Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

7. Invers, exp, log

Innehåll. Vi ska se vad som menas med inversen till en funktion och undersöka egenskaper hos exponentialfunktionen och den naturliga logaritmen.

Introduktion. Om en funktion f inte upprepar sig, utan antar sina funktionsvärden bara en gång, så kan vi för varje tal y i värdemängden tala om vilket x i definitionsmängden det kom ifrån. Gör vi det får vi en ny funktion som kallas för inversen till f och skrivs f^{-1}. Exempel på detta är exponentialfunktionen och den naturliga logaritmen som är inverser till varandra.

Definition av injektivitet. En funktion $f : A \to B$ sägs vara injektiv om för alla x_1 och x_2 i definitionsmängden gäller att $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ekvivalent till ovanstående är villkoret att om $f(x_1) = f(x_2)$ så måste $x_1 = x_2$.

Definition av surjektivitet. En funktion $f : A \to B$ sägs vara surjektiv om för alla y i B gäller att det finns (minst) ett x i A sådant att $y = f(x)$.

Definition av bijektivitet. En funktion $f : A \to B$ sägs vara bijektiv om f är både injektiv och surjektiv.

Definition av invers. Om en funktion $f : A \to B$ är bijektiv så kan vi definiera en ny funktion $f^{-1} : B \to A$ genom att för varje y i B låta

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Observation. Vi ser att definitionsmängden för inversen är den ursprungliga funktionens värdemängd. Och värdemängden för inversen är den ursprungliga funktionens definitionsmängd. Det vill säga:

$$D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{och} \quad V_{f^{-1}} = D_f.$$

Observation. Vi ser att om f är inverterbar så är inversen också inverterbar och inversen till inversen är den ursprungliga funktionen, dvs $(f^{-1})^{-1} = f$. Vidare gäller då att $f^{-1}(f(x)) = x$, för alla $x \in D_f$, och $f(f^{-1}(y)) = y$, för alla $y \in V_f$.

Hur visar man inverterbarhet? Bland de reellvärda funktioner av en reell variabel som har invers märks strängt växande respektive strängt avtagande funktioner. De är ju bijektioner från sin definitionsmängd till sin värdemängd. En metod att visa att en funktion är inverterbar kan därför vara att med hjälp av derivata visa att funktionen är strängt växande eller avtagande. Annars är förstås ett sätt att visa att en funktion är inverterbar att bestämma inversen, dvs att ur ekvationen $y = f(x)$ lösa ut x. Om det går att göra explicit så har vi ju ett uttryck för inversen som då måste finnas.

Variabeln x. Man kan vilja ha variabeln x även i inversen. Om man i $y = f(x)$ löser ut x erhåller man ett explicit uttryck för inversen $f^{-1}(y) = x$. Men funktionen f^{-1} är inte beroende av vad variabeln kallas, så det är samma funktion (samma regel) om man kallar variabeln x istället och funktionsvärdena till inversen y. Grafiskt betyder detta att man låter x och y byta roller. Det betyder att graferna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.

Egenskaper. Inversen ärver egenskaper från funktionen. Till exempel är f^{-1} kontinuerlig om f är det. Och f^{-1} blir deriverbar om f är deriverbar och $f' \neq 0$. Det går att skriva upp derivatan av f^{-1} i termer av f:s derivata: Om a är en punkt i D_f där f är deriverbar och $f'(a) \neq 0$ så gäller att f^{-1} är deriverbar i punkten $b = f(a)$ med derivatan

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Detta kan man se genom att använda sambandet $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$ tillsammans med derivatans definition:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \to \frac{1}{f'(a)} \quad \text{då } x \to a.$$

Definition av $\ln x$. Den naturliga logaritmfunktionen kan definieras för alla $x > 0$ genom

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Derivata av $\ln x$. Den naturliga logaritmfunktionen är deriverbar och därmed också kontinuerlig. För alla $x > 0$ gäller att

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Eftersom derivatan är positiv för alla x i definitionsmängden följer att logaritmfunktionen är strängt växande.

Bevis. Enligt derivatans definition har vi att

$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{h\to 0} \frac{\int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt}{h} \quad = \frac{1}{x}$$

där vi i den sista likheten använt instängningslagen på olikheten

$$\frac{h}{x+h} < \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt < \frac{h}{x}$$

som gäller eftersom integranden är strängt avtagande.

Observation. Vi ser med vår definition av $\ln x$ att $\ln 1 = 0$ och vi har visat att derivatan av $\ln x$ är $1/x$. Av följdsats 6 till medelvärdessatsen följer att det bara kan finnas en enda funktion som har dessa två egenskaper. Den som är van vid att tänka på $\ln x$ som definierad utgående från exponentialfunktionen (att $\ln x$ är det tal y sådant att $e^y = x$) kan alltså vara lugn: den logaritmfunktion vi har definierat med en integral är alltså samma logaritmfunktion som vi kände till sedan tidigare.

Sats. Logaritmfunktionen har följande egenskaper, de så kallade loglagarna, som gäller för alla reella tal t och alla positiva reella tal x och y.

(a) $\ln xy = \ln x + \ln y$
(b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
(c) $\ln x^t = t \ln x$
(d) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
(e) $\ln 1 = 0$

Bevis. Vi bevisar (a): Eftersom

$$\frac{d}{dx} \ln xy = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln x,$$

så måste det enligt Följdsats 6 till medelvärdessatsen gälla att $\ln xy = \ln x + C$ för något tal C. Om vi i detta samband sätter in $x = 1$ och använder att $\ln 1 = 0$ (vilket är uppenbart från defintionen) får vi att $C = \ln y$ och (a) är bevisad. Bevisen för (b)-(d) är likartade, (e) är uppenbar.

Observation. Den naturliga logaritmfunktionen $\ln$ har definitionsmängd $(0, \infty)$ och värdemängd $(-\infty, \infty)$. Det senare följer av att

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

För att bevisa dessa gränsvärden: Genom att rita och jämföra arean under kurvan $y = 1/t$ på intervallet $t \geq 1$ med rektangelareor med sida 1 och höjd $1/k$ ser vi att $\ln x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots \frac{1}{n}$ där n är det största heltal mindre än x. Men summan till höger går mot ∞ så då måste $\ln x$ också göra det när $x \to \infty$. Det andra gränsvärdet följer ur detta tillsammans med loglag (d). Att värdemängden är $(-\infty, \infty)$ följer nu av att funktionen är kontinuerlig.

Exponentialfunktionen. Eftersom logaritmfunktionen är strängt växande har den en invers. Inversen kallas exponentialfunktionen och skrivs $\exp$ eller $e^{(\cdot)}$. Definitionen blir så här:

$$\exp(x) = y \iff x = \ln y.$$

Observation. Exponentialfunktionen har definitionsmängd $(-\infty, \infty)$ och värdemängd $(0, \infty)$

Talet e. Vi definierar talet e genom att sätta $e = \exp(1) = 2.71828\ldots$. Man kan visa att

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Derivata av e^x. Exponentialfunktionen är deriverbar och därmed också kontinuerlig. För alla reella tal x gäller att

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Eftersom derivatan är positiv för alla x följer att exponentialfunktionen är strängt växande. Och $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ och $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Bevis. Om $f(x) = e^x$ får vi med hjälp av derivatans definition och sambandet $e^x = y \iff x = \ln y$ att

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{y\to b}\frac{y - b}{\ln y - \ln b} = \frac{1}{1/b} = b = e^a.$$

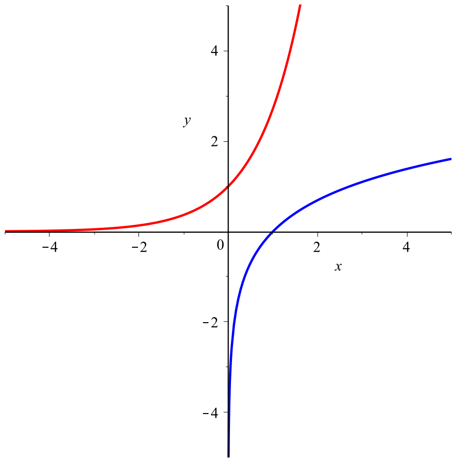
Sats. Exponentionalfunktionen har följande egenskaper, de så kallade potenslagarna, som gäller för alla reella tal r, s och t.

(a) $e^r e^s = e^{r+s}$
(b) $\frac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$
(c) $(e^r)^t = e^{rt}$
(d) $e^{-r} = \frac{1}{e^r}$
(e) $e^0 = 1$

Bevis. Varje potenslag följer direkt från motsvarande loglag, om vi i loglagarna sätter $e^r = x$ och $e^s = y$.

Observation. Formlerna $f(f^{-1}(y)) = y$ och $f^{-1}(f(x)) = x$ som gäller för en funktion och dess invers ger oss nu följande användbara samband:

$$\ln e^y = y, \text{ för alla y} \quad \text{och} \quad e^{\ln x} = x, \text{ för alla } x > 0$$



Figur. Kurvorna $y = e^x$ (röd) och $y = \ln x$ (blå) är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.

Standardgränsvärden. För alla tal $a > 0$ gäller att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

Bevis. Vi bevisar gränsvärdena bara i fallet $a = 1$. Övriga fall kan fås från detta genom en lämplig omskrivning. Om vi låter n vara heltalsdelen av x och använder binomialsatsen, så får vi att

$$\frac{x}{e^x} \leq \frac{x}{(1+1)^x} \leq \frac{n+1}{(1+1)^n} \leq \frac{n+1}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}} \leq \frac{2}{n-1} \to 0$$

när $n \to \infty$. Detta bevisar det första gränsvärdet för $a = 1$. Det andra fås ur det första med $e^x = t$, vilket gör att x/e^x övergår i $(\ln t)/t$ som då måste gå mot noll när t går mot oändligheten.