Steg 2 Integralen kan nu beräknas:

$$\int \frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2}\,dx$$

$$= \int \Big(\underbrace{-\frac{2}{x}}_{\text{lätt}} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{lätt}} + \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+1}}_{\text{knepig}} \Big)\,dx$$

$$= \int \Big(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\substack{\text{kan byta} \\ u=x^2+1}} + \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\text{The force awakens}} \Big)\,dx$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x^2+1| + \arctan x + C$$

Steg 3 Sätt in gränserna och avsluta:

$$\lim_{R\to\infty} \Big[-2\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x^2+1| + \arctan x \Big]_1^R$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{läxa}}}{\ldots} = 1 + \frac{\pi}{4} - \ln 2 \quad \boxtimes$$

Tips Användbar & effektiv genväg
"Skarpt öga"

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

eftersom $\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{inre derivatan}}$

Ex. $$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + C$$
$$= \ln\underbrace{(x^2+1)}_{\text{ty } x^2+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}} + C$$

$$\int \frac{x^2}{\underbrace{4x^3+5}}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{12x^2}{4x^3+5}\,dx$$

nämnarens derivata är $12x^2$

$$= \frac{1}{12}\ln|4x^3+5| + C$$

Generaliserad integral och konvergensegenskapen

Ex. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R$

$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{-\frac{1}{R}}_{\to 0} - (-1) = 1$

Integralen sägs konvergera mot 1.

$\int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\ln x\right]_3^R$

$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{\ln R}_{\to\infty} - \ln 3 = \infty$

inte tal

Integralen sägs divergera mot ∞.

Generellt p-testet

Fall 1

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

konvergerar om $p > 1$

divergerar om $p \leq 1$ (mot ∞)

tal $a > 0$

Fall 2

tal $a > 0$

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx$$

konvergerar om $p < 1$

divergerar om $p \geq 1$ (mot ∞)

om t. ex. $p=2$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$