Övning 8

Jowan@kth.se

22/09/2017

8.1] Linjär approximation

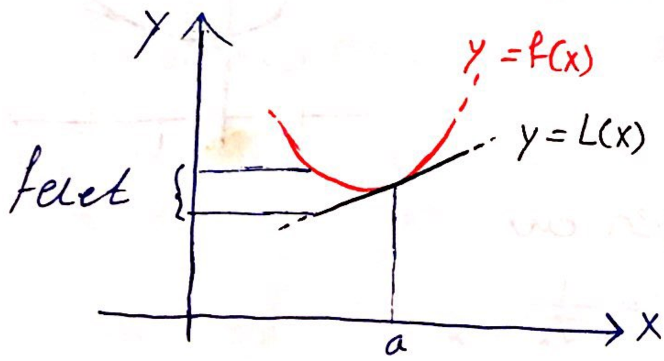
Linjärisering av f i punkten $x=a$,

- $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

Approximerar f med felet

- $f(x) = L(x) + \frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2$

Där c ligger mellan a och x.



8.2] Räkning på tavlan

4.7.4] Finn linjäriseringen av

$$y=\sqrt{3+x^2}$$

i punkten $x=1$.

Definierar $f(x)$ som: $f(x)=\sqrt{3+x^2}$

Lös] Linjäriseringen har ekvationen

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Där $a=1$ i vårt fall, Alltså:

$$L(x)=f(1)+f'(1)(x-a) \iff$$

$$L(x)=2+\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\begin{cases} f(1)=\sqrt{3+1^2}=\sqrt{4}=2 \\ f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}} \\ f'(1)=\frac{2}{\sqrt{3+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Svar: $L(x)=2+\frac{1}{2}(x-1)$

4.7.6] Finn linjäriseringen av

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

i punkten $x=4$.

Lös] Definierar $f(x)$ som $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

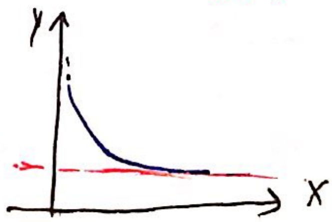
Linjäriseringen har ekvationen:

$$L(x)=f(4)+f'(4)(x-4) \iff$$

$$L(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-4)$$

$$\begin{cases} f(4)=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2} \\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Svar: $L(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-4)$



Använd funktionen $y=\sqrt{13+x}$ för att approximativt bestämma $y=\sqrt{16,2}$.

Lös] Definierar $f(x)$ som $f(x)=\sqrt{13+x}$.
vi betraktar funktionen vid punkten $x=3$, då vi vet f:s exakt värde där.

$a=3$

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$L(x)=f(3)+f'(3)(x-a)$$

$$L(x)=4+\frac{1}{8}(x-3)$$

$$\begin{cases} f(3)=\sqrt{13+3}=\sqrt{16}=4 \\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{13+x}} \\ f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{13+3}}=\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Linjärisering av $f(x)$ vid $x=3$ blir då:

$L(x)=4+\frac{1}{8}(x-3)$. (*)

- För att nu bestämma approximativt $\sqrt{16,2}$ stoppar vi in detta i (*), där $x=3,2$.

$\sqrt{16,2}=\sqrt{13+x} \Leftrightarrow x=3,2$

$$\therefore L(3,2)=4+\frac{1}{8}(3,2-3)$$

$$L(3,2)=4+\frac{1}{8}(0,2)$$

$$L(3,2)=4+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$L(3,2)=4+\frac{1}{40}=\frac{161}{40}$$

Svar: $\sqrt{16,2}\approx\frac{161}{40}$

8.3] Taylors formel

Taylorpolynomet till den n gånger deriverbara funktionen f,

- $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n$

Approximerar f med felet

- $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$

Där c ligger mellan a och x. Uttrycket

- $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$

kallas för Lagranges restterm.

Fakultet: för ett heltal större än noll är fakulteten lika med produkten av alla heltal från 1 upp till och med talet själv.

8.4] Maclaurins formel

Maclaurins formel kring punkten $a=0$

- $P_n(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}(x-0)^n$

$\Leftrightarrow$ • $P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}x^{(n)}$

Approximerar f med felet:

$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n} \cdot x^{n+1}$

Där c ligger mellan a och x.

8.5] Viktiga Maclaurinutvecklingar

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R$

- $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R$

- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R$

- $(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1!}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-(n-1))}{n!}x^n + R$

8.6] Sammanfattning

- $f(x) = P_n(x) + R(x)$

1) $P_n(x)$ kallas Taylorpolynomet av grad n kring punkten $x=a$ för f

- $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n$

2) $R(x)$ kallas den motsvarande resttermen (synliga feltermen).

- $R(x) = f(x) - P_n(x)$

Om vi ska approximera $f(x) \approx P_n(x)$ blir $R(x)$ felet vid approximation.

8.6] Räkning på tavlan

9.8.2] Bestäm Taylorpolynomet till cosx av grad 3 kring punkten $x = \frac{\pi}{4}$.

Lös] Vi definierar $f(x)$ som:

$$f(x) = \cos x$$

Taylors formel säger att:

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)$$

där $a = \frac{\pi}{4}$. Alltså:

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!} f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \quad (*)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ f'(x) = -\sin x, & f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f''(x) = -\cos x, & f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'''(x) = \sin x, & f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

Vi sätter in detta i $(*)$

$$P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

Svar: $P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$

Scanned by CamScanner

A] Bestäm maclaurinpolynomet av ordning 2, för funktionen

$$y = \sqrt{1+x}$$

Lös] A] Definierar $f(x)$ som $f(x) = \sqrt{1+x}$ vid $a=0$

Maclaurinpolynomet av ordning 2 blir då:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = \sqrt{1+0} = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(a=0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \\ f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}, \quad f''(a=0) = \frac{-1}{4(1+0)} = -\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4.2} \Leftrightarrow P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

B] Beräkna $\sqrt{1{,}2}$ approximativt m.h.a Taylorpolynom

Lös] B] Då: $\sqrt{1+x} = \sqrt{1{,}2} \Longleftrightarrow \underline{x = 0{,}2}$

$$P_2(0{,}2) = 1 + \frac{0{,}2}{2} - \frac{\overbrace{0{,}2^2}^{=0{,}04}}{8} =$$

$$P_2(0{,}2) = 1 + 0{,}1 - \frac{0{,}04}{8}$$

$$P_2(0{,}2) = 1{,}095$$

Svar: $\sqrt{1{,}2} \approx 1{,}095$

c] uppskatta felet

Lös] c] vi uppskattar m.h.a absolutbeloppet av Lagrange resterm.

$$|R| = \left| \frac{f'''(c)}{\underbrace{3!}_{=6}} x^3 \right|$$

$$\begin{cases} f'''(x) = \dfrac{3}{8(1+x)^{5/2}}, \quad f'''(c) = \dfrac{3}{8(1+c)^{5/2}} \\ \text{där } c \in [0, 0{,}2] \end{cases}$$

$$|R| = \left| \frac{\frac{3}{8(1+c)^{5/2}}}{6} x^3 \right|$$

$$|R| = \left| \frac{3}{8 \cdot 6 (1+c)^{5/2}} x^3 \right|$$

$$|R| = \left| \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}} \right| \leq \frac{1 \cdot 0{,}2^3}{16(1+0)^{5/2}} = \frac{0{,}8}{16} = 0{,}0005$$

x = 0,2 lör att felet ska bli så stort som möjligt.

Vi väljer c=0 då vi vill felet ska bli så stort som möjligt.

Scanned by CamScanner

entamen 2013-10-26

4] Vi approximerar funktionen

$$f(x) = \ln(1+x)$$

med dess maclaurinpolynom av grad 2 i intervallet

$0 < x < \frac{1}{10}$

A] Vilket är det approximerade polynomet?

Lös] A] $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$

$$\begin{cases} f(x) = \ln(1+x), & f(a=0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x}, & f(a=0) = \frac{1}{1+0} = 1 \\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, & f(a=0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1 \end{cases}$$

$$P_2(x) = 0 + 1 \cdot x - \frac{1 \cdot x^2}{2} \Leftrightarrow P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

B] Är felet vid approximationen garanterat mindre än $5 \cdot 10^{-4}$?

$$|R| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right| = \begin{cases} f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(c) = \frac{2}{(1+c)^3} \\ \text{där } c \in [a, x] = [0, \frac{1}{10}] \end{cases}$$

Tar bort Abs då x är positiv

$$|R| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right| = \frac{\frac{2}{(1+c)^3}}{6} \cdot x^3 = \frac{2x^3}{6(1+c)^3} =$$

$$\frac{x^3}{3(1+c)^3} \quad \begin{bmatrix} c = 0 \\ x = \frac{1}{10} \end{bmatrix} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^3 \frac{1}{3(1+0)^3} =$$

$$\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3000} \approx 3{,}33 \cdot 10^{-4}$$

Ja. felet är mindre än $5 \cdot 10^{-4}$.

c] Vilken approximation av $\ln(1{,}05)$ får vi?

Lös] c] $\ln(1{,}05) = \ln(1+x) \Leftrightarrow x = 0{,}05$

$$P_2(0{,}05) = 0{,}05 - \frac{(0{,}05)^2}{2} = 0{,}05 - 0{,}00125 = 0{,}04875$$

Svar: $\ln(1{,}05) \approx 0{,}04875$

Tentamen 2017-06-09

5] Låt $P(x)$ vara andra ordningens taylorpolynom kring $x=0$ till funktionen

$$f(x) = e^x$$

Lös] a) Använd $P(x)$ för att ge ett närmevärde till $\sqrt{e}$.

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x) = e^x, & f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x, & f'(a=0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x, & f''(a=0) = e^0 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$P_2(x) = 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$e^x = \sqrt{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$P_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{2} \Leftrightarrow P_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1/4}{2} \Leftrightarrow$$

$$P_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$$

Svar: $\sqrt{e} \approx \frac{13}{8}$

Scanned by CamScanner

b] Avgör om felet i närmevärdet är större eller mindre än 0,02.

Lös] b] $|R| = \left|\frac{f'''(c)}{3!} x^3\right|$

$\left\{ f'''(x) = e^x, \quad f'''(c) = e^c \right.$
där $c \in [a, x] = [0, \frac{1}{2}]$

$|R| = \left|\frac{f'''(c)}{3!} x^3\right| = \frac{e^c}{6} x^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 1/2 \\ x = 1/2 \end{array} \right\} \le \frac{e^{1/2}}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

$\frac{\sqrt{e}}{6}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{e}}{48}$

då $\frac{\overset{1,8}{\sqrt{e}}}{48} > \frac{1}{48} > 0,02$ så är felet större än 0,02.

$\frac{\sqrt{e}}{48} \approx 0,034$

$\frac{1}{48} \approx 0,021$

Tentamen 2012-02-11

4] Låt $f(x) = e^x \cos x$

A) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 1 till f.

Lös] A $f(x) = e^x \cos x$ $\quad f(0) = e^0 \cos 0 = 1$

$f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$

$f'(0) = e^0(\cos 0 - \sin 0) = 1$

$P_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x \Leftrightarrow P_1(x) = 1 + 1x$

Svar: $P_1(x) = 1 + x$

B] visa att $|f(x) - 1 - x| < 3$ då $0 \leq x \leq 1$

vi vet att:

$f(x) = P(x) + R \Rightarrow$
$R = f(x) - P(x)$

vi ser att vi har fått
$|f(x) - 1 - x|$

vilket måste vara $|R|$, då $P(x) = 1 + x$, Alltså

$|R| = |f(x) - P(x)| \Leftrightarrow |R| = |f(x) - (1 + x)| \Leftrightarrow$

$|R| = |f(x) - 1 - x|$

Vi måste alltså beräkna $|R|$.

$$|R| = \left|\frac{f''(c)}{2!}x^2\right|$$

$$\begin{cases} f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) \\ f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) \\ f''(x) = e^x(-2\sin x) = -2e^x \sin x \\ f''(c) = -2e^c \sin c \end{cases}$$

$$|R| = \left|\frac{f''(c)}{2!}x^2\right| = \left|\frac{2e^c \sin c}{2}x^2\right| = \begin{Bmatrix} c=1 \\ x=1 \end{Bmatrix} =$$

$$e^1|\sin c| \cdot 1^2 = e^1 \underbrace{|\sin c|}_{\leq 1} < 3$$

Alltså har vi att $|f(x) - x - 1| < 3$.

$$|2 \cdot 3 \cdot (-4)| = |2| \cdot |3| \cdot |-4|$$

Tentamen 2012-12-10

5] Finn Maclaurinutvecklingarna av ordning sex till $f(x) = \cos(x^3)$ och $g(x) = e^{2x^2}$. Resttermen får ges på svag form. dvs så att bara felets storleksordning framgår.

(Svag form : Bryr sig inte om hur stort felet är.)

Lös] Vi börjar med $f(x) = \cos(x^3)$. Vi vet att:

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 \cdot B_1(t) \Leftrightarrow$ {$t = x^2$ ger}

$\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + x^{12} \cdot B(x)$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^4 \cdot C_1(t)$ {$t = 2x^2$}

$e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{4x^4}{2} + \frac{8x^6}{6} + x^8 \cdot C(x) =$

$1 + 2x^2 + 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 + x^8 \cdot C(x)$

$B_1(t)$, $C_1(t)$ begränsade funktioner i en omgivning till $t = 0$ och $B(x)$, $C(x)$ begränsade i en omgivning av $x = 0$.

- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$, Lagrange
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + B(x) \cdot (x-a)^2$, svag form
- $f(x) = B(x) \cdot (x-a)^2 \to 0$ då $x \to a$ eftersom $B(x)$ är en begränsad funktion kring $x = a$.
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + O(x^2)$ ordo form