Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 19: Talföljder och serier

Innehåll. Talföljder och serier. Konvergens och divergens.

Introduktion. Talföljder är oändliga följder av tal, t ex

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \quad \text{och} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$$

Den första är divergent men den andra är konvergent mot 0.

Serier är oändliga summor av tal, t ex

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots \quad \text{och } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots$$

Den första serien är divergent men den andra är en geometrisk serie som konvergerar mot 2. Vi ska definiera vad vi menar med konvergens i dessa sammanhang och lära oss några kriterier som kan hjälpa oss att avgöra konvergens av serier.

Talföljder. En talföljd är en oändlig följd av tal i en viss ordning, $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. Vi säger att talföljden är konvergent med gränsvärde A och skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ om för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal N så att $|a_n - A| < \epsilon$ för all $n > N$. Med andra ord gäller att $a_n \to A$ om vi kan få elementen i talföljden hur nära talet A som helst bara genom att gå tillräckligt långt fram i följden.

Serier. En serie är en oändlig summa av tal i en viss ordning, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots$. Vi säger att serien är konvergent med summa S och skriver $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ om talföljden av partialsummor $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ är konvergent.

Geometriska serier. En geometrisk serie $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ är konvergent med summa $\frac{1}{1-a}$ om $|a| < 1$ och divergent annars.

Bevis. Det gäller att $(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)(1 - a) = 1 - a^{n+1}$. Det betyder att den geometriska serien har partialsummor

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

och påståendet följer från detta.

Sats. Om inte termerna $a_k \to 0$ när $k \to \infty$ så kan inte serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara konvergent.

Bevis. Uppenbart, ty om det finns termer a_k sådana att $|a_k| \geq c > 0$ för hur stora index k som helst så kan inte följden av partialsummorna stabiliseras och ha gränsvärde.

Jämförelsekriterium för positiva serier. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla heltal $k \geq c$ för något positivt c, så gäller att

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

Bevis. Supremumaxiomet och lite till. Delen (b) är enklast: eftersom alla talen a_k är positiva så kan summan av dem bara divergera genom att gå mot oändligheten och eftersom alla b_k är större än motsvarande a_k så så måste summan av b_k också gå mot oändligheten om summan av a_k gör det. Delen (a) då? Jo här får man direkt att summa a_k har en följd av partialsummor som är uppåt begränsad av summa b_k som ju antas ändlig. Men en uppåt begränsad växande följd av tal måste konvergera mot sitt supremum, som ju finns enligt supremumegenskapen.

Cauchys integralkriterium. Om f är kontinuerlig, positiv och avtagande på intervallet $x \geq 1$, så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad \text{och} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

antingen båda är konvergenta eller båda divergenta. Dvs om den ena är konvergent så måste den andra vara det också och om den ena är divergent så måste den andra vara det också.

Bevis. Rita i ett koordinatsystem grafen $y = f(x)$ med start i punkten där $x = 1$ och också rektanglar med sida 1 och höjd $f(k)$ för $k = 1, 2, \ldots$. Man ser att rektanglarnas sammanlagda area är större än arean under kurvan. Det ger att om integralen $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är divergent så måste även serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ vara det. Och om serien skulle vara konvergent så följer att integralen också är det, med liknande argumentation med hjälp av supremumaxiomet som i förra beviset. Om vi nu istället flyttar alla rektanglar ett steg åt vänster, så att dessa börjar vid den punkt då $x = 0$ (men $y = f(x)$ fortfarande börjar vid $x = 1$) så ser vi att förutom den första rektangeln, som blir över, så är rektanglarnas sammanlagda area mindre än arean under kurvan. Eftersom arean av den första rektangeln som blev över är ett ändligt tal så kan den inte göra någon skillnad mellan konvergens och divergens, så om serien är divergent så följer att integralen också är det. Och vidare följer det att om integralen är konvergent så måste även serien vara det, enligt argumentet med supremum.

Exempel. Eftersom $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ är divergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ också divergent.

Exempel. Eftersom $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ också konvergent. Observera dock att även om integralen och serien båda är konvergenta så har de inte samma värde.

Integralen kan beräknas till 1. Av Cauchys kriterium och resonemanget i beviset följer att serien är konvergent och dess summa är någonstans mellan 0 och 2 (i själva verket kan man visa att seriens summa är $\pi^2/6$).

Exempel. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-\ln k}{k^2\sqrt{k}+2}$ är konvergent. Detta kan vi inse på följande sätt: för alla $k \geq 2$ gäller att

$$\frac{k-\ln k}{k^2\sqrt{k}+2} < \frac{k}{k^2\sqrt{k}+2} < \frac{k}{k^2\sqrt{k}} = \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

så enligt jämförelsekriteriet för positiva serier så är vår serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-\ln k}{k^2\sqrt{k}+2}$ konvergent om serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ är konvergent. Men den senare serien är konvergent enligt Cauchys kriterium eftersom $f(x) = 1/x\sqrt{x}$ är positiv, kontinuerlig och avtagande på $x \geq 2$ och

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_2^{\infty} x^{-3/2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} x^{-3/2}\,dx = \lim_{R\to\infty} [-2x^{-1/2}]_2^R = \sqrt{2},$$

dvs integralen är konvergent.

INLEDANDE ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1. Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ är konvergent om och endast om $p > 1$.

Uppgift 2. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ är konvergent eller divergent.

Uppgift 3. Hur visar man enklast att $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ är divergent?

Uppgift 4. Beräkna summan av den geometriska serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}$.

Uppgift 5. Avgör om $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{3n-\ln n}{e^n+n}$ är konvergent eller divergent.

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. Använd Cauchys kriterium!

2. Divergent

3. Termerna $\cos \frac{1}{n}$ går mot 1 inte 0 när $n \to \infty$

4. $1/3$ (obs: för att använda formeln för geometrisk serie krävs att summan börjar med index 0, så man behöver bryta ut en lämplig faktor här innan kör på med formeln)

5. Konvergent! Uppskatta och använd Cauchys kriterium som i sista exemplet.