GRÄNSVÄRDEN FÖR FUNKTIONER AV FLERA VARIABLER

Definition 1. Avståndet $d(P,Q)$ mellan två punkter i R^n, $P(x_1,...,x_n)$ och $Q(y_1,...,y_n)$ definieras som

$$d(P,Q)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

Definition 2. Låt $f(x_1,...,x_n)$ vara en reell funktion av n-variabler med definitionsmängden *D*. Låt A vara ett reellt tal och $P_0(a_1,...,a_n)$ en punkt ligger i D eller i randen till D. Vi säger att funktionen $f(x_1,...,x_n)$ har **gränsvärdet** A, då $P(x_1,...,x_n)$ går mot $P_0(a_1,...,a_n)$ om följande gäller:

Till varje ε > 0 (oavsett hur litet är ε) finns det ett tal δ > 0 så att

$$\{P\in D,\quad d(P,P_0)<\delta \quad \text{och} \quad P\neq P_0\}\Rightarrow |f(P)-A|<\varepsilon$$

Vi skriver då $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ (eller $f(P)\to A$ då $P\to P_0$)

Anmärkning1: Vid beräkning av gränsvärdena då $P\to P_0$, för funktioner $f(x,y)$ av **två variabler** använder vi oftast **polära koordinater**

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ och därmed $x^2+y^2=r^2$, om $P_0=(0,0)$

Eller, om $P_0=(a,b)$, modifierade polära koordinater.

$x-a=r\cos\theta$, $y-b=r\sin\theta$; dvs $x=a+r\cos\theta$, $y=b+r\sin\theta$.

Då är $P\to P_0$, ekvivalent med *r* går mot 0^+.

Anmärkning2: Om vi närmar oss punkten P_0 längs två vägar väg1, väg2 och får olika resultat, då **existerar INTE** $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$.

Uppgift 1.

Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna de i förekommande fall.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\arctan(\sqrt{x^2+y^2})}{4\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{3\sin[(x-1)^2+(y-2)^2]}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^4-4x^2y^2}{3x^2+3y^2+xy}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{4x^2+4y^2}$ g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2-x^2}{2x^2+2y^2}$

Tips: Byta till polära koordinat

Lösning:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\arctan(\sqrt{x^2+y^2})}{4\sqrt{x^2+y^2}}$

Låt $f(x,y)=\dfrac{\arctan(\sqrt{x^2+y^2})}{4\sqrt{x^2+y^2}}$

Vi använder polära koordinater $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ och betraktar

$f(x,y)=\dfrac{\arctan(\sqrt{x^2+y^2})}{4\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\arctan(r)}{4r}$ då r går mot 0^+.

Notera att $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\arctan(r)}{4r}=[\dfrac{0}{0}, L'Hospital]=\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+r^2}}{4}=\dfrac{1}{4}$.

Eftersom $\dfrac{\arctan(r)}{4r}\to\dfrac{1}{4}$ **oberoende av** θ**,** då r går mot 0^+, får vi att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(\sqrt{x^2+y^2})}{4\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{4}$$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Låt $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Vi använder $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ och betraktar

$f(x,y)=\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{\ln(1+r^2)}{r^2}$ då r går mot 0^+.

Eftersom $\dfrac{\ln(1+r^2)}{r^2}\to 1$ **oberoende av** θ, då r går mot 0^+, får vi att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1.$$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Låt $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Metod 1. Vi använder polära koordinater $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ och undersöker

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$$

Om punkten $P(x,y)$ närmar sig (0,0) beror resultat ($\cos\theta$) av θ , med andra ord får vi olika resultat om vi använder olika vägar mot (0,0).

Därför **existerar INTE** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Metod 2. Vi närmar oss punkten (0,0) längs två vägar,

väg 1, y=x, x>0, x går mot 0^+ och väg 2 : y=2x, x>0, x går mot 0^+

Längs väg 1 får vi $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (konstant och därmed går mot $\frac{1}{\sqrt{2}}$ då x går mot 0.)

Längs väg 2 får vi $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $(\neq\frac{1}{\sqrt{2}})$

Om vi närmar oss punkten (0,0) längs vägarna väg1, väg2 får vi olika resultat; därför existerar INTE $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3\sin[(x-1)^2+(y-2)^2]}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

Vi använder variabelbyte

$x-1=r\cos\theta$, $y-2=r\sin\theta$ dvs $x=1+r\cos\theta$, $y=2+r\sin\theta$,

Notera att $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ och att

$(x,y)\to(1,2)$ är nu ekvivalent med $r\to0^+$.

Vi använder nya variabler och undersöker funktionen då $r\to0^+$.

$f(x,y)=\dfrac{3\sin[(x-1)^2+(y-2)^2]}{(x-1)^2+(y-2)^2}=\dfrac{3\sin[r^2]}{r^2}$ går mot 3 oberoende av θ, då $r\to 0^+$.

Därför $\lim\limits_{(x,y)->(1,2)}\dfrac{3\sin[(x-1)^2+(y-2)^2]}{(x-1)^2+(y-2)^2}=3$

e) $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)}\dfrac{5x^4-4x^2y^2}{3x^2+3y^2+xy}$

Om vi använder polära koordinater får vi

$$f(x,y)=\frac{5x^4-4x^2y^2}{3x^2+3y^2+xy}=\frac{5r^4\cos^4\theta-4r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{3r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta+r^2\cos\theta\sin\theta}$$

$$=r^2\cdot\frac{5\cos^4\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta}{3+\cos\theta\sin\theta}\quad (*)$$

Här har vi två faktorer:

Faktor 1: r^2 som går mot 0 (oberoende θ) av då r går mot 0 och

Faktor 2: $\dfrac{5\cos^4\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta}{3+\cos\theta\sin\theta}$ (**) som innehåller θ.

Om vi visar att (**) är begränsad får vi från (*) att funktionen går mot 0 då r går mot 0.

Vi har $\left|\dfrac{5\cos^4\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta}{3+\cos\theta\sin\theta}\right|\le\dfrac{9}{2}$, [Notera |A-B| ≤ |A|+|B| och at nämnaren N $N\ge 2\Rightarrow\dfrac{1}{N}\le\dfrac{1}{2}$] och därför, från (*), får vi

$|f(x,y)|\le r^2\cdot\dfrac{9}{2}$, som går mot 0 **oberoende av θ ,** då r går mot 0.

Därför $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)}\dfrac{5x^4-4x^2y^2}{3x^2+3y^2+x}=0$.

f) $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)}\dfrac{x^2y^3}{4x^2+4y^2}$

$f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{4x^2+4y^2}=$ (polära koordinater)

$\dfrac{r^5\cos^2\theta\sin^3\theta}{4r^2}=\dfrac{r^3}{4}\cos^2\theta\sin^3\theta\le\dfrac{r^3}{4}$ går mot 0 **oberoende av θ ,** då r går mot 0.

Därför $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{4x^2+4y^2}=0$

g) $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)} \dfrac{y^2-x^2}{2x^2+2y^2}$ **existerar inte** eftersom vi får olika gränsvärden längs två vägar:

väg1: y=x , x>0, x går mot 0^+ och väg 2 väg1: y=2x , x>0, x går mot 0^+ .

Längs väg 1 har vi $\lim\limits_{x->0,} \dfrac{x^2-x^2}{2x^2+2x^2}=0$

Längs väg 2 har vi $\lim\limits_{x->0,} \dfrac{4x^2-x^2}{2x^2+8x^2}=\dfrac{3}{10}$

Uppgift 2.

Avgör om följande funktioner kan utvidgas så att de blir kontinuerliga i hela R^2:

a) $f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ b) $f(x,y)=\dfrac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Lösning:

a) Funktionen $f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ är definierad om $x^2+y^2>0$ dvs i alla punkter (x,y) förutom i punkten (0,0).

Vi undersöker om gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ existerar genom att använda polära koordinater.

$f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=r^2\ln r^2=2r^2\ln r$ går mot 0 oberoende av θ, då $r\to 0^+$.

{ Anmärkning: $\lim\limits_{r->0}2r^2\ln r=\lim\limits_{r->0}2\dfrac{\ln r}{r^{-2}}=[\dfrac{-\infty}{\infty}$ L' Hospital]$=\lim\limits_{r->0}2\dfrac{1/r}{-2r^{-3}}=\lim\limits_{r->0}(-r^2)=0$ }

Alltså $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=0$

Därmed kan vi utvidga $f(x,y)$ till $F(x,y)$ genom att definiera

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{om} \quad (x,y)=(0,0) \\ f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{om} \quad (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

Då är $F(x,y)$ en kontinuerlig funktion i hela R^2.

Svar a) Ja **Svar b)** Nej (Tipps $\lim\limits_{(x,y)->(0,0)}\dfrac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ existerar inte)