SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 4

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Förra veckan

Vad innehöll Modul 1?

- Funktionsbegreppet, inklusive
  - Definitionsmängd, värdemängd, funktionsgraf
  - Udda, jämn, begränsad funktion
- Gränsvärde, Kontinuitet
  - Precisa definitioner
  - Några satser (räkneregler, max/min, SOMV...)
- Elementära och icke-elementära funktioner
  - Poly, Rat, Trig, Abs, Rot vs. Heaviside

Översikt över modul 2

- Derivata (2.1-2.7)
  - Definition av derivata
  - Derivatan av några grundläggande funktioner
  - Deriveringsregler
  - Derivata och kontinuitet
  - Linjär approximation (Linjarisering)
  - Högre ordningens derivator
- Medelvärdessatsen (2.8)
- Implicit derivering (2.9)

Mål för modul 2

Det centrala målet för veckan:

- Bli extremt bra på att **derivera** (även implicit)
- Bli bra på att **använda derivata**
  - För **linjär approximation**
  - För att avgöra när funktioner **växer/avtar**

Diskutera i breakout-rooms:

Låt $f(t)$ vara en funktion som mäter något som varierar över tid, t ex körsträckan hos en bil, bakteriemängden i din hals, temperaturen utanför ditt fönster....

Definiera vad som menas med **förändringen** av f.
Finns det flera tänkbara svar?

$f(t)$ förändring från t_0 till t_1

$$f(t_1) - f(t_0) = \Delta f$$

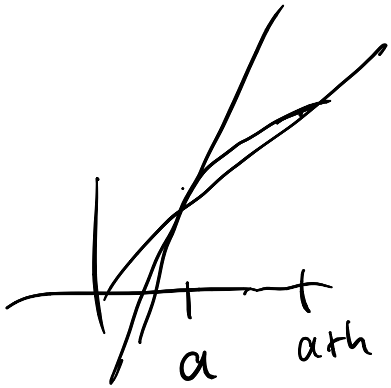
$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$ medelförändring medelhastighet

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{df}{dt} = f'(t_0)$$

Derivata

Derivatans definition:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



om detta gränsvärde existerar ändligt
(annars är f inte deriverbar i a).

Alternativ skrivning:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

om detta gränsvärde existerar ändligt
(annars är f inte deriverbar i a).

Derivata

Derivatan av några funktioner:

$$\frac{d}{dx}C = 0, \quad C \text{ konstant}$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\,\underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x\,\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right)$$

$$= \cos x$$

Deriveringsregler

Sats: Om f och g är deriverbara så gäller

$$\frac{d}{dx}kf(x) = kf'(x) \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \text{(produktregeln)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{(kvotregeln, } g(x) \neq 0\text{)}$$

$$\frac{d}{dx}f((g(x)) = f'(g(x))g'(x) \qquad \text{(kedjeregeln)}$$

Exempel. Derivera med avseende på x!

1. $f(x) = x \sin x$
2. $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x$$

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Exempel. Derivera med avseende på x!

3. $h(x) = \sin^2 x$ $= (\sin x)^2$. $h'(x) = 2 \sin x \cos x$

4. $k(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$

$$k'(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

Exempel. Derivera med avseende på x!

5. $\ell(x) = x\cos^2(x^3)$

$$\ell'(x) = 1\cdot\cos^2(x^3) + x\cdot 2\cos(x^3)(-\sin(x^3))3x^2$$

$$= \cos^2(x^3) - 6x^3\cos(x^3)\sin(x^3)$$

6. $t(x) = \tan x$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

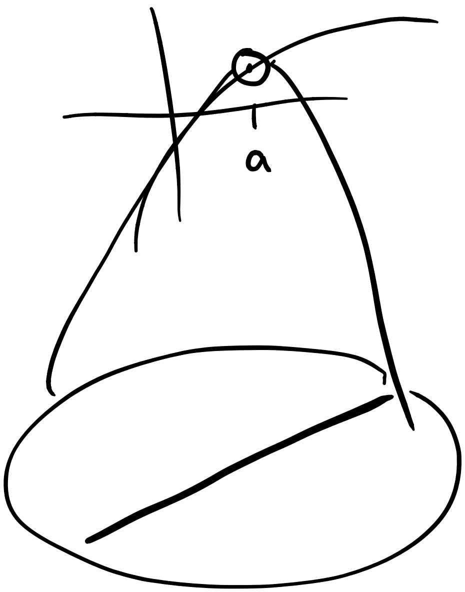
$$t'(x) = \frac{\cos x\cos x + \sin x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

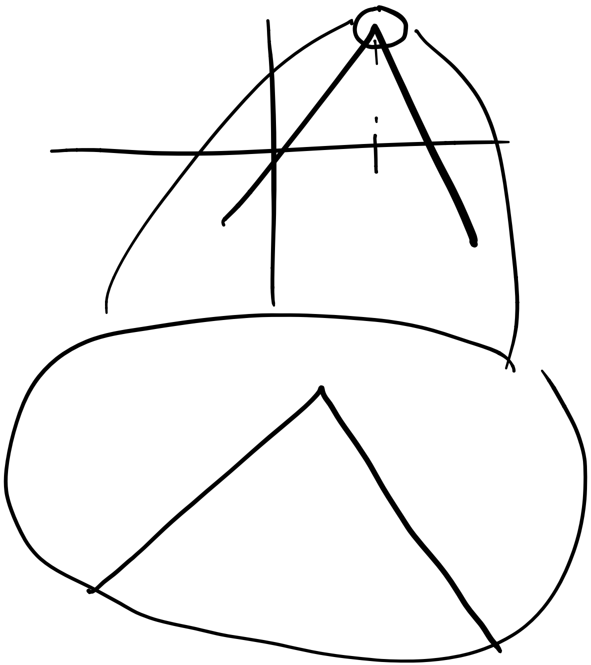
Derivata

Sats. Om f är deriverbar i a så måste f vara kontinuerlig i a.

Bevis i filmen.

Exempel: $f(x) = |x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar i origo!


a



Medeltillväxt och momentan tillväxt

Medeltillväxt (medelförändring) av f från a till $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Momentan tillväxt (förändringstakt) av f i punkten a:

$\frac{df}{dx}$ $\qquad$ $f'(a)$ $\qquad$ (förutsatt att f är deriverbar i a.)

Exempel: medelhastighet och hastighet!

Tangent och linjarisering (linjär approximation)

Tangent: Om f är deriverbar i a så har grafen $y = f(x)$ en tangentlinje i punkten $(a, f(a))$ med ekvation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Linjarisering (linjär approximation): Om f är deriverbar i a så kan derivatan användas för att approximation enligt

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{för } x \text{ nära } a.$$

Exempel 1.

Finn en ekvation för tangenten till kurvan $y = \underbrace{x^3 + 1}_{f(x)}$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat -2.

$f(-2) = -7$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(-2) = 12$

Tangentens ekvation fås m. enpunktsformeln:

$$y = -7 + 12(x+2)$$

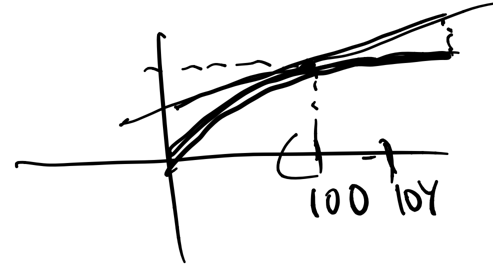
Exempel 2.

Finn den linjära approximationen av $g(x) = \sqrt{x}$ när x ligger nära 100 och bestäm ett närmevärde till $\sqrt{104}$.

$x^{1/2}$

$g(100) = \sqrt{100} = 10$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $g'(100) = \frac{1}{20}$



T: $y = 10 + \frac{1}{20}(x-100)$

LA $g(x) \approx 10 + \frac{1}{20}(x-100)$ spec. $g(104) \approx 10 + \frac{1}{20}(104-100)$

x nära 100 $= 10.2$

Exempel 3.

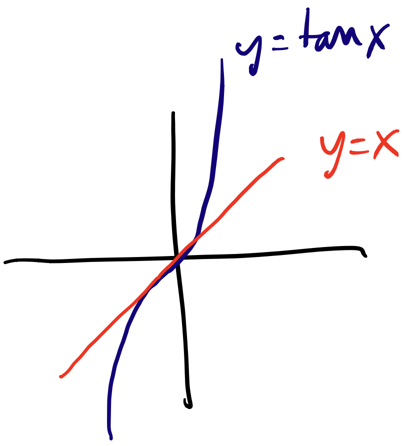
Finn linjariseringen av $h(x) = \tan x$ när x ligger nära 0 och bestäm ett närmevärde till $\tan \frac{1}{10}$.

$h(0) = 0$, $h'(x) = 1 + \tan^2 x$, $h'(0) = 1$

T: $y = \underline{0 + 1 \cdot (x - 0)}$ dvs $y = \underline{x}$

LA: $\underset{\tan x}{h(x)} \approx x$ x nära 0

spec. $\tan \frac{1}{10} = h\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10}$



Högre ordningens derivator

Att derivera derivatan

Om $f(x)$ är deriverbar så är $f'(x)$ en funktion som talar om hur $f(x)$ förändras.

Om $f'(x)$ är deriverbar så är $f''(x)$ en funktion som talar om hur $f'(x)$ förändras.

Andraderivatan $f''(x)$ skrivs ibland också $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

Och så vidare! Om f är n gånger deriverbar skrivs den n:te derivatan $f^{(n)}(x)$ eller $\dfrac{d^n f}{dx^n}$

Läxa

Till nästa gång:

Derivera många funktioner. Ta fram tangenter. Gör linjär approximation.

Se film 4. Medelvärdessatsen