SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 16

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion, Avsnitt 16.1-16.3

- div, rot, grad — nablaräkning!
- Greens formel

Nablaräkning

Vi studerar följande begrepp:

$g = g(x, y, z)$ en funktionen och $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ vektorfältet:

Nablaräkning

Vi studerar följande begrepp:

$g = g(x, y, z)$ en funktionen och $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ vektorfältet:

- $\mathbf{grad} g = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$

Nablaräkning

Vi studerar följande begrepp:

$g = g(x,y,z)$ en funktionen och $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z)$ vektorfältet:

- $\mathbf{grad} g = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$
- $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Nablaräkning

Vi studerar följande begrepp:

$g = g(x, y, z)$ en funktionen och $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ vektorfältet:

- $\mathbf{grad} g = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$
- $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
- $\mathbf{rot}\ \mathbf{F} = \mathbf{curl}\ \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

Nablaräkning

Vi studerar följande begrepp:

$g = g(x, y, z)$ en funktionen och $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ vektorfältet:

- **grad**$g = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$
- div $\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
- **rot F** $=$ **curl F** $= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

Motsvarande kan definieras i 2d: Då sätter vi $R = 0$

$$\mathbf{F} = (P, Q, 0) \quad \text{och} \quad P, Q \text{ är oberoende av } z.$$

Exempel 1:

Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, y^2 - z^2, yz)$ och beräkna div och rot!

[1] **rot**(**F**) på engelska skrivs **curl F**.

Exempel 1:

Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, y^2 - z^2, yz)$ och beräkna div och rot!

Lösning:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \partial_x(xy) + \partial_y(y^2 - z^2) + \partial_z(yz) = y + 2y + y = 4y.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = {}^1\mathbf{curl}\ \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= (z + 2z, 0 - 0, 0 - x) = (3z, 0, -x).\end{aligned}$$

[1] **rot**(**F**) på engelska skrivs **curl F**.

Nablaräkning

Tolkning av begreppen:

- ∇f pekar i riktning för maxtillväxt av f
- div $\mathbf{F}(P_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\, dS$ vilket anger hur snabbt vektorfältet sprider sig ut från punkten P_0
- $\mathbf{N} \bullet \mathbf{rot}\ \mathbf{F}(P_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \bullet\ d\mathbf{r}$ så rot mäter virveltendensen hos vektorfältet. Riktningen hos **rot F** anger rotationsaxeln och |**rot F**| är ett mått på virvelns styrka.

Corioliseffekten: https://sv.wikipedia.org/wiki/Corioliseffekten

http://www.slate.com/blogs/bad_astronomy/2015/06/03/coriolis_effect_proving_it_does_work_differently_in_different_hemispheres.html

Nablaräkning

Nablaräkning:

1. div $\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F}$

[2] Laplace operatorn betecknas även med Δf.

Nablaräkning

Nablaräkning:

1. div $\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F}$
2. **rot** $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

[2] Laplace operatorn betecknas även med Δf.

Nablaräkning

Nablaräkning:

1. div $\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F}$
2. **rot** $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$
3. $\nabla^2 f = \nabla \bullet \nabla f$ (Laplace-operatorn)[2]

[2] Laplace operatorn betecknas även med Δf.

Nablaräkning

Nablaräkning:

1. div $\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F}$
2. **rot** $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$
3. $\nabla^2 f = \nabla \bullet \nabla f$ (Laplace-operatorn)[2]
4. $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (div **rot** $\mathbf{F} = 0$)

[2]Laplace operatorn betecknas även med Δf.

Nablaräkning

Nablaräkning:

1. div $\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F}$
2. **rot** $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$
3. $\nabla^2 f = \nabla \bullet \nabla f$ (Laplace-operatorn)[2]
4. $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (div **rot** $\mathbf{F} = 0$)
5. $\nabla \times (\nabla f) = (0, 0, 0)$ (**rot grad** $f = (0, 0, 0)$)

[2] Laplace operatorn betecknas även med Δf.

Nablaräkning

Definition:

källfritt/solenoidal:

Om div $\mathbf{F} = 0$ i något område K så sägs $\mathbf{F}$ vara källfritt (solenoidal) i K

Nablaräkning

Definition:

källfritt/solenoidal:
Om div $\mathbf{F} = 0$ i något område K så sägs $\mathbf{F}$ vara källfritt (solenoidal) i K

virvelfritt/irrotational:
Om $\mathbf{rot}\ \mathbf{F} = (0, 0, 0)$ i något område K så sägs $\mathbf{F}$ vara virvelfritt (irrotational) i K.

Nablaräkning

Sats: se boken sid 917

- Varje konservativt fält är virvelfritt (**rot grad** $f = (0, 0, 0)$)

[3] Med GODA områden menar vi moråden där alla slutna ytor begränsar kroppar som ligger helt i området är alltid rotationen av något annat, dvs har vektorpotential. (Om $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ så är $\mathbf{G}$ vektorpotential till $\mathbf{F}$)

Nablaräkning

Sats: se boken sid 917

- Varje konservativt fält är virvelfritt (**rot grad** $f = (0, 0, 0)$)
- Varje rotationsfält är källfritt (div **rot F** $= 0$)

[3] Med GODA områden menar vi moråden där alla slutna ytor begränsar kroppar som ligger helt i området är alltid rotationen av något annat, dvs har vektorpotential. (Om $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ så är $\mathbf{G}$ vektorpotential till $\mathbf{F}$)

Nablaräkning

Sats: se boken sid 917

- Varje konservativt fält är virvelfritt (**rot grad** $f = (0,0,0)$)
- Varje rotationsfält är källfritt (div **rot F** $= 0$)
- Virvelfria fält i enkelt sammanhängande områden är konservativa, dvs har potential

[3] Med GODA områden menar vi moråden där alla slutna ytor begränsar kroppar som ligger helt i området är alltid rotationen av något annat, dvs har vektorpotential. (Om $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ så är **G** vektorpotential till **F**)

Nablaräkning

Sats: se boken sid 917

- Varje konservativt fält är virvelfritt (**rot grad** $f = (0, 0, 0)$)
- Varje rotationsfält är källfritt (div **rot F** $= 0$)
- Virvelfria fält i enkelt sammanhängande områden är konservativa, dvs har potential
- Källfria fält har vektorpotentialer i GODA områden.[3]

[3] Med GODA områden menar vi moråden där alla slutna ytor begränsar kroppar som ligger helt i området är alltid rotationen av något annat, dvs har vektorpotential. (Om $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ så är **G** vektorpotential till **F**)

Exempel:

Har $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, 3xz^2, -2xz)$ någon vektorpotential i $\mathbf{R}^3$? Om ja bestäm vektorpotentialen.

$$\text{Dvs finns det } \mathbf{G} : \qquad \mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}\ ?$$

Exempel:

Har $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, 3xz^2, -2xz)$ någon vektorpotential i $\mathbf{R}^3$? Om ja bestäm vektorpotentialen.

$$\text{Dvs finns det } \mathbf{G} : \qquad \mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}\ ?$$

Svar: Ja, eftersom

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2x + 0 - 2x = 0,$$

så finns det enligt satsen en vektorpotential.
En vektorpotential kan vara är $\mathbf{G} = (xz^3, -x^2z, 0)$. Det finns flera svar. Hur får vi fram $\mathbf{G}$?

Exempel: Fortsättning

Vi har att **F** måste uppfylla $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, där $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_2)$. Dvs

$$\begin{cases} 1) \quad \partial_y G_3 - \partial_z G_2 = x^2 \\ 2) \quad \partial_z G_1 - \partial_x G_3 = 3xz^2 \\ 3) \quad \partial_x G_2 - \partial_y G_1 = -2xz. \end{cases}$$

Problemet är underdeterminerad, dvs ger flera möjliga lösningar. Observera vi har 3 ekvationer men 9 obekanta. En del av dessa kopplas dock automatisk till varandra.

Nablaräkning

Exempel: Fortsättning

Vi har att $\mathbf{F}$ måste uppfylla $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, där $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_2)$. Dvs

$$\begin{cases} 1) \quad \partial_y G_3 - \partial_z G_2 = x^2 \\ 2) \quad \partial_z G_1 - \partial_x G_3 = 3xz^2 \\ 3) \quad \partial_x G_2 - \partial_y G_1 = -2xz. \end{cases}$$

Problemet är underdeterminerad, dvs ger flera möjliga lösningar. Observera vi har 3 ekvationer men 9 obekanta. En del av dessa kopplas dock automatisk till varandra.

Ex.vis om vi väljer en av dessa G_i lika med noll får vi fortfarande ett lösbart problem.

Nablaräkning

Exempel: Fortsättning

Vi har att **F** måste uppfylla $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, där $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_2)$. Dvs

$$\begin{cases} 1) \quad \partial_y G_3 - \partial_z G_2 = x^2 \\ 2) \quad \partial_z G_1 - \partial_x G_3 = 3xz^2 \\ 3) \quad \partial_x G_2 - \partial_y G_1 = -2xz. \end{cases}$$

Problemet är underdeterminerad, dvs ger flera möjliga lösningar. Observera vi har 3 ekvationer men 9 obekanta. En del av dessa kopplas dock automatisk till varandra.

Ex.vis om vi väljer en av dessa G_i lika med noll får vi fortfarande ett lösbart problem.

Vi väljer $G_3 = 0$, av ingen särkilt anledning. Ni kan välja $G_3 = 0$ eller $G_1 = 0$ och prova detta själva.

Exempel: Fortsättning

Med $G_3 = 0$ har vi

$$\begin{cases} 1) & -\partial_z G_2 = x^2 \\ 2) & \partial_z G_1 = 3xz^2 \\ 3) & \partial_x G_2 - \partial_y G_1 = -2xz. \end{cases}$$

som efter integration ger

$$\begin{cases} 1) & G_2 = -x^2 z + K(x,y) \\ 2) & G_1 = xz^3 + H(x,y) \\ 3) & \partial_x G_2 - \partial_y G_1 = -2xz. \end{cases}$$

där k och h är obekanta funktioner (oberoende av z) som ska bestämmas.

Nablaräkning

Exempel: Fortsättning

Ur 3) ska vi bestämma K, H

$$-2xz = \partial_x G_2 - \partial_y G_1 = (-2xz + \partial_x K) - (0 + \partial_y H)$$

$$\rightarrow \qquad \partial_x K = \partial_y H$$

Eftersom det är det enda villkoret för K, H kan vi välja dessa lika med noll, dvs vi sätter $K = H = 0$ och får

$$\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3) = (xz^3, -x^2 z, 0)$$

Sen får man testa detta för att få ett slutlig bekräftelse.

Greens formel: $\mathbb{R}^2$

Greens formel:

Givet ett område D i planet med en glatt randkurva γ, samt För $\mathbf{F} = (P, Q)$ som är deriverbar i D har vi

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

där γ har en positiv orientering.

Exempel: Om γ är enhetscirkeln, positivt orienterad, och $(P, Q) = (-y, x)$ fås direkt utan parametrisering att

$$\int_\gamma -y\, dx + x\, dy = \iint_D 2\, dxdy = 2\pi$$

Greens formel

Area med Greens formel:

Om det reguljära området D begränsas av den enkla slutna styckvis C^1 positivt orienterade kurvan γ, så är

$$\frac{1}{2}\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = \int_\gamma -y\,dx = \int_\gamma x\,dy = \iint_D 1\,dxdy = \text{Arean av D}$$

Greens formel

Exempel:

Beräkna

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

a. om $(P, Q) = (x^2 - y^2, 2xy)$ och γ är den moturs orienterade randen till enhetskvadraten $\{0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$.

b. om $(P, Q) = (e^{x+y}, e^{x+y})$ och γ är den moturs orienterade enhetscirkeln

c. om $(P, Q) = (-y^2 + y, x)$ och γ är övre halvan av enhetscirkeln, från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$

(Facit: a. 2, b. 0, c. 4/3)

Greens formel

Exempel:

Använd Greens formel för att beräkna arean innanför kurvan γ som parametriseras genom

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t + 3\sin t, 2\sin t - 2\cos t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

(Facit: 12π*)*

Minitenta 1

Vi betraktar flödet av vektorfältet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y,\ y,\ 2xy + z + 3)$$

upp genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xyplanet.

A. Parametrisera ytan.

B. Ställ upp integralen som beräknar flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av parametriseringen från A.

C. Beräkna flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av integralen från B.

Tillämpningar och exempel

Minitenta 2

1) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2, 0, 3)$ ut från enhetskuben som ges av
$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

2) Beräkna nettoflödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 3)$ ut ur området som ges av olikheterna $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

3) Beräkna arbetet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (x - y^3, y^3 + x^3)$ längs den positivt orienterade randkurvan till kvartscirkelskivan som ges av $x^2 + y^2 \leq 1$ och $x \geq 0$, $y \geq 0$.