Geometriska serier

$\underbrace{\text{serier}}_{\text{summor med oändligt många termer}}$

Ex. $4 \xrightarrow{\cdot 2} 8 \xrightarrow{\cdot 2} 16 \xrightarrow{\cdot 2} 32 + \ldots$

$$4+8+16+32+\ldots = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k$$

$1 \xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}} \frac{1}{9} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Allmänt En geometrisk serie är en serie på formen

$$\sum_{k=N}^{\infty} C \cdot r^k$$

något tal $C \neq 0$

kvot (eng. ratio)

något heltal

Två viktiga räknelagar för serier i allmänhet

1. $$\sum_{k} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k} a_k$$

konstant

godt. gränser

Ex. $$\sum_{k=4}^{9} 3(k^2+k) = 3\sum_{k=4}^{9}(k^2+k)$$

2. $$\sum_{k} (a_k + b_k) = \sum_{k} a_k + \sum_{k} b_k$$

2017.01.09 #2 #KTH

b) Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} \text{ där } a_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i}.$$

Lösning Beräkna serien

$$S = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i}$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{3^i}$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i}_{\text{geometrisk serie med kvot } r = \frac{1}{3}}$$

Betrakta först $\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i = A$:

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Räkneknep:

$$\frac{1}{3}A = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A - \frac{1}{3}A}_{\frac{2}{3}A} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}_{\to 0 \text{ när } n \to \infty}\right)$$

Slutsats:

$$S = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Svar