Välkommen till årets crash course i Envariabelanalys med Kollin

Talare: Tâm Vũ

Vi börjar kl. 08:15.

Plan: crashcourse.kollin.io

l'Hospital:s regel

<u>Mål</u> Beräkna ett gränsvärde på formen

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

<u>Sats</u> Låt f, g vara deriverbara funktioner i $x=a$, med $g'(a) \neq 0$.

Antag att $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Obs!

Då gäller att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

kan stå för ett reellt tal, ∞ eller $-\infty$ $\boxtimes$

<u>Anmärkning</u> Det går också bra att ha $\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \end{cases}$. Då gäller att

och

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2020.06.03 #1 #KTH

b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\underbrace{x\cos x}_{\text{produktregeln}}} = \left\{ \frac{0-\sin 0}{0-0\cdot\cos 0} = \frac{0}{0} \right\}$$

tankeklamrar

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-(\cos x + x\cdot(-\sin x))}$$

Produktregeln

$$(F\cdot G)' = F'G + FG'$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos x + x\sin x} = \left\{ \frac{1-\cos 0}{1-\underbrace{\cos 0}_{=1}+\underbrace{0\cdot\sin 0}_{=0}} = \frac{0}{0} \right\}$$

l'Hospitals regel igen!

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(-\sin x)}{-(-\sin x) + \sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \left\{ \frac{\sin 0}{2\sin 0 + 0\cos 0} = \frac{0}{0} \right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{\cos 0}{2\underbrace{\cos 0}_{=1} + \cos 0 - \underbrace{0\cdot\sin 0}_{=0}} = \frac{1}{2+1-0} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Svar

2016.01.08 #1 (b) Beräkna #UU

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

Minns att $\begin{cases} e^0 = 1 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1+x} + \sin x}{2x}$$

$$= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \frac{1}{(1+x)^2} + \cos x}{2}$$

inte längre 0

$$= \frac{e^0 + 1 + \cos 0}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Svar

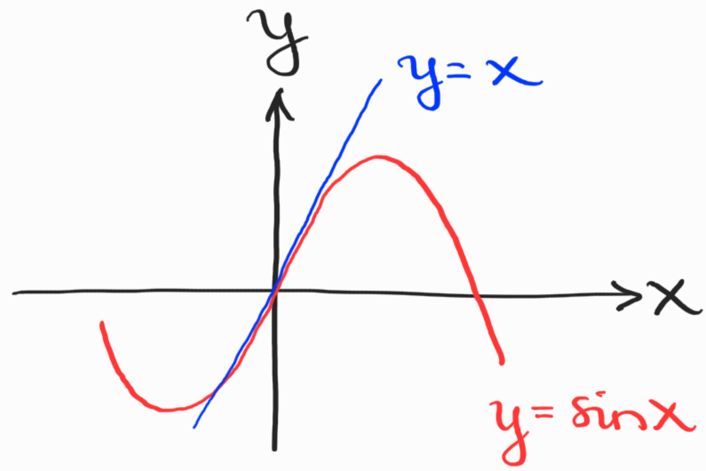
Anm. Om $h(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

så $h'(x) = -1 \cdot (1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ ☐

Andra gränsvärdestekniker

I) Populär kvot:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$\sin x \approx x$ när $x \approx 0$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} \approx 1$ när $x \approx 0$

2014.10.20 #1 #UU

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x \cos x}$

l'Hospitals regel går bra också

Knep $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ så länge $\cos x \neq 0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x / \cos x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{= \frac{1}{1^2} = 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

standard-gränsvärde

Svar 1

$\boxtimes$

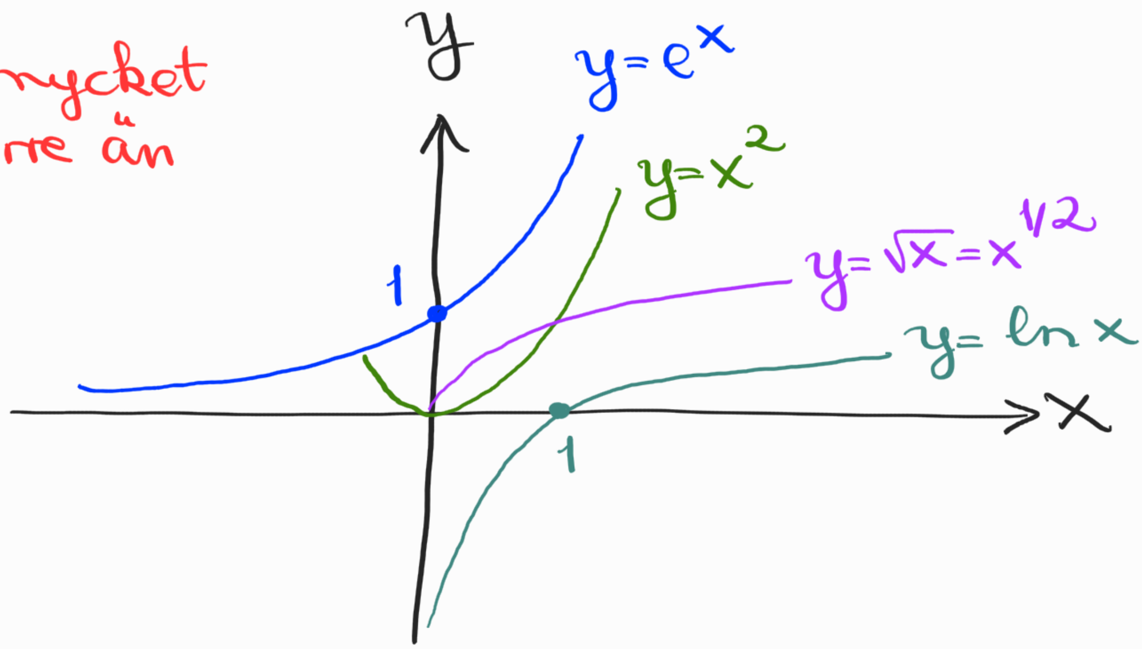
II) Snabbväxta funktioner

Erfarenhet För stora x gäller

godtycklig $\alpha > 0$

$$e^x \gg x^\alpha \gg \ln x$$

är mycket större än



Praktisk innebörd

(*)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$$ då e^x växer mycket snabbare än x^α

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = \infty$$

$k > 1$

(*) Mer generellt: $\lim_{x \to \infty} \frac{k^x}{x^\alpha} = \infty$

På samma sätt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

2014.10.20 #1 #KTH

(b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ (*)

Knep Förkorta bråket med den dominerande termen x^2:

$$(*) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \left\{ \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} \right\}$$

Inse nu att l'Hospitals regel faktisk är bättre!

Alternativ metod

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$$ faktorisera

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{\underbrace{(x+3)(x-1)}}$$ konjugatregeln

motivering x^2+2x-3 har nollställen $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$ (enligt t.ex. pq-formeln)

$$\Rightarrow x^2+2x-3 = (x-x_1)(x-x_2) = (x-1)(x+3)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Svar

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+5e^{-x}}{2x^2+\ln x}$ (*)

Knep Förkorta bråket med den dominerande termen x^2:

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5e^{-x}}{x^2}}{2+\frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1-0+0}{2+0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Svar

Notera att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2e^{x}} = 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ då x^2 växer mycket snabbare än $\ln x$

2020.06.03 #1 #KTH

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} + \ln x + 2e^{2x}}{3e^{2x} + x^{100} - 7}$$

bra tecken för att knepet skulle kunna funka

Förkorta bråket med den dominerande e^{2x} (som växer som snabbast)

från $\frac{e^{x/2}}{e^{2x}} = e^{\frac{x}{2}-2x} = e^{-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}x}} \to 0$ när $x\to\infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{\ln x}{e^{2x}} + 2}{3 + \frac{x^{100}}{e^{2x}} - \frac{7}{e^{2x}}} = \frac{0+0+2}{3+0+0}$$

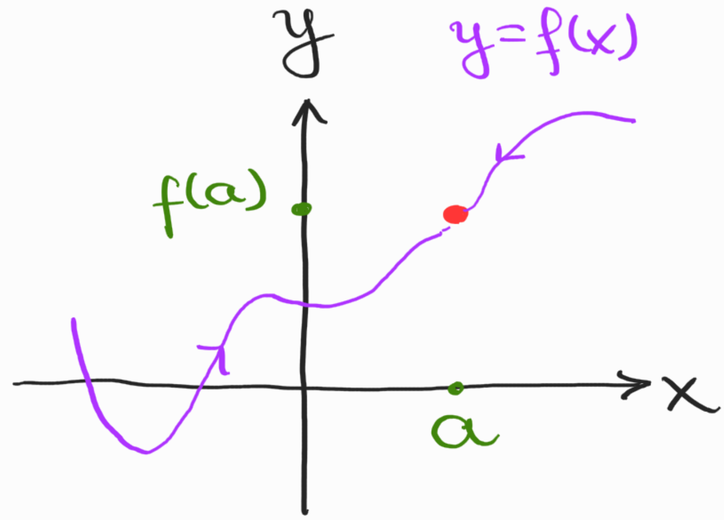
$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Svar

Kontinuitet av funktioner

Def. f sägs vara kontinuerlig i punkten $x = a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



2015.10.19 #3 #UU

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ a & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten a så att f blir kontinuerlig.

Lösning Räcker med att se till att f blir kontinuerlig i $x = 0$. Krav:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \underbrace{f(0)}_{\text{givet vände}} = a$$

Betrakta nu

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \overbrace{x^2}^{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{begränsat värde}} = 0$$

(måste anges på tentan för full poäng)

Allmänna tips

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$
   $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
   för alla $\alpha \in \mathbb{R}$

Slutsats

$$\underline{\underline{a = 0}}$$

Svar

$\boxtimes$

Anmärkning $0 \cdot \infty$ räknas som en obestämd form, dvs. det inte går att säga vad $\lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to\infty}$ blir om vi inte känner till f och g.

Ex.

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{8}{x}}_{\to\infty} = 8$$

Deriverbarhet av funktioner

<u>Definition</u> Låt f vara def. och kont. i en punkt $x=a$. Om

något tal (dvs. inte $\pm\infty$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = C$$

säg att f är deriverbar i $x=a$.

Vi skriver då att $f'(a) = C$. $\boxtimes$

2015.10.19 #3 #UU

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ a & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

b) Är f med $a=0$ deriverbar i alla punkter?

$x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ är säkert deriverbar för alla $x \neq 0$

<u>Lösning</u> Räcker att kolla om f är deriverbar i $x=0$. Betrakta då

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

minns att $a = 0$ från deluppgift (a)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

innebär $h \neq 0$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{h}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{begränsat ty } -1 \leq \sin\theta \leq 1 \text{ för alla } \theta \in \mathbb{R}} = 0$$

dvs. $f'(0) = 0$ och f är alltså deriverbar i origo. $\blacksquare$

Anmärkning

Om f är deriverbar i $x = a$ är f också kontinuerlig $x = a$.

Om f är kontinuerlig i $x = a$ är f inte säkert deriverbar i $x = a$.

Ex. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$ är kont. överallt

men $f'(0)$ existerar inte. $\blacksquare$

Differentialekvationer av 2:a ordning

Homogent fall

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{där } y = y(x)$$

konstanter

Steg 1 Lös den karakteristiska ekv.

$$r^2 + pr + q = 0 \quad \text{(pq-formeln)}$$

och få rötterna r_1 och r_2.

Steg 2 Om

1) r_1, r_2 är reella, olika:

Svar: $y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$

godt. konstanter

2) $r_1 = r_2$ är reella:

Svar: $y(x) = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}$

3) r_1, r_2 är komplexa konjugat:

$$\begin{cases} r_1 = \alpha + \beta i \\ r_2 = \alpha - \beta i \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \left(C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x)\right)e^{\alpha x}$

Inhomogent fall

$$y'' + py' + qy = \overbrace{g(x)}^{\text{godt. funktion}}$$

som inte är identiskt 0

Lösningsgång

Del 1: Bestäm $\overbrace{\text{den homogena lösn.}}^{y_h(x)}$, dvs. den allmänna lösn. till

$$y'' + py' + qy = 0 \leftarrow \text{noll}$$

Del 2: Bestäm $\overbrace{\text{en partikulär lösn.}}^{y_p(x)}$, dvs. en lösning till den inhomogena ekv.

$$y'' + py' + qy = g(x) \leftarrow \text{obs!}$$

Svar $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

2014.05.28 #5 #UU

Lös $y''-2y'+5y=\underbrace{5x^2-4x}_{\text{inhomogent fall!}}$.

Del 1 Bestäm $y_h(x)$:

$$y''-2y'+5y=0$$

med karak. ekv. $r^2-2r+5=0$

$$\Downarrow$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = 1+2i \\ r_2 = 1-2i \end{cases}, \text{ dvs. } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Alltså: $y_h(x)=\left(C\sin(2x)+D\cos(2x)\right)e^x$

Del 2 Bestäm en par. lösn. $y_p(x)$

genom att ansätta y_p så att den liknar högerledet $5x^2-4x$:

ANSATS: $y_p(x)=Ax^2+Bx+K$

Då fås $y_p'(x) = 2Ax + B$

$$y_p''(x) = 2A$$

Sätt in dessa i

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow 2A - 2(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + K)$$
$$= 5x^2 - 4x$$

Gylla Förenkla!

$\vdots$

$$\Rightarrow \underline{5A}x^2 \underline{-4A}x + \underline{5B}x + 2A - 2B + 5K$$
$$= \underline{5}x^2 \underline{-4}x$$

Mål Hitta A, B, K

Knep Matcha termerna av samma slag

$$\begin{cases} 5A = 5 & \text{för } x^2\text{-termerna} \\ -4A + 5B = -4 & \text{för } x\text{-termerna} \\ 2A - 2B + 5K = 0 & \text{för konstanttermerna} \end{cases}$$

Gylla ger $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ K = -2/5 \end{cases}$

Slutsats $y_p(x) = Ax^2 + Bx + K$
$$= x^2 \qquad - \frac{2}{5}$$

Svar Allmän lösning:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$
$$= \left(C\sin(2x) + D\cos(2x)\right)e^x + x^2 - \frac{2}{5}$$

Tabell med populära ansatser

Ex. högerled	ansats
polynom: $x^2 - 7$	$Ax^2 + Bx + C$
$2e^{4x}$	Ae^{4x}
$\sin(3x)$	$A\sin(3x) + B\cos(3x)$
$-2\cos(3x)$	$A\sin(3x) + B\cos(3x)$
$x \cdot e^{2x}$	$(Ax + B)\cdot e^{2x}$ (*)
polynom exp.funktion	
$\ln x$	överkurs

(*) Ansatsen $(Ax+B)\cdot Ce^{2x}$ går bra men behövs inte:

$$(Ax+B)\cdot Ce^{2x}$$

$$= (\underbrace{AC}_{\text{döp om}}x + \underbrace{BC}_{\text{döp om}})e^{2x}$$

$$= (K_1x + K_2)e^{2x}$$

2019.03.08 #1 #KTH

$$y'' - y' - 2y = 12e^{-t}$$

Del 1 Homogen lösning: läxa!

$$y_h(t) = \underbrace{Ce^{-t} + De^{2t}}_{\text{från } r_1=-1 \text{ och } r_2=2}$$

Del 2 Partikulär lösning:

ANSATS: $y_p(t) = Ae^{-t}$

$y_p'(t) = -Ae^{-t}$, $y_p''(t) = Ae^{-t}$

Sätt in i $y'' - y' - 2y = 12e^{-t}$

$$\Rightarrow Ae^{-t} - (-Ae^{-t}) - 2Ae^{-t} = 12e^{-t}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \qquad = 12e^{-t}$$

Det makar ingen sans!

Ansatsen funkar/duger inte då

Ae^{-t} också är en homogen lösning.

<u>Förbättring</u> Multiplicera ansatsen med t^m, där m är det minsta positiva heltalet sådant att ingen term i ansatsen är en lösning till den homogena ekv.

<u>Här</u> $y_p(t) = Ae^{-t}$ förbättras till

$$y_p(t) = Ate^{-t} \quad (\text{dvs. } m = 1)$$

Derivera med produktregeln:

$$y_P'(t) = \underline{\underline{Ae^{-t}}} - \underline{\underline{Ate^{-t}}}$$

$$y_P''(t) = -\underline{\underline{Ae^{-t}}} - (\underline{\underline{Ae^{-t} - Ate^{-t}}})$$

$$= -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$$

Sätt in i $y'' - y' - 2y = 12e^{-t}$

och dividera båda led med e^{-t}:

$$-2Ae^{-t} + Ate^{-t} - (Ae^{-t} - Ate^{-t}) - 2Ate^{-t} = 12e^{-t}$$

$$\Rightarrow -2A + At - A + At - 2At = 12$$

$$\Rightarrow -3A = 12 \Rightarrow A = -4 \qquad \text{Voilà!}$$

<u>Slutsats</u> $y_P(t) = Ate^{-t} = -4te^{-t}$

<u>Svar</u> $y(t) = y_R(t) + y_P(t)$

$$= Ce^{-t} + De^{2t} - 4te^{-t}$$

Tillämpningar av derivator

Växande & avtagande funktioner

Sats Låt f vara kontinuerlig och deriverbar på ett intervall I.

Om $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, är f strängt växande på I.

Om $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, är f strängt avtagande på I.

2020.06.03 # 3 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ #KTH

Bestäm de intervall där f är strängt växande resp. avtagande.

Lösning **Steg 1** Derivera f med kvotregeln: $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - FG'}{G^2}$

Läxa Derivera och få

$$f'(x) = \frac{1-x^4}{(1+x^4)^{3/2}}$$

Steg 2 Bestäm alla stationära (synonym: kritiska) punkter till f, dvs. x-värden där $f'(x)=0$:

$$\frac{1-x^4}{(1+x^4)^{3/2}} = 0 \Rightarrow 1-x^4 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = -1$$
$$x_2 = 1$$

valfria x-värden

Steg 3 Teckentabell: Tag 3 testpunkter:

kritiska punkter

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

$f'(0) = 1 > 0$

$f'(2) < 0$

$f'(-2) < 0$

Svar f är

strängt växande på $\overbrace{[-1,1]}^{\text{alt. } (-1,1)}$

strängt avtagande på $(-\infty,-1]$

resp. $\underbrace{[\,1,\infty)}_{\text{alt. } (1,\infty)}$

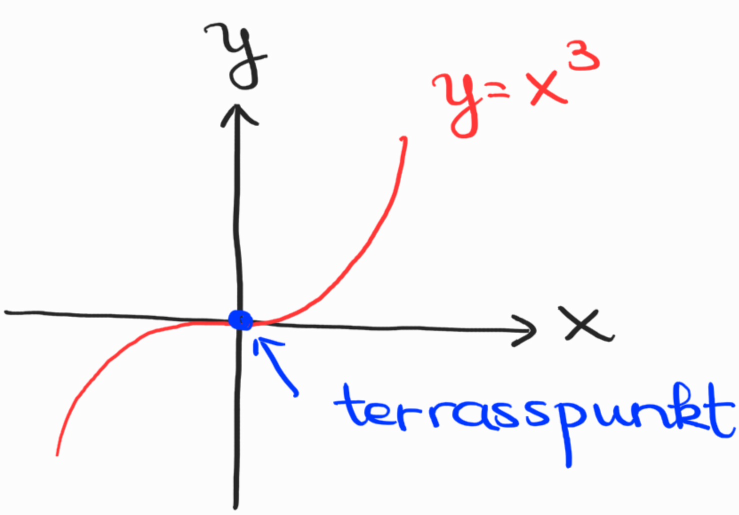
Anmärkning

Obs! Omvändningen gäller inte nödvändigtvis!

Om $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, är f strängt växande på I.

Om $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, är f strängt avtagande på I.

Ex. $f(x) = x^3$ är strängt växande på hela $\mathbb{R}$ trots att $f'(0) = 0$.



Definition

f sägs vara strängt växande på intervallet I om följande gäller:

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

för alla $a, b \in I$

Nästa tillämpning

Derivata och olikhet

2012.10.31 #5 Visa att $\qquad$ #UU

$$\ln(1+x) \geq x - ax^2 \text{ för alla } x \geq 0.$$

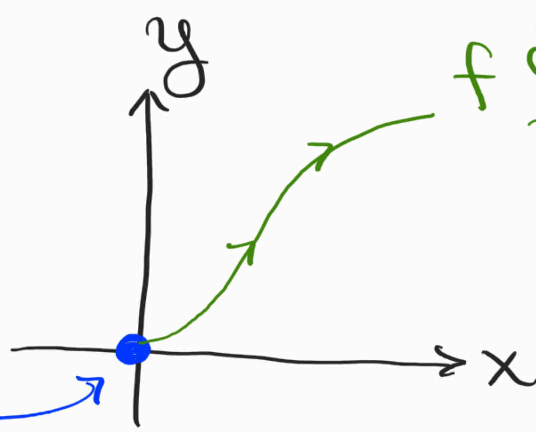
Här står $a \geq \frac{1}{2}$ för en konstant.

Strategi Bilda en hjälpfunktion:

$$f(x) = \ln(1+x) - (x - ax^2)$$
$$= \ln(1+x) - x + ax^2$$

Idé: Uppgiften är nu likvärdig med att visa att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$.

Kladd



$f(0) = 0$

f är växande på hela intervallet $x > 0$

$\Downarrow$

$f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$

Steg 1 $f(x) = \ln(1+x) - x + ax^2$

$$f(0) = \underbrace{\ln 1}_{=0} - 0 + 0 = 0$$

$a \geq \frac{1}{2}$

Steg 2 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + 2ax$

$$\geq \frac{1}{1+x} - 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} x$$

$$= \frac{1}{1+x} \underbrace{- 1 + x}_{\text{konjugatregeln}}$$

$$= \frac{1 + (-1+x)(1+x)}{1+x}$$

$$= \frac{1 + x^2 - 1}{1+x}$$

$$= \frac{x^2}{1+x}$$

dvs. $f'(x) \geq \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$ ty $x \geq 0$ (se lydelsen)

$\Rightarrow$ f är växande för alla $x \geq 0$

$\Rightarrow$ olikheten är härmed bevisad $\boxtimes$

Anmärkning

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad \text{för alla } x>0$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{för alla } x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

godtycklig konstant

2020.06.03 #5 Visa att #KTH

$$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) > 1 \quad \text{för alla } 0<x<1$$

Idé Kan bilda hjälpfunktionen

$$f(x) = \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) - 1$$

Jobbig med derivata $f'(x)$ dock...

Knep Gylla: logaritmlagarna

1. $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ ‖ 2. $\ln(x^a) = a\cdot\ln x$

$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right) > 1$ kan skrivas om

2

$\Rightarrow \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 1$

1

$\Rightarrow \frac{1}{2x}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right) > 1$

$\Rightarrow \ln(1+x)-\ln(1-x) > 2x$ enkel!

legitim eftersom
x är positivt
($0<x<1$ i lydelsen)

Bilda nu hjälpfunktionen

$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$

Vill nu visa att $f(x) > 0$

för alla $0<x<1$.

Läxa Avsluta uppgiften!

Nästa tillämpning

Funktioners inverterbarhet

Ex. $f(x) = x^2$

Om $x = 3$ så $f(3) = 3^2 = 9$.

Om $f(x) = 9$, vad är x då?

Svar Vet inte exakt om $x = 3$ eller $x = -3$. Vi säger då att $f(x) = x^2$ inte är inverterbar på $\mathbb{R}$.

Däremot Om vi begränsar f:s definitionsmängd till $(-\infty, 0]$, så gäller säkert att $x = -3$ om $f(x) = 9$. Vi säger att f är inverterbar på $(-\infty, 0]$.

Sats f är inverterbar på ett intervall I

$\Leftrightarrow$ f är $\underbrace{\text{injektiv}}_{\text{one-to-one}}$ på I, dvs.

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Kännetecken Om f är strängt växande eller strängt avtagande på I, är f injektiv och därmed inverterbar på I.

2017.01.09 #8 #KTH

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{4}{5}\arctan x$$

Bestäm det största öppna intervallet som innehåller $x=1$ där f är inverterbar.

Lösning **Steg 1** Derivera (läxa!)

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}_{\text{från kvotregeln}} + \frac{4}{5}\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\text{känd derivata}}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{9-x^2}{5(1+x^2)^2}$$

Steg 2 $f'(x)=0 \Rightarrow 9-x^2=0$

$\Rightarrow x_1=-3$

$x_2=3$

Steg 3 Teckenstudium: (läxa!)

testpunkter (välj själv!)

x	-4	-3	0	3	4
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Svar

intervallet $(-3,3)$

Implicit derivering

Bakgrund Ex.

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ensam } y}}{y} = \underbrace{x^2 \sin x}_{f(x)}$ y är explicit uttryckt i x

$xy + \sqrt{y} = 3y^2 + \sin(xy)$ y är implicit uttryckt

2014.10.24 #8 (delvis) #KTH

Givet att $(x^2+y^2)^2 - 7x^2 + 3y^2 = 0$

och $y(2) = 1$, dvs. $y(x) = 1$ då $x = 2$.

Bestäm $y'(2)$, dvs. $y'(x)$ där $x = 2$.

Strategi Derivera båda led av ekvationen med avseende på x.

$\frac{d}{dx}(-7x^2) = -14x$ Obs! $\frac{d}{dx} 3y^2 \neq 6y$

$$\frac{d}{dx} 3y^2 = \underbrace{\frac{d}{dy} 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx}}_{\text{kedjeregeln}} = 6y \cdot y'$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}(x^2+y^2)^2}_{} = 2(x^2+y^2)\cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2+y^2)}_{\text{inre derivatan}}$$

annat exempel:

$f(x) = (\sin x)^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$

$$= 2(x^2+y^2)\cdot(2x + \underbrace{2y\cdot y'}_{\text{från kedjeregeln också}})$$

Alltså Om vi deriverar båda led av

$$(x^2+y^2)^2 - 7x^2 + 3y^2 = 0$$

med avseende på x, får vi

$$2(x^2+y^2)\cdot(2x+2y\cdot y') - 14x + 6yy' = 0 \quad (*)$$

Mål Bestäm $y'(2)$ givet att $y(2)=1$:

$x=2$

Sätt in $x=2$ och $y=1$ i $(*)$ och lös ut $y' = y'(2)$:

$$2\cdot 5\cdot(4+2y') - 14\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow 40 + 20y' - 28 + 6y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{6}{13}$$

Svar $y'(2) = -6/13$ $\boxed{}$

Taylorpolynom & approximationer

Teori En "vettig" funktion f kan skrivas $f(x) = P_n(x) + R(x)$, där $P_n(x)$ är Taylorpolynomet av grad n och $R(x)$ är den motsvarande resttermen.

Sats $P_n(x)$ kring punkten $x = a$ ges av

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k$$

Motsvarande resttermen $R(x)$ ges av

$$R(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Lagrangeform}}$$

där c är något tal mellan x och a.

2019.08.19 #2 $f(x) = \sin x$ #UU

(a) Bestäm $\underbrace{\text{Maclaurinpolynomet}}_{\text{Taylorpolynom kring } x=0}$ av

grad 5. Visa att $\sin 1 \approx \dfrac{101}{120}$.

Lösning Vill hitta

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1$

Slutsats

$$P_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

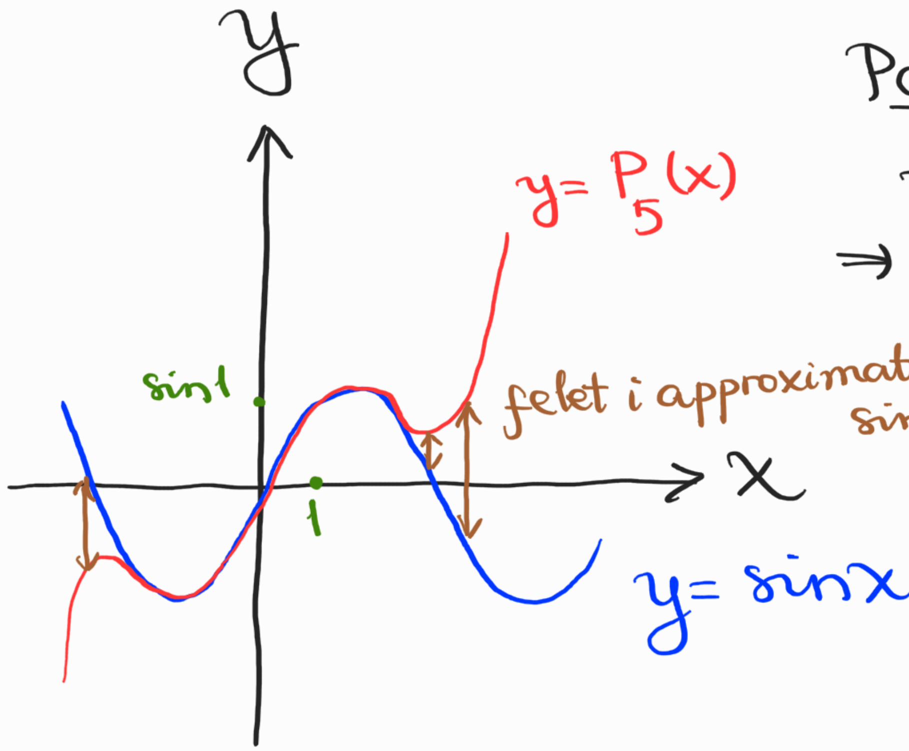
Innebörd

$f(x) = \sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

där $x \approx 0$

$$\sin 1 = f(1) \approx P_5(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \dots = \frac{101}{120}$$

(b) Uppskatta felet i denna approximation, dvs. uppskatta $\left|\sin 1 - \dfrac{101}{120}\right|$.



Påminnelse

$$f(x) = P_n(x) + R(x)$$

$$\Rightarrow R(x) = f(x) - P_n(x)$$

$\Rightarrow$ felet i approx. är alltså $|R(x)|$.

Lösning Börja med att ta fram $R(x)$:

Motsvarande resttermen $R(x)$ ges av

$$R(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Lagrange form}}$$

där c är något tal mellan x och a.

$n = 5$

$f^{(5)}(x) = \cos x$

$f^{(6)}(x) = -\sin x$

$$R(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6 = \frac{-\sin c}{720}x^6$$

där c är något tal mellan 0 och x

Då vi approximerar $\sin 1 = f(1) \approx P_5(1)$

är felet

där $0 < c < 1$

$$|R(1)| = \left| \frac{-\sin c}{720} \cdot 1^6 \right| = \frac{|-\sin c|}{720} \leq \frac{1}{720}$$

ty $|-\sin c| \leq 1$ för alla $c \in \mathbb{R}$

Svar Felet är inte större än $\frac{1}{720}$. $\boxed{}$

Några standardutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Notera att $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

2020.01.07 #4 #KTH

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

(a) Bestäm $P_1(x)$ kring $x=0$.

Lösning Vill hitta

$$P_1(x) = F(0) + F'(0)x$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \Rightarrow F(0) = \int_0^0 e^{-t^2}\,dt = 0$$

$$F'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow F'(0) = 1$$

Analysens huvudsats (kortfattat)

$$F(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

a ← någon konstant

$$\Rightarrow F'(x) = g(x)$$

Svar $P_1(x) = x$

(b) Beräkna ett närmevärde för $F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$ som avviker högst $\frac{1}{8} = 0,125$ från det exakta värdet.

Lösning Från (a):

$F(x) \approx P_1(x) = x$ för $x \approx 0$

$\Rightarrow F(1/2) \approx P_1(1/2) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ ligger nära $x = 0$

Felskattning Vill undersöka $|R(1/2)|$.

Minns att $R(x) = \frac{F''(c)}{2} x^2$ för något tal c mellan 0 och x.

$F'(x) = e^{-x^2}$ kedjeregeln!

$\Rightarrow F''(x) = -2xe^{-x^2}$

$\Rightarrow R(x) = \frac{-2c \cdot e^{-c^2}}{2} \cdot x^2 = -c \cdot e^{-c^2} \cdot x^2$

$\Rightarrow |R(1/2)| = \left|-c \cdot e^{-c^2} \cdot \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}\left|c \cdot \underbrace{e^{-c^2}}_{\text{alltid positivt}}\right|$

$x = 1/2$

$0 < c < \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4} c \cdot e^{-c^2} = \frac{1}{4} \cdot c \cdot \frac{1}{e^{c^2}}$$

Vill nu visa att

$$\text{felet} = \frac{1}{4} \cdot c \cdot \frac{1}{e^{c^2}} \leq \frac{1}{8} \text{ om } 0 < c < \frac{1}{2}$$

Notera:

$$\frac{1}{4} \cdot c \cdot \frac{1}{e^{c^2}} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{0^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{8}$$

minimera e^{c^2} med $c = 0$

maximera med $c = \frac{1}{2}$

Anm. Samma c-värde behöver inte användas om vi bara vill finna en övre gräns, och inte det största värdet av felet.

Slutsats Det approximerade värdet avviker faktiskt högst $\frac{1}{8}$ från det exakta värdet. $\blacksquare$

Integralberäkningar med arctan

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

godt. konstant

2019.10.22 #1 #KTH

(b) Beräkna

$$\int \frac{3}{2+8x^2}\,dx$$

Allmänt

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot \int f(x)\,dx$$

konstant

$$= 3\int \frac{1}{2+8x^2}\,dx$$

bryt ut 2:an

$$= 3\int \frac{1}{2(1+4x^2)}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+4x^2}\,\underline{\underline{dx}}$$

måste bytas ut

Substitution

$u = 2x$, dvs. $u^2 = (2x)^2 = 4x^2$

$$\Downarrow$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \text{lös ut } dx$$

$$\Downarrow$$

$$du = 2dx$$

$$\Downarrow$$

$$dx = \frac{1}{2}du$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

godt. konstant

$$= \frac{3}{4}\arctan u + C = \frac{3}{4}\arctan(2x) + C$$

Snabb kontroll av svaret

$$\frac{d}{dx}\frac{3}{4}\arctan(2x)$$

$$= \frac{3}{4}\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot\underbrace{2}_{\text{inre derivatan}} = \frac{3}{2}\frac{1}{1+4x^2}$$

$$= \frac{3}{2+8x^2} \quad \square$$

2014.09.02#4 (delvis) #UU

Beräkna $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-4x+5}\,dx$

<u>Lösning</u> Steg 1 Prova faktorisera nämnaren x^2-4x+5 genom att först hitta nollställen:

$$x^2-4x+5=0$$

komplexa

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

dvs. x^2-4x+5 kan inte reellt faktoriseras!

Insikt Kan istället kvadratkomplettera:

$$x^2-4x+5 = \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}+1 = (x-2)^2+1$$

Steg 2 $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-4x+5}\,dx$

$$= \int \frac{2}{(x-2)^2+1}\,dx$$

Byt $u = x-2$

$$\Downarrow \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\Downarrow \quad dx = du$$

$$= 2\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,\underline{\underline{dx}}$$

byt ut

$$= 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= 2\arctan u + C$$

$$= 2\arctan(x-2) + C$$

$\boxtimes$

Tips Kvadratkomp. i allmänhet

$$x^2 \pm kx = \left(x \pm \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Kontroll:

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + 2x\cdot\frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + kx \quad \text{najs}$$

Ex. $\underbrace{x^2 + 10x}_{\text{kvadratkomp.}} - 30$

$$= \underline{\underline{(x+5)^2 - 25}} - 30$$

$$= (x+5)^2 - 55 \qquad \blacksquare$$

Följdfråga

$$\int_3^\infty \frac{2}{x^2-4x+5}\,dx = \Big[2\arctan(x-2)\Big]_3^\infty$$

$$= \lim_{R\to\infty}\Big[2\arctan(x-2)\Big]_3^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\underbrace{\arctan(R-2)}_{\to \frac{\pi}{2}} - 2\arctan 1$$

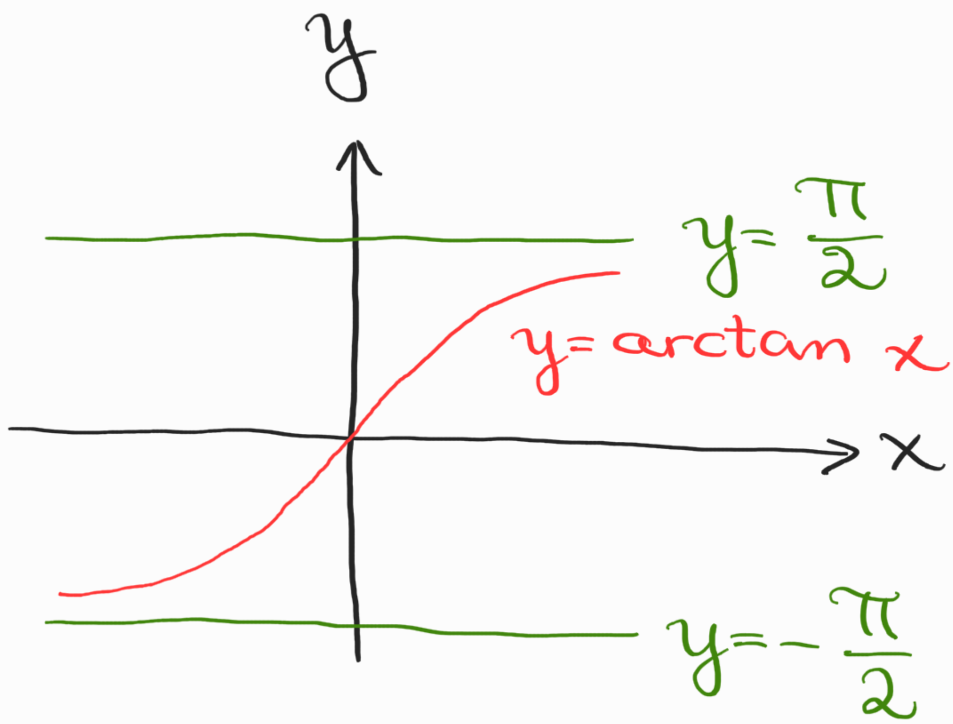
$\tan 45^\circ = 1$

$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad // \text{Svar}$$



Kändis $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Variabelsubstitution

2017.01.11 #4 #UU

a) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

Steg 1 Betrakta $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

Byt ut det som ställt till med problem, t.ex. $u = \sin x$.

Då fås $$\frac{du}{dx} = \cos x$$
$$\Downarrow$$
$$du = \cos x\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$dx = \frac{1}{\cos x}\,du$$

Alltså

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\,du$$

$$= \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C$$

$$= \arctan(\sin x) + C$$

Steg 2 Sätt in gränserna:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \Big[\arctan(\sin x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \arctan\Big(\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1}\Big) - \arctan\Big(\underbrace{\sin 0}_{=0}\Big)$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$ // Svar

Anmärkning Om vi vill byta gränser: $u = \sin x$

$x_1 = 0$ blir $u_1 = \sin 0 = 0$

$x_2 = \pi/2$ blir $u_2 = \sin \pi/2 = 1$

Partiell integration

$$\int f \cdot g \, dx = F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx$$

där F står för <u>en</u> primitiv funktion till f.

Anm.

$$\int_a^b f \cdot g \, dx = \left[F \cdot g\right]_a^b - \int_a^b F \cdot g' \, dx$$

Kändis

osynlig etta

$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \, dx$$

$$= F \cdot g - \int F \cdot g' = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x + C$$

2017.08.22 #1 #LiU

b) Beräkna $\int \ln(x^2+1)\,dx$

$$= \int \underbrace{1}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x^2+1)}_{g(x)}\,dx$$ partiell integration

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - \int x \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x}_{g'(x)}\,dx$$

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{\underbrace{x^2+1}}\,dx$$

polynomdivision då $x^2 \approx x^2+1$

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - 2(x - \arctan x) + C$$

$\boxtimes$

Partialbråksuppdelning

Bakgrund

Ex. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx$ Svår att integrera direkt

Men om vi kan dela upp bråket

$$\int \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx = \int \underbrace{\left(\frac{1/3}{x-4} - \frac{1/3}{x-1}\right)}_{\text{lättare att integrera nu}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-4| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$$

2018.01.13 # 2 # Lill

Beräkna $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

Steg 1 Betrakta

$$\int \frac{1}{\underbrace{x^3-3x^2+2x}_{\text{faktorisera nämnaren}}}\,dx = \int \frac{1}{x(\underbrace{x^2-3x+2}_{\text{nollställen: } x_1=1,\ x_2=2})}\,dx$$

$x^2-3x+2=(x-x_1)(x-x_2)$

$$= \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx$$

Genomför PBU med ansats:

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Multiplicera båda led med $x(x-1)(x-2)$:

$$1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

$$\Rightarrow 1 = \underline{\underline{Ax^2}} \underline{\underline{-3Ax}} + 2A + \underline{\underline{Bx^2}} \underline{\underline{-2Bx}} + \underline{\underline{Cx^2}} \underline{\underline{-Cx}}$$

$$\Rightarrow 1 = \underline{\underline{(A+B+C)x^2}} + \underline{\underline{(-3A-2B-C)x}} + 2A$$

Matcha koefficienterna:

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ -3A-2B-C = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

<u>Alltså</u>

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C$$

Steg 2 Sätt in gränserna:

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| \right]_3^\infty \quad (*)$$

skriv om med

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^c) = c \cdot \ln a$$

$$\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\cdot 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-1|^2 + \frac{1}{2}\ln|x-2|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x| + \ln|x-2| - \ln|x-1|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right|$$

$$(*) = \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \right| \right]_3^{\infty}$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \right| \right]_3^{R}$$

$$= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2} \ln \left| \underbrace{\frac{R^2 - 2R}{R^2 - 2R + 1}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{4} \right)$$

bra tecken för att vi kan förkorta bråket med dominerande term R^2

$$= \frac{1 - \frac{2}{R}}{1 - \frac{2}{R} + \frac{1}{R^2}} \to \frac{1 - 0}{1 - 0 + 0} = 1$$

då $R \to \infty$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}}}$$

Svar

Anm. Det står $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$ i facit.

Motivering: $-\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{4} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$

Frivillig omskrivning: $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \ln \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2} = \ln \frac{2}{\sqrt{3}}$ ▨

! Tabell med ansatser vid PBU

Vill beräkna $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

$f(t) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (polynom / polynom) med $\deg p < \deg q$	Ansatz
$\frac{\cdots}{(x-a)(x-b)}$, $a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
$\frac{\cdots}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
$\frac{\cdots}{(x-a)(x-b)^2}$, $a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$
knepigt & ovanligt fall: $\frac{\cdots}{(x-a)\underbrace{(x^2+bx+c)}_{\text{saknar reella nollställen och kan inte faktoriseras vidare}}}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{\overbrace{Bx+C}^{\text{polynom av grad 1}}}{\underbrace{x^2+bx+c}_{\text{polynom av grad 2}}}$

Varning Räcker inte med $\frac{B}{x^2+bx+c}$ i allmänhet!

2013.03.06 #4 #LiU

Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2}\,dx$.

Lösning Steg 1 Använd PBU:

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2} = \frac{2x^2-2x+1}{x^2\underbrace{(x^2+1)}}$$

$x^2=(x-0)^2$
0 är en dubbelrot
till $x^4+x^2=0$
FALL 2
i tabellen

går ej att
faktorisera vidare
FALL 4
i tabellen

Ansats $\displaystyle\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$

Läxa $\displaystyle\frac{-2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}$

(tänk ekvationssystem)

Steg 2 Integralen kan nu beräknas:

$$\int \frac{2x^2-2x+1}{x^4+x^2}\,dx$$

$$= \int\Big(\underbrace{-\frac{2}{x}}_{\text{lätt}} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{lätt}} + \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+1}}_{\text{knepig}}\Big)\,dx$$

$$= \int\Big(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\substack{\text{kan byta}\\ u=x^2+1}} + \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\text{The force awakens}}\Big)\,dx$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x^2+1| + \arctan x + C$$

Steg 3 Sätt in gränserna och avsluta:

$$\lim_{R\to\infty}\Big[-2\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x^2+1| + \arctan x\Big]_1^R$$

$$= \underset{\substack{\uparrow\\ \text{läxa}}}{\dots} = 1 + \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

$\blacksquare$

Tips Användbar & effektiv genväg "Skarpt öga"

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

<u>eftersom</u> $\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{inre derivatan}}$

Ex. $$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + C$$
$$= \ln\underbrace{(x^2+1)}_{\text{ty } x^2+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}} + C$$

$$\int \frac{x^2}{\underbrace{4x^3+5}_{\text{nämnarens derivata är } 12x^2}}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{12x^2}{4x^3+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{12}\ln|4x^3+5| + C$$

Generaliserad integral och konvergensegenskapen

Ex. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R$

$$= \lim_{R\to\infty} -\underbrace{\frac{1}{R}}_{\to 0} - (-1) = 1$$

Integralen sägs konvergera mot 1.

$$\int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\ln x\right]_3^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{\ln R}_{\to\infty} - \ln 3 = \infty$$

inte tal

Integralen sägs divergera mot ∞.

Generellt p-testet

Fall 1

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

konvergerar om $p > 1$

divergerar om $p \leq 1$
(mot ∞)

tal $a > 0$

Fall 2

tal $a > 0$

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx$$

konvergerar om $p < 1$

divergerar om $p \geq 1$
(mot ∞)

om t.ex. $p=2$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Jämförelsesatsen för generaliserade integraler

<u>Mål</u> Kolla om den generaliserade integralen $\int_I f(x)\,dx$ konv./div.

I ← något intervall

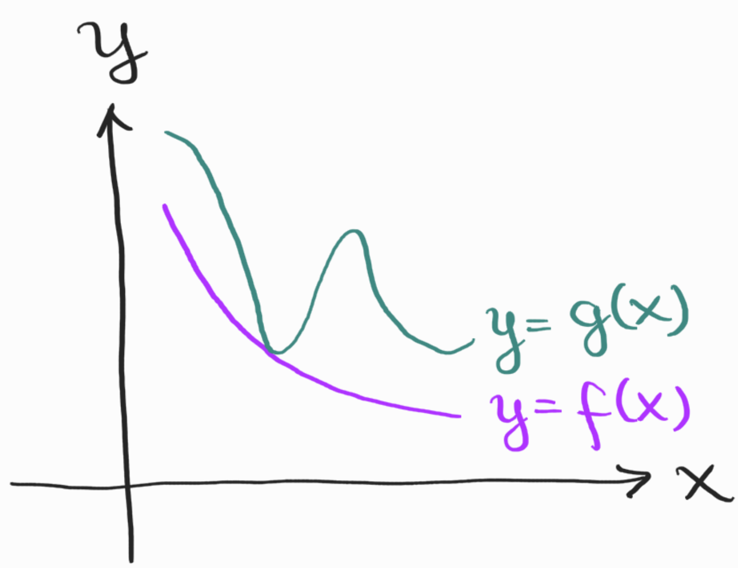
(Antag att det är praktiskt omöjligt eller svårt att primitivisera f.)

<u>Sats</u> Låt f, g vara kontinuerliga funktioner på I sådana att

$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

Då gäller att

$$0 \leqslant \int_I f(x)\,dx \leqslant \int_I g(x)\,dx$$



Om $\int_I f(x)\,dx$ divergerar,

divergerar även $\int_I g(x)\,dx$.

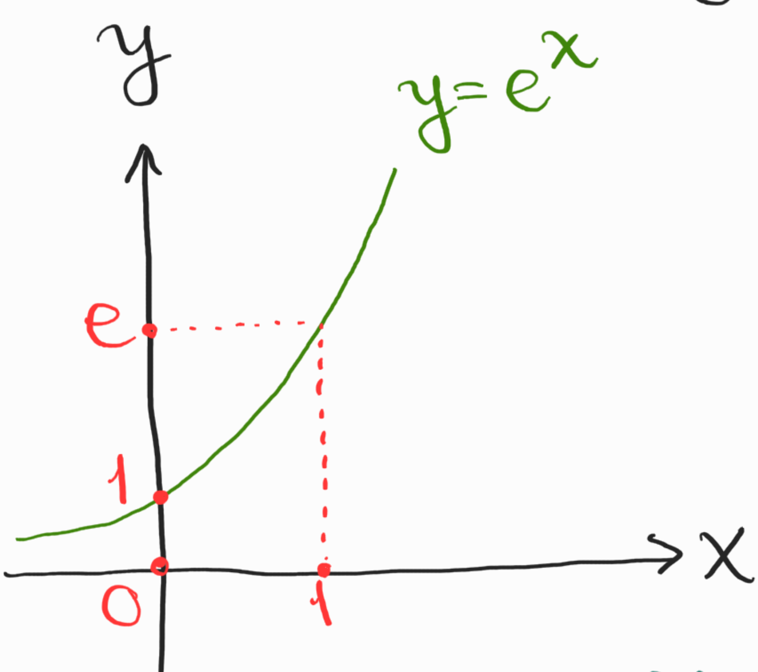
Om $\int_I g(x)\,dx$ konvergerar,

konvergerar även $\int_I f(x)\,dx$.

$\blacksquare$

2020.06.03 #4 #KTH

a) Avgör om $\displaystyle\int_0^1 \overbrace{\frac{e^{-x}}{x}}^{=\frac{1}{x\cdot e^{-x}}}\,dx$ konvergerar.



just den funktion som integreras här

Idé För alla $0 \leq x \leq 1$ gäller

$$e \geqslant e^x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e} \leqslant \underbrace{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^x}}$$

Alltså

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\frac{1}{e^x}\,dx$$

$$\geqslant \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e}\,dx$$

$$= \frac{1}{e}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx}_{\text{divergerar}}$$

divergerar enligt p-testet

$$\int_0^{a} \frac{1}{x^p}\,dx$$ tal $a>0$

konvergerar om $p<1$

divergerar om $p \geqslant 1$ (mot ∞)

om t.ex. $p=2$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Slutsats $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ divergerar

enligt jämförelsesatsen. $\boxtimes$

Tips 2018.01.02 #5(6) #UU

Liknande uppgift

Anmärkning

Icke-elementära integraler
("omöjliga" integraler)

Några exempel:

$\int e^{-x^2}\,dx$ Gaussisk integral

$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ exponentialintegral

$\int \sin(x^2)\,dx$ men $\int (\sin x)^2\,dx$ är enklare!

$\int \frac{1}{\ln x}\,dx$

2018.01.08 #5 #KTH

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \quad \text{konv./div. ?}$$

Lösning Försök

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \geqslant \int_2^\infty \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^3}}}\,dx$$

större nämnare
ger mindre kvot

$$= \int_2^\infty \frac{1}{(x^3)^{1/2}}\,dx$$

$$= \underbrace{\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx}_{p=\frac{3}{2}>1}$$

$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerar om $p>1$
divergerar om $p\leqslant 1$
(mot ∞)

tal $a>0$

konvergerar enligt p-testet

Vi kan dock inte dra någon slutsats från dessa beräkningar.

Användbar sats relevant för $\int_a^\infty f(x)dx$

Jämförelsesatsen på gränsvärdesform

Låt f, g vara kontinuerliga, icke-negativa funktioner för alla $x \geq a$.

Om $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M > 0$

reellt tal (inte $\pm\infty$)

så är $\int_a^\infty f(x)dx$ och $\int_a^\infty g(x)dx$ ekvikonvergenta, dvs. antingen konvergerar båda integraler eller så divergerar båda integraler. $\boxtimes$

Tillbaka till uppgiften:

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \quad \text{där } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$$

Betrakta

$$\int_2^\infty \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}_{\text{välj själv!}}\,dx \quad \text{där } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Studera nu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}}}$$

förkorta med x^3

$$= \sqrt{1} = 1 > 0$$

Slutsats

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \text{ konvergerar}$$

(enligt p-testet)

$$\Rightarrow \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \text{ konvergerar,}$$

enligt

Jämförelsesatsen på gränsvärdesform

$\blacksquare$

Geometriska serier

$\underbrace{\text{serier}}_{\text{summor med oändligt många termer}}$

Ex. $4 + 8 + 16 + 32 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k$

$\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$\cdot \frac{1}{3} \quad \cdot \frac{1}{3} \quad \cdot \frac{1}{3}$

Allmänt En geometrisk serie är en serie på formen

något tal $C \neq 0$

$$\sum_{k=N}^{\infty} C \cdot r^k$$

kvot (eng. ratio)

något heltal

Två viktiga räknelagar för serier i allmänhet

1. $$\sum_{k} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k} a_k$$

konstant

godt. gränser

Ex. $$\sum_{k=4}^{9} 3(k^2+k) = 3\sum_{k=4}^{9}(k^2+k)$$

2. $$\sum_{k}(a_k+b_k) = \sum_{k} a_k + \sum_{k} b_k$$

2017.01.09 #2 #KTH

b) Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} \text{ där } a_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i}.$$

Lösning Beräkna serien

$$S = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{3^i}$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{3^i}$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i}_{\text{geometrisk serie med kvot } r=\frac{1}{3}}$$

Betrakta först $\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i = A$:

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Räknebknep:

$$\frac{1}{3}A = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A - \frac{1}{3}A}_{\frac{2}{3}A} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}_{\substack{\to 0 \\ \text{när } n\to\infty}}\right)$$

Slutsats:

$$S = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Svar

Generellt

Geometrisk serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \text{ om } -1<r<1$$

Ex. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$= \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2013.08.22 #7 #UU

b) Beräkna $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^k}}$

Fel lösning

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{k/2}$$

geometrisk serie med kvot $r = \frac{1}{e}$

Fel för att en geometrisk serie ska ha formen $\sum_k r^k$. bara k

Rätt lösning

kvot: $r = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{1/2}}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}}$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$$

Svar

Jämförelsesatsen för positiva serier

Låt $\underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} a_k}_{S_a}$ och $\underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} b_k}_{S_b}$ vara 2

positiva serier med $0 \leq a_k \leq b_k$

för alla $k \geq N$. Då gäller

$$0 \leq S_a \leq S_b \quad \underline{\text{samt}}$$

Om S_a divergerar, divergerar S_b.

Om S_b konvergerar, konvergerar S_a.

Anmärkning p-testet

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad \begin{array}{l} \text{konvergerar om } p > 1 \\ \text{divergerar om } p \leq 1 \end{array}$$

heltal $N > 0$

2013.08.22 #7 #UU

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}}$ konv./div. ?

Anm. $\displaystyle \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}}$

Lösning

$$0 < \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}} < \underbrace{\frac{2k}{\sqrt{k^5}}}_{\text{mindre nämnare ger större kvot}} \text{ för alla } k \geqslant 1$$

$\Downarrow$

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{k^5}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^{5/2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{3/2}} = 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}}_{p=3/2>1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$ konvergerar enligt p-testet

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$ konvergerar

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{1+k^5}}$$ konvergerar

enligt jämförelsesatsen.

Jämförelsesatsen på gränsvärdesform för serier

Tag 2 positiva serier

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \text{ och } \sum_{k=N}^{\infty} b_k .$$

Om $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = C > 0$

något tal

så är $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$.

ekvikonvergenta .

Kvottestet för serier

är oftast användbart om termerna i serien innehåller $k!$, $\underbrace{a^k \text{ eller } k^k}_{k \text{ i exponenten}}$.

Sats Låt $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ vara en positiv serie. Betrakta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = R.$$

Om $0 \leq R < 1$: serien konv.

Om $R > 1$: serien div.

Om $R = 1$: ingen säker slutsats kan dras $\boxtimes$

2015.05.28 #7 #UU

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ konv./div.?

Kvottestet $a_n = \frac{n^{10}}{2^n}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}$$

Betrakta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^{10}}$$ förkorta med 2^n

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}$$

Rikvottestet

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)}_{\to 1}^{10} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ den givna serien konvergerar.

Cauchy:s integraltest för serier

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k) \text{ konv./div.?}$$

Ex. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2+k^2}$

Sats Låt $f(k)$ vara en

- kontinuerlig,
- positiv och
- avtagande ("KPA") viktigaste villkoret

funktion för alla $k \geq N$.

Då är $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} f(k)$ och $\displaystyle\int_N^{\infty} f(x)\,dx$

ekvikonvergenta.

2011.12.15 #7 #KTH

$$S = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$

a) Visa att S konvergerar.

b) Visa att $S \leq 1$.

Lösning a) Låt $f(k) = \dfrac{\ln k}{k^2}$

och prova tillämpa Cauchy integraltest. Se att

$f(k) = \dfrac{\ln k}{k^2}$ uppenbarligen är

kontinuerlig och positiv

för alla $k \geq 4$.

För att visa att f är avtagande, titta på $f'(k)$:

$$f(k) = \underbrace{\frac{\ln k}{k^2}}_{\text{kvotregeln}} \Rightarrow f'(k) = \frac{\frac{1}{k}\cdot k^2 - 2k\cdot \ln k}{k^4}$$

$k \geq 4$

$$= \frac{k - 2k\ln k}{k^4} = \frac{1 - 2\ln k}{k^3}$$

$e \approx 2{,}7$

$$< \frac{1 - 2\ln e}{k^3} = \frac{1 - 2\cdot 1}{k^3} = \frac{-1}{k^3} < 0$$

$\Rightarrow$ $f(k)$ är avtagande.

$\Rightarrow$ Vi kan nu använda Cauchys test.

Betrakta motsvarande int.

$$\int_4^\infty f(x)\,dx = \int_4^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \int_4^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2}\cdot \ln x \,dx}_{\text{partiell integration}} = \ldots = \frac{1+\ln 4}{4}$$

LÄXA

$$\Rightarrow \int_4^\infty f(x)dx \text{ konvergerar}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=4}^\infty f(k) \text{ konvergerar också.}$$

b) Visa att $S = \sum_{k=4}^\infty \frac{\ln k}{k^2} \leq 1$.

Populär metod:

Cauchys integraltest, del 2

Om $S = \sum_{k=N}^{\infty} f(k)$ konv. gäller

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

I denna uppg.

$$S = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} \leq f(4) + \int_4^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

2^2

$$= \frac{\ln 4}{4^2} + \frac{1+\ln 4}{4}$$

$\approx 2{,}7^2$

$$= \frac{4 + 5\ln 4}{16} \leq \frac{4+5\ln(e^2)}{16}$$

$$= \frac{4+5\cdot 2}{16} = \frac{14}{16} < 1$$

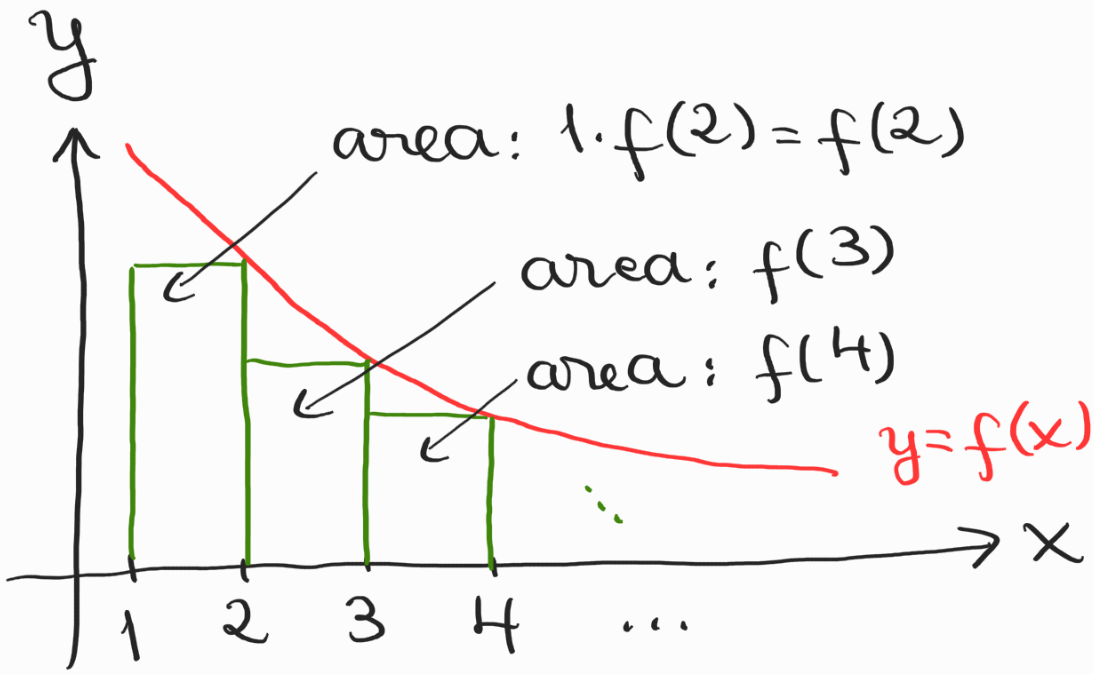
dvs. $S < 1 \Rightarrow S \leq 1$. $\blacksquare$

Mål: visa att $S \leq 1$

Bevis för $\int_N^\infty f(x)\,dx \leq S \leq f(N) + \int_N^\infty f(x)\,dx$

$$S = \sum_N^\infty f(k) = f(N) + f(N+1) + \dots$$

För enkelhetens skull visar jag beviset för fallet där $N = 1$:

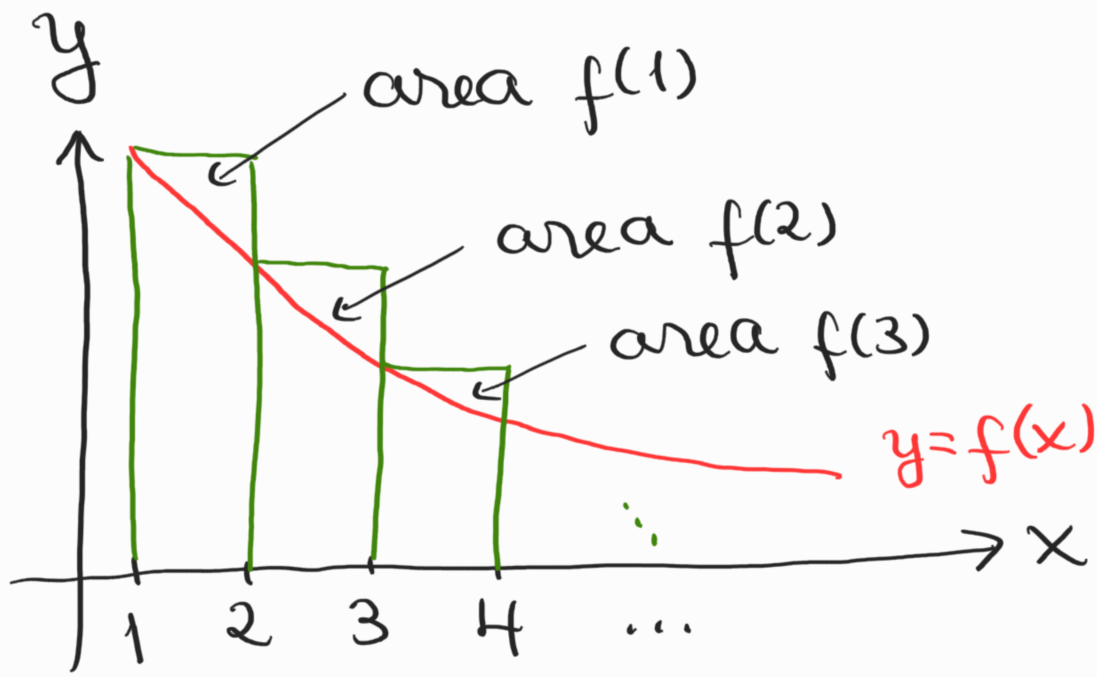


areasumman

$$= f(2) + f(3) + f(4) + \dots \leq \int_1^\infty f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \overbrace{f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots}^{S}$$

$$\leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx \Rightarrow S \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$$



areasumman

$$= \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)+\dots}_{S} \geqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \leqslant S$$

Nu är det bevisat att

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$$

Saken är biff. Jag vilar min väska.

God jul!

önskar KOLLIN

www.kollin.io