Modul 1

Några viktiga topologiska begrepp

- Omgivning eller Öppen boll. $B_r(a) = \{x : |x-a| < r\}$.
- En punkt a sägs vara en inre punkt till en mängd M om a har en omgivning som ligger helt i M.
- En punkt a sägs vara en yttre punkt till en mängd M om a har en omgivning som ligger helt utanför M.
- En punkt a sägs vara en randpunkt till en mängd M om varje omgivning till a innehåller punkter som ligger i M och punkter som inte ligger i M.
- En mängd M sägs vara öppen om varje punkt $a \in M$ har en omgivning som ligger helt i M (alla punkter i M är då inre punkter).
- En mängd M sägs vara sluten om dess komplement är en öppen mängd (alla randpunkter tillhör då M).

Andragradskurvor

- Parabel, ex. $y = \frac{x^2}{4}$
- Ellips, ex. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
- Hyperbel, ex. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Polära koordinater

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, där $dxdy = r dr d\theta$

där $r = \sqrt{x^2+y^2}$ är avståndet till origo och θ är vinkeln med positiva x-axeln.

Cirkelns ekvation

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, där $r > 0$

en cirkel med centrum i punkten (a,b) och radie r.

Exempel cirkelns ekvation

$$(x-3)^2+(y+2)^2=16$$

är en cirkel med centrum i punkten $(3,-2)$ och radie $r=4$.

Skilj starkt på cirkel och cirkelskiva

$x^2+y^2=1$ cirkel

$x^2+y^2\leq 1$ sluten cirkelskiva (alla randpunkter ingår)

$x^2+y^2<1$ öppen cirkelskiva (inga randpunkter ingår)

Andragradsytor

- Paraboloid, ex. $z=x^2+y^2$
- Ellipsoid, ex. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$
- ? Cylinder, ex. $x^2+y^2=1$
- Hyperboloid, ex. $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{4}=1$

Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}, \text{ där } dxdydz=rdrd\theta dz$$

där $r=\sqrt{x^2+y^2}$ är avståndet till z-axeln och θ är vinkeln med positiva x-axeln i xy-planet.

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x=R\sin\phi\cos\theta \\ y=R\sin\phi\sin\theta \\ z=R\cos\phi \end{cases}, \text{ där } dxdydz=R^2\sin\phi\, dRd\phi d\theta$$

där $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ är avståndet till origo, θ är vinkeln med positiva x-axeln i xy-planet och ϕ är vinkeln med positiva z-axeln.

Sfärens ekvation

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, där $r>0$ (konstant).

- Anm.

Om man tänker sig sfären som skalet till en apelsin (dvs. ihålig) ges hela apelsinen av ekvationen för ett klot. Klotets ekvation är: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq r^2$

Exempel sfär

$x^2+y^2+z^2=2z \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2z=0$, kvadratkompletering ger $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1$

dvs. en sfär med centrum i $(0,0,1)$ och radie 1.

Funktioner från R till R^n

Vi betraktar funktioner $r: D \to R^n$ där $D \subset R$ är ett intervall.

Definition Att $\lim_{t\to a} r(t)=b$ betyder att för varje $\epsilon>0$ finns ett tal $\delta>0$ så att:

$|r(t)-b|<\epsilon$ för alla t sådana att $0<|t-a|<\delta$

Definition Att r är kontinuerlig i en punkt $a \in D$ betyder att:

$\lim_{t\to a} r(t)=r(a)$

Tolkningar av sådana funktioner

En kontinuerlig funktion r från ett intervall i R till R^n kan ses som en parametrisering av en kurva. Aspekter av detta:

Kinematik. En partikel rör sig längs kurvan och $r(t)$ anger partikelns position vid tidpunkten t. Frågeställningar: Vad har partikeln för hastighet och acceleration?

Geometri. Kurvan som geometriskt objekt. Frågeställningar: Vad har kurvan för tangent och normal i olika punkter? Hur lång är kurvan?

Parameterkurvor

- Partikelns position ges av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$
- Partikelns hastighet ges av $\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$
- Partikelns fart ges av $v(t) = \|\bar{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
- Partikelns acceleration ges av $a(t) = \bar{v}'(t) = \bar{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$

Derivata av en funktion från R till R^n

$r'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{r(a+h) - r(a)}{h}$, om detta gränsvärde existerar.

OBS derivatan är en vektor.

OBS man deriverar varje komponent för sig.

Om tolkningen är en partikel som rör sig är $r'(a)$ hastigheten i tidpunkten a och andraderivatan $r''(a)$ är accelerationen.

I detta fall skriver man ofta $v = r'$ och $a = r''$

OBS Både hastigheten och accelerationen är vektorer.

Längden av v, dvs $|v|$, kallar man farten och den är ett tal.

Deriveringsregler

Derivering är en linjär operation även för vektorvärda funktioner och dessutom gäller produktregeln och kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\circ\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)\circ\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\circ\mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$$

Längden av en kurva

Om $r(t)$, där $a \leq t \leq b$, är en parametrisering av en kurva, så ges längden L av kurvan av

$$L = \int_a^b |r'(t)|\,dt$$

Definition reellvärd funktion 1

En reellvärd funktion f av n variabler är en regel som ordnar ett entydigt bestämt reellt tal $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ till varje punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i någon mängd $D(f) \subset R^n$. Mängden $D(f)$ kallas definitionsmängd och mängden av alla funktionsvärden kallas värdemängd.

Konvention Om inget sägs angående definitionsmängden antar man alltid att den är den största mängd i R^n för vilken $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ är ett väldefinierat reellt tal.

Definition reellvärd funktion 2

Funktionsgrafen till en reellvärd funktion f av två variabler består av alla punkter i R^3 sådana att den tredje koordinaten är funktionsvärdet av de båda första. Dvs. alla (x, y, z) sådana att $z = f(x,y)$

På samma sätt definierar man funktionsgraf för en funktion av n variabler. Den blir då en n-dimensionell hyperyta i R^{n+1}.

Definition nivåkurva

En nivåkurva till en reellvärd funktion f av två variabler består av alla punkter (x,y) i definitionsmängden till f som uppfyller en ekvation $f(x,y) = c$ för något fixt tal c.

Observera

Samma kurva i R^2 kan beskrivas på flera olika sätt, som exempelvis nivåkurva, funktionskurva, parameterkurva, etc.

Definition gränsvärde

En reellvärd funktion f av n variabler sägs ha gränsvärdet L när x går mot a, skrivet:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$,

om det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$|f(x) - L| < \epsilon$ för alla x sådana att $0 < |x - a| < \delta$

(förutsatt att x tillhör definitionsmängden för f)

I ovanstående definition förutsätter vi att varje omskrivning av a innehåller punkter från definitionsmängden till f (skilida från a).

De vanliga räknereglerna för gränsvärden gäller

Om $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$ (och varje omgivning till a innehåller punkter som ligger i båda funktionernas definitionsmängder) så gäller att:

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = LM$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)/g(x)) = L/M \quad (\text{om } M \neq 0)$$

För sammansättning gäller: om $H(t)$ är kontinuerlig i $t=L$ så är $\lim_{x\to a} H(f(x)) = H(L)$.

Definition kontunitet

En reellvärd funktion f av n variabler är kontinuerlig i en punkt a om

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Om detta gäller för alla punkter i definitionsmängden sägs f vara en kontinuerlig funktion.

Om $n=2$ och punkten har 2 koordinater (a,b) betyder detta

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Faktum

Kontinuitet bevaras av de fyra räknesätten och sammansättning. Elementära uttryck är kontinuerliga överallt där de är definierade.

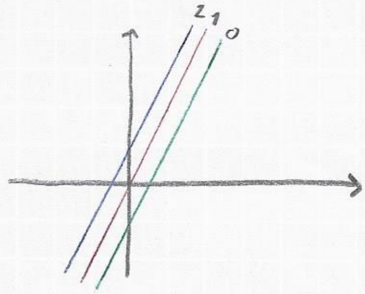
Nivåkurvor exempel

$$g(x,y) = -2x + y + 1$$

$-2x + y + 1 = 1$ *
$y = 2x$

$-2x + y + 1 = 2$ *
$y = 2x + 1$

$-2x + y + 1 = 0$ *
$y = 2x - 1$



Exempel parametrisering 1

Parametrisera $y = 3\sin(2x) - e^x + 37{,}5$

$y = f(x)$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 3\sin(2t) - e^t + 37{,}5 \end{cases}$$

Exempel parametrisering 2

Parametrisera $x^2 + y^2 = 16$ (cirkel)

$x^2 + y^2 = 16 = 4^2$ = radien

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Parametrisering cirkel

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t + a \\ y(t) = r\sin t + b \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Om cirkelns ekvation är: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Exempel parametrisering 3

Parametrisera $9x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 100$

$(3x)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 10^2$

$$\begin{cases} 3x = 10\cos t \\ y/4 = 10\sin t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{10}{3}\cos t \\ y(t) = 40\sin t \end{cases}$$

Modul 2

Partiella derivator

Om $f = f(x,y)$ är en reellvärd funktion av två variabler så definieras de partiella derivatorna av f i punkten (a,b) i definitionsmängden genom:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

under förutsättning att dessa gränsvärden existerar.

Om funktionen beror på fler än två variabler definieras de partiella derivatorna med avseende på alla dessa variabler på liknande sätt. Många olika beteckningar.

Dvs: man fryser alla variabler utom en och deriverar med avseende på den.

Exempel partiella derivator

Derivera $f(x,y) = \sin(3x-4y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(3x-4y)\,\frac{\partial}{\partial x}(3x-4y) = 3\cos(3x-4y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(3x-4y)\,\frac{\partial}{\partial y}(3x-4y) = -4\cos(3x-4y)$$

Tangentplan

Om f uppfyller vissa villkor så ges tangentplanet i punkten $(a, b, f(a,b))$ till funktionsytan $z = f(x,y)$ av ekvationen

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Exempel tangentplan

Ytan $z = f(x,y)$ ges av $f(x,y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$.

Sök tangentplanet till ytan i den punkt där $x = 1$ och $y = 2$

$$f(1,2) = \ln(1 + 1\cdot 2^2 - 4) = \ln(5-4) = \ln(1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2+xy^2-4} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2 - 4) = \frac{2x+y^2}{x^2+xy^2-4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{2\cdot 1 + 2^2}{1^2 + 1\cdot 2^2 - 4} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+xy^2-4} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2 - 4) = \frac{2xy}{x^2+xy^2-4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{2\cdot 1\cdot 2}{1^2 + 1\cdot 2^2 - 4} = \frac{4}{1} = 4$$

$$z = 0 + 6(x-1) + 4(y-2)$$

$$z = 6x - 6 + 4y - 8$$

$$6x + 4y - z = 14$$

Högre ordningens derivator

Om $f = f(x,y)$ är partiellt deriverbar så är de partiella derivatorna nya funktioner av x och y. Vi kan förstås undra om dessa funktioner är partiellt deriverbara. I så fall får vi andra ordningens partiella derivator till f. Det finns fyra möjligheter:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, derivera 2 gånger m.a.p x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, derivera först m.a.p x och sen m.a.p y

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, derivera först m.a.p y och sen m.a.p x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, derivera 2 gånger m.a.p y.

Sats partiella andraderivator

Om de blandade partiella andraderivatorna är kontinuerliga så är de lika, dvs.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Exempel partiella andraderivator

Bestäm andraderivatorna till funktionen $f(x,y) = \sin(3x-4y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\cos(3x-4y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4\cos(3x-4y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -9\sin(3x-4y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -12\sin(3x-4y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12\sin(3x-4y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -16\sin(3x-4y)$$

Linjär approximation

Linjarisering av f eller den linjära approximationen av f kring punkten (a,b) ges av

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

där (x,y) är punkten som ska approximeras.

(med förutsättning att vissa villkor för f är uppfyllda)

Exempel linjär approximation

Ytan $z = f(x,y)$ ges av $f(x,y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$ i punkten $(1,2)$.
Approximera $f(1{,}01;\, 1{,}97)$

Tangentplanets ekvation är:

$z = 6(x-1) + 4(y-2)$ (se tidigare exempel)

$L(x,y)$ uppfyller $L(x,y) \approx f(x,y)$, för (x,y) nära (a,b).

$L(x,y)$ kallas den linjära approximationen av f kring (a,b).

$L(x,y) = 6(x-1) + 4(y-2) \approx f(x,y)$ kring $(1,2)$.

$f(1{,}01;\, 1{,}97) \approx 6(1{,}01-1) + 4(1{,}97-2) =$

$= 6 \cdot 0{,}01 - 4 \cdot 0{,}03 = 0{,}06 - 0{,}12 \approx -0{,}06$

Differentierbarhet, R^2 till R

Definition Funktionen $f = f(x,y)$ sägs vara differentierbar i en punkt (a,b) i (det inre av) definitionsmängden om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Tolkning Tangentplan och linjär approximation funkar!

Faktum Om f är C^1, dvs. att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga, i en omgivning av (a,b), så är f också differentierbar i (a,b).

Differentierbarhet, i vanliga ord

Att f är differentierbar betyder att funktionsytan har ett tangentplan och att man kan linjarisera f med ett tillräckligt litet fel.

Ett enkelt villkor som garanterar att så är fallet är att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga (f är C^1).

Sats differentierbarhet

Om f är differentierbar i en punkt (a,b) så är f kontinuerlig i (a,b).

Sats differentierbarhet

Om f är C^1, vilket betyder att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga, i en omgivning av (a,b), så är f också differentierbar i (a,b).

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Sats Vi vill derivera sammansättningen $z = f(x(t), y(t))$. Då gäller, om f är C^1 (differentierbar) och derivatorna av x och y med avseende på t existerar:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Sats Vi vill derivera sammansättningen $z = (x(s,t), y(s,t))$. Då gäller, om f är differentierbar och de partiella derivatorna av x och y med avseende på s och t existerar:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

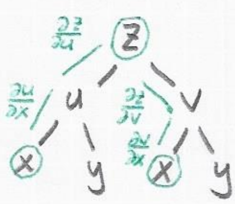
Exempel kedjeregeln

$z = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$ där $\begin{cases} u = 2x+y \\ v = 3x-y \end{cases}$, $\frac{d}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Sök $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{3}$$

Variabelträd:



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{1}{v} = \frac{1}{v+\frac{u^2}{v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u}{v^2+u^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{v+\frac{u^2}{v}} - \frac{3u}{v^2\cdot u^2} = \frac{2v}{v^2+u^2} - \frac{3u}{v^2+u^2} = \frac{2v-3u}{v^2+u^2}.$$

Differentierbarhet, allmän definition

Definition Funktionen f sägs vara differentierbar i en punkt a i (det inre av) definitionsmängden om det finns en linjär avbildning A sådan att

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{|(x-a)|} = 0$$

Faktum Om f är C^1, vilket betyder att de partiella derivatorna av f:s komponentfunktioner existerar och är kontinuerliga, i en omgivning av a, så är f också differentierbar i a.

Jacobimatris, funktionalmatris, total derivata

Om f är en funktion från R^n till R^m så kallas matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Jacobimatrisen, funktionalmatrisen eller totalderivatan till f.

Vanliga beteckningar är J_f, Df och $f'(x)$

Gradient för funktioner från R^n till R

Definition Med gradienten till en funktion f i en punkt (x,y) menar man vektorn:

$$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

En annan vanlig beteckning för denna vektor är ∇f.

Tre typer av gradienter

1) Fysikalisk tillväxt
2) Riktningsderivata
3) Normalvektor (tangentplan, tangentlinje, normallinje)

Gradient - Fysikalisk tillväxt

Sats ∇f visar den riktning i vilken f ökar som snabbast.

$-\nabla f$ visar den riktning i vilken f minskar som snabbast.

Den maximala öknings-/minskningstakten ges av $\|\nabla f\| = \|-\nabla f\|$ (beloppet av gradienten).

Exempel gradient - fysikalisk tillväxt

Bestäm gradienten till $z = 60 - 0{,}02x^2 - 0{,}01y^2$ i punkten $(50, 100, -90)$ och bestäm minskningstakten.

Vi söker $-\nabla f$ till z som beror av x och y, dvs. $z = f(x,y)$.

$-\nabla f(50, 100) = -(-2, -2) = (2, 2)$

Minskningstakten är: $\|-\nabla f\| = \|(2,2)\| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Gradient - Riktningsderivata

Definition Riktningsderivatan av f i riktning $\bar{v}$ är

$D_{\bar{v}} f = \bar{v} \cdot \nabla f$ om $\bar{v}$ är en enhetsvektor, dvs. $\|\bar{v}\| = 1$.

Annars: $D_{\bar{v}} f = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} \cdot \nabla f$

Exempel gradient – riktningsderivata

Bestäm riktningsderivatan till $f(x,y)=\sqrt{10-x^2-2y^2}$ i punkten $(1,2)$ i den riktning som ges av vektorn $(4,3)$.

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{-2x}{2\sqrt{10-x^2-2y^2}}, \frac{-4y}{2\sqrt{10-x^2-2y^2}}\right)$$

$$\nabla f(1,2)=(-1,-4)$$

$$D_{\bar{v}} f(1,2)=\frac{(4,3)}{\|(4,3)\|}(-1,-4)=\frac{1}{5}(4,3)\cdot(-1,-4)=\frac{1}{5}(-4-12)=-\frac{16}{5}$$

Gradient – Normalvektor

Sats (i R^3): Given en yta $F(x,y,z)=c$, där c är en godtycklig konstant.

∇f är då ortogonal mot ytan i varje punkt på ytan.

Exempel gradient – normalvektor

Bestäm ekvationen för tangentplanet till $2x^2+3y^2+z^2=9$ i punkten $(1,-1,2)$.

$$\nabla f=(4x, 6y, 2z)$$

$$\nabla f(1,-1,2)=(4,-6,4)$$

Tangentplanet ges dei av:

$$4(x-1)-6(y+1)+4(z-2)=0$$

$$4x-4-6y-6+4z-8=0$$

$$4x-6y+4z=18$$

$$2x-3y+2z=9$$

Riktningsderivata för funktioner från R^n till R

Definition Låt u vara en enhetsvektor. Riktningsderivatan i riktningen u av funktionen f i punkten a, betecknas $D_u f(a)$, definieras genom

$$D_{\bar{u}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

under förutsättning att detta gränsvärde existerar.

OBS Om f beror på två variabler och punkten $a=(a_1, a_2)$ och vektorn $u=(u_1, u_2)$, så betyder ovanstående att

$$D_{\bar{u}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

och $u=(1,0)$ ger $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $u=(0,1)$ ger $\frac{\partial f}{\partial y}$

Sats Om f är differentierbar i a och u är en enhetsvektor, så gäller att

$$D_{\bar{u}} f(a) = \bar{u} \cdot \nabla f(a)$$

Gradientens geometriska egenskaper

Anta att f är differentierbar i a. Då gäller:

1) Om $\nabla f(a) \neq 0$, så är $\nabla f(a)$ ortogonal mot den nivåkurva/yta till f som passerar genom punkten a.

2) I punkten a ökar f snabbast i den riktning som ges av $\nabla f(a)$. Funktionens maximala tillväxttakt är $|\nabla f(a)|$.

3) I punkten a minskar f snabbast i den riktning som ges av $-\nabla f(a)$. Funktionens maximala minskningstakt är $|\nabla f(a)|$.

4) I punkten a är förändringstakten av f noll i riktningar som är tangentiella till f:s nivåkurva/yta genom a.

Riktningsderivata samband

$$-\|\nabla f\| \leq D_{\bar{u}} f \leq \|\nabla f\|$$

Modul 3

Implicita funktionssatsen (1 ekvation)

Låt F vara en reellvärd funktion. Vi betraktar ekvationen

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (*)

i närheten av punkten $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Om följande gäller:

1) Punkten P satisiferar ekvationen (*)

2) F har kontinuerliga partiella derivator (dvs. F är en C^1-funktion) i en omgivning till P.

3) $\frac{\partial F}{\partial x_n}(P) \neq 0$

Då existerar x_n som en C^1-funktion av $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (i närheten av punkten P).

Implicita funktionssatsen (2 ekvationer)

Vi betraktar ekvationer

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (ekv 1)
$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (ekv 2)

i närheten av punkten $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Om följande gäller:

1) Punkten P satisfierar båda ekvationerna

2) F och G har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen (dvs. F och G är C^1-funktioner) i en omgivning till P.

3) Funktionaldeterminanten (Jacobis determinant) i punkten P

$$\frac{d(F,G)}{d(x_{n-1}, x_n)} \neq 0$$

Då existerar x_{n-1} och x_n som C^1-funktioner av $x_1, x_2, \dots, x_n$ (i närheten av punkten P).

Exempel implicit derivering

Derivera $\begin{cases} x = u^3 + v^3 \\ y = uv - v^2 \end{cases}$ implicit i punkten där $u=v=1$.

1) Derivera m.a.p x.

$$\begin{cases} 1 = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Låt $u=v=1$

$$\begin{cases} 1 = 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{6} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{6} \end{matrix}}$$

2) Derivera m.a.p y.

$$\begin{cases} 0 = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Låt $u=v=1$

$$0 = 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$1 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = 2 \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2} \end{matrix}} \end{cases}$$

Taylorpolynom i flera variabler

Om f är en reellvärd funktion av två variabler så ges taylorpolynomet av grad 2 till f kring (a,b) av

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)$$

Taylorpolynom i flera variabler

Taylorpolynomet av grad n har samma funktionsvärde och samma värde på derivatorna upp till ordning n som funktionen har i punkten.

Taylorpolynomet approximerar funktionen i närliggande punkter.

Resttermen är på formen $B(h,k)(\sqrt{h^2+k^2})^{n+1}$, där B är någon begränsad funktion.

Villkor för taylors formel är att funktionen är C^{k+1} i någon öppen mängd som innehåller linjestycket från a till x.

Exempel Taylorpolynom i flera variabler

Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ kring punkten (1,1).

$f(1,1) = -1$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$

$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 6$, $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(1,1) = 6$

$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = -6$, $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(1,1) = -6$

$\frac{\partial f^2}{\partial y^2} = 6$, $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(1,1) = 6$

$P_2(x) = -1 + 3x^2 - 6xy + 3y^2$

Extrempunkter och extremvärden i flera variabler

Definition Om $f(a) \geq f(x)$ för alla x i definitionsmängden sägs a vara en global maxpunkt för f. Värdet $f(a)$ sägs då vara funktionens största värde. Om olikheten bara gäller för alla x i någon omgivning till a så sägs a vara en lokal maxpunkt.

Definition Om $f(a) \leq f(x)$ för alla x i definitionsmängden sägs a vara en global minpunkt för f. Värdet $f(a)$ sägs då vara funktionens minsta värde. Om olikheten bara gäller för alla x i någon omgivning till a så sägs a vara en lokal minpunkt.

Samlingsnamnet för maxpunkter och minpunkter är extrempunkter. Motsvarande funktionsvärden kallas extremvärden.

OBS Detta är bara relevant för reellvärda funktioner.

Finns det alltid största och minsta värde?

Nej. Existensen av max och min kan aldrig förutsättas utan kräver alltid argument.

Ett fall är enkelt: Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd (dvs. en mängd som är sluten och begränsad) så vet man att största och minsta värde finns.

Annars kan vad som helst hända och man får argumentera olika i olika fall.

Kritiska och singulära punkter

Definition Om $\nabla f(a)=0$ så sägs a vara en kritisk punkt för f.

OBS Detta betyder att alla partiella derivator i punkten är noll.

Definition Om $\nabla f(a)$ saknas så sägs a vara en singulär punkt för f.

OBS Detta betyder att f inte är partiellt deriverbar (med avseende på alla variabler) i punkten.

Viktigt faktum: Extrempunkter

Extremvärden, om de finns, kan antas i:

1) Kritiska punkter
2) Singulära punkter
3) Randpunkter

För att visa med hjälp av derivata att en punkt a är en lokal extrempunkt kan man Taylorutveckla f till grad 2 kring a. Då ska 2 saker gälla:

1) $\nabla f(a)=0$. Dvs. alla första ordningens partiella derivator ska vara noll.

2) Andragradstermen ska dessutom vara positivt definit (för min) eller negativt definit (för max).

Klassificering av kritiska punkter

För klassificering av kritiska punkter, dvs. maximum, minimum och sadelpunkt, kan man göra på två sätt:

1) Taylorpolynom av ordning 2.

Förknippas med den kvadratiska formen $Q(h,k)$.

2) Andraderivatatestet

Förknippas med Hesse-matrisen $H(x,y)$.

Klassificering m.h.a. $Q(h,k)$ som ingår i $P_2(x,y)$

Vi skriver Taylorpolynomet kortfattat som:

$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}Q(h,k)$, där $h = x-a$ och $k = y-b$.

Det finns 3 fall: Om

1) $Q > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ är (a,b) ett lokalt minimum.

   Ex) $Q = 4h^2 + k^2$

2) $Q < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ är (a,b) ett lokalt maximum.

   Ex) $Q = -4h^2 - k^2$

3) Q ibland är > 0 och ibland < 0 är (a,b) en sadelpunkt

   Ex) $Q = h^2 - hk$

Exempel klassificering m.h.a $Q(h,k)$

Bestäm Taylorpolynom av ordning 2 till $f(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + y^4$ kring $(3,-3)$ och använd detta för att klassificera samma punkt.

Taylorpolynom:

$P_2(x,y) = -27 + \frac{1}{2}\left(36(x-3)^2 + 2\cdot 36(x-3)(y+3) + 72(y+3)^2\right)$.

där $(x-3) = h$ och $(x+3) = k$.

Motsvarande Q är:

$Q(h,k) = 36h^2 + 2\cdot 36hk + 72k^2$

Kvadratkomplettering ger: $Q(h,k) = 36(h+k)^2 + 36k^2$

$Q > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0) \Rightarrow (3,-3)$ är en lokal minimipunkt.

Klassificering m.h.a. Hesse-matrisen H

Låt (a,b) vara en kritisk punkt till $f(x,y)$.

Ta fram $H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \Rightarrow H(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$

Det finns 3 fall: om

1) $\det H = AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \Rightarrow$ lokalt minimum
2) $\det H = AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \Rightarrow$ lokalt maximum
3) $\det H = AC - B^2 < 0 \Rightarrow (a,b)$ är en sadelpunkt.

Anm Om $\det H = 0$ ger testet ingen säker slutsats.

Exempel klassificering m.h.a Hesse-matris

Låt $f(x,y) = y^2 + 4x^2 - x^4$. Klassificera de tre kritiska punkterna $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$.

Ta fram $H(x,y) = \begin{bmatrix} 8-12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

För $(0,0)$ fås $H = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} \det H = 2 \cdot 8 - 0 = 16 > 0 \\ A = 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ lokalt minimum.

För $(\sqrt{2},0)$ och $(-\sqrt{2},0)$ fås $H = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\det H = -16 \cdot 2 - 0 = -32 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt.

Ty x^2 alltid positiv.

Globala max och min (dvs. största och minsta värde)

För globala max och min gäller:

1) Existensen av max och min kräver alltid ett argument. Om funktionen är kontinuerlig och definitionsmängden är sluten och begränsad så finns garanterat ett största och ett minsta värde.
Annars behöver de inte finnas och man får argumentera olika i olika fall.

2) Största och minsta värde, om de finns, kan bara antas i

- Kritiska punkter (inre stationära punkter) : $\begin{cases} f_x = f_y = 0 \\ g(x,y) < c \end{cases}$
- Singulära randpunkter $\begin{cases} g_x = g_y = 0 \\ g(x,y) = c \end{cases}$
- Randpunkter, som uppfyller Lagrange-villkoret. $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = c \end{cases}$

Optimering med bivillkor: Lagranges multiplikatormetod

Vi vill optimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)=0$, där f och g är C^1. Om optimum antas i en punkt (a,b), som inte är en ändpunkt på kurvan och $\nabla g(a,b) \neq 0$ så finns ett tal λ_0 så att (a,b,λ_0) är en kritisk punkt till Lagrange-funktionen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

OBS 1 Detta betyder att $\nabla f(a,b)$ och $\nabla g(a,b)$ är parallella.

OBS 2 Argument behövs fortfarande för existens av max och min.

OBS 3 Kolla separat ändpunkter och punkter där $\nabla g = 0$.

Lagrange-villkoret

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

Exempel optimering med bivillkor

Optimera $f(x,y) = 3x - 4y$ inom området som ges av $\underbrace{x^2 + 4y^2 \le 13}_{g(x,y)}$

Ellipsskiva:  dvs. kompakt område

Inre stationära punkter: $\begin{cases} f_x = f_y = 0 \\ x^2 + 4y^2 < 13 \end{cases} \Rightarrow 3 \neq -4 \neq 0$

$\Rightarrow$ Inre stationära punkter saknas!

Singulära randpunkter: $\begin{cases} g_x = g_y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow 2x = 8y = 0 \Rightarrow x = y = 0$

(0,0) uppfyller inte randvillkoret...

$\Rightarrow$ singulära randpunkter saknas!

"Lagrange-punkter" på randen: $\begin{cases} (3,-4) = \lambda(2x, 8y) \\ x^2 + 4y^2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} 3 = \lambda 2x & (1) \\ -4 = \lambda 8y & (2) \\ x^2 + 4y^2 = 13 & (3) \end{cases}$ Lös ut x, y för att få $f(x,y)$ men inte λ.

Dividera (1) med (2)

$\frac{3}{-4} = \frac{\lambda 2x}{\lambda 8y} (*) \Rightarrow \frac{3}{-4} = \frac{x}{4y} \Rightarrow 12y = -4x \Rightarrow x = -3y \quad (4)$

Sätt in (4) i (3): $(-3y)^2 + 4y^2 = 13 \Rightarrow 13y^2 = 13 \Rightarrow y = \pm 1$

Sök nu x med (4): $y = 1 \Rightarrow x = -3y = -3$
$y = -1 \Rightarrow x = -3y = 3$

Sammanställ alla funna punkter:

$(x,y) = (-3,1)$ ger $f(-3,1) = 3(-3) - 4 \cdot 1 = -13$
$(x,y) = (3,-1)$ ger $f(3,-1) = 3 \cdot 3 - 4(-1) = 13$

f's största värde är 13 och minsta värde är -13.

Anm (*) är legitim ty vi vet att $\lambda \neq 0$. Ty om $\lambda = 0$ ger (1) $3 = 0$ orimligt!

Lagranges multiplikatormetod med flera bivillkor

För att optimera $f(x,y,z)$ under bivillkoren $g(x,y,z)=0$ och $h(x,y,z)=0$ ska vi på liknande sätt söka kritiska punkter till Lagrange-funktionen

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

Modul 4

Vad är en dubbelintegral?

Dubbelintegralen av f över den axelparallella rektangeln D definieras via Riemannsummor

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{j,k} f(x_{jk}^*, y_{jk}^*)\,\Delta x_j \Delta y_k$$

Summan till höger kallas alltså en Riemannsumma.

En möjlig tolkning av integralen är volymen (med tecken) under funktionsytan, men många andra möjliga tolkningar finns.

Sats

Om f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat område D vars rand utgörs av ändligt många kurvor av ändlig längd, så är f integrerbar på D.

Enkla egenskaper hos dubbelintegraler

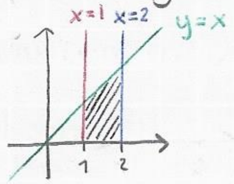
1. Om arean av D är noll så är $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$
2. Dubbelintegration är en linjär operation.
3. Triangelolikheten: $\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA$
4. Om $D = D_1 \cup D_2$ så är:
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$
5. Om $f(x,y) \leq g(x,y)$ så är $\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$
6. $\iint_D 1\,dA =$ Arean av D

(Förutsatt att f och g är integrerbara över D)

Exempel dubbelintegraler

Finn volymen under ytan $z = \frac{1}{x+y}$ och över området i xy-planet som begränsas av $x=1$, $x=2$, $y=0$ och $y=x$.

1) Rita figur:



2) Notera att $\frac{1}{x+y} > 0$ för alla aktuella x och y

3) Den sökta volymen är:

$$V = \iint_D \frac{1}{x+y}\,dxdy = \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{x+y}\,dydx = \int_1^2 \left[\ln|x+y|\right]_0^x dx =$$

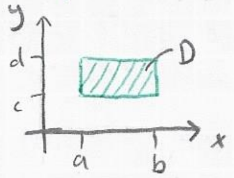
$$= \int_1^2 (\ln 2x - \ln x)\,dx = \int_1^2 (\ln 2)\,dx = \ln 2 \int_1^2 dx =$$

$= \ln 2$ volymenheter.

Allmän regel för multipelintegraler

De yttersta gränserna ska vara konstanter, eventuellt $\pm\infty$.

Integral över rektangulära områden



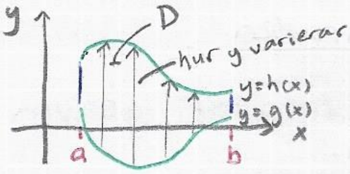
Rektangel $D: \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

Integral över nästan godtyckliga områden

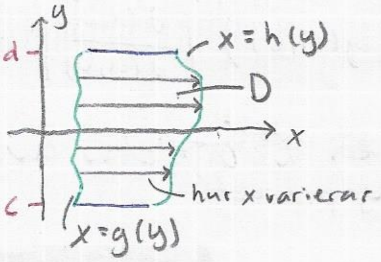
Det finns två scenarion:

1. y-enkelt område (y-simple domain)



Sats $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dxdy$

2. X-enkelt område (X-simple domain)



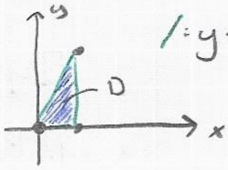
Sats $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dxdy$

Integral över triangulära områden

Kan göras på två sätt:

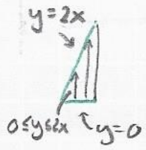
1. Se D som ett y-enkelt område.
2. Se D som ett x-enkelt område

Exempel integral över triangulära områden



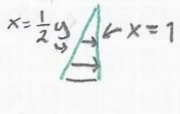
Beräkna $I = \iint_D x^2y\,dA$ enligt figuren:

1. Se D som ett y-enkelt område:



$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2y\,dydx = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} x^2y\,dy \right) dx = \cdots = \frac{2}{5}$$

2. Se D som ett x-enkelt område:



$$I = \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}y}^1 x^2y\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 x^2y\,dx \right) dy = \cdots = \frac{2}{5}$$

OBS Man kan INTE räkna ut en rektangel och dela med 2!

Alternativt skrivsätt för dubbelintegraler

$$\int_1^3 \int_y^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 dy \int_y^2 f(x,y)\,dx$$

Integral över cirkelformade områden

Strategi: byt till polära koordinater, genom variabelsubstitution.

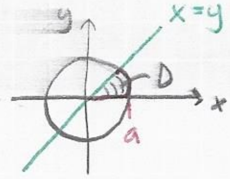
Variabelsubstitution i dubbelintegraler

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

om $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ är en C^1 bijektiv avbildning av E i uv-planet på D i xy-planet.

Exempel variabelsubstitution i dubbelintegraler

Beräkna $I = \iint_D xy\,dA$ där $D: \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq x \\ x^2+y^2 \leq a^2 \end{cases}$



Strategi: polär substitution.

Byt: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Sats $dA = dx\,dy = \overbrace{r\,dr\,d\theta}^{\text{skalfaktor}}$

Byt alltid 3 saker:

1. Byt integranden: $xy = r\cos\theta\, r\sin\theta = r^2\cos\theta\sin\theta$
2. Byt areaelementet: $dA = r\,dr\,d\theta$
3. Byt gränserna: $0 \leq r \leq a$
   $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$I = \iint_D xy\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_0^a r^2\cos\theta\sin\theta\, r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^a r^3\,dr = \cdots = \frac{a^4}{16}$$

Sammanfattning om generaliserade dubbelintegraler

Om integranden antar både positiva och negativa värden i integrationsområdet kan vi inte avgöra om den är konvergent bara genom intererad enkelintegration. En fullständig undersökning av sådana integraler ligger utanför vår kurs.

För kontinuerliga funktioner gäller att:

$$\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy \text{ konvergent} \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \text{ konvergent}$$

och i så fall kan man också räkna ut integralen av f genom upprepad enkelintegration.

En medelvärdessats för dubbelintegraler

Om f är kontinuerlig på en sluten, begränsad, sammanhängande mängd D i xy-planet, så finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ så att:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0) \cdot (\text{arean av } D)$$

En viktig integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Denna viktiga envariabelintegral kunde vi inte räkna ut i envarren, men vi kan räkna ut den nu med hjälp av flervarre!

Multiplikationslagen

$$\int_c^d \int_a^b g(x)\,h(y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$$

Där g(x) endast beror av x och h(y) endast beror av y.

<u>OBS</u> Multiplikationslagen får bara användas <u>om alla 4</u> gränser är konstanter!

Additionslagen

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Trippelintegraler

$\iiint_K f(x,y,z)\,dV$ eller $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

kan definieras med hjälp av Riemannsummor, typ

$\sum f(x_i^*, y_k^*, z_\ell^*)\,\Delta x_i\,\Delta y_k\,\Delta z_\ell$

på samma sätt som enkel- och dubbelintegraler.

Några tillämpningar av trippelintegraler

$\iiint_K 1\,dV$ = Volymen av K

$\iiint_K \rho(x,y,z)\,dV$ = Massan av K (om ρ är densiteten)

$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{m}\left(\iiint_K x\rho\,dV, \iiint_K y\rho\,dV, \iiint_K z\rho\,dV\right)$ är masscentrum för K om m är massan och ρ densiteten.

Användbara genvägar

1. $\int_a^b dx = \int_a^b 1\,dx = [x]_a^b = b - a$ = intervallängden
2. $\iint_D dx\,dy$ = arean av D (om D är ett område i xy-planet)
3. $\iiint_K dx\,dy\,dz$ = Volymen av K (om K är en kropp i $\mathbb{R}^3$)

Variabelsubstitution i trippelintegraler

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_L g(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

där avbildningen $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ är en C^1 bijektion mellan K och L och $g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

Variabelsubstitution med cylindriska koordinater

I cylindriska koordinater blir: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

och volymselementet $dx\,dy\,dz = r \cdot dr\,d\theta\,dz$

Trippelintegraler över cylinderformade kroppar

Strategi: Övergå till cylindriska koordinater.

Exempel trippelintegraler över cylinderformade kroppar

Sök $\iiint_K 1\,dV$ där K ges av $\begin{cases} 0 \leq z \leq x^2 + 4y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

1. Övergå till cylindriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \\ dV = r \cdot dr\,d\theta\,dz \end{cases}$$

2. Bestäm de nya gränserna för r, θ, z:

$x^2 + y^2 \leq 1$  med radie 1.

$0 \leq z \leq x^2 + 4y^2 \Rightarrow 0 \leq z \leq r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq z \leq r^2(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) \Rightarrow 0 \leq z \leq r^2(1 + 3\sin^2\theta)$

3. Beräkna integralen:

$$\iiint_K 1\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r(1+\sin^3\theta)} 1 \cdot r \cdot dz\,dr\,d\theta = \ldots = \frac{5\pi}{4}$$

Variabelsubstitution med sfäriska koordinater

I sfäriska koordinater blir:
$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

och volymselementet $dxdydz = R^2\sin\phi \cdot dR\,d\phi\,d\theta$

Trippelintegraler över sfäriska kroppar

Strategi: Övergå till sfäriska koordinater.

Exempel trippelintegraler över sfäriska kroppar

Beräkna $\iiint_K (x^2+y^2)\,dV$, där K är klotet $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$

1. Övergå till sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \\ dV = R^2\sin\phi \cdot dR\,d\phi\,d\theta \end{cases}$$

2. Byt integranden:

$$x^2+y^2 = R^2\sin^2\phi\cos^2\theta + R^2\sin\phi\sin^2\theta =$$
$$= R^2\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = R^2\sin^2\phi$$

3. Byt gränserna:

$$\begin{cases} 0 \leq R \leq a \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

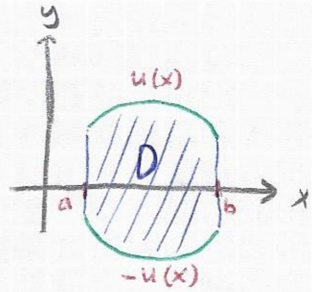
4. Beräkna integralen:

$$\iiint_K (x^2+y^2)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} R^2\sin^2\phi \cdot R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$$

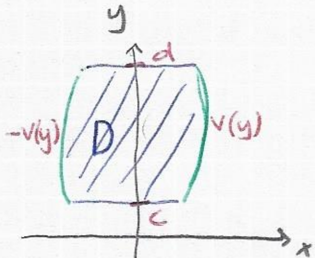
Multiplikationslagen:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\phi\,d\phi \cdot \int_0^{a} R^4\,dr = \dots = \frac{8\pi}{15}a^5$$

Udda funktioner

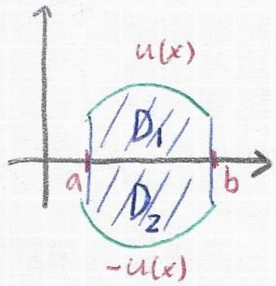


1. D i xy-planet definieras: $\begin{cases} a \le x \le b \\ -u(x) \le y \le u(x) \end{cases}$
(dvs. symmetrisk i x-axeln)
och $f(x,y)$ är en udda funktion m.a.p. y
(dvs. $f(x,-y) = -f(x,y)$ för alla $(x,y) \in D$)
så gäller: $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$

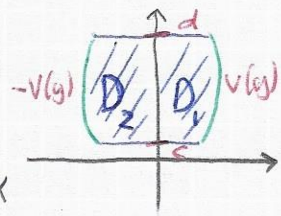


2. D i xy-planet definieras: $\begin{cases} c \le y \le d \\ -v(y) \le x \le v(y) \end{cases}$
(dvs. symmetrisk i y-axeln)
och $f(x,y)$ är en udda funktion m.a.p x
så gäller: $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$ (dvs. $f(-x,y) = -f(x,y)$ $\forall$ $(x,y) \in D$

Jämna funktioner



1. D i xy-planet definieras: $\begin{cases} a \le x \le b \\ -u(x) \le y \le u(x) \end{cases}$
(dvs. symmetrisk i x-axeln)
och $f(x,y)$ är en jämn funktion m.a.p y
(dvs. $f(x,-y) = f(x,y)$ $\forall$ $(x,y) \in D$)
Så gäller $\iint_D f(x,y) = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$



2. D i xy-planet definieras av: $\begin{cases} c \le y \le d \\ -v(y) \le x \le v(y) \end{cases}$
(dvs. symmetrisk i y-axeln)
och $f(x,y)$ är en jämn funktion m.a.p x
(dvs. $f(-x,y) = f(x,y)$ $\forall$ $(x,y) \in D$)
Så gäller $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

Modul 5

Vektorfält

Ett vektorfält är en funktion F definierad i någon delmängd av R^3 med funktionsvärden i R^3. Motsvarande i R^2 kallas plana vektorfält.

Tolkning: I varje punkt (x, y, z) sitter en vektor $F(x, y, z)$.

Fältlinjer

En kurva till vilken vektorfältet är tangentiellt i varje punkt kallas en fältlinje (alt. strömlinje, flödeslinje, trajektoria, integralkurva). Om $F(x,y) = (P, Q)$ är ett plant vektorfält fås fältlinjerna som lösningar till

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

På liknande sätt fås fältlinjerna i 3D.

Konservativa vektorfält

Om det finns en funktion ϕ sådan att $\nabla\phi = F$ så sägs vektorfältet F vara konservativt. Funktionen ϕ kallas i så fall för en potentialfunktion till F.

Plana C^1 vektorfält

$$F(x,y) = (P, Q)$$

Om vektorfältet F ska vara konservativt måste

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$J\bar{F}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}$$

C^1 3D-vektorfält

$F(x,y,z) = (P, Q, R)$

Om vektorfältet F ska vara konservativt måste

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$J\bar{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ekvipotentialkurvor och ekvipotentialytor

Nivåytor till potentialfunktionen kallas ekvipotentialytor till vektorfältet. För plana vektorfält är motsvarigheten ekvipotentialkurvor.

Exempel konservativa vektorfält

Avgör om $\bar{F}(x,y) = (y-2x, x-1)$ är konservativt.

Test: $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\bar{F}$ kan vara konservativt.

Inför $\phi(x,y)$ och se om det finns någon ϕ sådan att $\nabla\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \bar{F}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y - 2x & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x - 1 & (2) \end{cases}$$

(1) ger: $\phi(x,y) = xy - x^2 + C(y)$ (3)

Derivera (3) med avseende på y.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + C'(y)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + C'(y) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad C'(y) = -1$

$C(y) = -y + k$

$\phi(x,y) = xy - x^2 - y + k$

Svar: $\bar{F}$ är konservativ med potentialen $\phi = xy - x^2 - y + k$

Kurvintegraler (alt. linjeintegraler)

Låt γ vara en begränsad, slät kurva i R^3 (eller R^2) och f någon funktion som är definierad och kontinuerlig på γ. Då kan vi definiera kurvintegralen

$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds$

som gränsvärdet av Riemannsummor

$\sum f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,|\Delta r_i|$

Kurvintegralen kan beräknas genom

$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \cdot \|\frac{d\bar{r}}{dt}\|\,dt$

där $r(t)$ är en parametrisering för γ och $a \le t \le b$

Exempel kurvintegral

Beräkna $\int_\gamma f(x,y)\,ds$ där $f(x,y) = y$ och γ är $\begin{cases} x + y^2 = 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Steg 1: Parametrisera γ

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, där $0 \le t \le \pi$

Steg 2: $\frac{d\bar{r}}{dt} = (x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$

$\|\frac{d\bar{r}}{dt}\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1$

Steg 3: $\int_\gamma y\,ds = \int_0^\pi y \cdot 1\,ds = \int_0^\pi \sin t\,dt = \left[-\cos t\right]_0^\pi =$

$= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$

Kurvintegraler av vektorfält

Om $\bar{F} = (P, Q)$ är ett kontinuerligt plant vektorfält och γ en orienterad och slät (riktad) kurva så ges kurvintegralen av den tangentiella komponenten av $\bar{F}$ längs γ av

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot dr = \int_\gamma (P(x,y), Q(x,y)) \cdot (dx, dy)$$

Om $r(t) = (x(t), y(t))$, där $t: a \to b$, parametriserar γ så kan kurvintegralen beräknas genom

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot dt$$

Motsvarande för vektorfält i R^3.

Exempel kurvintegraler av vektorfält

Sök $\int_\gamma \bar{H} \cdot d\bar{r}$ där $\bar{H}(x,y) = (-y, x)$ och γ ges av parabeln $y = 1 - x^2$ från $(1,0)$ till $(0,1)$

Steg 1: Parametrisera γ

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}, \text{ där } t: 1 \to 0, \text{ ty } x: 1 \to 0 \text{ och } x = t.$$

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 1 - t^2)$$

Steg 2: Bestäm $\bar{H}(\bar{r}(t))$

$$\bar{H}(r(t)) = (-(1 - t^2), t) = (t^2 - 1, t)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (1, -2t)$$

$$\bar{H}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = t^2 - 1 - 2t^2 = -t^2 - 1$$

Steg 3: Beräkna integralen

$$\int_\gamma \bar{H} \cdot dr = \int_1^0 (-t^2 - 1)\, dt = \left[-\frac{t^3}{3} - t\right]_1^0 = \left(-\frac{0^3}{3} - 0\right) - \left(-\frac{1^3}{3} - 1\right) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right) = 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Sats

Om $\bar{F} = (P, Q)$ är ett glatt plant vektorfält på en öppen enkelt sammanhängande mängd D, så är följande påståenden ekvivalenta:

1) $\bar{F}$ är konservativt i D

2) $\int_\gamma \bar{F} \cdot dr = 0$ för alla styckvis släta kurvor γ i D

3) Alla kurvintegraler av $\bar{F}$ är oberoende av vägen i D

4) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i D.

Sats

Om $\bar{F}(P, Q, R)$ är ett glatt vektorfält på en öppen enkelt sammanhängande mängd D, så är följande påståenden ekvivalenta:

1) $\bar{F}$ är konservativt i D

2) $\int_\gamma \bar{F} \cdot dr = 0$ för alla styckvis släta kurvor γ i D

3) Alla kurvintegraler av $\bar{F}$ är oberoende av vägen i D

4) $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i D.

Parameterytor i $\mathbb{R}^3$

En parameteryta är värdemängden till en kontinuerlig funktion r definierad på något lämpligt område D i $\mathbb{R}^2$ med värden i $\mathbb{R}^2$. Typ:

$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$

Oftast är D en rektangel. Om r är ett-till-ett så skär inte ytan sig själv. Bilden av D kallas då randen av parameterytan.

En yta sägs vara glatt om den har ett unikt tangentplan i varje punkt (utom längs randen). En normalvektor till detta tangentplan sägs vara en normalvektor till ytan.

Ytmått

På en yta Y parametriserad genom

$\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D$

är $n = \bar{r}_u' \times \bar{r}_v'$ en normalvektor och ytelementet dS ges av

$dS = |\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'| \, du dv$

och

Arean av $Y = \iint_Y dS = \iint_D |\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'| \, du dv$

Ytintegralen av en funktion f över Y kan beräknas

$$\iint_Y f \, dS = \iint_D f(\bar{r}(u,v)) \cdot |\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'| \, du dv$$

Exempel ytmått

Ytan Y, som parametriseras genom $\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ med $0 \le u \le 1$ och $0 \le v \le \pi$ förses med en massbeläggning med densiteten $\rho(u,v) = u$. Beräkna massan.

$Y \to D$
$\rho \to \rho(u,v) = u$
$dS \to |\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'| \, du dv$

Vi har $|\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'| = |(\cos v, \sin v, 0) \times (-u\sin v, u\cos v, 1)| =$

$= |(\sin v, -\cos v, u)| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1+u^2}$

Massan är alltså $= \iint_D u\sqrt{1+u^2} \, du dv =$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 u\sqrt{1+u^2} \, du \right) dv = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+u^2 \\ dt = 2u \, du \end{array} \middle| \begin{array}{l} t: 1 \to 2 \\ du = \frac{dt}{2u} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_1^2 u\sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2u} \right) dv = \int_0^{\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{t} \, dt \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} \right]_1^2 dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \right) dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\pi} (2\sqrt{2} - 1) \, dv = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)\pi$$

Två metoder för att beräkna flödesintegraler

1) Y ges av $z=f(x,y)$, dvs. en funktionsyta.

Då gäller:

Sats $d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) dx\,dy$

2) Låt Y parametriseras av $\bar{r}(s,t)$.

Sats $d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) ds\,dt$

Exempel flödesintegraler 1

Enligt metod 1:

Beräkna flödet av $\bar{F}(x,y,z) = (-y, x, z^2)$ nedåt genom konytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$ där $0 \le z \le 1$.

Sök $\iint_Y \bar{F}\cdot d\bar{S}$

Y ges av $z=f(x,y)$

$$d\bar{S} = \pm\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dx\,dy = \pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dx\,dy$$

Eftersom vi vill nedåt väljer vi negativ z-koordinat, dvs

$$d\bar{S} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dx\,dy$$

$$\bar{F}\cdot d\bar{S} = (-y, x, z^2)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) = -z^2\,dx\,dy.$$

$$\iint_Y \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_Y -z^2\,dx\,dy = \iint_Y -\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy = \iint_Y -(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Gränserna för x och y ges av:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2+y^2 \le 1$$

Byt till polära koordinater: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, där $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

Orienterade ytor i R^3

På en yta Y parametriserad genom

$\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$

med $\bar{n} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ som normalvektor säger vi att den sida av ytan åt vilken denna normalvektor pekar är den positiva sidan.

OBS Alla ytor är inte orienterbara på detta sätt.

En orientering av ytan inducerar en orientering på dess randkurvor: en sådan sägs vara positivt orienterad om ytan är till vänster om kurvan när vi är på den positiva sidan av ytan och går längs kurvan.

Flödet av ett vektorfält genom en yta i R^3

Flödet av ett kontinuerligt vektorfält $\bar{F}$ genom en orienterad yta Y är integralen av den positiva normalkomponenten av vektorfältet över Y, dvs

$\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S}$, där $d\bar{S} = \hat{N}\, dS = \hat{n}\, dS$
och $d\bar{S}$ är vinkelrät mot Y på varje punkt på ytan Y, om $d\bar{S} \neq \bar{0}$.

Beräkning av flödet av ett vektorfält genom en yta i R^3

Eftersom $n = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ är en normalvektor på ytan som pekar åt rätt håll, får vi en enhetsnormal $\hat{N}$ genom

$$\hat{N} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}$$

Och eftersom $dS = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\, du\, dv$ ser vi att vi kan beräkna flödesintegraler genom

$$\iint_Y \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iint_D \bar{F} \cdot \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \, du\, dv$$

om Y parametriseras av $r(u,v)$ för $(u,v) \in D$.

OBS Högerledet är en vanlig dubbelintegral.

Vilket ger: $\iint_Y -(x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^2 \cdot r\,dr\,d\theta =$

$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr = -2\pi \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}$

Exempel flödesintegraler 2

Enligt metod 2:

Sök flödet av $F(x,y,z) = (xz, yz, z(1-z))$ genom Y som ges av $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

Parametrisera Y: $\begin{cases} x(s,t) = \cos t \\ y(s,t) = \sin t \\ z(s,t) = s \end{cases}$, där $\begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le s \le 2 \end{cases}$

Vi söker $\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S}$

$d\bar{S} = \pm \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) ds\,dt = \pm \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right) ds\,dt =$

$= \pm \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} ds\,dt \implies d\bar{S} = (\cos t, \sin t, 0)\,ds\,dt$

$\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_Y (xz, yz, z(1-z)) \cdot (\cos t, \sin t, 0)\,ds\,dt =$

$= \iint_Y (s\cos t, s\sin t, s(1-s)) \cdot (\cos t, \sin t, 0)\,ds\,dt =$

$= \iint_Y s\cos^2 t + s\sin^2 t + 0\,ds\,dt = \iint_Y s(\cos^2 t + \sin^2 t)\,ds\,dt =$

$= \iint_Y s\,ds\,dt.$

Med insatta gränser får vi:

$\int_0^{2\pi}\int_0^2 s\,ds\,dt = \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 s\,ds = 2\pi \cdot \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

En vanlig tillämpning av flödesintegraler

Om vektorfältet $\bar{F}$ är hastighetsfältet för en tidsberoende strömmning, så kan flödesintegralen

$$\iint_Y F \cdot \hat{N} dS \quad \text{alt.} \quad \iint_Y F \cdot d\bar{S}$$

tolkas som den volym av det strömmande mediet som per tidsenhet passerar genom ytan Y.

Sats

Om $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r}$ är konservativ, har potentialfunktionen ϕ och γ går från punkten $\bar{\alpha}$ till punkten $\bar{\beta}$ gäller följande:

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \phi(\bar{\beta}) - \phi(\bar{\alpha})$$

dvs. integralen är vägoberoende om $\bar{F}$ är konservativ.

Modul 6

Nablaräkning - begrepp

Om $g=(x,y,z)$ är reellvärd och $\bar{F}=F(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ ett vektorfält är:

- $\text{grad } g = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$
- $\text{div } \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
- $\text{rot } \bar{F} = \text{curl } \bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

(Motsvarande kan definieras i 2D)

Tolkning av begreppen

- ∇f pekar i riktning för maxtillväxten av f.
- $\text{div } \bar{F}(a,b,c) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{S_\epsilon} \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS$ vilket anger hur snabbt vektorfältet sprider sig från punkten (a,b,c).
- $\bar{N} \cdot \text{rot } \bar{F}(a,b,c) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ så rot mäter virveltendensen hos vektorfältet. Riktningen hos $\text{rot} \bar{F}$ anger rotationsaxeln och $|\text{rot} \bar{F}|$ är ett mått på virvelns styrka.

Nablaräkning

- $\text{div } \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F}$
- $\text{rot } \bar{F} = \nabla \times \bar{F}$
- $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ (Laplace-operatorn)
- $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) = 0$ $(\text{div}(\text{rot } \bar{F}) = 0)$
- $\nabla \times (\nabla f) = (0,0,0)$ $(\text{rot}(\text{grad} f) = (0,0,0))$

Definition - Nablaräkning

- Om $\text{div } \bar{F} = 0$ i något område K så sägs $\bar{F}$ vara källfritt (solenoidal) i K.
- Om $\text{rot } \bar{F} = (0,0,0)$ i något område K så sägs $\bar{F}$ vara virvelfritt (irrotational) i K.

Sats – Nablaräkning

- Virvelfria fält i enkelt sammanhängande områden är konservativa, dvs. har potential.

- Källfria fält i områden där alla slutna ytor begränsar kroppar som ligger helt i området är alltid rotationen av något annat, dvs. har vektorpotential. (Om $\bar{F} = \text{rot}\,\bar{G}$ så är $\bar{G}$ vektorpotential till $\bar{F}$).

Exempel nablaräkning

Bestäm a) $\text{div}(\bar{F})$, b) $\text{grad}(\text{div}(\bar{F}))$ och c) $\text{rot}(\bar{F})$ då $\bar{F} = (y + x^2, z, x^2)$.

a) $\text{div}(\bar{F}) = \nabla \cdot \bar{F} = 2x + 0 + 0 = 2x$

b) $\text{grad}(\text{div}(\bar{F})) = \nabla(\nabla \cdot \bar{F}) = (2, 0, 0)$

c) $\text{rot}(\bar{F}) = \nabla \times \bar{F} = ((0-1), (0-2x), (0-1)) = (-1, 2x, -1)$.

Tillämpning av nablaräkning

- Gradienten tillämpas på ett skalärfält, resultatet är ett vektorfält.

- Divergensen tillämpas på ett vektorfält, resultatet är ett skalärfält.

- Rotationen tillämpas på ett vektorfält, resultatet är ett vektorfält.

Greens formel

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

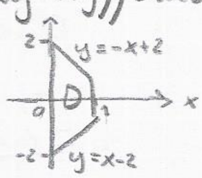
där γ är den rätt orienterade styckvis glatta slutna randkurvan till det reguljära slutna området D och vektorfältet (P, Q) är glatt (dvs. tillräckligt deriverbart) i D.

Exempel Greens formel

Beräkna $\oint_c \underbrace{(x\sin(y^2)-y^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^2y\cos(y^2)+3x)}_{Q}dy$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D\big((2xy\cos(y^2)+3)-(x\cos(y^2)2y-2y)\big)dxdy =$$

$=\iint_D(3+2y)dxdy$. D är ett y-enkelt område.



$$=\int_0^1\int_{x-2}^{-x+2}(3+2y)\,dydx = \int_0^1\left[3y+y^2\right]_{x-2}^{-x+2}dx = \int_0^1(-3x+6+x^2-4x+4)-$$

$$-(3x-6+x^2-4x+4)\,dx = \int_0^1 -3x+6+x^2-4x+4-3x+6-x^2+4x-4\,dx =$$

$$=\int_0^1 12-6x\,dx = \left[12x-3x^2\right]_0^1 = (12-3)-0=9$$

Area med Greens formel

Om det reguljära området D begränsas av den enkla slutna styckvis C^1 positivt orienterade kurvan γ, så är

$$\frac{1}{2}\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = \int_\gamma -y\,dx = \int_\gamma x\,dy = \iint_D 1\,dxdy = \text{Arean av } D$$

Centroiden av en kropp K

Def Låt K ha centroiden (x_c, y_c, z_c). Då är

$$x_c = \frac{\iiint_K x\,dV}{\iiint_K 1\,dV},$$ där $\iiint_K 1\,dV$ är volymen av K dvs. vol(K)

$$y_c = \frac{\iiint_K y\,dV}{\text{Vol}(K)}$$

$$z_c = \frac{\iiint_K z\,dV}{\text{Vol}(K)}$$

Viktig konsekvens

$$\iiint_K x\,dV = x_c\cdot \text{Vol}(K)$$

$$\iiint_K y\,dV = y_c\cdot \text{Vol}(K)$$

$$\iiint_K z\,dV = z_c\cdot \text{Vol}(K)$$

Gauss sats (divergenssatsen)

$$\iint_Y \bar{F} \cdot \bar{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \bar{F} \, dV$$

om K är en reguljär kropp vars rand Y är en orienterad sluten yta med utåtriktat enhetsnormalfält $\bar{N}$ och $\bar{F}$ är ett glatt fält på K.

Exempel Gauss sats

Sök flödet av $\bar{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ ut genom randen av ett klot K som ges av:

$(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9$

Sök $\iint \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div} \bar{F} \, dV = \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV =$

$= \iiint_K (2x + 2y + 2z) \, dV = 2 \iiint_K (x+y+z) \, dV =$

$= 2 \iiint_K x \, dV + \iiint_K y \, dV + \iiint_K z \, dV =$

$= 2 (x_c \operatorname{vol}(K) + y_c \operatorname{vol}(K) + z_c \operatorname{vol}(K)) =$

$= 2 (x_c + y_c + z_c) \operatorname{vol}(K) =$

Volym av ett klot: $\frac{4}{3} \pi r^3$

$= 2(2,0,3) \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 360\pi$

Tekniker för att beräkna kurvintegraler

1) Parametrisera kurvan
2) Hitta en potential (villkor)
3) Byt väg (villkor)
4) Greens formel (villkor)
5) Stokes sats

Stokes sats

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot\bar{N}\,dS$$

där Y är en glatt yta med enhetsnormalfält $\bar{N}$ och randkurva γ som är glatt och med rätt orientering och vidare $\bar{F}$ är ett glatt vektorfält i en omgivning av Y.

OBS Om ytan Y ligger i xy-planet så är detta Greens formel.

Tekniker för att beräkna flödesintegraler

1) Parametrisera ytan

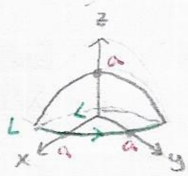
2) Divergenssatsen

3) Stokes sats

(Var uppmärksam på geometrin, vissa saker är gratis)

Exempel Stokes sats

Beräkna $\iint_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S}$ där $\bar{F}(x,y,z) = (3y, -2xz, x^2-y^2)$ och Y är halvsfären: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$ och $d\bar{S}$ är riktad utåt.



$$\iint_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S} = \int_L \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_L \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S}$$

L är även den slutna randkurvan till cirkelskivan $L: \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\iint_L (2x-2y, -2x, -2z-3)\cdot(0,0,1)\,dxdy =$$

$$= \iint_L (-2\underset{=0}{z}-3)\,dxdy = \iint_L -3\,dxdy = -3\underbrace{\iint_L 1\,dxdy}_{\text{arean av } L} =$$

$$= -3\cdot\pi a^2 = -3\pi a^2$$

Masscentrum

Kroppen K's masscentrum (x_M, y_M, z_M) ges av integraler som liknar centroiden för kroppen, men tar även hänsyn till kroppens densitet $\rho(x,y,z)$.

Exempelvis ges x_M av

$$x_M = \frac{\iiint_K x\rho(x,y,z)\,dV}{\iiint_K \rho(x,y,z)\,dV} = \frac{\iiint_K x\rho(x,y,z)\,dV}{\text{massan av } K}$$

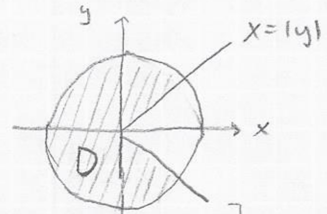
Observation: Om kroppens densitet är konstant bör dess centroid och masscentrum sammanfalla.

Alltså, om kroppens densitet är konstant gäller (bland annat):

$$x_c = x_M = \frac{\iiint_K x\,dV}{\text{Volymen av } K}$$

Exempel masscentrum

Området D i $\mathbb{R}^2$ ges av $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x \le |y| \end{cases}$ sök (x_M, y_M).



Antag att ρ är konstant.

Ser direkt att $y_M = 0$ ty D symmetrisk kring x-axeln.

$$x_M = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{Arean av } D}} \quad \left[\text{Masscentrum för område i planet}\right]$$

Ser direkt att arean av $D = \frac{3}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{3\pi}{4}$

$\iint_D x\,dx\,dy$, polära koordinater: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, där $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{7\pi}{4} \end{cases}$

$$= \int_{\pi/4}^{7\pi/4}\int_0^1 r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/4}^{7\pi/4}\cos\theta\,d\theta \int_0^1 r^2\,dr =$$

$$= \left[\sin\theta\right]_{\pi/4}^{7\pi/4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \left(\sin\frac{7\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \dots = -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Svar: $(x_M, x_y) = \left(\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}{\left(\frac{3\pi}{4}\right)}, 0\right) = \left(\frac{-4\sqrt{2}}{9\pi}, 0\right)$

Tam

Rekommenderade tentauppgifter SF1626

Modul 1

Tentamen 2014-08-21 # 1 (Ö1 på tavlan)
Tentamen 2016-08-18 # 5 (Ö1 på tavlan)
Tentamen 2017-06-05 # 4 (Ö2 på tavlan)
Tentamen 2013-08-22 # 8 (Ö2 på tavlan)
Tentamen 2015-08-20 # 7 (Ö2 gör själv)
Tentamen 2015-03-16 # 1 (Ö2 på tavlan)

Modul 2

Tentamen 2015-03-16 # 3 (Ö3 på tavlan
Tentamen 2013-08-22 # 1 (Ö3 på tavlan
Tentamen 2016-08-18 # 4 (Ö3 gör själv)
Tentamen 2011-03-14 # 4 (Ö4 på tavlan)
Tentamen 2017-06-05 # 1 (Ö4 på tavlan)
Tentamen 2014-03-17 # 1 (Ö4 på tavlan)
Tentamen 2013-01-10 # 1 (Ö4 på tavlan)
Tentamen 2012-06-04 # 1 (Ö4 gör själv)
Tentamen 2013-05-27 # 1 (Ö4 gör själv)
Tentamen 2017-08-17 # 4 (Ö4 gör själv - svårare)
Tentamen 2012-10-19 # 1 (Ö4 gör själv)
Tentamen 2017-03-15 # 2 (Ö4 gör själv)
Tentamen 2016-01-12 # 1 (a) och (b) (Ö4 gör själv)

Modul 3

Tentamen 2016-08-18 # 3 (Ö5 på tavlan)
Tentamen 2017-01-10 # 3 (Ö5 på tavlan)
Tentamen 2015-03-16 # 4 (Ö5 på tavlan)
Tentamen 2014-03-17 # 2 (Ö5 gör själv)
Tentamen 2015-06-04 # 1 (Ö5 gör själv)
Tentamen 2014-10-30 # 2 (Ö5 gör själv - svårare)
Tentamen 2014-05-26 # 5 (Ö6 på tavlan)
Tentamen 2014-08-21 # 5 (Ö6 på tavlan)
Tentamen 2012-10-19 # 5 (Ö6 på tavlan)

Modul 4

Tentamen 2013-08-22 # 2 (Ö7 på tavlan)
Tentamen 2015-03-16 # 2 (Ö7 gör själv)
Tentamen 2014-09-26 # 5 (Ö7 gör själv)
Tentamen 2015-06-04 # 3 (Ö8 på tavlan)
Tentamen 2012-06-04 # 2 (Ö8 på tavlan)
Tentamen 2015-08-20 # 3 (Ö8 gör själv)

Modul 5

Tentamen 2014-08-21 # 4 (Ö9 på tavlan)
Tentamen 2017-06-05 # 3 (Ö9 på tavlan)
Tentamen 2016-06-07 # 2 (Ö9 på tavlan)
Tentamen 2012-10-19 # 4 (Ö9 på tavlan
Tentamen 2016-08-18 # 2 (Ö9 gör själv)
Tentamen 2015-06-04 # 9 (Ö9 gör själv)
Tentamen 2014-09-26 # 8 (a) (Ö9 gör själv - svår)
Tentamen 2013-03-12 # 3 (Ö9 gör själv)
Tentamen 2017-01-10 # 2 (Ö9 gör själv)
Tentamen 2017-08-17 # 3 (Ö9 gör själv)
Tentamen 2015-03-16 # 5 (Ö9 gör själv - svår)
Tentamen 2016-01-12 # 6 (Ö9 gör själv - svår)
Tentamen 2014-03-17 # 6 (Ö10 på tavlan)
Tentamen 2012-10-19 # 6 (Ö10 på tavlan)
Tentamen 2011-03-14 # 6 (Ö10 gör själv)
Tentamen 2012-03-13 # 5 (Ö10 gör själv)
Tentamen 2015-08-20 # 6 (Ö10 gör själv)

Modul 6

Tentamen 2016-08-18 # 2 (Ö11 gör själv)
Tentamen 2016-01-12 # 2 (Ö11 gör själv)
Tentamen 2017-03-15 # 4 (Ö11 gör själv)
Tentamen 2017-03-15 # 3 (Ö11 gör själv)
Tentamen 2016-03-21 # 3 (Ö11 gör själv)
Tentamen 2017-08-17 # 5 (Ö11 gör själv)
Tentamen 2015-06-14 # 4 (Ö12 på tavlan)

Repetition

Tentamen 2017-01-10 # 4 (Ö13 på tavlan)
Tentamen 2016-03-21 # 1 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2017-10-26 # 3 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2016-06-07 # 5 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2015-08-20 # 3 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2013-08-22 # 6 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2015-08-20 # 8 (Ö13 på tavlan)
Tentamen 2014-08-21 # 7 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2014-05-26 # 8 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2014-03-17 # 9 (Ö13 på tavlan)
Tentamen 2013-01-10 # 5 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2015-03-16 # 6 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2017-03-15 # 5 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2018-01-19 # 4 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2016-03-21 # 5 (Ö13 gör själv)
Tentamen 2016-01-12 # 9 (Ö13 gör själv - tips på tavlan)
Tentamen 2018-01-09 # 6 (Ö13 gör själv)

SF1626

Tam

Repetition

Tentamen 2017-08-17 # 7 (Ö14 på tavlan)
Tentamen 2013-08-22 # 8 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2015-08-20 # 7 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2013-05-27 # 7 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2012-03-13 # 8 (Ö14 på tavlan)
Tentamen 2014-08-21 # 3 (Ö14 på tavlan)
Tentamen 2016-01-12 # 7 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2018-01-09 # 1 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2012-10-19 # 8 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2014-03-17 # 7 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2017-03-15 # 8 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2014-08-21 # 3 (Ö14 på tavlan)
Tentamen 2016-01-12 # 5 (Ö14 på tavlan)
Tentamen 2016-03-21 # 4 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2017-01-10 # 3 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2017-10-26 # 2 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2018-01-09 # 3 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2016-06-07 # 3 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2014-10-30 # 2 (Ö14 gör själv)
Tentamen 2017-01-10 # 6 (Ö14 på tavlan)
Tentamen 2017-10-26 # 4 (Ö14 gör själv)

Trigonometriska identiteter

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Standardintervall

$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$

$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \pi$

$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta = 0$

$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4\theta \, d\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Klassiska integraler

$$\int_a^b \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^3 x \, dx = \left[\frac{\cos^3 x}{3}\right]_a^b - \left[\cos x\right]_a^b$$

$$\int_a^b \cos^3 x \, dx = \left[\sin x\right]_a^b - \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^4 x \, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b - \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \cos^4 x \, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b - \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_a^b$$

Klassiska integraler, härledningar

$$\int_a^b \sin x \cos x \, dx = \int_a^b \frac{1}{2} 2\sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_a^b 2\sin x \cos x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_a^b = -\frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^2 x \, dx = \int_a^b \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\int_a^b (1-\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \cos^2 x \, dx = \int_a^b \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\int_a^b (1+\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^3 x \, dx = \int_a^b \sin x(\sin^2 x)\, dx = \int_a^b \sin x(1-\cos^2 x)\, dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{byt } u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \\ dx = -\frac{du}{\sin x} \end{array}\right\} = \int \sin x (1-u^2)\left(-\frac{du}{\sin x}\right) =$$

$$= \int -\frac{\sin x}{\sin x}(1-u^2)\, du = \int (u^2-1)\, du = \int u^2 du - \int 1 \, du =$$

$$= \left[\frac{u^3}{3}\right]_a^b - \left[u\right]_a^b = \left[\frac{\cos^3 x}{3}\right]_a^b - \left[\cos x\right]_a^b$$

$$\int_a^b \cos^3 x \, dx = \int_a^b \cos x(\cos^2 x)\, dx = \int_a^b \cos x(1-\sin^2 x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{byt } u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \\ dx = \frac{du}{\cos x} \end{array}\right\} = \int \cos x (1-u^2)\left(\frac{du}{\cos x}\right) =$$

$$= \int (1-u^2)\, du = \int 1 \, du - \int u^2 du = \left[u\right]_a^b - \left[\frac{u^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \left[\sin x\right]_a^b - \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^4 x \, dx = \int_a^b (\sin^2 x)(\sin^2 x)\,dx = \int_a^b (1-\cos^2 x)(\sin^2 x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x)\,dx = \int_a^b \sin^2 x - (\sin x \cos x)^2 \, dx =$$

$$= \int_a^b \sin^2 x \, dx - \int_a^b (\sin x \cos x)^2 \, dx = \int_a^b \sin^2 x \, dx - \int_a^b \left(\tfrac{1}{2} 2 \sin x \cos x\right)^2 dx =$$

$$= \int_a^b \sin^2 x \, dx - \frac{1}{4}\int_a^b (2\sin x \cos x)^2 \, dx = \int_a^b \sin^2 x \, dx - \frac{1}{4}\int_a^b (\sin 2x)^2 \, dx =$$

$$= \int_a^b \sin^2 x - \frac{1}{4}\int_a^b \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \int_a^b \sin^2 x \, dx - \frac{1}{8}\int_a^b (1-\cos 4x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \sin^2 x \, dx - \frac{1}{8}\left(\int_a^b 1\,dx - \int_a^b (\cos 4x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b - \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \cos^4 x \, dx = \int_a^b (\cos^2 x)(\cos^2 x)\,dx = \int_a^b (1-\sin^2 x)(\cos^2 x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (\cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 x)\,dx = \int_a^b \cos^2 x - (\cos x \sin x)^2 \, dx =$$

$$= \int_a^b \cos^2 x \, dx - \int_a^b (\cos x \sin x)^2 \, dx = \int_a^b \cos^2 x \, dx - \int_a^b \left(\tfrac{1}{2} 2 \sin x \cos x\right)^2 dx =$$

$$= \int_a^b \cos^2 x \, dx - \frac{1}{4}\int_a^b (2 \sin x \cos x)^2 \, dx = \int_a^b \cos^2 x \, dx - \frac{1}{4}\int_a^b \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx =$$

$$= \int_a^b \cos^2 x \, dx - \frac{1}{8}\int_a^b (1-\cos 4x)\,dx = \int_a^b \cos^2 x \, dx - \frac{1}{8}\left(\int_a^b 1\,dx - \int_a^b \cos 4x \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_a^b - \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int_a^b (\sin x \cos x)^2 \, dx = \int_a^b \left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_a^b \sin^2 2x \, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 1 - 2\sin^2 u \\ \sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} \quad u = 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_a^b \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8}\right]_a^b = \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_a^b$$