Övning 4

Jowan@kth.se

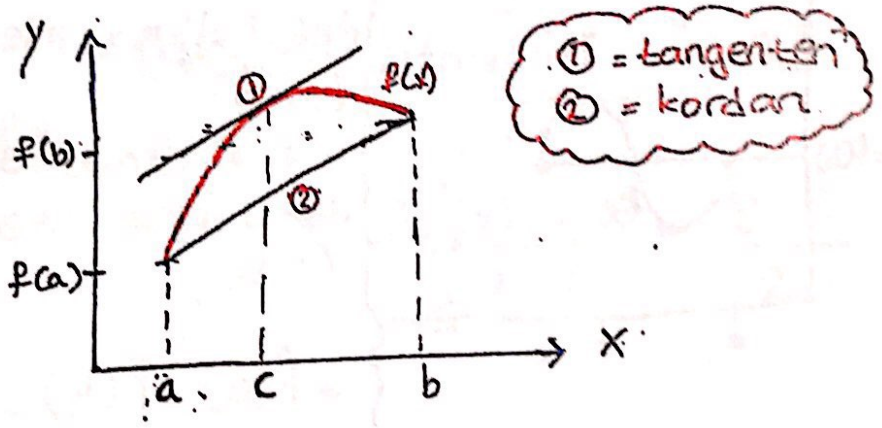
08/09/2017

1.1 Medelvärdessatsen

Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på ett ändligt slutet intervall $[a,b]$ och deriverbar i det öppna intervallet (a,b). Då existerar det ett $c \in (a,b)$ sådan att:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \iff$$

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$



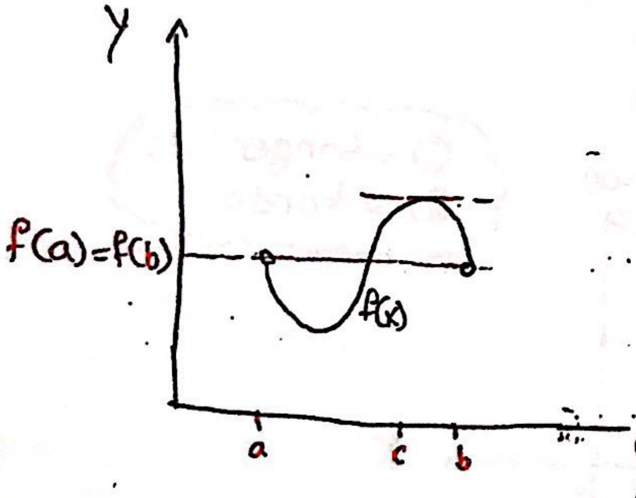
Om $f(x)$ uppfyller villkoren i medelvärdessatsen så finns det en punkt c i intervallet (a,b) sådan att tangenten ① i punkten $(c, f(c))$ är parallell med kordan ② mellan punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$.

4.2] Rolles sats

Antag att f är kontinuerlig på ett ändligt slutet intervall [a,b] och deriverbar i det öppna intervallet (a,b) samt att: $f(a) = f(b)$.
Då existerar det ett $c \in (a,b)$ sådan att

$$f'(c) = 0$$

Rolles sats används främst i beviset av den mer generella medelvärdessatsen.



- f är kontinuerlig i det ändliga intervallet [a,b].
- f är deriverbar i det öppna intervallet (a,b)
- $f(a) = f(b)$

...ning på tavlan ③

2.8:2] Åskådliggör medelvärdessatsen genom att finna en punkt på intervallet (1,2) där tangentlinjen till $y = \frac{1}{x}$ är parallell med kordan mellan punkterna $(1, f(1))$ samt $(2, f(2))$.

Lös] Vi börjar med att definiera $f(x)$:

$f(x) = \frac{1}{x}$. Rita bild först ⚠

Vi skriver sedan ned medelvärdessatsen

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{VL} = \underbrace{f'(c)}_{HL} \quad (*)$$

Sökt: Punkten c $\{x=c\}$

~~Betrakta~~ intervallet $[1, 2]$ för $f(x)$. $(*)$

$$VL = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}}{2-1} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

Nu när vi har VL går vi vidare och deriverar $f(x)$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ och i punkten $x=c$ så:

$f'(c) = -\frac{1}{c^2}$ där $\boxed{c \in (a,b)}$

Vi skriver sedan vad HL av (*) blir:

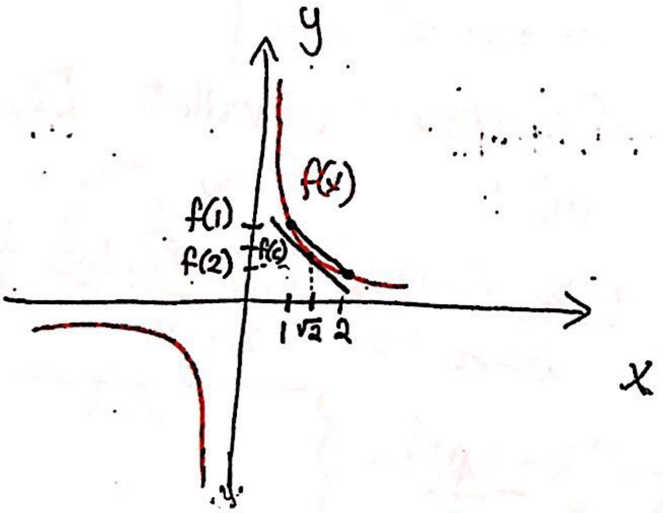
$$HL = f'(c) = -\frac{1}{c^2}$$

$$VL = HL \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow$$

$$c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

Då vårt intervall är $(1,2)$ så blir c bara: $c = \sqrt{2}$.

Svar: $c = \sqrt{2}$



Scanned by CamScanner

③

Visa m.h.a medelvärdessatsen att

$$\tan x > x \quad (*)$$

för $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Lös] Jag börjar med att definiera $f(x)$ som

$$f(x) = \tan x$$

Med hjälp av medelvärdessatsen vill jag sedan visa att påståendet $(*)$ stämmer.

Medelvärdessatsen ger:

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{VL} = \underbrace{f'(c)}_{HL}$$

Vi behöver nu välja a och b.

- Vi väljer a som det minsta värdet vi har fått i uppgiften, dvs $a=0$.
- Vi väljer b som ett godtyckligt värde x inom intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$, dvs $b=x$. Alltså:

$$[a,b] = [0,x] \quad (\text{där } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}))$$

- Nu när vi har vårt intervall och definierat $f(x)$ kan vi börja applicera medelvärdessatsen.

Vi börjar med VL i medelvärdessatsen.

$$VL = \frac{f(\overset{=x}{b}) - f(\overset{=0}{a})}{b-a} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-f(0)}{x} =$$

$$\frac{\tan(x) - \overbrace{\tan(0)}^{=0}}{x} = \frac{\tan(x)}{x}$$

Vi går sedan vidare till att derivera $f(x)$ och skriva vad HL blir:

$$f'(x) = (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'(c) = \frac{1}{\cos^2 c}$$

$$HL = f'(c) = \frac{1}{\cos^2 c} \quad \text{där } c \in (0, x).$$

VL = HL ger då:

$$VL = HL \Leftrightarrow \frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{\cos^2 c} \Leftrightarrow \tan(x) = \frac{1}{\cos^2 c} \cdot x$$

Nu vill vi veta vad $\frac{1}{\cos^2 c}$ kan bli: Då: $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ så får vi

$$0 < c < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(0) = 1 \\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 < \cos c < 1 \Leftrightarrow$$

$$0 < \cos^2 c < 1 \,;$$

Därmed har vi att $\frac{1}{\cos^2 c}$ blir alltid större än 1 då nämnaren blir $0 < \cos^2 c < 1$.

Alltså; $\frac{1}{\cos^2 c} > 1$

...r nu att

$$\tan x = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos^2 c}}}_{>1} \cdot x$$

Då $\tan x$ är x multiplicerat med en konstant större än 1, får vi att $\tan x > x$ i $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Då x är ett godtyckligt tal inom intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$ har vi bevisat att $\tan x > x$ för alla x i $(0, \frac{\pi}{2})$.

... $x = 0$. Vera ur ok!

4.4] Monotona funktioner

Funktionen f sägs vara

- Strängt växande om $x<y \Leftrightarrow f(x)<f(y)$
- Växande om $x<y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$
- Strängt avtagande om $x<y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$
- Avtagande om $x<y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$

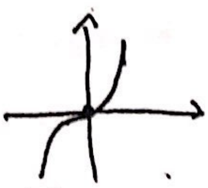
4.5] Monotonicitetssatsen

Antag att f är deriverbar i intervallet (a,b).
Då gäller

- $f' \geq 0$ i $(a,b) \Leftrightarrow f$ är växande i (a,b)
- $f' > 0$ i $(a,b) \Rightarrow f$ är strängt växande i (a,b)
- $f' \leq 0$ i $(a,b) \Leftrightarrow f$ är avtagande i (a,b)
- $f' < 0$ i $(a,b) \Rightarrow f$ är strängt avtagande i (a,b)

2.8:21] Vis att x^3 är strikt växande på hela den Reella linjen för alla $x \geq 0$.

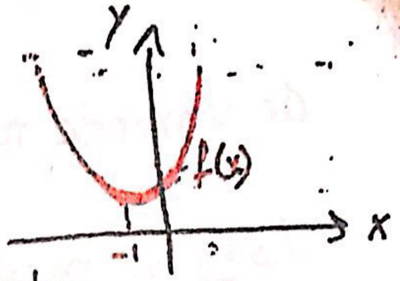
$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$



strikt växer från $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$ då $f'(x) > 0$ där. Dock vid $x=0$ så är $f'(x) \geq 0$, därför utvidgar vi satsen $f'(x) > 0$ till $f'(x) \geq 0$ vid den isolerade punkten $x=0$. Detta är ok!

4.6] Räkning på tavlan

2.6.8] Finn i intervallen där



$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

är växande respektive avtagande.

Lös] Vi beräknar först derivatan $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$$

Nu kan vi se att:

- $f'(x) \geq 0$ då $x \geq -1$
- $f'(x) \leq 0$ då $x \leq -1$

$f'(x) \geq 0$ då:

$2(x+1) \geq 0$
$(x+1) \geq 0$
$x \geq -1$

$f'(x) \leq 0$ då:

$2(x+1) \leq 0$
$x+1 \leq 0$
$x \leq -1$

Enligt monotonicitetssatsen har vi att $f(x)$ är:

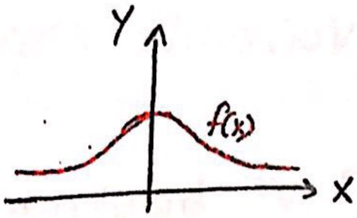
- Växande på $[-1, \infty)$ då $f'(x) \geq 0$ då $x \geq -1$
- Avtagande på $(-\infty, -1]$ då $f'(x) \leq 0$ då $x \leq -1$

6:12 Finn i intervallen där

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

är växande respektive avtagande.

[Lös] vi beräknar derivatan:



$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$$

$$f'(x) = -1(x^2+1)^{-2} \cdot (2x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Nu ser vi att nämnaren kommer alltid vara positiv då vi har uttrycket inom parantesen upphöjd till 2.

Därmed är det endast täljaren som styr här.

- $f'(x) \leq 0$ om $x \geq 0$ $-2x \leq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Alltså är funktionen avtagande på $[0, \infty)$

- $f'(x) \geq 0$ om $x \leq 0$ $-2x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Alltså är funktionen växande på $(-\infty, 0]$.

4.7] Implicit derivering

När vi beräknar derivatan av en funktion given på implicit form :

$$F(x,y) = G(x,y)$$

Så deriverar vi enligt följande:

1) Derivera bägge sidor med avseende på x.

2) Derivera uttrycken som innehåller y med hjälp av kedjeregeln.

Ex] $(y^5)' = 5y^4 \cdot y'$ $(\sin y)' = \cos y \cdot y'$

3) Efter att all derivering är slut så löser vi ut y'.

Vi har nu våra känsliga punkter

kritiska punkter

odef punkter

x		2		4	
$f'(x)$	+	odef	−	0	+
$f(x)$	↗	odef	↘	$f(4)$	↗

– Då $f'(x) > 0$ för $x<2$ och $x>4$ är $f(x)$ ~~vat~~ strikt växande där.

– Då $f'(x) < 0$ för $2<x<4$ är $f(x)$ strikt avtagande där.

7.8] Räkning på tavlan

2.9:3] Implicit derivera

$$x^2 + xy = y^3$$

Lös] vi betraktar y som en funktion av x och deriverar m.a.p x. $y' = \frac{dy}{dx}$

$$2x + (1 \cdot y + x \cdot 1 \cdot y') = 3y^2 \cdot y' \Leftrightarrow$$

$$2x + y + xy' = 3y^2y' \Leftrightarrow$$

$$2x + y = 3y^2y' - xy' \Leftrightarrow$$

$$2x + y = y'(3y^2 - x) \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{2x + y}{3y^2 - x}$$

Vi tillämpade produktregeln på xy:

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{där } f(x) = x,\; g(x) = y$$

2.9:4] Implicit derivera

$$x^2 + 4(y-1)^2 = 4$$

Lös] $2x + 2 \cdot 4(y-1) \cdot y' = 0 \Leftrightarrow$

$$2x + 8(y-1)y' = 0$$

$$8(y-1)y' = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{8(y-1)} \Leftrightarrow y' = \frac{-x}{4(y-1)}$$

Svar: $y' = \frac{-x}{4(y-1)}$

2.9:13 Bestäm tangentlinjens ekvation till den givna kurvan vid den givna punkten.

$$2x+y-\sqrt{2}\sin(xy)=\frac{\pi}{2} \qquad P=\left(\frac{\pi}{4},1\right)$$

Lös] Tangentlinjens ekvation vid punkten (x_0, y_0):

$$y = k(x-x_0)+y_0$$

Här har vi $(x_0, y_0)=\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

Vi behöver alltså lutningen k, k får vi genom att implicit derivera kurvan i punkten $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

$$2\cdot 1+1\cdot y'-\sqrt{2}\cos(xy)(1\cdot y+x\cdot 1\cdot y')=0 \Leftrightarrow$$

$$2+y'-\sqrt{2}\cos(xy)(y+xy')=0$$

Eftersom det är ganska jobbigt nu att bryta ut y' så stoppar vi in punkten $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ först.

$$2+y'-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\left(1+\frac{\pi}{4}y'\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$2+y'-\overbrace{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{=1}\left(1+\frac{\pi}{4}y'\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$2+y'-1\left(1+\frac{\pi}{4}y'\right)=0$$

15

$$2 + y' - \left(1 + \frac{\pi}{4} y'\right) = 0$$

$$2 + y' - 1 - \frac{\pi}{4} y' = 0$$

$$y' - \frac{\pi}{4} y' = -2 + 1$$

$$y'\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$y' = \frac{-1}{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Tangentlinjens ekvation i $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ blir då:

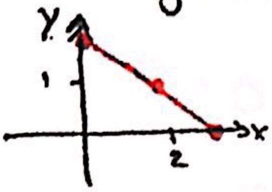
$$y = \frac{-1}{1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

kan även skrivas (som i boken)

$y = \frac{-4}{4 - \pi} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ då i boken har de förlängt $\frac{-1}{1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)}$ med 4.

Tentamen 2014-10-24

3] Beräkna arean av den rätvinkliga triangel som begränsas av koordinataxlarna och tangentlinjen i punkten (2,1) till kurvan



$$(x^2+y^2)^2-7x^2+3y^2=0 \quad (*)$$

Lös] koordinataxlarna ges utav x och y-axeln. Därmed har vi ett hum om hur triangeln ser ut. Men innan vi kan beräkna arean måste vi ta fram tangentlinjens ekvation, som ges utav enpunktsmetoden:

$$y = y_0 + k(x-x_0) \quad \text{i} \quad P=(x_0, y_0)$$

Vi har $(x_0, y_0)=(2,1)$, därmed behöver vi bara lutningen k som vi får genom att implicit derivera (*):

$$2(x^2+y^2)(2x+2y\cdot y')-14x+6yy'=0$$

$$(2x^2+2y^2)(2x+2yy')-14x+6yy'=0$$

Vi stoppar in vår punkt (2,1).

$$(2x^2+2y^2)(2x+2yy')-14x+6yy'=0$$

i (2,1) så får vi:

$$(2\cdot 2^2+2\cdot 1^2)(2\cdot 2+2\cdot 1y')-14\cdot 2+6\cdot 1y'=0 \Leftrightarrow$$

$$(8+2)(4+2y')-28+6y'=0$$

$$10(4+2y')-28+6y'=0$$

$$40+20y'-28+6y'=0$$

$$12+20y'+6y'=0$$

$$12+26y'=0$$

$$26y'=-12$$

$$y'=\frac{-12}{26}$$

$$y'=k \qquad y'=\frac{-6}{13}$$

Tangentlinjens ekvation:

$$y=y_0+k(x-x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \\ k=\frac{-6}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$y=1+\left(\frac{-6}{13}\right)(x-2) \Leftrightarrow$$

$$y=1-\frac{6}{13}(x-2)$$

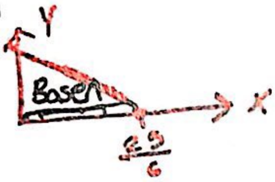
Nu undersöker vi skärningspunkterna mellan tangentlinjen och koordinataxlarna.

- Skärning med x-axel: när $y=0$

$y = -\frac{6}{13}(x-2)+1 \quad \{y=0\}$

$0 = -\frac{6}{13}(x-2)+1$

$x = \frac{25}{6}$

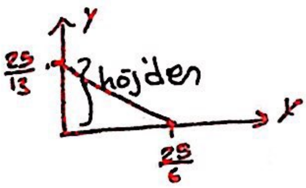


- Skärning med y-axeln: när $x=0$

$y = -\frac{6}{13}(x-2)+1 \quad \{x=0\}$

$y = -\frac{6}{13}(0-2)+1$

$y = \frac{25}{13}$



Arean av en triangel:

$A = \frac{\text{Basen} \cdot \text{höjden}}{2}$

$A = \frac{\frac{25}{6} \cdot \frac{25}{13}}{2} = \frac{625}{156}$ a.e

Svar: $\frac{625}{156}$ a.e