ROTATIONSYTOR

Rotationsyta är en yta som uppstår genom att en plan kurva roterar ett varv runt en given axel i det tredimensionella rummet.

Här betraktar vi rotationer runt z-axeln.

Fall 1. En kurva definierad för **positiva x** roterar kring z-axeln.

i) En yta som uppstår då kurvan i xz planet $z = f(x)$, $x \ge 0$ (eller kurvan $z = f(y)$, $y \ge 0$ i yz planet) **roterar kring z axeln** har ekvationen

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Rotationsytans nivåkurvor är **cirklar**.

I cylindriska koordinater $x = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

har en rotationsyta ekvationen

$$z = f(r)$$

dvs z beror endast av r och inte av φ.

ii) Omvänt, om en yta har ekvationen i cylindriska koordinater som ej beror av φ,

$z = f(r)$, [dvs $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ i rektangulära koordinater)]

då är ytans nivåkurvor cirklar (eftersom $z = konstant \Rightarrow r = konstant$) och därmed är ytan en rotationsyta.

Uppgift 1. Bestäm ekvationen och rita den rotationsyta som uppstår då nedanstående plankurva roterar kring z-axeln. Kurvorna i a), b) ligger i xz-planet , dvs i planet y=0; medan kurvan i c) ligger i yz-planet, dvs i planet x=0 .

a) då $z = 1 + e^x$, $x \ge 0$ (y=0 för punkter i xz-planet)

b) $z = 3 - x$, $x \ge 0$ (y=0)

c) $z = -1 + 2y^2$, $y \ge 0$ (x=0 för punkter i yz-planet)

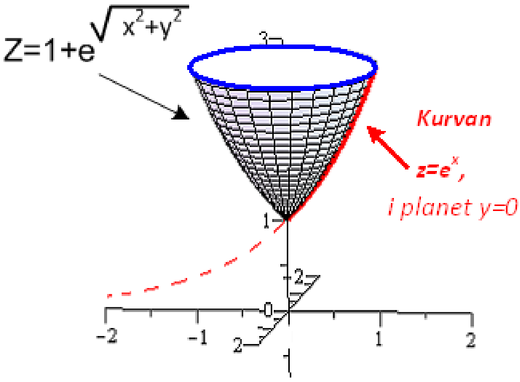
Lösning:

a) Vi ersätter x med $\sqrt{x^2+y^2}$

i ekvationen $z=1+e^x$

och får rotationsytans ekvation

$z=1+e^{\sqrt{x^2+y^2}}$



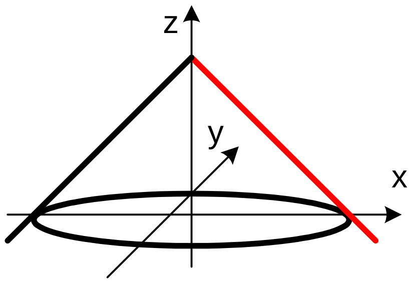
b) Vi ersätter x med $\sqrt{x^2+y^2}$

i ekvationen $z=3-x$

och får rotationsytans ekvation

$z=3-\sqrt{x^2+y^2}$

(En kon med spetsen i punkten P (0,0,3).)



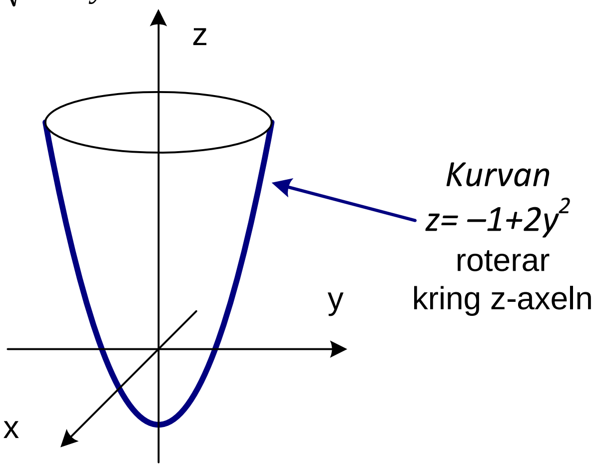
c) Den här gången ersätter vi y med $\sqrt{x^2+y^2}$

i ekvationen $z=-1+2y^2$

och får $z=-1+2(\sqrt{x^2+y^2})^2$

Råtationsytans ekvation är alltså

$z=-1+2(x^2+y^2)$.



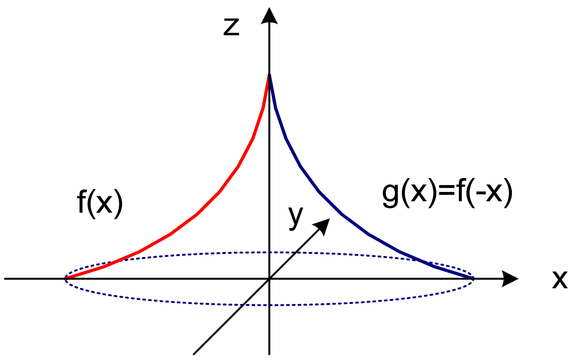
Fall 2. En kurva definierad för **negativa x** roterar kring z-axeln.

Låt $z = f(x)$ vara en kurva i xz planet som är definierad för **negativa** x, dvs för $x < 0$, som roterar kring z-axeln och bildar en rotationsyta. (Anmärkning. Vi kan inte i det här fallet direkt ersätta negativt x-värde med positivt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

På grund av symmetri, **samma rotationsyta** uppstår om kurvan $g(x) = f(-x)$, $x > 0$ roterar kring z-axeln.

Därför har rotationsytan följande ekvation

$$z = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(-\sqrt{x^2 + y^2})$$



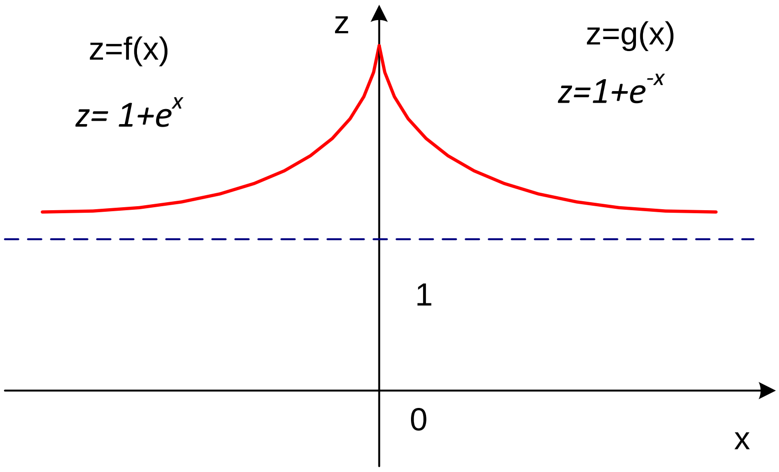
Uppgift 2. Bestäm ekvationen och rita den yta som uppstår då kurvan, (som ligger i xz-planet **)**

$z = 1 + e^x$, $x \le 0$

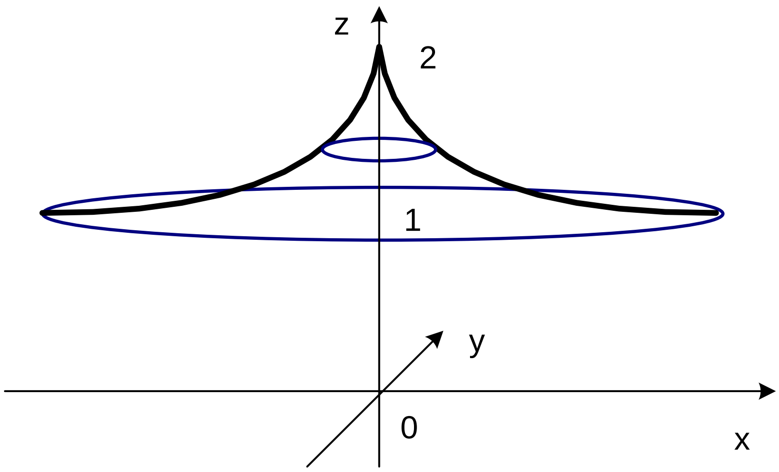
roterar kring z-axeln.

Lösning: Samma rotationsyta uppstår om den symetriska funktionen

$g(x) = f(-x) = 1 + e^{-x}$, $x \ge 0$ roterar kring z-axeln.



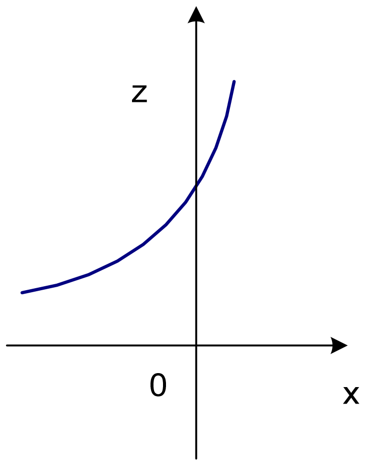
Därför har ytan följande ekvation $1+e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$



Svar:

$$z = 1 + e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Fall 3. En kurvan definierad för både **negativa och positiva x** roterar kring z-axeln.

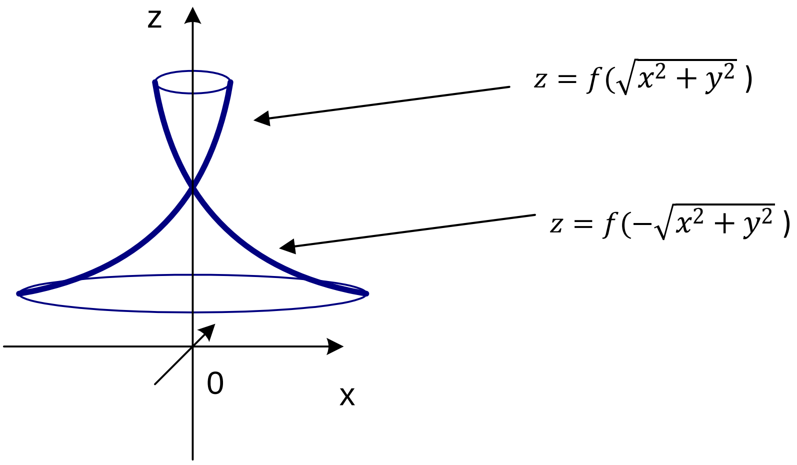


Låt $z = f(x)$ vara en kurva i xz-planet som är definierad för både negativa och positiva x-värden.

Om kurvan **inte är symmetrisk** kring z-axeln [dvs $f(-x) \neq f(x)$} då uppstår **två** funktionsytor vid kurvans rotation:

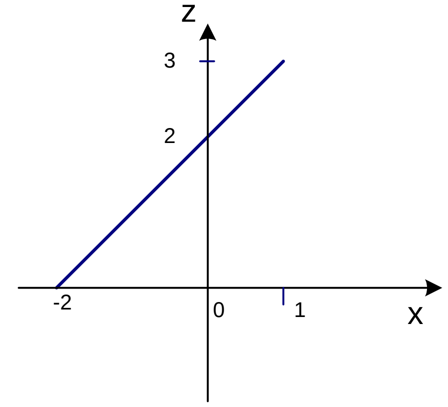
$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ vid rotationen av $z = f(x), x \geq 0$,

$z = f(-\sqrt{x^2 + y^2})$ vid rotationen av $z = f(x), x < 0$



Uppgift 3. Bestäm ekvationerna och rita de rotationsytor som uppstår då nedanstående kurva (som ligger i xz-planet, y=0) roterar kring z-axeln :

$z = 2 + x\,, \quad -2 \le x \le 1$ (y=0 i xz-planet)



Lösning:

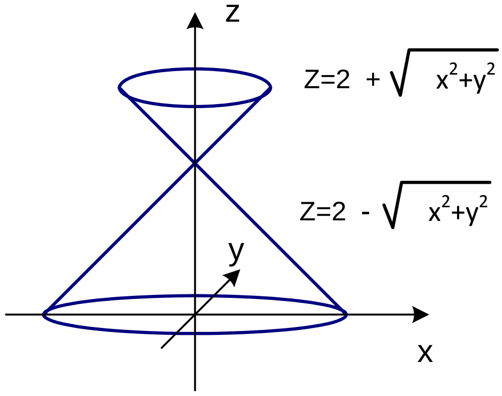
Rotationen av $z = 2 + x\,,\ 0 \le x \le 1$

ger ekvationen

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}) = 2 + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}) = 2 + \sqrt{x^2+y^2}$$

där $0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1$



Rotationen av den delen av kurvan som svarar mot negativa x ger ytan

(vi ersätter x med $-\ r$ dvs med $-\sqrt{x^2+y^2}$)

$z = f(-\sqrt{x^2+y^2}) = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ där

$-2 \le -\sqrt{x^2+y^2} \le 0$ (eller $0 \le x^2 + y^2 \le 4$

===

Uppgift 4. Rita (skissera) följande ytor:

a) $z = 2 + \sqrt{x^2+y^2}$ b) $z = e^{2(\sqrt{x^2+y^2})}$ c) $z = x^2 + y^2$

Lösning:

Alla tre funktioner är av typ $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$) och är därmed rotationsytor. Enklast sätt att skissera rotationsytor är att bestämma skärningskurvan mellan ytan och en av koordinatplan; xz (eller yz) genom att substituera y=0 (eller x=0).

a) $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$

Skärningspunkter mellan ytan och xz-planet:

$z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ och y=0 ger $z = 2 + \sqrt{x^2} \Rightarrow z = 2 + |x|$

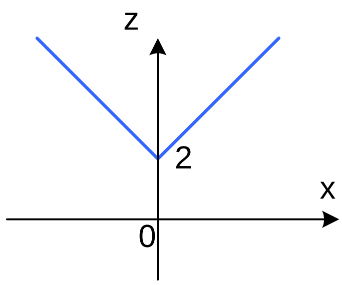
Ytan uppstår genom att låta kurvan $z = 2 + |x|$ rotera kring z-axeln i 3D-rummet.

Alternativt, på grund av symmetrin, kan vi uppfatta

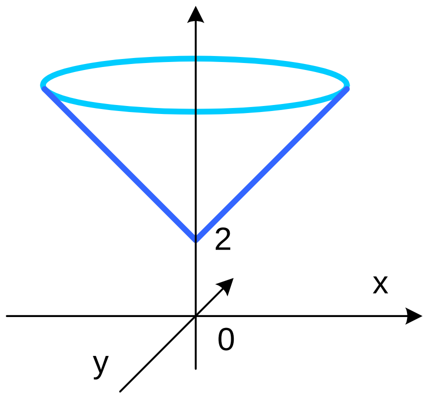
att ytan uppstår genom att kurvan

$z = 2 + x, \quad x \geq 0$

roterar kring z axeln.



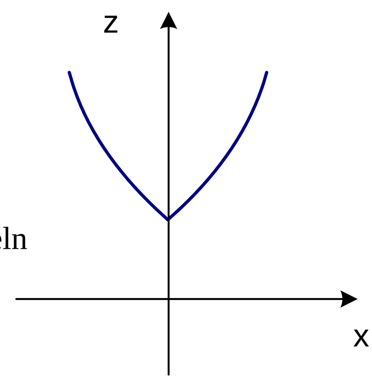
Vi ritar ytan som en kon med spetsen i punkten P(0,0,2)

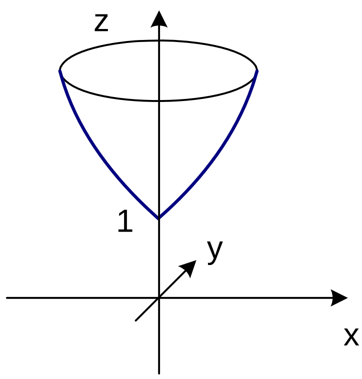


b) $z = e^{2(\sqrt{x^2+y^2})}$

$y = 0 \Rightarrow z = e^{2(\sqrt{x^2})} \Rightarrow z = e^{2|x|}$

Ytan uppstår då plankurvan $z = e^{2|x|}$ roterar kring z-axeln





c) $z = x^2 + y^2$

Ytan uppstår då plankurvan

$z = x^2$

roterar kring z-axeln.