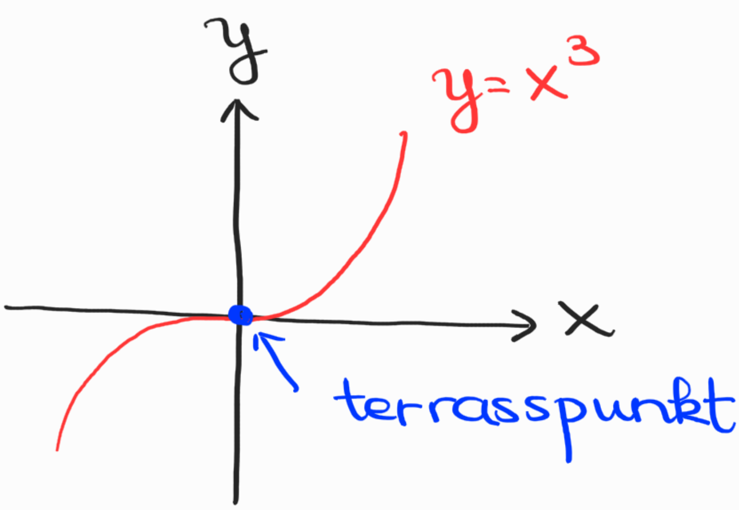
Anmärkning

Obs! Omvändningen gäller inte nödvändigtvis!

Om $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, är f strängt växande på I.

Om $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, är f strängt avtagande på I.

Ex. $f(x) = x^3$ är strängt växande på hela $\mathbb{R}$ trots att $f'(0) = 0$.



Definition

f sägs vara strängt växande på intervallet I om följande gäller:

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

för alla $a, b \in I$

Nästa tillämpning

Derivata och olikhet

2012.10.31 #5 Visa att #UU

$$\ln(1+x) \geq x - ax^2 \text{ för alla } x \geq 0.$$

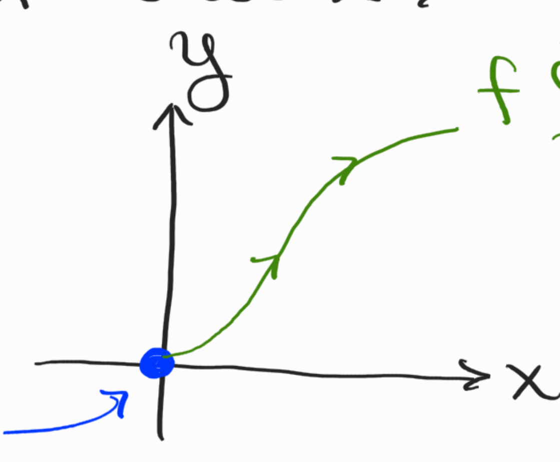
Här står $a \geq \frac{1}{2}$ för en konstant.

Strategi Bilda en hjälpfunktion:

$$f(x) = \ln(1+x) - (x - ax^2)$$
$$= \ln(1+x) - x + ax^2$$

Idé: Uppgiften är nu likvärdig med att visa att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$.

Kladd



$f(0) = 0$

f är växande på hela intervallet $x > 0$

$\Downarrow$

$f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$

Steg 1 $f(x) = \ln(1+x) - x + ax^2$

$$f(0) = \underbrace{\ln 1}_{=0} - 0 + 0 = 0$$

$a \geq \frac{1}{2}$

Steg 2 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + 2ax$

$$\geq \frac{1}{1+x} - 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} x$$

$$= \frac{1}{1+x} \underbrace{-1 + x}_{\text{konjugatregeln}}$$

$$= \frac{1 + (-1+x)(1+x)}{1+x}$$

$$= \frac{1 + x^2 - 1}{1+x}$$

$$= \frac{x^2}{1+x}$$

dvs. $f'(x) \geq \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ ty $x \geq 0$ (se lydelsen)

$\Rightarrow$ f är växande för alla $x \geq 0$

$\Rightarrow$ olikheten är härmed bevisad $\boxtimes$

Anmärkning

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \text{för alla } x > 0$$

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{för alla } x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

godtycklig konstant

2020.06.03 #5 Visa att #KTH

$$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) > 1 \quad \text{för alla } 0 < x < 1$$

Idé Kan bilda hjälpfunktionen

$$f(x) = \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) - 1$$

Jobbig med derivata $f'(x)$ dock...

Knep Gylla: logaritmlagarna

1. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ ‖ 2. $\ln(x^a) = a \cdot \ln x$