Minnesanteckningar

Envariabelanalys SF1625

Introduktion.

Intervall

- Öppet intervall: $(a, b) = \{x : a < x < b\}$
- Slutet intervall: $[a, b]=\{x: a \leq x \leq b\}$

De reella talen

- De naturliga talen (positiva heltal): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Heltalen: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
- De rationella talen: $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : \ n, m \in Z, m \neq 0\}$
- De reella talen: $\mathbb{R}$.

- $Funktionen\ f\ \text{sägs}\ vara\ \text{jämn}\ om\ f(-x) = f(x)\ f\text{ör}\ alla\ x\ i\ D_f$
- $Funktionen\ f\ \text{sägs}\ vara\ udda\ om\ f(-x) = -f(x)\ f\text{ör}\ alla\ x\ i\ D_f$

Enpunktsformeln

- Den räta linjen genom punkten (a, b) med riktningskoefficient k har ekvationen $y = b + k(x - a)$.

Modul 1: Gränsvärde och kontinuitet

Definition av gränsvärde då x går mot ∞

$Vi\ säger\ att\ f(x) \to A\ då\ x \to\ \infty\ om$ det $för\ varje\ tal\ \ \varepsilon > 0$ finns ett tal ω_ε $sådant\ att\ |f(x) - A| < \varepsilon\ för\ alla\ x > \omega_\varepsilon$

Gränsvärdet $\frac{\infty}{\infty}$ är ett så kallat ”farligt fall”. Vi måste veta hur snabbt funktionen i täljaren och nämnaren växer för att kunna bestämma gränsvärdet.

Exempel

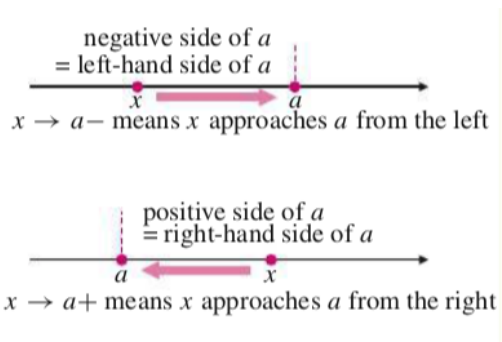
$$\frac{2x^2 + x}{3x^2 + 2x + 1} \to \frac{\infty}{\infty}$$

Strategi: Bryt ut dominerande term i täljare och nämnare

$$\frac{2x^2 + x}{3x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2}{x^2} * \frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \to 1 * \frac{2 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}\ då\ x \to \infty$$

Definition av gränsvärde då x går mot *a*

Vi säger att $f(x) \to A\ då\ x \to a$ eller $\lim_{x \to a} f(x) = A$ om det för varje tal $\varepsilon >$ 0 finns ett tal δ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $0 < |x - a|\ \delta_\varepsilon$



A function $f(x)$ has limit L at $x = a$ if and only if it has both left and right limits there and these one-sided limits are both equal to L:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = L$$

Standardgränsvärden:

$\boldsymbol{x \to 0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\boldsymbol{x \to \infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^a} = 0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{b^x} = 0$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ $\lim_{x\to\infty} \ln(x) < x^a < \alpha^x$

Definition av kontinuitet:

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(x)}$

$\boxed{\text{Vi säger att } f \text{ är kontinuerlig i } a \text{ om } f(x) \to f(a) \text{ då } x \to a}$

$\boxed{f\ \textit{är kontinuerlig om } f \textit{ är kontinuerlig i varje punkt i dess definitionmängd}}$

Definitionen säger att en funktion är kontinuerlig i en viss punkt om följande gäller:

- Funktionen är definierad i punkten, dvs det finns ett funktionsvärde i punkten.
- Funktionen har ett gränsvärde när x närmar sig punkten
- Funktionsvärdet och gränsvärdet är lika

Satsen om mellanliggande värden

$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Om } f \textit{ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet } [a,b] \textit{ så antar} \\ f \textit{ alla värden mellan } f(a) \textit{ och } f(b) \textit{ i intervallet } [a,b]\end{array}}$

Satsen om max/min

$Om\ f$ är $kontinuerlig$ på det $slutna\ begränsade\ intervallet$ $[a, b]$ så $antar$ $f\ ett\ största\ och\ minsta\ värde\ när\ x\ varierar\ i\ intervallet$ $[a, b]$

Funktionen $f(x) = x,\ \ 0 < x < 1\ saknar\ största\ värrde$

De elementära funktionerna är alla kontinuerliga.

Lodrät asymptot

$x = a$ sägs vara en lodrät asymptot till kurvan $y = f(x)$ om minst ett av följande kriterier uppfylls.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Om $f(x) = \frac{...}{...}$ brukar $x = a$ vara en punkt där nämnaren blir 0

Vågrät asymptot

$y = m$ är en vågrät asymptot till $y = f(x)$ om minst ett av följande kriterier uppfylls.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = m$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = m$

där m är en konstant

Sned asymptot

$y = kx + m$ är en sned asymptot till $y = f(x)$ om minst ett av följande kriterier uppfylls.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = kx + m$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = kx + m$

Bestämningsmetod för sneda asymptoter

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}\ , ty\ \ k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - m}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \underbrace{\frac{m}{x}}_{0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Modul 2 – Derivata

$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad x > 0$

$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$\frac{d}{dx} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

$\frac{d}{dx}\frac{3}{8x^2\sqrt{x}} = -\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}$

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x lna \quad a > 0$

$\frac{d}{dx} log_a x = \frac{1}{x * ln(a)}$

$\frac{d}{dx} |x| = \frac{x}{|x|}$

$\frac{d}{dx}\sqrt{1 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{d}{dx} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^3}$

$\frac{d}{dx}\frac{2}{x^3} = -\frac{6}{x^4}$

Derivatan av trigonometriska funktioner

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

$\frac{d}{dx} - \sin x = -\cos x$

$\frac{d}{dx} - \cos x = \sin x$

$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$

$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$

Deriveringsregler

Additionsregeln

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=f'(x)+g'(x)$$

Produktregeln

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Kvotregeln

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)=f'\left(g(x)\right)*g'(x)$$

Derivatans definition:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Deriverbar (gränsvärdet existerar ändligt)

Definition av tangent

Linjen genom punkten $\left(a,f(a)\right)$ *med riktningskoefficient* $f'(a)$ *kallas tangenten* till $y=f(x)$ *i* $\left(a,f(a)\right)$.

Ekvation för tangent / enpunktsformeln

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Ekvation för normalen

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

Deriverbarhet medför kontinuitet

Vi säger att f är deriverbar om $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar ändligt för alla a i definitionsmängden.

Sats: Om f är deriverbar, så är f kontinuerlig.

Obs! Omvändningen gäller ej

Derivata av en invers

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Leibniz formel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

Lokal extrempunkt

Punkter x sådana att $f'(x) = 0$ kallas kritiska punkter eller stationära punkter till f

Extrempunkt innebär antingen

Lokal maximipunkt eller lokal minimipunkt

Tre typer av intressanta punkter

i) $f'(x) = 0 - stationärpunkt$
ii) $f'(x_0)\ ej\ existerar - singulär\ punkt$
iii) ändpunkter

Bland dessa finner vi garanterat alla extrempunkter

Lokala extrempunkter – Test med andraderivata

$f'(a) = 0, f''(a) > 0$ → a är en lokal minimipunkt

$f'(a) = 0, f''(a) < 0$ → a är en lokal maximipunkt

Problem med andraderivatatestet

i) $f''(a) \text{är svår att beräkna}$
ii) $f'(a) \text{eller } f''(a) \text{saknas}$
iii) $Om\ f''(a) = 0\ \text{så}\ kan\ vi\ ej\ säga\ något$

---

i) $f'(x) > 0\ i\ ]a, b[\ \rightarrow f(x)\ strängt\ växande\ i\ ]a, b[$

ii) $f'(x) < 0\ i\ ]a, b[\ \rightarrow f(x)\ strängt\ avtagande\ i\ ]a, b[$

Tillvägagångssätt för att avgöra intervall för växande/avtagande

1. Bestäm $f\,'(x)$
2. Bestäm $f'(x) = 0$
3. $Bestäm\ lokalt\ min/\max\ genom\ att\ sätta\ in\ de\ x\ i\ f\ som\ ger\ f' = 0$
4. $Gör\ teckenstudium\ med\ de\ x\ som\ ger\ f' = 0$

x		x_1		x_2		x_3	
$f'(x)$	$+/-$	0	$+/-$	0	$+/-$	0	$+/-$
$f(x)$	$\uparrow/\downarrow$		$\uparrow/\downarrow$		$\uparrow/\downarrow$		$\uparrow/\downarrow$
$Lokal$		min/max		min/max		min/max	

Medelvärdessatsen

Antag att f är deriverbar i]a, b[och att f är kontinuerlig i [a, b]. Då finns det (minst) en punkt c, a < c < b, sådan att $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$

Linjär approximation för x nära a:

$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Implicit derivering

$x^3 + y^3 + y^2 - 4x = 5$

$x^3 + y(x)^3 + y(x)^2 - 4x = 5$

$3x^2 + 3y(x)^2 y'(x) + 2y(x)y'(x) - 4 = 0$

$Sätt\ in\ punkten\ (-1,1)$

$3 + 3y'(x) + 2y'(x) - 4 = 0$

$5y'(x) = 1$

Modul 3 – Transcendenta funktioner

Potenslagar:

$e^s e^t = e^{s+t}$

$\frac{e^s}{e^t} = e^{s-t}$

$(e^s)^t = e^{st}$

$e^{-t} = \frac{1}{e^t}$

$e^0 = 1$

$e^{1/2} = \sqrt{e}$

$log_a a^x = x$

$a^{log_a a^x} = x$

Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande är den injektiv och har därmed invers. Inversen kallas den naturliga logaritmfunktionen, skrivs ln. $\ln y = x \leftrightarrow y = e^x$

Logaritmlagar:

$\ln(uv) = \ln u + \ln v$

$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

$\ln(u^t) = t \ln u$

$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -1 \ln v$

$\ln 1 = 0$

$\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x\ för\ x > 0$

Injektiva funktioner

Injektiva funktioner avbildar alltid olika x på olika y $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Inversa funktioner

För att visa att en funktion är injektiv (har en invers)

Om funktionens derivata alltid är positiv är funktionen injektiv

$D_f = V_{f^{-1}}$
$V_f = D_{f^{-1}}$

Trigonometriska samband:

$\cos(-t) = \cos t$ $\sin(-t) = -\sin t$

$\cos(\pi - t) = -\cos t$ $\sin(\pi - t) = \sin t$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\ t$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Additionsformler

$\sin(s + t) = \sin(s)\ \cos(t)\ + \cos(s)\sin(t)$ $\cos(s + t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$

$\sin(s - t) = \sin(s)\ \cos(t)\ - \cos(s)\sin(t)$ $\cos(s - t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$

Dubbla vinkeln

$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$

---

degrees	radians	sin θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0°	0	0	1	0	–	1	–
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	1	–	0

Arcusfunktioner:

	Definitionsmängd	Värdemängd	Derivata	Udda/Jämn
$\arcsin(x)$	[-1, 1]	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Udda
$\arccos(x)$	[-1, 1]	$[0, \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Varken udda eller jämn
$\arctan(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{1+x^2}$	udda
$\text{arccot}(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$(0, \pi)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	Varken udda eller jämn

Differentialekvationer:

Linjära homogena ekvationer av andra ordningen

$y'' + ay' + by = 0$

Definition:

Polynomet $p(r) = r^2 + ar + b$ kallas det karakteristiska polynomet till ekvationen.

Ekvationen $p(r) = 0$ kallas den karakteristiska ekvationen till $y'' + ay' + by = 0$

Sats:

Låt r_1, r_2 vara rötter till den karakteristiska ekvationen. $p(r) = r^2 + ar + b = 0$ till ekvationen $y'' + ay' + by = 0$

Då har ekvationen lösningarna

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \qquad r_1 \neq r_2$

$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x} \qquad r_1 = r_2$

Komplexa fallet:

Om $p(r) = 0$ har rötterna $r_{1,2} = \alpha + \beta i$ så får vi lösningarna

$y = e^{\alpha x}\big(Acos(\beta x) + Bsin(\beta x)\big)$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Inhomogena ekvationer

$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$

Sats:

Alla lösningar till $y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$ ges av

$y = y_h + y_p$

där y_p är <u>en</u> lösning till ekvationen och y_h är <u>alla</u> lösningar till motsvarande homogena ekvation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

Exempel

Hitta alla lösningar till $y'' - y' - 2y = x^2 + x$

Lösning: $y = y_h + y_p$

$\boldsymbol{y_h}$: $y'' - y' - 2y = 0$ karakteristiska ekvationen $p(r) = r^2 - r - 2 = 0 \rightarrow$

$r_1 = -1, r_2 = 2$ $y_h = C_1e^{-1x} + C_2e^{2x}$

$\boldsymbol{y_p}$: $y'' - y' - 2y = x^2 + x$

Ansätt $y = Ax^2 + bx + C$ $y' = 2Ax + B$ $y'' = 2A$

$2A - (2x + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -2A - 2B = 1 \\ -2A - B - 2C = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Svar: $C_1e^{-1x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

Modul 4 – Taylorpolynom

$L'Hopitals\ regel$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Konvex och konkav

$Om\ f''(x) > 0\ för\ alla\ x\ i\ ett\ intervall\ I\ så\ är\ f\ konvex\ i\ I$

$Om\ f''(x) < 0\ för\ alla\ x\ i\ ett\ intervall\ I\ så\ är\ f\ konkav\ i\ I$

Maclaurinutveckling

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^3(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}\ x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{Lagrange\ restterm}$$

$för\ något\ tal\ c\ mellan\ 0\ och\ x$

Taylorutveckling

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}\ (x-a)^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{Lagrange\ restterm}$$

$för\ något\ tal\ c\ mellan\ x\ och\ a$

$a \leq c \leq x\ ska\ väljas\ så\ att\ felet\ blir\ så\ stort\ som\ möjligt$

Vanliga Taylorutvecklingar kring 0

$$sin\ x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$cos\ x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$ln\ (x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$

Modul 5 – Integraler

$\boldsymbol{Definition}$ $Låt\ f\ vara\ begränsad\ på\ [a,b].\ Om$ de t $finns\ exakt\ ett\ tal\ I\ sådant\ att\ f$ör $alla\ partitioner\ P\ gäller\ att$

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$$

$så\ säger\ vi\ att\ f$ är $integrerbar\ på\ [a,b]\ och\ talet\ I$ är $då\ integralen\ av\ f$ ö$ver\ [a,b]\ dvs$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$Om\ f$ är $kontinuerlig\ på\ [a,b]\ så$ är $f\ integrerbar\ på\ [a,b]$

$\int dx = x + c$

$\int k\,dx = kx + c$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$

$\int x^{-n} dx = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$

$\int \ln x\ \,dx = xln(x) - x$

$\int \sin^2 x\,dx\ = \int \frac{1-\cos{(2x)}}{2}\ dx$

$\int \sin x\,dx = -\cos{(x)}$

$\int -\cos(x)\,dx = -\sin x$

$\int -\sin x = \cos x$

$\int \cos x = \sin x$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Integrera trigonometriska funktioner

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$

Analysens huvudsats

Antag att f är $kontinuerlig$ på $[a, b]$. $Då\ gäller$

Del 1:

Funktionen $S(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ är $en\ primitiv\ funktion\ till\ f, dvs\ S'(x) = f(x)$

Del 2:

$Om\ F$ är $någon\ primitiv\ funktion\ till\ f,$ så är

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Integralkalkylens medelvärdessats

Sats:

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns ett tall $a \leq c \leq b$, sådant att

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a)$$

$Talet\ f(c)\ kallas\ medelvärdet\ av\ f$ på $[a, b]$

Exempel - Analysens huvudsats:

Derivera $S(x) = \int_x^2 \sin t \, dt$

Vi kan bara använda analysens huvudsats om den bortre gränsen ändrar sig. Därför kastar vi om gränserna.

$$\boxed{\int_a^b x\, dx = -\int_b^a x\, dx}$$

$$\int_x^2 \sin t\, dt = -\int_2^x \sin t \, dt = -\sin x$$

Insättningsformeln

Sats:

Antag f är kontinuerlig på intervallet I, och att F är en primitiv funktion till f. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Arean mellan två kurvor

Sats:

$f(x)$ är alltid kurvan som ligger överst och $g(x)$ kurvan som ligger underst.

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Partiell integration

Partiell integration är ett sätt att analytiskt lösa integraler vars integrand är en produkt av två funktioner.

$$\int f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)] - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Generaliserade integraler

En integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sägs vara generaliserad om $f(x)$ inte är definierad, är obegränsad i ett ändligt antal punkter eller om integrationsgränsen formellt ersatts med ∞ eller $-\infty$.

En generaliserad integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sägs konvergera om gränsvärdet existerar ändligt. Om integralen inte konvergerar sägs den divergera.

Två kännetecken på generaliserade integraler:

1) Integrationsintervallet är obegränsat

$$\int_3^\infty e^{-x} dx$$

2) Integranden är obegränsad på integrationsintervallet

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Kända integraler

Låt $a > 0$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx \qquad \begin{matrix} konvergent \text{ då } p > 1 \\ divergent \text{ då } p \leq 1 \end{matrix}$$

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx \qquad \begin{matrix} divergent \text{ då } p > 1 \\ konvergent \text{ då } p \leq 1 \end{matrix}$$

Jämförelsesatsen

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ på $[a, \infty]. Då\ gäller\ följande$:

$$\int_a^\infty g(x)\ dx\ \ konvergent \quad \rightarrow \int_a^\infty f(x)\, dx \text{ är } konvergent$$

$$\int_a^\infty f(x)\ dx\ \ divergent \quad \rightarrow \int_a^\infty g(x)\, dx \text{ är } divergent$$

Samband mellan ändliga summor och integraler

$$\sum_{k=p}^{n} f(k) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(n) \ = \int_p^n f(x)\, dx$$

Volymberäkning

Skivformeln

Låt K vara en kropp som ligger mellan planen $x = a$ och $x = b$. Låt $A(x)$ vara arean av skärning mellan kroppen K och planet som genom punkten $(x, 0,0)$ är vinkelrät mot x-axeln. Vi antar att $A(x)$ är **kontinuerlig** i intervallet $[a, b]$.

1, Kroppens volym $V(K)$ kan beräknas med "skivformeln".

$$\boldsymbol{V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx}$$

Rotationsvolym

Låt D vara ett plant område mellan en kontinuerlig kurva $y = f(x), där\ f(x) \geq 0$, och x-axeln som definieras med $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

1, Volymen av kroppen som alstras då området D roterar kring ***x*-axeln** är

$$\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}$$

2, Volymen av kroppen som alstras då samma område D roterar kring ***y*-axeln** är

$$\boldsymbol{V_y = 2\pi \int_a^b x * f(x)\,dx}$$

Area mellan kurvor

Arean under kurvan $y = f(x)$, över kurvan $y = g(x)$ och mellan $x = a$ och $x = b$ $är$:

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\, dx$$

Tips: För att kolla vilken kurva som ligger överst stoppa in godtyckligt x i $[a, b]$, den funktion med störst värde ligger överst.

Kurvlängd

Fall 1: Längden av funktionskurvan $y = f(x)$ i intervallet $a \leq x \leq b$ är

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \; dx$$

Fall 2: Parameterkurva $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, a \leq x \leq b$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \; dt = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} \; dt$$

Partialbråksuppdelning

Att dela upp ett bråk i flera bråkuttryck kallas partialbråksuppdelning.

Skriv som ett bråk:

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Exempel 1:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Exempel 2:

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Förläng till samma nämnare

$$\frac{a(x+1)}{x(x+1)} + \frac{bx}{(x+1)x} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{ax+a+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\mathbf{1} \\ b=\mathbf{-1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{\mathbf{1}}{x} - \frac{\mathbf{1}}{x+1}$$

Primtiva funktioner

Variabelbyte

$Kedjeregeln: Låt\ F\ vara\ primitiv\ till\ f$

$$\underline{\left(F(g(t))\right)'} = F'(g(t)) * g'(t) = \underline{f(g(t)) * g'(t)}$$

$$\int \left(F(g(t))\right)' dt = \int f(g(t)) * g(t)'dt \rightarrow F(g(t)) + C = \int f(g(t)) * g(t)'dt$$

$$\boxed{\boldsymbol{F(g(t)) + C = \int f(g(t)) * g(t)'dt}}$$

$$Antag\ att\ vi\ vill\ beräkna \int f(x)\,dx \qquad med\ bytet\ x = g(t)$$

$$\int \underline{f(x)\,dx} = \underbrace{F(x) + C}_{x=g(t)} = \underline{F(g(t)) + C} = \int \underline{f(g(t)) * g(t)'dt}$$

$$\int \underline{f(x)\,dx} \dashrightarrow \int \underline{f(g(t)) * g(t)'dt} \dashrightarrow \underline{F(g(t)) + C} \dashrightarrow \underbrace{F(x) + C}_{x=g(t)}$$

Exempel:

$$\int \underline{\frac{1}{x+\sqrt{x}}}\, dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \leftrightarrow x = g(t) = t^2\ (t > 0) \\ g'(t) = 2t \end{bmatrix} = \underline{\int \frac{1}{t^2+t} * 2t\, dt} = \int \frac{2}{t+1}\, dt =$$

$\underline{2\ln|t+1| + C}$

Substituera tillbaka $t = \sqrt{x} \rightarrow \underline{2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C}$

Variabelbyte, minnesregel och exempel

$$\int \underline{f(x)\, dx} = \underbrace{F(x) + C}_{x=g(t)} = \underline{F\big(g(t)\big) + C} = \int \underline{f\big(g(t)\big) * g(t)'dt}$$

$$\int \underline{f(x)\, dx} \dashrightarrow \int \underline{f\big(g(t)\big) * g(t)'dt} \dashrightarrow \underline{F\big(g(t)\big) + C} \dashrightarrow \underbrace{F(x) + C}_{x=g(t)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} = g'(t) \rightarrow dx = g'(t)\, dt \qquad ger \\ f(x)\, dx = f\big(g(t)\big) * g'(t)\, dt \end{bmatrix}$$

Exempel
$(x > 1)$

$$\int \frac{1}{x\, \ln x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \quad \leftrightarrow x = e^t \\ \frac{dx}{dt} = e^t \rightarrow dx = e^t dt \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{1}{e^t * t} * e^t\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$dx = \frac{1}{x} du$

Nya gränserna blir

$x = 1\ ger\ u = 0$

$x = e\ ger\ u = 1$

Vi har alltså integralen

$$\int_0^1 u^2\,du = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = F(b) - F(a) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$