SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 2

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Administrativt

Registrera er på kursen via ”mina sidor”

Imorgon: Digital föreläsning följs direkt av övning i sal. F-salarna på schemat är bara till för att ni ska kunna sitta på campus och följa digital föreläsning på era egna skärmar. Övning: gå till vilken övn-sal som helst som inte är full.

Semnarium 1: Inlämningsuppgifterna är publicerade och ni kan börja kolla på dem. Vid semiariet på måndag (ej obligatoriskt för bonus) får ni gå till vilken sal som helst som inte är full.

Att göra denna vecka

Översikt över modul 1

- Funktion (Kapitel P i kursboken)
  - Definitionsmängd och Värdemängd
  - Funktionsgraf
  - Udda, jämn
  - Begränsad
  - Absolutbelopp, Trigonometriska funktioner, Polynom
  - Klassen av elementära funktioner
- Gränsvärde (Kapitel 1 i kursboken)
  - Precis definition
  - Räkneregler
  - Ett specialgränsvärde
- Kontinuitet (Kapitel 1 i kursboken)
  - Precis definition
  - Satser om kontinuerliga funktioner
    - Min/Max
    - Mellanliggande värden

Med en **funktion** f från en mängd A till en mängd B menar vi en regel som till varje element $x \in A$ associerar precis ett element $f(x) \in B$. Mängden A där f är definierad kallas definitionsmängd, skrivs ibland D_f. Mängden av alla $f(x)$, $x \in D_f$, kallas värdemängd, skrivs ibland V_f.

Konvention: Om definitionsmängd ej anges antas att definitionsmängden är den största möjliga mängd där funktionen är väldefinierad.

Funktionsgrafen till f består av alla punkter (x, y) sådana att $y = f(x)$, dvs funktionsgrafen är $\{(x, y) : y = f(x) \text{ och } x \in D_f\}$.

Intervall, viktig notation:

- Öppet: $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ (ibland även $]a, b[$)
- Slutet: $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$
- Obegränsade: $(a, \infty) = \{x : x > a\}$ eller $[a, \infty) = \{x : x \geq a\}$ eller $(-\infty, c) = \{x : x < c\}$ osv

Funktioner forts

Kombinationer: Vi kan kombinera två funktioner f och g och skapa nya:

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- f/g
- $f \circ g$

Funktionen f är **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla x i D_f

Funktionen f är **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla x i D_f

Funktionen f är **begränsad** om det finns ett tal M sådant att $|f(x)| < M$ för alla $x \in D_f$.

Elementära funktioner

Klassen av **elementära funktioner** består av alla polynom, rationella funktioner, trigonometriska funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, inversa trigonometriska funktioner samt alla kombinationer av sådana funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.

Ni förväntas kunna hantera dessa funktioner och utföra saker som polynomfaktorisering, polynomdivision, kvadratkomplettering, använda konjugatregeln, lösa trigonometriska ekvationer, använda potenslagar och loglagar osv.

Exempel på en elementär funktion:

$$f(x) = \frac{x^9 \sin \frac{1}{x} + \tan^2(x^3)}{x^8 + \cos 2x}$$

Exempel på en funktion som **inte** är elementär:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{om } x > 1 \\ -\sin x & \text{om } x \leq 1 \end{cases}$$

Definition av gränsvärde

På matematiska:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyder:

för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att $|f(x) - L| < \epsilon$ för alla x sådana att $0 < |x - a| < \delta$.

På ren svenska:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyder:

vi kan få funktionsvärdena $f(x)$ hur nära talet L som helst bara genom att välja x tillräckligt nära (men inte lika med) a.

Gränsvärde

Syftet med gränsvärdesdefinitionen är att tala om **vad begreppet** gränsvärde **betyder.**

Sedan använder vi definitionen för att **härleda räkneregler** för gränsvärden som gör det lättare att räkna på gränsvärden.

Man använder sällan definitionen för att räkna, men i svåra fall, **när inget annat hjälper**, måste vi använda den.

Högergränsvärde och vänstergränsvärde

Gränsvärde i oändligheten och oegentliga gränsvärden

Ett viktigt gränsvärde.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(förutsatt att vinkelmåttet är radianer)

Kontinuitet

Definition: Funktionen f är **kontinuerlig** i punkten $a \in D_f$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

På ren svenska: gränsvärdet av $f(x)$ när x närmar sig a ska existera och dessutom vara lika med f:s funktionsvärde i a.

Om ovanstående gäller alla punkter i definitionsmängden för f så sägs f vara en **kontinuerlig funktion.**

Satser om kontinuerliga funktioner på slutna begränsade intervall:

Sats om max/min: Om f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ så antar f ett största och ett minsta värde när x varierar i $[a, b]$.

Sats om mellanliggande värden: Om f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ och antar funktionsvärdena r och s så antar f också alla värden mellan r och s.

Elementära funktioner:

Sats: De elementära funktionerna är kontinuerliga.

Beviside: Står i teori-pdf nr 2

Obs: Detta betyder att för en elementär funktion får man gränsvärdet när x närmar sig en punkt gratis genom att sätta in punkten i funktionen. Det är bara i punkter där funktionen inte är definierad som gränsvärdet kan vara ett problem.

Lägg märke till att man alltså för de elementära funktionerna kan avgöra kontinuiteten bara genom titta på dem, se hur de är konstruerade!

Kvadratroten

Def: $\sqrt{x}$ är det icke-negativa tal vars kvadrat är x.

Obs: $f(x) = \sqrt{x}$ har definitionsmängd alla icke-negativa tal och värdemängd alla icke-negativa tal. Obs att $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Obs: $|x| = \sqrt{x^2}$ vilket gör att absolutbeloppsfunktionen är elementär.

Obs: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ om $a, b \geq 0$

Rotekvationer kan ibland lösas genom kvadrering (kolla rötterna). Minns kvadreringsregeln och konjugatregeln. Minns hur man sätter bråk på *minsta* gemensamma nämnare.

Exempel:

Lös ekvationen $2\sin 3x = 1$

Svar:

$$x = \frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3} \quad \text{eller} \quad x = \frac{5\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}, \qquad n \text{ godt. heltal.}$$

Exempel

Bestäm definitionsmängd för dessa funktioner:

$f(x) = x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = x^2, \quad x \leq 1, \quad D_g = (-\infty, 1]$

$h(x) = \sqrt{|\sin x|}, \quad D_h = \mathbb{R}$

$k(x) = \sqrt{\sin x}, \quad D_k = ... \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup ...$

$\ell(x) = \sin \sqrt{x}, \quad D_\ell = [0, \infty)$

$r(x) = x/(x^3 - 11x^2 + 30x), \quad D_r = \{x : \ x \neq 0, 5, 6\}$

Udda/Jämn? Begränsad?

- Är $f(x) = x \sin x$ jämn/udda, begränsad?
- Är $g(x) = x \tan x$, $x \in [0, 1]$, jämn/udda, begränsad?
- Finns det någon funktion som varken är udda elller jämn?
- Finns det någon funktion som är både udda och jämn?

Svar: f är jämn, f är inte begränsad.
g är varken udda eller jämn. g är begränsad.
De flesta funktioner är varken udda eller jämna.
Nollfunktionen (med värdet 0 för alla x) är både udda och jämn

Exempel

Beräkna gränsvärdena

- $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 4$
- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$
- $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \infty$ (s.k. oegentligt gränsvärde)
- $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 1$

Exempel

Beräkna gränsvärdena

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(2x-6)}{x-3}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$

Detta går vi igenom på föreläsning 3.
Pröva själv att lösa detta i förväg!

Exempel

Kontinuerlig?

Hur ska vi välja talet k för att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{om } x > -2 \\ 2 + kx & \text{om } x \leq -2 \end{cases}$$

ska bli kontinuerlig i punkten $x = -2$?

Om man väljer k på detta sätt, är då funktionen kontinuerlig på hela reella axeln?

Detta går vi igenom på föreläsning 3.
Pröva själv att lösa detta i förväg!

Exempel

Låt funktionen f vara given av

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

- Bestäm definitionsmängden till f
- I vilka punkter är f kontinuerlig?
- Är f udda eller jämn eller varken eller?
- Är f begränsad?

Detta går vi igenom på föreläsning 3.
Pröva själv att lösa detta i förväg!