SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 10

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Kan ni derivera?

Derivera dessa funktioner! Var existerar derivatan? Var är derivatan noll? Positiv? Negativ?

$f(x) = x - \arcsin x.$ Bestäm V_f.

$h(x) = \arctan 2x - \ln \sqrt{1 + 4x^2}.$ Skissa $y = h(x)$.

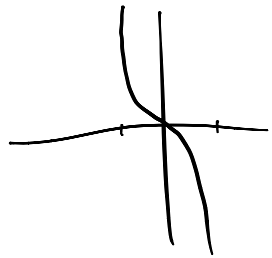
$k(x) = \ln(\cos x) + x \tan x - \dfrac{x^2}{2}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$
Visa att $k(x) \geq 0$

Derivataundersökning

Låt $f(x) = x - \arcsin x$. Bestäm värdemängden till f

f def. & kont på $[-1,1]$, slutet & begr. $\Rightarrow$ största & minsta värde finns. Antas i krit p. sing. p el. ändp. Vi deriverar:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq 0, \quad x \in (-1,1). \quad (= 0 \text{ bara i en punkt})$$



$\Rightarrow$ f strängt avtagande på $[-1,1]$

max: $f(-1) = \pi/2 - 1$, min: $f(1) = 1 - \pi/2$

$$V_f = [1 - \pi/2, \pi/2 - 1]$$

Derivataundersökning

Låt $h(x) = \arctan 2x - \ln\sqrt{1+4x^2}$. Skissa grafen $y = h(x)$.

h är def. kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+4x^2}}\cdot 8x$$

$$= \frac{2}{1+4x^2} - \frac{4x}{1+4x^2} = \frac{2-4x}{1+4x^2}, \text{ alla } x$$

$f'(x) = 0 \iff x = 1/2$

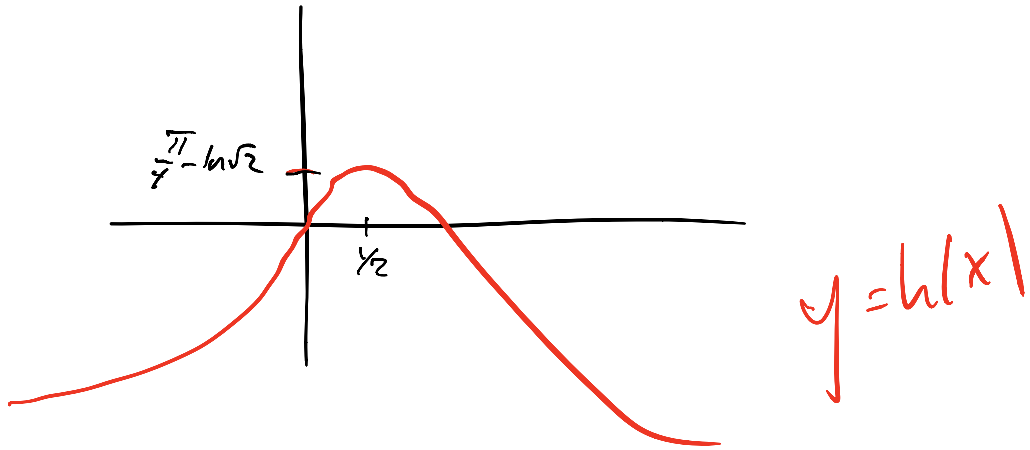
x		$1/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	str. växande	max	str. avt.

max: $f(1/2) = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$$

Derivataundersökning

Låt $h(x) = \arctan 2x - \ln\sqrt{1+4x^2}$. Skissa grafen $y = h(x)$.



Derivataundersökning

Låt $k(x) = \ln(\cos x) + x\tan x - \dfrac{x^2}{2}$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Visa att $k(x) \geq 0$.

f kont på $-\pi/2 < x < \pi/2$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) + 1\cdot\tan x + x\left(1+\tan^2 x\right) - x \,, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

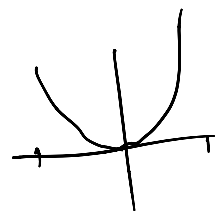
$$= x\tan^2 x \,. \qquad f'(x) = 0 \iff x = 0$$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

minsta värdet $\cancel{f}k(0) = 0$

följer att

$k(x) \geq 0$.



Veckans arbete: modul 4

Veckans tema: tillämpningar av derivata. Mycket kan vi. Men nyheter är: **l'Hopitals regel**, **Asymptoter**, **Konvexitet/ Konkavitet** och det allra viktigaste: **Taylors formel.**

Vi fortsätter också med **derivata som förändringstakt** och **linjär approximation.** Dessutom löser vi **max/min-problem.** och **ritar funktionskurvor** med hjälp av derivataundersökningar

Svarar på massor av frågor

Nyss gjorde vi derivataundersökningar till några funktioner. Med hjälp av sådana kan vi svara på massor av frågor:

- Var är funktionen växande/avtagande?
- Vad är funktionens största resp minsta värde?
- Vad är funktionens värdemängd?
- Är det sant att $f(x) \leq 1$ för alla x?
- Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 1/10$?
- Är funktionen inverterbar?
- Osv

L'Hopitals regel

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(För en exakt och stark formulering se sats 3 i kap 4.3 i boken)

sats 4 : $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

L'Hopitals regel

1. Beräkna gränsvärdena $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$ och $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x}$ med hjälp av l'Hôpital.

2. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ genom upprepad användning av l'Hôpital.

L'Hopitals regel

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}} = \left[\frac{0}{0} \right] \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x} = \left[\frac{0}{0} \right] \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{-1} = -1$$

L'Hopitals regel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -1/2$$

L'Hopitals regel

Varning! [0/0] är viktigt! Exempel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x+1} = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$

L'Hopitals regel

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.$$

Andraderivatans betydelse

Konvexitet. Om man tar två punkter på funktionsgrafen och drar en linje genom dem – ligger då linjen alltid över eller under grafen, oavsett vilka punkter man väljer? Över: konvex. Under: konkav. Obs, boken: concave up och concave down.

Sats.

Om $f''(x) > 0$ för alla x i ett intervall I så är f konvex i I.

Om $f''(x) < 0$ för alla x i ett intervall I så är f konkav i I.

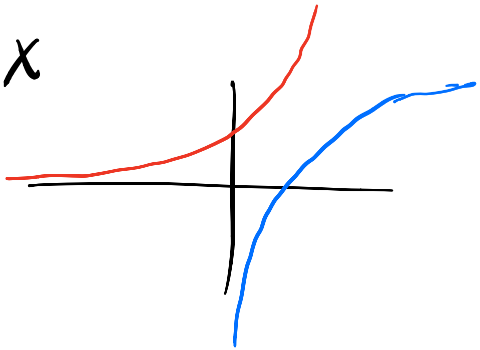
Exempel: Undersök om $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$ och $h(x) = x^2$ är konvexa eller konkava.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$ alla x $\Rightarrow$ f konvex.

$g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ alla $x > 0$ $\Rightarrow$ g konkav

$h(x) = x^2$, $h'(x) = 2x$, $h''(x) = 2 > 0$ alla x

$\Rightarrow$ h konvex.



Exempel: I vilka punkter byter $f(x) = e^{-x^2}$ mellan att vara konvex och att vara konkav? (Kallas inflexionspunkter)

$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$, $f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$ alla x

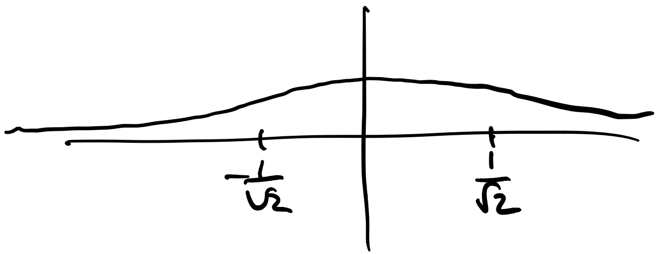
$f''(x) = 0$ när $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvex

$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvex

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ konkav

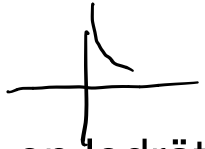
infl. p. $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$



Asymptoter

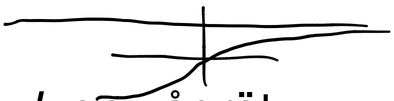
En **asymptot** är en linje som funktionsgrafen kommer hur nära som helst. Det finns tre fall:

$x=0$



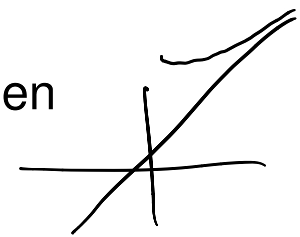
1. Lodrät. Om $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$ så är linjen $x = a$ en lodrät asymptot.

$y=\frac{\pi}{2}$



2. Vågrät. Om $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ så är linjen $y = L$ en vågrät asymptot.

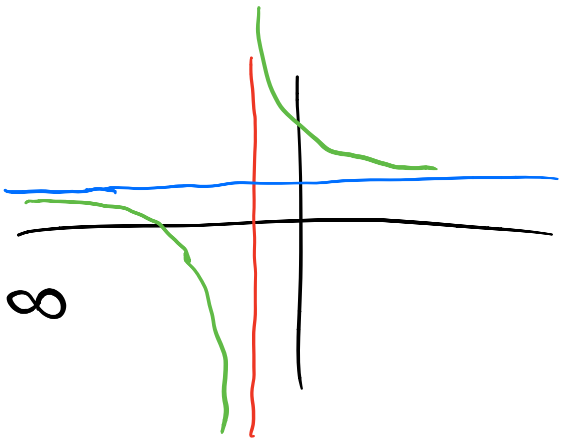
3. Sned. Om $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ så är linjen $y = ax + b$ en sned asymptot.



Asymptoter

Exempel: Låt $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Finn alla asymptoter till $y = f(x)$.

$x = -1$ lodrät asymptot



$y = 1$ vågrät asymptot i $\pm\infty$

ty $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

Exempel: Låt $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$. Finn alla asymptoter till $y = f(x)$.

$x = 2$ lodrät asymptot, ty $f(x)$ obegränsat när $x \to 2$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ Inga vågräta asympt.

Sned? $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{x^2-4}{x-2} + \dfrac{4}{x-2} = x+2 + \dfrac{4}{x-2}$

$y = x+2$ sned asymptot i $\pm\infty$

Asymptoter

$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ sned asymptot $y = ax + b$ i ∞

om $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-2)x} = 1$

och $b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - 1 \cdot x \right) = \ldots = 2$

samma i $-\infty$

Asymptoter

Exempel: Låt $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Finn alla lokala extrempunkter och alla asymptoter och skissa $y = f(x)$.

Asymptoter

$$f(x) - ax - b \to 0 \quad \text{när } x \to \infty$$

$$\frac{f(x) - ax - b}{x} \to 0 \quad \text{när } x \to \infty$$

$$\underbrace{\frac{f(x)}{x} - a}_{0} - \frac{b}{x} \to 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - ax \right) = b$$