Övning 11

Jowan@kth.se

05/10/2017

11.1] Generaliserade integraler

Antag att f är integrerbar på [a,b] för varje b>a.

- Integral över obegränsat intervall;

$$\bullet \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

Förutsatt att gränsvärdet existerar. På samma sätt definierar vi

$$\bullet \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$$

Antag att f är obegränsad i en omgivning av a och att f är integrerbar på [c,b] för varje a<c<b. Vi definierar;

$$\bullet \int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Förutsatt att gränsvärdet existerar.

Om gränsvärdet existerar ändligt, säger vi att integralen är konvergent. I annat fall säger vi att integralen är divergent.

Scanned by CamScanner

11.2] Standard generaliserade integraler

Låt $a \in \mathbb{R}$. Då gäller;

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$ är konvergent om och endast om $a > 1$.

  $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$ är konvergent om och endast om $a < 1$.

Två kännetecken på generaliserade integraler:

1) Integrationsintervallet är obegränsat eller/och Ex: $\int_3^\infty e^{-x} dx$

2) Integraden är obegränsad på integrationsintervallet. Ex: $\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{Integrand}} dx$

11.3] Räkning på tavlan

Tentamen 2010-12-25

7] A] Förklara i vilken mening

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

är en generaliserad integral och beräkna den.

Lös] A] substitution $u = x^4+1$ ger ej en enklare integral.

Däremot liknar integralen $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$

Då provar vi byta $t = x^2$.

$$\begin{cases} t = x^2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{dt}{2x} = dx \end{cases}$$

Vi beräknar primitiva till den substituerade integralen och substituera tillbaka sen för att beräkna den.

$$\int \frac{x}{\underbrace{x^4}_{t^2}+1}\underbrace{dx}_{\frac{dt}{2x}} = \int \frac{\cancel{x}}{t^2+1}\frac{dt}{2\cancel{x}} = \int \frac{1}{2(t^2+1)}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\arctan(t) + C$$ substituera tillbaka

$$= \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x}{x^4+1}\,dx =$$

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2}\arctan(x^2) \right]_0^R =$$

$$\lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2}\underbrace{\arctan(R^2)}_{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\arctan(0^2)}_{0} \right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$

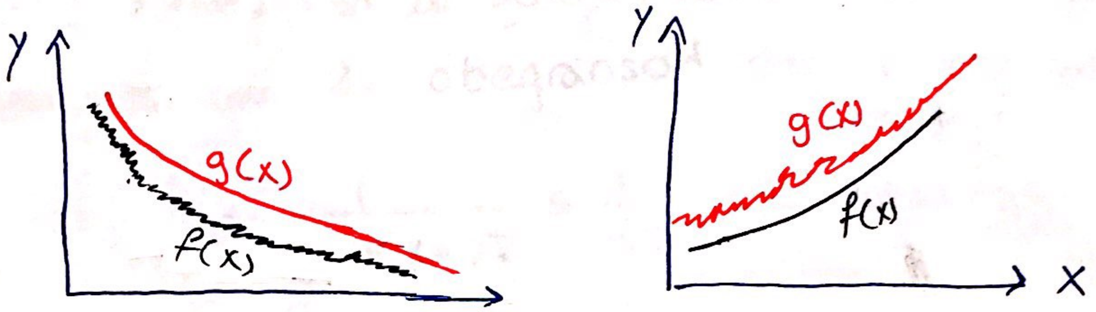
Integralen konvergerar mot $\frac{\pi}{4}$.

Viktig omskrivning! Byt ut ∞ mot R ty ∞ ej är ett tal.

11.4] Jämförelsesatsen

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ på $[a, \infty)$. Då gäller följande:

- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent
- $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ är divergent



11.5] kvotkriteriet

1. f och g är positiva på $[a, b]$
2. Integralerna $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ är generaliserade endast i b.
3. $0 < \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A < \infty$

Så är integralerna konvergenta samtidigt eller divergenta samtidigt.

11.6] Absolutkonvergenta integraler

Vi säger att integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ är absolutkonvergent om integralen

- $\int_a^b |f(x)|\,dx$

är konvergent.

11.7] Räkning på tavlan

Tentamen 2013-10-24

9] Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x\sin x+\sqrt{x}}$$

är konvergent eller divergent.

Lös] Integralen är generaliserad vid $x=0$ då integranden är obegränsad där. Vi har att

$$0 \le \frac{1}{x\sin x+\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{då} \quad 0<x<\pi$$

eftersom $x\sin x \ge 0$ på intervallet. Vi får:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_c^{\pi} =$$

$$\lim_{c\to 0^+} (2\sqrt{\pi} - \underbrace{2\sqrt{c}}_{=0}) = 2\sqrt{\pi}$$

Enligt Jämförelsesatsen följer det att

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x\sin x+\sqrt{x}}$$ är konvergent.

Tentamen 2017-01-09

9] A] Avgör om det finns något tal $R>0$

Sådant att:

$$\int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx > 100$$

Lös] A] För alla x gäller att

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

då $\sin x \leq 1$

$\Longleftrightarrow \sin^2 x \leq 1$

Då har vi:

hade kunnat beräkna m.h.a standard integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R =$$

$$\lim_{R\to\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{R}}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = 1$$

Enligt jämförelsesatsen gäller det då att

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \quad \text{är}$$

konvergent och att dess värde är högst 1.

Eftersom $\int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ är en växande funktion av R (integranden är positiv) så följer att det inte kan finnas något R som gör integralen större än 1.

Tentamen 2015-01-12

6] Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$$

är konvergent eller divergent. Om den är konvergent så beräkna den.

Lös] Eftersom

$$0 \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{för } x \geq 1$$

Så är $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

Beräknat m.h.a standard-integral, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}$ är konvergent om $a>1$.

Alltså är $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$ konvergent. Vi beräknar.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x^2+x} dx$$

Vi skriver om integranden m.h.a partialbråksuppdelning.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} \quad \text{Alltså;}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \iff \frac{1}{x^2+x} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

$$1 = A(x+1) + Bx \iff 1 = Ax + A + Bx$$

$$\begin{cases} 0 = x(A+B) \\ 0 = (A+B) \iff A = -B \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2+x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$\lim_{R\to\infty} \Big[\ln|x| - \ln|x+1| \Big]_1^R = \lim_{R\to\infty} \left[\ln\frac{|x|}{|x+1|} \right]_1^R,$$

$$\lim_{R\to\infty} \left(\ln\frac{(R)}{(R+1)} - \ln\frac{1}{(1+1)} \right) =$$

$$\lim_{R\to\infty} \left(\underbrace{\ln \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{R}}_{\to 0}}}_{=0} - \ln\frac{1}{2} \right) = -\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 2$$

Integralen är konvergent med värdet ln 2.

Tentamen 2014-10-24

5] Använd Maclaurinpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ för att approximativt beräkna integralen

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$$

Avgör sedan också om ditt approximativa värde är $\frac{1}{100}$ från integralens sanna värde.

Lös] Med hjälp av Taylors formel (standardutveckling) får vi att:

$$e^t = 1 + t + \frac{e^c}{2!}t^2 \quad \left\{\begin{matrix}\text{Substituera}\\ t = -x^2\end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix}\text{Där}\\ c \in [0, t]\end{matrix}\right\}$$

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{e^c}{2!}(-x^2)^2$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{e^c}{2!}x^4 \quad \{\text{Där } c \in [0, -x^2]\}$$

Detta betyder att vi har approximationen

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2$$

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^{1/2} (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} =$$

$$\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1/8}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} =$$

$$\frac{12 - 1}{24} = \frac{11}{24}$$

Felet i denna blir då:

$$|R| = \left|\frac{e^c}{2!}x^4\right|. \qquad c \in [0, -\underbrace{x^2}_{(\frac{1}{2})^2}]$$

$$c \in [0, -\frac{1}{4}]$$

vi väljer $c = 0$, därav

$$R = \frac{e^0}{2}x^4 = \frac{x^4}{2}$$

Felet i denna approximation är till beloppet högst:

$$\int_0^{1/2} \frac{x^4}{2}\,dx = \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^{1/2} = \left(\frac{(1/2)^5}{10} - \frac{(0)^5}{10}\right) =$$

$$\frac{1/32}{10} = \frac{1}{320} < \frac{1}{100}$$

Svar: 11/24. approximationen är inom den givna felmarginalen.

$$1000 \,|\, 320 \quad 0{,}003125$$

960

400

320

800

640

1600

1600

0

$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$

Tentamen 2011-12-15

6) Använd Taylors formel på lämpligt sätt för att bestämma ett närmevärde på integralen,

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx \quad *$$

med ett fel som är högst $\frac{1}{4}$.

Vi skriver om e^x mha Taylor utv. av grad 2 kring $x=0$.

$$e^x = \{\text{standard. utv.}\} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^c \cdot x^3}{3!}, \quad 0 \le c \le 1$$

$$* = \int_0^1 \frac{\left(\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{e^c\cdot x^3}{3!}\right)-1\right)}{x}\,dx = \int_0^1 \left(1+\frac{x}{2}+\frac{e^c\cdot x^2}{6}\right)dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx}_{\text{"approx."}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{e^c\cdot x^2}{6}\,dx}_{\text{"felet"}}$$

Låt oss undersöka om felet $< \frac{1}{4}$.

$$\left|\int_0^1 \frac{e^c\cdot x^2}{6}\,dx\right| = \left|\left[\frac{e^c\cdot x^3}{18}\right]_0^1\right| =: \left|\frac{e^c\cdot 1^3}{18}\right| \le \frac{e}{18} < \frac{1}{4} \quad \text{Ja!}$$

Scanned by CamScanner

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx \approx \int_0^1 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \left[x+\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \left(1+\frac{1}{4}-(0+0)\right) =$$

$$= \frac{5}{4}$$

Svar: $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx \approx \frac{5}{4}$.