Övning 1

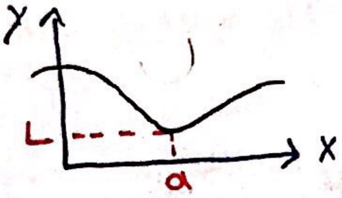
Jowan@kth.se

30/08/2018

1.1 Definition - Gränsvärden

En funktion $f(x)$ sägs ha gränsvärdet L då x går mot talet a, om följande gäller:

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$



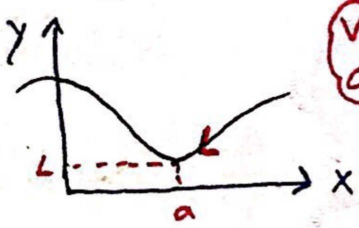
där $L \in \mathbb{R}$.

På samma sätt har vi ensidiga gränsvärden, dvs högergränsvärde samt vänstergränsvärde.

- Högergränsvärdet ges av

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Där $L \in \mathbb{R}$

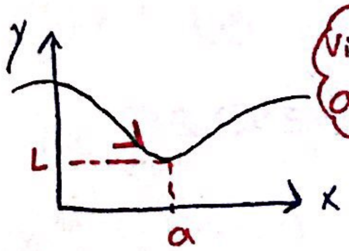


Vi närmar oss a från högersida

- Vänstergränsvärde

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Där $L \in \mathbb{R}$



Vi närmar oss a från vänstersida

För ett ett gränsvärde ska existera så måste höger- samt vänstergränsvärdet gå mot samma värde, dvs:

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

OBS ! Då $\pm\infty$ ej är reella tal så existerar ej gränsvärdet även om vi får $\pm\infty$ på både höger- samt vänstergränsvärdet.

1.2] Räkneregler - Gränsvärden

Om $\lim_{x \to a} f(x)$ och $\lim_{x \to a} g(x)$ existerar så får vi:

- $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$ om f är kontinuerlig

1.3] Obestämda uttryck

När man ska bestämma gränsvärdet av en funktion kan det hända att man får obestämda uttryck. Dessa är:

- $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty \pm \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$

Om man får obestämda uttryck så måste man skriva om och/eller förenkla $f(x)$ på något sätt.

1.4] Tips att beräkna gränsvärden

OBS ⚠ Dessa är endast tips och behöver inte alltid kunna tillämpas.

TIPS 1: Denna metod kan användas för andragradsekvationer, samt högre ordningens ekv.

Metod-lista:
- skriv om andragradsekvationen genom att:
- Faktorisera till linjära faktorer
- och sedan förenkla, om möjligt.

Ex] $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ där $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$

Här har vi andragradsekvationer i både täljare samt nämnare. Normalt sätter man $x=-2$ i uttrycket och och erhåller ett svar. Dock får vi nu att $f(4)$ ger "$\left[\frac{0}{0}\right]$". Detta är ett obestämt uttryck.

Vi skriver om uttrycket:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+3} = -3$$

Nu ser vi att vi får ett gränsvärde för det förenklade uttrycket.

TIPS 2: Denna metod kan användas när man bland annat har rotuttryck eller absolutbelopp i ett rationellt uttryck.

Metod-lista: - Förläng bråket med konjugatet av rotuttrycket eller absolutbeloppet
- Faktorisera till linjära faktorer.
- Förenkla

$\boxed{\text{Ex}}$ $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ där $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

$f(4)$ ger "$\left[\frac{0}{0}\right]$" så vi måste skriva om.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)\overbrace{(\sqrt{x}+2)}^{\text{konjugatet av } (\sqrt{x}-2)}}{\underbrace{(x^2-16)}_{\text{konjugatregeln kan tillämpas}}(\sqrt{x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{32}$$

Nu ser vi att vi får ett svar för det förenklade funktionen $f(x)$.

TIPS 3 Denna metod kan användas när $x \to \pm\infty$

Metod lista:
- Finn den högsta ordningen av x i uttrycket.
- Dividera alla termer i uttrycket med den högsta ordningen av x.
- Alla termer med x i nämnaren och en konstant i täljaren går då mot noll då x går mot $\pm\infty$.

[Ex] $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x+2}{2x^3+1}$, $f(x) = \frac{5x+2}{2x^3+1}$

Vi ser att vi får det obestämda uttrycket "$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$", därav måste vi skriva om.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x+2}{2x^3+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{5x}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\underbrace{\boxed{\frac{5}{x^2}}}_{\to 0} + \underbrace{\boxed{\frac{2}{x^3}}}_{\to 0}}{2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^3}}}_{\to 0}} = 0$$

högsta ordningen av x är x^3 här.

1.5 Metodlista - Gränsvärden

Antag att vi har en funktion $f(x)$ och vi ska beräkna $\lim_{x \to a} f(x)$.

OBS! Denna metod behöver ej fungera i alla fall, det är bara en riktlinje.

1) undersök om $f(a)$ är definierad, dvs ej resulterar i ett obestämt uttryck.

2) om inte, förenkla/omskriv $f(x)$ m.h.a algebraiska manipulationer.

3) undersök om $f(a)$ är definierad för det "nya" uttrycket.

4) om inte, undersök om högergränsvärde går mot samma tal som vänstergränsvärdet!
om Ja, så exiserar gränsvärdet.

Scanned with CamScanner

1.6] Räkning på tavlan

1.2.14] Beräkna eller berätta varför följande gränsvärde inte existerar:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4} \quad \text{där } f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-4}$$

Lös] vi följer metod listan.

1) $f(-2)$ ger det obestämda uttrycket "$\left[\frac{0}{0}\right]$"; förenkla!

2) Förenkling ger:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x}{x-2}$$

3) vi prövar att beräkna gränsvärdet nu.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2}$$

1:2:30] Beräkna eller berätta varför gränsvärdet inte existerar

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} \quad \text{där} \quad f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$$

Lös] 1) $f(-1)$ är odefinierad då vi får "$\left[\frac{0}{0}\right]$". Förenkla!

2) $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{utnyttja:} \\ x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2) \\ x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2) \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1} (x^2-x+1)$$

3) Beräkna på nytt:

$$\lim_{x\to -1} (x^2-x+1) = 3$$

1.3:11] Existerar följande gränsvärde?

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{3-x} \quad \text{där } f(x)=\frac{1}{3-x}$$

Lös] 1) vi ser att $f(3)$ är odefinierad. Det går inte heller att förenkla $f(x)$ mer. därmed får vi hoppa till punkt 3) på metodlistan.

3) undersök höger- samt vänstergränsvärdet.

- Högergränsvärdet:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{3-\underbrace{x}_{x>3}} = -\infty$$

öppet cirkel dvs x är odef. i punkten 3

Vi närmar oss 3 från höger sida

Pröva ett tal väldigt nära 3, fast från höger sida, ex 3,00001...

Egentligen behöver vi inte fortsätta mer. vi ser att högergränsvärde går mot $-\infty$. Även om vänstergränsvärde går mot $-\infty$ så existerar fortfarande inte gränsvärdet då $\pm\infty$ ej är ett reellt tal. Men vi tränar på beräkna vänster-gränsvärde med.

- Vänstergränsvärdet:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-\underbrace{x}_{x<3}} = \infty$$

Vi närmar oss 3 från vänster.

Pröva ett tal väldigt nära 3, fast från vänster sida ex $x=2{,}999$

Gränsvärdet existerar ej! Detta då $\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$ samt att $\pm\infty$ ej är ett reellt tal.

1.2:24] Beräkna eller berätta varför följande gränsvärde inte existerar.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2} \quad \text{där} \quad f(x) = \frac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2}$$

Lös] 1) $f(2)$ är odef då vi får "$\left[\frac{0}{0}\right]$", vi förenklar

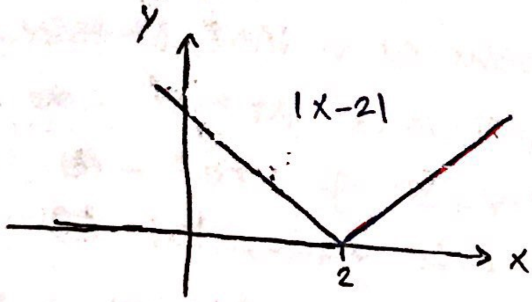
2) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$$

3) Då vi får ett absolutbelopp i täljaren så måste vi dela upp uttrycket i höger- respektive vänstergränsvärde. Först:

$$|x-2| = \begin{cases} (x-2) & \text{om } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

$z = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

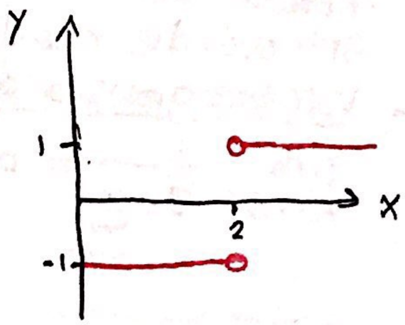


• Högergränsvärde:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)} = 1$$

• Vänstergränsvärde

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)} = -1$$



Höger- och vänstergränsvärden går ej mot samma värde, därav så existerar ej gränsvärdet.

Tentamen 2017-03-17

1B] Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(1-x^2)}{x+x^2}$$

Lös] Vi definierar $f(x)$ som:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)(1-x^2)}{x+x^2}$$

1) $f(0)$ är odefinierad så vi måste skriva om.

konjugatregeln kan tillämpas

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(1-x^2)}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(1-x)\cancel{(1+x)}}{x\cancel{(1+x)}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} (1-x)\frac{\sin 2x}{x}$$

Vi kan använda produktregeln för gränsvärden, på detta sätt behöver vi bara bevisa att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ existerar.

$$\lim_{x\to 0} (1-x)\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} (1-x)\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}}^{*}$$

* ger oss då $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ som vi skriver om.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \{\text{förläng bråket med } 2\} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x}$$

Vi utför sedan en s.k substitution:

$\boxed{t = 2x}$ och om $\boxed{x\to 0 \text{ så går } t\to 0}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x}$ kan då skrivas $\lim_{t\to 0} \frac{2\sin t}{t}$.

Vi ser att detta är ett standardgränsvärde!

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\sin t}{t} = 2$$

standardgränsvärdet
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Detta betyder att:

$$\lim_{x\to 0} (1-x)\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}(1-x)\lim \frac{\sin 2x}{x} = 1\cdot 2 = 2$$

Tentamen 2008-06-04

5B] Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

Lös] vi börjar med variabelsubstitution.

$\left\{ \boxed{t = \frac{1}{x}} \right.$ och om $\boxed{x \to \infty \text{ så gör } t \to 0}$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

Detta är ett standardgränsvärde. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Tentamen 2008-06-04

5D] Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x) \quad (*)$$

Lös] vi använder oss utav logaritmlagarna för att förenkla uttrycket.

$$x(\ln(x+1)-\ln x) = \left\{\begin{array}{l}\text{använd} \\ \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}\end{array}\right\} = x\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{använd} \\ a\ln x = \ln(x^a)\end{array}\right\} = \ln\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right)$$

OBS! Var försiktig med paranteser.

Vi skriver nu in detta i $(*)$.

$$\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x)) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right)$$

Detta är ett standard gränsvärde!

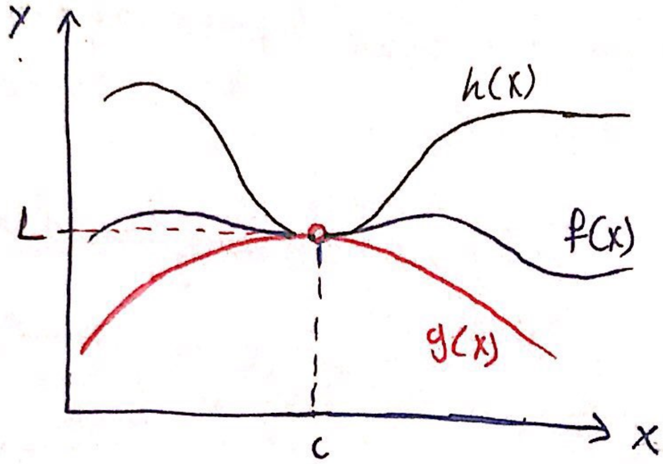
Standardgränsvärde: $\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = e$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln(e) = 1$$

1.7 Instängningsprincipen

Antag att $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in (a,b)$ samt låt $c \in (a,b)$.

för alla



Instängningsprincipen säger då att om

- $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$

så gäller det att

- $\lim_{x \to c} f(x) = L$

1.8] Räkning på tavlan

1.3.6] Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$$

Lös] 1) Vi kan ej beräkna gränsvärdet då när $x \to \infty$ så får vi det obestämda uttrycket $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Vi skriver om.

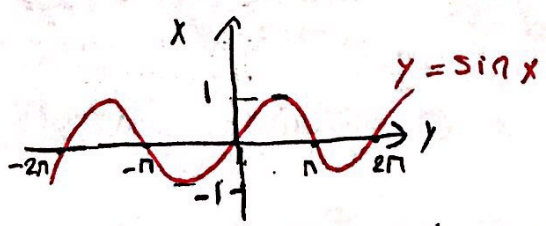
2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x} = \left[\begin{array}{l}\text{TIPS 3: Dividera}\\ \text{alla termer med}\\ \text{högsta ordningen}\\ \text{av } x\text{, här } x^2\end{array}\right] =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\cos x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x^2}}{1+\frac{\cos x}{x^2}} = \frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2}} =$$

Här får vi nu använda instängningsregeln för att kunna beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2}$ respektive $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2}$.

Vi har att:

$$|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$



Om vi nu får samma värde på $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$ och $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2}$, så kan vi tillämpa instängningsregeln på $\frac{\sin x}{x^2}$ som är i "mitten".

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

- $\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$

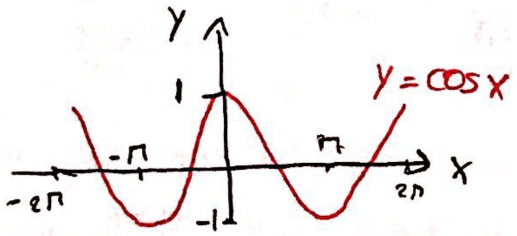
Vi ser att $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$, därav

så måste $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$.

Vi går nu vidare till $\frac{\cos x}{x^2}$, det är exakt

samma princip här.

$|\cos x| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$



- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

- $\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$

Alltså $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ och vi får

$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$ enligt instängningsprincipen.

Tillbaka till (*) så får vi att:

$$\frac{1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2}}{1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2}} = 1$$

Tentamen 2008-06-04

5c] Beräkna $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$

Lös] vi använder instängningsprincipen då:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Vi applicerar theoremet.

- $\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \to \infty} \pm\frac{1}{x} = 0$, alltså är $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.