$$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) > 1$$ kan skrivas om

2
$$\Rightarrow \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 1$$

1
$$\Rightarrow \frac{1}{2x}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) > 1$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - \ln(1-x) > 2x$$ enkel!

legitim eftersom
x är positivt
($0<x<1$ i lydelsen)

Bilda nu hjälpfunktionen

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$$

Vill nu visa att $f(x) > 0$
för alla $0<x<1$.

<u>Läxa</u> Avsluta uppgiften!

Nästa tillämpning

Funktioners inverterbarhet

Ex. $f(x) = x^2$

Om $x = 3$ så $f(3) = 3^2 = 9$.

Om $f(x) = 9$, vad är x då?

Svar Vet inte exakt om $x = 3$ eller $x = -3$. Vi säger då att $f(x) = x^2$ inte är inverterbar på $\mathbb{R}$.

Däremot Om vi begränsar f:s definitionsmängd till $(-\infty, 0]$, så gäller säkert att $x = -3$ om $f(x) = 9$. Vi säger att f är inverterbar på $(-\infty, 0]$.

Sats f är inverterbar på ett intervall I

$\Leftrightarrow$ f är $\underbrace{\text{injektiv}}_{\text{one-to-one}}$ på I, dvs.

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Kännetecken Om f är strängt växande eller strängt avtagande på I, är f injektiv och därmed inverterbar på I.

2017.01.09 #8 #KTH

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{4}{5}\arctan x$$

Bestäm det största öppna intervallet som innehåller $x=1$ där f är inverterbar.

Lösning **Steg 1** Derivera (läxa!)

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}_{\text{från kvotregeln}} + \frac{4}{5}\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\text{känd derivata}}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{9-x^2}{5(1+x^2)^2}$$

Steg 2 $f'(x) = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = -3$$
$$x_2 = 3$$

Steg 3 Teckenstudium: (läxa!)

testpunkter (välj själv!)

x	-4	-3	0	3	4
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Svar

intervallet $(-3, 3)$