Övning 12

Jowan@kth.se

06/10/2017

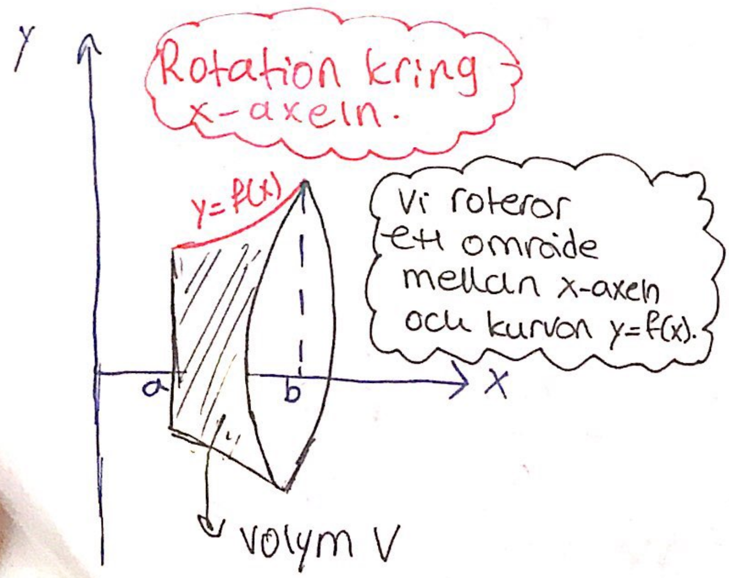
12.1] Rotationsvolym

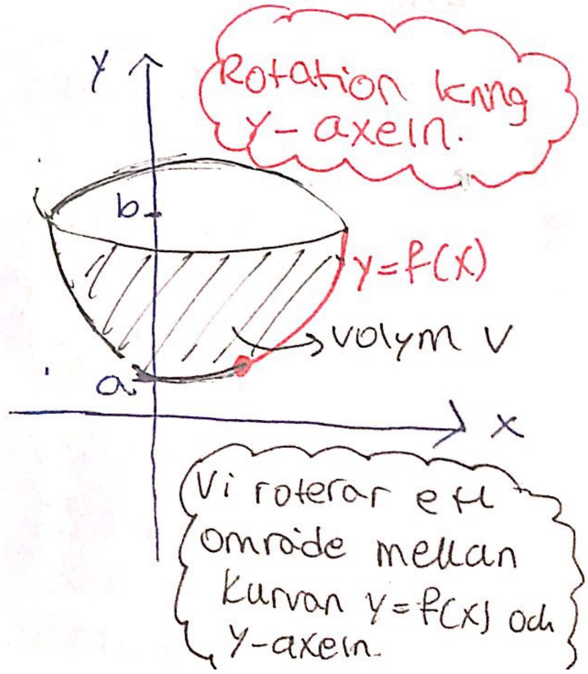
Rotationsvolymen V som genereras när ytan mellan kurvan $y=f(x)$, då $a \leq x \leq b$, och x-axeln roteras ett varv runt x-axeln ges av:

- $V_x = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$ Rotation kring x-axeln

Rotationsvolymen V som genereras när ytan mellan kurvan $y=f(x)$, då $a \leq x \leq b$; och x-axeln roteras ett varv runt y-axeln ges av:

- $V_y = \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx$ Rotation kring y-axeln





2] Räkning på tavlan

Tentamen 2012-10-17

4] Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området som begränsas av x-axeln och kurvan

$$y = \sqrt{x(4-x^2)}, \quad x \geq 0$$

roteras kring x-axeln.

Lös] $y = \sqrt{x(4-x^2)}$ är definierad om och om endast:

$$x(4-x^2) \geq 0 \quad \text{då} \quad x \geq 0$$

Vi får då $0 \leq x \leq 2$

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$
$x_3 = -2$ kommer ej med

Enligt formel får vi:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx \iff V_x = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{x(4-x^2)}\right)^2 dx \iff$$

$$V_x = \pi \int_0^2 x(4-x^2) \, dx \iff V_x = \pi \int_0^2 (4x - x^3) \, dx$$

Nu kan vi beräkna integralen.

$$V_x = \pi \int_0^2 (4x - x^3) \, dx = \pi \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$\pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \pi \Big(\underbrace{2 \cdot 2^2}_{=8} - \underbrace{\frac{2^4}{4}}_{16/4=4} - \big(\underbrace{2 \cdot 0^2}_{=0} - \underbrace{\frac{0^4}{4}}_{=0}\big)\Big) = 4\pi$$

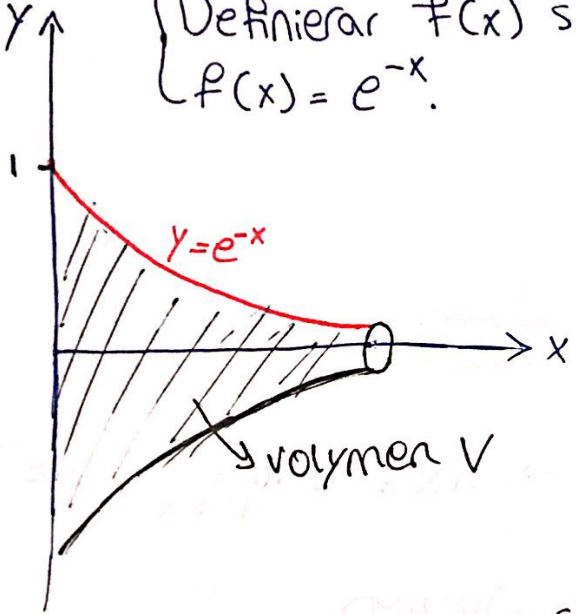
Svar: $V_x = 4\pi$ v.e

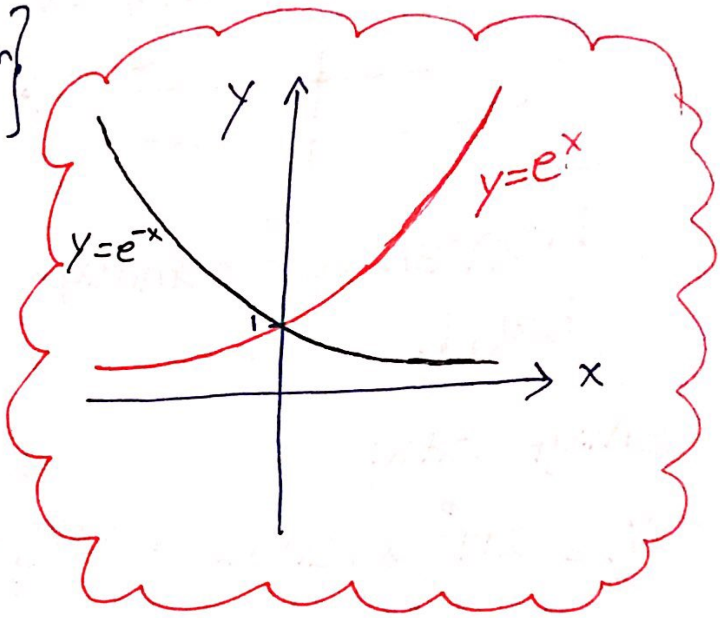
③

1) Låt området som begränsas av $y=e^{-x}$ och $y=0$, till höger om $x=0$, rotera kring x-axeln, samt y-axeln.

Lös] Vi börjar med rotationsvolymen kring x-axeln.

$\left\{ \text{Definierar } f(x) \text{ som } f(x) = e^{-x}. \right\}$





kropp med oändlig längd.

Enligt satsen:

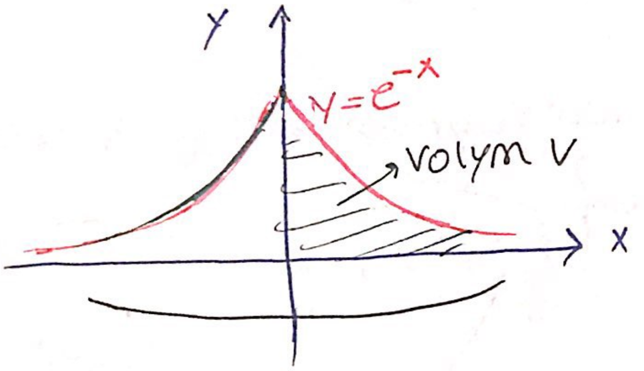
$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_0^\infty (e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^\infty e^{-2x} dx =$$

$$\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-2x} dx = \pi \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^R =$$

$$\pi \lim_{R\to\infty} \left(\left(-\frac{1}{2} e^{-2R} \right) - \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \underbrace{e^{-2\cdot 0}}_{=1} \right)}_{=-\frac{1}{2}} \right) = \pi \lim_{R\to\infty} \left(-\underbrace{\boxed{\frac{1}{2e^{2R}}}}_{\to 0} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\pi \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ v.e.}$$

vi går vidare till att beräkna rotationsv
kring y-axeln.



kroppen har oändligt bredd.

Enligt sats:

$$V_y = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx = 2\pi \lim_{R\to\infty}\int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx$$

vi ser att vi måste partiell integrera

$$2\pi \lim_{R\to\infty}\int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx \quad \left\{\begin{matrix} u' = e^{-x} & u = -e^{-x} \\ v = x & v' = 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$2\pi\left(\lim_{R\to\infty}\left[-xe^{-x}\right]_0^R - \lim_{R\to\infty}\int_0^R -e^{-x}\,dx\right) =$$

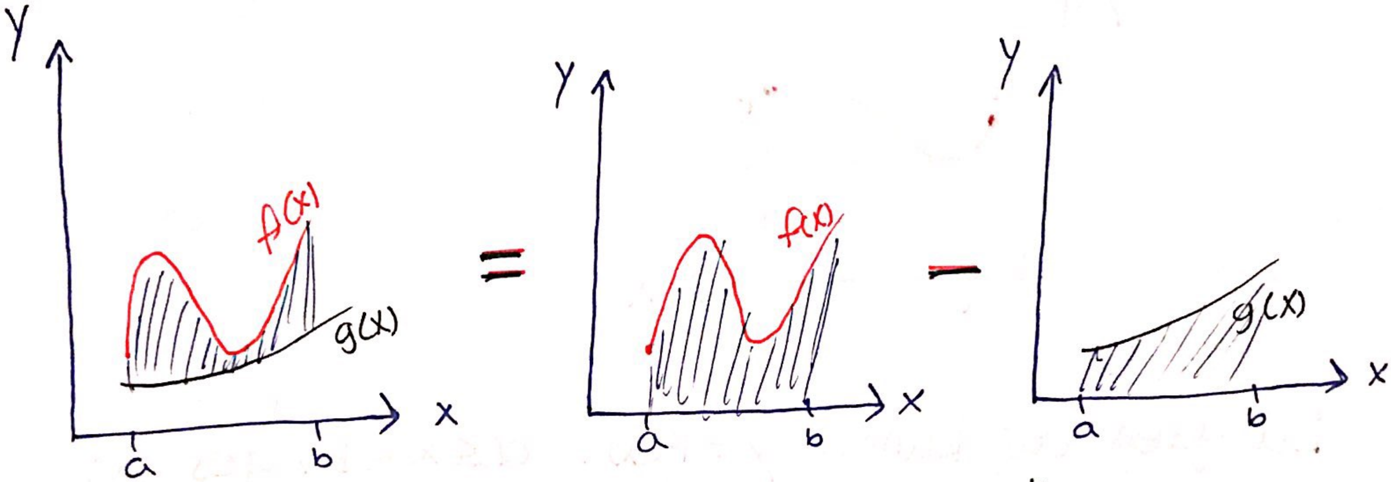
$$2\pi\left(\lim_{R\to\infty}\left(\underbrace{-Re^{-R}}_{\frac{R}{e^R}\}=0} - \underbrace{(-0e^{-0})}_{=0}\right)\right) + \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^R\Bigg) =$$

$$2\pi\left(\lim_{R\to\infty}\left(-e^{-R} - \underbrace{(-e^{-0})}_{=-1}\right)\right) = 2\pi \lim_{R\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{e^R}}_{\to 0} + 1\right)$$

$$2\pi\cdot(0+1) = 2\pi \text{ v.e.}$$

3] Areaberäkning

Arean under kurvan $y=f(x)$, över kurvan $y=g(x)$ och mellan $x=a$ och $x=b$ är:



$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

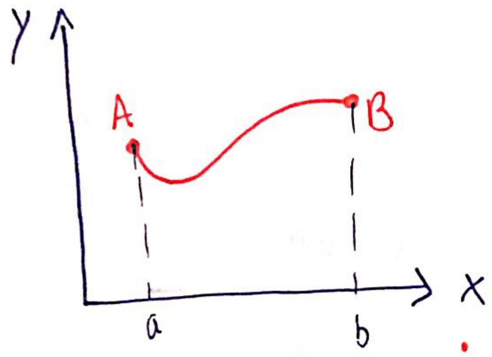
$$\text{Area} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Tips: Ni kan kolla vilken kurva som ligger överst genom att stoppa in valfritt x-värde i intervallet [a,b]. På så sätt får ni att den kurvan med störst värde ligger överst.

12.4] kurvlängd

Låt L vara längden av kurvan mellan punk[...]

A och B.



Längden av kurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$, ges av:

- $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

2.5] Räkning på tavlan

Tentamen 2012-12-10

2] Bestäm arean av det område i första kvadranten (dvs där $x \geq 0$ och $y \geq 0$) som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}$ och linjen $y = x - 2$.

Lös] Vi börjar med att finna skärningspunkterna genom att sätta:

$$y_1 = y_2$$

där $y_1 = \sqrt{x}$ och $y_2 = x - 2$.

$y_1 = y_2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2 \Leftrightarrow$

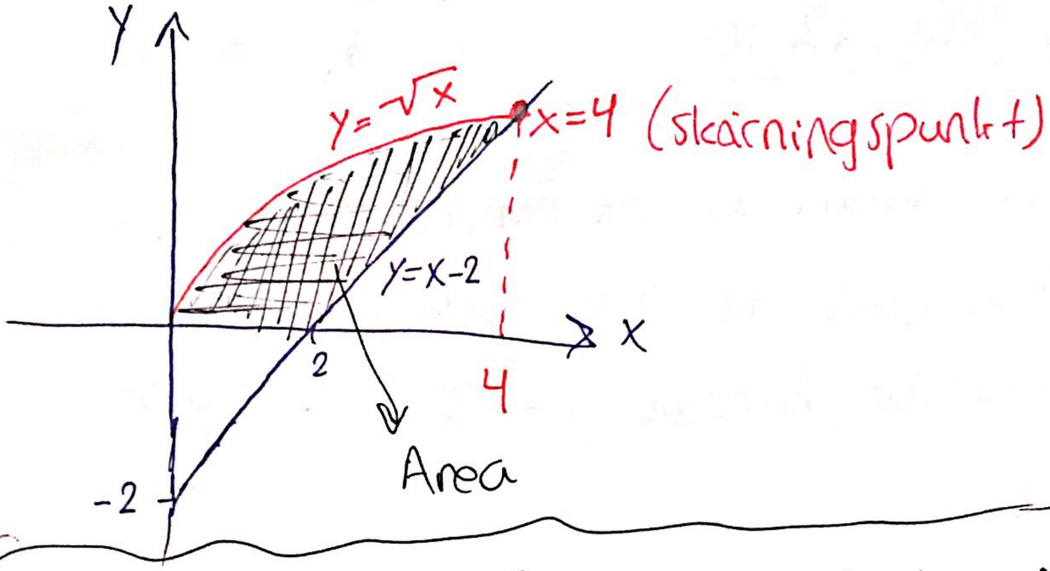
$x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ ger

lösningarna $x_1 = 4$ och $x_2 = 1$.

Dock tillkom det falska lösningar då vi kvadrerade ekvation. Vi får alltså att $x_2 = 1$ är en falsk rot.

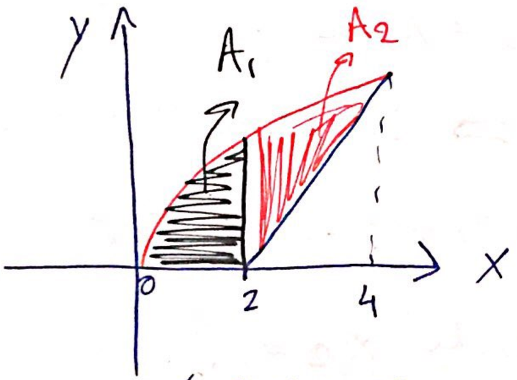
Enda skärningspunkten är $x = 4$.

Vi skissar grafen:



svarta området är arean vi ska beräkna då $x \geq 0$, $y \geq 0$ (första kvadranten där).

Detta område kan vi dela upp i 2,



Arean $A = A_1 + A_2$

A_1: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$

$A_2 = \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 2-x \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$

I intervallet $[2,4]$ är $\sqrt{x}$ den övre grafen.

$$A = \underbrace{A_1} + \underbrace{A_2} \Longleftrightarrow$$

$$A = \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right)dx =$$

$$\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 =$$

$$\left(\frac{2}{3}\cdot \underbrace{2^{3/2}}_{=\sqrt{8}} - \cancel{\frac{2}{3}\cdot 0^{3/2}}\right) +$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\cdot \underbrace{4^{3/2}}_{=8} - \frac{4^2}{2} + 2\cdot 4\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot \underbrace{2^{3/2}}_{\sqrt{8}} - \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right)\right) =$$

$$\left(\cancel{\frac{2}{3}\sqrt{8}} + \frac{2}{3}\cdot 8 - \underbrace{\cancel{\frac{16}{2}}}_{8} \cancel{+8} - \cancel{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{8}} + \underbrace{\frac{4}{2}}_{=2} - 4\right) =$$

$$\frac{2}{3}\cdot 8 + 2 - 4 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{13} \text{ A.e.}$$

Arean av området A är $\frac{10}{13}$ A.e.

6] Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

definierad på intervallet $-1 \le x \le 1$.

A] skriv upp integralen L som ger längden av funktionsgrafen $y = f(x)$.

Lös] A] Längden L av kurvan $y = f(x)$ på intervallet $\underbrace{a}_{-1} \le x \le \underbrace{b}_{1}$ ges av:

kvadreringsregel

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ a = -1 \quad b = +1 \end{array} \right\} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\underbrace{1}_{=\frac{4}{4}} + \frac{e^{2x} - (2 \cdot \overbrace{e^x \cdot e^{-x}}^{=1}) + e^{-2x}}{4}} \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} \, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2 + e^{2x} + e^{-2x}}{4}} \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} \, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \, dx$$

B] Beräkna längden av denna kurva

Lös] B] vi beräknar integralen L.

$$L = \int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$\left(\left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2}\right) - \left(\frac{e^{-1} - e^{-(-1)}}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \frac{e - e^{-1} - e^{-1} + e}{2} =$$

$$\frac{2e - 2e^{-1}}{2} = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$$

$$L = e - \frac{1}{e}.$$

Alternativ metod: (hyperbolista funktioners definitioner)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Alltså kan den även lösas såhär:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$f'(x) = \sinh x \qquad (f'(x))^2 = \sinh^2 x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx =$$

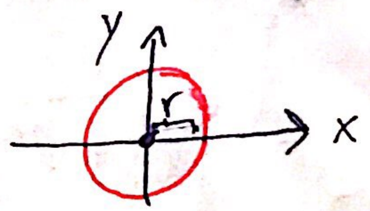
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (\cosh^2 x - 1)}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \cosh x\, dx = [\sinh x]_{-1}^{1} = \left\{ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right\} =$$

$$\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$$

12.] kurvor i parameterform

* <u>En cirkel</u> med radie r centererad i (h,k) ges av ekvationen:



- $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

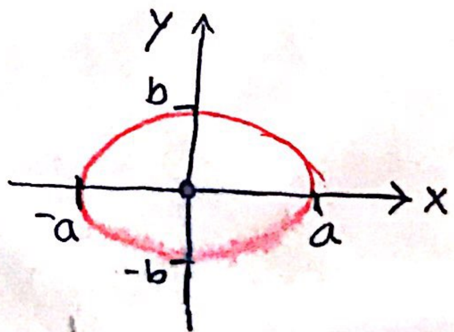
Den består av alla punkter som är på avstånd r till dess center (h,k). Vi kan då parametrisera cirkeln tex som:

- $\begin{cases} x(t) = r\cos(t) + h \\ y(t) = r\sin(t) + k \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

Cirkelns ekvation kan då skrivas på parameterform:

- $r^2\cos^2(t) + r^2\sin^2(t) = r^2$

* <u>En ellips</u> ges av ekvationen:



- $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Där a och b kallas halvaxlar. Vi kan då parametrisera ellipsen:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) + h \\ y(t) = b\sin(t) + k \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Scanned by CamScanner

] Räkning på tavlan

Ex] Ange cirkelns mittpunkt samt radie för

$$x^2+y^2+4x-2y=4$$

Ange även parametriseringen.

Lös] Vi skriver om ekvationen så att den liknar cirkelns ekvation:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Allt så:

$$x^2+y^2+4x-2y=4 \iff$$

$$(x^2+4x)+(y^2-2y)=4 \iff$$

$$(x+2)^2-4+(y-1)-1=4$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9$$

Cirkelns mittpunkt är: $(h,k)=(-2,1)$

Cirkelns radie är: $r^2=9 \Rightarrow r=3$

Parametrisering: $r(t)=\begin{cases} x(t)=3\cos(t)-2 \\ y(t)=3\sin(t)+1 \end{cases}$

för $0 \leq t \leq 2\pi$.

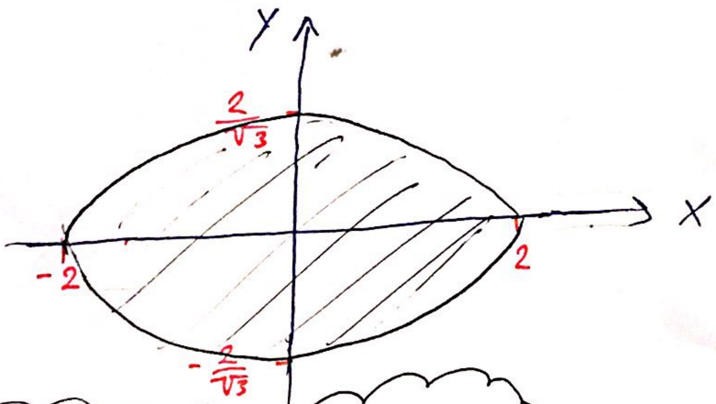
.] Rita ellipsen vars ekvation är,

$$x^2 + 3y^2 = 4$$

Lös] vi skriver om med ellipsens ekvation

$$x^2 + 3y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{4}{3}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

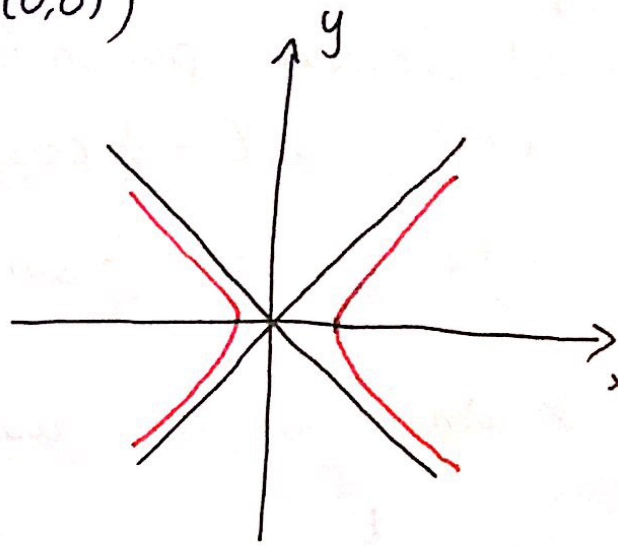


$a = 2$

$b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $(h, k) = (0, 0)$

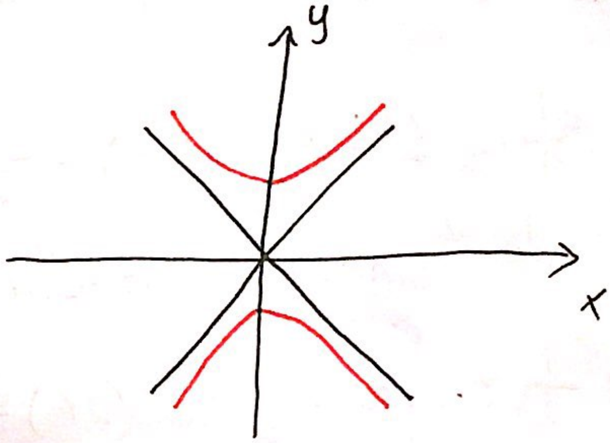
Hyperbel (mittpunkt, (0,0))

① $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Skär x-axeln i $x = \pm a$

② $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$



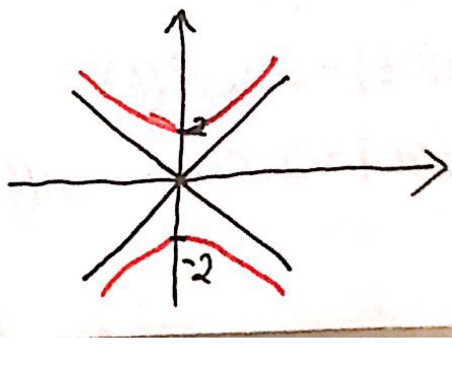
Skär y-axeln i $y = \pm b$

Både ① o ② har sneda asymptoter,

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$

Rita $2y^2 - 8x^2 = 8$. *

* skrivs om som $\frac{y^2}{\underbrace{4}_{b^2}} - \frac{x^2}{\underbrace{1}_{a^2}} = 1$, dvs skär i y-axeln, typ ②.



Asymptoter: $y = \pm \frac{2}{1} x$

Skär y-axeln: $y_{1,2} = \pm 2$