Övning 3

Jowan@kth.se

06/09/2017

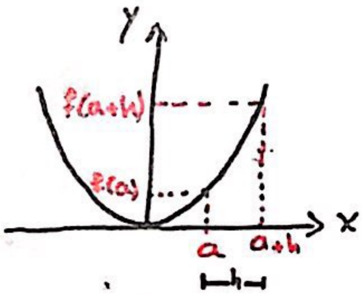
3.1 Definition – Derivata

Låt $y=f(x)$ vara en given funktion som är definierad i punkten a. Om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (*)$$

existerar (som ett reellt tal), säger vi att funktionen är deriverbar i punkten a. Gränsvärdet kallas derivatan av funktionen $y=f(x)$ i punkten a och betecknas $f'(a)$. Alltså:

$$f'(a) \overset{def}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Om vänstergränsvärdet av $(*)$ existerar, kallas detta för funktionens vänsterderivata i punkten a och betecknas $f'_-(a)$. Alltså:

$$f'_-(a) \overset{def}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Om högergränsvärdet av $(*)$ existerar, kallas detta för funktionens högerderivata i punkten a och betecknas $f'_+(a)$. Alltså

$$f'_+(a) \overset{def}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Funktionen $y = f(x)$ är deriverbar i punkten a om endast om höger- och vänsterderivatan i punkten a existerar och har samma värde.

Om funktionen $y=f(x)$ är deriverbar i en viss punkt så är funktionen även kontinuerlig där.

Men det omvända behöver dock ej gälla. Detta innebär att bara för att en funktion är kontinuerlig i en punkt behöver funktionen ej vara deriverbar i samma punkt.

Deriverbarhet $\Longrightarrow$ kontinuitet

OBS! omvänt påstående behöver ej gälla. En funktion kan vara kontinuerlig i en punkt utan att vara deriverbar i samma punkt.

ådar
d
(b)

3.2] Räkning på tavlan

Ex] Använd derivatans definition och bevisa

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

Lös] Vi börjar med att skriva ned derivatans definition:

- $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Därmed får vi att:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3x+3h+1} - \sqrt{3x+1}}{h} =$$

[För att få bort kvadratrötter är det lämpligt att multiplicera med konjugatet]

- $$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3x+3h+1} - \sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} =$$

- $$\lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{3x}+3h\cancel{+1}) - (\cancel{3x}\cancel{+1})}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

V.S.V

Scanned by CamScanner

2.2:21 Beräkna derivatan utifrån definitionen till

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Lös] Vi skriver upp derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(x+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{h} =$$

{gemensam nämnare} $= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+(x+h)^2}}{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})}}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+(x+h)^2}}{h(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})} =$$ {multiplicera med konjugatet} =

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+(x+h)^2})(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})}{h(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+x^2) - (1+(x+h)^2)}{h(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}-(\cancel{1}+(\cancel{x^2}+2xh+h^2))}{h(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-(2xh+h^2)}{h(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+(x+h)^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2})} =$$

$$\frac{-2x}{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2})} =$$

$$\frac{-2x}{(\sqrt{1+x^2})^2(2\sqrt{1+x^2})} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(1+x^2)\cdot(\sqrt{1+x^2})} =$$

$$\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\text{Svar: } f'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

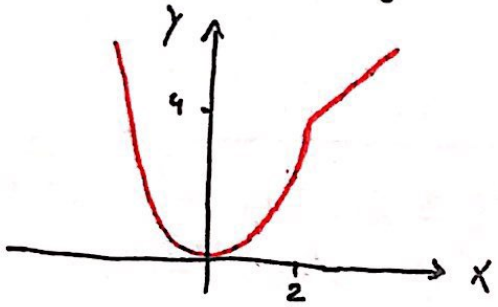
Ex Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } x < 2 \\ x+2 & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Är funktionen kontinuerlig i punkten $x = 2$?

b) Är funktionen deriverbar i punkten $x = 2$?

Lös Vi börjar med att rita grafen till $f(x)$.



OBS! Egentligen hade vi kunnat börja med b) uppgiften. Om vi hade fått att funktionen är deriverbar i $x=2$ hade vi kunnat dra slutsatsen att den även är kontinuerlig där.

a) kontinuitetens definition:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)}, \text{ Här: } \boxed{f(a=2)=4}:$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4 = f(2) \ (=4)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x+2 = 2+2 = 4 = f(2) \ (=4)$$

Vi ser att

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \quad (=4)$$

Därmed är funktionen kontinuelig i $x=2$.

b) -Derivatans definition: För att en derivata ska existera

$$\boxed{\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.}$$

måste höger- och vänsterderivata existera och gå mot samma värde.

-Vi börjar med vänsterderivatan:

$$\cdot \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2-4}{h}.$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(4+h)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^-} 4+h = 4$$

- Högerderivatan:

$$\cdot \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{((2+h)+2)-(2+2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{4+h-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

funktionen är inte deriverbar i $x=2$ då högerderivatan och vänsterderivatan inte har samma värde i denna punkt. Detta kan ses i grafen med.

Tentamen 2012-12-10

7 . Bevisa satsen att om en funktion är deriverbar i punkten $x = a$ så är den också kontinuerlig där.

Lös

Kontinuitets definition

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$$

Derivatans definition

$$f'(a) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ måste existera

Detta kan också skrivas som

$$\boxed{f'(a) \overset{def}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$ vi använder denna i uppgiften

Om vi antar att f är deriverbar i punkten $x = a$ ger satsen om gränsvärdet av en produkt:

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{förläng med } (x-a) \\ \text{för att efterlikna} \\ \text{derivatans definition} \end{array} \right\} =$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) \cdot \frac{(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x-a) =$$

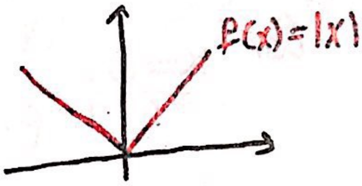
$$\underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(a)} \cdot \lim_{x \to a} (x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

a

Därmed är det visat att deriverbarhet i $x=a$ medför kontinuitet i $x=a$. V.S.V.

Tentamen 2015-01-12

7.D] Ge ett exempel som visar att en funktion som är kontinuerlig i en punkt inte måste vara deriverbar i punkten.



Lös] Låt $f(x) = |x|$

Vi har att $f(x) = |x|$ är kontinuerlig i origo då $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

För $a=0$ får vi då $\underbrace{\lim_{x \to 0} f(x)}_{=0} = \underbrace{f(0)}_{=0}$:

Funktionen är dock inte deriverbar i origo då:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

För $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ får vi 2 olika fall:

$$|h| = \begin{cases} h & \text{om } h \geq 0 \\ -h & \text{om } h < 0 \end{cases}$$

Vi kollar vänstergränsvärde och högergränsvärdet

$\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$ Högergränsvärdet

$\lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$ Vänstergränsvärdet

Vi får ej samma värde för höger- och vänstergränsvärdet, alltså existerar ej derivatan för $x=0$.

Tentamen 2016-10-25

#6 Bestäm talen a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$$

blir både kontinuerlig och deriverbar i $x=1$.

[Lös] vi börjar med att ställa upp kraven för att $f(x)$ ska bli kontinuerlig i $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \quad \text{där } f(1) = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} ax+b = \lim_{x\to 1^-} x^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a+b=1} \quad (*)$$

Vi ställer sedan upp kraven för att $f(x)$ ska bli deriverbar i $x=1$.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[a(1+h)+b]-[(a\cdot 1+b)]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{a}+ah+\cancel{b}-\cancel{a}-\cancel{b}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah}{h}$$

12

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h\to 0^-} 2+h = \lim_{h\to 0^+} a$$

$$2 = a$$

Då $a=2$, gör vi tillboka till (*) som sa $\boxed{a+b=1}$ där $\left\{ a=2 \right\} \Leftrightarrow 2+b=1 \Leftrightarrow b=-1$

Alltså måste $\underline{a=2}$ och $\underline{b=-1}$ för att $f(x)$ ska vara både kontinuerligt samt deriverbar i $x=2$.

3.3] Definition- Tangentlinje

Antag att $f(x)$ är kontinuerligt, samt att $y=f(x)$. Tangentlinjen vid en punkt $P=(x_0, y_0)$ ges utav

- $y=y_0+k(x-x_0)$ Enpunktsformeln

där k är riktningningskoefficienten och kan erhållas med bland annat derivatans definition.

- $k=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $k \in \mathbb{R}$ ⊛

3.4] Definition- Normallinje

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig, samt att $y=f(x)$. Normallinjen vid en punkt $P=(x_0, y_0)$ ges utav

$$y=y_0-\frac{1}{k}(x-x_0)$$

där k är riktningskoefficienten och ges av ⊛

3.5] Sambandet mellan tangent- och normallinje

Sambandet mellan koefficienterna ges utav

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Där k_1 och k_2 är koefficienterna för tangent- respektive normallinje.

3.6] Räkning på tavlan

2.15] Ta fram tangentlinjens ekvation för

$$y = 2x^2 - 5 \quad \text{vid } (2,3)$$

m.h.a derivatans definition.

Lös] Vi börjar med att definiera $f(x)$,

$$f(x) = 2x^2 - 5 .$$

- Vi har att tangentlinjensekvation ges utav

$$\boxed{y = y_0 + k(x - x_0)} \quad \text{Enpunktsformeln} \quad x_0 = 2, \; y_0 = 3$$

- Vi beräknar k m.h.a derivatans definition.

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(2+h)^2 - 5) - \overbrace{(2 \cdot 2^2 - 5)}^{=3}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2(4 + 4h + h^2) - 5 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{8} + 8h + 2h^2 - \cancel{8}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{8h + 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(8 + 2h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 8 + 2h = 8$$

Därmed får vi: $k = 8$

- Vi får nu tangentlinjens ekvation m.h.a enpunktsformeln, (*).

$$y = y_0 + k(x - x_0) \iff y = 3 + 8(x - 2)$$

Svar: $y = 3 + 8(x - 2)$.

3.7 Räkneregler – Derivering

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c\,f(x))' = c\,f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Produktregeln
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ kvotregeln
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ kedjeregeln

3.8 Derivator av elementära funktioner

$f(x)$	$f'(x)$
c, c = konstant	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\log_a x \left(= \frac{\ln x}{\ln a}\right)$	$\frac{1}{x \ln a}$

OBS! I boken skriver de

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

Detta fungerar utmärkt med!

2.2:17 Beräkna

$$\left(\frac{1-4x^2}{x^3}\right)'$$

Lös] Vi använder oss utav kvotregeln

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Här har vi att $\begin{cases} f(x) = (1-4x^2) \\ g(x) = x^3 \end{cases}$

$$\left(\frac{1-4x^2}{x^3}\right)' = \frac{((-8x)x^3) - ((1-4x^2)3x^2)}{(x^3)^2} =$$

$$\frac{-8x^4 - 3x^2 + 12x^4}{(x^6)} = \frac{4x^4 - 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(4x^2-3)}{x^6} =$$

$$\frac{4x^2-3}{x^4}$$

Svar: $\left(\frac{1-4x^2}{x^3}\right)' = \frac{4x^2-3}{x^4}$

Ex] Derivera följande

$$\cos(e^{2x})$$

Lösning] vi använder oss utav kedjeregeln.

$$(\cos(e^{2x}))' = (-\sin(e^{2x})) \cdot \left(\frac{d}{dx} e^{2x}\right) =$$

- $$(-\sin(e^{2x}))(e^{2x})\left(\frac{d}{dx} 2x\right) =$$
- $$-\sin(e^{2x})(e^{2x})(2) =$$

$$-2e^{2x} \sin e^{2x}$$

18