# SF1625 Envariabelanalys

## Föreläsning 3

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

# Exempel

**Beräkna gränsvärdena**

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ (Svar: 2)
- $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sin(2x-6)}{x-3}$ (Svar: 2)
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ (Svar: $\infty$)
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ (Svar: Gränsvärdet saknas)
- $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin 2x}{\cos x}$ (Svar: 2)

# Exempel

**Kontinuerlig?**

Hur ska vi välja talet $k$ för att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{om } x > -2 \\ 2 + kx & \text{om } x \leq -2 \end{cases}$$

ska bli kontinuerlig i punkten $x = -2$ ?

Om man väljer $k$ på detta sätt, är då funktionen kontinuerlig på hela
reella axeln?

Svar: $k = 3$. Funktionen blir då kontinuerlig på hela reella axeln

# Exempel

Låt funktionen $f$ vara given av

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

- Bestäm definitionsmängden till $f$
- I vilka punkter är $f$ kontinuerlig?
- Är $f$ udda eller jämn eller varken eller?
- Är $f$ begränsad?

Svar: Definitionsmängden är hela reella axeln, funktionen är kontinuerig på hela reella axeln, funktionen är udda och begränsad.

# Vad menas med största värde?

**Definition:** Om $f(a) \geq f(x)$ för alla $x \in D_f$ sägs $f(a)$ vara största värdet (eller maximum) av funktionen $f$.

**Obs:** Det krävs två saker av ett största värde: dels ska det vara störst, dels ska det vara ett värde!

**Exempel:** Funktionen $f$ som ges av $f(x) = x, \; 0 < x < 1$, saknar största värde.

**Exempel:** Funktionen $g$ som ges av $g(x) = 1, \; 0 < x < 1$, har största och minsta värde. De är båda två 1.

# Satser

**Sats om största/minsta värde:** Om $f$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ så antar $f$ ett största och ett minsta värde när x varierar i $[a, b]$.

**Sats om mellanliggande värden:** Om $f$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ och $f$ antar värdet $r$ och värdet $s$, så måste $f$ också anta alla värden mellan $r$ och $s$.

# Problemlösning

**Förklara** hur du kan veta att funktionen $f$ som ges av

$$f(x) = \frac{\sin^3 x + \tan x}{x^5 + \cos x}$$

antar ett största och ett minsta värde när x varierar i $[0, 1]$.

(Hur blir det om $x$ varierar i $(0, 1)$? )

Svar: $f$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0, 1]$ och måste därmed enligt satsen om max/min ta ett största och ett minsta värde när $x$ varierar i intervallet.

På intervallet $(0, 1)$ vet vi ingenting utan en nogrannare undersökning. Det kan vara så att största och minsta värde saknas men de kan också finnas. Måste undersökas

# Problemlösning

**Visa** att ekvationen $x^3 - x - 7 = 0$ har minst en lösning i intervallet $[2, 3]$.

**Visa** att funktionen $g(x) = \cos x + 2x + 1$ har minst ett nollställe i intervallet $[-1, 1]$

Lösningstips: Satsen om mellanliggande värden, glöm inte att lösningen ska innehålla orden ”kontinuerlig”, ”slutet”, ”begränsat”, ”satsen om mellanliggande värden”.

# Problemlösning

**Bestäm definitionsmängderna** till nedanstående funktioner.

(a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2}{3x+1}}$

(b) $h(t) = \dfrac{1}{1+\cos 2t}$

(c) $g(u) = \begin{cases} \dfrac{\sin(u-1)}{u-1}, & \text{då } u \neq 1 \\ 1, & \text{då } u = 1 \end{cases}$

I vilka punkter är funktionerna ovan **kontinuerliga**?

Svar: (a) $D_f = \{x : \ x > -1/3\}$, funktionen är kontinuerlig
(b) $D_f = \{t : \ t \neq (2n+1)\pi/2\}$, funktionen är kontinuerlig
(c) $D_f = \mathbb{R}$, funktionen är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$

# Problemlösning

Låt $H$ vara Heaviside-funktionen som har värdet 0 för alla negativa $t$ och värdet 1 för alla icke-negativa $t$. Betrakta funktionen $f$ som ges av

$$f(t) = H(t)\sin t - H(t-2\pi)\sin t.$$

(a) Bestäm definitionsmängden för $f$.

(b) I vilka punkter är $f$ kontinuerlig?

(c) Är $f$ begränsad?

(d) Är $f$ udda eller jämn?

(e) Skissa grafen för $f$.

Svar: (a) Alla $x$ (b) Alla x (c) Ja (d) Varken eller (e): Funktionen är 0 för alla negativa $x$, sedan är den $\sin x$ och sedan är den 0 för alla $x \geq 2\pi$.

# Tentaproblem

**Uppgift.**

Visa att ekvationen $x^3 - 12x + 1 = 0$ har minst tre olika lösningar i intervallet $[-4, 4]$.

Lösningstips: Använd satsen om mellanliggande värden tre gånger på olika delintervall till $[-4, 4]$

# Tentaproblem

**Uppgift.**

Ge exempel på:

a) En funktion som är kontinuerlig på $(0, 1)$ men som inte antar ett största värde

b) En funktion som är definierad på $[0, 1]$ men som inte antar ett största värde

c) En funktion som är definierad på $(0, 1)$ och som antar ett största värde

**Beräkna nedanstående gränsvärden:**

(a) $\lim_{x\to-4} \dfrac{x^2-16}{x+4}$ Svar: $-8$

(b) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin kx}{x}$ och $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin kx}{x}$ Svar: $k$ resp 0

(c) $\lim_{x\to5} \dfrac{x^2-11x+30}{x-5}$ Svar: $-1$

(d) $\lim_{x\to5} \dfrac{x^2-11x+30}{(x-5)^2}$ SVar: Gränsvärde saknas

# Problemlösning

**Beräkna nedanstående gränsvärden:**

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{1-x-x^2}$ Svar: $-1$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+x+1}{x^6+x+1}$ Svar: $0$

# Problemlösning

**1. Beräkna** för $a = 0, 1, 2$ gränsvärdet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x - 3x^2 + ax^3}$$

Svar: $\infty$ resp 1 resp $1/2$

**2. Beräkna** för $a = 0, 1, 2$ gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x - 3x^2 + ax^3}$$

Svar: Gränsvärdet är 1 för alla tre värdena på $a$