Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 16: Generaliserade integraler

Innehåll. Generaliserade integraler, dvs integraler över obegränsade intervall och integraler av obegränsade funktioner.

Introduktion. Tidigare har vi integrerat begränsade funktioner över begränsade intervall. Generaliserade integraler är integraler över obegränsade intervall och integraler av obegränsade funktioner. Den stora frågan är om de är konvergenta eller divergenta. Och om de är konvergenta kan man beräkna dem?

Integraler över obegränsade intervall. Detta är generaliserade integraler av den första typen. Tekniken för att hantera dem är att hugga av det obegränsade intervallet, räkna ut vad man har så långt och sedan se om detta har något gränsvärde. Närmare bestämt: om f är integrerbar på varje intervall $a \leq x \leq R$ så säger vi att

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

om detta gränsvärde existerar ändligt. Då sägs integralen över det obegränsade intervallet vara konvergent. Annars sägs den vara divergent.

Exempel. Eftersom

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} [-e^{-x}]_1^R = \lim_{R\to\infty} (-e^{-R} + e^{-1}) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

gäller att $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ är konvergent med värde $1/e$.

Exempel. Eftersom

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} [\sin x]_0^R = \lim_{R\to\infty} \sin R$$

som saknas så sägs $\int_0^\infty \cos x\,dx$ vara divergent.

Sats. Det gäller att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

är konvergent om och endast om $p > 1$.

Bevis. Prova själv! Det är inte svårt.

Jämförelser. Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för alla $x \geq a$ så gäller att

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergent } \implies \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent}$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergent } \implies \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ divergent}$$

Bevis. Supremumaxiomet och lite till.

Integraler av obegränsade funktioner. Detta är generaliserade integraler av den andra typen. Tekniken för att hantera dem är precs som förut att hugga av, räkna ut vad man har så långt och sedan se om detta har något gränsvärde. Närmare bestämt: om f är integrerbar på varje intervall $c \leq x \leq b$, då $a < c$, men $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ så säger vi att

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

om detta gränsvärde existerar ändligt. Då sägs integralen över intervallet $[a, b]$ vara konvergent. Annars sägs den vara divergent.

Exempel. Eftersom

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}) = 2$$

så sägs $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ vara konvergent med värdet 2.