SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 4

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion: Avsnitt 12.3-12.4

För funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ ska vi titta på:

- Partiella derivator
- Tangentplan,
- Partiella derivator av högre ordning
- Kedjeregeln

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Tillbakablick

Vi har definierad gränsvärde samt kontinuitet.

Elementära funktioner är kontinuerliga överallt där de är definierade.

Att beräkna gränsvärden generellt svår uppgift, då måste man använda starka matematiska verktyg.

Enkla uppgifter ofta handlar om att visa att gränsvärden inte existerar.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Partiella derivator

För funktionen $f(x, y)$ definieras de partiella derivatorna i punkten (a, b) i definitionsmängden genom:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

under förutsättning att dessa gränsvärden existerar.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Partiella derivator

För funktionen $f(x, y)$ definieras de partiella derivatorna i punkten (a, b) i definitionsmängden genom:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

under förutsättning att dessa gränsvärden existerar.

Man fryser en variabel och deriverar i den andra variabelns riktning.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Partiella derivator

För funktionen $f(x, y)$ definieras de partiella derivatorna i punkten (a, b) i definitionsmängden genom:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

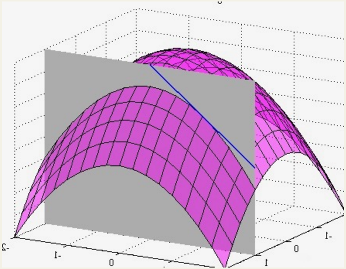
under förutsättning att dessa gränsvärden existerar.

Man fryser en variabel och deriverar i den andra variabelns riktning.

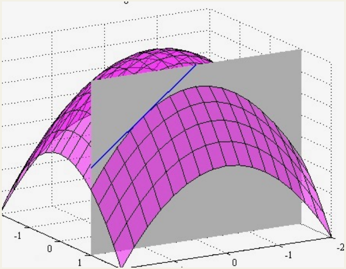
Samma princip tillämpas för funktioner av n-variabler, och vi kan få n-olika oberoende riktningar att derivera på.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Grafisk presentation av partiella derivator



Figur: derivata i x-riktningen, med y fryst



Figur: derivata i y-riktningen, med x fryst

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Beteckningar

Följande beteckningar används för partiella derivator

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \partial_x f, \quad \partial_y f \qquad f_x, \quad f_y, \quad f'_x, \quad f'_y$$

$$D_x f, \quad D_y f, \qquad D_1 f, \quad D_2 f \qquad f'_1, \qquad f'_2$$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Exempel

1. Bestäm f_x och f_y till funktionen $f(x, y) = x^2y + y^3$.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Exempel

1. Bestäm f_x och f_y till funktionen $f(x, y) = x^2y + y^3$.

   $$\textit{svar}: \qquad f_x = 2xy, \qquad f_y = x^2 + 3y^2$$

2. Om $g(x, y) = x^2 \sin(xy)$, beräkna $g_y(1, 0)$.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Exempel

1. Bestäm f_x och f_y till funktionen $f(x,y) = x^2y + y^3$.

   $$\textit{svar}: \qquad f_x = 2xy, \qquad f_y = x^2 + 3y^2$$

2. Om $g(x,y) = x^2 \sin(xy)$, beräkna $g_y(1,0)$.

   $$\textit{svar}: \qquad g_y = x^2(x\cos(xy)), \qquad g_y(1,0) = 1.$$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Exempel

1. Bestäm f_x och f_y till funktionen $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

   $$\textit{svar}: \qquad f_x = 2xy, \qquad f_y = x^2 + 3y^2$$

2. Om $g(x, y) = x^2 \sin(xy)$, beräkna $g_y(1, 0)$.

   $$\textit{svar}: \qquad g_y = x^2(x\cos(xy)), \qquad g_y(1, 0) = 1.$$

Här har vi använt kedjeregeln i 1-variabel analys, eftersom x-variabeln ses som konstant.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Låt $h(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$. Beräkna

$$h(\sqrt{3}, 1), \qquad \text{och} \qquad h_x(\sqrt{3}, 1).$$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Låt $h(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$. Beräkna

$$h(\sqrt{3},1), \qquad \text{och} \qquad h_x(\sqrt{3},1).$$

Lösning

Vi har $h(\sqrt{3},1) = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6$. Derivering ger (kedjeregel)

$$h_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{y^2+x^2}$$

som för $(x,y) = (\sqrt{3},1)$ ger $h_x(\sqrt{3},1) = \frac{-1}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-1}{4}$.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Vad är ett tangentplan

Låt $f(x, y)$ vara en funktion av 2 variabler och deriverbar. Låt vidare $p_0 = (x_0, y_0)$ vara en punkt i planet och $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en punkt på ytan $z = f(x, y)$ (dvs $z_0 = f(x_0, y_0)$).

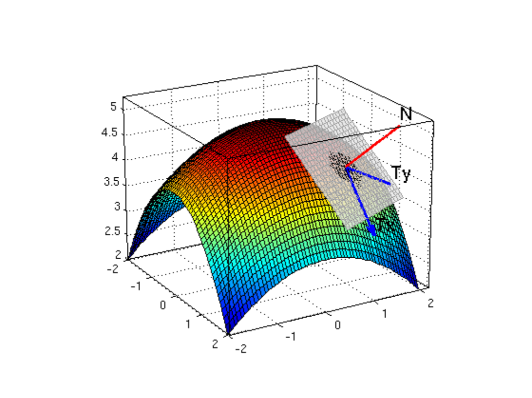
Ett tangentplan till grafen $z = f(x, y)$ i punkten P_0 är en linjär funktion i (x, y)-variabler (med graf i $\mathbb{R}^3$) $T(x, y)$) som tangerar grafen till f i punkten P_0, dvs har samma normal som ytan $z = f(x, y)$ i punkten P_0. Matematisk uttrycks detta på följande sätt:

$$(T_x, T_y) = (f_x, f_y) \quad \text{i punkten } (p_0)$$

Varje linje i planet $z = T(x, y)$ är också en tangentlinje till ytan $z = f(x, y)$ i punkten P_0.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Vad är ett tangentplan: Bild



Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Wolfram demonstration:

Se följande sidor för rörliga exempel:

http://demonstrations.wolfram.com/TangentPlanesOnA3DGraph/

http://demonstrations.wolfram.com/TangentPlanesToQuadraticSurfaces/

http://demonstrations.wolfram.com/TangentToASurface/

Tangentplan: Exempel

Finn en parametrisering av kurvan som är skärningen av ytan $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ med planet $y = 1$. Bestäm en tangentvektor till denna kurva i punkten $(2, 1, 6)$

Tangentplan: Exempel

Finn en parametrisering av kurvan som är skärningen av ytan $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ med planet $y = 1$. Bestäm en tangentvektor till denna kurva i punkten $(2, 1, 6)$

Lösning: Kurvan skrivs som

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, 1, t^2 + 2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Punkten $(2, 1, 6)$ ges av $(2, 1, 6) = (t, 1, t^2 + 2)$ dvs $t = 2$.

Tangentplan: Exempel

Finn en parametrisering av kurvan som är skärningen av ytan $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ med planet $y = 1$. Bestäm en tangentvektor till denna kurva i punkten $(2, 1, 6)$

Lösning: Kurvan skrivs som

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, 1, t^2 + 2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Punkten $(2, 1, 6)$ ges av $(2, 1, 6) = (t, 1, t^2 + 2)$ dvs $t = 2$.
Och tangentlinjen som

$$\mathbf{T}_1(t) = \mathbf{r}_1'(t) = (1, 0, 2t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

som för $t = 2$ får vi $\mathbf{T}_1(2) = (1, 0, 4)$.

Tangentplan: Exempel 1

Finn en parametrisering av kurvan som är skärningen av ytan $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ med planet $x = 2$. Bestäm en tangentvektor till denna kurva i punkten $(2, 1, 6)$.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Tangentplan: Exempel 1

Finn en parametrisering av kurvan som är skärningen av ytan $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ med planet $x = 2$. Bestäm en tangentvektor till denna kurva i punkten $(2, 1, 6)$.

Lösning: Kurvan skrivs som

$$\mathbf{r}_2(s) = (2, s, 4 + 2s^2), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Punkten $(2, 1, 6)$ ges av $(2, 1, 6) = (2, s, 4 + 2s^2)$ dvs $s = 1$.

Tangentplan: Exempel 1

Finn en parametrisering av kurvan som är skärningen av ytan $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ med planet $x = 2$. Bestäm en tangentvektor till denna kurva i punkten $(2, 1, 6)$.

Lösning: Kurvan skrivs som

$$\mathbf{r}_2(s) = (2, s, 4 + 2s^2), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Punkten $(2, 1, 6)$ ges av $(2, 1, 6) = (2, s, 4 + 2s^2)$ dvs $s = 1$. Och tangentlinjen som

$$\mathbf{T}_2(s) = \mathbf{r}_2'(s) = (0, 1, 4s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

som för $s = 1$ får vi $\mathbf{T}_2(1) = (0, 1, 4)$.

Tangentplan: Exempel 3

Bestäm, med hjälp av linjär algebra, ekvationen för det plan genom punkten $(2, 1, 6)$ som är parallellt med båda tangentvektorerna ovan.

Tangentplan: Exempel 3

Bestäm, med hjälp av linjär algebra, ekvationen för det plan genom punkten $(2, 1, 6)$ som är parallellt med båda tangentvektorerna ovan.

Lösning: Det sökta planet har normalen

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (4, 4, -1).$$

Alltså planets ekvation ges av $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0$ där $\mathbf{x} = (x, y, z)$, och $\mathbf{x}^0 = (2, 1, 6)$. Således får vi

$$(4, 4, -1) \cdot (x - 2, y - 1, z - 6) = 0 \qquad \textit{dvs} \qquad z = 4x + 4y - 3.$$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Tangentplan: Teori

För att bestämma tangentplan till en funktionsgraf $z = f(x, y)$ i en punkt $P_0 = (a, b, f(a, b))$ på ytan bestämmer vi först normalen genom samma procedur som ovan. Detta ger oss då normalvektorn till planet

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_y \\ 1 & 0 & f_x \end{vmatrix} = (f_x, f_y, -1), \quad \text{i punkten } (a, b)$$

Alltså planets ekvation ges av

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Tangentplan: Teori (egen undersökning)

Ett alternativt skrivsätt för tangentplan, då

$$f_x(a,b) \neq 0, \quad och \quad f_y(a,b) \neq 0$$

är

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

Quiz (hemma):

Visa att ekvationen ovan på ett unikt sätt representerar tangentplanets ekvation för ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Given funktionen $f(x, y) = x^2y + y^3 - 7$.

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 2, 3)$.
2. Ange en vektor som är ortogonal mot funktionsytan i den givna punkten.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Given funktionen $f(x, y) = x^2y + y^3 - 7$.

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 2, 3)$.
2. Ange en vektor som är ortogonal mot funktionsytan i den givna punkten.

Ekvationen ges av:

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Vi beräknar: $f_x = 2xy$ som i punkten $(1, 2)$ blir $f_x(1, 2) = 4$. På samma sätt $f_y = x^2 + 3y^2$, och $f_y(1, 2) = 13$. Dvs

$$z = 3 + 4(x - 1) + 13(y - 2).$$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Högre ordningens derivator

Högre ordningens derivator kan också beräknas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se gärna sidan:
http://demonstrations.wolfram.com/SecondOrderPartialDerivatives/

Quiz (här):

Beräkna de fyra partiella andraderivatorna till
$f(x, y) = x^2 y + y^3 - 7$.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Högre ordningens derivator

Högre ordningens derivator kan också beräknas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se gärna sidan:
http://demonstrations.wolfram.com/SecondOrderPartialDerivatives/

Quiz (här):

Beräkna de fyra partiella andraderivatorna till
$f(x, y) = x^2 y + y^3 - 7$.
Det verkar som $f_{xy} = f_{yx}$! är det alltid så?

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Teori

Om de blandade partiella andraderivatorna är kontinuerliga så är de lika, dvs $f_{xy} = f_{yx}$

Bevis

Använd en hjälp funktion, genom att sätta

$$Q = f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b).$$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Teori

Om de blandade partiella andraderivatorna är kontinuerliga så är de lika, dvs $f_{xy} = f_{yx}$

Bevis

Använd en hjälp funktion, genom att sätta

$$Q = f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b).$$

Q kan skrivas på två sätt, dels som $F(a+h) - F(a)$ för funktionen $F(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Teori

Om de blandade partiella andraderivatorna är kontinuerliga så är de lika, dvs $f_{xy} = f_{yx}$

Bevis

Använd en hjälp funktion, genom att sätta

$$Q = f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b).$$

Q kan skrivas på två sätt, dels som $F(a+h) - F(a)$ för funktionen $F(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$

och dels som $G(b+h) - G(b)$ för funktionen $G(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Vi har då att

$$Q = F(a+h) - F(a) = G(b+h) - G(b).$$

Teori

Bevis fortsättning

Med hjälp av medelvädessatsen (envariabel) får vi c, d s. a. $hF'(c) = hG'(d)$ vilket översatt till f betyder (efter förkortning med h) att $f'_x(c, b+h) - f'_x(c, b) = f'_y(a+h, d) - f'_y(a, d)$.

Teori

Bevis fortsättning

Med hjälp av medelvädessatsen (envariabel) får vi c, d s. a. $hF'(c) = hG'(d)$ vilket översatt till f betyder (efter förkortning med h) att $f'_x(c, b+h) - f'_x(c, b) = f'_y(a+h, d) - f'_y(a, d)$.

Nu använder vi medelvärdessatsen på samma sätt igen och får punkter m och n s. a. $hf''_{xy}(c, m) = hf''_{yx}(n, d)$.

Teori

Bevis fortsättning

Med hjälp av medelvädessatsen (envariabel) får vi c, d s. a. $hF'(c) = hG'(d)$ vilket översatt till f betyder (efter förkortning med h) att $f'_x(c, b+h) - f'_x(c, b) = f'_y(a+h, d) - f'_y(a, d)$.

Nu använder vi medelvärdessatsen på samma sätt igen och får punkter m och n s. a. $hf''_{xy}(c, m) = hf''_{yx}(n, d)$.

Om vi förkortar med h och låter $h \to 0$ och använder att de partiella andraderivatorna är kontinuerliga så följer satsen.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Quiz (hemma): / **Quiz (utmaning):**

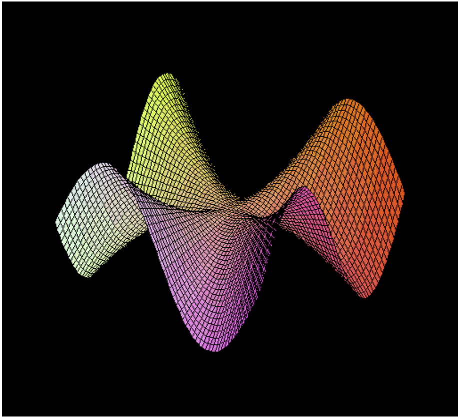
Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Visa att $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ existerar men är ej lika. (Svår kalkyl.)

Tips: Använd definitionen.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$



Quiz (här): Horisontellt tangentplan (parallellt med *xy*-planet)

Hur bestämmer vi om en funktionsgraf $z = f(x, y)$ har en horisontell tangenplan?
Avgör om ytan $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ har något tangentplan som är horisontellt?

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här): Horisontellt tangentplan (parallellt med xy-planet)

Hur bestämmer vi om en funktionsgraf $z = f(x, y)$ har en horisontell tangenplan?
Avgör om ytan $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ har något tangentplan som är horisontellt?

Quiz (utmaning): Vertikalt tangentplan parallellt med z-axeln.

Hur bestämmer vi om en (nivå) yta $F(x, y, z) = 0$ har ett vertikal tangentplan? (Avsnitt 12.7).

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$

Själva, men viktig

Läs Ex. 3,4 sidan 693. Speciellt Laplace, värme och vågekvationen.

Beräkna

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$$

då $z = \log(x^2 + y^2)$, och $(x, y) \neq (0, 0)$.

Samma fråga för $z = \arctan(y/x)$.