Nr 25, 31 maj -05, Amelia 2

25 Utförlig lösning av tentamen Amelia II 2004-08-17

I denna föreläsning löses tentan utförligt med inledande teorigenomgångar, som visar i vilket sammanhang uppgfiten hör hemma. Här anges också lösningsmetoder även för andra varianter av problemet.

Uppgift 1 *Det är känt att L är en linjär avbildning samt att* $L\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *och* $L\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Bestäm* $L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teoribakgrund: Betrakta en **avbildning** $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, där n och m. Om $n = m = 2$ har vi en avbildning från vektorer i planet till vektorer i planet. Om $n = m = 3$ har vi en avbildning från vektorer i rummet till vektorer i rummet. Om $n = 2$ och $m = 3$, som i uppgiften, avbildar vi således vektorer i planet ($\mathbf{R}^2$, ty $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$) till vektorer i rummet ($\mathbf{R}^3$, ty $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$).

En avbildning är en **linjär avbildning** om $L(x + y) = L(x) + L(y)$ och $L(ax) = aL(x)$. Här är $x, y \in \mathbf{R}^n$ och a en skalär, dvs $a \in \mathbf{R}$. Ett viktigt resultat här är att om vi känner en bas i rummet ges varje linjär avbildning av en specifik matris. Man kan då studera matrisen istället.

Matrisen bestäms helt av hur avbildningen verkar på basvektorerna. En bas för $\mathbf{R}^n$ består av n vektorer, säg $e_1, ..., e_n$. Att $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ betyder förstås att $L(x) \in \mathbf{R}^m$. Säg att $f_1, ..., f_m$ är en bas för $\mathbf{R}^m$.

Matrisen för L är bestämd om vi vet vad L gör på dessa n vektorerna $e_1, ..., e_n$. Nämligen om

$$L(e_k) = a_{1k} f_1 + ... + a_{mk} f_m,$$

för bilden $L(x)$ kan vi förstås skriva i basen för $\mathbf{R}^m$ (högerledet). Men då kan vi skriva upp vad L gör på vilken vektor x som helst. Ty säg att $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. Vi får då ("linjariteten!" nedan syftar på definitionen av **linjär** ovan)

$$\begin{aligned}
L(x) &= L(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) \\
\{\text{linjariteten!}\} &= x_1 L(e_1) + ... + x_n L(e_n) \\
\{\text{sätt in } L(e_k) \text{ ovan}\} &= x_1(a_{11} f_1 + ... + a_{m1} f_m) + ... + x_n(a_{1n} f_1 + ... + a_{mn} f_m) \\
\{\text{samla ihop } f_1, .., f_m\} &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + ... + x_n a_{1n}) f_1 + ...
\end{aligned}$$

Det betyder att L av bildar koordinaterna $x_1, ..., x_n$ på $(x_1a_{11} + x_2a_{12} + ... + x_na_{1n})$, $(x_1a_{21} + x_2a_{22} + ... + x_na_{2n})$, ..., $(x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + ... + x_na_{mn})$. Detta är faktiskt en matrisprodukt, så att

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

är bilden av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså bilden av $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ under L genom att multiplicera vektorn med matrisen $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$. Denna matris kan man alltså arbeta med lika gärna som avbildningen L själv.

De koefficienter som anger hur basvektorer avbildas på varandra (a_{mk}) bestämmer alltså en matris med vilken man kan räkna ut hur vilken vektor som helst avbildas av L.

Lösning: Ett sätt att lösa uppgiften är att beräkna matrisen till L. Men det frågas inte efter matrisen bara efter vad $L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ är.[1] Det är betydligt enklare att använda linjariteten av L genom att skriva $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en linjärkombination av $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Då ska vi beräkna a och b så att

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Det ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 4 &= 3a - 2b \\ 1 &= a - b. \end{aligned}$$

Andra ekvationen ger $-2 = -2a + 2b$, och om den adderas med den första så elimineras b. Det ger

$$2 = a,$$

[1] Dessutom har vi inte tillräckligt med information att beräkna matrisen, för här är den en 2×3-matris, alltså med 6 element, men vi i uppgiften är endast 4 villkor givna.

som från $1 = a - b$ ger $b = a - 1 = 2 - 1 = 1$. Alltså:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi vill beräkna $L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nu ger linjariteten av L att

$$\begin{aligned} L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= L\left(2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ \{\text{linjariteten!}\} &= 2L\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \{\text{givna i uppgiften}\} &= 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: $L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Uppgift 2 *Bestäm tangentplanets ekvation till ytan* $z = \frac{y^2 - xy}{x^3 - y^2}$ *i punkten* $(x_0, y_0) = (2, 3)$.

Teoribakgrund: En Taylorutveckling av $z(x, y)$ runt punkten (a, b) är

$$z(x, y) = z(a, b) + z'_x(a, b)(x - a) + z'_y(a, b)(y - b) + ...$$

där "..." står för högre ordningens termer, från andra ordningen och uppåt. Om dessa stryks får vi kvar tangentplanets ekvation:

$$z = z(a, b) + z'_x(a, b)(x - a) + z'_y(a, b)(y - b).$$

Här är "z" inte längre funktionen $z(x, y)$, eftersom vi strök ett antal termer. Här är z en koordinat i tangentplanet. Tangentplanet i (a, b) är det plan som approximerar funktionen $z(x, y)$ som bäst nära punkten (a, b).

Lösning: I detta fall, runt $(2, 3)$ är tangetplanet

$$z = z(2, 3) + z'_x(2, 3)(x - 2) + z'_y(2, 3)(y - 3).$$

Så vi behöver endast beräkna $z'_x(2, 3)$ och $z'_y(2, 3)$ och sätta in dem i ekvationen. Vi får

$$\begin{aligned} z'_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2 - xy}{x^3 - y^2} = \{\text{bryt ut ett } y\} \\ &= y\frac{\partial}{\partial x}\frac{y - x}{x^3 - y^2} \\ &= y\frac{-(x^3 - y^2) - (y - x)3x^2}{(x^3 - y^2)^2} \\ &= y\frac{2x^3 + y^2 - 3x^2 y}{(x^3 - y^2)^2}, \end{aligned}$$

alltså

$$z'_x(2,3) = 3\frac{2\cdot 2^3 + 3^2 - 3\cdot 2^2 3}{(2^3 - 3^2)^2} = -33.$$

På liknande sätt får vi $z'_y(2,3)$.

$$\begin{aligned} z'_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2 - xy}{x^3 - y^2} = \\ &= -x\frac{x^3 + y^2 - 2x^2 y}{(x^3 - y^2)^2}, \end{aligned}$$

och

$$z'_y(2,3) = -2\frac{8 + 9 - 2\cdot 4\cdot 3}{1} = 14.$$

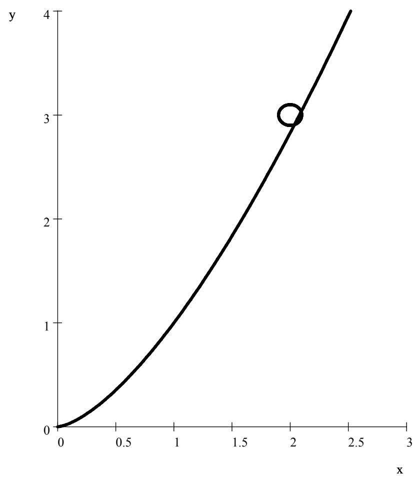
Då är tangentplanet

$$z = -33(x-2) + 14(y-3),$$

dvs

$$33x - 14y + z = 24.$$

Att det blir så stora tal beror på att kurvan $x^3 - y^2 = 0$ passerar mycket nära $(2,3)$, dvs nämnaren är nära noll. De partiella derivatorna anger ju ytans lutning i x- respektive y-led.



På kurvan $y = x^{1.5}$ är nämnaren noll.

Svar: Tangentplanet är $33x - 14y + z = 24$.

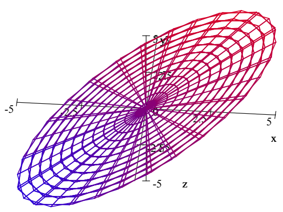
Uppgift 3 *Beräkna alla lokala maximipunkter till* $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{-y}$.

Teoribakgrund: Maximi- och minimipunkter kan inträffa antingen i en randpunkt, i en punkt där funktionen inte är deriverbar, eller i en punkt där funktionen är deriverbar och alla partiella derivator av första ordningen är noll. Den senare typen, där $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ (och $f'_z = 0$ om det är en funktion av tre variabler), kallas en **stationär punkt** (även **kritisk punkt**). Det är inte säkert att alla stationära punkter är max- eller minpunkter, men de finns säkert med bland dessa. En stationär punkt som inte är max eller min kallas en **sadelpunkt**. Det är en punkt där alla förstaderivator är noll men funktionen tar både större och mindre värden godtyckligt nära punkten.

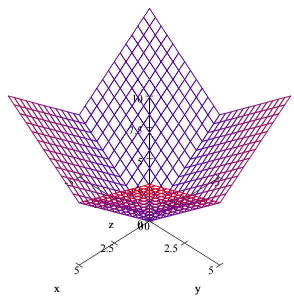
Så genom att undersöka vilka av lösningarna till $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ är max eller min kan frågan besvaras, med undantag för randpunkter och icke-deriverbarhetspunkter.

Ett exempel på ett max eller min i en randpunkt ges av $f(x, y) = x$ på $x^2 + y^2 = 1$. Funktionen $f(x, y) = x$ växer åt höger överallt, det är ett lutande plan, men den har ett maximum i $(1, 0)$ på grund av att området är begränsat. Se vänster figur nedan.

Ett exempel på ett minimum i en icke-deriverbarhetspunkt är minimat i origo som funktionen $f(x, y) = |x| + |y|$ har. Se höger figur.



$f(x, y) = x$ på $x^2 + y^2 = 1$.



$f(x, y) = x$ på $x^2 + y^2 = 1$.

Nästa fråga är: Vilka av de stationära punkterna är max eller min, och vilka är sadelpunkter? Detta kan oftast undersökas genom att studera andraderivatans tecken. Om $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$ och $C = f''_{yy}$ i punkten så är tecknet på storheten $AC - B^2$ helt central. Vi har:

$$\begin{aligned}
AC - B^2 &< 0 \text{ ger sadelpunkt,} \\
AC - B^2 &= 0 \text{ ger inget besked,} \\
AC - B^2 &> 0 \text{ och } A < 0 \text{ ger max,} \\
AC - B^2 &> 0 \text{ och } A > 0 \text{ ger min.}
\end{aligned}$$

Resultatet "inget besked" betyder att man får använda andra metoder än undersökning av andraderivatorna för att avgöra om vi har max, min eller sadelpunkt.

För exempelvis $f(x,y) = x^{10} + y^{10}$ fungerar inte denna metod. Då är alla första- *och* andraderivator noll, så vi har en stationär punkt där $A = B = C = 0$, så $AC - B^2 = 0$. Men här har vi ett minimum eftersom $x^{10} + y^{10} \geq 0$ för alla x och y, och bara om $x = y = 0$ så är $f = 0$. För denna funktion kan vi avgöra att det är ett minimum med en direkt uppskattning.

Lösning: Funktionen $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{-y}$ saknar rand och är deriverbar överallt, så endast stationärapunkter är aktuella. De är lösningarna till ekvationerna

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 \text{ och} \\ f'_y &= 0, \end{aligned}$$

vilket i detta fall är

$$\begin{aligned} -2xe^{-y} &= 0 \text{ och} \\ 2ye^{-y} - (y^2 - x^2)e^{-y} &= 0. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ och} \\ y(y-2) &= 0. \end{aligned}$$

Vi får alltså två stationära punkter: $(0,0)$ och $(0,2)$.

Andraderivatorna är

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-2xe^{-y}) = -2e^{-y}, \\ f''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2xe^{-y}) = 2xe^{-y} \text{ och} \\ f''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(2ye^{-y} - (y^2 - x^2)e^{-y}) \\ &= e^{-y}\left(y^2 - x^2 - 4y + 2\right) \end{aligned}$$

I punkten $(0,0)$ får vi andraderivatorna

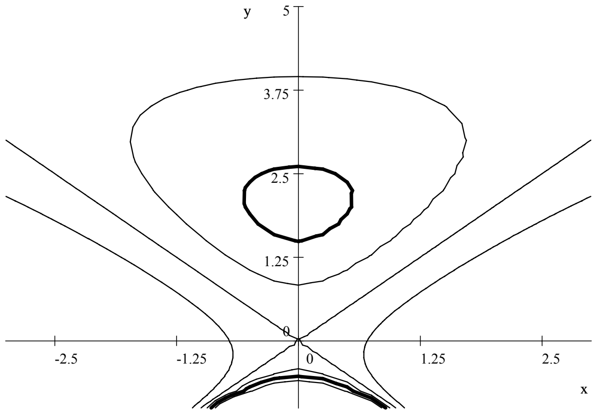
$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,0) = -2 \\ B &= f''_{xy}(0,0) = 0 \\ C &= f''_{yy}(0,0) = 2, \end{aligned}$$

så $AC - B^2 = -4$. Därmed har vi en sadelpunkt här.

I punkten $(0,2)$ får vi andraderivatorna

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,2) = -2e^{-2} \\ B &= f''_{xy}(0,2) = 0 \\ C &= f''_{yy}(0,2) = (4 - 16 + 2)e^{-2} = -10e^{-2}, \end{aligned}$$

så $AC - B^2 = (-2e^{-2})(-10e^{-2}) - 0^2 > 0$. Eftersom även $A < 0$ har vi en maximipunkt i $(0, 2)$. Värdet här är $f(0, 2) = 4e^{-2}$.



Nivåkurvor till $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{-y}$.

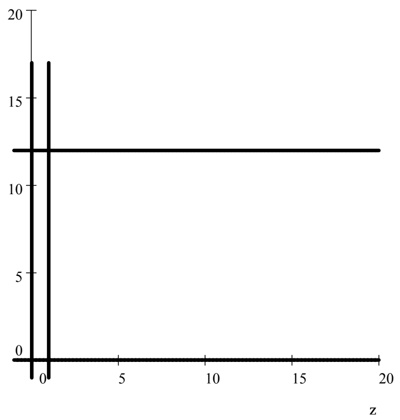
Man kan se i nivåkurvorna att vi har en skärning i $(0, 0)$. Det är karaktäristiskt för en sadelpunkt. Vi får större värden om vi rör oss från origo längs y-axeln, men mindre värden om vi rör oss längs x-axeln. Detta följer av en studie av funktionerna $f(0, y) = y^2e^{-y}$ respektive $-x^2e^{-y}$. Den första är alltid positiv, utom i noll, och den andra är alltid negativ, utom i noll. Detta är ett annat sätt att bevisa att vi har en sadelpunkt.

Svar: Funktionen har maximum i $(0, 2)$.

Uppgift 4 *Beräkna volymen för den ändliga kropp som begränsas av koordinatplanen samt planet $y = 12$ och ytan $x + 2z - z^2 = 1$.*

Teoribakgrund: Volymen av kroppen K är $\iiint_K dxdydz$. Man för försöka se K, eller delar av K, som området mellan två ytor, säg $z = f(x, y)$ och $z = g(x, y)$, i vilket fall z-integration ger $\iiint_K dxdydz = \iint_D (g(x, y) - f(x, y))dxdy$, och vi får en dubbelintegral. Då är D projektionen av K på xy-planet.

Lösning:Ytan $x + 2z - z^2 = 1$ kan ses som en yta för x, med variablerna y och z, dvs som $x = 1 - 2z + z^2$. Då har vi $x = 0$ om $1 - 2z + z^2 = 0$, dvs $(z - 1)^2 = 0$, alltså $z = 1$. Begränsningar är även koordinatplanen och $y = 12$, så vi får följande område i yz-planet:



Då är $K = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 12, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - 2z + z^2\}$. Vi integerar $1 - 2z + z^2$ över $D = \{\{(y, z) : 0 \leq y \leq 12, 0 \leq z \leq 1, \}$;

$$\begin{aligned}
\iiint_K dxdydz &= \int_0^{12} \int_0^1 (1 - 2z + z^2) dydz \\
&= 12[z - z^2 + \frac{1}{3} z^3]_0^1 \\
&= 12\frac{1}{3} = 4.
\end{aligned}$$

Svar: Volymen är 4.

Uppgift 5 *Beräkna flödesintegralen* $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n}\ d\sigma$ *då* S *är ytan till det axelparallella rätblocket med två av hörnen i* $(0, 0, 0)$ *och* $(3, 2, 1)$*. Fältet är* $\mathbf{F} = (x^2, xy, z^2)$*, och* $\hat{n}$ *är utåtriktad enhetsnormal.*

Teoribakgrund: Flödesintegraler kan beräknas genom att sätta in en parameterframställning $\mathbf{r}(u, v)$ för ytan, då vi får

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iint_S \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)) dudv.$$

Här är inte $(\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v))$ vanligen någon enhetsnormal, men den innehåller också en del av ytelementet $d\sigma$. Ty $d\sigma = |(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)| dudv$, och en enhetsnormal är $\hat{n} = (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)/|(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)|$, så vid insättning i $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} d\sigma$ försvinner storheten $|(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)|$ i integralen.

I vissa fall kan flödesintegraler beräknas som en trippelintegral, det är Gauss´ sats (även kallad divergenssatsen). Då måste ytan vara sluten och $\mathbf{F}$ kontinuerligt deriverbar överallt innanför den slutna ytan (och på ytan). Integranden blir då $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

Om förutsättningarna är uppfyllda så gäller

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n} d\sigma = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F} dxdydz$$

där K är den av S inneslutna volymen.

Lösning: I denna uppgift har vi sex ytor som innesluter en volym. Då är Gauss sats en stor fördel, ty vi behöver inte beräkna sex olika ytintegraler. $\mathbf{F} = (x^2, xy, z^2)$ ger

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= \nabla\cdot(x^2, xy, z^2)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}xy + \frac{\partial}{\partial z}z^2\\ &= 2x + x + 2z.\end{aligned}$$

Gränserna i rätblocket K är $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, och $0 \le z \le 1$. Så vi får

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n} d\sigma &= \iiint_K (3x+2z)dxdydz\\ &= \int_0^3\int_0^2\int_0^1 (3x+2z)dxdydz\\ \{z\text{-integration}\} &= \int_0^3\int_0^2 [3xz+z^2]_0^1 dxdy\\ &= \int_0^3\int_0^2 (3x+1)dxdy\\ \{y\text{-integration}\} &= \int_0^3 [3xy+y]_0^2 dx\\ &= \int_0^3 (6x+2)dx\\ \{x\text{-integration}\} &= 2[3\frac{1}{2}x^2+x]_0^3 = 27+6 = 33.\end{aligned}$$

Svar: $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n} d\sigma = 33.$

Uppgift 6 *Bestäm Taylorpolynomet av tredje ordningen till funktionen* $f(x,y) = \cos(x+y-3) + (y-2)e^{1-x}$ *i punkten* $(1,2)$.

Teoribakgrund: Taylorutvecklingen av $f(x,y)$ i punkten (a,b) är

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)+ \\ &+\frac{1}{2}(f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2)+ \\ &+\frac{1}{6}(f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3+3f'''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b)+ \\ &3f'''_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2+f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3)+\ldots. \end{aligned}$$

Om ordningen är två så tar vi med alla termer upp t.o.m. andraderivator.

Lösning: Här har vi $(a,b)=(1,2)$ så vi har

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,2)+f'_x(1,2)(x-1)+f'_y(1,2)(y-2)+ \\ &+\frac{1}{2}(f''_{xx}(1,2)(x-1)^2+2f''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2)+f''_{yy}(1,2)(y-2)^2)+ \\ &+\frac{1}{6}(f'''_{xxx}(1,2)(x-1)^3+3f'''_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-2)+ \\ &3f'''_{xyy}(1,2)(x-1)(y-2)^2+f'''_{yyy}(1,2)(y-2)^3)+\ldots. \end{aligned}$$

Här är ordningen tre, så vi måste ta med alla termer som är utskrivna ovan. Ett sätt är således att beräkna ett stort antal partiella derivator i punkten $(1,2)$. Enklare är att använda kända endimensionella Taylorutvecklingar, som i sin tur kommer från kända McLaurinutvecklingar. Här behöver vi

$$\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots \text{ och} \\ e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots \end{aligned}$$

Vi kan stryka termer av ordning 4 och uppåt i denna uppgift. Byte av x mot $x-1$ i den senare McLaurinutvecklingen ger Taylorutvecklingen kring $x=1:$

$$e^{x-1}=1+(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

För att mera likna termen $(y-2)e^{1-x}$ så byter vi nu $x-1$ mot $1-x:$

$$\begin{aligned} e^{1-x} &= 1+(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{3!}(1-x)^3+\ldots \\ &= 1-(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{3!}(x-1)^3+\ldots \end{aligned}$$

Nu ger den andra termen

$$\begin{aligned} (y-2)e^{1-x} &= (y-2)(1-(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{3!}(x-1)^3+\ldots) \\ &= (y-2)-(y-2)(x-1)+\frac{1}{2}(y-2)(x-1)^2-\frac{1}{3!}(y-2)(x-1)^3+\ldots \end{aligned}$$

som alla är termer av den typ som förekommer i Taylorutvecklingen.

Frågan är nu vad vi ska göra med termen $\cos(x+y-3)$. Men om vi skriver $\cos(x+y-3) = \cos(x-1+y-2)$ så får vi

$$\begin{aligned}
\cos(x-1+y-2) &= 1-\frac{1}{2}(x-1+y-2)^2+... \\
\{\text{utveckla kvadraten}\} &= 1-\frac{1}{2}((x-1)^2+2(x-1)(y-2)+(y-2)^2)+... \\
&= 1-\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)(y-2)+\frac{1}{2}(y-2)^2+...
\end{aligned}$$

och vi har även här fått sådana termer som förekommer i Taylorutvecklingen. Totalt får vi

$$\cos(x+y-3)+(y-2)e^{1-x} = 1-\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)(y-2)+\frac{1}{2}(y-2)^2$$
$$+(y-2)-(y-2)(x-1)+\frac{1}{2}(y-2)(x-1)^2-\frac{1}{3!}(y-2)(x-1)^3+...$$
$$= 1+(y-2)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{1}{2}(y-2)(x-1)^2+...$$

där vi strök termer av ordning fyra.

Svar: Vi har Taylorutvecklingen $1+(y-2)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{1}{2}(y-2)(x-1)^2$ av tredje ordningen.

Uppgift 7 *Undersök om* $\mathbf{F} = (\frac{2xy}{x^2+1}+\frac{y}{x^2y^2+1}, \ln(x^2+1)+\frac{x}{x^2y^2+1}+3)$ *är konservativt. Om så är fallet, bestäm en potential.*

Teoribakgrund: Att ett vektorfält $\mathbf{F}(x,y)$ är konservativt är samma sak som att fältet har en potential, dvs om det finns en funktion $U(x,y)$ så att $\nabla U = \mathbf{F}$. Detta är ekvivalent med att kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ är oberoende av vägen, den slutna kurvintegralen $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = 0$, och, om området är enkelt sammanhängande (inga hål) att $P'_y = Q'_x$.

Man kan alltså oftast (om området enkelt sammanhängande) avgöra om det finns en potential med villkoret $P'_y = Q'_x$. Om potentialen efterfrågas har denna metod nackdelen att kalkylen inte ger någon hjälp att beräkna potentialen – för det får man börja om från början. Man kan också lösa de två ekvationerna $U'_x = P$ och $U'_y = Q$, om det inte går att lösa dem så existerar det inte någon potential..

Lösning: Vektorfältet $\mathbf{F} = (\frac{2xy}{x^2+1}+\frac{y}{x^2y^2+1}, \ln(x^2+1)+\frac{x}{x^2y^2+1}+3)$ är definierat för alla x och y. Vi provar att beräkna potentialen, dvs lösa

$$\begin{aligned}
U'_x &= \frac{2xy}{x^2+1}+\frac{y}{x^2y^2+1} \text{ och} \\
U'_y &= \ln(x^2+1)+\frac{x}{x^2y^2+1}+3.
\end{aligned}$$

Integration av den första ekvationen m.a.p. x ger

$$U = y\ln(x^2+1) + \arctan xy + f(y),$$

där $f(y)$ är en funktion som uppträder från x-integrationen. Den svarar mot integrationskonstanten vid x-integrationen. Kvar är nu endast att bestämma $f(y)$, och om detta visar sig omöjligt (som funktion av enbart y) så finns det ingen potential.

Deriverar vi m.a.p. y så fås

$$\begin{aligned} U'_y &= \frac{\partial}{\partial y}(y\ln(x^2+1) + \arctan xy + f(y)) \\ &= \ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2y^2+1} + f'(y). \end{aligned}$$

Detta ska vara lika med den andra ekvationen ovan, dvs $U'_y = \ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2y^2+1} + 3$. Det ger

$$\ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2y^2+1} + f'(y) = \ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2y^2+1} + 3,$$

alltså

$$f'(y) = 3.$$

Denna kan lösas, det blir $f(y) = 3y$ (vi kan ta integrationskonstant lika med noll), så det finns en potential, som är

$$U = y\ln(x^2+1) + \arctan xy + 3y.$$

Svar: $\mathbf{F}$ har potentialen $U = y\ln(x^2+1) + \arctan xy + 3y$.

Kommentar: Man kan kontrollera med villkoret $P'_y = Q'_x$. Vi får då

$$\begin{aligned} P'_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{2xy}{x^2+1} + \frac{y}{x^2y^2+1}) = 2\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2y^2+1} - 2x^2\frac{y^2}{2x^2y^2+x^4y^4+1} \\ Q'_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2y^2+1} + 3) = 2\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2y^2+1} - 2x^2\frac{y^2}{2x^2y^2+x^4y^4+1}, \end{aligned}$$

som är lika.

Uppgift 8 *Bestäm arean av den del av konen* $x^2+y^2 = z^2$ *som tillhör* $0 \le yx^2 \le 1, x \ge 3$ *och* $z \ge 0$.

Teoribakgrund: Arean av en buktig yta som beskrivs med parameterframställningen $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, är

$$\iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv.$$

Storheten $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$ är ytelementet, som spelar en stor roll för många andra ytintegraler. För att bestämma arean ska vi alltså endast integrera ytelementet. Om ytan kan beskrivas som grafen till en funktion $f(x,y)$, $(x,y) \in D$, har vi den alternativa formeln

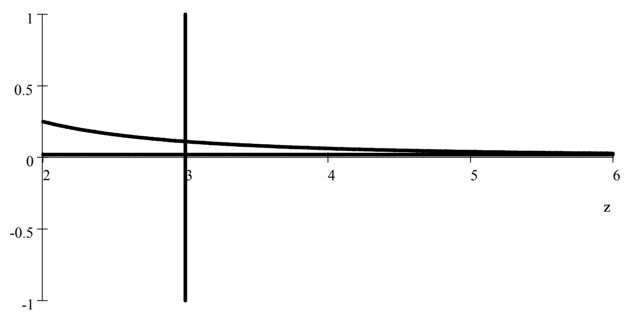
$$\iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy,$$

ty då är $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-f'_x, -f'_y, 1)$.

Lösning: Konen $x^2 + y^2 = z^2$ med $z \geq 0$ är grafen till funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, så vi har $f'_x = x/\sqrt{x^2+y^2}$ och $f'_y = y/\sqrt{x^2+y^2}$, så integranden blir

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Området $0 \leq yx^2 \leq 1, x \geq 3$ begränsas av kurvorna $y = 0$, $y = x^{-2}$ och $x = 3$.



Vi ska integrera det obegränsadet området under $y = x^{-2}$ till höger om $x = 3$ (ty $x \geq 3$). Vi får då

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}dxdy &= \iint_D \sqrt{2}dxdy \\
&= \sqrt{2}\int_3^\infty \int_0^{x^{-2}} dxdy \\
\{y\text{-integration}\} &= \sqrt{2}\int_3^\infty [y]_0^{x^{-2}} dx \\
&= \sqrt{2}\int_3^\infty x^{-2}dx \\
&= \sqrt{2}[-x^{-1}]_3^\infty = \sqrt{2}(-0+\frac{1}{3}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

ty $\lim_{x\to\infty} x^{-1} = 0$.

Svar: Arean är $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Uppgift 9 *Beräkna linjeintegralen* $\oint_L (4x+2y)dx + zdy$ *där* L *är skärningskurvan mellan ytorna* $z = (x-1)^2 + (y+2)^2$ *och* $2x - 4y + z = 6$. *Skärningen genomlöps så att kurvans projektion på xy-planet genomlöps motsols.*

Teoribakgrund: Vid en kurvintegral över en sluten kurva då vektorfältet är definierat överallt innanför kurvan kan Stokes sats användas. En möjlighet är också att vektorfältet är konservativt (= det har en potential), i vilket fall kurvintegralen är noll. I Stokes sats integreras rotationen $\nabla \times \mathbf{F}$, och om denna är noll finns en potential. På detta sätt är resonemanget om ett konservativt fält ett specialfall av Stokes sats, som säger

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\hat{n}\; dS,$$

där S är ett område som har L till rand så att $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbart överallt på S. Dessutom är $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

En kurvintegral kan alltid beräknas med definitionen, genom att sätta in en parameterframställning $\mathbf{r}(t)$ av kurvan.

Lösning: I detta fall har vi $\mathbf{F} = (P, Q, R) = (4x + 2y, z, 0)$.Kurvan är skärningen mellan paraboloiden (med vertex i $(1, -2)$) $z = (x-1)^2 + (y+2)^2$ och planet $2x - 4y + z = 6$. Insättning av $z = (x-1)^2 + (y+2)^2$ i planets ekvation ger

$$2x - 4y + (x-1)^2 + (y+2)^2 = 6.$$

Utveckling av kvadraterna ger

$$\begin{aligned} 2x - 4y + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 &= 6, \text{ dvs} \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Så kurvan är lätt att parametrisera med $x = \cos t$ och $y = \sin t$. Det ger $z = 6 - 2x + 4y = 6 - 2\cos t + 4\sin t$, så vi har parametriseringen

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= 6 - 2\cos t + 4\sin t \end{aligned}$$

av kurvan. Motsols är positiv led, så t ska gå från 0 till 2π. Vektorfältets värden på kurvan är

$$\mathbf{F} = (4x + 2y, z, 0) = (4\cos t + 2\sin t, 6 - 2\cos t + 4\sin t, 0),$$

och

$$\begin{aligned} \mathbf{dr} &= (x'(t), y'(t), z'(t))dt \\ &= (-\sin t, \cos t, 2\sin t + 4\cos t)dt. \end{aligned}$$

Vi får skalärprodukten till

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= (4\cos t + 2\sin t, 6 - 2\cos t + 4\sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 2\sin t + 4\cos t)dt \\ &= (-4\cos t \sin t - 2\sin^2 t + 6\cos t - 2\cos^2 t + 4\sin t \cos t)dt \\ &= -2dt. \end{aligned}$$

Vi får då

$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy + Rdz &= \oint_L (4x + 2y)dx + zdy \\ &= \int_0^{2\pi} -2dt = -4\pi. \end{aligned}$$

Svar: $\oint_L (4x + 2y)dx + zdy = -4\pi.$

Kommentar: Med Stokes sats får vi rotationen till:

$$\nabla \times (4x + 2y, z, 0) = (-1, 0, -2).$$

Eftersom rotationen inte är noll har detta fält ingen potential. Men Stokes sats ger

$$\begin{aligned}
\oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_S (-1,0,-2)\cdot\hat{n}\; dS \\
&= (-1,0,-2)\cdot\hat{n} \iint_S dS.
\end{aligned}$$

Normalriktningen $\hat{n}$ kan tas ut utanför integralen eftersom kurvan ligger på ett plan och normalriktningen $\hat{n}$ är då konstant.

En normal till planet $2x-4y+z=6$ är $(2,-4,1)$, och en normerad normal är då $(2,-4,1)/\sqrt{4+16+1}=(2,-4,1)/\sqrt{21}$. Så skalärprodukten är

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{n} &= (-1,0,-2)\cdot\hat{n} \\
&= (-1,0,-2)\cdot(2,-4,1)/\sqrt{21} \\
&= (-2+0-2)/\sqrt{21} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{21}}.
\end{aligned}$$

Sedan är $\iint_S dS$ arean av ellipsen, dvs baklängesprojektionen av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i xy-planet på planet $2x-4y+z=6$. Det ger

$$\begin{aligned}
\iint_S dS &= \iint_S \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \{z(x,y) = -2x+4y+6\} \\
&= \iint_S \sqrt{1+4+20}\,dxdy \\
&= \sqrt{21}\cdot(\text{arean av cirkeln } x^2+y^2=1) \\
&= \sqrt{21}\pi.
\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}
\oint_L P dx + Q dy + R dz &= (-1,0,-2)\cdot\hat{n} \iint_S dS \\
&= -\frac{4}{\sqrt{21}}\cdot\sqrt{21}\pi = -4\pi.
\end{aligned}$$

Uppgift 10 *Det är känt att på ytan $xy+yz+xz=12$ finns en punkt som ligger närmast planet $x+y+z=1$. Bestäm punkten och avståndet.*

Teoribakgrund: Om vi vill omtimera en funktion $f(x, y, z)$ som är deriverbar så måste alla partiella derivator vara noll, vilket ger de tre ekvationerna

$$\begin{aligned} f'_x &= 0, \\ f'_y &= 0, \text{ och} \\ f'_z &= 0. \end{aligned}$$

som måste vara uppfyllda för ett extremvärde. Om vi har ett bivillkor, dvs vill optimera en funktion $f(x, y, z)$ för alla punkter (x, y, z) som uppfyller $g(x, y, z) = 0$ så måste det gälla att de två gradienterna ∇f och ∇g måste vara parallella i en sådan punkt (om båda är deriverbara). Det beror på att ∇g är normal till alla riktningar där (x, y, z) får ändras (ty $g(x, y, z) = 0$ är ett krav), och om ∇f och ∇g inte är parallella så finns en riktning där f:s värde kan ökas, och i motsatt riktning minskas. Då har vi inte något extermvärde.

Så i alla punkter där f och g är kontinuerligt deriverbara och vi har extremvärde måste ∇f och ∇g vara parallella. Enligt linjära algebran betyder det att det finns någon konstant, säg λ, så att

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Detta är den s.k. Lagranges multiplikatormetod, talet λ kallas ibland multiplikatorn. Vi har således fyra ekvationer – de tre ekvationerna i $\nabla f = \lambda \nabla g$ samt $g = 0$ – och fyra variabler, x, y, z och λ.

Lösning: I denna uppgift är funktionen som ska minimeras inte given. Det är ett avstånd, dvs $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}$ där (x, y, z) är en punkt på ena ytan och (u, v, w) är en punkt på den andra. Enklare är att beräkna minimum för $(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$ i stället. Det går bra eftersom $\sqrt{x}$ är en växande funktion. Det kanske är möjligt att beräkna denna uppgift på detta sätt, genom att parametrisera de två ytorna och sätta in i denna funktion. Det ger en funktion av fyra variabler att maximera.

Men betydligt enklare är att använda resonemanget bakom Lagranges multiplikatormetod. Ytan $xy+yz+xz = 12$ är nivåyta till $f(x, y, z) = xy+yz+xz$, som har gradient $\nabla f = (y + z, x + z, x + y)$. Denna gradient är en normal till ytan $xy + yz + xz = 12$. Minimala avståndet till $x + y + z = 1$ på ytan måste inträffa i en punkt där denna gradient har samma riktning som normalen till planet. Det ger ekvationerna

$$\begin{aligned} y + z &= \lambda \\ x + z &= \lambda \\ x + y &= \lambda. \end{aligned}$$

Tar vi differenser här får vi

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x - z &= 0 \\ y - z &= 0, \end{aligned}$$

så $x = y = z = \lambda/2$, eller vi har punkterna $(\lambda/2, \lambda/2, \lambda/2)$. Vi måste också befinna oss på planet $xy + yz + xz = 12$, som ger

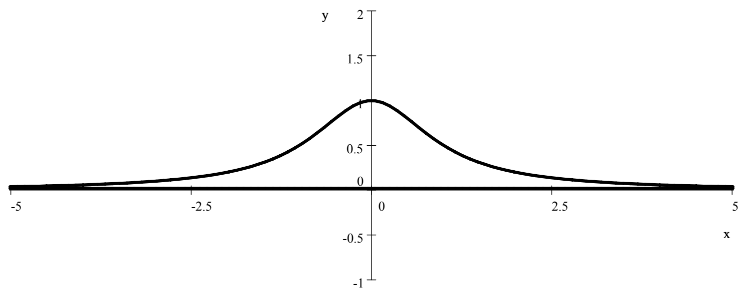
$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} &= 12, \text{ dvs} \\ \lambda^2 &= 16, \text{ dvs} \\ \lambda &= \pm 4. \end{aligned}$$

Insättning av $\lambda = \pm 4$ i $(\lambda/2, \lambda/2, \lambda/2)$ ger de två punkterna $(2, 2, 2)$ och $(-2, -2, -2)$. Närmaste punkten på $x + y + z = 1$ till dessa punkter är $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, så $(2, 2, 2)$ är närmast och inte $(-2, -2, -2)$. Minimala avståndet är då

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2 - \frac{1}{3})^2 + (2 - \frac{1}{3})^2 + (2 - \frac{1}{3})^2} \\ = \; & \sqrt{3}\sqrt{(2 - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{3}(2 - \frac{1}{3}) \\ = \; & \frac{5}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Eftersom vi får veta i uppgiften att det finns en punkt som ligger närmast, måste det vara denna punkt.

Annars kunde vi ha en situation som om vi frågar efter den punkt på $y = \frac{1}{x^2+1}$ som är närmast x-axeln. Då skulle ovanstående metod ge punkten $(0, 1)$, ty här är en normal till kurvan parallell med en normal till x-axeln. Men här finns inget minimum, ty när $x \to \pm\infty$ kommer vi allt närmare x-axeln, och det finns ingen punkt som är närmast.



Det finns ingen punkt på $y = \frac{1}{x^2+1}$ som är närmast x-axeln.

Svar: Närmast punkt är $(2, 2, 2)$ med avståndet $\frac{5}{\sqrt{3}}$ till $x + y + z = 1$.