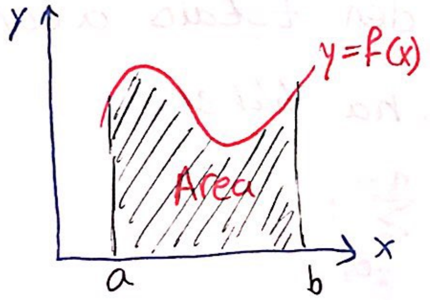
Övning 9

Jowan @kth.se

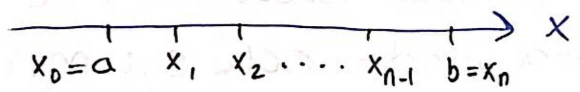
28/09/2017

9.1] Areaberäkning

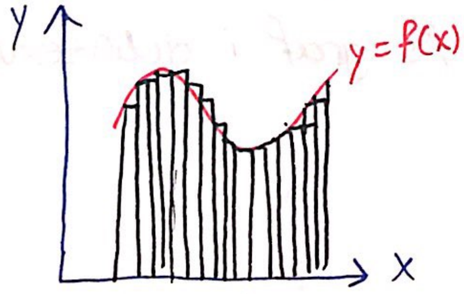
Bestäm arean under kurvan $y=f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$.



Vi delar upp intervallet $[a,b]$ i n delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ med lika längd, h.



I varje delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ approximerar vi arean inom delintervallet med en rektangel med höjd $f(x_i)$.



Varje rektangel har arean

- $A_i =$ basen $\cdot$ höjden $= (x_{i+1}-x_i)\cdot f(x_i)$

Den totala arean approximeras av den sammanlagda arean av alla rektanglar,

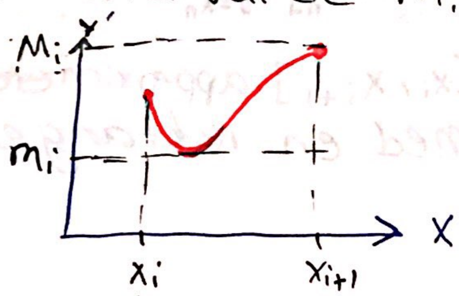
- $A \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$

Om vi låter vår indelning av intervallet $[a, b]$ bli finare, dvs ökar n, så borde vi få en bättre approximation av den totala arean. I gränsfallet $n \to \infty$ borde vi ha likhet:

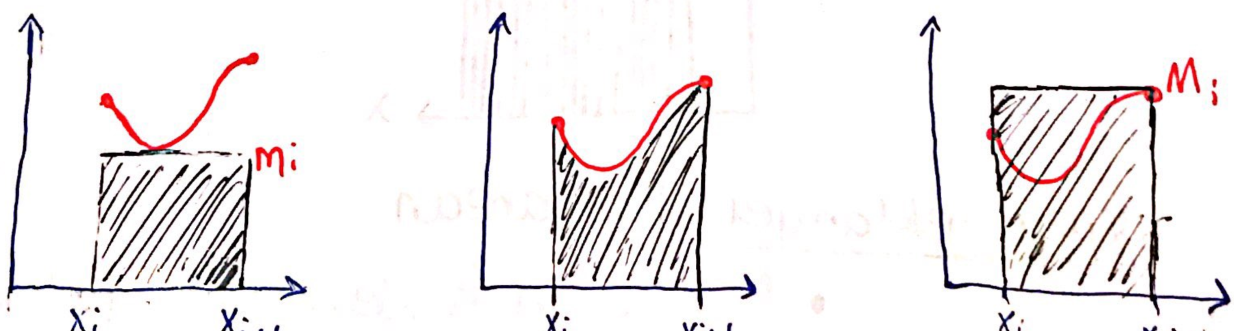
- $A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} A_i$

9.2] Integralens definition

I ett intervall $[x_i, x_{i+1}]$, som ges av en partition P, antar den kontinuerliga funktionen f ett största värd M_i och ett minsta värde m_i.



Arean A_i under f's graf i delintervallet uppfyller olikheten:



- $m_i(x_{i+1} - x_i) \leq A_i \leq M_i(x_{i+1} - x_i)$

Denna olikhet gäller alla delintervall, och om vi summerar ihop areorna i vänsterledet respektive högerledet så får vi:

- undersumma $= L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$
- översumma $= U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$

$L(f,P) \leq A \leq U(f,P)$

9.3] Riemannsummor

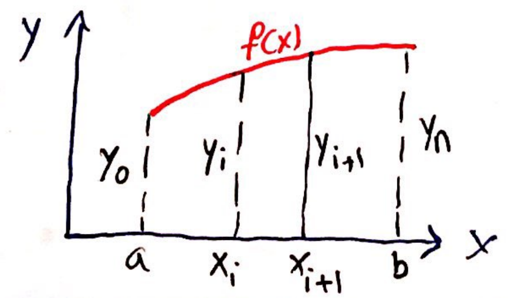
Används för att:

- Approximera integralen $\int_a^b f(x)dx$.
- Härleda grundegenskaper för bestämda integraler.
- Härleda formler som inkludera bestämda integraler (tex beräkning av areor, volymer och båglängder).
- Beräkna några typer av gränsvärden.
- Uppskatta eller beräkna summor.

Antag att $f(x)$ är monoton (växande eller avtagande) på $[a,b]$. Då antar funktionen sina största och minsta värden i $[x_i, x_{i+1}]$ i intervallets ändpunkter.

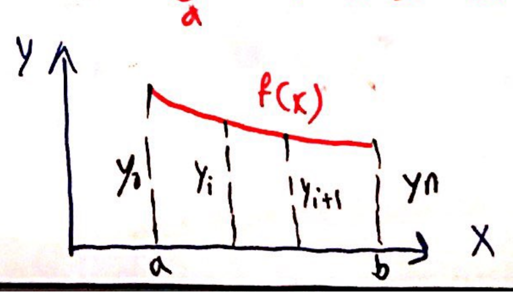
- Om $f(x)$ är växande i $[a,b]$;

- $h = \frac{b-a}{n}$
- $m_i = y_i \qquad M_i = y_{i+1}$
- under $= L(f,P) = h[y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}]$
- över $= U(f,P) = h[y_1 + y_2 + \dots + y_n]$
- $L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P)$



- Om $f(x)$ är avtagande i $[a,b]$;

- $h = \frac{b-a}{n}$
- $m_i = y_{i+1} \qquad M_i = y_i$
- under $= L(f,P) = h[y_1 + y_2 + \dots + y_n]$
- över $= U(f,P) = h[y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}]$
- $L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P)$



9.4] Räkning på tavlan

Tentamen 2014-03-10

3] Beräkna två Riemannsummor R_1 och R_2 för integralen

$$\int_0^6 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

båda med integrationsintervallet indelat i tre lika långa delar och sådan att R_1 säkert är mindre än R_2, där R_2 säkert är större än integralens värde.

Lös] Vi har alltså att:

$$I = \int_0^6 \frac{1}{x^3+1}$$

där $R_1 \le I \le R_2$.

R_1 motsvarar undersumma
R_2 motsvarar översumma

Vi börjar med att dela intervallet i tre lika delar: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{3} = 2$

n=antal delar

Detta ger oss:

- $x_0 = 0$ $x_1 = 2$ $x_2 = 4$ $x_3 = 6$

Därmed blir undersumman R_1:

$$R_1 = h\left(f(2) + f(4) + f(6)\right)$$

$$R_1 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{65} + \frac{1}{217}\right)$$

$$R_1 = \frac{2}{9} + \frac{2}{65} + \frac{2}{217}$$

$$\begin{cases} f(2) = \frac{1}{2^3+1} = \frac{1}{9} \\ f(4) = \frac{1}{4^3+1} = \frac{1}{65} \\ f(6) = \frac{1}{6^3+1} = \frac{1}{217} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$R_2 = h(f(0) + f(2) + f(4))$

$R_2 = 2\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{65}\right)$

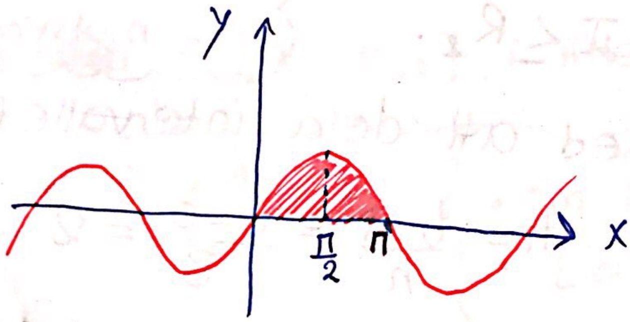
$R_2 = 2 + \frac{2}{9} + \frac{2}{65}$

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{0^3+1} = 1 \\ f(2) = \frac{1}{9} \\ f(4) = \frac{1}{65} \end{cases}$$

Då $f(x)$ är ett rationellt tal valde vi x_0, x_1, x_2 då bråket blir störst för de minsta x-värdena.

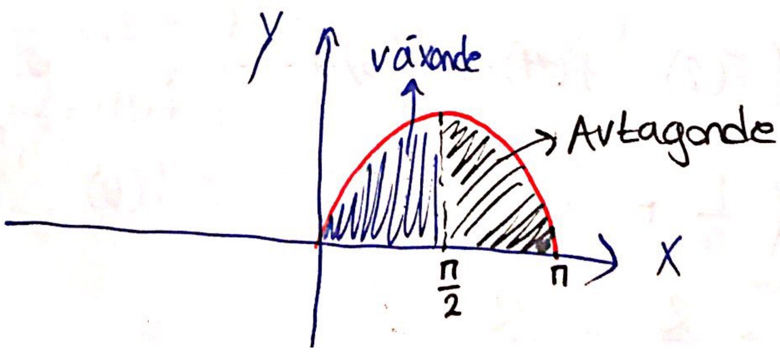
5.3:5] $f(x) = \sin x$ i intervallet $[0, \pi]$. Detta intervall är indelat i 6 lika långa delar. Bestäm de två Riemannsummorna $L(f,P)$ och $U(f,P)$.

Lös] vi börjar med att rita $f(x)$.



Vi ser att vi har en växande $f(x)$ i intervallet $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ och ett avtagande $f(x)$ i $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

Därmed måste vi dela upp $f(x)$ i 2 delar.



Vi har att $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$

$n = 6$ då 6 lika delar

Därmed får vi:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{\pi}{6} \quad x_2 = \frac{\pi}{3} \\ x_3 = \frac{\pi}{2} \quad x_4 = \frac{2\pi}{3} \quad x_5 = \frac{5\pi}{6} \\ x_6 = \pi \end{cases}$$

Den växande delav av $f(x)$ ger oss intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ och har då: undersumman:

$$L_1(f, P_6) = h\left(f(0) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$L_1(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$L_1(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

översumman blir då:

$$U_1(f, P_6) = h\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$U_1(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$U_1(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$U_1(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$

Den avtagande delen av $f(x)$ ger oss intervallet $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, då får vi undersumman:

$$L_2(f, P_6) = h\left(f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + f(\pi)\right)$$

$$L_2(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)\right)$$

$$L_2(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0\right)$$

$$L_2(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

Översumman blir då:

$$U_2(f, P_6) = h\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$U_2(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$U_2(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$U_2(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)$$

Vi adderar sedan både den växande och avtagande delen av $f(x)$.

$$\begin{cases} L(f, P_6) = L_1(f, P_6) + L_2(f, P_6) \iff \\ L(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \iff \\ L(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\sqrt{3}+2}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}+1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(f, P_6) = U_1(f, P_6) + U_2(f, P_6) \iff \\ U(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) \\ U(f, P_6) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(3+\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

9.5] Egenskaper hos integraler

Antag att $a \leq b \leq c$ och att A, B är konstanter.

Då gäller det att:

- $\int_a^b = -\int_b^a$ (Teckenkonvention)
- $\int (Af + Bg) = A\int f + B\int g$ (linjäritet)
- $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ (Additivitet)
- $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ (Monotonocitet)
- $|\int f| \leq \int |f|$ (Triangelolikhet)

Sats: Följande gäller för udda funktioner

- f är udda $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Sats: Följande gäller för jämna funktioner

- f är jämn $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Jämna funktioner är symmetriska under spegling i y-axeln, medan udda funktioner är symmetriska under 180° rotation kring origo.

9.6] Integralkalkylens huvudsats

Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$. Definiera en primitiv funktion till f som

- $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Då gäller det att

- $A'(x) = f(x)$

9.7] Primitiv funktion

En funktion F kallas för en primitiv funktion till funktionen f på intervallet $[a,b]$ om F är deriverbar och

- $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in [a,b]$

(Tag vänster- och högerderivata i respektive punkt).

Sats: Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och F är en primitiv funktion till f, så:

- $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

9.7] Tabell över primitiva funktioner

I tabellen nedan betyder F en primitiv funktion till f och G en primitiv funktion till g.

Funktion	En primitiv funktion
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ om $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$
$af(x)+bg(x)$	$aF(x)+bG(x)$

9.8] Variabelsubstitution

Antag att $u=u(x)$ är deriverbar på $[a,b]$ och att f är kontinuerlig i u:s värdemängd.

- $$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

9.8] Räkning på tavlan

Tentamen 2014-10-24

4] Betrakta funktionerna

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+2}\,dt \qquad G(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^t}{t+2}\,dt$$

A] Beräkna $F'(x)$ och $G'(x)$

Lös] A] Enligt Analysens huvudsats har vi att:

$$A'(x) = f(x) \quad \text{om} \quad \int_0^x f(t)\,dt.$$

Därmed får vi att:

- $A'(x) = f(x) \iff A'(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

Samma princip gäller för $G'(x)$,

- $G'(x) = f(x) \iff G'(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^t}{t+2}\,dt$, dock

måste vi ta hänsyn till inre derivatan här. Därmed får vi att:

- $G'(x) = f(x) \iff G'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2+2} \cdot 2x$

Svar: $A'(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

$G'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2+2} \cdot 2x$

B] Beräkna $F'(1)$ och $G'(1)$.

Lös] B] Vi har:

$$F'(x) = \frac{e^x}{x+2}, \quad F'(1) = \frac{e^1}{1+2} = \frac{e}{3}$$

$$G'(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+2} \cdot 2x, \quad G'(1) = \frac{e^{1^2}}{1^2+2} \cdot (2 \cdot 1) = \frac{2e}{3}$$

Svar: $F'(1) = \frac{e}{3}$ och $G'(1) = \frac{2e}{3}$

Ex] Beräkna

$$\frac{d}{dt} \int_t^3 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Lös] vi skriver om integralen m.h.a integralens egenskaper.

$$\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)$$

$$\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_3^t \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Därmed får vi:

$$\frac{d}{dt} \int_t^3 \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{d}{dt} \int_3^t \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\sin t}{t}$$

Svar: $\frac{d}{dt} \int_t^3 \frac{\sin x}{x} = -\frac{\sin t}{t}$

5.4:4] Beräkna integralen

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx$$

genom att använda integralens egenskaper.

Lös]

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx = \int_0^2 3x\,dx + \int_0^2 1\,dx =$$

$$3\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 1\,dx =$$

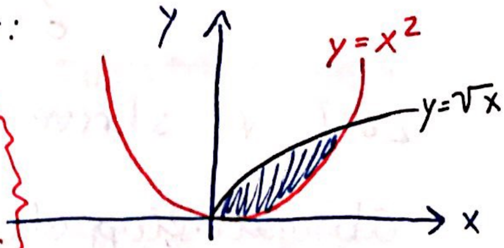
$$3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[x\right]_0^2 =$$

$$3\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + (2-0) =$$

$$3\left(\frac{4}{2} - 0\right) + 2 = 3(2) + 2 = 8$$

Ex] Finn arean för området R ovanför $y = x^2$ och till höger om $x = y^2$.

Lös] Ekvationerna vi har är:



$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Endast $+\sqrt{x}$ kommer med då $-\sqrt{x}$ ej är i området

- Skärningspunkterna kommer utgöra intervallet $[a, b]$ för integralen.

Skärningspunkterna får vi då: $y_1 = y_2$

$y_1 = x^2$ och $y_2 = \sqrt{x}$, alltså:

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

Detta ger oss lösningarna: $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$

Arean av området R blir då:

$$R = \int_{x_1}^{x_2} (f_{\text{överst}}(x) - f_{\text{underst}}(x))\,dx \Leftrightarrow$$

$$R = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 =$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}1^{3/2} - \frac{1}{3}1^3\right) - \left(\frac{2}{3}0^{3/2} - \frac{1}{3}0^3\right)\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Svar: $R = \frac{1}{3}$ A.e.

Ex] Finn integralen styckvis

$$\int_0^{3\pi/2} |\cos x| \, dx$$

Lös] vi skriver om $|\cos x|$ m.h.a absolutbeloppets definition.

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{om} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x & \text{om} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{3\pi/2} |\cos x| \, dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos x) \, dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = \Big[\sin x \Big]_0^{\pi/2} - \Big[\sin x \Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} =$$

$$\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) - \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right) =$$

$$((1 - 0) - (-1 - 1)) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Tentamen 2016-01-11

2]. Beräkna nedanstående integraler.

A] $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (Använd gärna substitutionen $u = 1+e^x$)

Lös] A] Då $u = 1+e^x$ så skriver vi om integralen som en funktion utav u

$$\left\{\begin{array}{l} u = 1+e^x \iff e^x = u-1 \\ du = e^x\,dx \iff \frac{du}{e^x} = dx \iff \frac{du}{u-1} = dx \end{array}\right\}$$

Gränserna blir då:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{\text{övre gräns}} = 1+e^{\ln 3} = 1+3 = 4 \\ u_{\text{nedre gräns}} = 1+e^0 = 1+1 = 2 \end{array}\right.$$

$$\int_{\underbrace{0}_{=2}}^{\overbrace{\ln 3}^{=4}} \frac{\overbrace{e^x}^{=u-1}}{\underbrace{1+e^x}_{=u}} \overbrace{dx}^{=\frac{du}{u-1}} = \int_2^4 \frac{\cancel{u-1}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{u-1}} =$$

$$\int_2^4 \frac{du}{u} = \Big[\ln|u|\Big]_2^4 = \big(\ln(4) - \ln(2)\big) =$$

$$\ln\left(\frac{4}{2}\right) = \ln 2.$$

Tentamen 2014-03-10

2] Beräkna integralen

$$\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Lös] vi substituerar $\sqrt{x} = t$. Alltså:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t \,, \quad \cancel{dt = \sqrt{x}} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \iff dt \cdot 2\sqrt{x} = dx \iff dt \cdot 2t = dx \end{cases}$$

Gränserna blir då:

$$\begin{cases} t_{\text{undre gräns}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{16}} = \dfrac{\pi}{4} \\ t_{\text{övre gräns}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Integralen blir då:

$$\int_{\underbrace{\pi^2/16}_{=\frac{\pi}{4}}}^{\overbrace{\pi^2/4}^{=\pi/2}} \frac{\cos\overbrace{\sqrt{x}}^{=t}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{=t}} \underbrace{dx}_{=dt\cdot 2t} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos t}{t} \cdot 2t\,dt =$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos t\,dt = \Big[2\sin t\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2(1) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Tentamen 2016-06-10

2] Beräkna nedanstående integraler och förenkla svaren så långt som möjligt.

A] $\int \tan x \, dx$ (Använd substitution $u = \cos x$)

Lös] A] Då vi har att $u = \cos x$ måste vi skriva om $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{cases} \Longrightarrow \frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\underbrace{\cos x}_{u}} \underbrace{dx}_{\frac{du}{-\sin x}} = \int \frac{\cancel{\sin x}}{u} \cdot \frac{du}{-\cancel{\sin x}} =$$

$$\int -\frac{du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C \quad \left\{ \text{Substituera tillbaka} \right.$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

Svar: $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

Scanned by CamScanner

Tentamen 2015-04-07

2] Avgör om det är sant att

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < 2$$

Lös] Denna fråga kan lösas på 2 sätt:

1) Med hjälp av absolutbeloppets definition:

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-(x)} & \text{om} \quad 0 \le x \le 1 \\ e^{-(-x)} & \text{om} \quad -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Alltså kan vi lösa integralen styckvis;

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-(-x)}\,dx =$$

$$\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{0}^{1} + \left[+e^{+x}\right]_{-1}^{0} =$$

$$\left(-e^{-1} - (-e^{-0})\right) + \left(+e^{+0} - e^{-1}\right) =$$

$$-\frac{1}{e} + 1 + 1 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{2}{e} < 2$$

2) $\int_{-1}^{1} e^{-|x|}$ kan lösas m.h.a dess egenskap, då den är jämn.

$f(-x) = f(x)$ Jämn funktion ⊛

$e^{-|x|}$ är jämn då:

$e^{-|-x|} = e^{-|x|}$ enligt ⊛

Därmed är integrationsintervallet symmetrisk runt origo:

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx =$$

$$2\left[-e^{-x}\right]_{0}^{1} = 2\left(-e^{-1}-(-e^{-0})\right) =$$

$$2\left(-\frac{1}{e}+1\right) = 2-\frac{2}{e} < 2$$

Använde: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

om jämn funktion.

Övning 10

Jowan@kth.se

29/09/2017

10.1] Tabell över primitiva funktioner

Funktion	En primitiv funktion
• x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ om $n \neq -1$
• $\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
• e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$
• $\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax$
• $\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$
• $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
• $\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

10.2] Areaberäkning

Arean under kurvan $y=f(x)$, över kurvan $y=g(x)$ och mellan $x=a$ och $x=b$ är:

$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\text{Area} = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

10.3 Partiell integration

Om u är kontinuerlig och v är kontinuerligt deriverbar, då gäller att

- $\int u \cdot v \, dx = U \cdot v - \int U \cdot v' \, dx$

Där U är en primitiv funktion till u och v' är derivatan av v.

TIPS 1 : Om en faktor är ett polynom och den andra faktorn är en logaritmfunktion / arcusfunktion, då kan detta funka

- v = logaritm- / arcusfunktion
- u' = Polynom

TIPS 2 : Om en faktor är ett polynom och den andra faktorn är en exponential- / sinus- / cosinusfunktion så kan detta funka:

- v = Polynom
- u' = exponential- / sinus- / cosinusfunktion

OBS! Dessa är endast tips och behöver inte alltid fungera.

10.4] Räkning på tavlan

6.1:7] Beräkna

$$\int \tan^{-1} x$$

med hjälp av partiell integration

Lös] vi kan tillämpa Tips 1 här då vi har en arcusfunktion.
Partiell integration ger oss:

$$\int u'v\,dx = U\cdot v - \int U\cdot v'\,dx$$

vi skriver ned vår integral:

$$\int \tan^{-1}x\,dx = \int 1\cdot \tan^{-1}x\,dx$$

$$\left\{\begin{matrix} v = \tan^{-1}x & v' = \frac{1}{1+x^2} \\ u' = 1 & U = x \end{matrix}\right\}$$

$$\int 1\cdot \tan^{-1}x\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{Tillämpar} \\ \text{Partiell} \\ \text{integration}\end{matrix}\right\} =$$

$$x\cdot \tan^{-1}x - \int x\cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$\left\{\begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \Longleftrightarrow \frac{dt}{2x} = dx \end{matrix}\right\} = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+t}\cdot\frac{dt}{2x} =$$

$$x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln|1+t| + C =$$

Scanned by CamScanner

$x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$

6.1:5] Beräkna

$$\int x^3 \ln x \, dx$$

med hjälp av partiell integration.

Lös] vi skriver ned partiell integrering formeln

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

vi får då:

$$\left\{\begin{array}{ll} v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \\ u' = x^3 & u = \frac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4}\cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$\frac{x^4}{4}\cdot\ln x - \int \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Tentamen 2017-06-09 hade frågan $\int_1^e x^5 \ln x$ på fråga 2B

Tentamen 2013-10-24

2 B] Beräkna följande integralen m.h.a. partiell integralen

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx$$

Lös] vi skriver ned formeln:

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

vi får då:

$$\left\{ \begin{array}{ll} v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \\ u' = x^2 & u = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\}$$

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e =$$

$$\left(\frac{e^3}{3} \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1^3}{3} \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0}\right) - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9}\right) =$$

$$\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3e^3 - e^3 + 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Tentamen 2014-10-24

2B] Beräkna följande

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

Lös] 2B] vi skriver ned formeln med hjälp av partiell integration.

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

Då får vi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} v = x & v' = 1 \\ u' = \sin x & u = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x = \left[-\cos x \cdot x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \cdot 1 \, dx =$$

$$\left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$\left(\left(-\pi \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \right) - \left(-\underbrace{0 \cos 0}_{=0} \right) \right) + \left[\sin x \right]_0^{\pi} =$$

$$\left(-\pi \cdot (-1) + 0 \right) + \left(\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right) = \pi$$

Scanned by CamScanner

Tentamen 2017-01-09

2B] Beräkna integralen

$$\int_0^{1/2} \arcsin x \, dx$$

Lös] Vi skriver ned formeln för partiell integrering.

$$\int u'v \, dx = Uv - \int Uv' \, dx$$

Då får vi:

$$\begin{cases} v = \arcsin x & v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ u' = 1 & U = x \end{cases}$$

$$\int_0^{1/2} \arcsin x \, dx = \left[x \cdot \arcsin x \right]_0^{1/2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\left[x \arcsin x \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{\pi}{6}} - \underbrace{0 \arcsin 0}_{=0} \right) - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2t} \\ t_{övre} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad t_{nedre} = 0 \end{array} \right\} = \frac{\pi}{12} - \int_0^{1/2} \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{dt}{2\cancel{x}} =$$

$$\frac{\Pi}{12} - \int_0^{1/4} \frac{dt}{2\sqrt{1-t}} = \frac{\Pi}{12} - \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt =$$

$$\frac{\Pi}{12} - \frac{1}{2}\left[-2\cdot\sqrt{1-t}\right]_0^{1/4} = \frac{\Pi}{12} + 1,\left[\sqrt{1-t}\right]_0^{1/4} =$$

$$\frac{\Pi}{12} + \left[\sqrt{1-t}\right]_0^{1/4} = \frac{\Pi}{12} + \left[\sqrt{1-t}\right]_0^{1/4} =$$

$$\frac{\Pi}{12} + \left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)} - \underbrace{\sqrt{1-0}}_{=1}\right) =$$

$$\frac{\Pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

10.5] Partialbråksuppdelning

Betrakta det rationella uttrycket

- $\frac{P(x)}{Q(x)}$

där täljaren har lägre gradtal än nämnaren.

Nämnaren bör faktoriseras så långt som möjligt då målet är att finna partialbråk som vart och ett använder en av dessa faktorer som nämnare så att summan av alla partialbråk motsvarar det ursprungliga bråket.

Faktor i nämnare	Ger upphov till partialbråken
• $x+a$	$\frac{A_1}{x+a}$
• $(x+a)^n$	$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\dots+\frac{A_n}{(x+a)^n}$
• x^2+ax+b	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}$
• $(x^2+ax+b)^n$	$\frac{A_1x_1+B_1}{x^2+ax+b}+\frac{A_2x_2+B_2}{(x^2+ax+b)^2}+\dots+\frac{A_nx_n+B_n}{(x^2+ax+b)^n}$

[10.6] Rationella integrander

Integralen av en rationell funktion kan skrivas i formen

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

där P och Q är polynom.

- Arbetsgång.

- 1) om grad $P \geq$ grad Q kan vi med polynomdivision förenkla integranden till

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

Där grad $P_2 <$ grad Q.

- 2) Faktorisera nämnarpolynomet $Q(x)$.

- 3) Partialbråksuppdela uttrycket $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$.

Detta reducerar problemet till en summa av integraler av typen

- $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx$ och $\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} dx$

6.2:9] Beräkna följande integral

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx$$

med hjälp av partialbråksuppdelning.

Lös] Vi förenklar bråket m.h.a polynomdivision.

$$\begin{array}{rl|l} & \overbrace{x^2+0x+0}^{\text{Täljare}} & \overbrace{x^2+x-2}^{\text{nämnare}} \\ \cline{3-3} - & x^2+x-2 & 1 \\ \cline{1-2} & 0 \quad \underbrace{-x+2}_{\text{Resterm}} & \end{array}$$

Alltså kan vi skriva om integranden:

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(1+\frac{2-x}{x^2+x-2}\right)dx =$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{2-x}{x^2+x-2}\,dx = x + \int\frac{2-x}{x^2+x-2}$$

Vi partialbråksuppdelar $\int \frac{2-x}{x^2+x-2}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ x_1=1 \\ x_2=-2 \end{array}\right\}$$

Alltså kan vi skriva om nämnaren:

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

detta ger $\displaystyle \frac{2-x}{x^2+x-2} = \frac{2-x}{(x-1)(x+2)}$

$$\frac{2-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{2-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

För att täljare på HL och VL ska bli densamma så måste:

$$2-x = A(x+2) + B(x-1)$$

$$2-x = Ax + 2A + Bx - B$$

$$2-x = x(A+B) + (2A-B)$$

Vi isolerar termerna med x i sig för sig själv i HL och VL och konstanter för sig själv. Alltså:

- $-x = x(A+B) \Leftrightarrow -1 = A+B \Leftrightarrow -1-A = B$
- $2 = 2A-B \Leftrightarrow \{B = -1-A\} \Leftrightarrow 2 = 2A-(-1-A)$

$\Leftrightarrow 2 = 2A+1+A \Leftrightarrow 2 = 3A+1 \Leftrightarrow 1 = 3A \Leftrightarrow$

$$A = \frac{1}{3} \text{ och } B = -1-\frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

Då får vi:

$$\frac{2-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{4/3}{x+2}$$

vilket insatt i * ger:

$$x + \int \frac{2-x}{(x-1)(x+2)}\,dx = x + \int \left(\frac{1/3}{x-1} - \frac{4/3}{x+2}\right)dx$$

$$x + \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x+2}\right)dx =$$

$$x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\ln|x+2| + C$$

Tentamen 2016-01-11

[2B] Beräkna

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-3x-4}$$

med hjälp av partialbråksuppdelning.

Lös] Vi börjar med att faktorisera nämnaren.

$\{x^2-3x-4=0 \text{ ger } x_1=4 \text{ och } x_2=-1\}$

$$\frac{1}{x^2-3x-4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)}$$

Därefter kan vi dela upp detta bråk,

$$\frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$

nämnaren på VL och HL är densamma, vi måste finna A, B

$$1 = A(x+1)+B(x-4)$$

$$1 = Ax+A+Bx-4B$$

Detta ger oss

$$0x = x(A+B) \Leftrightarrow A+B=0 \Leftrightarrow A=-B$$

$$1 = A-4B \quad \left\{ A=-B \right\} \Leftrightarrow 1=-B-4B \Leftrightarrow$$

$$1=-5B \Leftrightarrow B=-\frac{1}{5} \text{ och } A=\frac{1}{5}$$

Alltså blir integranden:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-4)(x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1/5}{x-4} - \frac{1/5}{x+1}\right) dx =$$

$$\frac{1}{5}\int_1^2 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$\frac{1}{5}\Big[\ln|x-4| - \ln|x+1|\Big]_1^2 =$$

$$\frac{1}{5}\left[\ln \frac{|x-4|}{|x+1|}\right]_1^2 =$$

$$\frac{1}{5}\left(\ln \frac{|2-4|}{|2+1|} - \ln \frac{|1-4|}{|1+1|}\right) =$$

$$\frac{1}{5}\left(\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{5} \ln \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{1}{5} \ln \frac{4}{9}$$

Tentamen 2016-06-10

3B] Beräkna

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

med hjälp av upprepad partiell integration.

Lös] $\int u'v \, dx = Uv - \int Uv' \, dx$

$$\left\{ \begin{array}{ll} v = x^2 & v' = 2x \\ u' = \cos x & U = \sin x \end{array} \right\} \text{ ger}$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - \int 2x \sin x =$$

$$x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx$$

vi använder partiell integration igen.

$$\left\{ \begin{array}{ll} v = 2x & v' = 2 \\ u' = \sin x & U = -\cos x \end{array} \right\} \text{ ger}$$

$$x^2 \sin x - \left(-\cos x \cdot 2 - \int 2 \cdot (-\cos x) \, dx \right) =$$

$$x^2 \sin x - \left(-2\cos x + \int 2\cos x \, dx \right) =$$

$$x^2 \sin x + 2\cos x - 2\sin x + C$$