SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 6

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Användning av derivata

Vanliga tillämpningar av derivata:

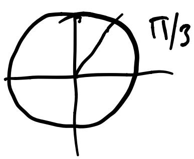
- Approximation
- Växande/Avtagande
- Max/Min
- Förändringstakt, speciellt (men inte bara) hastighet
- Implicit derivering
- Senare också: gränsvärden mm

Användning av derivata

Börja!

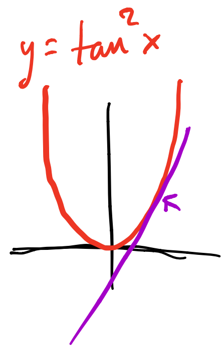
Uppgift: Låt $f(x) = \tan^2 x$. Skriv upp en ekvation för tangenten till $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat $\pi/3$.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$. $f'(x) = 2(\tan x)^1 \cdot (1 + \tan^2 x)$ så



$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$. Tangent:

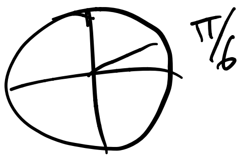
$$y = 3 + 8\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$



Användning av derivata

Uppgift: Skriv upp linjariseringen för $f(x) = \cos x$ kring punkten $x = \pi/6$ och använd den för att hitta ett närmevärde till $\cos \dfrac{\pi}{5}$.

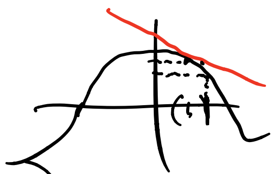
$f(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. $f'(x) = -\sin x$, $f'(\pi/6) = -\frac{1}{2}$



Linjär approx kring $\pi/6$:

$$\underset{\cos x}{f(x)} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \quad x \text{ nära } \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = f\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{60}$$



$(\approx 0{,}85 - 0{,}05 = 0{,}8)$

Uppgift. Visa att $x^3 + 9x^2 + 1 = 0$ har exakt en lösning x mellan -10 och -9. Låt $f(x) = x^3 + 9x^2 + 1$. Ekv $\iff f(x) = 0$. $f(-10) = -99 < 0$, $f(-9) = 1 > 0$ och då f kontinuerlig på det slutna begr. int. $[-10,-9]$ så följer av sats om mellanliggande värden att det finns x mellan -10 o -9 s.a. $f(x) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 18x = 3x(x+6) > 0$ för alla $x \in [-10,-9]$

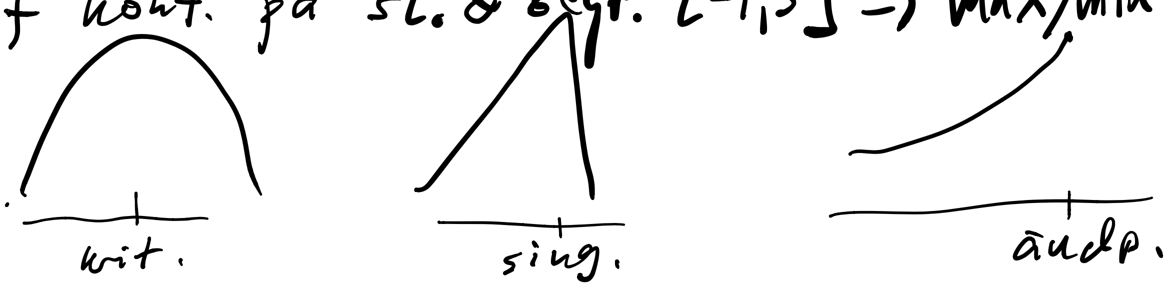
$\Rightarrow f$ strängt växande på intervallet. så det kan finnas högst ett nollställe till f i intervallet.

Max/min (största/minsta värde). Satsen om max/min kan garantera existensen. Om max/min finns måste de antas i kritiska punkter, singulära punkter eller randpunkter.

Uppgift. Avgör om $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ antar ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $[-1, 3]$. Bestäm största och minsta värdet om de finns.

f kont. på sl. & begr. $[-1,3] \Rightarrow$ max/min finns.

Kan antas:



Uppgift. Avgör om $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ antar ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $[-1, 3]$. Bestäm största och minsta värdet om de finns.

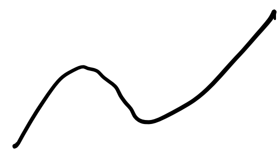
$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$; $f'(x) = 0 \iff x = 0$ el. $x = 1$

Inga sing. p. Max/min antas i $0, 1, -1$ el. 3

$f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(-1) = -4$, $f(3) = 28$

Så max är 28, min -4.

x	-1		0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	lok min	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	lok max



Att använda derivata

Andraderivatatestet vs Teckenschema

$f'(a)=0$ & $f''(a)<0$

lokalt max

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok max	$\searrow$

. . . . .

$f'(a)=0$ & $f''(a)>0$

lokalt min

f'	$-$	0	$+$
	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

Att använda derivata

Uppgift. Avgör om $g(x) = \dfrac{1}{x} - \tan x$ antar ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $(0,1)$. Bestäm största och minsta värdet om de finns. Hur blir det på intervallet $(0,1]$?

$g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - (1+\tan^2 x) < 0$ för $0<x<1$

$\Rightarrow$ g strängt avtagande, inget max på $(0,1)$ inget min ($g \to \infty$, $x \to 0^+$)

$(0,1)$

$(0,1]$

inget max men min är $1-\tan 1$ på $(0,1]$

Implicit definierade funktioner. Betrakta kurvan med ekvation

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 5.$$

$(x+1)^2 - 1$

$(y-2)^2 - 4$

Finn en ekvation för tangenten till kurvan i punkten (2, 1).

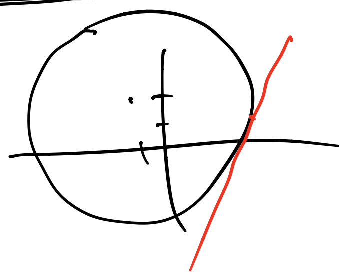
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$$

$$(y-2) = -\sqrt{10-(x+1)^2}$$

$$y = 2 - \sqrt{10-(x+1)^2}$$

$y(x)$

$y'(2)$ enl. f. ...



Implicit derivering

Uppgift. Betrakta kurvan med ekvation

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 5.$$

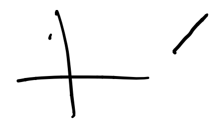
Finn en ekvation för tangenten till kurvan i punkten (2, 1).

$x^2 + 2x + y(x)^2 - 4y(x) = 5$ deriva implicit

$\Rightarrow 2x + 2 + 2y(x)y'(x) - 4y'(x) = 0$ ins. (2,1)

$\Rightarrow 4 + 2 + 2y'(2) - 4y'(2) = 0 \Rightarrow y'(2) = 3$

Tangenten: $\underline{y = 1 + 3(x-2)}$



Implicit derivering

Uppgift. Bestäm med hjälp av implicit derivering en ekvation för tangenten till kurvan $xy + y^3 + x^4 = 7$ i punkten $(-1, 2)$

$xy(x) + y(x)^3 + x^4 = 7$, implicit derivering:

$\Rightarrow 1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) + 3y(x)^2 y'(x) + 4x^3 = 0$

ins. $(-1,2)$: $2 + (-1) \cdot y'(-1) + 12y'(-1) - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad y'(-1) = \frac{2}{11}$. Tangent: $\underline{y = 2 + \frac{2}{11}(x+1)}$

Derivata i tillämpningar

Många samband kan formuleras med hjälp av **derivator**, t ex:

Tillväxttakten i en bakteriekoloni är proportionell mot mängden bakterier:

$$\frac{dM}{dt} = kM$$

Avsvalningstakten är proportionell mot temperaturskillnaden:

$$\frac{dT}{dt} = k(T + 10)$$

Kraften är massan gånger **accelerationen**:

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Strömstyrka är **laddning per tidsenhet**:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Hur snabbt förändras .... ?

Uppgift: För en viss svängande massa upphängd i en fjäder gäller att dess avvikelse (i meter) från jämviktsläget vid tidpunkten t sekunder ges av funktionen

$$y(t) = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Bestäm den maximala hastighet som massan uppnår.

Hur snabbt förändras .... ?

Dagens tentaproblem: En 5 meter lång stege står lutad mot en vägg. Stegens nederdel rör sig från väggen med en hastighet av 2 meter per sekund. Hur snabbt faller stegens överdel då nederdelen befinner sig 3 meter från väggen?

Hur snabbt förändras .... ?

Kol 14-metoden: ett skelett hittat vid ett kloster strax söder om Rom innehåller 85 % av den ursprungliga mängden kol 14. Är det från Jesu tid? Halveringstiden är 5700 år.

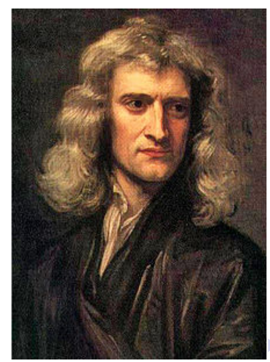
Uppgift: Hur lång tid tar det att hoppa från 10 meter på Eriksdalsbadet?

(Tips: vad är accelerationen? Gör antaganden om verkligheten, ställ upp en matematisk modell och räkna!)

Envariabelanalys — bakgrund och motivation

$$v = \frac{s}{t}$$

$$A = \pi r^2$$



Inför Seminarium 2

Läxa: Gör hemuppgifter2.pdf, repetera vid behov Film3, 4 och 6, Checka av moduluppgifterna. Kolla vid behov övningsfilmerna. Läs vid behov i boken. Gör inlämningsuppgifterna.

Glöm inte att se förberedande film till nästa föreläsning!