Övning 5

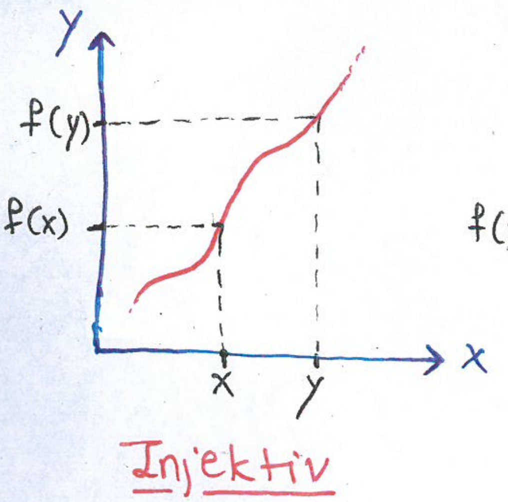
Jowan@kth.se

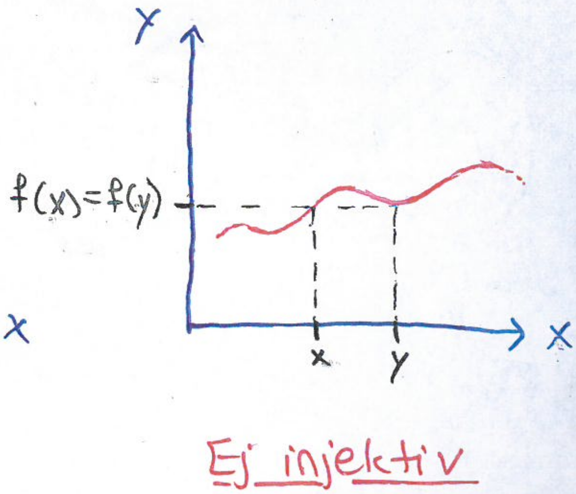
12/09/2017

5.1] Injektiva funktioner

En funktion f är injektiv (en-entydig) om:

$$x=y \iff f(x)=f(y)$$





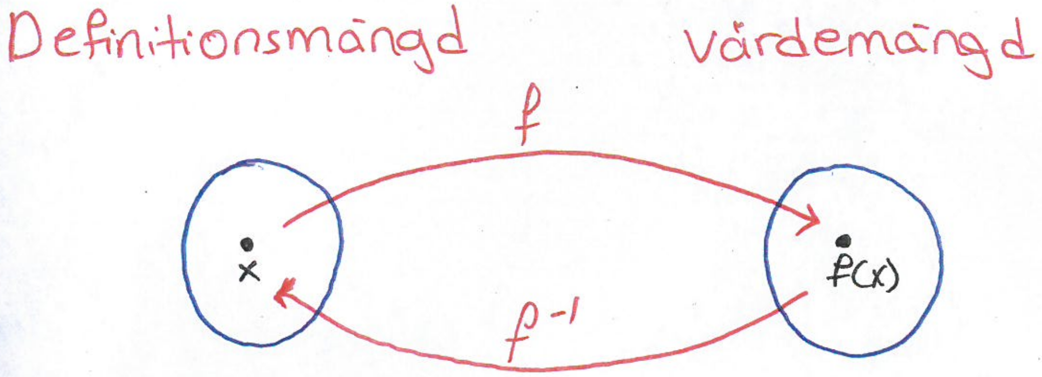
Sats f är strängt monoton ⇒ f är injektiv

Sats f och g är strängt monotona ⇒ f∘g är injekt

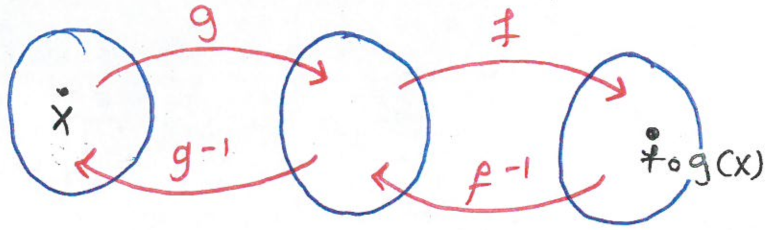
OBS! I boken kallar de injektiva funktioner för "one to one" functions.

5.2] inversfunktioner

Antag att f är en injektiv funktion. Den funktion som avbildar värdet $f(x)$ tillbaka på x kallas för inversfunktionen till f och betecknas f^{-1}.



Sats $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$



Sats Om $f' \circ f^{-1}(a) \neq 0$, då är $(f^{-1})'(a) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(a)}$

OBS ▲ $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$

5.3] inversfunktioner – Regler

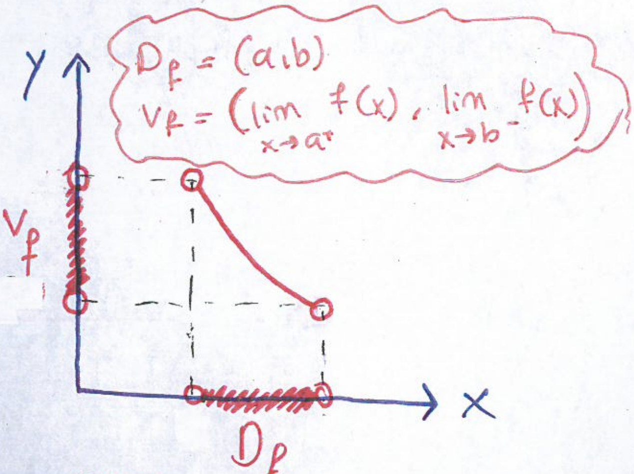
- $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$
- $D_f = V_{f^{-1}}$
- $V_f = D_{f^{-1}}$
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$
- $f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in V_f$
- $f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in D_f$

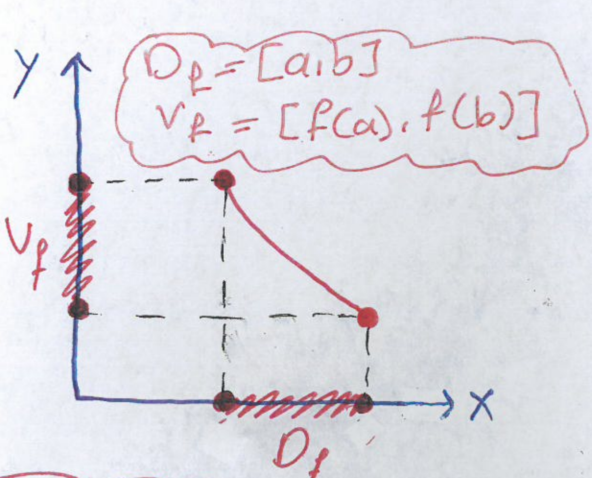
5.4] värdemängd

Om f är en kontinuerlig, monoton funktion med $D_f = (a, b)$, då är V_f ett öppet intervall med ändpunkter

- $\lim_{x \to a^+} f(x)$ och • $\lim_{x \to b^-} f(x)$

Om f är en kontinuerlig, monoton funktion med $D_f = [a, b]$, då är V_f ett slutet intervall med ändpunkter $f(a)$ och $f(b)$.



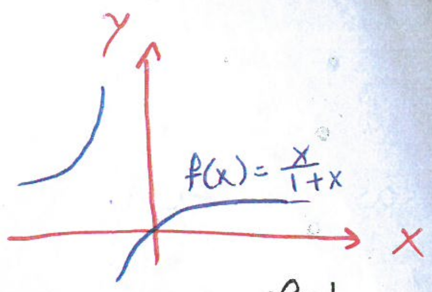


Viktigt ! $D_f^{-1} = V_f$ & $V_{f^{-1}} = D_f$

5.5] Räkning på tavlan

3.1.10] Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$



= injektiv

är en-entydig och bestäm inversfunktionen f^{-1}. Bestäm även definitionsmängden och värdemängden till f och f^{-1}.

Lös] f(x) är en-entydig om den är strängt monoton. Vi kan undersöka ifall f(x) är strängt monoton m.h.a derivatan.

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1.(1+x)-x(1)}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Vi ser att derivatans täljare och nämnare är alltid positiv. Därav är $f'(x) > 0$ och f(x) är därmed strängt växande! Detta visar att f(x) är en-entydigt.

- Vi vill sedan få fram vad inversen $f^{-1}(x)$ blir.

Vi kan få fram inversen genom att tillämpa följande: ⑤

$$x = f(y) \Leftrightarrow y = \underbrace{f^{-1}(x)}_{\text{Sökt.}} \circledast$$

1) Lös $x = f(y)$.

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

då $f(x) = \frac{x}{1+x}$ blir $f(y) = \frac{y}{1+y}$

2) Lös ut y

$$x = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x + xy = y \Leftrightarrow$$

$$x = y - xy \Leftrightarrow x = y(1-x) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{x}{1-x}$$

Vi hade enligt $\circledast$ att $y = f^{-1}(x)$. Alltså:

$y = f^{-1}(x)$ ger $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}}$ Inversen

- Nu vill vi veta D_f och V_f.

Då $f(x)$ är en rationell funktion är den definierad överallt förutom där nämnaren är noll.

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad 1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$ eller $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

Eftersom f är strängt monoton och definitions mängden är 2 öppna intervall är f:s värdemängd 2 öppna intervall.

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

Vi undersöker (enligt teori) när $x \to \pm\infty$, $x \to -1^-$, $x \to -1^+$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x}{x}} =$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0} + 1} = 1$$

- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{1+x} =$ {Applicera produktregel för gränsvärden}

$$\lim_{x \to -1^-} x \cdot \frac{1}{1+x} = \underbrace{\lim_{x \to -1^-} x}_{= -1} \cdot \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{1+x} =$$

$$-1 \cdot \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{1+x} = -\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{1+x} = -(-\infty) = \infty$$

- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{1+x} =$ {Applicera produktregel för gränsvärden} $=$

$$\underbrace{\lim_{x \to -1^+} x}_{= -1} \cdot \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{1+x} = -1 \cdot \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{1+x} =$$

$$-\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{1+x} = -(+\infty) = -\infty$$

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0} + 1} = 1$

Alltså har vi att:

$$V_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

- slutligen har vi att:

$$V_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

$$D_f = V_{f^{-1}} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

Svar: . f(x) är strängt växande, därmed injektiv

- $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$
- $V_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- $D_f = V_{f^{-1}} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

3.1:29] Visa att

$$f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$$

är injektiv.

(8)

Lös] $f(x)$ har en invers omm den är injektiv. Vi kan visa att $f(x)$ är injektiv genom att visa att $f(x)$ är strängt monoton, Alltså genom att undersöka derivatan.

$$f'(x) = \frac{(12x^2)(x^2+1) - (4x^3)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^4 + 12x^2 - 8x^4}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^4 + 12x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Då nämnaren i $f'(x)$ alltid är positiv bestäms derivatans tecken utav täljaren. Täljaren i sin tur är produkten av två faktorer, där andra faktorn (x^2+3) är alltid positiv.

Första faktorn $4x^2$ är positiv överallt utom i $x=0$. Alltså:

$$f'(x)>0 \text{ utom i } x=0.$$

Detta betyder att $f'(x)$ är strängt växande i intervallen $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Eftersom f är kontinuerlig i $x=0$ är f strängt växande överallt. Därav är $f(x)$ injektiv.

[Ex] Bestäm inversen till

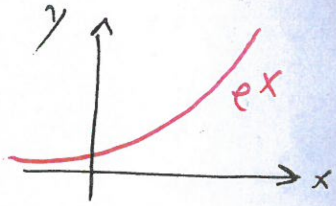
$$f(x) = 1 + 10e^{3x+5}$$

och bestäm även D_f, $D_{f^{-1}}$, V_f och $V_{f^{-1}}$.

[Lös] För att försäkra att $f(x)$ har en invers måste vi först se ifall den är injektiv. Detta gör vi genom att undersöka derivatan. Strängt monotona funktioner är injektiva.

$$f'(x) = 10e^{(3x+5)} \cdot (3) = 30e^{3x+5}$$

vi har att $f'(x) > 0$ för alla x.



Därmed är $f(x)$ strängt växande och som följd injektiv.

- Inversen blir enligt:

$$x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

$f(x) = 1 + 10e^{3x+5}$
$f(y) = 1 + 10e^{3y+5}$

• $x = f(y) \Leftrightarrow x = 1 + 10e^{3y+5}$

• $x = 1 + 10e^{3y+5} \Leftrightarrow x - 1 = 10e^{3y+5} \Leftrightarrow$

$$\frac{x-1}{10} = e^{3y+5} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{10}\right) = 3y+5 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x-1}{10}\right) - 5 = 3y \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{x-1}{10}\right) - 5\right]$$

$y = f^{-1}(x)$, alltså:

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{x-1}{10}\right) - 5\right]$ (11)

– vi har enligt:

- $D_f = V_{f^{-1}}$
- $V_f = D_{f^{-1}}$

funktionen $f(x)$ är definierad för alla reella tal,

Därför: $D_f = (-\infty, \infty)$ och därmed

$V_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, \infty)$

funktionen $f^{-1}(x)$ är definierad då $x > 1$.

Därför: $D_{f^{-1}} = (1, \infty)$ och därmed

$D_{f^{-1}} = V_f = (1, \infty)$

Tentamen 2012-12-10

1] Låt funktionen f ha $D_f = (0.\infty)$, och

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \qquad f(x) = e^{1-\frac{1}{x}}$$

a) Finn inversen för $f(x)$

b) Finn inversens värdemängd

c) Finn inversens Definitionsmängd.

Lös] Då vi har att $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \right)$ har vi att $f(x)$ är strängt växande och därmed inverterbar och har en invers. Inversen får vi då: $x = f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y$

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = e^{\frac{y-1}{y}} \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{y-1}{y} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x) = 1 - \frac{1}{y} \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = -\frac{1}{y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{y} = 1 - \ln(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-\ln x}$$

Då $y = f^{-1}(x)$ fås $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\ln x}$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\ln x}$

b) vi fick i uppgiften att $D_f = (0, \infty)$.

vi har att $V_{f^{-1}} = D_f$, därmed är

$V_{f^{-1}} = D_f = (0, \infty)$.

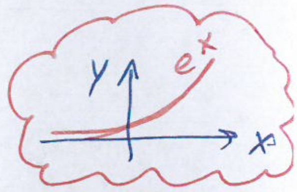
Svar: $V_{f^{-1}} = (0, \infty)$.

c) Sökt: $D_{f^{-1}}$.

Vi har att $\boxed{V_f = D_{f^{-1}}}$ vi jobbar med V_f istället

Då vi har att D_f är ett öppet intervall så är även V_f ett öppet intervall. Vi undersöker då

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ och $\lim_{x \to \infty} f(x)$



- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{1 - \frac{1}{x}} = 0$

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \to \infty} e^{1 - \frac{1}{x}} = e$

$V_f = (0, e)$, alltså $V_f = D_{f^{-1}} = (0, e)$

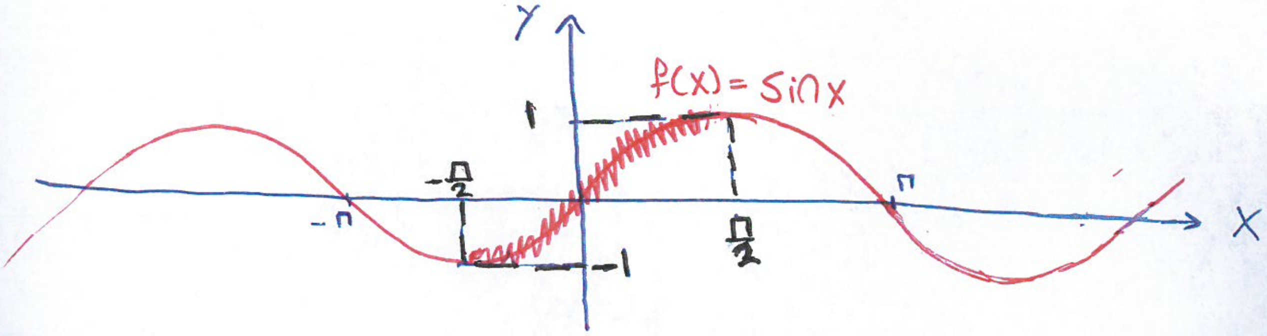
Svar: $D_{f^{-1}} = (0, e)$.

5.6] Cyklometriska funktioner

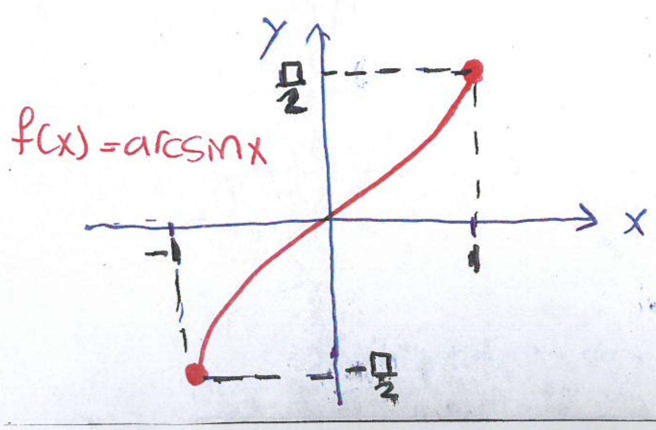
	Definitionsmängd	Värdemängd	Derivata	Udda/Jämn
arcsin(x)	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Udda
arccos(x)	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Varken udda eller jämn
arctan(x)	$x \in \mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{1+x^2}$	Udda
arccot(x)	$x \in \mathbb{R}$	$(0,\pi)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	Varken udda eller jämn

5.7] Arcsin x

- $\underline{y = \sin x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ har inversen $y = \arcsin x$.



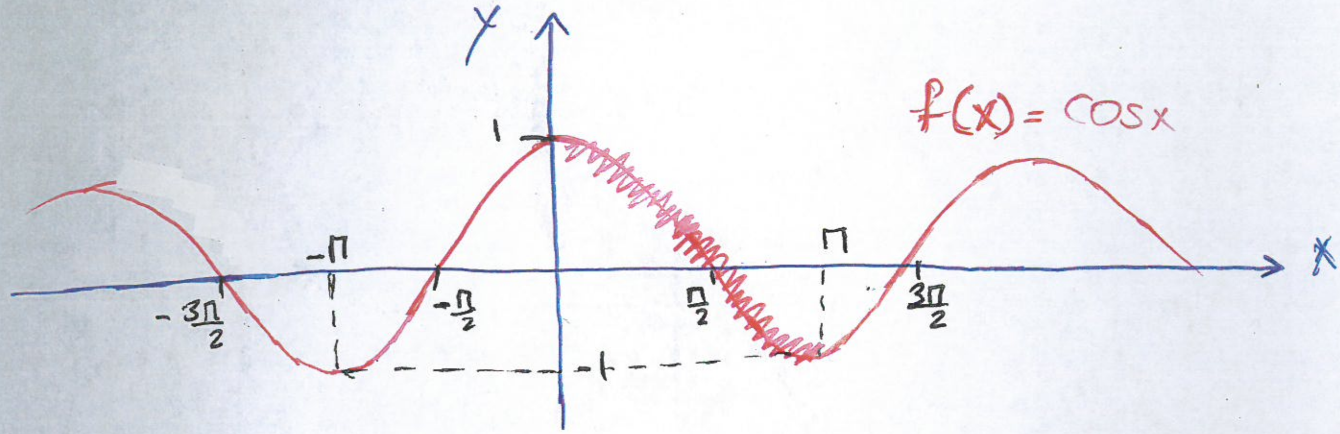
<u>Restriktionen</u> av sinusfunktionen till intervallet $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ är inverterbar och inversen är då arcsinus.



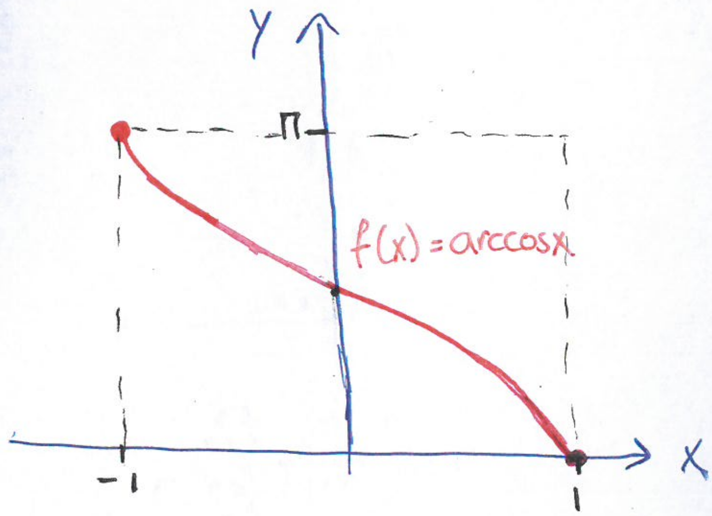
- $D_{\arcsin} = [-1,1]$
- $V_{\arcsin} = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
- $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5.8] Arccos x

- $y = \cos x$ $(0 \le x \le \pi)$ har inversen $y = \arccos x$.



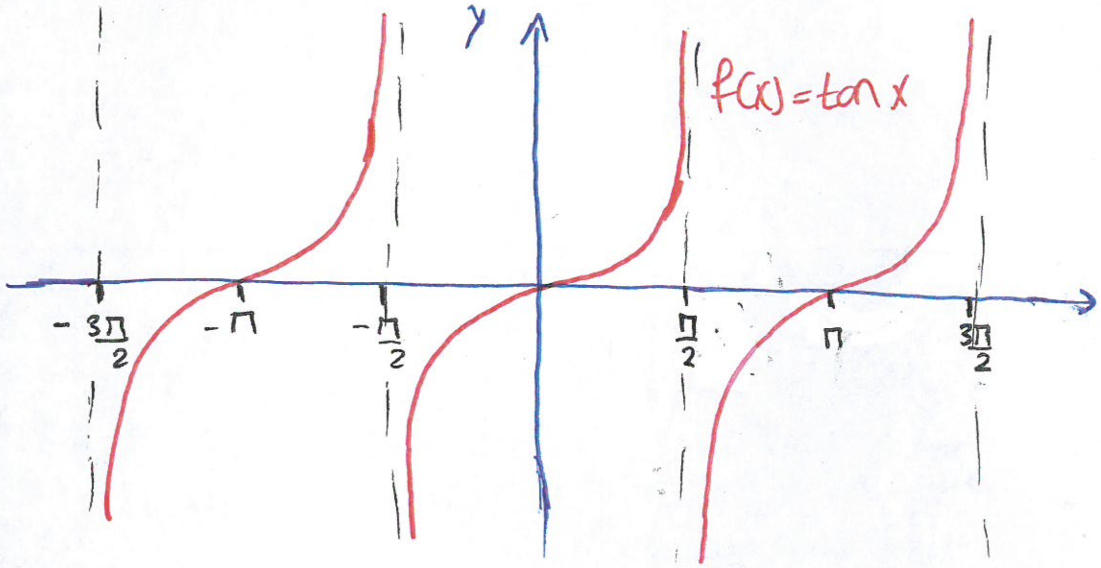
Restriktionen av cosinusfunktionen till intervallet $[0, \pi]$ är inverterbar och inversen är då arccos x.



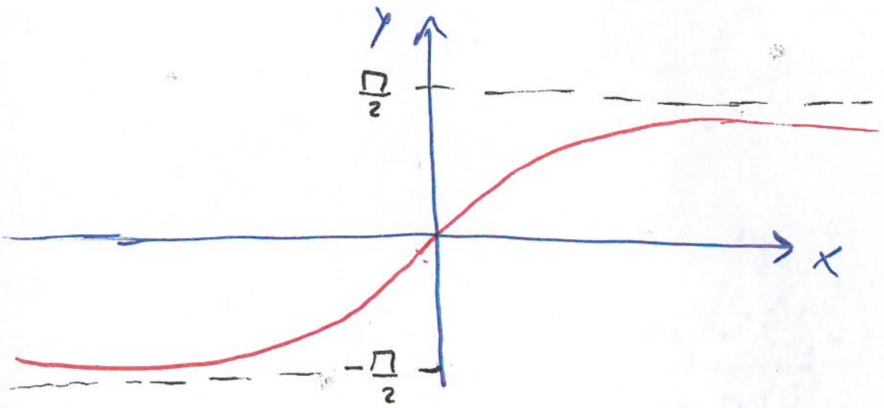
- $D_{\arccos x} = [-1, 1]$
- $V_{\arccos x} = [0, \pi]$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

5.9 Arctan x

• $y = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ har inversen $y = \arctan x$.



Restriktionen av arctan funktionen till intervallet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ är inverterbar och har inversen arctan x.



- $D_{\arctan x} = (-\infty, \infty)$
- $V_{\arctan} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $\frac{d}{dx} \arctan = \frac{1}{1+x^2}$

5.10] Räkning på tavlan

Ex] Bestäm inversen till

$$f(x) = 1 + 5\arcsin(2x+4)$$

samt D_f, $D_{f^{-1}}$, V_f, $V_{f^{-1}}$.

Lös] vi löser detta m.h.a:

$$x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

- $x = f(y) \Leftrightarrow x = 1 + 5\arcsin(2y+4) \Leftrightarrow$

- $x - 1 = 5\arcsin(2y+4) \Leftrightarrow \frac{x-1}{5} = \arcsin(2y+4) \Leftrightarrow$

$\sin\left(\frac{x-1}{5}\right) = 2y + 4 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x-1}{5}\right) - 4 = 2y \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{x-1}{5}\right) - 4\right] = y$

- $y = f^{-1}(x)$ ger $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{x-1}{5}\right) - 4\right]$

- – Vi har att $D_f = V_{f^{-1}}$ och $V_f = D_{f^{-1}}$.

• Vi har: $D_{\arcsin x} = [-1, 1]$, därför får vi:

$-1 \leq 2x + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 2x \leq -3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$

$D_f = V_{f^{-1}} = \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

• Vi har att $V_{\arcsin x} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, därför:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(2x+4) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\arcsin(2x+4) \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$1+\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \leq 1+5\arcsin(2x+4) \leq 1+\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$1-\frac{5\pi}{2} \leq \underbrace{1+5\arcsin(2x+4)}_{f(x)} \leq 1+\frac{5\pi}{2}$$

$$V_f = D_{f^{-1}} = \left[1-\frac{5\pi}{2}, 1+\frac{5\pi}{2}\right]$$

Tentamen 2012-03-17

1] Låt
$$f(x) = \sqrt{1+\tan x}$$
vara definierad för $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

a) Ange värdemängden till f.

b) Bestäm inversen till f och ange inversens definitionsmängd.

Lös] a) Vi undersöker ändpunkterna. Då D_f är ett halvöppet intervall så är V_f även ett halvöppet intervall.

Då vi har ett stängd intervall på 0, så kan vi beräkna $f(0)$ bara.

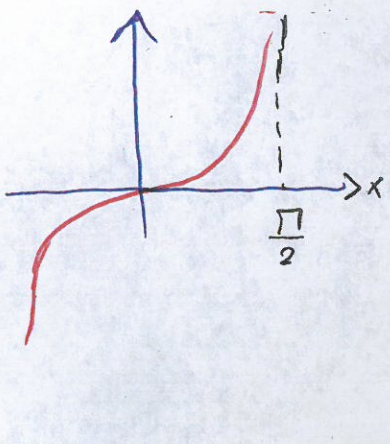
$$f(0) = \sqrt{1+\underbrace{\tan 0}_{=0}} = \sqrt{1} = 1$$

Dock måste vi undersöka när $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sqrt{1+\tan x} =$$

{ Tillämpa $\lim_{x\to a} f(g(x))$: $f(\lim_{x\to a} g(x))$ om f är kontinuerlig.

$$\sqrt{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1+\tan x)} =$$



$$\sqrt{1+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x} = \infty$$

$$V_f = [1, \infty)$$

20

b). $f(x)$ har en invers omm den är injektiv. Vi undersöker om $f(x)$ är injektiv genom att undersöka derivatan. Detta då strängt monotona funktioner är injektiva.

$$f(x) = \sqrt{1+\tan x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

Vi har att $f'(x) > 0$, vilket ger att $f(x)$ är strängt växande och därmed injektiv.

- Inversen får vi nu genom att tillämpa

$$x = f(y) \iff y = f^{-1}(x)$$

$$x = f(y) \iff x = \sqrt{1+\tan y} \implies x^2 = 1 + \tan y$$

$$\iff x^2 - 1 = \tan y \iff \arctan(x^2-1) = y$$

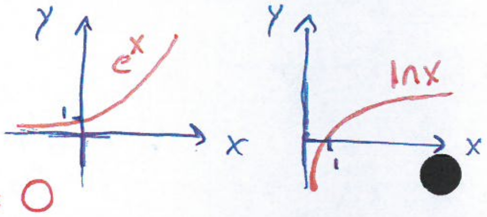
Då $y = f^{-1}(x)$ får vi:

$$f^{-1}(x) = \arctan(x^2-1).$$

5.11] Gränsvärden

"In a struggle between a power and an exponential, the exponential always wins."

"In a struggle between a power and a logarithm, the power wins".



- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{\underbrace{e^x}_{\text{"vinner"}}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\underbrace{x^a}_{\text{"vinner"}}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a \underbrace{e^x}_{\text{"vinner"}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x^a}_{\text{"vinner"}} \ln x = 0$

5.12] Räkning på tavlan

3.4:1]

Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x}$$

Lös] $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 \overset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}}}} = 0$

Då e^x dominerar kan resultatet av x^3 förkastas, vi tar då endast hänsyn till $\frac{1}{e^x}$ termen.

3.2:29] Lös för alla x

$$\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \frac{1}{2}$$

Lös] $\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \frac{1}{2}$ {utnyttja $y\log(x) = \log(x^y)$ $(x>0)$.

$\iff \log_4(x+4) - \log_4((x+1)^2) = \frac{1}{2} \iff$

{utnyttja $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$} $\iff \log_4\left(\frac{x+4}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{2} \iff$

$\frac{x+4}{(x+1)^2} = 4^{\frac{1}{2}} \iff \frac{x+4}{(x+1)^2} = 2 \iff$

$(x+4) = 2(x+1)^2 \iff (x+4) = 2(x^2+2x+1) \iff$

$x+4 = 2x^2+4x+2 \iff 2x^2+3x-2 = 0 \iff$

{pq formel här men kan även använda kvadratkomplettering} $\iff x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \iff$

$-\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1} = x \iff -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} = x$

Detta ger $x = \frac{1}{2}$ $\boxed{x_2 = -2, \text{ falsk rot}}$

OBS ▲ $x_2 = -2$ är en falsk rot då tredje logaritmlagen $y\log(x) = \log(x^y)$ gäller endast när $x > 0$, därav är $x_2 = -2$ en falsk rot.

Svar: $x = \frac{1}{2}$

Första logaritmlagen: $\log(x) + \log(y) = \log(x \cdot y)$

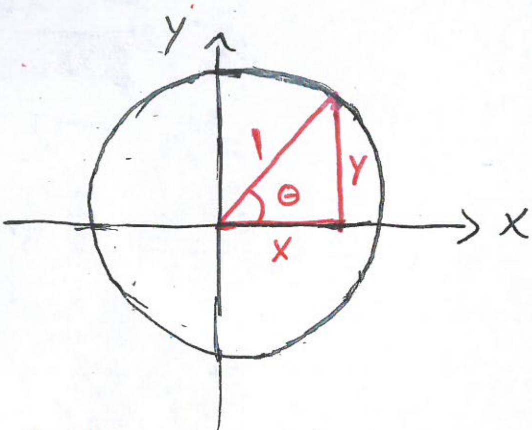
Andra logaritmlagen: $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$

Tredje logaritmlagen: $y\log(x) = \log(x^y)$

23

3.5:27] Lös $\sin(\cos^{-1}(x))$ ⊛ i x-termer.

Lös] vi utnyttjar definitionerna för $\sin x$ resp $\cos x$. Detta gör vi m.h.a enhetscirkeln.



Radien i enhetscirkeln är 1.

$$\cos\theta = \frac{\text{Närliggande}}{\text{hypotenusa}} = \frac{x}{1}$$

$$\cos\theta = x$$

$$\theta = \cos^{-1}(x)$$

Om vi nu substituerar in θ istället för $\cos^{-1}(x)$ i ⊛:

$$\sin(\cos^{-1}(x)) \qquad \sin(\theta)$$

$\sin\theta$ i sin tur ges utav definitionen:

$$\sin\theta = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusa}} = \frac{y}{1}$$

Vi kan erhålla motstående sida (y) genom Pythagoras sats:

$$x^2 + y^2 = 1^2 \Leftrightarrow 1^2 - x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Vi jobbar dock med positiva längder så $y = \sqrt{1-x^2}$ kommer endast med.

$$\sin\theta = \frac{y}{1} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \Leftrightarrow$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$$

Svar: $\sin(\cos^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$