Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 2, 18 Jan 2017

Information

Idag: bokens kapitel 11.1-11.3

Skalärt = ickevektorvärt

Obs! hastighet (velocity) är vektor, fart (speed) är skalärt.

Vektorvärda funktioner

$\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, position i $\mathbb{R}^3$

Tidsaxeln och rummet är skiljda från varandra. Vektorvärd funktion avbildar tidsaxeln på rummet.

Exempel

$\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \{0, 1\}$, position

$\overline{v}(t) = \frac{d}{dt}\overline{r}(t)$, hastighet

$\frac{d}{dt}\overline{r}(t) = (\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt})$

$\frac{d\overline{r}(t)}{dt} = (-\sin t, \cos t, 1)$
$*$

Obs! $\overline{v}(t)$ = hastighet (eng: velocity) = rörelse + riktning = **vektor**

Farten = $v(t) = |\overline{v}(t)|$ = speed = "mängd" rörelse, **ett tal**

$\overline{a}(t) = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}(t)}{dt^2}$, acceleration, en vektor

Sats (sid. 627): Enkla regler

Vi har $\overline{u}, \overline{v}$, två vektorvärda funktioner

$(\overline{u} + \overline{v})' = \overline{u}' + \overline{v}'$, derivatan av summan är summan av derivatorna

Vanlig fn. λ: $(\lambda(t) \cdot \overline{u}(t))' = \lambda'\overline{u} + \lambda\overline{u}'$

$(\overline{u} \cdot \overline{v})' = \overline{u}' \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{v}'$, skalärprodukt

$(\overline{u} \times \overline{v})' = \overline{u}' \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{v}'$

$(\overline{u}(\lambda(t)))' = \lambda'\overline{u}'$

$|\overline{u}'| = \frac{\overline{u} \cdot \overline{u}'}{|\overline{u}|}$

Exempel: relation mellan hastighet och acceleration

Visa att farten hos en partikel i rörelse förblir konstant om och endast om accelerationen är ortogonal mot hastigheten.

$\overline{v}(t)$ = hastighet

$v(t) = |\overline{v}(t)| =$ farten

$(v(t))^2 = |\overline{v}(t)|^2$

Derivera båda leden, vi får

$2vv' = \frac{dv^2}{dt} = \frac{d|v|^2}{dt} = 2\overline{v} \cdot \overline{v}'$

Om farten är konstant är $v' = 0 \Rightarrow 0 = 2vv' = 2\overline{v} \cdot \overline{v}'$

$\Rightarrow \overline{v} \cdot \overline{v}' = 0$

Accelerationen $\overline{a}(t) = \overline{v}'$ så $\overline{v} \cdot \overline{a} = 0 \Rightarrow \overline{v}$ ortogonal $\overline{a}$

Läs sidan 628 exempel 7 samt avsnitt 11.2

Parametrisering av kurvor i rymden (11.3)

En kurva behöver inte ha en entydig parametrisering.

Vi jobbar med ”snälla” kurvor, dvs. de är deriverbara.

En kurva kan parametriseras på olika sätt (i $\mathbb{R}^3$)

Exempel (sid 637)

$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ z = 3x + 1 \end{cases}$ skärning mellan två plan (?) så beskriver en linje.

Lösning: sätt $y = t$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+4}{2} \\ y = t \\ z = \frac{3t}{2} + 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{r}(t) = (\frac{t+4}{2}, t, \frac{3}{2}t + 7)$, $0 \leq t \leq 2$

Ett till exempel

Bestäm (parametrisering av?) kurvan som går från $(0,0,0)$ till $(1,1,2)$ och ges av $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = y \end{cases}$

Lösning: sätt $x = y = t$

$(t, t, 2t^2)$, $0 \leq t \leq 1$ ($\overline{r} = (t, t, 2t^2)$?)

Exempel 3 (sid 638)

Olika parametriseringar av samma kurva. Viktigt om man sitter o räknar i grupp och kommer fram till olika svar! Dem kan vara ekvivalenta!

$\overline{r}(t) = (\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

Obs! relatera inte t till vinkeln! Det är bara en parametrisering!

Vi får en rörelse kring övre halvcirkeln av enhetscirkeln.

En annan parametrisering av samma kurva:

$\overline{r}_2(t) = ((t-1), \sqrt{2t-t^2})$, $0 \leq t \leq 2$

En tredje parametrisering:

$y = 1 - t^2 \Rightarrow \overline{r}_3(t) = (t\sqrt{2-t^2}, (1-t^2))$, $-1 \leq t \leq 1$

Båglängd

Kurvors längd i rymden.

$\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$

Längden $S = \int_a^b |\overline{r}(t)'|dt = \int_a^b |\overline{v}(t)|dt = \int_a^b v(t)dt$, $\overline{v}$ hastigheten hos $\overline{r}$

Kom ihåg:

$S(t) = \int_a^t V(\tau)d\tau$, dvs. längden då $\tau \in [a, t]$

$\frac{dS(t)}{dt} = V(t) \Rightarrow dS = v(t)dt$

$\Rightarrow$ längden $= \int_C dS = \int_a{}_b v(t)dt$

Om kurvan ges av $y = f(x)$ då är $\overline{r} = (x, f(x)) =$ eller om ni vill $\overline{r} = (t, f(t))$

$\overline{r}' = (1, f')$

$\Rightarrow dS = |\overline{r}'|dx = \sqrt{1^2 + (f'(x))^2}dx$

Kurva med polära koordinater

$\overline{r}(\theta) = g(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$

Vi får $dS = |\overline{r}'|d\theta? =? \sqrt{(g'\cos\theta - g\sin\theta)^2 + (g'\sin\theta + g\cos\theta)^2}d\theta$
$= (\text{trig-1:a}) = \sqrt{g^2 + (g')^2}d\theta$

Om morgondagens innehåll

Definition av funktion. Definitionsmängd och värdemängd. Liknelse med golfare som slår bollar i hål. ”Du kan aldrig skicka en boll till två olika hål”. Du kan inte få två olika värden för samma x.

12.1

$f : D \to V$