DUBBELINTEGRALER. VARIABELBYTE

Variabelbyte i dubbelintegraler (allmänt fall) $x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)\,)\,|\,J\,|dudu,$$

Här $x(u,v), \quad y = y(u,v)$ är C^1 funktioner , $(u,v) \to (x,y)$ är en bijektiv avbildning från D' i uv - planet till D i xy-planet och dessutom Jacobis determinant (funktionaldeterminanten)

$$J = \frac{d(x,\ y)}{d(\ u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Absolutbeloppet i substitutionsformeln kring J garanterar en positiv areaskala.

Lägg märke till att vi oftast väljer nya variabler efter integrationsområde;

vi vill gärna få **konstanta gränser för minst en av de nya variablerna.**

Först några uppgifter med Jacobis determinanter (funktionaldeterminanter)

Uppgift 1. Bestäm Jacobis determinant (funktionaldeterminanten)

$$J = \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}$$

för nedanstående variabelbyten.

a) $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ (polära koordinater)

b) $x = 2 + r\cos\theta$

$y = 5 + r\sin\theta$ (modifierade polära koordinater, med centrum i (2,5))

c) $x = a\cdot r\cos\theta$

$y = b\cdot r\sin\theta$ (elliptiska koordinater)

d) $x = 3\cdot r\cos\theta$

$y = 5\cdot r\sin\theta$ (elliptiska koordinater)

e) $x = 2 + a\cdot r\cos\theta$

$y = 5 + b\cdot r\sin\theta$ (modifierade elliptiska koordinater, med centrum i (2,5))

Lösning a) :

$$J = \frac{d(x,\ y)}{d(r,\ \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

Svar: a) r b) r c) abr d) $15r$ e) abr

Uppgift 2. Bestäm Jacobis determinant (funktionaldeterminant)

$$J = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}$$

för nedanstående variabelbyten.

a) $x = 2u + 3v$
$y = 2u - \frac{2}{3}v$

b) $x = u^2 - v^2$
$y = uv$

Lösning a) :

$$J = \frac{d(x,\ y)}{d(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2/3 \end{vmatrix} = -\frac{22}{3}$$

Svar: a) $-\frac{22}{3}$ b) $2u^2 - 2v^2$

Uppgift 3. Bestäm Jacobis determinant (funktionaldeterminant) $J = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ om

a) $u = 2x + y$
$v = 2x - 2y$

b) $= x^2 - y^2$
$v = xy,$

där $u > 0$ och $v > 0$

Lösning a) Vi visar två metoder för beräkning av $J = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}$

Metod 1: Först löser vi ut x och y (t ex substitutionsmetoden) och får

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}u + \frac{1}{6}v \\ y &= \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v \end{aligned}}$$

Nu har vi

$$J = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}$$

Metod 1. Den här gången beräknar vi först inversen till Jacobismatris $J^{-1} = \frac{d(u,v)}{d(x,y)}$ och därefter J.

Från

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2x + y \\ v &= 2x - 2y \end{aligned}}$$

har vi

$$J^{-1} = \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Därför $J = \frac{1}{J^{-1}} = -\frac{1}{6}$

Lösning b) . Först beräknar vi inversen till Jacobismatris $J^{-1} = \frac{d(u,v)}{d(x,y)}$.

Från

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= xy \end{aligned}$$

får vi

$$J^{-1} = \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Därmed

$$J = \frac{1}{J^{-1}} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}.$$

Kvarstår att byta x, y mot u, v; i vårt fall måste vi uttrycka $x^2 + y^2$ som en funktion av u och v.

Ett litet tryck är att använda sambandet

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2=4x^2y^2$$

Därför

$$(x^2+y^2)^2-u^2=4v^2 \Rightarrow x^2+y^2 \ = \sqrt{u^2+4v^2}$$

och

$$J=\frac{1}{2(x^2+y^2)} \ =\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}$$

I nedanstående uppgifter beräknar vi integraler med hjälp av lämpliga variabelsubstitutioner.

Uppgift 4 Beräkna $\iint_D (x-2y)\, e^{x+4y}\, dxdy$

där D bestäms av $2 \le x-2y \le 4$, $1 \le x+4y \le 3$.

Lösning:

Vi väljer substitutionen (på ett naturligt sätt)

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x-2y \\ v=x+4y \end{array}}$$

och, från D, får att

$$2 \le u \le 4, \ \ 1 \le v \le 3$$

Därmed har vi **konstanta gränser** för u, v som betydligt **förenklar** integrationen.

Vi måste också beräkna J (och ersätta $dxdy$ med $|J|\, dudv$).

Den här gången (eftersom vi har u, v som funktioner av x,y) är det enklare att först beräkna

$$J^{-1}=\frac{d(u,v)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=6.$$

Härav $=\frac{1}{6}$ och därför, enligt substitutionsformeln.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)\,)\,|\,J\,|dudv,$$

har vi

$$\iint_D (x-2y)\, e^{x+4y}\, dxdy \;=\int_2^4 du\int_1^3 u\, e^v \;\cdot\frac{1}{6}dv \;=\frac{1}{6}\int_2^4 udu\int_1^3 e^v\, dv \;=\frac{1}{6}\left[\frac{u^2}{2}\right]_2^4 \cdot\; [e^v]_1^3 \quad = e^3-e$$

Svar: e^3-e

Uppgift 5. Beräkna $\iint_D \;(x^2+y^2)^{\,3}\, dxdy$

där $D \;=\{\,(x,y)\colon\; 1\le x^2-y^2\le 4\,,\;\; 1\le xy\le 4\,,\;\; x>0,\;\; y>0.$

Lösning:

Substitutionen

$u=x^2-y^2$
$v=xy$

ger

$$J^{-1}=\frac{d(u,v)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\mathrm{x} & -2y\\ \mathrm{y} & x\end{vmatrix}=2x^2+2y^2=2(x^2+y^2)$$

och därför

$J=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$ $\quad(=\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}$ se ovanstående upp 3)

Vi ersätter $dxdy$ med $|J|\cdot dudv$, förenklar först och därefter byter x,y mot u,v.

(Vi betecknar integralen med *I*)

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (x^2+y^2)^{\,3}\, dxdy$$

(vi ersätter $dxdy$ med $|J|\cdot dudv$ och förenklar)

$$=\iint_D (x^2+y^2)^{\,3}\;\frac{1}{2(x^2+y^2)}\, dudv \;=\iint_D \frac{(x^2+y^2)^{\,2}}{2}\, dudv$$

För att beräkna integralen måste vi först eliminera x och y med hjälp av sambandet (se upp 3)

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=u^2+4v^2$$

Alltså

$$I=\iint_D \frac{(x^2+y^2)^{\,2}}{2}\, dudv \;=\iint_{D'} \frac{u^2+4v^2}{2}\, dudv \;=\int_1^4 du\int_1^4\frac{u^2+4v^2}{2}dv=\cdots=\frac{315}{2}$$

Uppgift 6. Vi betraktar ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1.$$

Använd dubbelintegralen för att visa av att ellipsens area är lika med $ab\pi$.

Lösning:

Arean (D) $=\iint_D 1\cdot dxdy$.

För att beräkna arean använder vi substitutionen

$x = a\cdot r cos\theta$
$y = b\cdot r sin\theta$ (elliptiska koordinater)

$$J=\frac{d(x,\ y)}{d(r,\ \theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr\cos^2\theta+abr\sin^2\theta$$
$$=abr(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=abr$$

Från randen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

har vi

$$\frac{(ar cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(br sin\theta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow r=1\ (eftersom\ r\ge 0)$$

Därför

Arean (D) $=\iint_D 1\cdot dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abrdr = \left[2\pi\, ab\, \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = ab\pi$

(vad skulle visas).