SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 6

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion

För funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ ska vi titta på det som står i bokens kapitel 12.7, nämligen

- Gradient
- Riktningsderivata

Gradient för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition

Gradienten till en funktion f i punkten (x, y) definieras genom vektorn

$$\mathrm{grad} f(x, y) = \left(f_x, f_y\right)$$

Gradient för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition

Gradienten till en funktion f i punkten (x, y) definieras genom vektorn

$$\text{grad} f(x, y) = \left(f_x, f_y\right)$$

En annan vanlig beteckning för denna vektor är ∇f (nabla f).

Se: http://demonstrations.wolfram.com/GradientsIn2DAnd3D/

Gradient för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition

Gradienten till en funktion f i punkten (x, y) definieras genom vektorn

$$\mathrm{grad} f(x, y) = \left(f_x, f_y\right)$$

En annan vanlig beteckning för denna vektor är ∇f (nabla f).

Se: http://demonstrations.wolfram.com/GradientsIn2DAnd3D/

Exempel 1:

Bestäm $\nabla f(x, y)$ och $\nabla f(1, 2)$ om $f(x, y) = 2xy^2$

Gradient för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition

Gradienten till en funktion f i punkten (x, y) definieras genom vektorn

$$\text{grad} f(x, y) = \left(f_x, f_y\right)$$

En annan vanlig beteckning för denna vektor är ∇f (nabla f).

Se: http://demonstrations.wolfram.com/GradientsIn2DAnd3D/

Exempel 1:

Bestäm $\nabla f(x, y)$ och $\nabla f(1, 2)$ om $f(x, y) = 2xy^2$

Lösning:

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (2y^2, 4xy), \qquad \nabla f(1, 2) = (8, 8).$$

Gradient för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Högre dimension

För funktioner av flera variabler $f(\mathbf{x})$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ har vi motsvarande

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_1 f, \partial_2 f, \cdots, \partial_n f)$$

Quiz (här):

Bestäm $\nabla f(x, y, z)$ och $\nabla f(1, 2, 1)$ om $f(x, y, z) = x + yz^2$

Gradient för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Högre dimension

För funktioner av flera variabler $f(\mathbf{x})$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ har vi motsvarande

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_1 f, \partial_2 f, \cdots, \partial_n f)$$

Quiz (här):

Bestäm $\nabla f(x, y, z)$ och $\nabla f(1, 2, 1)$ om $f(x, y, z) = x + yz^2$

Lösning:

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = (1, z^2, 2yz), \qquad \nabla f(1, 2, 1) = (1, 1, 4).$$

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition: Riktningsderivata

Låt $\mathbf{u}$ vara en enhetsvektor, dvs $||\mathbf{u}|| = 1$.

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition: Riktningsderivata

Låt $\mathbf{u}$ vara en enhetsvektor, dvs $||\mathbf{u}|| = 1$. Riktningsderivatan i riktningen $\mathbf{u}$ av funktionen f i punkten $\mathbf{a}$, betecknas

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \quad \textit{eller} \quad \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \quad \textit{eller} \quad \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}}$$

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition: Riktningsderivata

Låt $\mathbf{u}$ vara en enhetsvektor, dvs $||\mathbf{u}|| = 1$. Riktningsderivatan i riktningen $\mathbf{u}$ av funktionen f i punkten $\mathbf{a}$, betecknas

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \quad \textit{eller} \quad \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \quad \textit{eller} \quad \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}}$$

och definieras genom

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

under förutsättning att detta gränsvärde existerar.

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition: Riktningsderivata

Låt $\mathbf{u}$ vara en enhetsvektor, dvs $||\mathbf{u}|| = 1$. Riktningsderivatan i riktningen $\mathbf{u}$ av funktionen f i punkten $\mathbf{a}$, betecknas

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \quad \textit{eller} \quad \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \quad \textit{eller} \quad \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}}$$

och definieras genom

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

under förutsättning att detta gränsvärde existerar.

Tolkning: $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a})$ anger funktionens förändringstakt i punkten $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{u}$.

Se: http://demonstrations.wolfram.com/DirectionalDerivatives/

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Sats:

Om f är differentierbar i $\mathbf{a}$ och $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor, så gäller att

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{a}).$$

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Sats:

Om f är differentierbar i $\mathbf{a}$ och $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor, så gäller att

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{a}).$$

Bevis i 2-dim fallet: Sätt $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$. Definitionen ger

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Sats:

Om f är differentierbar i $\mathbf{a}$ och $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor, så gäller att

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{a}).$$

Bevis i 2-dim fallet: Sätt $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$. Definitionen ger

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Sats:

Om f är differentierbar i $\mathbf{a}$ och $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor, så gäller att

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{a}).$$

Bevis i 2-dim fallet: Sätt $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$. Definitionen ger

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Men om vi räknar ut $g'(t)$ med kedjeregeln får vi

$$g'(t) = f_x x'_t + f_y y'_t,$$

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Sats:

Om f är differentierbar i $\mathbf{a}$ och $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor, så gäller att

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{a}).$$

Bevis i 2-dim fallet: Sätt $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$. Definitionen ger

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Men om vi räknar ut $g'(t)$ med kedjeregeln får vi

$$g'(t) = f_x x'_t + f_y y'_t,$$

där $x(t) = a_1 + tu_1$, $y(t) = a_2 + tu_2$ och $x'_t = u_1$, $y'_t = u_2$ och

$$g'(0) = f_x u_1 + f_y u_2 = (u_1, u_2) \cdot (f_x, f_y) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{a}).$$

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel:

Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, 3)$ i den riktning som ges av $(3, 1)$ om $f(x, y) = x^2 y$.

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel:

Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, 3)$ i den riktning som ges av $(3, 1)$ om $f(x, y) = x^2 y$.

Quiz (här):

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$. Visa att riktningsderivatan av f i punkten (x, y) är störst i riktning (x, y). Tolka detta geometrisk.

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel:

Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, 3)$ i den riktning som ges av $(3, 1)$ om $f(x, y) = x^2 y$.

Quiz (här):

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$. Visa att riktningsderivatan av f i punkten (x, y) är störst i riktning (x, y). Tolka detta geometrisk.

Gemetrisk tolkning

Se grafen till $z = x^2 + y^2$ som en skål.

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel:

Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, 3)$ i den riktning som ges av $(3, 1)$ om $f(x, y) = x^2 y$.

Quiz (här):

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$. Visa att riktningsderivatan av f i punkten (x, y) är störst i riktning (x, y). Tolka detta geometrisk.

Gemetrisk tolkning

Se grafen till $z = x^2 + y^2$ som en skål. Om vi släpper en kula i skålen så kommer den att hela tiden vandra i riktning

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel:

Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, 3)$ i den riktning som ges av $(3, 1)$ om $f(x, y) = x^2 y$.

Quiz (här):

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$. Visa att riktningsderivatan av f i punkten (x, y) är störst i riktning (x, y). Tolka detta geometrisk.

Gemetrisk tolkning

Se grafen till $z = x^2 + y^2$ som en skål. Om vi släpper en kula i skålen så kommer den att hela tiden vandra i riktning $(-x, -y)$ (om den befinner sig i (x, y)) får att snabbast nå origo.

Gradient och riktningsderivata

Gradientens geometriska egenskaper

Anta att f är differentierbar i $\mathbf{a}$. Då gäller

Gradient och riktningsderivata

Gradientens geometriska egenskaper

Anta att f är differentierbar i $\mathbf{a}$. Då gäller

1. Om $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, så är $\nabla f(\mathbf{a})$ ortogonal mot den nivåkurva/yta till f som passerar genom punkten $\mathbf{a}$.

Gradient och riktningsderivata

Gradientens geometriska egenskaper

Anta att f är differentierbar i $\mathbf{a}$. Då gäller

1. Om $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, så är $\nabla f(\mathbf{a})$ ortogonal mot den nivåkurva/yta till f som passerar genom punkten $\mathbf{a}$.

2. I punkten $\mathbf{a}$ ökar f snabbast i den riktning som ges av $\nabla f(\mathbf{a})$. Funktionens maximala tillväxttakt är $|\nabla f(\mathbf{a})|$

Gradient och riktningsderivata

Gradientens geometriska egenskaper

Anta att f är differentierbar i $\mathbf{a}$. Då gäller

1. Om $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, så är $\nabla f(\mathbf{a})$ ortogonal mot den nivåkurva/yta till f som passerar genom punkten $\mathbf{a}$.

2. I punkten $\mathbf{a}$ ökar f snabbast i den riktning som ges av $\nabla f(\mathbf{a})$. Funktionens maximala tillväxttakt är $|\nabla f(\mathbf{a})|$

3. I punkten $\mathbf{a}$ minskar f snabbast i den riktning som ges av $-\nabla f(\mathbf{a})$. Funktionens maximala minskningstakt är $|\nabla f(\mathbf{a})|$

Gradient och riktningsderivata

Gradientens geometriska egenskaper

Anta att f är differentierbar i $\mathbf{a}$. Då gäller

1. Om $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, så är $\nabla f(\mathbf{a})$ ortogonal mot den nivåkurva/yta till f som passerar genom punkten $\mathbf{a}$.

2. I punkten $\mathbf{a}$ ökar f snabbast i den riktning som ges av $\nabla f(\mathbf{a})$. Funktionens maximala tillväxttakt är $|\nabla f(\mathbf{a})|$

3. I punkten $\mathbf{a}$ minskar f snabbast i den riktning som ges av $-\nabla f(\mathbf{a})$. Funktionens maximala minskningstakt är$|\nabla f(\mathbf{a})|$

4. I punkten $\mathbf{a}$ är förändringstakten av f noll i riktningar som är tangentiella till f:s nivåkurva/yta genom $\mathbf{a}$.

Gradient och riktningsderivata

Bevis: Läs själva

1. Anta att vi är i fallet två variabler; bevisidén är densamma i flera variabler. Anta att nivåkurvan har en parametrisering $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Då gäller med kedjeregeln att

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = \nabla f(x, y) \bullet (x'(t), y'(t))$$

Samtidigt vet vi att denna derivata måste vara 0 eftersom f är konstant på nivåkurvan. Det betyder att ∇f är ortogonal mot $(x'(t), (y'(t))$ som ju en tangentvektor.

2. Riktningsderivatan ges av

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{a}) = |\mathbf{u}||\nabla f(\mathbf{a})| \cos \alpha = |\nabla f(\mathbf{a})| \cos \alpha$$

och det är uppenbart att detta är som störst när vinkeln $\alpha = 0$, dvs när $\mathbf{u}$ är riktad som ∇f, och det maximala värdet är då $|\nabla f|$.

Gradient och riktningsderivata

Minitenta (2015-08-20):

Betrakta funktionen f som är definierad i området där $x + y^2 \neq 0$ genom

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{x + y^2}.$$

(a) Beräkna gradienten $\nabla f(x, y, z)$.

(b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(2, 1, 1)$ i riktning mot punkten $(4, -1, 2)$.

(c) I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(2, 1, 1)$?

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel:

1. På hur många olika sätt kan man ta fram en ekvation för tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2 + 1$ i punkten $(1, 2, 6)$?

Exempel:

1. På hur många olika sätt kan man ta fram en ekvation för tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2 + 1$ i punkten $(1, 2, 6)$?

Svar: 1) Linjär approximation, 2) normalen til ytan $F(x, yz) = x^2 + y^2 + 1 - z = 0$, 3) normalen till funktionsgrafen $(f_x, f_y, -1)$.

Riktningsderivata för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel:

1. På hur många olika sätt kan man ta fram en ekvation för tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2 + 1$ i punkten $(1, 2, 6)$?

Svar: 1) Linjär approximation, 2) normalen til ytan $F(x, yz) = x^2 + y^2 + 1 - z = 0$, 3) normalen till funktionsgrafen $(f_x, f_y, -1)$.

2. Finn en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, -1, 1)$ till den tvåmantlade hyperboloid (rita bild) som ges av ekvationen

$$x^2 + 2y^2 - 4z^2 = -1$$

Läxa till nästa gång

Gör detta:

1. Uppgifter i boken:
   a. kap 12.3 uppg **5** , 7, **13**, 23
   b. kap 12.4 uppg **5**, 7, **11**, 15, 17
   c. kap 12.5 uppg **7**, 11, **17**, 21
   d. kap 12.6 uppg 3, **5, 17**, 19
   e. kap 12.7 uppg **3**, 5, 13, **17**, 25
2. De fetstilta kan komma på seminarieprovet!
3. Titta på uppgifterna 1-4 till seminarium 2

Repetition gradient (Lite mer att läsa)

Quiz (hemma): Tillämpning 1:

Exempel 4 i bokens kapitel 12.7 där

$$h(x,y) = \frac{20}{3 + x^2 + 2y^2}$$

och det gäller att hitta nivåkurvan genom $(3,2)$, gradienten i $(3,2)$, maximala riktningsderivatan i $(3,2)$ mm. Tolkningar!

Repetition gradient (Lite mer att läsa)

Quiz (hemma): Tillämpning 2

Effektutvecklingen P (watt) i ett motstånd ges av någon funktion $P = P(U, R)$, där U är spänningen (volt) över motståndet och R är resistansen (ohm). För denna funktion P gäller att

$$\frac{\partial P}{\partial U}(220, 10) = 44 \quad \text{och} \quad \frac{\partial P}{\partial R}(220, 10) = -484$$

Ökar eller minskar effekten om spänningen ökas från 220 till 225 volt och resistansen ökas från 10 till 10.25 ohm? Med ungefär hur mycket?

Repetition gradient (Lite mer att läsa)

Quiz (hemma): Tillämpning 2

Effektutvecklingen P (watt) i ett motstånd ges av någon funktion $P = P(U, R)$, där U är spänningen (volt) över motståndet och R är resistansen (ohm). För denna funktion P gäller att

$$\frac{\partial P}{\partial U}(220, 10) = 44 \quad \text{och} \quad \frac{\partial P}{\partial R}(220, 10) = -484$$

Ökar eller minskar effekten om spänningen ökas från 220 till 225 volt och resistansen ökas från 10 till 10.25 ohm? Med ungefär hur mycket? **Lösning:** Låt
$\mathbf{v} = (5, 0.25) = (225, 10.25) - (220, 10)$, och
$\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| \approx (1, 0.05)$. Vi har att
$\partial_{\mathbf{u}} P(220, 10) = \mathbf{u} \cdot \nabla P = 44u_1 - 484u_2 \approx 44 - 19.3 = 24.7 > 0$.
Dvs ökar med ungefär $24.7 \times \|\mathbf{v}\| \approx 24.7 \times 5 = 123.5$.

Quiz (hemma): Tillämpning 3

Vid bestämning av tyngkraftsaccelerationen g vid fritt fall mäter man falltiden t sekunder och fallsträckan s meter. Då gäller att

$$g = \frac{2s}{t^2} \quad \text{m/s}^2$$

Vid ett försök fick man

$$s = 2 \pm 0.01 \quad \text{och} \quad t = 0.63 \pm 0.01.$$

Vilket värde på g erhålls och med vilken noggranhet?

(Ur Persson, Böiers: Övningar i analys i flera variabler)