# SF1625 Envariabelanalys

## Föreläsning 21

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

# Plan

**Förra gången.** Tema derivator mm.

1. Teori
2. Gränsvärde
3. Kontinuitet
4. Derivataundersökningar
5. Taylors formel

**Idag.** Tema integraler mm.

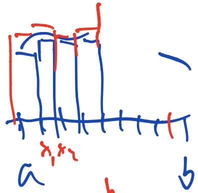
1. Teori
2. Riemannsummor och tillämpningar
3. Huvudsatsen och Integrationstekniker
4. Generaliserade integraler
5. Serier

Särskild koll på: problemlösning, strategier, uppskattningar

# Teori

## Teori från andra halvan av kursen:

1. Integraler
    1. Bestämda och obestämda integraler
    2. Enkla egenskaper
    3. Huvudsatsen
    4. Integrationstekniker
    5. Riemannsummor
    6. Generaliserade integraler, konvergens, divergens
2. Serier
    1. Konvergens och divergens
    2. Konvergenskriterier
    3. Taylorserier



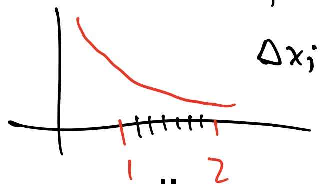

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\,\Delta x_j$$

# Tentaproblem

**Uppgift.** Skriv upp en Riemannsumma med $n$ termer till integralen

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Part: $1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \ldots, 2$




$\Delta x_j = \frac{1}{n}$

Välj höger ändp. i varje delint.

Ange om din Riemannsumma är en översumma eller en undersumma, eller varken eller. Ange varför du kan använda din Riemannsumma för att approximera $\ln 2$.

Får RS: $$\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n+2}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n+3}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} \approx \int \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$$

undersumma.

# Tentaproblem

Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = \cos^3 x \qquad g(x) = \frac{1}{4 + x^2} \qquad h(x) = x \arctan x$$

# Tentaproblem

$$f(x) = \cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1-\sin^2 x)\cos x$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x \, dx = du \end{array} \right\}$$

$$= \int (1-u^2)\, du = u - \frac{u^3}{3} + C = \{ u = \sin x \}$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C, \quad C \text{ godt. konst.}$$

# Tentaproblem

$$g(x) = \frac{1}{4+x^2}$$

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = u \\ \frac{1}{2}dx = du \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u^2}\cdot 2\,du = \frac{1}{2}\arctan u + C$$

$$= \left\{ u = \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

# Tentaproblem

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$h(x) = x \arctan x$$

Vi anv. p.i.:

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left[ x - \arctan x \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C,$$ $C$ godt. konst.

# Tentaproblem

Beräkna gränsvärdet

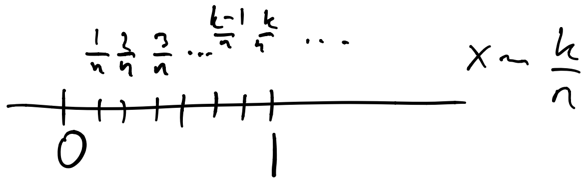
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - \cos t)\, dt}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital \& H.S.}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hop.}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

# Tentaproblem

Beräkna gränsvärdet




$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\arctan\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\arctan\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ är en R.S. med n lika stora delintervall och funktionsv. tagna i höger ändpunkt till $\int_0^1 x\arctan x\,dx$

Funktionen är kont $\Rightarrow$ R.S. konvergerar mot integralen när $n\to\infty$

Svar: $\left[\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}}$.

# Tentaproblem

**Uppgift.** Konvergent eller divergent?

$$\int_0^{\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{e^{-x} + x + x^2}\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/n}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln(n)))}$$

# Tentaproblem

$$\int_0^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{e^{-x}+x+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{e^{-x}+x+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{e^{-x}+x+x^2}\,dx$$

För $x \geq 1$: $\dfrac{x+\sqrt{x}}{e^{-x}+x+x^2} \geq \dfrac{x}{x^2+x^2+x^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x}$ och $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ div.

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{e^{-x}+x+x^2}\,dx \text{ div.}$$

För $0 \leq x \leq 1$ $0 \leq \dfrac{x+\sqrt{x}}{e^{-x}+x+x^2} \leq \dfrac{1+1}{\frac{1}{3}} = 6$ och $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{e^{-x}+x+x^2}\,dx \leq 6$

$\Rightarrow$ vår int. är div.

# Tentaproblem

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/n}$$ div. $e^{-1/n} \to 1 \neq 0$ när $n \to \infty$

termerna går inte mot noll

$\Rightarrow$ serien div.

# Tentaproblem

$$\underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln(n)))}}$$

Låt $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}$ pos. kont. avtagande på $x \geq 3$

serien $\sum_{n=3}^{\infty} f(n)$ har samma konvergensegenskaper som

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_3^{R} \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln(\ln x) = u \\ \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = du \\ x=3 \text{ ger } u = \ln(\ln 3) \\ x=R \text{ ger } u = \ln(\ln R) \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln R)} \frac{1}{u} = \lim_{R\to\infty} \Big[\ln u\Big]_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln R)} = \infty$$

<u>Svar:</u> Serien div.

**1.** Bestäm primitiva funktioner till $f(x) = \sin\sqrt{x}$ och $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

$\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \to 1$ när $x \to \infty$

**2.** Skriv upp en Riemannöversumma med $n$ termer till integralen $\displaystyle\int_0^1 (1 + x^3)\, dx$.

För $\varepsilon > 0$ finns $N$ s.e. för alla $n > N$: $1-\varepsilon \le \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \le 1+\varepsilon$ $n \le x \le n+1$

**3.** Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då kurvan $y = \ln x$, på intervallet $1 \le x \le e$, roteras kring
a. $x$-axeln
b. $y$-axeln

4. Bestäm $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} x \sin\frac{1}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\, dx = 1$

**1.** Bestäm primitiva funktioner till $f(x) = \sin\sqrt{x}$ och $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

part. int.

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = u \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \end{array} \nearrow dx = 2u\,du \right\} = \int (\sin u) 2u\,du =$$

$$= -2u\cos u + \int 2\cos u\,du = \ldots = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$$

C konst.

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} \quad \text{ger } A = B = \tfrac{1}{2}$$

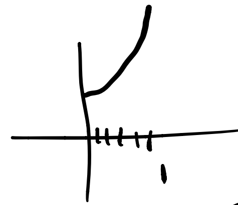
sg

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\right) dx = \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

C konst.

# En minitenta på integraler

**2.** Skriv upp en Riemannöversumma med $n$ termer till integralen $\int_0^1 (1 + x^3)\,dx$.




Part. $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots, 1$   Höger ändp. ger översumma

$$RS\ \left(1+\left(\tfrac{1}{n}\right)^3\right)\cdot\frac{1}{n} + \left(1+\left(\tfrac{2}{n}\right)^3\right)\cdot\frac{1}{n} + \ldots + 2\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)\frac{1}{n}$$

# En minitenta på integraler

**3.** Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då kurvan $y = \ln x$, på intervallet $1 \leq x \leq e$, roteras kring

a. $x$-axeln

b. $y$-axeln


runt x: $\int_1^e \pi (\ln x)^2 \, dx \overset{\text{part. int.}}{=}$

$$= \left[\pi x (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{\pi \cancel{x} \cdot 2 \ln x}{\cancel{x}} \, dx = \pi e - \left[2\pi (x \ln x - x)\right]_1^e = \ldots$$

runt y: $\int_1^e 2\pi x \ln x \, dx \overset{\text{p.i}}{=} \left[\pi x^2 \ln x\right]_1^e - \int \pi \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx = \ldots$