Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

9. Linjära diffekvationer med konstanta koefficienter

Innehåll. Vi ska se hur man löser linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Introduktion. Differentialekvationer är ett stort område i matematiken. Vi ska bara titta på en viss typ av diffekvationer, nämligen linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Det är en viktig klass av diffekvationer som har många tillämpningar och som inte är alltför komplicerade att lösa. Första ordningens sådan ekvation kan skrivas $y'(t)+ky(t) = f(t)$ där k är något känt tal och $f(t)$ är någon känd funktion. Andra ordningens sådan ekvation kan skrivas $y''(t)+ay'(t)+by(t) = f(t)$ där a, b är kända tal och $f(t)$ en känd funktion. Lösningarna kan i båda fall skrivas $y(t) = y_h(t)+y_p(t)$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation (där högerledet är 0) och y_p är någon partikulärlösning till den givna ekvationen. Här är y_h lätt att skriva upp med hjälp av lösningarna till den karaktäristiska ekvationen och y_p kan ofta hittas genom ansättning, dvs att man gissar hur en lösning skulle kunna se ut.

1. Första ordningen

Homogena fallet. En homogen linjär differentialekvation av 1:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

för någon konstant k. Vi kan lösa den genom att undersöka den karaktäristiska ekvationen $r + k = 0$ som har lösning $r = -k$. Lösningen till differentialekvationen blir

$$y(t) = Ce^{-kt}, \text{ där } C \text{ är en godtycklig konstant.}$$

Bevis. Det är lätt att kontrollera att e^{-kt} är en lösning till ekvationen. Frågan är om det kan finnas andra lösningar. Antag att $y(t)$ är en lösning, vilken som helst, dvs y uppfyller $y'(t) + ky(t) = 0$. I så fall gäller att

$$\frac{d}{dt}\frac{y(t)}{e^{-kt}} = \frac{y'(t)e^{-kt} - y(t)e^{-kt}(-k)}{(e^{-kt})^2} = \frac{y'(t) + ky(t)}{e^{-kt}} = 0$$

Av detta följer att

$$\frac{y(t)}{e^{-kt}} = C$$

för någon konstant C. Med andra ord är

$$y(t) = Ce^{-kt}, \quad C \text{ godtycklig konstant,}$$

alla lösningar till diffekvationen.

Inhomogena fallet. En inhomogen första ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = f(t)$$

där k är en konstant och f någon funktion av t. Om y_p är någon lösning till denna ekvation och y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'(t) + ky(t) = 0$ så gäller att allmänna lösningen till

$$y'(t) + ky(t) = f(t)$$

har formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Bevis. Anta att y_p är en partikulärlösning, dvs en lösning till $y'(t) + ky(t) = f(t)$. Det är lätt att se genom att derivera och sätt in i ekvationen att $y_h + y_p$ kommer att vara en lösning oavsett hur konstanten i y_h väljs. Men kan det finnas andra lösningar? Om y är en lösning, vilken som helst, så gäller att

$$(y - y_p)' + k(y - y_p) = f(t) - f(t) = 0$$

Med andra ord är $y - y_p$ en lösning till den homogena ekvationen. Det följer av resonemanget ovan om det homogena fallet att

$$y(t) - y_p(t) = Ce^{-kt}, \text{ för någon konstant } C$$

eller med andra ord att

$$y = y_h + y_p.$$

Alla lösningar fås alltså på detta sätt.

Exempel. Lös differentialkevationen $y'(t) + 3y(t) = t$ och bestäm den lösning som också uppfyller initialvillkoret $y(0) = 1$.

Lösning. Vi löser först den homogena ekvationen $y'(t) + 3y(t) = 0$. Den har karaktäristisk ekvation $r + 3 = 0$ med lösning $r = -3$ så lösningen är $y_h(t) = Ce^{-3t}$, C godtycklig konstant. Sedan försöker vi bestämma en partikulärlösning. Eftersom högerledet är ett förstagradspolynom ansätter vi $y_p(t) = At+B$ och försöker bestämma talen A och B så att det blir en lösning. Vi ser att $y_p'(t) = A$ så $y_p'(t) + 3y_p(t) = A + 3(At + B)$ och detta är lika med t precis när $A = 1/3$ och $B = -1/9$. Vi får alltså en partikulärlösning $y_p(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$. Nu får vi lösningen till den ursprungliga diffekvationen genom addera dessa: $y(t) = y_h(t)+y_p(t) = Ce^{-3t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$, där C är en godtycklig konstant. Om vi ska få $y(0) = 1$ ser vi att vi ska välja $C = \frac{1}{9}$. Så funktionen $y(t) = \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$ både löser differentialekvaitonen och uppfyller initialvillkoret.

2. ANDRA ORDNINGEN

Homogena fallet. En homogen linjär differentialekvation av 2:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

för några konstanter a, b. Vi kan lösa den genom att undersöka den karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ som har lösning r_1 och r_2. Lösningen till differentialekvationen får delas upp i tre fall:

Fall 1. Om $r_1 \neq r_2$ och dessa är reella tal, så har differentialekvationen allmän lösning

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Fall 2. Om $r_1 = r_2$, så har differentialekvationen allmän lösning

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Bte^{r_2 t}, \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Fall 3. Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ där α och β är reella tal, så har differentialekvationen allmän lösning

$$y(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Bevis. Det är lätt att kontrollera att funktionerna som anges ovan verkligen löser differentialekvationen i de olika fallen. Vi ska nu se att de ger alla lösningar. Vi vet att $e^{-r_1 t}$ är en lösning till ekvationen. Antag att y(t) är en annan lösning, vilken som helst, dvs att $y'' + ay' + by = 0$. Eftersom $e^{r_1 t}$ är skilt från noll så kan vi anta att den andra lösningen y kan skrivas $y(t) = v(t)e^{r_1 t}$, för någon funktion v. Om vi deriverar detta två gånger så ser vi (efter en del räknande och förenklande) att

$$y'' + ay' + by = 0 \Longleftrightarrow v''(t) + (2r_1 + a)v'(t) = 0$$

vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$v''(t) + (r_1 - r_2)v'(t) = 0$$

på grund av sambandet mellan rötter och koefficienter i ett polynom (se wikipedia).

Här ser vi att om $r_1 = r_2$ så måste $v''(t) = 0$ vilket ger att $v(t) = A+Bt$, för godtyckliga konstanter A och B. Det betyder att $y(t) = (A + Bt)e^{r_1 t}$. Detta bevisar fall 2.

Om $r_1 \neq r_2$ så får vi med hjälp av det vi gjort tidigare om första ordningens ekvation att

$$v'(t) = Ce^{-(r_1 - r_2)t}$$

och därför blir

$$v(t) = A + Be^{-(r_1 - r_2)t}, \text{ för godtyckliga konstanter } A, B$$

och följaktligen blir

$$y(t) = (A + Be^{-(r_1 - r_2)t})e^{r_1 t} = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

vilket bevisar fall 1, om $r_1 \neq r_2$ är reella.

Om rötterna är komplexa så får vi fortfarande lösningen som i fall 1 men då innehåller lösningen komplexa tal, dvs vi får (om rötterna är $\alpha \pm i\beta$):

$$y(t) = Ae^{(\alpha+i\beta)t} + Be^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(A(\cos\beta t + i\sin\beta t) + B(\cos\beta t - i\sin\beta t)).$$

Här kan vi välja konstanterna A och B fritt bland de komplexa talen. Om vi för några reella tal C och D väljer $A = C + iD$ och $B = C - iD$ så blir lösningen reell, och den kan då skrivas precis som det som står angivet i fall 3 (efter att man bytt namn på koefficienterna).

Inhomogena fallet. En inhomogen linjär differentialekvation av 2:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

för några konstanter a, b och någon funktion f av t. Om y_p är någon lösning till denna ekvation och y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ så gäller att allmänna lösningen till

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

har formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Bevis. Anta att y_p är en partikulärlösning, en lösning till $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$. Det är lätt att kontrollera att $y_h + y_p$ blir en lösning till diffekvationen hur än koefficienterna i y_h väljs. Men får man alla lösningar på detta sätt? Om y är en lösning, vilken som helst, så gäller att

$$(y - y_p)'' + a(y - y_p)' + b(y - y_p) = f(t) - f(t) = 0$$

Med andra ord är $y - y_p$ en lösning till den homogena ekvationen. Det följer av resonemanget ovan om det homogena fallet att

$$y = y_h + y_p.$$

Så detta ger verkligen alla lösningar.

Exempel. Lös differentialkevationen $y''(t)+6y'(t)+9y(t) = e^{2t}$ och bestäm den lösning som också uppfyller initialvillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

Lösning. Vi löser först den homogena ekvationen $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$. Den har karaktäristisk ekvation $r^2 + 6r + 9 = 0$ med lösning $r = -3$ så lösningen är (fall 2!) $y_h(t) = (At + B)e^{-3t}$, A, B godtyckliga konstanter.

Sedan försöker vi bestämma en partikulärlösning. Eftersom högerledet är en exponentialfunktion ska vi ansätta $y_p(t) = Ce^{2t}$ och försöka bestämma talet C så att det blir en lösning. Vi ser att $y_p'(t) = 2Ce^{2t}$ och $y_p''(t) = 4Ce^{2t}$så $y_p''(t)+6y_p'(t)+9y_p(t) = 25Ce^{2t}$ och detta är lika med e^{2t} precis när $C = 1/25$. Vi får alltså en partikulärlösning $y_p(t) = \frac{1}{25}e^{2t}$.

Nu får vi lösningen till den ursprungliga diffekvationen genom addera dessa: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (At + B)e^{-3t} + \frac{1}{25}e^{2t}$, där A, B är godtyckliga konstanter. Om vi ska få $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$ ser vi att vi ska välja $B = -\frac{1}{25}$ och $A = -\frac{1}{5}$. Så funktionen $y(t) = (-\frac{1}{5}t - \frac{1}{25})e^{-3t} + \frac{1}{25}e^{2t}$ både löser differentialekvaitonen och uppfyller initialvillkoret.

3. Konsten att hitta partikulärlösningar

När man letar partikulärlösningar är filosofin att man gissar att det går att hitta en partikulärlösning av samma funktionstyp som högerledet $f(t)$.

Om högerledet $f(t)$ är 10 så gissar man att man kan hitta en y_p som är en konstant. Dvs man ansätter $y_p = c$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer c

Om $f(t) = 2t$ så ansätter man $y_p = ct + d$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer talen c och d.

Om $f(t) = 3e^{-4t}$ så ansätter man $y_p = ce^{-4t}$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer talet c.

Om $f(t) = 5\cos 7t$ så ansätter man $y_p = c\cos 7t + d\sin 7t$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer talen c och d.

4. Fenomenet resonans

OM den tilltänkta gissade partikkulärlösningen y_p är en del av den homogena lösningen så får man bara noll när man deriverar och sätter in i ekvationen och det går inte att bestämma några konstanter. Då får man multiplicera den y_p man hade tänkt ansätta med t och använda det man får då som sin gissade y_p.

Exempel: Om man ska lösa diffekvationen $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = e^{3t}$ så hittar man först $y_h = Ae^t + Be^{3t}$. Sedan vill man ansätta $y_p = ce^{3t}$ men det funkar inte eftersom detta är en del av den homogena lösningen. Då ansätter man istället $y_p = cte^{3t}$, deriverar och sätter in i ekvationen och får

$$y_p = \frac{1}{2}te^{3t}.$$

Hela lösningen till diffekvationen $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ blir därför

$$y(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1}{2}te^{3t}.$$