PARTIELLA DERIVATOR.

Partiella derivator definieras genom gränsvärden.

Definition 1. Låt $f(x_1, x_2,..., x_n)$ vara en reellvärd funktion definierad på en öppen mängd $\Omega \subseteq R^n$. Den partiella derivatan av f i punkten A(a_1,...,a_n) ∈ Ω med avseende på variabeln x_k betecknas

$$\frac{\partial f(a_1,a_2,...,a_n)}{\partial x_k}$$

och definieras som gränsvärdet

$$\frac{\partial f(a_1,a_2,...,a_n)}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,a_2,...,a_k+h,\ldots,a_n) - f(a_1,a_2,...,a_k,\ldots,a_n)}{h}$$

- En partiell derivata $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ beskriver hur snabbt f växer med avseende på variabeln x_k .
- När man deriverar en funktion av flera variabler med avseende på x_k betraktar man alla andra variabler som konstanter (och använder deriverings regler för envariabelfunktioner).

Exempel 1. Låt $f(x,y,z) = 3 + x^2 + y^4 + z + xy^2z^3 + 5\sin(xyz) + e^{x^2+y^2+z^2}$.

Bestäm $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ och $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Lösning. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2z^3 + 5yz\cos(xyz) + 2xe^{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 2xyz^3 + 5xz\cos(xyz) + 2ye^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 + 3xy^2z^2 + 5xy\cos(xyz) + 2ze^{x^2+y^2+z^2}$$

Derivator av **andra ordningen**

Andra derivatan två gånger på x_k betecknas $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_k}^2}$

Andra derivatan en gång på x_k och en gång på x_j betecknas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$

Symmetriska egenskaper hos derivator av andra ordningen. (Schwarzs sats)

Om partiella derivator av andra ordningen är kontinuerliga i en punkten så är

$\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_k})$ i denna punkt.

Derivator av högre ordningen betecknas på liknande sätt. T ex ytrycket $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^3 \partial z}$ betyder att vi deriverar funktionen f åtta gånger: 4 gånger på x, 3 gånger på y och en gång på z.

Exempel 2. Låt $f(x,y) = 3 + x^2 + y^4 + xy^2 + \cos y$.

Bestäm $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, och $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Lösning:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 2xy - \sin y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 2x - \cos y$,

till slut blandade derivatan

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$ (Notera att vi får samma resultat om vi deriverar först på x sedan på y , $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = 2y$ eller först på y sedan på x, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2y$)

Följande **beteckningar** för partiella derivator också förekommer i olika matteböcker:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad D_{x_k} f, \quad f'_{x_k}, \quad f_{x_k}, \quad \text{och även} \quad f_k$$

T ex, för en given funktion av två variabler

$$z = f(x,y)$$

kan vi beteckna partiella derivator på följande sätt

- Första derivatan med avseende på x betecknas
  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $f'_x(x,y)$, $D_x f(x,y)$, f'_x , f_x *och* även, f_1
- Första derivatan med avseende på y betecknas
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $f'_y(x,y)$, $D_y f(x,y)$, f'_y, f_y , *eller* f_2
- Andra derivatan med avseende på x två gånger betecknas
  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x,y)$, $D_{xx} f(x,y)$, f''_{xx} eller f_{xx}
- Andra derivatan med avseende på y två gånger betecknas
  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x,y)$, $D_{yy} f(x,y)$, f''_{yy} eller f_{yy}
- Andra derivatan med avseende på x och y betecknas
  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx}(x,y)$, $D_{yx} f(x,y)$, f''_{yx} eller f_{yx}

Uppgift 1. Beräkna f'_x, f'_y, f''_{xx} , f''_{yy} och f''_{yx} då $f(x,y)=5x^2+y^2+xy^4+3$

Lösning:

$f'_x = 10x + y^4$ (eftersom vi betraktar y som en konstant när vi deriverar med avseende på x)

$f'_y = 2y + 4xy^3$ (eftersom vi betraktar x som en konstant när vi deriverar med avseende på y)

$f''_{xx} = 10$ (vi deriverar f'_x en gång till med avseende på x)

$f''_{yy} = 2 + 12xy^2$ (vi deriverar f'_y en gång till med avseende på y)

$f''_{yx} = 4y^3$ (vi deriverar f'_x med avseende på y, eller f'_y med avseende på x)

Uppgift 2. Beräkna f'_x, f'_y, f''_{xx} , f''_{yy} och f''_{xy} (som är $= f''_{yx}$) då

a) $f(x,y)=5x^2-y^2+5$ b) $f(x,y)=5x^2+xy^4+2$

c) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ d) $f(x,y)=\sin(x+2y)$

Svar: a) $f'_x = 10x$, $f'_y = -2y,$ $f''_{xx} = 10$, $f''_{yy} = -2$, $f''_{yx} = 0$

b) $f'_x = 10x + y^4,$ $f'_y = 4xy^3,$ $f''_{xx} = 10$, $f''_{yy} = 12xy^2,$ $f''_{yx} = 4y^3$

c) $f'_x = 2x\,e^{x^2+y^2}$, $f'_y = 2y\,e^{x^2+y^2}$,

$f''_{xx} = 2\,e^{x^2+y^2} + 4x^2\,e^{x^2+y^2}$, $f''_{yy} = 2\,e^{x^2+y^2} + 4y^2\,e^{x^2+y^2}$, $f''_{yx} = 4xy\,e^{x^2+y^2}$

d) a) $f'_x = cos(x + 2y)$, $f'_y = 2cos(x + 2y)$,

$f''_{xx} = -sin(x + 2y)$, $f''_{yy} = -4sin(x + 2y)$, $f''_{xy} = -2sin(x + 2y)$

Uppgift 3. Bestäm konstanten A om **f**unktionen $f(\mathrm{x},\mathrm{y})=\ln(\mathrm{x}^3+\mathrm{y}^3)$ satisfierar följande ekvation

$\mathrm{x}f'_x + yf'_y = A$.

Svar: A=3.

Uppgift 3. Bestäm konstanten A om **f**unktionen $f(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{e}^{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)}$ satisfierar följande ekvation

$$\frac{1}{\mathrm{x}} f'_x(x,y)+\frac{1}{y} f'_y(x,y)=A\cdot f(x,y) \qquad (\ x\neq 0,\quad \mathrm{y}\neq 0\ ).$$

Svar: A=4

BESTÄMNING AV FUNKTIONER OM PARTIELLA DERIVATOR ÄR GIVNA

Fall 1. En derivata till $f(x,y)$ känd.

Om (för en funktion av två variabler) derivatan på x är given,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \qquad (*)$$

då kan vi bestämma x-delen av funktionen, (genom att beräkna $\int P(x,y)dx$).

Alla funktioner som uppfyller (*) är givna med

$$f(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y),$$

där $g(y)$ är ett godtyckligt uttryck, som innehåller y- men inte x-variabeln.

Exempel 3.

Bestäm alla funktioner av två variabler som satisfierar

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$$

Lösning.

Från $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$ kan vi bestämma den del av funktionen som innehåller x-variabeln (dvs x^2).

Därför

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \Rightarrow f(x,y) = x^2 + g(y)$$

där $g(y)$ är en godtyckligt funktion som beror av y, dvs som innehåller y-variabeln (och en godtycklig konstant) men inte x-variabeln.

Svar: $f(x,y) = x^2 + g(y)$

Exempelvis, följande tre funktioner av två variabler

$f_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^3 + 5$, $\quad f_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 + \sin y + 10$ och

$f_3(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 + \ln y + \sin y + \arcsin y + 2$

har samma första derivatan på x :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = 2x$$

Uppgift 4.

Bestäm alla funktioner av två variabler som satisfierar

a) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos x$ b) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = xy^4 + \cos x + y + 3$

c) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xy + \cos x$ b) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y^4 + ye^x + 9$

Svar: a) $f(x,y) = \sin x + g(y)$, där $g(y)$ är en godtycklig funktion av y (som **inte innehåller x)**.

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{2} + \sin x + xy + 3x + g(y)$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{2} + y\cos x + g(x)$, där $g(x)$ är en godtycklig funktion av x (som **inte innehåller y)**.

d) $f(x,y) = \dfrac{y^5}{5} + \dfrac{y^2}{2}e^x + 9y + g(x)$.

2. Om vi har

Fall 2. Vi söker $f(x,y)$ för givna

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ och } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \qquad (*) .$$

Anmärkning: För kontinuerliga partiella derivator har problemet lösning om och endast om

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ dvs } \frac{\partial}{\partial y}(P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y))$$

Därför gäller följande

> Det finns funktioner (med kontinuerliga andra derivator) som satisfierar ekvationer
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$$
>
> om och endast om följande villkor är uppfyllt
>
> $$P'_y = Q'_x$$

Exempel 3.

Bestäm alla funktioner av två variabler som satisfierar

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y \text{ och } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 2y$$

Lösning:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y \Rightarrow f(x,y) = x^2 + xy + g(y) \quad (*) ,$$

För att bestämma $g(y)$ deriverar vi (*) på y, substituerar i andra villkoret

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 2y$ och får

$x + g'(y) = x + 2y$ dvs

$g'(y) = 2y$. (notera att båda sidor innehåller endast y och INTE x-variabeln)

Här av får vi

$g(y) = y^2 + C$, där C är en konstant

Till slut från (*) har vi

$$f(x,y) = x^2 + xy + g(y) = x^2 + xy + y^2 + C$$

Svar: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + C$

(**Anmärkning:** Det är enkelt att kontrollera lösningen:

Om vi deriverar på x resp. y har vi: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y$ och $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 2y$)

Exempel 4.

Bestäm alla funktioner av två variabler, med kontinuerliga part. derivator, som satisfierar

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y$ och $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x$

Lösning:

Metod 1. Det finns ingen funktion som satisfierar givna villkor eftersom

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2$$

Metod 2.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 \Rightarrow f(x,y) = x + g(y)$ (*) , där $g(y)$ **inte** innehåller x-variabeln.

För att (eventuellt) bestämma $g(y)$ deriverar vi (*) på y, substituerar i andra villkoret

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x$ och får

$g'(y) = 2x$ som är motsägelse, eftersom $g(y)$ beror endast av y.

Därmed saknas funktioner som satisfierar givna villkor.

Svar: Ingen funktion satisfierar givna villkor.

Uppgift 5.

Bestäm alla funktioner av två variabler, med kontinuerliga part. derivator, som satisfierar

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y + \cos x \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + \frac{2y}{1+y^2}$$

Svar: $f(x,y) = xy + \sin x + \ln(1+y^2)$

Uppgift 6.

Bestäm alla funktioner av två variabler, med kontinuerliga part. derivator, som satisfierar

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2y + \cos x \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x$$

Svar: Ingen funktion satisfierar givna villkor. (Eftersom $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \neq \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = 1$)

NÅGRA EXEMPEL MED FUNKTIONER AV TRE VARIABLER

Uppgift 7.

Bestäm alla funktioner av tre variabler, med kontinuerliga part. derivator, som satisfierar

a) $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$ b) $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = xyz + \cos x + y + z + 3$

c) $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x^2 y^3 z^4$

Svar: a) $f(x,y,z) = \arctan x + g(y,z)$,

där $g(y,z)$ är ett godtyckligt uttryck som innehåller y och z (men **innehåller inte x**).

b) $f(x,y,z) = \frac{xy^2 z}{2} + y\cos x + \frac{y^2}{2} + yz + 3y + g(x,z)$

c) $f(x,y,z) = \frac{x^2 y^3 z^5}{5} + g(x,y)$

Uppgift 8.

Bestäm alla funktioner av tre variabler, med kontinuerliga part. derivator, om alla tre partiella derivator är givna

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = x^2 + yz \ , \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = y^3 + xz \ \text{ och } \ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = z^4 + xy$$

Lösning:

Villkor 1 implicerar

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xyz + g(y,z) \qquad (*)$$

För att bestämma $g(y,z)$ substituerar vi (*) i andra villkoret $\frac{\partial f}{\partial y} = y^3 + xz$ och får

$$xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = y^3 + xz \Rightarrow \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = y^3$$

Härav $g(y,z) = \frac{y^4}{4} + h(z)$ som vi substituerar i (*) och får

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xyz + \frac{y^4}{4} + h(z) \quad (**)$$

Till slut för att bestämma $h(z)$ och därmed hela funktionen substituerar vi (**) i det tredje villkoret.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = z^4 + xy$ ger

$xy + h'(z) = z^4 + xy$ dvs

$$h'(z) = z^4 \Rightarrow h(z) = \frac{z^5}{5} + C$$

Från (**) har vi slutligen hela funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xyz + \frac{y^4}{4} + \frac{z^5}{5} + C\,.$$

(Anmärkning: Det är enkelt att kontrollera lösningen genom att beräkna partiella derivator.)

Svar: $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xyz + \frac{y^4}{4} + \frac{z^5}{5} + C\,.$

Uppgift 9.

Bestäm en funktion av tre variabler som uppfyller följande krav

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=2\ ,\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=z^2\ ,\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=2yz$$

och $f(1,1,1)=13$.

Tips: Från första tre villkor har vi $f(x,y,z)=2x+yz^2+C$,

Från $f(1,1,1)=13$ får vi C=10.

Svar: $f(x,y,z)=2x+yz^2+10$

Anmärkning: Vi kan kontrollera direkt (på liknande sätt som för funktioner med 2 var)

om problemet

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=P(x,y,z)\ ,\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z) \text{ och } \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z) \qquad (*)$$

har någon lösning.

Om partiella derivator är kontinuerliga då är andra derivator oberoende av deriverings ordning:
Därför

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Rightarrow P'_y=Q'_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Rightarrow P'_z=R'_x \text{ och}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Rightarrow Q'_z=R'_y$$

Med andra ord:

Det finns funktioner (med kontinuerliga andra derivator) som satisfierar ekvationer

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P(x,y,z)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q(x,y,z) \text{ och } \frac{\partial f}{\partial z}=R(x,y,z) \qquad (*)$$

om och endast om följande (alla) tre villkor är uppfyllda

$$P'_y=Q'_x \qquad P'_z=R'_x \quad \text{och} \quad Q'_z=R'_y .$$

Uppgift 10.

Bestäm alla funktion av tre variabler , med kontinuerlig andra derivator, som uppfyller

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=y\ ,\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=x+z\ ,\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=3y+z$$

Svar: Ingen lösning eftersom $Q'_z=1\neq R'_y=3$.

ETT EXEMPEL MED BERÄKNING AV PARTIELLA DERIVATOR ENLIGT DEFINITIONEN

Uppgift 10.

Låt $f(x)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{om } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{om } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) Använd derivatans definition för att beräkna partiella derivator $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

b) Är funktionen kontinuerlig i punkten $(0,0)$.

Lösning:

a) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

Alltså båda partiella derivator existerar i punkten (0, 0) och

$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$.

b) Om vi skriver $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ i polära koordinater

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta\,,$$

Om r går mot 0 är resultat, $\cos\theta\sin\theta$, beror av θ, och därför existerar inte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Funktionen är inte kontinuerlig eftersom $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ existerar inte.

Kommentar. Om en envariabelfunktion $f(x)$ är deriverbar i en punkt så är funktionen kontinuerlig i samma punkt.
Ovanstående exempel visar att existensen av partiella derivator i en punkt **inte garanterar** att funktionen är kontinuerlig i punkten (till skillnad från egenskaper hos ordinära derivator för envariabelfunktioner).