$$= \frac{1}{4} c \cdot e^{-c^2} = \frac{1}{4} \cdot c \cdot \frac{1}{e^{c^2}}$$

Vill nu visa att

$$\text{felet} = \frac{1}{4} \cdot c \cdot \frac{1}{e^{c^2}} \leq \frac{1}{8} \text{ om } 0 < c < \frac{1}{2}$$

Notera:

$$\frac{1}{4} \cdot c \cdot \frac{1}{e^{c^2}} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{0^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{8}$$

maximera med $c = \frac{1}{2}$

minimera e^{c^2} med $c = 0$

Anm. Samma c-värde behöver inte användas om vi bara vill finna en övre gräns, och inte det största värdet av felet.

Slutsats Det approximerade värdet avviker faktiskt högst $\frac{1}{8}$ från det exakta värdet. $\blacksquare$

Integralberäkningar med arctan

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

godt. konstant

2019.10.22 #1 #KTH

(b) Beräkna

$$\int \frac{3}{2+8x^2}\,dx$$

Allmänt

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

konstant

$$= 3\int \frac{1}{2+8x^2}\,dx$$

bryt ut 2:an

$$= 3\int \frac{1}{2(1+4x^2)}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+4x^2}\,\underline{\underline{dx}}$$

måste bytas ut

Substitution

$u = 2x$, dvs. $u^2 = (2x)^2 = 4x^2$

$\Downarrow$

$\frac{du}{dx} = 2$ lös ut dx

$\Downarrow$

$du = 2dx$

$\Downarrow$

$dx = \frac{1}{2}du$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{3}{4}\arctan u + C = \frac{3}{4}\arctan(2x) + C$$

godt. konstant

Snabb kontroll av svaret

$$\frac{d}{dx}\,\frac{3}{4}\arctan(2x)$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot\underbrace{2}_{\text{inre derivatan}} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+4x^2}$$

$$= \frac{3}{2+8x^2} \quad \boxed{}$$

2014.09.02#4 (delvis) #UU

Beräkna $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-4x+5}\,dx$

Lösning Steg 1 Prova faktorisera nämnaren x^2-4x+5 genom att först hitta nollställen:

$$x^2-4x+5=0$$

komplexa

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

dvs. x^2-4x+5 kan inte reellt faktoriseras!

Insikt Kan istället kvadratkomplettera:

$$x^2-4x+5 = \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}+1 = (x-2)^2+1$$

Steg 2 $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-4x+5}\,dx$

$$= \int \frac{2}{(x-2)^2+1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,\underline{\underline{dx}}$$

byt ut

Byt $u = x-2$

$$\Downarrow \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\Downarrow \quad dx = du$$

$$= 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= 2\arctan u + C$$

$$= 2\arctan(x-2) + C$$

$\boxtimes$