Övning 7

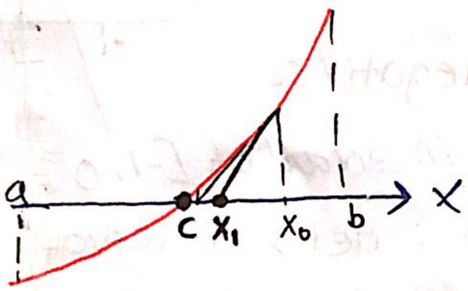
Jowan@kth.se

20/09/2017

7.1] Newton Raphson – Numerisk metod

Låt $y=f(x)$ vara en kontinuerlig deriverbar funktion i intervallet $[a,b]$. Antag vidare att funktionen har ett nollställe c i intervallet $[a,b]$ och att x_0 är en punkt som ligger nära c.

Alltså betecknar c den exakta lösningen till ekvationen $f(x)=0$, medan x_0 är en approximation av lösningen.



För att få bättre approximation bestämmer vi: skärningspunkten mellan x-axeln och punkten $P=(x_0, f(x_0))$.

Tangenten genom punkten $P=(x_0,f(x_0))$ har ekvationen:

- $y = f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0)$

Skärningen med x-axeln får vi då $y=0$:

- $0 = f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Där x_1 är en ny approximation av lösningen c.

. Iterationsformel för Newton-Raphsons metod

- $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Scanned by CamScanner

7.2] Räkning på tavlan

Tentamien 04/04/2013

4] Ekvationen

$$x^3+1=3x^2$$

har en negativ rot. Bestäm denna med 3 korrekta decimaler m.h.a Newton-Raphson.

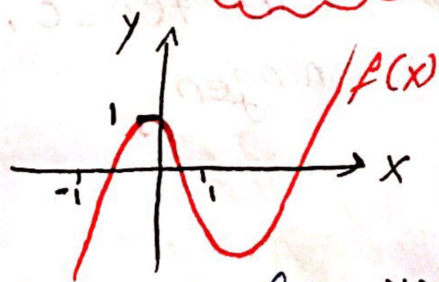
Lös] Vi börjar med att skriva om ekvationen och definiera $f(x)$.

$$x^3+1=3x^2 \Leftrightarrow x^3+1-3x^2=0$$

$f(0)=1$
$f(-1)=-3$

Där $f(x)=x^3+1-3x^2$.

Grafen till $f(x)$ ser ut:



Vi ser att den negativa roten hamnar i intervallet $[-1,0]$. Därför väljer vi ett startvärde i detta intervall.

- Newton Raphson: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$\begin{cases} \bullet\ f'(x)=3x^2-6x \\ \bullet\ f(x)=x^3+1-3x^2 \\ \bullet\ x_0=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} f'(x_0=-1)=3(-1)^2-6(-1)=9 \\ f(x_0=-1)=(-1)^3+1-3(-1)^2=-3 \\ x_0=-1 \end{cases}$$

1) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_1 = (-1) - \frac{(-3)}{(9)} \Leftrightarrow x_1 = -0{,}667$ (3)

2) $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Leftrightarrow x_2 = -0{,}549$

3) $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Leftrightarrow x_3 = -0{,}532$

4) $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Leftrightarrow x_4 = -0{,}532$

Då de 3 första 3 decimalerna inte ändras i x_4 eller x_5 (om ni testar) så har vi troligen 3 korrekta decimaler.

7.3] L'Hospital regel

Om f och g är definierade i en punkterad omgivning av $x = a$, och

- f och g är deriverbara med $g' \neq 0$ i omgivningen av a
- $f(x), g(x) \to 0$ eller $f(x), g(x) \to \pm\infty$ då $x \to a$

Då gäller att

- $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OBS ▲ Ej kvotregeln här! Derivera nämnare och täljare för sig

Alltså: $\frac{f'}{g'}$ och ej $\left(\frac{f}{g}\right)'$

OBS ▲ Regeln gäller även för $a = \pm\infty$ och ensidiga gränsvärden. Dvs: $x \to a$, $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \pm\infty$

Vi kan använda L'Hospitals regel flera gånger, men vi måste då kontrollera varje gång att vi får ett obestämt uttryck innan vi deriverar igen.

Obestämda uttryck: "$\left[\frac{0}{0}\right]$", "$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$"

7.3] Räkning på tavlan

4.3:5] Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}x}{\tan^{-1}x}$$

Lös] $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}x}{\tan^{-1}x}$ ger "$\left[\frac{0}{0}\right]$". Därför använder vi L'Hospitals regel för att beräkna gränsvärdet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}x}{\tan^{-1}x} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

OBS ! $\tan^{-1}x \neq \frac{\sin^{-1}x}{\cos^{-1}x}$

4.3:14] Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$$

Lös] $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$ ger "$\left[\frac{0}{0}\right]$". L'Hospitals regel ger:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \left\{ \text{"}\left[\frac{0}{0}\right]\text{", L'Hospitals regel} \right\}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \left\{ \text{"}\left[\frac{0}{0}\right]\text{", L'Hospitals regel} \right\} \overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Tentamen 2014-10-24

7] A- Definiera vad som menas med derivatan av en funktion f i en punkt a.

B- Låt

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & , \ x \neq 0 \\ -1/2 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Använd derivatans definition för att beräkna $f'(0)$.

Lös] A) Med derivatan i punkten a ($f'(a)$), menas:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om detta gränsvärde existerar ändligt. Om gränsvärdet inte existerar ändligt så är f inte deriverbar i punkten a.

B) Vi ska beräkna $f'(0)$. Vi använder oss utav derivatans definition, där $a=0$.

$$f'(a=0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad (*)$$

Om $(*)$ existerar så är f deriverbar och gränsvärdet är $f'(0)$.

(7)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - \overbrace{f(0)}^{=-1/2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(\ln(1+h)-h) + h^2}{2h^2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2(\ln(1+h)-h)+h^2}{2h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{2\ln(1+h) - 2h + h^2}{2h^3} =$$

$$\left\{ \text{"}\left[\tfrac{0}{0}\right]\text{"}: \text{L'Hospital} \right\} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h} - 2 + 2h}{6h^2} =$$

$$\left\{ \text{"}\left[\tfrac{0}{0}\right]\text{"}: \text{L'Hospital} \right\} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{(1+h)^2} + 2}{12h} =$$

$$\left\{ \text{"}\left[\tfrac{0}{0}\right]\text{"}: \text{L'Hospital} \right\} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4}{(1+h)^3}}{12} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4}{12(1+h)^3} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{3(1+h)^3} = \frac{1}{3}$$

Vi ser att gränsvärdet är ändligt / existerar, därför är funktionen deriverbar i origo och ger $f'(0) = \frac{1}{3}$.

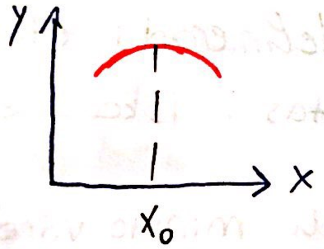
Scanned by CamScanner

7.5 Satser om lokala extremvärden

Sats De lokala extrempunkterna till en funktion f, som är definierad i ett intervall, återfinns bland följande punkter:

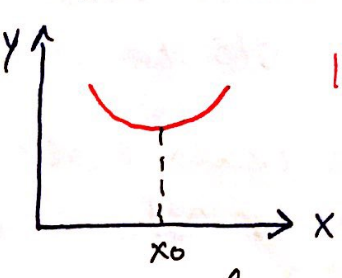
- kritiska punkter ($f'(x)=0$) (Lokal Terass, max, min)
- singulära punkter (punkter där funktionen inte är deriverbar)
- Ändpunkter som tillhör intervallet

Sats Om funktionen f är deriverbar och $f'>0$ i en en vänsteromgivning av $x=x_0$ och $f'<0$ i en högeromgivning, då har f ett lokalt maximum i $x=x_0$.



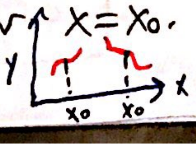
lokalt maximum

sats Om funktionen f är deriverbar och $f'<0$ i en vänsteromgivning av $x=x_0$ och $f'>0$ i en högeromgivning, då har f ett lokalt minimum i $x=x_0$.



lokalt minimum

sats om funktionen f är deriverbar och $f'(x_0)=0$ samt $f'>0$ (eller <0) i en vänster och höger-omgivning av $x=x_0$, då har f en terasspunkt i $x=x_0$



7.6] största och minsta värde

Om en funktion f är definierad i ett intervall I och $x_0 \in I$ samt:

- $f(x_0) \geq f(x)$ för alla $x \in I$

då sägs $f(x_0)$ vara funktionens största värde i intervallet I. Om $x_1 \in I$ och

- $f(x_1) \leq f(x)$ för alla $x \in I$

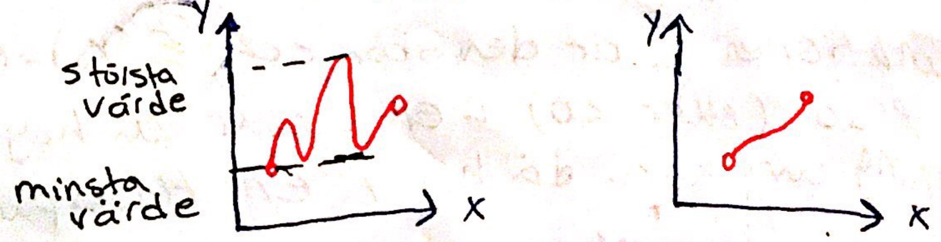
Då sägs $f(x_1)$ vara funktionens minsta värde i intervallet I.

Sats största och minsta värdet av en kontinuerlig funktion f, definierad i ett slutet och begränsat intervall, antas i lokala extrempunkter.

Sats största och minsta värdet av en kontinuerlig funktion f, definierad i ett öppet intervall, antas antingen i lokala extrempunkter eller så gäller då $x \to$ ändpunkt att

- $\lim f(x) >$ lokala extremvärden $\Rightarrow$ f saknar största värde.

  $\lim f(x) <$ lokala extremvärden $\Rightarrow$ f saknar minsta värde.



11

7.7] Andra-derivata-testet

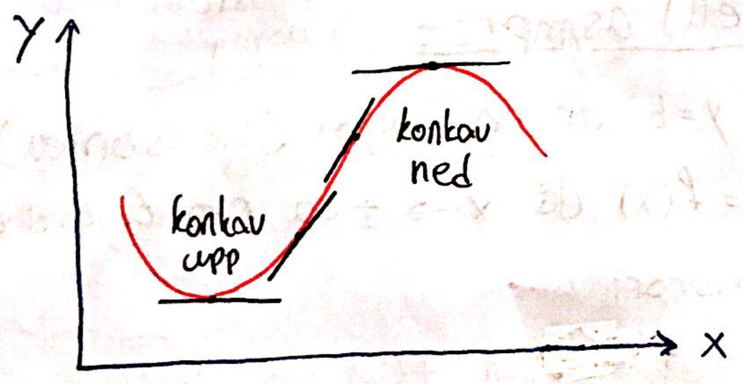
Låt f vara en två gånger deriverbar funktion.

Om $f'(x_0) = 0$ och

- $f''(x_0) > 0$ då är x_0 en lokal minimipunkt
- $f''(x_0) < 0$ då är x_0 en lokal maximipunkt.
- $f''(x_0) = 0$ då kan x_0 vara vilket fall som

7.8] Inflexionspunkter

Är en punkt på en kurva där kurvan övergår från att vara konkav till att vara konvex eller vice versa.



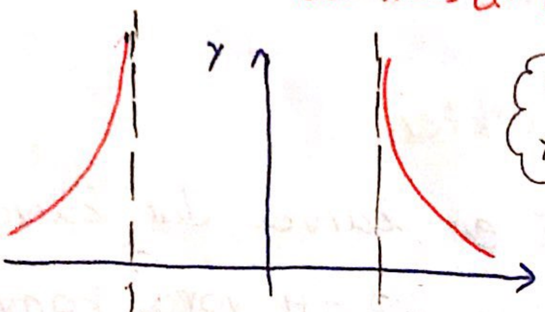
Inflexionspunkter är där $f''(x) = 0$

7.9 Asymptoter

lodrät (vertikal) asymptot

Den räta linjen $x=a$ är en lodrät (vertikal) asymptot till funktionen $y=f(x)$ om

- $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to a^+$ eller $x \to a^-$



$\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

vertikala asymptoter

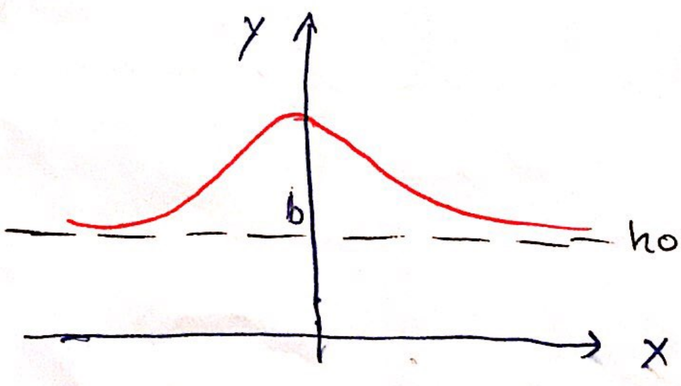
Ser man att något x är odef för f(x), misstänk direkt lodrät asymptot

vågrät (horisontell) asymptot

Den räta linjen $y=b$ är en vågrät (horisontell) asymptot till funktionen $y=f(x)$ då $x \to \pm\infty$ om följande gränsvärde existerar:

- $\underbrace{\lim_{x \to +\infty} f(x) = b}_{\text{Höger vågrät asymptot}}$
- $\underbrace{\lim_{x \to -\infty} f(x) = b}_{\text{Vänster vågrät asymptot.}}$

där $b \in \mathbb{R}$

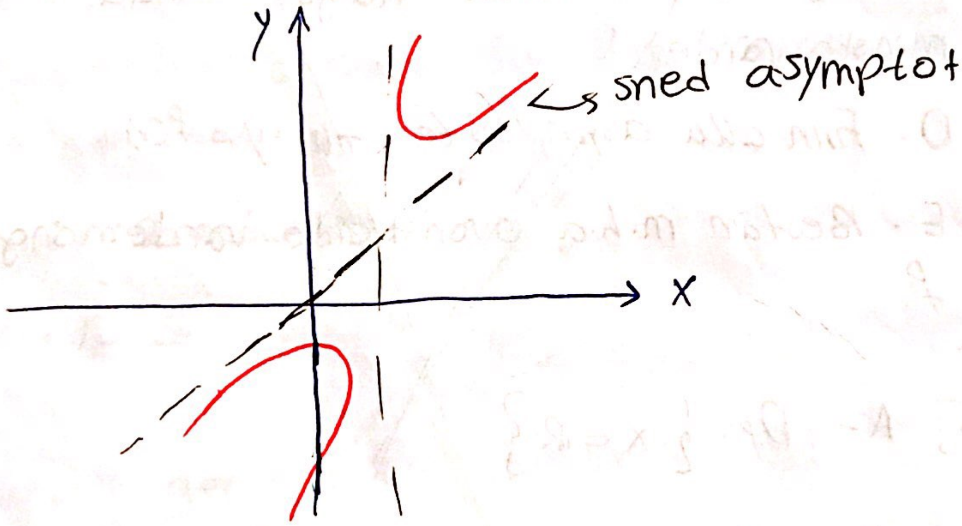


horisontell asymptot

Sneda asymptoter

Den räta linjen $y = kx + m$ är en sned asymptot till funktionen $y = f(x)$ då $x \to \pm\infty$ om följande gränsvärde existerar.

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ där $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = m$ där $m \in \mathbb{R}$



när $x \to +\infty$ så är det en höger sned asymptot.

när $x \to -\infty$ så är det en vänster sned asymptot.

Tentamen 2016-01-11

15

1] Betrakta funktionen f som ges av

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

A] Bestäm definitionsmängden till f

Lös] vi ser att x är definierat för alla tal, därav

$$D_f : \{x \in \mathbb{R}\}$$

B] Bestäm de intervall där f är växande resp avtagande

Lös] vi måste derivera funktionen, detta för att kunna undersöka.

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

- $f'(x) = 0$ ger oss de kritiska punkterna.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

I x-raden skriver vi de känsliga punkterna
$f'(x)=0$ — odef punkter — änd punkter

- $f(x)$ är strängt växande då: $x < -1$ och $x > 1$
- $f(x)$ är strängt avtagande då: $-1 < x < 1$

C] Bestäm alla lokala extrempunkter till f.

Lös] • Lokal minpunkt i $(1, f(1))$

där $f(1) = 1 - 2\arctan 1 = 1 - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$

• Lokal maxpunkt i $(-1, f(-1))$:

där $f(-1) = -1 - 2\arctan(-1) = -1 - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2}$

D] Bestäm alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.

Lös] Inga horisontella asymptoter, då:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x - 2\arctan x = \pm\infty$$

Inga vertikala asymptoter, då inga odef x-värden.

Vi testar sneda asymptoter:

$$\bullet \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{2\arctan x}{x}\right) =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{2\arctan x}{x} = 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{2\arctan x}^{\to \pm\frac{\pi}{2}}}{x} =$$

$$1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2\arctan x}{x}}{\frac{x}{x}} = 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{\boxed{\frac{2\arctan x}{x}}}^{\to 0}}{1} = 1$$

$$\boxed{k = 1}$$

$$\bullet \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} ((x - 2\arctan x) - 1 \cdot x) =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} -2\arctan x \quad m = \begin{cases} \bullet \lim_{x \to \infty} -2\underbrace{\arctan x}_{\pi/2} = -\pi \\ \bullet \lim_{x \to \infty} -2\underbrace{\arctan x}_{-\pi/2} = \pi \end{cases}$$

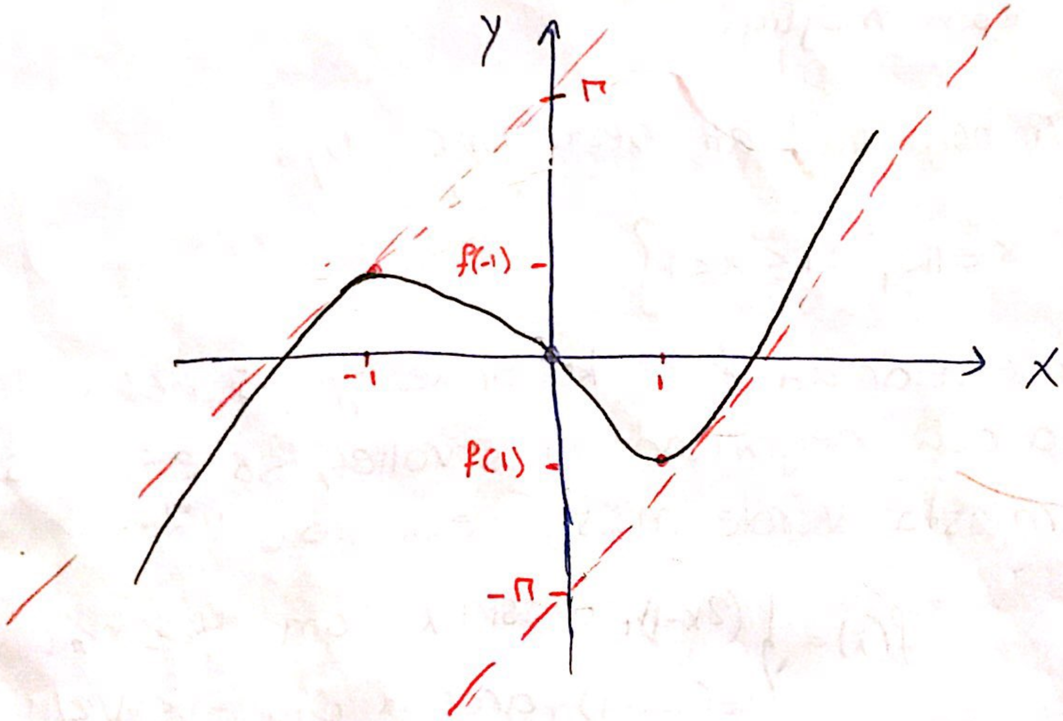
Scanned by CamScanner

vi får alltså de sneda asymptoterna: (17)

$y = 1 \cdot x - \pi$ och $y = 1 \cdot x + \pi$

då $x \to \infty$ då $x \to -\infty$

E] skissa kurvan



maxpunkt: $(-1, f(-1))$

minpunkt: $(1, f(1))$

sneda asymptoter: $y = x - \pi$ då $x \to \infty$

$y = x + \pi$ då $x \to -\infty$

Nollställen är $x = 0$ då $x - 2\arctan x = 0 \Leftrightarrow$

ger $x = 0$

Scanned by CamScanner

Tentamen 2016-06-10

3] Avgör om funktionen $f(x) = |2x-1| + \arcsin x$ antar något största respektive minsta värde och bestäm isåfall dessa. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.

Lös] Vi börjar med att bestämma D_f:

$$D_f : \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \}$$

Vi observeror att f är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet, så ett största och minsta värde måste existera. Vidare:

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1) + \arcsin x & \text{om } 1/2 \leq x \leq 1 \\ -(2x-1) + \arcsin x & \text{om } -1 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vi deriveror och får:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{om } 1/2 < x < 1 \\ -2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{om } -1 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Derivata saknas i punkten $x = \frac{1}{2}$ då "vass" punkt. $x = \frac{1}{2}$ är även en singulär punkt.

- Vi ser att $f'(x) > 0$ på intervallet $1/2 < x < 1$.
vi har inga kritiska punkter i detta intervall
($f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ villket är falska rötter).
- Vi ser att $f'(x) < 0$ på intervallet $-1 < x < \frac{1}{2}$, och här har vi dock kritiska punkter.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, dock kommer endast $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ för att det ska uppfylla intervallet $-1 < x < \frac{1}{2}$.

Alltså:

- Ändpunkter: $x = 1$, $x = -1$
  - $x = 1$, $f(1) = 1 + \frac{\pi}{2}$ $\{2(1) - 1 + \arcsin(1) = 1 + \frac{\pi}{2}\}$
  - $x = -1$, $f(-1) = 3 - \frac{\pi}{2}$ $\{1 - 2(-1) + \arcsin(-1) = 3 - \frac{\pi}{2}\}$
- Singulära punkter: $x = \frac{1}{2}$
  - $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ $[2(\frac{1}{2}) - 1 + \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}]$
- kritiska punkter: $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + 1 - \frac{\pi}{3}$ $\{1 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

Vi får då att f:s minsta värde är $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ och fs största värde är $f(1) = 1 + \frac{\pi}{2}$.

Tentamen 2015-01-12

1] Betrakta funktionen som ges av

$$f(x) = xe^{1/x}$$

A] Bestäm definitionsmängden till f.

Lös] $f(x)$ är definierad för alla x förutom att $x \neq 0$. Alltså:

$$D_f : \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \}$$

B] Beräkna de fyra gränsvärdena

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \text{ och } \lim_{x \to 0^\pm} f(x)$$

Alla dessa gränsvärden är standard gränsvärden

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$

[d] Bestäm alla lokala extrempunkter.

Vi deriverar och får:

$$f'(x) = e^{1/x} + xe^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

som existerar för alla $x \neq 0$ och är:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1 .$$

x		0		1	
$f'(x)$	$+$	odef	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	odef	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

En lokal minimipunkt fås i $x=1$, där $f(1) = e$.

[e] Skissa kurvan.

- vid $x=0$ är $f(x)$ odef
- vid $x=1$ är $f'(x) = 0$