Institutionen för Matematik
Lars Filipsson

SF1625
Envariabelanalys

Föreläsning 13: Integraler

Innehåll. Integralens definition och enkla egenskaper, huvudsatsen.

Introduktion. Vi vill definiera vad begreppet integral står för och komma fram till hur man räknar ut integraler.

Integralens definition. Låt f vara definierad och begränsad på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$. Med en partition av $[a, b]$ menar vi indelning av intervallet i delintervall med delningspunkter $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Givet en sådan partition P definierar vi

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \text{för } i = 1, \ldots, n\,.$$

Vi sätter också för $i = 1, \ldots, n$:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{och} \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Om f är kontinuerlig betyder detta att m_i är det minsta funktionsvärdet när x ligger i det i:te deltintervallet och M_i är det största. Nu bildar vi

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{och} \quad \ddot{O}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

L brukar kallas lägre summa eller undersumma och $\ddot{O}$ övre summa eller översumma.

Vi kan göra ovanstående procedur för alla tänkbara partitioner. Oavsett partition är en undersumma alltid mindre än eller lika med en översumma. Och om vi utgår från en viss partition och gör den finare genom att lägga till delningspunkter så blir skillnaden mellan översumma och undersumma mindre eller möjligtvis oförändrad. Om

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P \ddot{O}(f, P) = I$$

så säger vi att f är integrerbar på $[a, b]$ och

$$\int_a^b f(x)\, dx = I.$$

Observation. En begränsad funktion f på $[a,b]$ är integrerbar över $[a,b]$ om skillnaden mellan översumma och undersumma kan göras hur liten som helst genom val av tillräckligt fin partition. På matematiskt språk formuleras detta så här: En begränsad funktion f på $[a,b]$ är integrerbar över $[a,b]$ om för varje tal $\epsilon > 0$ finns en partition P så att $\ddot{O}(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$.

Bevis. Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$. Då är f också likformigt kontinuerlig, dvs för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ om $0 < |x - y| < \delta$. Detta kan inses genom följande resonemang: Om det finns ett $\epsilon_0 > 0$ så att för varje $\delta > 0$ gäller att det finns x och y så att $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$ trots att $0 < |x - y| < \delta$, så kan vi bilda två följder av punkter $\{x_n\}$ och $\{y_n\}$ så att $|x_n - y_n| < 1/n$ och $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. Vi kan dessutom välja dessa följder så att $x_n > y_n$ för alla n. Sätt $y_0 = \sup\{y_n\}$ och $x_0 = \inf\{x_n\}$ som måste finnas pga supremumaxiomet. Nu måste $x_n \to x_0$ och $y_n \to y_0$ och $x_0 = y_0$. Men om f är kontinuerlig gäller att $f(x_n) \to f(x_0)$ vilket motsäger att $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. Så f är likformigt kontinuerlig. För att nu visa satsen, ta ett positivt tal ϵ, vilket som helst. Eftersom f är likformigt kontinuerlig finns nu ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a)$ så snart $0 < |x-y| < \delta$. För varje partition P vars delintervall allihop är mindre än δ gäller nu att $\ddot{O}(f,P) - L(f,P) < \epsilon$ så f är integrerbar.

Riemannsummor. Om vi gör på samma sätt som när vi bildade översummor och undersummor, men i stället för m_i respektive M_i bara väljer något funktionsvärde $f(x_i^*)$, för vilken som helst punkt x_i^* i delintervallet mellan x_{i-1} och x_i, så får vi en Riemannsumma, $\sum f(x_i^*)\Delta x_i$. Eftersom funktionsvärdet $f(x_i^*)$ ligger mellan m_i och M_i ligger Riemannsumman mellan undersumman och översumman för motsvarande partition. Om funktionen är integrerbar kan vi alltså approximera integralen med en Riemannsumma till vilken nogrannhet som helst. Och varje följd av Riemannsummor som uppfyller att längden av delintervallen i partitionen går mot noll konvergerar mot integralen. Detta är viktigt i tillämpningar och kan användas vid beviset av nedanstående sats:

Integralens enkla egenskaper. Om f och g är integrerbara över $[a,b]$, k är en konstant och c ligger mellan a och b så gäller:

(a) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(d) $f(x) \leq g(x)$ i $[a,b] \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Vi sätter också $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ och $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. Och dessutom har vi triangelolikheten för integraler:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Integralens medelvärdessats. Om f är kontinuerlig i $[a,b]$ så finns en punkt c mellan a och b så att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Bevis. Låt M vara funktionens största värde på $[a,b]$ och m funktionens minsta värde. Dessa finns enligt tidigare sats. Nu måste enligt den näst sista av integralens enkla egenskaper gälla att

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

och om vi här dividerar med $b-a$ som är positivt får vi att

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Men f antar alla mellanliggande värden och mittenledet ovan är tydligen ett sådant mellanliggande värde så det måste vara ett funktionsvärde i någon punkt c mellan a och b. Satsen är därmed bevisad.

Analysens huvudsats. Om f är kontinuerlig i $[a,b]$ så är

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b$$

en primitiv funktion till f, dvs $S'(x) = f(x)$. Dessutom gäller att om F är någon primitiv funktion till f så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Bevis. Anta att f uppfyller villkoren. Enligt derivatans definition gäller att

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \\
&= \lim_{h\to 0} f(c)h/h \\
&= \lim_{h\to 0} f(c) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

där vi i nästnäst sista likheten använt integralens medelvärdessats och i sista likheten använt att c ligger mellan x och $x+h$ och att f är kontinuerlig. För att bevisa det sista påståendet, ibland kallat insättningsformeln, antar vi att F är någon primitiv funktion till f, dvs $F'(x) = f(x)$. Eftersom S och F är två primitiva funktioner till f så skiljer de sig åt med en konstant, dvs

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Om vi i detta uttryck sätter $x = a$ blir vänster led 0 och vi får att $C = -F(a)$. Om vi sedan sätter $x = b$ får vi påståendet vi vill bevisa.

Exempel. Med hjälp av huvudsatsen ser vi till exempel att

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt = \sin x$$

och

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^x (e^t\cos t + t^3e^{2t})\,dt = e^x\cos x + x^3e^{2x}.$$

Vidare gäller att

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Obestämda integraler. Om vi i integralen inte sätter ut några integrationsgränser så talar vi om obestämda integraler. Vi låter $\displaystyle\int f(x)\,dx$ betyda en godtycklig primitiv funktion till f.