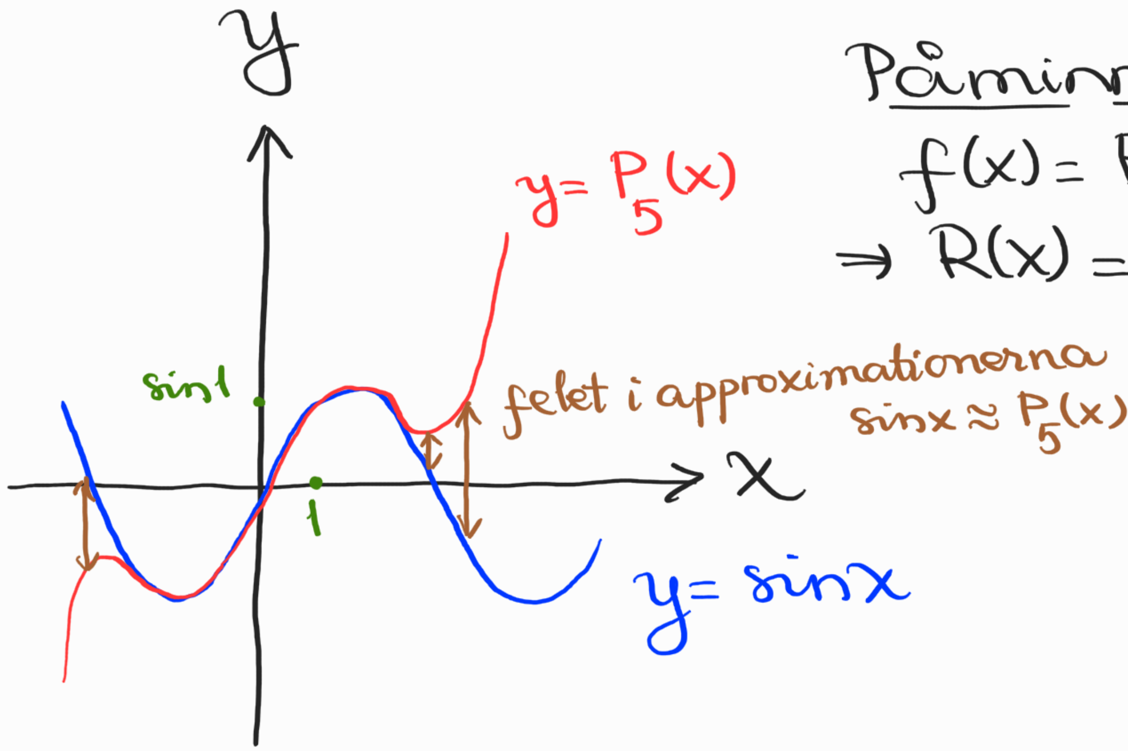
(b) Uppskatta felet i denna approximation, dvs. uppskatta $\left|\sin 1 - \frac{101}{120}\right|$.



Påminnelse

$f(x) = P_n(x) + R(x)$

$\Rightarrow R(x) = f(x) - P_n(x)$

$\Rightarrow$ felet i approx. är alltså $|R(x)|$.

Lösning Börja med att ta fram $R(x)$:

Motsvarande resttermen $R(x)$ ges av

$$R(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Lagrange form}}$$

där c är något tal mellan x och a.

$n = 5$

$f^{(5)}(x) = \cos x$

$f^{(6)}(x) = -\sin x$

$$R(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6 = \frac{-\sin c}{720}x^6$$

där c är något tal mellan 0 och x

Då vi approximerar $\sin 1 = f(1) \approx P_5(1)$

är felet

där $0 < c < 1$

$$|R(1)| = \left| \frac{-\sin c}{720} \cdot 1^6 \right| = \frac{|-\sin c|}{720} \leq \frac{1}{720}$$

ty $|-\sin c| \leq 1$
för alla $c \in \mathbb{R}$

Svar Felet är inte större än $\frac{1}{720}$. $\boxed{}$

Några standardutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Notera att $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

2020.01.07 #4 #KTH

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

(a) Bestäm $P_1(x)$ kring $x=0$.

Lösning Vill hitta

$$P_1(x) = F(0) + F'(0)x$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \Rightarrow F(0) = \int_0^0 e^{-t^2}\,dt = 0$$

$$F'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow F'(0) = 1$$

Svar $P_1(x) = x$

Analysens huvudsats (kortfattat)

$$F(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

a ← någon konstant

$$\Rightarrow F'(x) = g(x)$$

(b) Beräkna ett närmevärde för $F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$ som avviker högst $\frac{1}{8} = 0{,}125$ från det exakta värdet.

Lösning Från (a):

$$F(x) \approx P_1(x) = x \quad \text{för } x \approx 0$$

$$\Rightarrow F(1/2) \approx P_1(1/2) = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ ligger nära $x = 0$

Felskattning Vill undersöka $|R(1/2)|$.

Minns att $R(x) = \dfrac{F''(c)}{2}x^2$ för något tal c mellan 0 och x.

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

kedjeregeln!

$$\Rightarrow F''(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{-2c \cdot e^{-c^2}}{2} \cdot x^2 = -c \cdot e^{-c^2} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \Big|R(\underbrace{1/2}_{x=1/2})\Big| = \left|-c \cdot e^{-c^2} \cdot \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}\Big|c \cdot \underbrace{e^{-c^2}}_{\text{alltid positivt}}\Big|$$

$0 < c < \frac{1}{2}$