SAMMANFATTNING TATA41 ENVARIABELANALYS 1

LÄST SOM EN DEL AV CIVILINGENJÖRSPROGRAMMET I INDUSTRIELL EKONOMI VID LITH, HT 2014

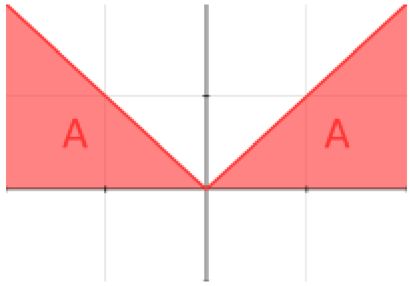
Senast reviderad: 2015-06-10
Författare: Viktor Cheng

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

DIVERSE KNEP

Egenskaper hos integranden och intervallet

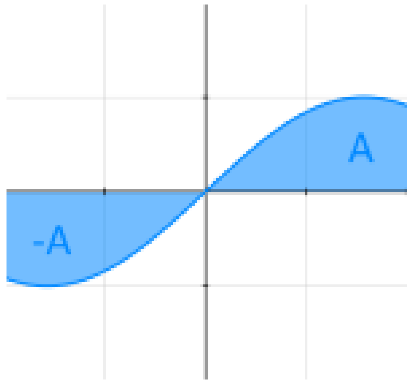
Om integranden är <u>jämn</u> kring origo, dvs. om $f(x) = f(-x)$ och om integrationsintervallet $[a, b]$ är symmetriskt kring origo så medför det att $\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_a^0 f(x) = 2\int_0^b f(x)$.



<u>Exempel:</u>
(Tenta 2014-04-23 uppgift 2) Beräkna $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$.

Integranden är en jämn funktion och integrationsintervallet är symmetriskt kring origo $\Rightarrow \int_{-2}^{2} |x|\,dx = 2\int_0^2 |x| =$
$= /|x| = x$ för $x \geq 0/ = 2\int_0^2 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2(2-0) = 4.$

Om integranden i stället är <u>udda</u> kring origo, dvs om $-f(x) = f(-x)$ och om integrationsintervallet $[a, b]$ är symmetriskt kring origo så medför det att $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.



<u>Exempel:</u>
Beräkna $\int_{-2}^{2} \sin x\,dx$.

Integranden är en udda funktion och integrationsintervallet är symmetriskt kring origo $\Rightarrow \int_{-2}^{2} \sin x\,dx = 0$.
Kontroll: $\int_{-2}^{2} \sin x\,dx = [-\cos x]_{-2}^{2} =$
$= -\cos(2) + \cos(-2) = -\cos(2) + \cos(2) = 0.$

Uppdelning av bråk

Gör om täljaren till nämnaren (nästan). Separera och förenkla.

<u>Exempel:</u>
Beräkna $\int \frac{2x+1}{2x-1}\,dx$.

Täljaren är nästan lika med nämnaren, så när som en konstant på +2. Skriv om täljaren.

$$\int \frac{2x+1}{2x-1}\,dx = \int \frac{2x-1+2}{2x-1}\,dx = \int \frac{2x-1}{2x-1} + \frac{2}{2x-1}\,dx =$$
$$= \int 1 + \frac{2}{2x-1}\,dx = x + \ln(x-1) + C.$$

ÖVRIGT

Olikheter som är användbara för uppskattning , t.ex. vid gränsvärdesberäkning eller beräkning av (generaliserade) integraler:

Olikhet	**Villkor**
”Triangelolikheten” $|x+y| \leq |x| + |y|$	-
”Omvända triangelolikheten” : $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$	-
$\sin x < x < \tan x$	$0 < x < \pi/2$
$\ln x \leq x - 1$	$x > 0$

Trigonometriska identiteter som är användbara vid beräkning av gränsvärden eller primitiva funktioner:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
”Eulers formler”	$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

DEL II: TENTAMEN

FUNKTIONSUNDERSÖKNINGAR

Hans Lundmark (MAI) har skrivit en utförlig checklista för funktionsundersökningar.

Länk: http://courses.mai.liu.se/GU/TATA41/Dokument/funktionsundersokning.pdf

Eftersom checklistan är väldigt utförlig kommer denna del endast att behandla lite kompletterande material om extrempunkter.

Lokala extrempunkter är antingen minimipunkter eller maximipunkter. Alla lokala extrempunkter är något av följande:

1) <u>Stationära punkter till funktionen</u>, dvs. där $f'(x) = 0$.

2) <u>Punkter där funktionens derivata är odefinierad</u>
   Exempel: derivatan av $f(x) = |x|$ existerar inte i punkten $x = 0$ (se höger- respektive vänsterderivata). Dock har $f(x)$ ett lokalt (t.o.m. globalt) minimumvärde i $x = 0$.

3) <u>Ändpunkter till definitionsmängden</u>
   Exempel: $f(x) = \frac{1}{x}$, definierad på $[1,\infty[$, är strängt avtagande på hela intervallet och antar därför sitt största värde i den vänstra ändpunkten $x = 1$, som är en lokal och global maximumpunkt. $f(x)$ kommer förvisso att gå mot 0 då $x \to \infty$ (högra ändpunkten) men värdet 0 antas aldrig och därmed finns ingen minimumpunkt.

För att hitta lokala extrempunkter behöver man alltså **enbart** undersöka punkter av ovanstående typer.

Globala extrempunkter kan delas in i två fall:

1) inga globala extrempunkter finns
2) åtminstone en global extrempunkt finns (i vilket fall den också är en lokal extrempunkt).

För att avgöra extrempunktens egenskaper behöver man föra ett resonemang kring funktionens egenskaper och /eller undersöka gränsvärden när funktionen går mot oändligheten eller ändpunkterna i definitionsmängden.

1) <u>Visa att inga globala extrempunkter existerar</u>
   Exempel: $f(x) = x^3 \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$ så inga globala extrempunkter finns.
   Om varje värde från $-\infty$ till $+\infty$ antas finns inget värde som är större / mindre än alla andra.

2) <u>Visa att en lokal extrempunkt också är en global extrempunkt</u>
   Exempel: $f(x) = -x^2$ har en lokal maximumpunkt i $x = 0$ och eftersom funktionen är strängt avtagande för alla reella x följer att $x = 0$ även måste vara en global maximumpunkt.

GRÄNSVÄRDEN

Direkt gränsövergång brukar ge upphov till gränsvärden som är odefinierade. Generellt försöker man undvika detta genom att göra om uttrycket till en produkt eller summa av standardgränsvärden och sedan använda vanliga räkneregler för gränsvärden. Oftast är det lättare att manipulera uttrycket rent algebraiskt först och därefter göra gränsövergång.

<u>Metoder:</u>

- Omskrivning eller variabelbyte för att få ”rätt” gräns.
- Faktorisering eller bryta ut den dominerande termen
- Förlängning med konjugat (oftast vid rotuttryck) eller bråk.

<u>Exempel:</u>

(Tenta 2015-04-08 uppgift 3) Undersök $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1-3x)}$.

Beskrivning	**Uträkning**
Dela upp faktorer. Förläng med bråk.	$\frac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1-3x)} = \left(e^{\sin 2x}-1\right)\cdot\frac{1}{\ln(1-3x)} = $ $= \left(e^{\sin 2x}-1\right)\cdot\frac{\sin 2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\ln(1-3x)}\cdot\frac{-3x}{-3x}$.
Flytta om termer för tydlighetens skull.	$\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{-3x}{\ln(1-3x)}\cdot\frac{\sin 2x}{-3x}$.
$\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}$ är en variant av $\frac{e^t-1}{t}\to 1$, då $t\to 0$.	$\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\to 1$, då $x\to 0$.
$\frac{-3x}{\ln(1-3x)}$ är en inverterad variant av $\frac{\ln(1+t)}{t}\to$ 1, då $t\to 0$.	$\frac{-3x}{\ln(1-3x)} = \frac{1}{\frac{\ln(1-3x)}{-3x}} \to \frac{1}{1} = 1$ då $x\to 0$.
Notera att $\frac{\sin 2x}{-3x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}$ och $\frac{\sin 2x}{2x}\to 1$ då $x\to 0$.	$\frac{\sin 2x}{-3x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\to -\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{2}{3}$ då $x\to$ 0.
Delresultaten ger tillsammans svaret:	$\frac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1-3x)}\to 1\cdot 1\cdot -\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{2}{3}$ då $x\to 0$.

(Tenta 2014-03-18 uppgift 2) Undersök $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4x^2-\pi^2}$.

Beskrivning	**Uträkning**
Notera att nämnaren är på formen $(a^2 - b^2)$, som ju är lika med $(a-b)(a+b)$.	$\frac{\cos x}{4x^2-\pi^2} = \frac{\cos x}{(2x-\pi)(2x+\pi)}$.
Bryt ut en faktor 4 från nämnaren. Då fås $(x+\frac{\pi}{2})$ respektive $(x-\frac{\pi}{2})$, vilket påminner om $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ respektive $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, dvs en fasförskjuten sinusfunktion. Detta används i omskrivningen nedan.	$\frac{\cos x}{(2x-\pi)(2x+\pi)} = \frac{\cos x}{4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$.
$x\to\frac{\pi}{2}$ är ”fel” gräns. Standardgränsvärden berör oftast fallet $x\to 0$. Sätt därför $t = x-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{2} = t+\pi$. t $\to 0$ då $x\to\frac{\pi}{2}$, vilket är ”rätt” gräns.	$\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{(t)(t+\pi)}$.
Omskrivning m h a $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$.	$\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t(t+\pi)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin t}{t(t+\pi)}$.
Uppdelning av faktorer och användning av standardgränsvärdet $\frac{\sin t}{t}\to 1$ då $t\to 0$.	$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin t}{t(t+\pi)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{t+\pi}\to$ $\to -\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{\pi} = -\frac{1}{4}\pi$, då $t\to 0$.
Svar ska alltid ges i den ursprungliga variabeln om inte annat anges.	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{4x^2-\pi^2} = -\frac{1}{4}\pi$.

(Tenta 2014-01-18 uppgift 2) Undersök $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2^x+x^{10})}{e^{1+\ln x}}$.

Beskrivning	Uträkning
$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$	$\frac{\ln(2^x+x^{10})}{e^{1+\ln x}} = \frac{\ln(2^x+x^{10})}{e^1 \cdot e^{\ln x}}$
$x \to \infty \implies x > 0$. $e^{\ln x} = x$, för $x > 0$.	$\frac{\ln(2^x+x^{10})}{e^1 \cdot e^{\ln x}} = \frac{\ln(2^x+x^{10})}{e \cdot x}$
Bryt ut den dominerande termen 2^x.	$\frac{\ln(2^x+x^{10})}{e \cdot x} = \frac{\ln\left(2^x\left(1+\frac{x^{10}}{2^x}\right)\right)}{e \cdot x}$
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	$\frac{\ln\left(2^x\left(1+\frac{x^{10}}{2^x}\right)\right)}{e \cdot x} = \frac{\ln 2^x + \ln\left(1+\frac{x^{10}}{2^x}\right)}{e \cdot x}$
Separera till två olika bråk.	$\frac{\ln 2^x + \ln\left(1+\frac{x^{10}}{2^x}\right)}{e \cdot x} = \frac{\ln 2^x}{e \cdot x} + \frac{\ln\left(1+\frac{x^{10}}{2^x}\right)}{e \cdot x}$
$\ln a^b = b \cdot \ln a$	$\frac{\ln 2^x}{e \cdot x} = \frac{x \cdot \ln 2}{e \cdot x} = \frac{\ln 2}{e}$
$\frac{x^a}{a^x} \to 0$ då $x \to \infty$, för $a > 1$.	$\frac{\ln\left(1+\frac{x^{10}}{2^x}\right)}{e \cdot x} = \ln\left(1+\frac{x^{10}}{2^x}\right) \cdot \frac{1}{e \cdot x} \to$ $\to \ln(1+0) \cdot 0 \to 0$, då $x \to \infty$.
Delresultaten ger tillsammans svaret:	$\frac{\ln(2^x+x^{10})}{e^{1+\ln x}} \to \frac{\ln 2}{e} + 0 = \frac{\ln 2}{e}$, då $x \to \infty$.

PRIMITIVA FUNKTIONER

I allmänhet försöker man skriva om den integrand man fått till en form som har en känd standardprimitiv. Oftast måste flera olika metoder kombineras, t.ex. omskrivning + variabelbyte eller kvadratkomplettering + variabelbyte + partiell integration.

Trigonometriska uttryck

Metoder:

- Omskrivning med hjälp av trigonometriska identiter
- Omskrivning med hjälp av Eulers formler
- Variabelbyte med hjälp av lämplig innerderivata

Exempel:

(Tenta 2015-04-08 uppgift 2) Beräkna $\int \cos^3 x \; dx$.

Beskrivning	**Uträkning**
Upprepad partiell integration blir jobbigt. Skriv därför om m h a trigonometriska ettan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.	$\int \cos^3 x \, dx = \int (\cos^2 x) \cdot (\cos x) \, dx = $ $= \int (1 - \sin^2 x) \cdot (\cos x) \, dx$
Innerderivata hittad. $(\sin x)' = (\cos x)$. Förbered för variabelbyte.	$\mathrm{t} = \sin x \;\Rightarrow dt = \cos x \, dx$
Genomför variabelbyte.	$\int (1 - \sin^2 x) \cdot (\cos x) dx = \int (1 - t^2) \, dt$
Beräkna primitiv funktion i variabeln t.	$\int (1 - t^2) \, dt = t - \frac{t^3}{3} + C$
Byt tillbaka till variabeln x.	$t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$
Svar:	$\int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Polynom · polynom eller polynom · elementär funktion

Metoder:

- Variabelbyte med hjälp av lämplig innerderivata
- Faktorisering + partialbråksuppdelning
- Partiell integration (+ ”skjuta in en 1:a framför” vid behov)

Exempel:

(Tenta 2015-04-08 uppgift 2) Beräkna $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Beskrivning	**Uträkning**
x^2 är nästan derivatan av x^3, vilket antyder att variabelbyte kan vara rätt väg.	Sätt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}dt = x\,dx$. OBS: $t \geq 0$.
Skriv om integranden och förbered för variabelbyte.	$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^2 e^{x^2} \cdot x\,dx$
Genomför variabelbyte.	$\int x^2 e^{x^2} \cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int te^t\,dt$
Partiell integration i variabeln t.	$\frac{1}{2}\int te^t\,dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t\,dt\right) =$ $= \frac{1}{2}(te^t - e^t) = \frac{1}{2}e^t(t-1) + C$
Byt tillbaka till variabeln x.	$\frac{1}{2}e^t(t-1) + C = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$
Svar:	$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$

Funktioner eller uttryck med polynom inuti

Metoder:

- Variabelbyte (”ersätt den jobbiga delen med en ny variabel”)
- Faktorisering + partialbråksuppdelning
- Förlängning med konjugat
- Kvadratkomplettering + variabelbyte

Exempel:

(Tenta 2014-03-18 uppgift 3) Beräkna $\int \arctan\sqrt{x}\, dx$.

Beskrivning	**Uträkning**
Eftersom $\sqrt{x}$ är det som orsakar mest besvär kan det vara en bra idé att byta ut det.	Sätt $t=\sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\, dt = dx$. OBS: $x \geq 0 \Rightarrow t \geq 0$.
Genomför variabelbyte.	$\int \arctan(\sqrt{x})\, dx = \int \arctan(t)\, 2t\, dt.$
Partiell integration i variabeln t. Välj att hitta en primitiv till $2t$ eftersom det är enklare än att hitta en primitiv till $\arctan(t)$.	$\int \arctan(t)\, 2t\, dt =$ $= t^2\arctan(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$
Behandla den obestämda integralen separat. Använd uppdelning av bråk och beräkna en primitiv.	$\int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\, dt =$ $= \int 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt = t - \arctan(t) + C$
Sätt ihop de två obestämda integralerna	$t^2\arctan(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt =$ $= t^2\arctan(t) - t + \arctan(t) + C$
Byt tillbaka till variabeln x.	$t^2\arctan(t) - t + \arctan(t) + C =$ $= x\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C$
Förenkla och svara:	$\int \arctan\sqrt{x}\, dx =$ $= (x+1)\cdot\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$

GENERALISERADE INTEGRALER

En generell metod för att handskas med generaliserade integraler är att:

1. Undersöka de områden som ger upphov till problem i integralen.
    - Jobba runt dessa områden m h a uppdelning, omskrivning, faktorisering etc.
2. Hitta en primitiv funktion till integranden.
3. Omvandla den generaliserade integralen till ett gränsvärde.
    - Inför lämpliga ersättningsvariabler och ”räkna på som vanligt”
4. Göra gränsövergång och utvärdera resultatet.
5. Det sista steget ger också svar på frågan om huruvida integralen kan beräknas ö h t (konvergens / divergens) och vad svaret i så fall blir.

Exempel:

(Tenta 2013-03-12 uppgift 5) Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx$.

Beskrivning	**Uträkning**
Vilka områden/gränser ger problem?	Integralen är generaliserad i ändpunkten $x = 0$ pga. att integranden är obegränsad där.
Beräkna primitiv funktion först. Använd att $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)$ med $f(x) = \sin x$.	$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \ln x - \ln(\sin x) + C.$
$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.	$\ln x - \ln(\sin x) = \ln \frac{x}{\sin x}$.
Inför nu de relevanta gränserna. Omvandla till gränsvärde. Inför även en ersättningsvariabel R för $x \to 0^+$.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \ldots = \lim_{R\to 0^+} \left[\ln \frac{x}{\sin x}\right]_R^{\frac{\pi}{2}}$.
$\frac{R}{\sin R}$ då $R \to 0^+$ är en inverterad variant av $\frac{\sin t}{t} \to 1$, då $t \to 0$.	$\lim_{R\to 0^+} \left[\ln \frac{x}{\sin x}\right]_R^{\frac{\pi}{2}} =$ $= \lim_{R\to 0^+} \left[\ln \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} - \ln \frac{R}{\sin R}\right]$ $= \ln \frac{\pi}{2} - \ln 1 = \ln \frac{\pi}{2}$.

(Tenta 2013-06-03 uppgift 4) Beräkna $\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx$ och $\int_3^\infty \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx.$

Beskrivning	**Uträkning**
Vilka områden/gränser ger problem?	Integralerna är generaliserade i en respektive båda ändpunkter (obegränsat intervall då $x \to \infty$ och obegränsad integrand då $x = 3$).
Eftersom $(x-3)$ förekommer på två ställen är det en bra kandidat för variabelbyte.	Sätt $t = x - 3 \Rightarrow dt = dx$. OBS: Man kan utan större problem anta att $t > 0$. Se det som att man låter $t \to 0^+$.
Genomför variabelbyte.	$\int \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx = \int \frac{1}{t(1+\sqrt{t})}dt.$
Notera att $t = (\sqrt{t})^2$. Alltså är $\sqrt{t}$ en bra kandidat för variabelbyte.	Sätt $s = \sqrt{t} \Leftrightarrow s^2 = t \Rightarrow 2s\,ds = dt$. OBS: $t > 0 \Rightarrow s > 0$.
Genomför variabelbyte.	$\int \frac{1}{t(1+\sqrt{t})}dt = \int \frac{2s}{s^2(1+s)}ds = \int \frac{2}{s(1+s)}ds.$
Partialbråksuppdelning ger följande:	$\int \frac{2}{s(1+s)}ds = \int \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{1+s}ds = 2\int \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}ds =$ $= 2(\ln s - \ln(1+s)) + C.$
Använd att $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$. Utför uppdelning av bråk. Återgå till variabeln x.	$2(\ln s - \ln(1+s)) = 2\ln\frac{s}{1+s} =$ $= 2\ln\frac{1+s-1}{1+s} = 2\ln\left(1-\frac{1}{1+s}\right) =$ $= 2\ln\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{x-3}}\right).$
Inför de relevanta gränserna. Inför även en ersättningsvariabel R för ∞-gränsen.	$\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx = \ldots =$ $= \lim_{R\to\infty}\left[2\ln\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{x-3}}\right)\right]_4^R.$
Insättning och vanliga gränsvärdesräkningar ger följande:	$\lim_{R\to\infty} 2\left[\ln\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{R-3}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{1}}\right)\right] =$ $= 2\left(\ln 1 - \ln\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\ln 2 = \ln 4.$
Eftersom $\int_3^\infty f(x)\,dx$ är generaliserad i båda ändpunkter, dela upp integralen i två delar.	$\int_3^\infty \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx = \int_3^4 \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx$ $+ \int_4^\infty \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx.$
Inför en ersättningsvariabel S för ändpunkten $x = 3$. När $S \to 3^+$ går hela uttrycket mot oändligheten. Denna delintegral är alltså divergent. Det innebär att hela integralen är divergent.	$\int_3^4 \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx = \ldots =$ $= \lim_{S\to 3^+}\left[2\ln\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{x-3}}\right)\right]_S^4 =$ $= \ln 4 - 2\ln(0) \to \ln 4 + \infty \Rightarrow$ $\Rightarrow \int_3^\infty \frac{1}{(x-3)(1+\sqrt{x-3})}dx$ är divergent.

(Tenta 2015-01-14 uppgift 4) Beräkna den generaliserade integralen $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2-x)}$.

Beskrivning	**Uträkning**
Vilka områden/gränser ger problem?	Integralen är generaliserad i ena ändpunkten pga. obegränsat intervall ($x \to \infty$).
Beräkna primitiv funktion först. Faktorisera integrandens nämnare.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x^2-x)}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\,dx.$
Förbered ett variabelbyte inför partialbråksuppdelning.	Sätt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,dt = dx.$ OBS: $x \geq 2 \Rightarrow t \geq \sqrt{2}.$
Variabelbyte + uppdelning i faktorer.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\,dx =$ $= \int \frac{2t}{t}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2-1}\,dt =$ $= \int \frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt.$
Partialbråksuppdelning ger följande:	$\int \frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt =$ $= \int -\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\,dt =$ $= \ln(t-1) - \ln(t+1) + \frac{2}{t} + C.$
Använd att $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$.	$\ln(t-1) - \ln(t+1) + \frac{2}{t} =$ $= \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{2}{t}.$
Återgå till variabeln x.	$\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{2}{t} = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + \frac{2}{\sqrt{x}}.$
Inför nu de relevanta gränserna. Inför även en ersättningsvariabel R för ∞-gränsen.	$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2-x)} = \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2-x)} =$ $= \lim_{R\to\infty}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)+\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_2^R.$
Förkorta bort $\sqrt{R}$ i täljare och nämnare och gör gränsövergång. Förläng med konjugatet vid beräkning av $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.	$\lim_{R\to\infty}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)+\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_2^R =$ $= \lim_{R\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{R}}}{1+\frac{1}{\sqrt{R}}}\right)+\frac{2}{\sqrt{R}} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\right] =$ $= 0 + 0 - \ln(3-2\sqrt{2}) - \sqrt{2} =$ $= -\ln(3-2\sqrt{2}) - \sqrt{2}.$

FUNKTION = KONSTANT

Frågor av typen ”Antal lösningar för varje värde på den reella konstanten a”.

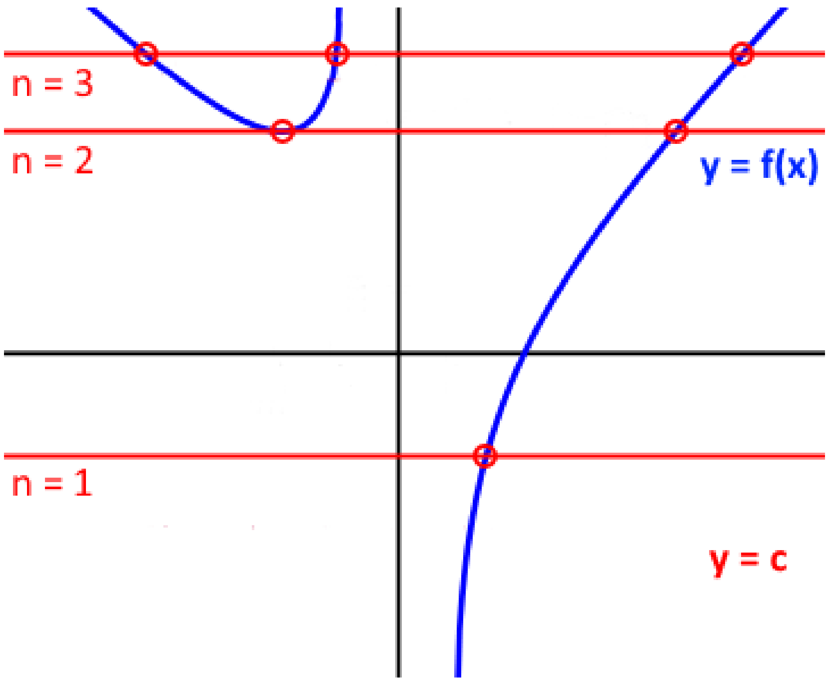
<u>Metod:</u>

1. Samla alla variabler i t.ex. VL och alla konstanter i HL.
2. Bilda en funktion $f(x)$ av VL
3. Utför en funktionsundersökning av $f(x)$
    - Görs i syfte att lista ut hur funktionens graf ser ut
4. Rita in den räta linjen $y = HL$ och undersök antalet lösningar (skärningspunkter med grafen)
5. I vissa fall är frågan omvänd, dvs hur många lösningar fås för ett godtyckligt HL? Dock skiljer sig inte själva tillvägagångssättet.

Tanken är att dela upp en ekvation i två delar: en funktion $f(x)$ och en konstant c. Den räta linjen $y = c$ motsvarar konstanten. (Antalet) skärningspunkter mellan $y = f(x)$ och $y = c$ motsvarar (antalet) lösningar till ekvationen $f(x) = c$. Ibland går det inte att se grafiskt exakt var de skär varandra men det går alltid att räkna ut exakta värden.

$$\underbrace{\boxed{\sqrt{x^2-1}}}_{f(x)} = \underbrace{\boxed{k}}_{c} + \underbrace{\boxed{4\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}}_{f(x)}$$

Exempel på uppdelning av ekvation i funktion $f(x)$ och konstant c.



Exempel på antal skärningspunkter mellan $y = f(x)$ och $y = c$ för olika värden på konstanten c. Ekvivalent med antalet lösningar till ekvationen $f(x) = c$ för olika värden på c.

Exempel:

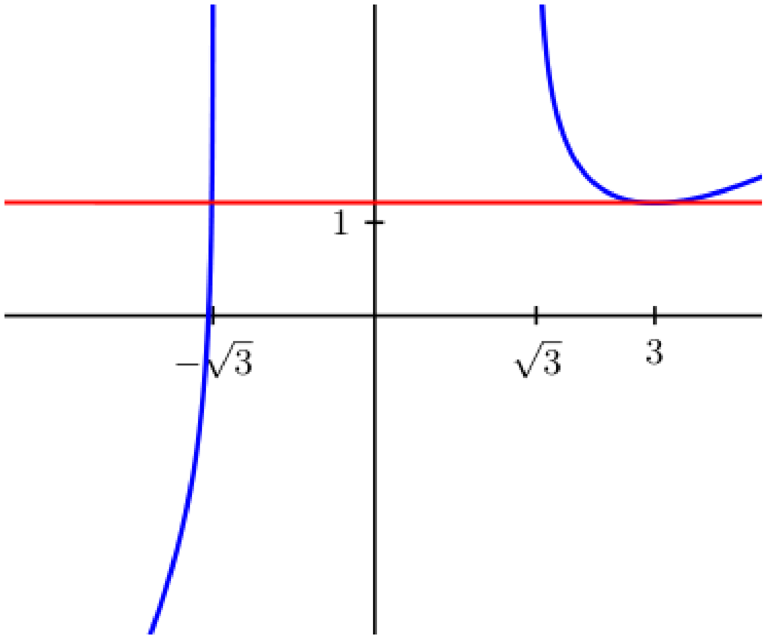
(Tenta 2014-06-09 uppgift 6) Bestäm alla tal $c > 0$ sådana att ekvationen $\frac{\ln\left(c(x^2-3)\right)}{x} = 1$ har exakt två olika lösningar.

<table>
<tr><th>Beskrivning</th><th>Uträkning</th></tr>
<tr><td>Undersök ekvationen.

Konstanten är ”inbakad” med variabeln. Förbered för att separera dessa.</td><td>$\frac{\ln\left(c(x^2-3)\right)}{x} = 1$ har ett uppenbart problem vid $x = 0$, alltså $x \neq 0$. $\ln(t)$ endast definierad för $t > 0$ och eftersom $c > 0$ så måste även $(x^2-3) > 0 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{3}$. Detta är striktare än kravet på $x \neq 0$, som därmed blir överflödigt.</td></tr>
<tr><td>Skriv om ekvationen. Lös ut konstanten och separera.</td><td>$\frac{\ln\left(c(x^2-3)\right)}{x} = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \ln c = x - \ln(x^2-3)$</td></tr>
<tr><td>Bilda funktion av HL.</td><td>$f(x) = x - \ln(x^2-3)$. OBS: $|x| > \sqrt{3}$.</td></tr>
<tr><td>Beräkna derivatan $f'(x)$ m h a kedjeregel och faktorisering.</td><td>$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x^2-3}$$</td></tr>
<tr><td>Skapa teckentabell.</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th></th><th>$-\sqrt{3}$</th><th></th><th>$\sqrt{3}$</th><th></th><th>3</th><th></th></tr>
<tr><td>$x-3$</td><td>$-$</td><td></td><td>irrelevant</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td>$-$</td><td></td><td>irrelevant</td><td></td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>x^2-3</td><td>$+$</td><td>0</td><td>irrelevant</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>ej def.</td><td>ej def.</td><td>ej def.</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>ej def.</td><td>ej def.</td><td>ej def.</td><td>$\searrow$</td><td>lok. min.</td><td>$\nearrow$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Undersök gränsvärden.

Misstänker att $x - 2\ln|x| \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$ eftersom ln-termen växer långsammare än x. Detta visas genom faktorisering och standardgränsvärdet $\frac{\ln t}{t} \to 0$ då $t \to \infty$.</td><td>$f(x) \to \infty$ då $x \to \sqrt{3}^{+}$
$f(x) \to \infty$ då $x \to -\sqrt{3}^{-}$
$f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$ ty:

$x - \ln(x^2-3) = x - \ln\left(x^2\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)\right) =$
$= x - 2\ln|x| - \ln\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$.
$x - 2\ln|x| = x \cdot \left(1 - 2\frac{\ln|x|}{x}\right) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$.
$\ln\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \to \ln 1 = 0$ då $x \to \pm\infty$.</td></tr>
</table>

Rita grafen till funktionen m h a informationen från funktionsundersökningen. Det finns två skärningspunkter mellan linjen $y = \ln c$ och $y = f(x)$, motsvarande två (olika) lösningar till $f(x) = \ln c$, endast om $\ln c = f(3)$.	
Sätt in det kända x-värdet i ursprungliga ekvationen för att lösa ut motsvarande värde på c.	$\ln c = x - \ln(x^2 - 3)$ och $x = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln c = 3 - \ln(6) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow c = e^{3-\ln(6)} = \frac{e^3}{e^{\ln(6)}} = \frac{e^3}{6}$.
Svar:	Ekvationen $\frac{\ln\left(c(x^2-3)\right)}{x} = 1$ har exakt två olika lösningar om $c = \frac{e^3}{6}$.