{1}{24}$$

$$\geq \frac{2/(3/2)^3}{3!}\,\frac{1}{8} = \frac{\cancel{2}^{4}}{3\cdot\cancel{2}\cdot 3^3\cdot\cancel{8}} = \frac{1}{81} > 0.01$$

3. Låt $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14$. För vilka reella tal C har ekvationen $f(x) = C$ precis två olika lösningar?

f är def. & kont. på hela $\mathbb{R}$.

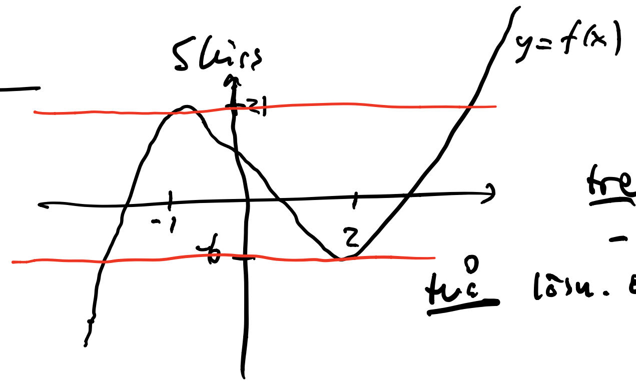
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$f'(x) = 0 \iff x = 2$ el. $x = -1$ Teckenschema:

x		-1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

$f(-1) = 21$, $f(2) = -6$

Skiss



$f(x) = C$ har

en lösn. om $C > 21$ el. $C < -6$

tre lösn. om $-6 < C < 21$

två lösn. om $C = -6$ el. $C = 21$

En minitenta till

1. Värmesystemet i huset går sönder när temperaturen utomhus är -10° C. Inomhustemperaturen $y(t)$ vid tidpunkten t timmar efter haveriet uppfyller att $y'(t) = k(y(t) + 10)$ för något tal k och $y(0) = 20$. Om $y(1) = 18$ — när blir det minusgrader inomhus?

2. Låt $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. Bestäm alla lokala extrempunkter till f och alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

3. Bestäm en ekvation för tangenten i punkten $(2, -2)$ till kurvan $y^3 + y^2 + x + 2 = 0$.