SF1625 Envariabelanalys

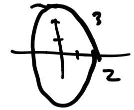
Föreläsning 18

Lars Filipsson

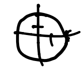
Institutionen för matematik
KTH

Kurvor i planet

- Andragradskurvor
  - ellips (o cirkel)
  - parabel $y = x^2$
  - hyperbel
- Parameterkurvor
- Kurvlängd

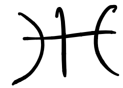


$$\frac{x^2}{4} + \frac{}{9} = 1$$



$$\left(x^2 + y^2 = 4 \right)$$

$$x^2 - y^2 = 1$$



Kurvor i planet

Linjer

Andragradskurvor: ellipser, parabler, hyperbler

Nyhet: parametrisering (ett annat sätt att framställa en kurva)

Parametrisering

Linjer med ekvation resp parameterframställning:

Från ekvation till parameterframställning

$y = 2x + 3$ har en parametrisering $x = t,\ y = 2t + 3,\ t \in \mathbb{R}$

$y = -4x - 1$ har en parametrisering $x = t,\ y = -4t - 1,$

$t \in \mathbb{R}$

Från parameterframställning till ekvation

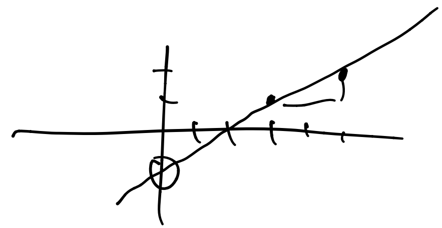
$x = t, \ y = 5t + 2, \ t \in \mathbf{R}$, är en parametrisering av en linje som också ges av en ekvation $y = 5x + 2$

$(x, y) = (2t + 3, t + 1), \ t \in \mathbf{R}$, är en parametrisering av en linje som också ges av en ekvation

$x = 2t + 3$ ger $t = \frac{x-3}{2}$

och $y = \frac{x-3}{2} + 1$

dvs $\underline{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}$.

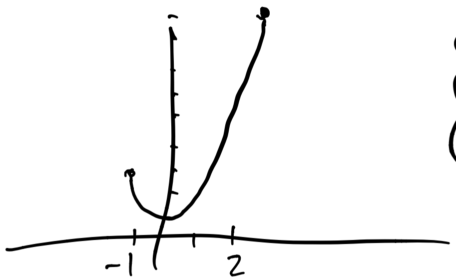


Parametriserad parabel

Parabel med ekvation och parameterframställning:

En parametrisering av $y = x^2$ är t ex $x = t,\ y = t^2,\ t \in \mathbb{R}$.

En parametrisering av den bit av parabeln med ekvation $y = 2x^2 + 1$ som startar i $(-1, 3)$ och slutar i $(2, 9)$ är

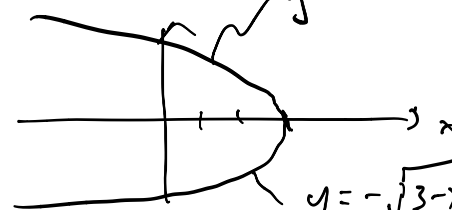


$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}, \quad -1 \le t \le 2$$

Parametriserad parabel

Parametrisera parabeln med ekvation $x + y^2 = 3$

$$\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



$y = \sqrt{3-x}$ här

$y = -\sqrt{3-x}$ här

eller

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3-t} \text{ om } t \leq 3 \quad \text{och} \quad y = -\sqrt{3-t} \text{ om } t > 3, \end{cases}$$

$t \leq 3$

Parametriserad parabel

Två olika sätt att beskriva samma kurva:

Parabeln består av alla punkter (x, y) sådana att $x + y^2 = 3$

Parabeln består av alla punkter (x, y) sådana att $x = 3 - t^2$ och $y = t$ för $t \in \mathbb{R}$

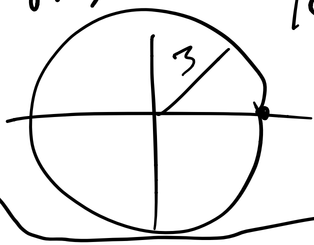
Parametriserad cirkel

Cirkel med ekvation och parameterframställning:

Parametrisering av enhetscirkeln i filmen. $x = \cos t$, $y = \sin t$, t från 0 till 2π

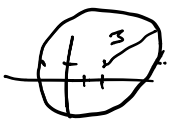
Parametrisera cirkeln med medelpunkt i $(2, 1)$ och radie 3.

runt origo: $9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9$



Param: $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

runt $(2,1)$:



Param. $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = 1 + 3\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

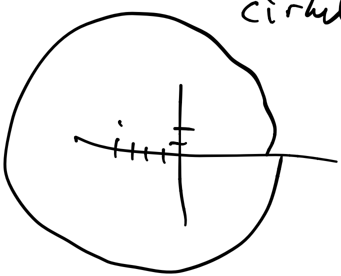
Parametrisering

Parametrisera kurvan $\underline{x^2 + 8x + y^2 - 4y = 80}$. Vilken slags kurva är det?

$$\Leftrightarrow \quad (x+4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 = 80$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{(x+4)^2 + (y-2)^2 = 100}$$

cirkel, radie 10, medelpunkt $(-4, 2)$



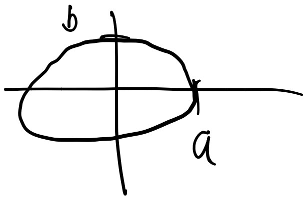
Parametrisering: $\begin{cases} x = -4 + 10\cos t \\ y = 2 + 10\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

Kurvor i planet

Ellips med ekvation och parameterframställning:

En viss ellips med medelpunkt i origo har ekvation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Samma ellips har parameterframställning
$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$ med t från 0 till 2π.

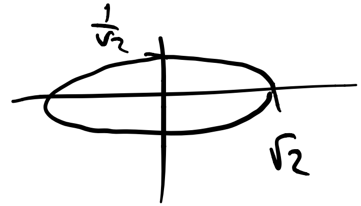
En ellips m. samma halvaxlar a, b och centrum i $(2,1)$

har ekv: $\dfrac{(x-2)^2}{a^2} + \dfrac{(y-1)^2}{b^2} = 1$ o par: $\begin{cases} x = 2 + a\cos t \\ y = 1 + b\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

Kurvor i planet

Parametrisera ellipsen $x^2 + 4y^2 = 2$. $\iff \frac{x^2}{2} + 2y^2 = 1$

$\iff \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$



Parametrisering: $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

Hyperbel: Se boken

Längd av parameterkurva

Längd L **av kurva** med parametrisering $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$:

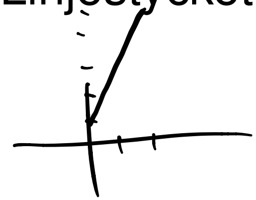
$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

OBS om funktionskurva $y = f(x)$ med. par. $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Längd av parameterkurva

Linjestycket $x = t$, $y = 2t + 1$, $0 \leq t \leq 2$, har längd



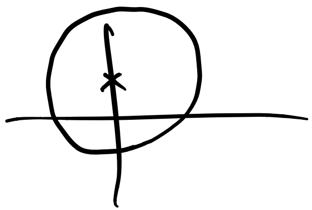
Om $x = t$ så är $x'(t) = 1$
$y = 2t + 1$ $y'(t) = 2$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1^2 + 2^2}\, dt = 2\sqrt{5}$$

$$\left(= \int_0^2 \sqrt{5}\, dt = \left[\sqrt{5}\, t\right]_0^2 = \sqrt{5}\cdot 2 - \sqrt{5}\cdot 0 = 2\sqrt{5} \right)$$

Längd av parameterkurva

Cirkeln $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, har längd



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt$$

$x = 2\cos t$ ger $x'(t) = -2\sin t$

$y = 1 + 2\sin t$ $\quad y'(t) = 2\cos t$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi.$$

Längd av parameterkurva

Beräkna längden av kurvan som parametriseras genom

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases} \quad \text{för } t \in [0, 1].$$

Får $x'(t) = 6t$
$y'(t) = 6t^2$

$$L = \int_0^1 \sqrt{36t^2 + 36t^4}\, dt = \int_0^1 \sqrt{36t^2(1+t^2)}\, dt = \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2}\, dt$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1+t^2 = u \\ 2t\,dt = du \\ t=0 \text{ ger } u=1 \\ t=1 \text{ ger } u=2 \end{array} \right\} = \int_1^2 3\sqrt{u}\, du = 3\int_1^2 u^{1/2}\, du = 3\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2$$

$$= \left[2u^{3/2}\right]_1^2 = 4\sqrt{2} - 2.$$

Längd av parameterkurva

Beräkna längden av kurvan $x = t,\ y = \ln(1 - t^2),\ 0 \leq t \leq 1/2.$

Läxa inför seminariet

Att göra:

Räkna Hemuppgifter6.pdf. Läs vid behov exempel i boken och gör enklare uppgifter där.

En minitenta

1. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då $y = \cos x$, på intervallet $0 \le x \le \pi/2$, roteras kring y-axeln.

2. Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x} + x^2}{x + x^4}$ är konvergent.

3. Bestäm värdemängden till $f(x) = xe^{2x-1}$.

4. Bestäm Taylorpolynomet p av grad 1 kring $x = 1/2$ till $f(x) = \arcsin x$. Avgör om felet garanterat är mindre än 0.1 om $f(x)$ approximeras med $p(x)$ för x mellan $1/2$ och $3/4$.