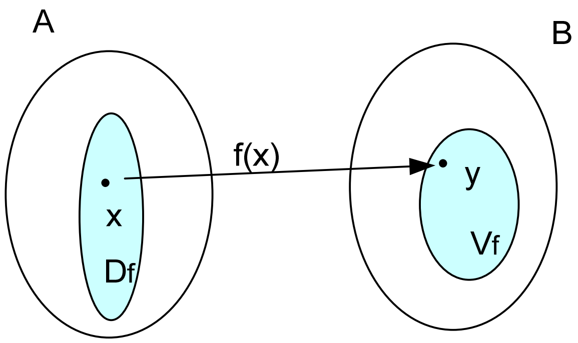
BIJEKTION, INJEKTION, SURJEKTION

Allmän terminologi.



I samband med variabelbyte vid beräkning av integraler har vi en avbildning mellan två mängder A och B, dvs en funktion $f : A \to B$. Vi har oftast krav att

varje element x i A har **precis en bild** *f*(x) i B och

att varje element i B har **precis en original** i A.

Sådana avbildningar kallar vi **bijektioner**.

En bijektion mellan två mängder A och B som har ändligt antal element kan finnas endast om mängderna har samma antal element.

Om det finns en bijektion mellan två mängder A, B (ändliga eller oändliga) säger vi att de har lika **kardinalitet (kardinaltal).**

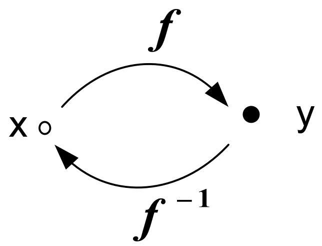
DEFINITION 1. Låt f vara en funktion från mängden A till B dvs $f : A \to B$.

Vi säger att *f* är en **bijektiv** funktion (eller en **bijektion**) om följande gäller:

1. Funktionens definitionsmängd D_f är lika med A.
2. Ekvationen $f(x) = y$, för varje $y \in B$, har **precis en lösning** $x \in A$.

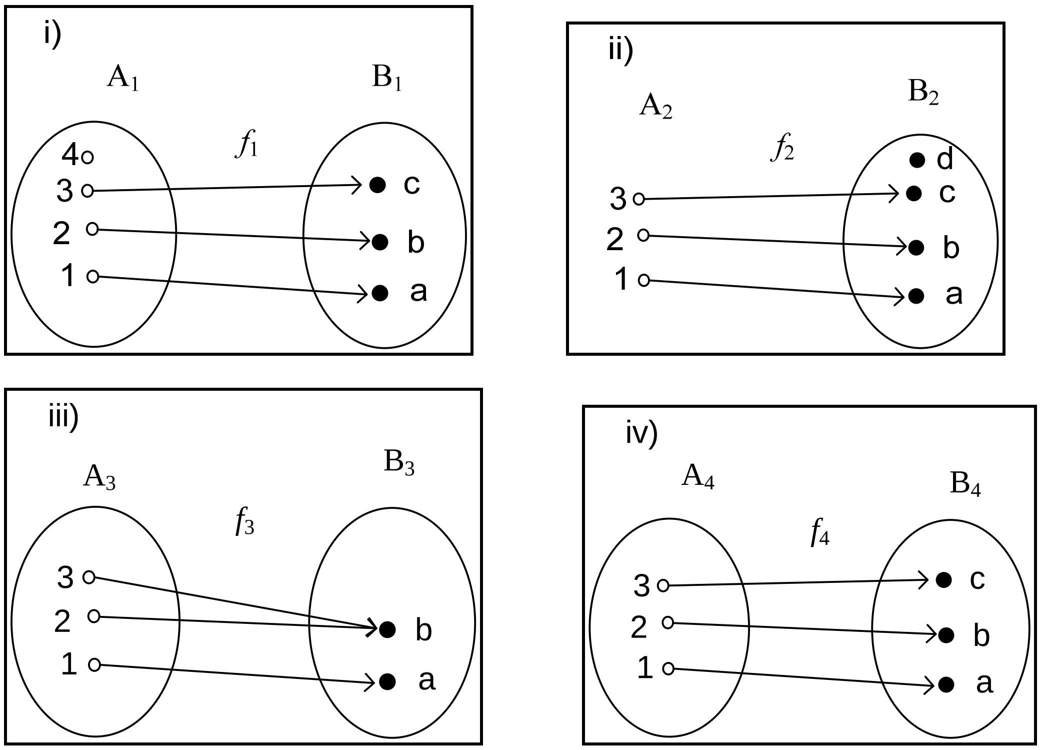
Anmärkning: En **bijektiv** funktion f har **inversen** f^{-1} som definieras enligt följande:

För en given y finns det **precis ett x** sådant att $f(x) = y$ och därför kan vi definiera $f^{-1}(y) = x$.



Exempel 1 (Diskret matematik.) A och B är mängder med ändligt många element)

Bestäm vilka av följande avbildningar är bijektioner:



Svar

i) Nej, element 4 i mängden A har ingen bild.

ii) Nej, element d i mängden B har ingen original.

iii) Nej, element b har två original-element 2 och 3

iv) Ja, varje element i A har exakt en bild och varje element i B har exakt en original.

DEFINITION 2.

1. INJEKTION. Funktionen $f : A \to B$ kallas i**njektiv** om ekvationen $f(x) = y$, för varje $y \in B$, har **högst en lösning** $x \in A$. (D v s ingen eller en lösning $x \in A$)

2. SURJEKTION. Funktionen $f : A \to B$ kallas **surjektiv** om ekvationen $f(x) = y$ för varje $y \in B$, har **minst en** lösning $x \in A$.

Från definitionen framgår följande:

1. En funktion är injektiv om och endast om **olika original har olika bilder** dvs

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

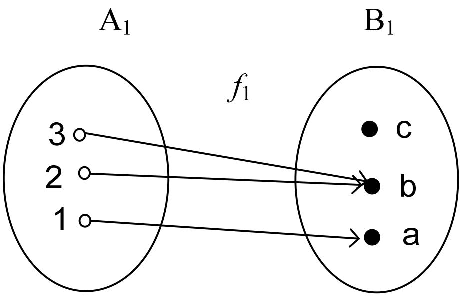
2. En funktion är surjektiv om och endast om gäller $V_f = B$

3. En funktion är **bijektiv** om och endast om den är både **surjektiv** och **injektiv** och definitionsmängd D_f är lika med A**.**

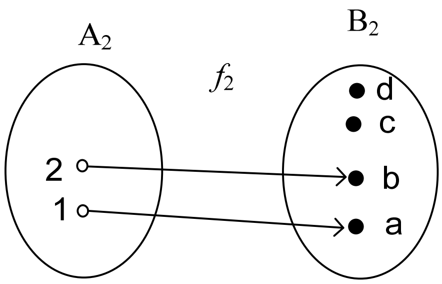
Exempel 2

Bestäm vilken/vilka av följande avbildningar är en surjektion, injektion, bijektion.

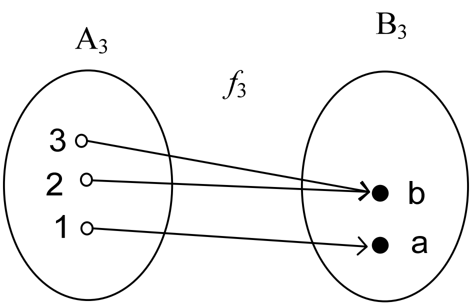
i)



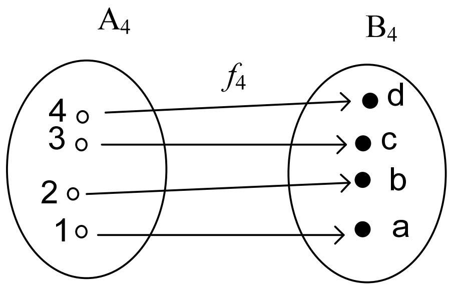
ii)



iii)



iv)



Svar: i) f_1 är varken injektiv eller surjektiv. ii) f_2 är injektiv men inte surjektiv.
iii) f_3 är surjektiv men inte injektiv. iv) f_4 är både injektiv och surjektiv och därmed bijektiv.

==================================

INVERSA FUNKTIONER I ANALYSEN

När vi betraktar funktioner i envariabel- eller flervariabelanalys har vi avbildningar från

R^n till R^m . En funktion definieras med hjälp av en regel (en ekvation) och funktionens definitionsmängd. Om definitionsmängd saknas då menas den största möjliga definitionsmängden.

I vår kurs betraktar vi reellvärda och vektorvärda funktioner av en eller flera variabler som till exempel

1. $z = f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, en reell funktion av två variabler

2. $\vec{r}(t) = (t^2, \quad 2t+1, \quad t^2+3t)$, en vektorfunktion av tre variabler

2. $\vec{F}(x,y) = (x^2+y, \quad x+y, \quad x+3y)$, en vektorfunktion av två variabler

som vi kan också definiera med tre skalära ekvationer

$$u = x^2 + y$$
$$v = x + y$$
$$w = x + 3y.$$

Frågan om inversfunktion i analysen är lite ”förenklad” (om vi jämför med ovanstående definitionen i allmän matematik) och reduceras till frågan om det finns bijektion mellan funktionens definitionsmängd D_f och värdemängd V_f dvs om funktionen

$$f : D_f \to V_f$$

har inversen.
Alltså frågan är om ekvationen $f(x) = y$, för varje $y \in V_f$, har precis en lösning $x \in D_f$.

DEFINITION 3: Låt f vara en funktion från R^n till R^p med definitionsmängden D_f och värdemängden V_f

Vi säger att funktionen f är **inverterbar** om ekvationen

$$f(x) = y,$$

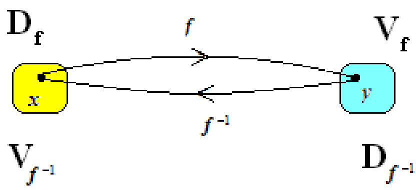
med avseende på x, har **precis en lösning** $x \in D_f$ för varje givet $y \in V_f$.

Genom tillordningen definieras en funktion från V_f till D_f.

Denna funktion kallas inversen till f och betecknas f^{-1}

Enligt definitionen:

$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$



dessutom

$D_f = V_{f^{-1}}$, och

$V_f = D_{f^{-1}}$

Anmärkning. Eftersom vi tar y från värdemängden , $y \in V_f$, har ekvationen $f(x) = y$ minst en lösning dvs $f : D_f \to V_f$ är surjektion. Kvar står att kontrollera om funktionen är injektiv d v s att kontrollera om det finns högst en lösning till $f(x) = y$.

Exempel 2. (en reell funktion av en variabel) Funktionen

$f(x) = x^2 + 2, \quad -1 \le x \le 2$ avbildar intervall D= $[-1, 2]$ på värdemängden V

a) Rita grafen och bestäm värdemängden V .

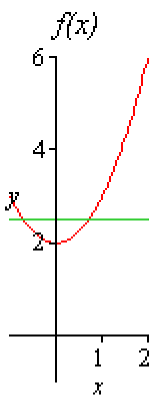
b) Är avbildning $f : D \to V$ bijektiv ?

c) Är funktionen inverterbar?

d) Bestäm om $g(x) = x^2 + 2$, med definitionsmängden $D_2 = [0, 2]$ är inverterbar.

(Vi behåller samma formel men ändrar definitionsmängden till $D_2 = [0, 2]$)

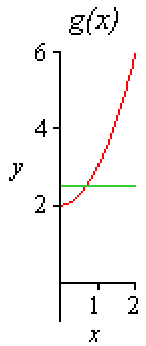
Lösning:



a) Värdemängden till f är V=[2, 6]

b) Vi ser på grafen att det finns punkter y (t ex y=2.5) sådana att ekvationen $f(x) = y$ har två lösningar som båda ligger i D= $[-1, 2]$.

c) Funktionen är inte bijektiv och därmed INTE inverterbar.



d) $y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = 2 - y \Rightarrow x = \pm\sqrt{2-y}$

Formellt har vi fått två lösningar men **endast en lösning**

$x = +\sqrt{2-y}$ ligger i definitionsområdet $D_2 = [0, 2]$.

Funktionen $g : D_g \to V_g$ är inverterbar eftersom,

för varje y, har ekvationen $g(x) = y$ precis en lösning i

definitionsmängden $D_2 = [0, 2]$.

$f^{-1}(y) = +\sqrt{2-y}$ (där y ligger i V_g = [2, 6]).

Exempel 3. (En vektorvärd funktion av tre variabel **)**

Funktionen $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 4z)$ kan också anges med tre skalära ekvationer

$u = x + y + z, \quad v = y + z, \quad w = 4z$

a) Är funktionen inverterbar?

b) Bestäm inversen i sådant fall.

Lösning:

Funktionen är definierad för alla $(x, y, z) \in R^3$.

Låt $Y = (u, v, w)$ vara godtyckligt men fixt vektor.

Vi undersöker hur många lösningar på X har ekvationen

$\mathbf{F}(X) = Y$

där $X = (x, y, z)$ och $Y = (u, v, w)$.

Vi löser ekvivalenta systemet med avseende på x, y, z :

$x + y + z = u$

$y + z = v$

$4z = w$

Alla tre variabler x, y, z är ledande som medför att systemet med linjära ekvationer har precis en lösning . Vi kan även lösa systemet Från den sista ekvationen har vi $z = w/4$, från andra $y = v - w/4$ och till slut från första har vi $x = u - v$.

Lösning: $x = u - v$, $y = v - w/4$, $z = w/4$.

Alltså, för varje $Y = (u,v,w)$ från värdemängden har vi exakt en lösning $X = (x, y, z)$.

Därmed är $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 4z)$ en inverterbar funktion.

Inversen $\mathbf{F}^{-1} : V \to D$ ges av

$\mathbf{F}^{-1}(Y) = (u - v, v - w/4, w/4)$.

Uppgift 1 . (En vektorvärd funktion av tre variabel)

Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, \sqrt{y}, \sqrt{z})$.

Undersök om funktionen är inverterbar och bestäm inversen i sådant fall.

Lösning.

Låt D och V beteckna funktionens definitionsmängd resp. värdemängd.

Först måste vi bestämma funktionens definitionsmängd D eftersom den är inte given i uppgiften:

På grund av rotuttryck, måste y och z vara ≥ 0 ; x kan vara vilket som helst reellt tal, därför

$D = \{(x, y, z) \in R^3 : y \geq 0, z \geq 0\}$.

Vi betecknar koordinater i **F** med u, v, w **och dessutom**

$X = (x, y, z)$ och $Y = (u,v,w)$

Nu undersöker vi hur många lösningar till **F**(X)=Y ligger i D.

(Funktionen F: D $\to$ V är inverterbar om precis en lösning ligger i definitionsmängden D.)

Vi löser systemet

$x^2 = u$

$\sqrt{y} = v$

$\sqrt{z} = w$:

Från första ekvationen har vi $x = \pm\sqrt{u}$, $y = v^2$ och $z = w^2$

Alltså för varje Y = (u,v,w) i värdemängden V har ekvationen

F(X)=Y

två lösningar X= $(x,y,z)=(\pm\sqrt{u},v^2,w^2)$, som **båda ligger i D** och därför är funktionen INTE inverterbar.

Uppgift 2 . (Endast en förändring i definitionsmängden i jämförelse med föregående uppgiften **)**

Vi betraktar funktionen $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2,\sqrt{y},\sqrt{z})$, med definitionsmängden

$D=D_{\mathbf{F}}=\{(x,y,z)\in R^3 : x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$.

Undersök om funktionen är inverterbar och bestäm inversen i sådant fall.

Lösning.

Definitionsmängden D är given. Vi undersöker hur många lösningar till

Vi betecknar koordinater i **F** med u, v, w och

$X=(x,y,z)$ och $Y=(u,v,w)$

Nu undersöker vi hur många lösningar till ekvationen **F**(X)=Y ligger i D för en vektor (punkt, trippel) $Y=(u,v,w)$ som vi tar från värdemängden V .

Vi löser systemet

$x^2=u$

$\sqrt{y}=v$

$\sqrt{z}=w$:

(Lägg märke till att $u,v,w\ge 0$)

Från första ekvationen har vi formellt två lösningar

$x=\pm\sqrt{u}$, $y=v^2$ och $z=w^2$

men den här gången **endast en** av dem $x=+\sqrt{u}$, $y=v^2$ och $z=w^2$ **ligger i D**.

Därmed är funktionen inverterbar och har inversen $\mathbf{F}^{-1}:V\to D$, där

$\mathbf{F}^{-1}(Y)=(\sqrt{u},\, v^2,\, w^2)$.