Envariabelanalys 2018-01-29 #7

Viktiga gränsvärden

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0$ om $a > 1$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$ om $\alpha > 0$ $\lim_{x\to 0+} x^a \cdot \log_a x = 0$ om $a > 0$

Idag om exponentialfunktioner och logaritmer

$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$

Potenser $\overset{\text{exponent}}{\underset{\text{bas}}{a^\alpha}}$ $a > 0$ (åtminstone), $\alpha \in \mathbb{R}$

enklast $\alpha \in \mathbb{Z}$: $a^0 = 1$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ st}}$ om $n > 0$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ om $n < 0$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(a\,b)^n = a^n b^n$ potenslagarna

$\alpha \in \mathbb{Q}$ (dvs $= \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$) och $a > 0$

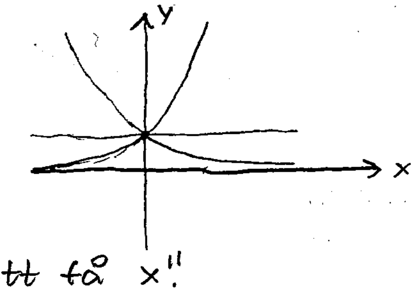
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ← (det positiva tal x som uppfyller $x^n = a$)

$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ potenslagarna gäller fortfarande.

Godtyckligt $\alpha \in \mathbb{R}$? Kan definieras som ett gränsvärde...

Om det är klart, fås två olika funktioner:

- potensfunktionen x^α, $x > 0$ (åtminstone)
  - Strikt växande om $\alpha > 0$
  - Strikt avtagande om $\alpha < 0$
- exponentialfunktionen a^x (med $a > 0$), definierad för alla $x \in \mathbb{R}$
  - Strikt växande då $a > 1$
  - strikt avtagande då $a < 1$
  - konstant $= 1$ då $a = 1$



Så om $a > 0, \neq 1$ har funktionen a^x en inversfunktion, $\log_a x$

$\log_a x$: "det vi ska upphöja a till för att få x"

$a^{\log_a x} = x$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$

Exponentialfunktionen a^x har def.mängd $\mathbb{R}$, värdemängd $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$
$\log_a x$ —"— $\mathbb{R}_+$ —"— $\mathbb{R}$

$\underset{s}{a^x} \cdot \underset{t}{a^y} = \underset{s \cdot t}{a^{x+y}}$ ger $\log_a s + \log_a t = x + y = \log_a (s \cdot t)$

$\log_a(st) = \log_a s + \log_a t$ $\qquad \log_a 1 = 0$

$\log_a(s/t) = \log_a s - \log_a t$

$\log_a(s^r) = r \log_a s$ $\qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ *

* gäller ty $b^{\log_b a \cdot \log_a x} = (\underbrace{b^{\log_b a}}_{a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x$, så $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$

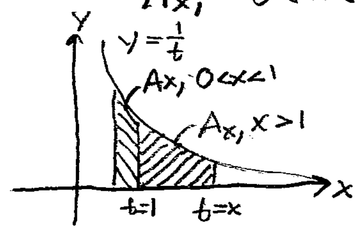
ex. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ 1) $a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (\underbrace{a^{\log_a b}}_{b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a = a^1$

2) tag $x = b$ i den sista ovan! $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

Boken definierar i 3.3 den naturliga logaritmen $\ln x$ enligt (för $x>0$)

$$\ln x = \begin{cases} A_x, & x \geq 1 \\ -A_x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

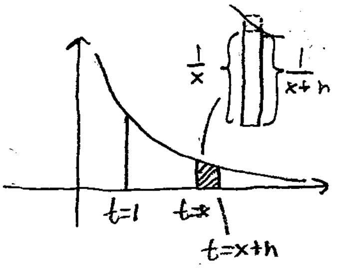
där A_x är arean av området mellan $t=1$, $t=x$, $y=0$, $y=\frac{1}{t}$ och visar att då $\underbrace{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$



ty: (om $x>1$)

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0+} \underbrace{\frac{A_{x+h}-A_x}{h}}_{\frac{1}{x+h} < \quad < \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{h\to 0-} \text{—〃—} = \frac{1}{x} \text{ p.s.s.}$$



Logaritmlagarna för ln:

$$\frac{d}{dx}(\ln(xy) - \ln(x)) = \frac{1}{xy}\cdot y - \frac{1}{x} = 0$$

så $\ln(xy) = \ln x + C$, någon "konstant" $C(y)$

spec. $x=1$: $\ln y = \underbrace{\ln 1}_{=0} + C$, $C = \ln y$

Så $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

ex. $D\ln|x| = \begin{cases} D\ln x = \frac{1}{x} & x>0 \\ D\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & x<0, \end{cases}$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$D\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \underset{\text{y.d}}{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$

$D(\ln) = \mathbb{R}_+$, $R(\ln) = \mathbb{R}$ ty $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ eftersom $\ln 2^n = n\overbrace{\ln 2}^{>0}$ och ln är växande

$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ eftersom $\ln 2^{-n} = -n\ln 2$ —〃—

Dess invers: $\exp x$, $D(\exp) = \mathbb{R}$, $R(\exp) = \mathbb{R}_+$

invers, så $\underset{x\in\mathbb{R}}{\ln(\exp x)=x}$; $\exp(\ln x)=x,\ x>0$

definiera $\underset{\text{Eulers tal}}{e}=\exp 1\approx 2{,}71828$

Då är $\exp x = e^x$, $\ln x = \log_e x$

$$De^x=\frac{1}{D\ln y\big|_{y=e^x}}=e^x \qquad\qquad Df^{-1}(x)=\frac{1}{Df(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}}$$

Vi definierar $a^x=e^{x\cdot\ln a}$ $(a>0, x\in\mathbb{R})$, $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$

så $Da^x=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$

$D\log_a x=\frac{1}{\ln a\cdot x}$

ex. logaritmisk derivering

Vad är $D\underbrace{x^{(e^x)}}_{y}$, $x>0$; y'?

jo, $\ln y=e^x\cdot\ln x$ $\qquad\qquad$ $\ln a^b=b\cdot\ln a$

$\frac{1}{y}y'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}$

så $y'=\underset{x^{e^x}}{\underset{\shortparallel}{y}}\,e^x(\ln x+\frac{1}{x})$

Några gränsvärden med exp. och log-funktioner

Först: $\ln x\leqslant x-1$ då $x>0$

ty: $f(x)=\ln x-(x-1)$ ger $f'(x)=\frac{1}{x}-1\begin{cases}>0 \text{ då } 0<x<1\\ <0 \text{ då } x>1\end{cases}$

så
$$\begin{array}{cccc} x & 0 & & 1 & \\ f' & & + & & - \\ f & & \nearrow & 0 & \searrow \end{array}$$

så $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$ om $\alpha>0$ ("nämnaren växer snabbare")

ty: Om $x>1$: $s=\frac{\alpha}{2}>0$ ger $0<s\cdot\ln x=\ln x^s\leqslant x^s-1<x^s$

så $0<\ln x<\frac{1}{s}x^s$, $0<\frac{\ln x}{x^\alpha}<\underbrace{\frac{1}{s\cdot x^s}}_{\to 0 \text{ då } x\to\infty}$

ex. $\lim_{x\to 0+}x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+}e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}=e^{\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x}=e^0=1$

ty $\lim_{x\to 0+}x^\alpha\cdot\log_a x=\left\{\begin{matrix}x=\frac{1}{t}\\ x\to 0+\Leftrightarrow t\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{\overset{=-\log_a t}{\log_a\frac{1}{t}}}{t^\alpha}=0$

$\alpha>0$