SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 19

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Program

Idag: Talföljder och **Serier**, kap 9.1-9.3+9.5 i boken

- Konvergens eller divergens?
- Om konvergent, kan det beräknas?
- Jämförelser

Imorgon: Tema derivator + minitentor

I övermorgon: Tema integraler + minitentor

Bakgrund

En **talföljd** är en följd av tal, t ex

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

En **serie** är en ”oändlig summa” av tal, t ex

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots$$

Talföljder

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$

Definition. En talföljd $\{a_n\}$ är **konvergent** med gränsvärde L om det för varje reellt tal $\epsilon > 0$ finns ett heltal N sådant att $|a_n - L| < \epsilon$ för alla $n \geq N$. Vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{eller} \quad a_n \to L.$$

Exempel:

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\} \text{ är konvergent, men } \{(-1)^n\} \text{ är inte konvergent.}$$

$\to 0$

$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

Exempel: Är talföljderna $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ och $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$ konvergenta?

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+1/n}{1} \to 1 \quad \text{konvergent}$$

$$\frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2\left(1+1/n^2\right)}{n \cdot 1} = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \to \infty \quad \text{divergent.}$$

Talföljder

Viktigt faktum: Om en talföljd är både begränsad och monoton (växande eller avtagande), så måste den vara konvergent.

Serier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} =$$

Serier

För en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definierar man den N:te partialsumman

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Man säger att serien är **konvergent** om talföljden $\{s_N\}$ är konvergent. Om $s_N \to s$ så säger man att seriens summa är s.

Alltså: hugg av, räkna ut och ta gränsvärdet!

Summan av en geometrisk serie: Om $|a| < 1$ så gäller att

$$1 + a + a^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Exempel 1: Visa att serien är konvergent och beräkna den:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Exempel 2: Visa att serien är konvergent och beräkna den:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right)}_{\frac{1}{2} \cdot 1/\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Kriterier för konvergens/divergens

Det finns flera olika **kriterier** för konvergens av serier. De viktigaste är:

Kriterium 0.

Om **seriens termer** inte går mot 0 så är serien divergent.

(Om termerna går mot 0 så *kan* serien vara konvergent, men den *måste* inte vara det.)

Exempel: Avgör om dessa serier är konvergenta eller divergenta:

A. $\sum_{n=3}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n}$ $\cos\frac{\pi}{n} \longrightarrow 1 \neq 0$ när $n\to\infty$, så $\sum_{n=3}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n}$ div.

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ $\arctan n \to \frac{\pi}{2} \neq 0$ när $n\to\infty$, så $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ div.

Kriterier för konvergens/divergens

Kriterium 1. Integralkriteriet: (Cauchy's)

Om f är positiv, kontinuerlig och avtagande på intervallet $x \geq 1$ så har

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{och} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

samma konvergensegenskaper, dvs antingen är båda konvergenta eller så är båda divergenta.

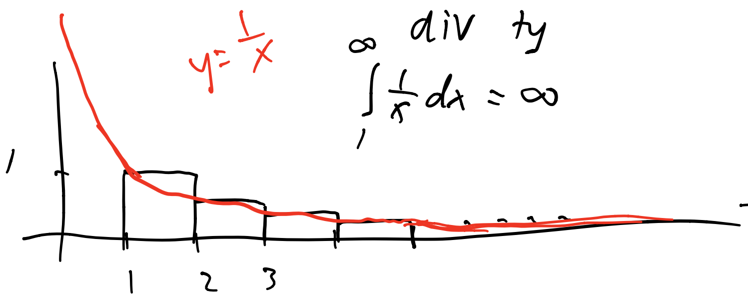
Exempel: Avgör om dessa serier är konvergenta eller divergenta:

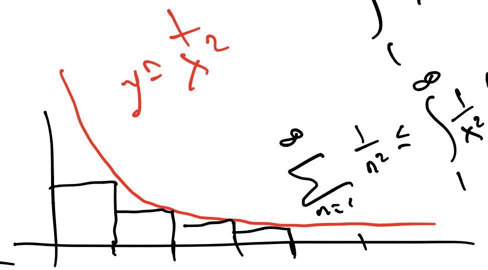
$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

div ty $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$

konv. ty $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ konv.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx + 1$





Kriterier för konvergens/divergens

Zenon: Akilles & Sköldpaddan.

A.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1000} + \dots = \infty$

D.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2.$

(Geom. serie)

Kriterier för konvergens/divergens

Kriterium 2. Jämförelse med andra serier:

Antag att $0 \leq a_n \leq b_n$. Då gäller:

A. Om $\sum b_n$ är konvergent, så är $\sum a_n$ konvergent.

B. Om $\sum a_n$ är divergent, så är $\sum b_n$ divergent.

Exempel: Avgör om dessa serier är konvergenta eller divergenta:

$$\frac{e^{-n}+1}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}+1}{n}$$

och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}+1}{n}$ div.

$0 \leq \frac{1+\cos n}{2^n} \leq \frac{2}{2^n}$ för $n=1,2,3,\ldots$

och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konv. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{2^n}$ konv. enl. jfrlse satsen.

Exempel: Avgör om $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k + 1)}$ är konvergent eller divergent.

Låt $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x + 1)}$. f pos. kont. avtag. på $x \geq 2$

Och $$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln x + 1 = u \\ \frac{1}{x}dx = du \\ x=2 \text{ ger } u = \ln 2+1 \\ x=R \text{ ger } u = \ln R+1 \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\ln 2+1}^{\ln R+1} \frac{1}{u}\,du = \lim_{R\to\infty} \Big[\ln u\Big]_{\ln 2+1}^{\ln R+1} = \lim_{R\to\infty} \Big(\ln(\ln R)+1 - \ln(\ln 2)+1\Big) = \infty \text{ div.}$$

$\Rightarrow$ Serien div. enl. Cauchys integralkriterium.

Exempel: Avgör om dessa serier är konvergenta eller divergenta:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)^{-5/2}$$

$f(x) = (x-1)^{-5/2} = \dfrac{1}{(x-1)^{5/2}}$ pos. kont avt. $x \geq 3$

$$\int_3^\infty (x-1)^{-5/2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_3^R (x-1)^{-5/2}\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{(x-1)^{-3/2}}{-3/2}\right]_3^R = \ldots = \frac{2^{-3/2}}{-3/2} \text{ konv.}$$

$\Rightarrow \sum$ konv. enl. C.I.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3/2}-\ln n}{n^3+n-1}$$

konv.

$$0 \leq \frac{n^{3/2}-\ln n}{n^3+n-1} \leq \frac{n^{3/2}}{n^3} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ pos. kont. avt. $x \geq 1$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ konv. $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ konv.

enl. Cauchys kriterium.

Exempel

Svårare exempel

Beräkna gränsvärdet

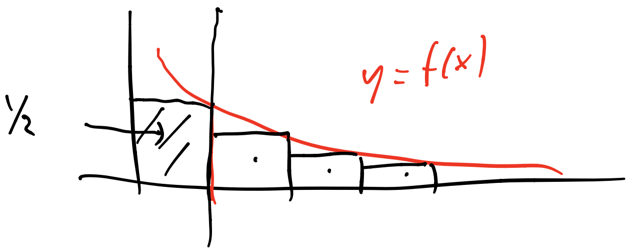
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$$

Svårare exempel

Visa att

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \leq \frac{\pi+1}{2}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ pos. kont. avt. $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$



$\Sigma \leq \int + \frac{1}{2}$

Svårare exempel

Taylorserier

Vad händer om man tar med oändligt många termer i Taylors formel? Exempel:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Minitenta 2

1. Bestäm primitiva funktioner till

$$f(x) = \sin^3 x \cos x, \qquad g(x) = \arctan x$$

2. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + \ln x + x^{100}}{e^{2x} - \ln x - x^{150}} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (t - \sin t)\, dt}{x^4}.$$

3. Bestäm minsta avståndet från linjen $y = 3x + 5$ till punkten $(1, 1)$.

4. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 0$ till funktionen $f(x) = \arctan x$ och använd det för att ge ett närmevärde till $\arctan(3/10)$. Avgör om felet är mindre än 0.05.