Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 11: Kurvritning, konvexitet, asymptoter

Innehåll. Här ska vi se exempel på hur man kan använda derivata för att skissa grafen till en funktion och samtidigt svara på en mängd olika frågor om funktionen. Vi ska också undersöka konvexitet och asymptoter.

Introduktion. Vi ska använda det vi har lärt oss tidigare om derivata för att skissa funktionsgrafer. Samma tänkande ger också svar på en mängd frågor om funktionen: Finns största och minsta värde och vad är de i så fall? Vad är definitionsmängden? Hur många nollställen har funktionen? Etc. Vi ska också ta upp två nya begrepp: konvexitet och asymptoter. Konvexitet handlar om krökningen av funktionskurvan och undersöks ofta med andraderivatan. En asymptot är en linje som funktionskurvan närmar sig och kommer obegränsat nära.

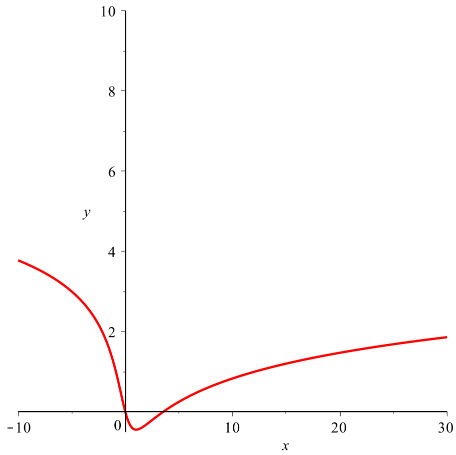
Kurvritning, exempel. Vi ska se hur man med hjälp av bland annat en derivataundersökning kan skissa funktionskurvan $y = f(x)$ då $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - \arctan x$.

Vi konstaterar först att definitionsmängden är hela reella axeln, och eftersom f är elementär så är f kontinuerlig på hela sin definitionsmängd. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2},$$

som är definierat för alla reella tal x. Vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 1$. Eftersom $f'(x) < 0$ om $x < 1$ så är f strängt avtagande på intervallet $x < 1$. Eftersom $f'(x) > 0$ om $x > 1$ så är f strängt växande på intervallet $x > 1$. Med hjälp av detta teckenstudium av derivatan ser vi att f antar sitt minsta värde när $x = 1$ och detta minsta värde är $f(1) = \ln 2 - \pi/4$. För att kunna skissa grafen behöver vi också se att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ och att $f(0) = 0$.

Grafen ser alltså ut så här:



Med hjälp av den undersökning vi gjorde ovan så kan vi nu också svara på många andra frågor om funktionen f. Här är några:

(a) Har funktionen något största och minsta värde och vad är de i så fall? Funktionens minsta värde är $\ln 2 - \pi/4$, men största värde saknas.
(b) Vad är funktionens värdemängd? Alla reella tal större än eller lika med $\ln 2 - \pi/4$, dvs värdemängden är $[\ln 2 - \pi/4, \infty)$.
(c) Hur många nollställen har funktionen? Två.

För att svara på dessa frågor (och många andra frågor) om f krävs en ordentlig derivataundersökning av den typ vi gjorde, och kompletterande undersökningar, som gränsvärden mm.

Konvexitet och konkavitet. Vi ser att grafen vi ritade inte går spikrakt upp mot oändligheten utan snarare böjer av neråt och går mot oändligheten förhållandevis långsamt. Hur visste vi att det skulle bli så? Svaret är att det visste vi inte. Vi hade inte räknat ut det i förväg. Denna egenskap kallas konkavitet. I vårt fall hade vi kunnat räkna ut det med hjälp av andraderivatan. Vi ser att

$$f''(x) = \frac{1 - x^2 + 2x}{(1 + x^2)^2}$$

så $f''(x) < 0$ när $x > 1 + \sqrt{2}$ och när $x < 1 - \sqrt{2}$. På dessa både intervall är alltså derivatan f' strängt avtagande. Lutningen på grafen minskar alltså hela tiden på dessa intervall. Vi säger att funktionen är konkav på intervallen $x > 1 + \sqrt{2}$ och $x < 1 - \sqrt{2}$. Däremellan däremot är $f''(x) > 0$ och f' därför strängt växande. Vi säger att funktionen är konvex på intervallet mellan $1 + \sqrt{2}$ och $x < 1 - \sqrt{2}$. De båda punkterna där funktionen byter mellan konvexitet och konkavitet kallas inflexionspunkter. Efter detta inledande exempel ska vi nu ge teorin för konvexitet och konkavitet.

Definition. En funktion f sägs vara strängt konvex på ett intervall I om för alla punkter x_1 och x_2 i I gäller att funktionsgrafen $y = f(x)$ ligger under det räta linjestycket mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$. Om grafen istället ligger över alla sådana linjestycken sägs funktionen vara konkav. Om vi tillåter att något linjestycke sammanfaller med funktionskurvan använder vi termerna konvex och konkav (utan "strängt" framför).

Sats. Om $f''(x) \geq 0$ för alla x i något intervall I så är f konvex i I. Om $f''(x) \leq 0$ för alla x i I så är f konkav i I. Om det dessutom gäller att $f''(x) = 0$ i högst ett ändligt antal punkter så är f strängt konvex respektive strängt konkav.

Bevis. Antag att $f''(x) \geq 0$ för alla x i I.... Slutsatsen följer med lite användning av medelvärdessatsen, men beviset är lite klurigt, så jag hoppar nog över det just nu.

Asymptoter. En asymptot till en funktionsgraf $y = f(x)$ är en linje som grafen närmar sig och kommer godtyckligt nära. Det finns tre möjligheter, lodrät asymptot, vågrät asymptot och sned asymptot. Vi tar dem en i taget.

Lodrät asymptot. Om $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$ så sägs linjen $x = a$ vara en lodrät asymptot till funktionskurvan $y = f(x)$. Exempel 1: $x = 0$ är en lodrät asymptot till $y = 1/x$. Exempel 2: $x = 1$ är en lodrät asymptot till $y = \ln(x - 1)$.

Vågrät asymptot. Om $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ så sägs linjen $y = b$ vara en vågrät asymptot till funktionskurvan $y = f(x)$ i oändligheten respektive minus oändligheten. Exempel 1: $y = 0$ är en vägrät asymptot till $y = 1/x$ i $\pm\infty$. Exempel 2: $y = \pi/2$ är en lodrät asymptot till $y = \arctan x$ i ∞.

Sned asymptot. Om $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - kx - m| = 0$ så sägs linjen $y = kx + m$ vara en sned asymptot till funktionskurvan $y = f(x)$ i oändligheten respektive minus oändligheten. Exempel 1: $y = x$ är en sned asymptot till $y = \frac{x^2+1}{x}$ i både plus och minus oändligheten. Exempel 2: $y = \frac{\pi}{2}x + 3$ är en sned asymptot till $y = x \arctan x + 3$ i oändligheten.

Metod för sned asymptot. Om $y = kx + m$ är sned asymptot i oändligheten till $y = f(x)$ så måste först $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ och sedan, med detta val av k, $m = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.