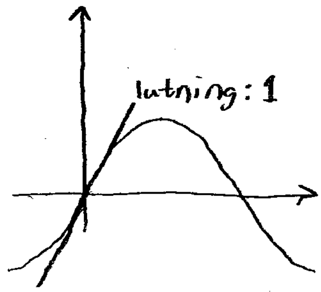
Envariabelanalys 2018-01-24 #5

Mer om derivator

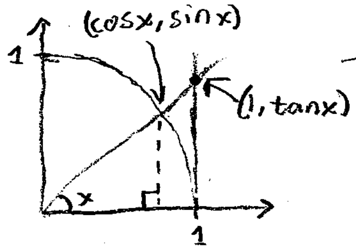
Först om derivator av trigonometiska funktioner



Ett viktigt standardgränsvärde: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$:

inre Δ:s area < cirkelsektorns area < yttre Δ:s area



$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2\pi} < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

$\frac{2}{\sin x}>0$: $0<1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$

ivertera (byt $< \to >$) $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ — gäller för alla x med $0<|x|<\frac{\pi}{2}$

instängningsprincipen och $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ ger:

$1\leq \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\leq 1$ ty hö-gr.v = vä-gr.v

($\frac{\sin x}{x}$ en jämn funktion)

Med det: $D\sin x=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-\sin(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}=\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})}_{\cos x}\cdot\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1}=\cos x$

$D\cos x=D\sin(\frac{\pi}{2}-x)\underset{\text{kedjeregeln}}{=}\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(-1)=-\sin x$

$D\tan x=D\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\left(=1+\tan^2 x\right)$

pss $D\cot x=-\frac{1}{\sin^2 x}\left(=-1-\cot^2 x\right)$

Ex. en funktion $f(x)$, deriverbar för alla $x\in\mathbb{R}$, men $f'(x)$ är inte kontinuerlig för alla x.

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$x\neq 0$: $f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}$ — $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ existerar inte

$x=0$: $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\underbrace{\frac{h^2\cdot\sin\frac{1}{h}}{h}}_{h\sin\frac{1}{h}}=0$

Men derivatan har alltid mellanliggande-värdesegenskapen

Ö.ex 2.8:29 sid. 143

Om medelvärdessatsen

först: Def. Funktionen $f(x)$ har (lokalt) maximum i punkten $x=c$ omm för något $\delta>0$: $|x-c|<\delta \Rightarrow f(x)\le f(c)$
minimum $\ge$

Satsi: Om $f(x)$ har max eller min för $x=c$, inre punkt i $D(f)$, och $f'(c)$, så är $f'(c)=0$

ty: Om $f(x)$ har max i $x=c$ (inre punkt i $D(f)$): för $c<x<c+\delta$: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$

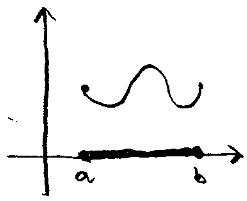
$\lim\limits_{x\to c^+}\ldots$ ger $f'_+(c)\le 0$

pss för $c-\delta<x<c$: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$, så $f'_-(c)\ge 0$

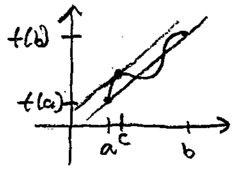
$f'(c)=f'_+(c)=f'_-(c)$ ger $f'(c)=0$
ty $f'(c)$ existerar

Rolles sats: Om f är kontinuerlig i $[a,b]$ och deriverbar i $]a,b[$ $(a<b)$ och $f(a)=f(b)$, så finns $c\in]a,b[$ med $f'(c)=0$

ty: f kontinuerlig i $[a,b]$ ger att f antar största och minsta värden.
Om $f(x)=f(a)$ för alla $x\in[a,b]$ är $f'(c)=0$ för alla $c\in]a,b[$
annars $f(x)>f(a)$, ngt $x\in]a,b[$, så största/minsta värdet antas i något $c\in]a,b[$ med $f'(c)=0$



Medelvärdessatsen: Om f är kontinuerlig i $[a,b]$, deriverbar i $]a,b[$, så finns $c\in]a,b[$ med $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

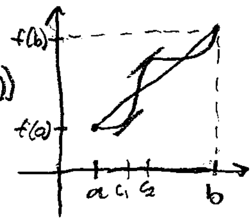


ty. Rolles sats på $g(x)=(f(x)-f(a))(b-a)-(f(b)-f(a))(x-a)$
$(g(a)=g(b)\ (=0))$
ger att $g'(c)=0$ för något $c\in]a,b[$:
$\ \ \parallel$
$f'(c)(b-a)-(f(b)-f(a))$

Obs att f måste vara deriverbar i alla punkter i $]a,b[$,
ex $f(x)=|x|$ i $[-1,1]$: det finns inget $c\in]-1,1[$ med

$$\underbrace{f(1)-f(-1)}_{=0}=f'(c)\underbrace{(1-(-1))}_{=2}$$

ex. Om f är två gånger deriverbar i $]a,b[$, kont. i $[a,b]$ och kurvan $y=f(x)$ skär sekanten från $(a,f(a))$ till $(b,f(b))$ i $(d,f(d))$, $a<d<b$, så finns $c\in]a,b[$ med $f''(c)=0$



ty: det finns $c_1\in]a,b[$, $c_2\in]d,b[$ med

$$f'(c_1)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a}=\frac{f(b)-f(d)}{b-d}=f'(c_2)\quad \text{(medelvärdessatsen)}$$

Rolles sats på f' i $[c_1,c_2]$ ger påst.

Sats: Om f är deriverbar i $]a,b[$ och $f'(x)=0$ för alla $x\in]a,b[$, så är f konstant där.

ty medelvärdessatsen: tog $x_0\in]a,b[$, $x_1\in]a,b[$ ger
$$\underbrace{f(x_1)-f(x_0)=f'(c)}_{=0}(x_1-x_0),$$ något c mellan x_1 och x_0. □

-speciellt: $f'(x)=g'(x)$ i ett intervall $\Rightarrow f(x)=g(x)+c$ där, ngn konstant c.
ty $f(x)-g(x)$ har derivatan 0

[generaliserad medelvärdessats: Om $f(x), g(x)$ kont. i $[a,b]$, deriverbara i $]a,b[$, $g'(x)\neq 0$, så finns $c\in]a,b[$ med $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

visas med $h(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(a))-(g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$ o Rolle]

Def. $f(x)$ är (strängt) växande i intervallet $[a,b]$ omm $a\leq x_1<x_2\leq b \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
avtagande $>$

Sats: Om $f'(x)>0$ ($<$) i $]a,b[$ så är f (strängt) växande (avtagande) i $]a,b[$

b $a\leq x_1<x_2\leq b$ ger $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0$
$c\in]x_1,x_2[$

mvs
$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$
derivatans def
$f(b)-f(a)\approx f(a)(b-a)$

ex. $f(x)=x-\sin x$
har $f'(x)=1-\cos x$ som är >0 i $]n\cdot 2\pi,(n+1)2\pi[$

x	$n\cdot 2\pi$		$(n+1)\cdot 2\pi$		$(n+2)\cdot 2\pi$
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$	$n\cdot 2\pi$	$\nearrow$	$(n+1)\cdot 2\pi$	$\nearrow$	$(n+2)\cdot 2\pi$

så $f(x)$ är strängt växande trots att $f'(x)=0$ i enstaka punkter