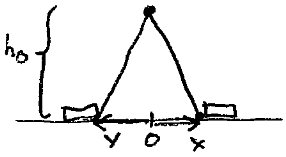
Envariabelanalys 2018-02-06 #10

Mer om implicit derivering

(förut: $f(x,y)=0$ definierar lokalt y som funktion av x "om vi kan beräkna y' med kedjeregeln.)

Nu $f(x(t), y(t)) = 0$ givet, söker samband mellan $x'(t)$ och $y'(t)$

ex. 4.1:38



Rep, längd $15m = \ell$.
Villkoret mellan x,y:

$\ell = \sqrt{h_0^2+y^2} + \sqrt{h_0^2+x^2}$ Derivera (implicit) m.a.p. t:

$$0 = \underset{\text{y.d.}}{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{h_0^2+y^2}}} \cdot \underset{\text{i.d.}}{\cancel{2}y\cdot y'} + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{h_0^2+x^2}}\cdot\cancel{2}xx'$$

så $y' = -\dfrac{xx'}{\sqrt{h_0^2+x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{h_0^2+y^2}}{y}$ ger y' då x', x, y är kända

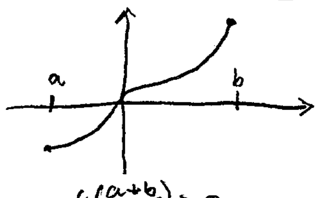
Här $h_0 = 4m$ $x(t_0) = 3m$, $x'(t_0) = \frac{1}{2}m/s$, så $\sqrt{h_0^2 + x(t_0)^2} = \sqrt{16+9}_m = 5_m$

så $\sqrt{h_0^2 + y(t_0)^2} = 10\,m$ $(\ell - 5m)$, $y(t_0)^2 = (10^2-4^2)m^2 = 84m^2$

och $y'(t_0) = -\dfrac{3\cdot\frac{1}{2}}{5}\cdot\dfrac{10}{\sqrt{84}}\, m/s = -\dfrac{3}{\sqrt{84}}\, m/s \approx 0{,}327\ m/s$

Om det finns approximativa lösningar till ekv $f(x)=0$

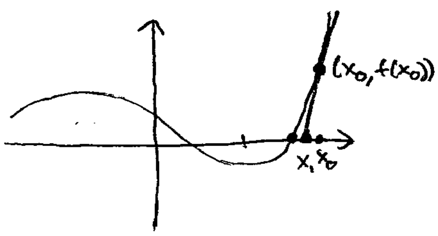
Om $f(x)$ är <u>kontinuerlig</u>: m. satsen om mellanliggande värden.



intervallhalvering; om $f(a)<0$, $f(b)>0$ och $f(x)$ definierad i hela intervallet $[a,b]$ ger rot m. godt. noggrannhet, men ganska långsamt.

$f(\frac{a+b}{2})>0$

Om $f(x)$ är deriverbar och x_0 är en approximativ lösning



Approximera $f(x)$ med tangenten i $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

dess skärning med x-axeln: $(x_1, 0)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En följd approximationer till en rot.
Newton-Ralphsons metod

ex. För att bestämma $\sqrt{a}$, $a>0$: $f(x)=x^2-a$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

om $a=3$, $x_0=1,5$

ger $x_1 = 1,75$ $\quad x_2 = 1,7321428\ldots$ $\quad$ snabb konvergens

$x_3 = 1,7320508100\ldots$

$x_4 = 1,7320508075688772952$

$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935 2$

Allm. finn fixpunkter för $g(x)$, dvs x med $g(x)=x$.
Finner dem (ibland) med $x_{n+1}=g(x_n)$

Om l'Hospitals regler

Sats: Om f,g är deriverbara, $g'(x)\neq 0$ i (a,b)
och $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ eller $\pm\infty$
och $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar (i $\mathbb{R}$ eller $\pm\infty$)

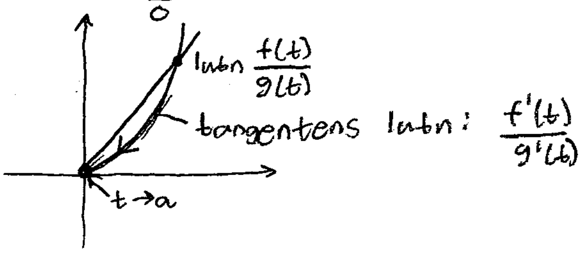
så är $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ex. sök $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{2-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \left\{\frac{"0"}{0}\right\} \overset{\text{om existerar}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{0-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)} \left\{\frac{"0"}{0}\right\}$

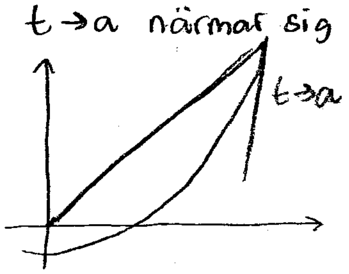
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \underline{\underline{4}}$$

Varför? $\frac{"0"}{0}$

$(g(t), f(t))$
en kurva i planet



Då $t\to a$ närmar sig sekanten till tangenten



Ex. $\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} \left\{\frac{"\infty"}{\infty}\right\} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{-x}} = 0$

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{t\to 0+} (\cos t)^{\frac{1}{t^2}}$

$\ln \lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} =$ tag ln: $\lim\limits_{t\to 0+} \ln(\cos t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to 0+} \frac{\ln(\cos t)}{t^2} \left\{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right\} \lim\limits_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)}{2t}$

$$= \lim_{t\to 0+} \underbrace{\frac{-1}{2\cos t}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1} = -\frac{1}{2}$$

Så $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Men $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ kan existera även om $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ inte gör det.

ex $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

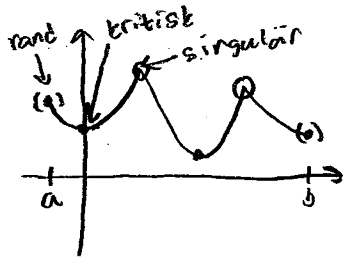
men $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$ existerar inte.

Var kan (lokalt) extremum (max eller min) för $f(x)$ finnas?

Vi visade att om x_0 är en lokal extrempunkt, x_0 en inre punkt i $D(f)$ och $f'(x_0)$ def., så är $f'(x_0) = 0$

Så alla lokala extrempunkter finns bland:

- kritiska punkter, där $f'(x) = 0$
- singulära punkter, där $f'(x)$ inte är def.
- randpunkter till $D(f)$



Ex. Finn alla lokala extrempunkter för $f(x) = \arctan 3x - \arctan x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{3+3x^2-1-9x^2}{(1+9x^2)(1+x^2)} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)} = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+x\right)}{(1+9x^2)(1+x^2)}$$

enda kandidater: de kritiska punkterna $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

x	"$-\infty$"		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		"∞"
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	(0)
			lok. min.		lok. max.		

Ex. Finn alla lokala extremvärden för

$$f(x) = x^4 - 32|x-1| \text{ då } -3 \leq x \leq 3.$$