**Institutionen för Matematik**
**Lars Filipsson**

SF1625
Envariabelanalys

# 6: Användning av derivata

**Innehåll.** Vi ska se exempel på några användningar av derivata: linjär approximation, max och min, växande och avtagande, implicit derivering.

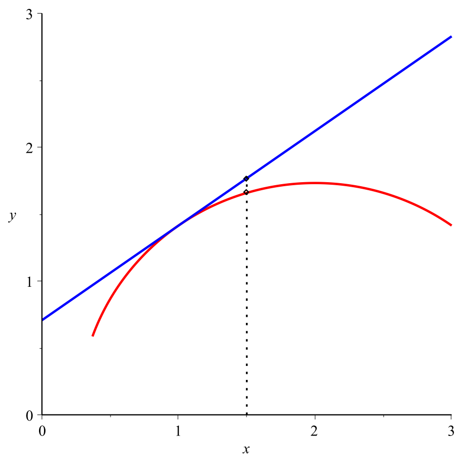
**Introduktion.** Det enda nya som introduceras i denna föreläsning är implicit derivering, i övrigt ser vi bara fler exempel på ideer vi redan har introducerat. Men detta är viktiga saker så se till att träna mycket så det sitter.

**Tangent och linjär approximation.** Om $f$ är deriverbar i punkten $a$ så har funktionsgrafen $y = f(x)$ en unik tangentlinje i punkten $(a, f(a))$ och denna tangentlinje har en ekvation som vi med hjälp av enpunktsformeln för linjens ekvation kan skriva

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Eftersom tangenten approximerar grafen bra när $x$ ligger nära $a$ får vi därför formeln för linjär approximation som

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \qquad \text{för } x \text{ nära } a.$$




**Figur.** *Idén med linjär approximation: vi approximerar y-koordinaten för den punkt där den streckade linjen möter den röda grafen $y = f(x)$ med y-koordinaten för den punkt där den streckade linjen möter den blå tangenten $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.*

**Exempel.** Låt $f(x) = \tan x$. Om vi vill ha en ekvation för tangenten till funktionskurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan där $x$-koordinaten är $\pi/4$, så får vi konstatera att $f(\pi/4) = \tan \pi/4 = 1$ och att $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ och $f'(\pi/4) = 2$. Därför ges den sökta tangenten av ekvationen

$$y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Om vi vill approximera $\tan x$ för $x$ nära $\pi/4$ får vi med formeln för linjär approximation att

$$\tan x \approx 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{för } x \text{ nära } \pi/4.$$

Speciellt kan vi t ex få ett närmevärde till $\tan \pi/5$ genom att sätta in $\pi/5$ istället för $x$ i detta uttryck och få

$$\tan\frac{\pi}{5} \approx 1 + 2\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{10} \approx 0.7.$$

**Max och min.** Vi har tidigare sett att en deriverbar funktion som antar sitt största eller minsta värde i en inre punkt av definitionsmängden måste ha en derivata som är noll där. Det betyder att punkter där derivatan är noll är punkter som är värda att undersöka om man letar efter en funktions största och minsta värde. Om en funktion har ett max och ett min (vilket inte alla funktioner har!) så måste de antas i punkter där derivatan är noll eller i punkter där funktionen inte är deriverbar eller i punkter som är randpunkter till definitionsmängden. Vi skriver upp detta ordentligt.

**Definition av max och min.** Om $f(a) \geq f(x)$ för alla $x$ i definitionsmängden för $f$ så sägs $f(a)$ vara funktionens största värde, eller maximum. Om $f(a) \leq f(x)$ för alla $x$ i definitionsmängden för $f$ så sägs $f(a)$ vara funktionens minsta värde, eller minimum. Om olikheterna gäller i någon omgivning av punkten $a$ (men inte nödvändigtvis i hela definitionsmängden) så talar man om lokala maxima och minima.

**Definition.** Maxpunkter och minpunkter till en funktion $f$, dvs punkter där $f$ antar maximum eller minimum (lokalt eller globalt), kallas extrempunkter till $f$ (lokala eller globala). Maxvärden och minvärden kallas på samma sätt för extremvärden.

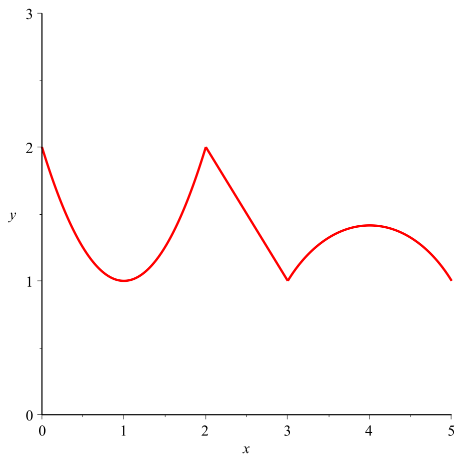
**Definition.** Punkter där $f'(x) = 0$ kallas kritiska punkter, eller stationära punkter, till funktionen $f$.

**Observation.** Kritiska punkter behöver inte vara extrempunkter. Se t ex funktionen $f(x) = x^3$ för vilken origo är en kritisk punkt men inte en extrempunkt.

**Observation.** Max och min måste inte alltid antas i punkter där derivatan är $0$. Se till exempel funktionen $f(x) = |x|$ som antar sitt minsta värde i $x = 0$ där funktionen inte har någon derivata. Ett annat exempel är $f(x) = \sqrt{x}$ som antar sitt minsta värde i punkten $x = 0$ som är randpunkt till definitionsmängden.

**Sats.** Om en funktion tar sitt största eller minsta värde i en punkt $a$ så måste $a$ vara antingen en kritisk punkt till $f$, eller en punkt där $f$ inte är deriverbar, eller en randpunkt till definitionsmängden.

**Bevis.** Anta att $f$ antar sitt största eller minsta värde i punkten $a$ och antag att $f$ är deriverbar i $a$ och att $a$ inte är en randpunkt till definitionsmängden. Det följer av tidigare sats att i så fall är $f'(a) = 0$.




**Figur.** *Funktionsgrafen $y = f(x)$ till en funktion. Största värdet 2 antas i $x = 0$, som är en randpunkt, och $x = 2$, där $f$ inte är deriverbar. Minsta värdet 1 antas i $x = 1$, som är en kritisk punkt, $x = 3$, där $f$ inte är deriverbar, och $x = 5$, som är en randpunkt. Den kritiska punkten $x = 4$ är en lokal (men inte global) maxpunkt.*

**Exempel.** Anta att vi vill bestämma max och min av funktionen $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ när $x$ varierar i intervallet $[-2, 2]$. Vi konstaterar då först att $f$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet och därför vet vi att $f$ måste anta ett största och ett minsta värde. Dessa kan bara antas i kritiska punkter, singulära punkter och ändpunkter till intervallet. Vi deriverar och får $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, som existerar för alla $x$ mellan $-2$ och 2. Vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$ eller $x = \pm 1$. Därför måste $f$:s största och minsta värde finnas med bland dessa funktionsvärden:

$$f(-2) = 9, \quad f(-1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 9.$$

Vi ser att största värdet är 9 och minsta värdet är 0. Observera att denna metod kräver att man från början vet att max och min finns. Då räcker det att undersöka kritiska punkter, sungulära punkter och randpunkter.

**Växande och avtagande.** Följdsatserna till medelvärdessatsen säger att vi kan använda derivata för att avgöra om en funktion är växande eller avtagande. Vi ska se hur detta fungerar i några exempel.

**Exempel.** Låt $f(x) = 2x - \cos x$. Eftersom $f'(x) = 2 + \sin x > 0$ för alla $x$ följer att $f$ är strängt växande på hela $\mathbb{R}$.

**Exempel.** Om vi vill avgöra om $f(x) = x - \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2$ är en växande eller avtagande funktion så kan vi derivera den och få $f'(x) = 1 - (1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x$, vilket är negativt för alla $x$ i intervallet utom i origo då det är $0$. Eftersom $f'(x) \leq 0$ då $-\pi/2 < x < \pi/2$ och $f'(x) = 0$ bara i den enda punkten $x = 0$ så följer att $f$ är strängt avtagande på $-\pi/2 < x < \pi/2$, enligt följdsats till medelvärdessatsen.

**Implicit derivering, inledande exempel.** Givet ekvationen $xy + y^3 + x^4 = 7$, som ju definierar en kurva i xy-planet, så kan man undra om det går att lösa ut $y$ som funktion av $x$, åtminstone lokalt i en omgivning av någon punkt, säg $(-1, 2)$ som ju uppfyller ekvationen. I så fall kan man ju uppfatta kurvan, eller i alla fall en del av den, som en funktionskurva. Ibland kan det vara svårt att lösa ut $y$ explicit, men vi ska se att det finns en metod att avgöra frågan utan att explicit skriva upp funktionen $y(x)$. Metoden kallas implicit derivering.

Om ekvationen implicit definierar $y$ som funktion av $x$ kan vi skriva den så här:

$$xy(x) + y(x)^3 + x^4 = 7.$$

Eftersom vänster led och höger led är lika så är deras derivator med avseende på $x$ också lika, så vi får med användande av produktregeln och kedjeregeln att

$$y(x) + xy'(x) + 3y(x)^2 y'(x) + 4x^3 = 0.$$

Om vi i detta sätter in vår punkt, dvs $x = -1$ och $y = 2$ får vi

$$2 - y'(-1) + 12y'(-1) - 4 = 0.$$

Här kan vi lösa ut $y'(-1)$ och vi får att $y'(-1) = 2/11$. Det betyder att en tangent till kurvan är

$$y = 2 + \frac{2}{11}(x + 1).$$

Eftersom tangenten approximerar kurvan så ger denna tangent en god ide om hur kurvan ser ut nära punkten. Eftersom vi kan lösa ut $y'(-1)$ så säger det här förfarandet också att ekvationen definierar $y$ som deriverbar funktion av $x$ i en omgivning av punkten och att det alltså ”i princip” går att lösa ut $y$. Detta enligt implicita funktionssatsen som vi dock inte bevisar här.