Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 5, 25 Jan 2017

Repetition från F4

Vi började med derivator. Vi är i högre dimensioner, så derivata inte bara derivata utan man måste ”ange riktning”. Derivata definieras mha gränsvärde.

Notation för andraderivata:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} = D_{12}f = D_{xy}f = \partial_{yx}f$$

Information

Mer derivata

För de funktioner vi jobbar med gäller ofta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Sats: om alla derivator av ordning n är kontinuerliga, då är ordningen oviktig

Exempel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Exempel: spridning av värme i stabiliserat läge

Om $z = f(x, y)$ bestämmer temperatur, värme i punkten (x, y).

Tror han skriver

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Nånting om harmonisk funktion (harmonisk funktion om det gäller att summan av ”de rena” andraderivatorna [dvs dubbel derivata i samma variabel] = 0?)

Exempel

Visa att fn. a), b), c) är harmoniska

$$a) z = e^{kx}\cos(ky)$$

$$b) z = e^{kx}\sin(ky)$$

$$c) z = \log(x^2 + y^2)$$

Dvs. visa att

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

Derivata av c):

$$z_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + y^2)$$

Gör hemma:

Visa att derivatorna för en harmonisk funktion är harmoniska funktioner.

Visa att derivatan av en logaritmisk funktion är harmonisk.

Laplace-operatorn

Henrik skriver Δ

$$z = f(x,y) \quad \Delta z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$w = f(x,y,z) \quad \Delta z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{Harmonisk: } \Delta f = 0$$

Kedjeregeln

$$\text{1(2):} \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y)) = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)$$

$$y = y(t), \quad z = f(x,y), \quad \frac{dz}{dx} = z_x + ?\frac{dy}{dt}$$

$$x = x(t,s), y = y(t,s), z = f(x,y), \frac{\partial z}{\partial s} = z_x \frac{\partial x}{\partial s} + z_y \frac{\partial y}{\partial s}$$

Kan skrivas som

$$(z_s z_t) = (z_x z_y) \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix}, \text{ jacobianen, jacobimatrisen}$$

Viktigt att titta på exempel 7 sida 700

Viktigt att titta på exempel 10 sida 702

12.6 Linjär approximation

Lokalt ser snäll $f(x,y)$ ut som ett plan, linjär approximation L(x,y) ?

Titta på hemma

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beräkna andraderivatorna i origo.