

Crash Course

# Flervariabelanalys

Patrik Hardin



Crash Course Sverige AB  
Org nr 559039-3483

May 26, 2016

# Contents

<b>1</b>	<b>Analytisk geometri i tre dimensioner</b>	<b>3</b>
1.1	Mängder i xy-planet . . . . .	3
1.2	Mängder i xyz-rummet . . . . .	3
1.3	Inre-, yttre- och randpunkter . . . . .	3
1.4	Öppna och slutna mängder . . . . .	4
1.5	Avståndsformeln . . . . .	4
1.6	Koordinatsystem . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Vektorvärda funktioner</b>	<b>6</b>
2.1	Parametrisering av kurvor . . . . .	6
2.2	Skärning mellan ytor . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Skalära funktioner</b>	<b>7</b>
3.1	Skalära funktioner av en variabel . . . . .	7
3.2	Skalära funktioner av två variabler . . . . .	7
3.3	Skalära funktioner av tre variabler . . . . .	7
3.4	Skalära funktioner, exempel . . . . .	7
3.5	Nivåkurvor . . . . .	8
3.6	Derivering . . . . .	8
3.7	Tangentplan . . . . .	8
3.8	Kedjeregeln i flera variabler . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Vektorvärda funktioner av fler variabler</b>	<b>10</b>
4.1	Exempel $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
4.2	Derivering . . . . .	10
4.3	Exempel derivering $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
4.4	Skalfaktor . . . . .	11
4.5	Exempel skalfaktor . . . . .	11
4.6	Approximering av vektorvärda funktioner . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Gradient</b>	<b>12</b>
5.1	Gradienten i $\mathbb{R}^2$ . . . . .	12
5.2	Förändring i en viss riktning . . . . .	12
5.3	Tangentplan . . . . .	12
5.4	Kritiska punkter . . . . .	13
5.5	Karaktär av kritisk punkt . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Optimering</b>	<b>14</b>
6.1	Optimering med bivillkor . . . . .	14
6.2	Lagranges multiplikatormetod . . . . .	15

<b>7</b>	<b>Integration i flera variabler över skalära funktioner</b>	<b>16</b>
7.1	Dubbelintegraler . . . . .	16
7.2	Exempel dubbelintegraler . . . . .	17
7.3	Dubbelintegraler i cylindriska koordinater . . . . .	17
7.4	Trippelintegraler . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Vektorfält</b>	<b>19</b>
8.1	Fältlinjer . . . . .	19
8.2	Potential och konservativa vektorfält . . . . .	19
8.3	Allmän metod för att hitta $\phi$ . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Kurv- och ytintegraler</b>	<b>21</b>
9.1	Kurvintegraler av skalärfält . . . . .	21
9.2	Kurvintegraler av vektorfält . . . . .	21
9.3	Ytintegraler av skalärfält . . . . .	22
9.4	Ytintegraler av vektorfält . . . . .	22
<b>10</b>	<b>Differentialoperatorer och följsatser</b>	<b>23</b>
10.1	Rotationsfria fält . . . . .	23
10.2	Green's sats . . . . .	23
10.3	Areaberäkning med Green's sats . . . . .	24
10.4	Centroid . . . . .	24
10.5	Gauss' sats - Divergenssatsen . . . . .	25
10.6	Stoke's sats . . . . .	26

# 1 Analytisk geometri i tre dimensioner

## 1.1 Mängder i xy-planet

Inom analys av en variabel kan en mängd bestå av enstaka element eller spann av tal. Detta kan ses som punkter eller områden på en endimensionell axel. Med samma princip kan mängder konstrueras utifrån fler dimensioner.

Mängder i planet kan exempelvis vara:

- Punkter
- Linjer och kurvor
- Områden

Om randen till ett givet område ingår i mängden ges av hur mängden definieras. För en mängd  $M$  given som

$$M = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$$

Gäller att alla punkter innanför och på cirkeln med raden 3 centrerad kring origo tillhör  $M$ . Hade vänsterled enbart varit mindre än 3 är randen inte inkluderad. Hade vänsterled enbart varit lika med 3 är enbart randen inkluderad i mängden  $M$

## 1.2 Mängder i xyz-rummet

Mängder i rummet kan utöver ovan vara:

- Plan
- Kroppar

## 1.3 Inre-, yttre- och randpunkter

En punkt  $P$  i  $R^n$  är en inre punkt till mängden  $M$  om det finns minst en öppen sfär med centrum i  $P$  vars alla punkter ligger i  $M$ . Omgränsas enbart av andra inre punkter.

En punkt  $P$  i  $R^n$  är en yttre punkt till mängden  $M$  om det finns minst en öppen sfär med centrum i  $P$  vars alla punkter ligger i komplementet till  $M$ , det vill säga utanför  $M$ .

En punkt  $P$  i  $R^n$  är en randpunkt till mängden  $M$  om varje öppen sfär med centrum i punkten innehåller minst en punkt från  $M$  och minst en punkt från komplementmängden till  $M$ .

## 1.4 Öppna och slutna mängder

- En mängd  $M$  i  $\mathbb{R}^n$  är sluten om samtliga randpunkter till  $M$  tillhör  $M$ .
- En mängd  $M$  i  $\mathbb{R}^n$  är öppen om inga randpunkter till  $M$  tillhör  $M$ .
- En mängd  $M$  i  $\mathbb{R}^n$  är varken öppen eller sluten om inte alla, men några randpunkter tillhör  $M$

## 1.5 Avståndsformeln

Avståndet mellan två punkter  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$  ges med pythagoras sats två gånger som

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

## 1.6 Koordinatsystem

En punkt i exempelvis  $\mathbb{R}^3$  kan uttryckas med hjälp av fler än ett koordinatsystem. Huvudprincipen är att en beteckning enbart ska kunna mappas till en punkt i rummet och vice versa

Det **kartesiska** koordinatsystemet uttrycker det tredimensionella rummet med hjälp av tre ortonormala enhetsvektorer. Då dessa är linjärt oberoende spänns hela  $\mathbb{R}^3$  upp.

Det **cylindriska** koordinatsystemet uttrycker xy-planet med hjälp av planavståndet  $r$  till punkten samt vinkeln  $\theta$  från positiv x-axel. Höjden  $z$  över xy-planet representeras på samma sätt som för kartesiska koordinater. Då varje kombination av  $r, \theta$  enbart representerar en och endast en punkt i  $\mathbb{R}^2$  kommer detta koordinatsystem att fungera. Detta system är att föredra vid parametriseringar och integreringar över exempelvis cirkulära och slutna områden.

Det är möjligt att översätta detta koordinatsystem till det kartesiska genom sambanden

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Det **sfäriska** koordinatsystemet uttrycker det tredimensionella rummet med hjälp av ett rymdavstånd  $\rho$ , en vinkel från positiv x-axel  $\theta$  samt en vinkel från positiv z-axel  $\phi$

Det sfäriska koordinatsystemet översätts till det kartesiska genom sambanden

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

## 2 Vektorvärda funktioner

Vektorvärda funktioner är den första typen av funktion som introduceras inom flervariabelanalys och har ett vektorvärt output. För nu kollar vi enbart på funktioner av en variabel, alltså funktioner på form  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

För en sådan vektorvärd funktion ges varje vektorkomponent av en skalär funktion av en variabel, i många fall av en vinkel eller tid. Denna typ av vektorvärd funktion användas ofta för att beskriva aktuell position vid en given tid eller vinkel för exempelvis en partikel i rörelse (ortsvektor), där positionen i varje led vid tiden eller vinkeln uttrycks av dessa skalärfunktioner. Detta kan skrivas som

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \quad \text{alternativt} \quad \mathbf{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

Derivatans till en vektorvärd funktion erhålls genom att derivera varje komponent för sig. För en Ortsvektor av typen ovan beskriver derivatorna hastighet och acceleration

### 2.1 Parametrisering av kurvor

En vektorvärd funktion i  $\mathbb{R}^n$  kan användas för att beskriva en godtycklig kurva. Med olika villkor på en eller flera av x, y eller z-komponenterna kan vektorn endast nå vissa punkter i  $\mathbb{R}^n$ . Exempelvis Ortsvektorn given som

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ k\theta \end{pmatrix}$$

kommer att vara en parametrisering av en spiral kring z-axeln med radien r. Detta eftersom den i xy-led likt enhetscirkeln rör sig i en cirkelbana för ökande värde på  $\theta$  samtidigt som den rör sig med konstant fart k uppåt i z-led.

### 2.2 Skärning mellan ytor

Villkor av denna typ uppkommer när två ytor skär varandra. Då bildas en skärningskurva som kan parametriseras med hjälp av en vektorfunktion. Mer om detta i nästa del när vi introducerar skalärfält som kan beskriva ytor i rummet.

### 3 Skalära funktioner

En skalär funktion är en funktion som returnerar ett skalärt värde från input och är i princip enda typen av funktion som studeras i matematisk analys av en variabel. I flervariabelanalysen utökas denna sorts funktion genom att låta antalet argument en funktion tar vara fler än ett. Ändå matas alltid ett skalärt värde ut!

Generellt kan en skalär funktion beskrivas som  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

#### 3.1 Skalära funktioner av en variabel

För en funktion  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  returneras ett skalärt värde som funktion av en input. Representeras med hjälp av två dimensioner där funktionens värde vid input  $x$  ges av höjden  $y = f(x)$ . Detta ger upphov till en funktionskruva  $\in \mathbb{R}^2$

#### 3.2 Skalära funktioner av två variabler

Även **skalärfält**. För en funktion  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  returneras ett skalärt värde som funktion av två input. Representeras med hjälp av tre dimensioner där funktionens värde vid punkten  $(x, y)$  i planet ges av höjden  $z = f(x, y)$ . Detta ger upphov till en funktionsyta eller ett skalärfält  $\in \mathbb{R}^3$

#### 3.3 Skalära funktioner av tre variabler

För en funktion  $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  returneras ett skalärt värde som funktion av tre input. Till skillnad från funktioner av en eller två variabler är funktioner med tre eller fler variabler svåra att visualisera. Samma principer gäller hursomhelst och funktionen ovan kommer således returnera ett skalärt värde för varje punkt i rummet. Denna typ av funktion kan i många fall liknas vid en densitetsfunktion för varje punkt i  $\mathbb{R}^3$  då varje punkt tilldelas ett skalärt funktionsvärde.

#### 3.4 Skalära funktioner, exempel

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad f(1, 2) = 5 \quad f(10, 10) = 200$$

$$g(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2 - z^2} \quad f(0, 0, 0) = 1 \quad f(\infty, \infty, \infty) = 0$$

Ovanstående exempel returnerar för varje val av input, som förstås tillhör funktionens definitionsmängd, ett skalärt värde. Funktionen  $f$  är en **paraboloid**. Funktionen  $g$  skulle kunna representera en himlakropp med densitet 1 i origo och 0 i oändligheten.



### 3.5 Nivåkurvor

Nivåkurvor till en skalärfunktion i  $\mathbb{R}^2$  hittas genom att sätta funktionen  $f(x, y)$  lika med en konstant  $C$ . I princip är detta en skärning mellan ytorna  $z = f(x, y)$  och  $z = C$  vilket ger en skärningskurva i xy-planet (som kan parametriseras av en vektorvärd funktion!). Nivåkurvorna ger en projicerad bild i xy-planet om hur ett skalärfälts yta ser ut! Tänk en orienteringskarta med ringar. Varje slutna kurva representerar en viss höjd  $C$ . Ju närmre mellan kurvorna, desto brantare etc.

### 3.6 Derivering

När vi inför fler variabler ger detta oss fler sätt att derivera. En skalär funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kommer att ha  $n$  stycken partiella derivator av första ordningen, en per variabel. Då dessa derivator också är funktioner  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kommer antalet derivator av andra ordningen till  $f$  vara  $n^2$  och så vidare. Detta kan liknas vid ett familjetråd. Varje partiell derivata hittas genom att derivera med avseende på den aktuella variabeln och behandla andra variabler som konstanter.

För att ta funktionen  $f(x, y) = x^2 + y^2$  som exempel, kommer den att ha de partiella derivatorna av ordning ett och två:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

### 3.7 Tangentplan

För funktioner av en variabel representerar derivatan lutningen vid en viss punkt på funktionskurvan. På liknande sätt beskriver de partiella derivatorna till en funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  förändringstakterna i de olika ortonormala riktnignarna.

Till ett skalärfält kan man således skapa upp ett tangentplan som, likt en tangentlinje, tangerar funktionsytan vid en given punkt  $(a, b)$ . Uttrycket för detta tangentplan erhålls exempelvis genom att utföra Taylorserieutveckling till ordning ett i flera variabler. Detta inkluderar förstas båda partiella derivatorna till ordning ett:

$$\Pi(x, y) = z = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

Tangentplan används likt tangentlinjer för att approximera svåruttryckta värden för icke-linjära funktioner.

### 3.8 Kedjeregeln i flera variabler

Kedjeregeln är ett bra verktyg att tillämpa när vi vill derivera en funktion av en eller flera *variabler* som i själva verket är funktion(er) av en eller flera variabler. I envariabelanalysen existerar bara ett fall av detta:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

För en skalärfunktion av flera variabler expanderas detta samband med partiella derivator. Kedjeregeln i två dimensioner ger för en funktion  $f(u, v)$  där  $u = u(x, y)$   $v = v(x, y)$  den partiella derivatan i x-led:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ f(u(x, y), v(x, y)) \right] = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

För en partiell derivata till  $f$  av ordning två utförs samma operation fast med avseende på den aktuella förstaderivatan istället för  $f$ .

## 4 Vektorvärda funktioner av fler variabler

En vektorfunktion av fler variabler tar argument i form av en vektor och returnerar en annan vektor som output. Funktionen kan således uttryckas som  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Detta kan liknas vid en linjär transformation inom den linjära algebran i den mån att funktionen modifierar en vektor, dock utan det faktum att transformationen är linjär.

### 4.1 Exempel $\mathbb{R}^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Varje komponent i outputvektorn är ett skalärfält som funktion av varje input i inputvektorn. Denna typ av funktion kan helt enkelt ses som flera skalärfält i en och samma funktion på exakt samma sätt som en vektorvärd funktion i en variabel kunde ses som flera envariabelfunktioner i en och samma vektorvärda funktion.

### 4.2 Derivering

Det som kan liknas vid derivatan till en vektorfunktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  antar formen av en matris med dimensionerna  $m \times n$  där elementen är samtliga första ordningens partiella derivator till  $f$ . Denna matris kallas Jacobimatrix och dess determinant kallas Jacobianen.

### 4.3 Exempel derivering $\mathbb{R}^2$

För den vektorvärda funktionen i exemplet ovan ges Jacobimatriken av

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

I varje rad i matrisen deriveras varje skalärfältskomponent med avseende på varje variabel. Detta görs sedan för varje skalärfält i outputvektorn, vilket då skapar upp matrisen.

## 4.4 Skalfaktor

Determinanten till Jacobimatrisen, Jacobianen, representerar funktionens skalfaktor. En vektorvärd funktion som modifierar en inputvektor kan ses som ett variabel- eller koordinatbyte och skalfaktorn av denna funktion berättar för oss om hur saker som areor i de olika systemen ska skalas mot varandra. Detta kommer att vara viktigt senare när vi byter koordinatsystem under integration!

## 4.5 Exempel skalfaktor

Ett bra exempel på skalfaktor är för funktionen som utför variabelbytet mellan kartesiska och cylindriska koordinater.

$$f(r, \theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r \cos(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial r \cos(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

Skalfaktorn för detta koordinatbyte är således  $r$ .

## 4.6 Approximering av vektorvärda funktioner

Av samma princip som att tangentplan och tangentlinjer kan användas för att approximeras skalära funktionsvärden i vissa punkter, kan jacobimatrisen användas för att göra approximationer av vektorvärda funktioner

Metoden är väldigt lik **Eulers numeriska stegmetod** och bygger på att man väljer en punkt nära punkten man söker funktionsvärde i och följer derivatans riktning linjärt från funktionsvärdet där i ett litet steg. Steget är helt enkelt avståndet mellan den valda punkten och punkten man vill approximeras. I en variabel ser det ut som

$$f(a + \Delta) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta$$

För en vektorvärd funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  är startpunkten tredimensionell och således även stegvektorn  $\Delta$ . Derivatans representeras av jacobimatrisen.

$$f(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c) \approx f(a, b, c) + \mathbf{J}[f(a, b, c)] \cdot \Delta$$

## 5 Gradient

Gradienten är en **differentialoperator** och verkar på skalära funktioner. Gradienten i  $\mathbb{R}^n$  är per definition en **vektor** med  $n$  komponenter som ges av den partiella derivatan med avseende på variabel  $x_n$ . I exempelvis  $\mathbb{R}^3$  ser gradienten samt gradienten av  $f$  ut som

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix}$$

### 5.1 Gradienten i $\mathbb{R}^2$

Gradienten av en funktion i  $\mathbb{R}^2$  är alltså en vektor med 2 komponenter. Denna vektor kan visualiseras som vinkelrät från nivåkurvan i den undersökta punkten. Hade man stått på ett skalärfältsbärg och släppt en kula hade kulan helt enkelt rullat åt gradientens riktning. Eftersom den pekar rakt ut från nivåkurvan, pekar den rakt ut från den kurva som ligger på höjden  $C$ . Alltså åt det brantaste hållet.

### 5.2 Förändring i en viss riktning

Skalärmultiplikationen mellan en vektor  $\mathbf{v}$  och en enhetsvektor  $\hat{\mathbf{e}}$  åt valfri riktning kommer att ge ett värde på hur **mycket** vektorn  $\mathbf{v}$  pekar åt enhetsvektorns riktning. Är vektorerna vinkelräta är detta värde 0, är vektorerna parallella är värdet längden av  $\mathbf{v}$ .

Vi kan således använda gradienten för att få ett värde på hur mycket det lutar (hur stor förändring) åt en viss riktning i en viss punkt på ett skalärfält genom att skalärmultiplicera gradientvektorn i den aktuella punkten med enhetsvektorn åt den riktning vi är intresserade av.

### 5.3 Tangentplan

Gradienten kan dessutom användas för att hitta ett tangentplan till en skalärfunktion  $f(x, y)$  i en given punkt. Punkten som tangentplanet tangerar kommer att vara en punkt som uppfyller sambandet  $[x, y, z] = [a, b, f(a, b)]$ . Endast då ligger punkten på funktionsytan till  $f$ . Planet i denna punkt kan uttryckas genom normalvektorn till  $f$  där.

Normalvektorn hittas genom att ansätta en ny funktion,  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  där  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ . Denna funktion kommer att anta funktionsvärdet 0 när vi är på en punkt  $(x, y, z)$  som ligger på funktionsytan till  $f$ , alltså att  $F[a, b, f(a, b)] = 0$ . Gradienten till denna funktion i punkten vi söker tangentplan till kommer som följd av detta att vara normal ut från funktionsytan!

$$\mathbf{n} = \nabla F = \begin{pmatrix} \partial F / \partial x \\ \partial F / \partial y \\ \partial F / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Samband mellan  $f$  och  $F$  ger slutsatsen att normalvektorn till ett skalärfält i en sökt punkt alltid kommer att vara gradienten till  $f$  med en insatt  $-1$  i den ananns tomma  $z$ -komponenten till  $\nabla f$

## 5.4 Kritiska punkter

Ett av gradientens huvudområden är att berätta om en punkt är kritisk (alt. stationär). Om vi återigen befinner oss på vårt skalärfältsberg  $f(x, y)$ , men den här gången på dess topp, och släpper en kula kommer den inte rulla alls. Detta innebär ju att gradientvektorn måste vara  $\mathbf{0}$  utifrån det tidigare resonemanget om att kulan rullar längs gradienten.

Detta är ju väldigt rimligt eftersom att på toppen av ett skalärfält är förändringstakten åt både  $x$ - och  $y$ -led 0, likt det faktum att derivatan för en skalärfunktion av en variabel (funktionskurva) är noll i en topp. Naturligtvis gäller samma resonemang för dalar och sadelpunkter.

$$\nabla f = \mathbf{0} \rightarrow \text{kritisk punkt!}$$

## 5.5 Karaktär av kritisk punkt

När man väl har identifierat en kritisk punkt är det intressant att avgöra dess karaktär. Om det inte är uppenbart eller om karaktär inte kan avgöras med hjälp av exempelvis symmetri görs detta enklast genom att analysera **Hessianmatrisen**. Denna är en matris innehållande alla partiella derivator av ordning 2. För ett skalärfält i  $\mathbb{R}^2$  ges hessianmatrisen av

$$\mathbf{H}[f(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

I en given punkt, lämpligen en kritisk punkt som ska undersökas, antar matrisen skalära värden i varje element. Om alla subdeterminanter till  $\mathbf{H}$  är större än 0 är matrisen **positivt definit** och funktionen antar då ett **minimum**. Om värdet av subdeterminanterna alternerar från minus till plus är matrisen **negativt definit** vilket ger funktionen ett **maximum**. Om resultatet är varken eller av dessa två är matrisen **indefinit** vilket innebär en **sadelpunkt**. Om alla subdeterminanter är noll kan ingen slutsats dras.

## 6 Optimering

Optimering handlar om att hitta ett **optimum**, det vill säga ett maximum eller minimum givet vissa restriktioner. Det kan handla om att minimera en kostnad för en viss typ av konstruktion eller att maximera någon form av värde. Dessa typer av restriktioner kallas ofta **bivillkor** och ger förutsättningar för hur optimeringsproblemet ska bemötas.

### 6.1 Optimering med bivillkor

Optimering med generella **bivillkor** är den första typen av optimering vi stöter på inom matematisk analys av flera variabler.

Det första av två huvudsakliga villkor som vi ofta stöter på inom sådana optimeringsproblem är att vi har ett samband mellan variabler. Säg att vi har en funktion  $V(x, y, z)$ , som beskriver Volymen av ett visst föremål dimensionerna  $x, y$  och  $z$ . Låt oss sedan införa bivillkoret att  $y = 2x$ . Detta kommer att innebära att vår funktion kan uttryckas som  $V(x, 2x, z)$ , vilket kan uttryckas som en annan funktion av två variabler  $W(x, z)$  där optimum förslagsvis hittas med hjälp av gradient.

Den andra typen av vanligt förekommande bivillkor är vi söker optimum av ett skalärfält  $f(x, y)$  över ett viss kurva. Säg att vi vill optimera skalärfältet  $f$  över enhetscirkeln. Då kan vi uttrycka funktionen  $f$  som  $f[\cos(\theta), \sin(\theta)]$  som är en funktion av endast en variabel och lätt att hitta kritiska punkter till. Återigen ser vi ett samband av variabler, vilket leder till att vi kan **reducera** antalet variabler. Flera bivillkor ger oss flera samband och därmed flera sätt att förenkla vårt problem!

## 6.2 Lagranges multiplikator metod

Lagranges multiplikator metod fungerar i samtliga  $\mathbb{R}^n$  men för enkelhetens skull beskrivs metoden i  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$ .

Metoden tillämpas i  $\mathbb{R}^2$  när vi vill optimera en funktion  $f(x, y)$  givet ett eller flera bivillkor på formerna  $g_i(x, y) = 0$ . Dessa bivillkor beskriver i  $\mathbb{R}^2$  en kurva (nivåkurva!) som den givna funktionen ska optimeras över. Detta innebär i verkligheten att vi söker den punkt i xy-planet på den givna kurvan som ger det största/minsta funktionsvärdet instoppat i  $f$ ! Har vi flera bivillkor sökes optimum på en punkt som ligger på båda kurvorna skapade av bivillkoren.

I  $\mathbb{R}^3$  används metoden på liknande sätt när en funktion  $f(x, y, z)$  ska optimeras över en funktionsyta (nivåyta!). En skalärfunktion av tre variabler har ett skalärt värde för varje punkt i rummet, man kan tänka sig att funktionen beskriver en densitet som varierar för varje punkt i  $\mathbb{R}^3$  enligt funktionen. Optimeringen söker alltså den punkt på den givna ytan som har största/minsta densitetsvärdet.

För att hitta optimum med denna metod ansätts att gradienterna till funktionen och till samtliga bivillkorsfunktioner är parallella. Att dessa gradientvektorer är parallella innebär att de är linjärkombinationer av varandra

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 + \dots \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Om antalet av bivillkoren + funktionen i sig, dvs att antalet vektorer som ska vara parallella, är lika med antalet dimensioner vi undersöker är kan vi istället använda oss av matriser. Från den linjära algebran vet vi, för att ta  $\mathbb{R}^2$  som exempel, att två stycken tvådimensionella vektorer är linjärt beroende om determinanten är 0 när vi sätter vektorerna i en  $2 \times 2$ -matris. Helt enkelt att

$$|\nabla f \quad \nabla g| = 0$$

Där båda gradienterna har två komponenter. Är matrisen inte kvadratisk fungerar ej detta samband och linjärkombinationer med hjälp av  $\mu, \lambda$  ställs upp istället.



## 7 Integration i flera variabler över skalära funktioner

Integration i flera variabler fungerar i stort sett precis på samma sätt som integration i en variabel. I flervariabelanalysen introduceras begreppen dubbel- och trippelintegral, samt några fler typer av integraler som blir mer intressanta först senare.

Dubbel- och trippelintegraler är till skalära fält av två respektive tre dimensioner precis vad en enkelintegral är över av en envariabelfunktion. Således kommer många liknelser med dessa att göras. Den svåra biten med att beräkna en integral i fler dimensioner är ofta att identifiera integrationsområdet. Själva beräkningen sker på i princip samma sätt som i envariabelanalysen, fast då men en integraluträkning per dimension.

### 7.1 Dubbelintegraler

En dubbelintegral används för att integrera en skalärfunktion av två variabler  $f(x, y)$  över ett område i  $xy$ -planet. Detta genererar en volym mellan området i  $xy$ -planet och funktionsytan över detta område.

Detta är exakt samma sak som att en funktionskurva i en variabel integreras över ett område på  $x$ -axeln och därmed genererar en area. Ett sådant område sätter villkor på  $x$ , exempelvis att  $3 \leq x \leq 5$ .

På samma sätt kräver ett välformulerat område i  $xy$ -planet villkor eller samband för både  $x$  och  $y$ . Att låta både  $x$  och  $y$  likt exemplet i en variabel gå mellan två värden skulle ge ett område i form av en rektangel eller kvadrat. Mer avancerat är att låta en variabel gå från ett värde till en linje och den andra gå mellan två värden. Detta resulterar i att området kan bli triangulärt

Säg som exempel att vi låter  $y : 0 \rightarrow x$  och sedan att vi låter  $x : 0 \rightarrow 1$ . Detta kommer att ge en triangel mellan  $x$ -axeln, linjen  $x = 1$  samt linjen  $y = x$ .

När dubbelintegralen räknas ut görs detta först med en inre integral över den ena variabeln. Resultatet av denna integrering integreras sedan igen med avseende på den andra variabeln. Har man ett villkor uttryckt som ett samband mellan de olika variablerna (som exemplet med triangeln där vi lät  $y : 0 \rightarrow x$ ) är det oftast enklast att integrera över den variabeln först.

## 7.2 Exempel dubbelintegraler

Låt oss säga att vi har givet ett skalärfält  $f(x, y) = x^2 + y^2$  och att vi vill integrera det över triangeln  $T$  i  $xy$ -planet med hörn i punkterna  $(0, 0); (2, 1); (2, 0)$ .

Första steget är att identifiera vad de olika variablerna ska gå mellan för att spänna upp det sökta området. För en dubbelintegral vill vi generellt sett först låta den inre variabeln gå mot ett uttryck av den yttre integralen, helt enkelt en linje. Detta eftersom den inre integralen då kommer att anta ett värde av den yttre integralen (som då sedan integreras). I detta fall kan vi låta  $y : 0 \rightarrow 0.5x$  för att sedan låta  $x : 0 \rightarrow 2$ . I detta fall behöver vi integrera  $y$  först eftersom denna variabel går mot  $x$ . Sedan integreras  $x$  mellan två skalära värden. Detta ger en dubbelintegral på form

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left( \int_0^{0.5x} x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left( 0.5x^3 + \frac{0.125x^3}{3} \right) dx = \left[ \frac{0.5}{4}x^4 + \frac{0.125}{12}x^4 \right]_0^2 = \frac{13}{6}$$

## 7.3 Dubbelintegraler i cylindriska koordinater

I många fall antar integrationsområdena former som inte är så enkla att beskriva med det kartesiska koordinatsystemet, exempelvis cirkelskivor eller tårtbitar. I dessa fall är det mycket enklare att beskriva området i fråga med cylindriska koordinater.

Låt säga att vi vill integrera över ett område  $D$  givet som en halvcirkelskiva över  $x$ -axlen, centrerad i origo med radien 2. Området  $D$  beskrivs enklast med cylindriska koordinater genom att låta  $r : 0 \rightarrow 2$  och  $\theta : 0 \rightarrow \pi$ . Om vi vill integrera ett skalärfält över detta område måste funktionen i fråga skrivas om så att  $x$  och  $y$  omvandlas till  $r \cos(\theta)$  respektive  $r \sin(\theta)$ . Integralen kan sedan beräknas på samma sätt som en dubbelintegral i kartesiska koordinater, men en inre och yttre integral. Dessutom måste vi ta hänsyn till att ett areaelement  $dx dy \neq dr d\theta$ . Detta justeras genom att multiplicera med skalfaktorn som vi räknade ut tidigare ( $r$ ). Då lyder sambandet att

$$dA = dx dy = r dr d\theta.$$

Skulle ett annat koordinatbyte utöver cylindriska koordinater vara mer lämpligt hittas skalfaktorn för det koordinatbytet på samma sätt genom att beräkna Jacobideterminanten för den vektorvärda funktionen mellan systemen.

## 7.4 Trippelintegraler

Trippelintegraler följer samma mönster som enkel- och dubbelintegraler. Här integreras en skalärfunktion av tre variabler  $f(x, y, z)$  över ett område i xyz-rummet, exempelvis en sfär eller ett rätblock. Då en skalärfunktion av tre variabler kan liknas vid en densitet kan integralen av en sådan funktion över ett område i  $\mathbb{R}^3$  liknas vid den ackumulerade massan. Alltså massan av ett solitt föremål med formen given av integrationsområdet och densitet givet som funktionen som ska integreras.

Själva integrationssteget sker på liknande sätt. För dubbelintegralerna ville vi att den inre variabeln skulle gå mot en linje, och att den andra variabeln skulle gå mot ett värde. På samma sätt vill vi ofta för en trippelintegral låta den mest inre variabeln gå mot en yta för att reducera antalet variabler från tre till två. Detta ger oss en dubbelintegral. Den variabeln som nu är innerst vill vi låta gå mot en linje för att likt exemplet ovan reducera antalet variabler till en, vilket ger oss en helt vanlig enkelintegral mellan två skalära värden.

För trippelintegraler är det ofta vanligt att gå över till **sfäriska koordinater** för integrationsområden som är sfäriskt utformade.

## 8 Vektorfält

Ett vektorfält är en funktion  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  där varje komponent i funktionsvektorn är ett skalärfält av dimension  $n$ . I  $\mathbb{R}^2$  ser detta ut som

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

För varje punkt i xy-planet kommer funktionen att anta en vektorvärde, också av dimension 2. Därför kan denna vektor enkelt ritas ut i planet som en pil. Detsamma gäller för vektorfält i tre dimensioner där funktionen istället returnerar en vektor i  $\mathbb{R}^3$ , för högre dimensioner är vektorfält inte lika förekommande eller intressanta då de ofta är härledda från ett verklighetsbaserat scenario, som ett elektriskt- eller ett gravitationsfält av olika slag.

### 8.1 Fältlinjer

Likt nivåkurvor för en skalärfunktion kan man till ett vektorfält identifiera **fältlinjer**. Dessa hittas genom att ansätta sambadet

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} \quad \text{där } F_1 \text{ och } F_2 \text{ är de två komponenterna till } \mathbf{F}$$

För ett vektorfält angivet i cylindriska koordinater ges detta samband av

$$\frac{dr}{F_r} = \frac{r d\theta}{F_\theta}$$

Även här ser vi att skalfaktorn  $r$  har en påverkan på koordinatbytet

### 8.2 Potential och konservativa vektorfält

Potentialen till ett vektorfält benämns  $\phi$  och är en skalär funktion  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  där  $n$  är samma som vektorfältets dimension. En vanlig beskrivning av vad potentialfunktion uttrycker är, för att göra en liknelse med mekaniken, lägesenergin som ett föremål har vid en viss punkt i vektorfältet. Skillnaden mellan funktionsvärde för två punkter är således ett värde på den mängd energi som krävs för att röra sig denna sträcka i fältet, oavsett väg. Detta är dock endast sant för **konservativa** vektorfält och det är alltså endast till sådana fält som en potentialfunktion kan hittas. Ett konservativt fält är exempelvis gravitationsfältet.

Potentialfunktionen  $\phi$  har den relationen till vektorfältet  $\mathbf{F}$  att  $\phi = \nabla \mathbf{F}$ . Utifrån gradientens definition ger detta oss för ett vektorfält i  $\mathbb{R}^2$  följande samband

$$F_1 = \frac{d\phi}{dx} \quad F_2 = \frac{d\phi}{dy}$$

Derivering av dessa samband med avseende på motsatt variabel ger att

$$\frac{d^2\phi}{dxdy} = \frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dx}$$

Detta innebär allt som allt att **om** vektorfältet uppfyller ovanstående samband mellan derivatorna till  $F_1$  och  $F_2$  så **kan** en potentialfunktion hittas, men inte alltid. Om detta samband för  $\mathbf{F}$  uppfylls kan man gå vidare för att hitta skälärfunktionen  $\phi$ , som då uppfyller sambandet att  $\phi = \nabla \mathbf{F}$ . Om en sådan funktion finns, säger man att vektorfältet är **konservativt**. Annars är fältet helt enkelt inte konservativt.

Likheten mellan derivatorna till vektorfältskomponenterna:  $\frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dx}$  kan också härledas från att fältet  $\mathbf{F}$  är rotationsfritt, vilket är ett begrepp som vi går djupare in på senare. Att ett fält i  $\mathbb{R}^3$  är rotationsfritt och därmed möjliggör förekomsten av en potential  $\phi$  ges av sambanden

$$\frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dx} \quad \frac{dF_1}{dz} = \frac{dF_3}{dx} \quad \frac{dF_2}{dz} = \frac{dF_3}{dy}$$

### 8.3 Allmän metod för att hitta $\phi$

För att hitta  $\phi$  till det givna fältet  $\mathbf{F}$  används det faktum att de olika komponenterna är derivator till den hittills okända funktionen. Genom att integrera dessa komponenter med avseende på korrekt variabel erhålls flera uttryck för potentialfunktionen  $\phi$  som man kan arbeta med och återigen derivera för att slutligen hitta ett uttryck för potentialen. Detta förutsatt att sådan finns, vilket inte alltid är fallet.

$$\phi(x, y, z) = \int F_1(x, y, z)dx = \int F_2(x, y, z)dy = \int F_3(x, y, z)dz$$

## 9 Kurv- och ytintegraler

Tidigare har vi pratat om integraler i flera variabler över områden i  $\mathbb{R}^n$ . Nu introducerar vi istället konceptet kurvintegraler och ytintegraler, där vi istället integrerar ett skalärfält eller ett vektorfält över en kurva eller en yta.

### 9.1 Kurvintegraler av skalärfält

För en kurvintegral av ett skalärfält beräknar vi det sammanlagda integrerade funktionsvärdet av skalärfältet över en viss kurva istället för över ett område. Detta kan för ett skalärfält i  $\mathbb{R}^2$  visualiseras som den area som bildas mellan **kurvan** i xy-planet och funktionsvärdet. Matematiskt uttrycks en kurvintegral av det tvådimensionella skalärfältet  $f$  över kurvan  $C$  som

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Där  $s$  är ett bågelement och  $\mathbf{r}(t)$  är den vektorfunktion som parametriserar kurvan  $C$ . Gränserna  $a$  och  $b$  avser de värden på variabeln  $t$  där kurvan har sin början och sitt slut. Vi ser här att integranden,  $f(\mathbf{r}(t)) \cdot \|\mathbf{r}'(t)\|$ , kommer att vara en produkt av två skalärer och en funktion av parametern  $t$ . Således beräknas integralen som en helt vanlig integral av en variabel. Om kurvan  $C$  är sluten skrivs integralen som §

### 9.2 Kurvintegraler av vektorfält

En kurvintegral av ett vektorfält fungerar på liknande sätt, med enda skillnaden att vi istället integrerar en vektorvärd funktion. Om vektorfältet beskriver ett kraftfält av slag, beskriver en kurvintegral det arbete som krävs för att förflytta sig längs en viss kruva  $C$ , detta om och endast om vektorfältet är **konserverativt**! Jämför med definitionen av arbete inom mekanik, kraft gånger väg. Detta uttrycks som

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Även här ser vi att integranden är en skalär, eftersom vi har produkt av två vektorer. Detta ger oss återigen en integral av en variabel mellan kurvans gränser.

### 9.3 Ytintegraler av skalärfält

En ytintegral av ett skalärfält är en typ av dubbelintegral som integrerar en funktion över en viss geometrisk yta  $S$ . Detta kan skrivas matematiskt på några olika sätt, men det jag tycker är effektivast är

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + 1} dx dy$$

Detta ser vid första anblick väldigt mer komplicerat ut än vad det är. Vad vi gör är att vi låter ytan  $S$  som vi vill integrera över uttryckas av en skalärfunktion  $g(x, y)$ . Om vi använder denna funktions värde som villkor för  $z$  i funktionen vi vill integrera,  $f$ , så kommer vi att få en integrand av enbart  $x$  och  $y$  som vi integrerar med hjälp av en vanlig dubbelintegral. För att beräkna denna integral **måste** vi dock gå över till integrationsområdet  $D$  som är projektionen av  $S$  ned på  $xy$ -planet. Alltså de gränser vi har på funktionen  $g(x, y)$  i  $xy$ -planet för att enbart uttrycka den del av funktionen som ger oss ytan  $S$ . Om ytan  $S$  är sluten skrivs integralen som  $\oiint$

### 9.4 Ytintegraler av vektorfält

En ytintegral av ett vektorfält är nära kopplade till ytintegraler av skalära fält med enda skillnaden i vad som integreras. För att göra ytterligare en liknelse med fysikaliska samband kan en ytintegral av ett vektorfält användas för att beräkna **flöde**. Om vektorfältet som integreras beskriver exempelvis ett magnetfält, ger integralen av fältet över en viss yta  $S$  ett värde på hur stort det magnetiska flödet är genom  $S$ . En ytintegral av ett vektorfält skrivs som

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dx dy$$

Notera att normalvektorn går från att vara normerad till inte normerad vid övergången från  $dS$  till  $dx dy$ . Detta är ett resultat av att ytans areaelement inte alltid är perfekt kvadratisk som  $dx dy$  är. Ännu ett resultat som kan anknytas till skalfaktorn av olika variabelbyten.

Skalarprodukten  $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  kommer att returnera storleken av hur långt  $\mathbf{F}$  pekar i riktningen av  $\hat{\mathbf{n}}$ . Om detta värde integreras ut i varje punkt på ytan  $S$  får vi ett värde för det sammanlagda flödet!

## 10 Differentialoperatorer och följsatser

Tidigare har vi pratat om den vektorvärda differentialoperatorn  $\nabla$  som i  $\mathbb{R}^n$  är en vektor med  $n$  komponenter som alla är den partiella derivatan avseende på variabeln med index  $n$ .

Nu introducerar vi två differentialoperatorer till. **Divergens** och **rotation** (eng. **curl**). Dessa två, samt gradient, definieras i  $\mathbb{R}^3$  som

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad \operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$$

### 10.1 Rotationsfria fält

När vi tidigare pratade om konservativa vektorfält sa vi att följande samband måste gälla för att en potential sak kunna existera (men inte alltid!)

$$\frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dx} \quad \frac{dF_1}{dz} = \frac{dF_3}{dx} \quad \frac{dF_2}{dz} = \frac{dF_3}{dy}$$

Dessa tre samband får vi ut om vi sätter  $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Därför säger vi återigen att ett konservativt vektorfält måste vara **rotationsfritt**.

### 10.2 Green's sats

Green's sats är ett samband mellan dubbelintegralen över ett slutet område,  $D$ , och kurvintegralen kring randen av samma slutna område,  $\partial D$ . Satsen är mest applicerbar i  $\mathbb{R}^2$  och lyder där

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy := \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Notera att alla kurvintegraler här inte är en del av själva satsen utan bara omskrivningar av samma sak. Satsen säger att samtliga av dessa är lika med dubbelintegralen längst till höger. Viktigt här också är att området,  $D$  är **positivt orienterat**. Det innebär att om man följer dess rand,  $\partial D$ , så ska området hela tiden befinna sig till vänster. För ett positivt orienterat område pekar normalvektorn uppåt.



### 10.3 Areaberäkning med Green's sats

Med Green's sats kan man även beräkna arean av ett område i  $\mathbb{R}^2$  med hjälp av en kurvintegral. Om  $F_1$  och  $F_2$  väljs rätt ges då ett specialfall av Green's sats som

$$Area(D) = \iint_D dA = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} xdy - ydx$$

### 10.4 Centroid

Innan nästa sats introduceras begreppet centroid, vilket är ett uttryck för geometrisk medelpunkt. Ofta av ett tredimensionellt område. Om vi har ett massivt och homogent område  $D$  i  $\mathbb{R}^3$  är centroidpunkten densamma som masscentrum. Denna centroidpunkt har förstås tre komponenter som hittas på liknande vis

$$x_c = \frac{1}{V_D} \iiint_D x dV \quad y_c = \frac{1}{V_D} \iiint_D y dV \quad z_c = \frac{1}{V_D} \iiint_D z dV$$

$$(x_c + y_c + z_c) = \frac{1}{V_D} \iiint_D (x + y + z) dV \rightarrow (x_c + y_c + z_c) \cdot V_D = \iiint_D (x + y + z) dV$$

## 10.5 Gauss' sats - Divergenssatsen

Gauss' sats, eller divergenssatsen, är ett samband mellan divergensen av ett vektorfält över ett visst område  $D \in \mathbb{R}^3$  och flödet genom områdets ytor (rand), definierat med ytintegraler. Sambandet lyder att

$$Flux(D) = \iiint_D \text{div}(\mathbf{F}) dV = \oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Båda sidorna i likheten uttrycker samma sak, nämligen flödet **ut** ur kroppen  $D$ . Satsen används ofta då man vill beräkna flödet genom en viss del av ett område. Säg att vi vill beräkna flödet genom en manteln av en öppen halvsfär för ett visst vektorfält. Att beräkna flödet med en vanlig ytintegral hade varit relativt svårt då normalen till halvsfärsytan inte är konstant. Istället kan vi tänka oss att vi lägger till ett "lock" på halvsfären så att den sluts och då använda vänsterledet i Gauss' sats för hela halvsfären  $D$ . För att endast beräkna flödet genom halvsfärens mantel subtraheras därefter flödet genom "locket", som beräknas med hjälp av högerledet i Gauss' sats och en konstant normalvektor!

$$Flux(Mantel) = Flux(Halvklot) - Flux(lock) = \iiint_{Halvklot} \text{div}(\mathbf{F}) dV - \oiint_{\partial lock} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{lock} dS$$

Viktigt för att dessa beräkningar ska fungera är att alla ytor är positivt orienterade, normalvektorn måste peka **utåt**! Då man vid användandet av divergenssatsen ofta beräknar en trippelintegral över en summa av  $x, y$  och  $z$ -termer är det ofta användbart med **centroid**! Centroid är den geometriska mittpunkten för en kropp med koordinat  $(x_c, y_c, z_c)$ . Sambandet gäller:

$$\iiint_D (x + y + z) dV = (x_c + y_c + z_c) \cdot V$$

Det kan förstås vara enbart  $x, y$  eller  $z$  och behöver inte vara alla tre i integranden. Om vi vill beräkna flödet ut ur en kropp där divergensen är en kombination av  $x, y$  och  $z$ -termer är det alltså inte nödvändigt att veta hur kroppen ser ut. Vi behöver endast veta kroppens volym samt var dess centroid ligger!

## 10.6 Stoke's sats

Stoke's sats ger ett samband mellan en ytintegral och en sluten kurvintegral där kurvan utgör randen till ytan. Satsen säger att för en yta  $S$  gäller att

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

där  $\mathbf{r}$  parametriserar randen  $\partial S$ . Satsen kan användas antingen för att gå från vänster till höger eller från höger till vänster beroende på vilken information man har given och vilken som sökes.

Uttrycket för areaelementet definieras som

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dx dy$$

Stoke's sats saknar minne vilket innebär att man kan gå från en yta till en rand och tillbaka till en annan yta som då inte nödvändigtvis behöver vara densamma som föregående yta. Om vi exempelvis vill integrera högerledet över en öppen halvsfär använder vi vänsterledet och kollar på den cirkel som utgör randen. Sedan använder vi Stoke's sats igen men går nu istället till motsvarande cirkelskiva som är en annan yta med samma rand som halvsfären. Att integrera högerledet i Stoke's sats över denna cirkelskiva är betydligt enklare än att integrera över halvsfären men ger samma resultat.