DUBBELINTEGRALER. POLÄRA KOORDINATER

POLÄRA KOORDINATER

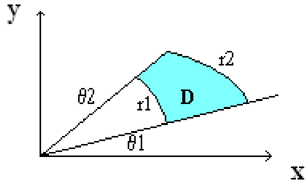
Variabelbyte i dubbelintegraler från rektngulära (x,y) till polära koordinater (r, θ)

Om integrationsområde D är en del av en vinkel då är det lämpligt att beräkna integralen genom variabelbyte från rektangulära (x,y) till polära koordinater (r, θ).

Samband mellan rektangulära och polära koordinater:

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad , \qquad dxdy = rdrd\theta$

(därmed $x^2 + y^2 = r^2$)



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\theta 1}^{\theta 2} d\theta \int_{r1(\theta)}^{r2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r \cdot dr$$

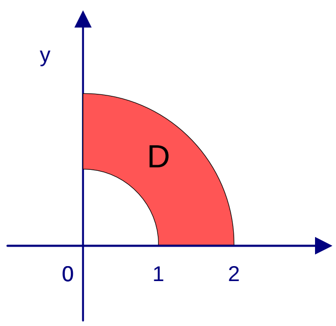
Anmärkning: Lägg märke till att $dxdy$ ersätts med $r \cdot drd\theta$.

Exempel 1.

Beräkna dubbelintegral $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dxdy$

då D är sektorringen i Fig1.

Fig 1



Lösning:

Från figuren har vi gränserna för θ och r:

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ och $1 \le r \le 2$.

Vi byter till polära koordinater

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad , \qquad dxdy = rdrd\theta$

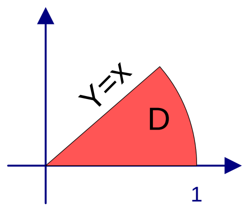
(och därmed $x^2 + y^2 = r^2$),

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)^2 dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^4 \cdot r \cdot dr = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^5 dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2 = \int_0^{\pi/2} \frac{21}{2} d\theta = \left[\frac{21}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{21\pi}{4}.$$

Exempel 2.

Fig 2



Beräkna dubbelintegral $\iint_D xdxdy$

då integrationsområdet D definieras i figuren Fig2.

Lösning:

Från figuren har vi gränserna för θ och r:

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ och $0 \leq r \leq 1.$

Vi byter till polära koordinater

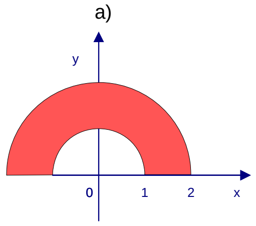
$x = rcos\theta, \quad y = rdrd\theta,$

$$\iint\limits_D xdxdy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 rcos\theta \cdot r \cdot dr = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 cos\theta \cdot r^2 \cdot dr$$

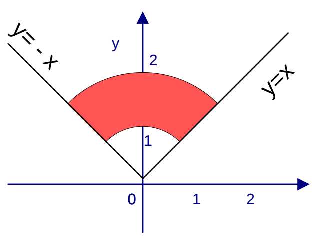
$$= \int_0^{\pi/4} cos\theta \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{cos\theta}{3} d\theta = \left[\frac{sin\theta}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Uppgift 1. Ange gränserna för θ och r för nedanstående integrationsområden

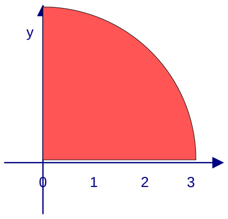
a)



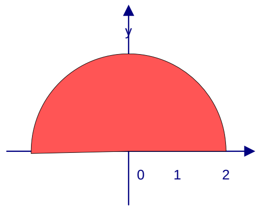
b)



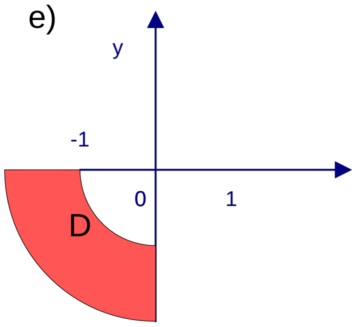
c)



d)



e)



Svar: a) $0 \leq \theta \leq \pi$ och $1 \leq r \leq 2$ b) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ och $1 \leq r \leq 2$

c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ och $0 \leq r \leq 3$ d) $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq r \leq 2$

e) $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, $1 \leq r \leq 2$.

Uppgift 2. Rita nedanstående områden och ange gränserna för θ och (polära koordinater) .

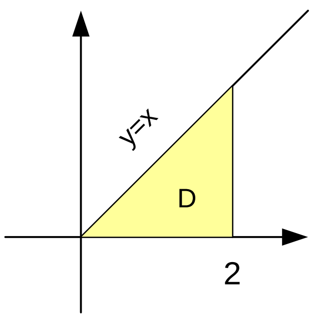
a) $D = \{(x, y)\colon\ 0 \leq x \leq 2 \ \ och \ \ 0 \leq y \leq x\}$

b) $D = \{(x, y)\colon 1 \leq x \leq 3 \ \ ch \ \ 0 \leq y \leq x\}$

c) $D = \{(x, y)\colon\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \ och \ \ x \leq y \leq 2x\}$

d) $D = \{(x, y)\colon\ \ x^2 + y^2 \geq 1,\ \ x \leq 3 \ \ och \ \ 0 \leq y \leq x\ \}$

Lösning.



a) För θ gäller uppenbart $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Vi beskriver randlinjen x = 2 i polära koordinater:

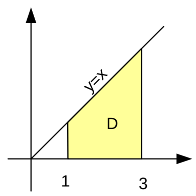
Genom att substituera $x = rc$ i x=2 får vi

$$r\cos\theta = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\cos\theta}$$

Därmed har vi gränser för : $0 \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta}$

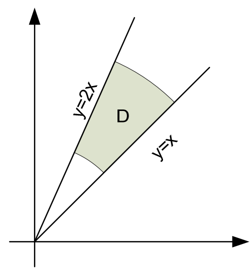
Svar a: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta}$

Svar b)



$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq \frac{3}{\cos\theta}$

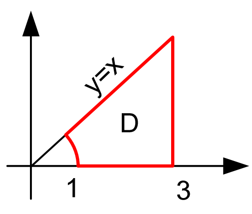
Svar c)



$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \theta_1$, där $\theta_1 = \arctan 2 \approx 1.1\, rad$ (63.4 °) ,

$1 \leq r \leq 2$

Svar d)



$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $1 \leq r \leq \frac{3}{\cos\theta}$

Uppgift3.

Beräkna dubbelintegral $\iint_D f(x,y)dxdy$ om

a) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2$ och D definieras genom $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ och $0\le r\le 2$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ och D definieras genom $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ och $0\le r\le 1$

c) $f(x,y)=10+x^2+y^2$ och D definieras genom $x\le 0$, $y\le 0$, $1\le x^2+y^2\le 4$

d) $f(x,y)=2+x^2+y^2$ och D definieras genom $x\ge 0$, $y\ge 0$, $y\le x$, $x^2+y^2\le 4$

e) $f(x,y)=x$ och D definieras genom $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x^2+y^2\le 9$

f) $f(x,y)=y$ och D definieras genom $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x^2+y^2\le 9$

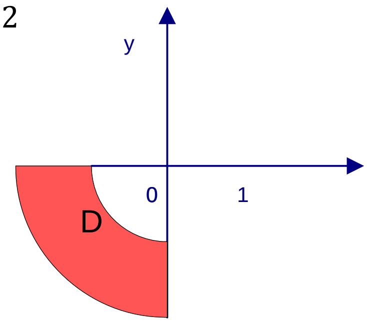
g) $f(x,y)=x+y$ och D definieras genom $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x^2+y^2\le 9$

Svar:

a) $\frac{16\pi}{3}$, b) $\frac{\pi}{6}$

c) Tips: $1\le x^2+y^2\le 4 \Rightarrow 1\le r^2\le 4\Rightarrow 1\le r\le 2$

och $\le 0,\ y\le 0 \Rightarrow \pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$



$\iint_D (10+x^2+y^2)dxdy$

$=\int_\pi^{3\pi/2} d\theta \int_1^2 (10+r^2)\cdot r\cdot dr=\ldots$

…

Svar c: $\frac{75\pi}{8}$

d) 2π e) 9 f) 9 g 18

Uppgift4.

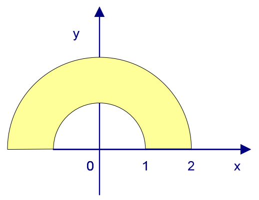
Beräkna dubbelintegral $\iint_D f(x,y)dxdy$ om

$f(x,y)=\ln\left(10+x^2+y^2\right)$ och D definieras genom $1\le x^2+y^2\le 4$, $y\ge 0$

Lösning: Vi använder polära koordinater.

Från figuren har vi gränserna för θ och r:

$0 \le \theta \le \pi$ och $1 \le r \le 2.$



Vi byter till polära koordinater

$x = rcos\theta, \quad y = rdrd\theta,$

$$\iint_D ln(10 + x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^\pi d\theta \int_1^2 ln(10 + r^2) \cdot r \cdot dr$$

(Lägg märke till att θ finns varken i integranden eller gränserna för andra integralen så att vi kan beräkna varje integral för sig och multiplicera resultat)

$$= \int_0^\pi d\theta \cdot \int_1^2 ln(10 + r^2) \cdot r \cdot dr = \pi \cdot \frac{1}{2} [14ln(14) - 11ln11 - 3]$$

Anmärkning: Den andra integralen beräknas med hjälp av substitutionen

$$10 + r^2 = t\,, \quad 2rdr = dt$$

$$\int ln(10 + r^2) \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2}\int ln(t)dt = (\,partiell\ integration) = \frac{1}{2}[tlnt - t]$$

$$= \frac{1}{2}[(10 + r^2)ln(10 + r^2) - (10 + r^2)]$$

Därför $\int_1^2 ln(10 + r^2) \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2}[(10 + r^2)ln(10 + r^2) - (10 + r^2)]\,\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$

$=\frac{1}{2}[14\, ln(14) - 14] - \frac{1}{2}[11\, ln(11) - 11] = \frac{1}{2}[14\, ln(14) - 11ln11 - 3]$

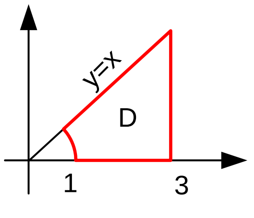
Svar: $\frac{\pi}{2}\, [14\, ln(14) - 11ln11 - 3]$

Uppgift5.

Beräkna dubbelintegral $\iint_D f(x, y)dxdy$ om

$f(x, y) = x$ och $D = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 \ge 1, \; x \le 3 \; och \; 0 \le y \le x \}$

Lösning: Vi använder polära koordinater



Från figuren har vi gränserna för θ och r:

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $1 \le r \le \frac{3}{cos\theta}$ (För randen x=3 $\Rightarrow$ $rcos\theta = 3 \Rightarrow r = 3/cos\theta$)

Vi byter till polära koordinater

$x = rcos\theta$, $y = rdrd\theta$,

$$\iint_D x\,dxdy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{3/cos\theta} rcos\theta \cdot r \cdot dr = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{3/cos\theta} r^2 cos\theta dr =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^3}{3} cos\theta\right]_{r=1}^{r=3/cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{9}{cos^2\theta} - \frac{cos\theta}{3}\right] d\theta =$$

$$\left[9\,tan(\theta) - \frac{sin(\theta)}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = 9 - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$