SOLFERINO

Appendix för intensivkursen
i Flervariabelanalys, våren 2019

(med reservation för tryckfel,
errata och freudianska felsägningar)

av **Tâm Vũ**, tamv@kth.se

Innehåll

1 Klassiska enkelintegraler

Nedan är några enkelintegraler som ofta dyker upp som en del av en multipelintegral. Med C avses en godtycklig konstant.

Titta igenom gamla tentamensuppgifter så förstår du hur pass viktigt det är att kunna dessa integraler för några delpoäng här och där.

KLASSIKER 0. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

KLASSIKER 1. $\displaystyle\int \sin x \cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$

KLASSIKER 2. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Några **standardvärden** som brukar dyka upp i samband med dubbelintegraler i polära koordinater är

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

KLASSIKER 3. $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

$$\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

KLASSIKER 4. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

Anmärkning: Trigonometriska integrander med högre exponenter förekommer i princip inte på tentamen. De som är nyfikna och har för mycket fritid kan dock ta en titt på **reduktionsformler** (på engelska: reduction formulae) för $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

1.1 Härliga härledningar

Följande härledningar behöver ofta inte redovisas på en tentamenslösning. Det är dock uppmuntrande att studenter systematiskt lär sig vad de primitiva funktionerna kommer ifrån.

KLASSIKER 0. $\displaystyle\int xe^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$$\int xe^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Härledning: En något lång men säker metod för att primitivisera xe^{x^2} är att införa variabelsubstitutionen $u = x^2$. Då fås

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x \, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

och sedan

$$\int xe^{x^2} \, dx = \int xe^u \frac{1}{2x} \, du = \frac{1}{2} \int e^u \, du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

KLASSIKER 1. $\displaystyle\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C$

Härledning: Minns formeln för dubbla vinkel $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ och vi får direkt

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C$$

KLASSIKER 2. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Härledning: En kombination av formeln för dubbla vinkeln $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ och den trigonometriska ettan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ger

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

dvs. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

Då vi ska integrera $\sin^2 x$ vill vi lösa ut den från sambandet ovan enligt

$$\sin^2 x = \frac{\cos(2x) - 1}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

vilket är ett lätthanterligt uttryck då exponenten 2 inte längre finns. Alltså:

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

På samma sätt fås

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

KLASSIKER 3. $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

$$\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Härledning: Notera först att

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x \sin^2 x\,dx = \int \sin x\left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

Inför variabelsubstitutionen $u = \cos x$ och vi får

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow du = -\sin x\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-\sin x}\,du$$

Nu vet vi att

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin x\left(1 - \cos^2 x\right) dx = \int \sin x\left(1 - u^2\right)\frac{1}{-\sin x}\,du \\ &= \int -\left(1 - u^2\right)\,dx = -u + \frac{1}{3}u^3 + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

På samma sätt får vi

$$
\begin{aligned}
\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)dx = \left\{\text{ byt } u=\sin x \right\} \\
&= \int \left(1-u^2\right)\,dx = u - \frac{1}{3}u^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C
\end{aligned}
$$

Anmärkning: Med samma substitutionsteknik kan vi lätt visa att

$$
\begin{aligned}
\int \sin x \cos^n x\,dx &= -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x + C \\
\int \cos x \sin^n x\,dx &= \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x + C
\end{aligned}
$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$

KLASSIKER 4.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C \\
\int \cos^4 x\,dx &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C \\
\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C
\end{aligned}
$$

Härledning: Minns från ovan där vi härleder **KLASSIKER 1** och **2** att

$$
\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \quad \text{och} \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)
$$

Då får vi

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx &= \int (\sin x\cos x)^2\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1}{4}\underbrace{\sin^2(2x)}_{\textbf{tänk } \alpha = 2x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\right)dx \\
&= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C
\end{aligned}
$$

Nu blir det enkelt att beräkna

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin^2 x \, dx \\
&= \int \sin^2 x \left(1 - \cos^2 x\right) dx \\
&= \int \left(\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x\right) dx \\
&= \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{\textbf{KLASSIKER 2}} - \underbrace{\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx}_{\textbf{KLASSIKER 4} \text{ nyss}} \\
&= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) - \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)\right) + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C
\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos^2 x \, dx \\
&= \int \cos^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) dx \\
&= \int \left(\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x\right) dx \\
&= \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{\textbf{KLASSIKER 2}} - \underbrace{\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx}_{\textbf{KLASSIKER 4} \text{ nyss}} \\
&= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right) - \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)\right) + C \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C
\end{aligned}$$

2 Parametrisering av kurvor

Nedan föreslås en typisk parameterframställning $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, eventuellt $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, för några av de ofta förekommande kurvorna inom kursens ram.

1. Funktionskurvan $y = f(x)$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

2. Grundcirkel $x^2 + y^2 = a^2$ med centrum i origo och radie $a > 0$ (given konstant)

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$$

3. Den **räta linje** i rummet som går genom punkten $(x, y, z) = (a, b, c)$ och har $\mathbf{d} = (A, B, C)$ som en riktningsvektor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t\mathbf{d} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a + At \\ y(t) = b + Bt \\ z(t) = c + Ct \end{cases}$$

Anmärkning: En parameterframställning för en **kurva** ska innehålla **exakt en** parameter, oavsett om kurvan ifråga ritas i planet eller i rummet.

2.1 Några snabba typexempel

Ange en parameterframställning för följande kurvor och kurvstycken.

Exempel 1. Kurvan $y = 2e^x + 3\sin x - x^4$

Svar: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2e^t + 3\sin t - t^4 \end{cases}$

Anmärkning: Om inga gränser för parametern t anges, gäller det underförstått att t kan anta vilket reellt värde som helst.

Exempel 2. Det räta linjestycket i xy-planet från punkten $(1, 3)$ till punkten $(4, 9)$

Med gymnasiematematik vet vi att den räta linjen genom punkterna $(1, 3)$ och $(4, 9)$ ges av ekvationen $y = 2x + 1$. Som i förra exemplet kan vi här välja

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t + 1 \end{cases}$$

Eftersom linjestycket ifråga endast går från punkten $(1, 3)$ till punkten $(4, 9)$, dvs. $x : 1 \to 4$, låter vi $t : 1 \to 4$.

Svar: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t + 1 \end{cases}$, där $t : 1 \to 4$

Exempel 3. Det räta linjestycket i xy-planet från punkten $(4, 9)$ till punkten $(1, 3)$

Vi kan göra allt som i förra exemplet men vi låter $t : 4 \to 1$ istället. Själva ekvationen $y = 2x + 1$ behöver inte modifieras.

Svar: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t + 1 \end{cases}$, där $t : 4 \to 1$

Exempel 4. Det räta linjestycket i xyz-rummet som går från punkten $(1, 3, 5)$ till punkten $(3, 5, 6)$.

En riktningsvektor för den räta linje som går genom punkterna $(1, 3, 5)$ och $(3, 5, 6)$ är

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och linjen kan därför parametriseras enligt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 3 + 2t \\ z(t) = 5 + t \end{cases}$$

Linjestycket ifråga går dock endast från punkten $(1, 3, 5)$ till punkten $(3, 5, 6)$, dvs. $x : 1 \to 3$. Då vi har valt att sätta $x(t) = 1 + 2t$, vill vi att $1 + 2t$ varierar från 1 till 3. Alltså bör t variera från 0 till 1.

Svar: $\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 3 + 2t \\ z(t) = 5 + t \end{cases}$, där $t : 0 \to 1$

Exempel 5. Cirkeln $x^2 + y^2 = 9$

Tydligen har cirkeln centrum i punkten $(0, 0)$ och radie $\sqrt{9} = 3$.

Svar: $\begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}$

Anmärkning: Ett enkelt sätt att kontrollera om den framtagna parameterframställningen kan stämma är att sätta in $x(t)$ och $y(t)$ i ekvationen $x^2 + y^2 = 9$. Vi ser att

$$x^2 + y^2 = (3\cos t)^2 + (3\sin t)^2 = 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 9$$

Det stämmer!

Exempel 6. Cirkeln $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$

Denna cirkel har centrum i punkten $(2, -5)$ och radie $\sqrt{9} = 3$. Vi behöver inte mekaniskt och pedantiskt lära oss ett helt nytt recept nu bara för att cirkelns centrum inte ligger i origo.

Om vi ser på hela $x - 2$ som en variabel och hela $y + 5$ som en annan variabel kan vi enkelt låta

$$\begin{cases} x - 2 = 3\cos t \\ y + 5 = 3\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 2 + 3\cos t \\ y(t) = -5 + 3\sin t \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} x(t) = 2 + 3\cos t \\ y(t) = -5 + 3\sin t \end{cases}$

Exempel 7. Ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$

Här behöver vi inte heller mekaniskt lära oss ett ytterligare nytt recept. Notera att vi kan göra omskrivningen

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow (2x)^2 + (3y)^2 = 6^2$$

vilket påminner om ekvationen för en cirkel med radie 6, om vi ser på hela $2x$ som en variabel och hela $3y$ som en annan variabel. Då kan vi enkelt låta

$$\begin{cases} 2x = 6\cos t \\ 3y = 6\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$

Exempel 8. Skärningskurvan mellan den oändligt långa cylindern $x^2 + y^2 = 9$ (där z varierar längs hela reella tallinjen) och planet $x - y + z = 0$.

Notera först att varje punkt (x, y, z) på skärningskurvan bör uppfylla ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Frukta inte! Det är bara att hantera en ekvation i taget. Enligt den första ekvationen $x^2 + y^2 = 9$, kan vi välja att sätta

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

Den andra ekvationen $x - y + z = 0$ ger $z = -x + y$, dvs.

$$z(t) = -x(t) + y(t) = -3\cos t + 3\sin t$$

Svar: $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \\ z(t) = -3\cos t + 3\sin t \end{cases}$

3 Parametrisering av ytor

Nedan föreslås en typisk parameterframställning $\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$, eventuellt $\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, för några av de ofta förekommande ytorna inom kursens ram.

1. Funktionsytan $z = f(x, y)$

$$\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = f(s,t) \end{cases}$$

I praktiken brukar vi för enkelhetens skull skriva $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ istället för att införa de nya variablerna s och t.

2. Cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq a^2$, där $a > 0$ (given konstant)

Av praktiska skäl brukar vi utnyttja polära koordinater och finna $\mathbf{r}(r, \theta)$ enligt

$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}, \text{ där } \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

3. Cylindern $x^2 + y^2 = a^2$, där $a > 0$ (given konstant) och $c \leq z \leq d$

$$\begin{cases} x(s,t) = a\cos t \\ y(s,t) = a\sin t \\ z(s,t) = s \end{cases}, \text{ där } \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ c \leq s \leq d \end{cases}$$

4. Sfären $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, där $a > 0$ (given konstant)

Av praktiska skäl brukar vi utnyttja sfäriska koordinater och finna $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ enligt

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = a\sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) = a\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = a\cos\varphi \end{cases}, \text{ där } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Observera att φ inte går mellan 0 och 2π utan mellan 0 och π.

Anmärkning: En parameterframställning för en **yta** ska innehålla **exakt två** parametrar, oavsett om ytan ifråga ritas i planet eller i rummet.

3.1 Några snabba typexempel

Ange en parameterframställning för följande ytor.

Exempel 1. Planet $2x - 3y - z = 0$

Den enkla omskrivningen $z = 2x - 3y$ ger direkt svaret.

Svar: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2x - 3y)$

Exempel 2. Kvartscirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$, där $x \leq 0$ och $y \geq 0$

Notera att ytan ifråga tillhör den andra kvadranten av xy-planet.

Svar: $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$, eller med andra ord $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

där $\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

Exempel 3. Halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, där $z \geq 0$

Minns från den första kursveckan att det i området där $z \geq 0$ gäller $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Svar: $\begin{cases} x(\varphi,\theta) = 3\sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) = 3\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = 3\cos\varphi \end{cases}$, där $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

Exempel 4. Cylindern $x^2 + y^2 = 4$, där $-2 \leq z \leq 5$

Svar: $\begin{cases} x(s,t) = 2\cos t \\ y(s,t) = 2\sin t \\ z(s,t) = s \end{cases}$, där $\begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ -2 \leq s \leq 5 \end{cases}$