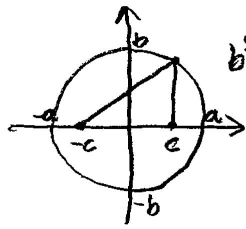
Envariabelanalys 2018-02-22 #18
Om kurvor, kap 8

Kägelsnitt (conics), 8.1

Ellipsen: alla punkter med summan 2a av avstånden till två punkter konstant.
brännpunkterna, på avstånd 2c (a>c)

Dess ekvation: (x,y) ligger på ellipsen omm



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Leftrightarrow$$

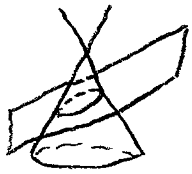
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \overset{\text{kvadrera}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

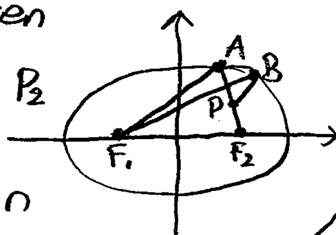
$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc \overset{\text{kvadrera}}{\Rightarrow} a^2x^2+\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2+\cancel{2a^2xc} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}x^2+a^2y^2=a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Varför "kägelsnitt

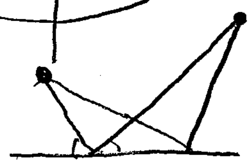


Ljus som sänds ut från ena brännpunkten och reflekteras i ellipsen går genom den andra brännpunkten



Fermats princip: Ljus tar vägen från P_1 till P_2 som tar stationär tid.

Vi visar att ljus från F_1 reflekterat i ellipsen går genom F_2.



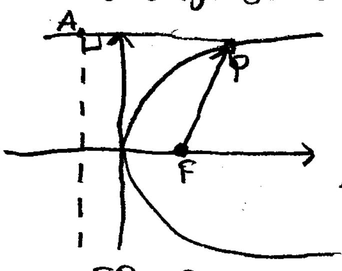
Om P inte en brännpunkt:

$$2a=\underbrace{F_1A+AF_2}_{=}=F_1A+AP+PF_2$$

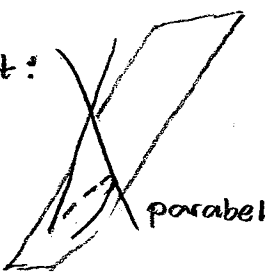
$$F_1B+BF_2<F_1B+BP+PF_2 \quad \text{så} \quad F_1A+AP<F_1B+BP$$

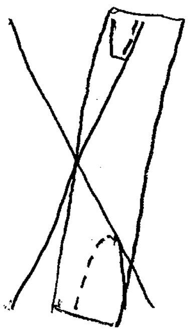
ljus från F_1 till P är på väg till F_2.

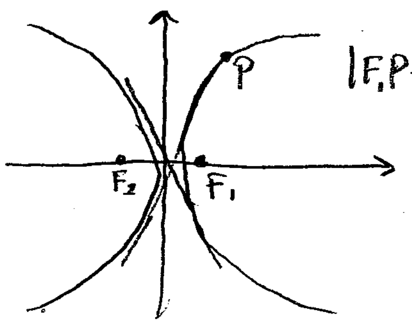
Andra kägelsnitt:



FP=AP







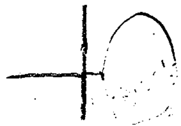
$|F_1P-F_2P|$ konst

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ex. Vilken kurva beskrivs av ekv.

$$3x^2+2y^2-12x+4y+8=0$$ ("enkelt" utan xy-term, vrid annars koordinatsystemet)

$$3(x^2-4x)+2(y^2+2y)+8=0$$
$$3(x-2)^2-12+2(y+1)^2-2+8=0$$

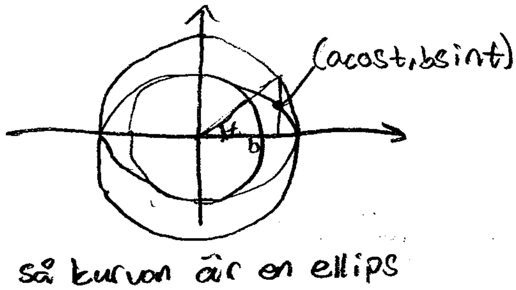


$$\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$$ – en ellips med medelpunkt i $(2,-1)$, halva lillaxeln $\sqrt{2}$ (b)
halva storaxeln $\sqrt{3}$ (a)

Parameterkurvor, 8.2 -

$(x(t), y(t))$, t i något intervall I

givna kontinuerliga funktioner



ex $\begin{cases} x(t)=5\cos(t) \\ y(t)=3\sin(t) \end{cases}$ $0\leq t\leq 2\pi$

ger $\underbrace{\left(\frac{x(t)}{5}\right)^2}_{\cos^2 t}+\underbrace{\left(\frac{y(t)}{3}\right)^2}_{\sin^2 t}=1$

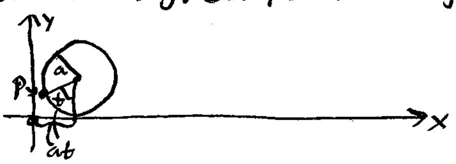
så kurvan är en ellips (med det intervallet)

Ex. Linjer från algebran

Ex. en funktionsgraf $(t, f(t))$, $a\leq t\leq b$

Ex (cykloiden) En cirkel rullar utan att glida på en linje

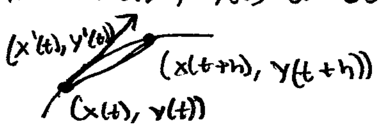
Vilken kurva beskrivs av en punkt på cirkeln?



P:s koordinater enl. fig $\begin{cases} x(t)=at-a\sin t \\ y(t)=a-a\cos t \end{cases}$

cykloiden som parameterkurva

Om $x(t)$, $y(t)$ är deriverbara har kurvan en tangentvektor $(x'(t), y'(t))$ om $\neq(0,0)$

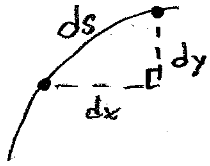


sekant: $\frac{(x(t+h)-x(t),\ y(t+h)-y(t))}{h}$

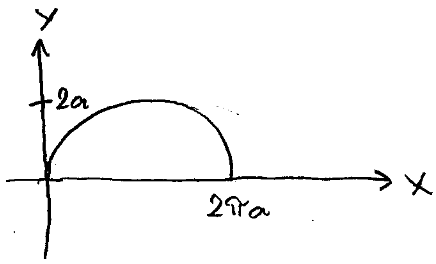
ex cykloidens tangentvektor: $(x'(t), y'(t))=(a(1-\cos t), a\sin t)$ då $t\neq n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z}$

Båglängd för en parameterkurva, 8.4

$$(ds)^2 = \underbrace{(dx)^2+(dy)^2}_{=(x'(t)^2+y'(t)^2)(dt)^2} \quad \text{(Pythagoras)}$$



båglängden $\quad s = \int ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$



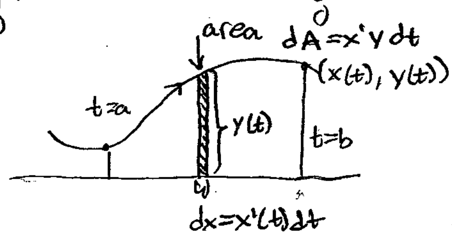
ex cykloiden

$$x'^2+y'^2 = a^2\left((1-\cos t)^2+\sin^2 t\right) = a^2(2-2\cos t) =$$
$$= 2a^2(1-\cos t) = 4a^2\sin^2\tfrac{t}{2}$$

så båglängden av en period $\quad s = \int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\tfrac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\tfrac{t}{2}\right|dt = 2a\left[-2\cos\tfrac{t}{2}\right]_0^{2\pi} =$

$= 4a(1-(-1)) = 8a$ l.e.

Arean under en parameterkurva



$$\int_a^b x'(t)\,y(t)\,dt$$

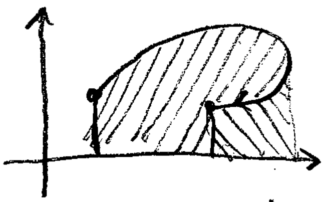
$y=f(x)$

$(t, f(x))$

arean under en period av cykloiden:

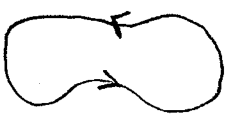
$$A = \int_0^{2\pi}\underbrace{a^2(1-\cos t)^2}_{x'y}\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\overset{1+\cos 2t}{\widetilde{\cos^2 t}})\,dt = \ldots = a^2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot 2\pi + 0 = 3\pi a^2$$

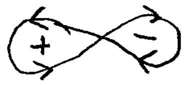
Obs om



är $\int x'y\,dt$

För en sluten kurva i positiv led: $-\int_a^b x'y\,dt = \int_a^b xy'\,dt = \underbrace{\tfrac{1}{2}\int_a^b (xy'-x'y)\,dt}$





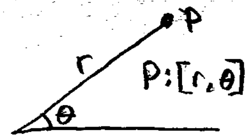
ex arean av ellipsen

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-x'y)\,dt$$
$$= \tfrac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\underbrace{(\cos^2 t-(-\sin^2 t))}_{1}\,dt = \pi ab$$

Polära koordinater, 8.5

alternativt sätt att ange punkter i planet



r "normalt" $\geqslant 0$ (ibland: $[-r,\theta] = [r, \theta+\pi]$)

θ inte entydig, $\theta + n\cdot 2\pi$ ger samma punkt

samband

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (\operatorname{sgn}\sin\theta = \operatorname{sgn} x) \end{array}$$

ex. (kardioiden) $r = 2a(1-\cos\theta)$

en cirkel, radie a, rullar utan att glida på en annan cirkel.
(samma radie)