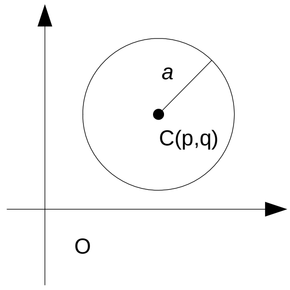
ÖPPNA OCH SLUTNA MÄNGDER. KOMPAKTA MÄNGDER. DEFINITIONSMÄNGD.

INLEDNING. Några viktiga andragradskurvor: Cirkel, ellips, hyperbel och parabel.

1. **Cirkelns ekvation**

Cirkeln med centrum i $C(p,q)$ och radien $r = a$

har ekvationen $(x-p)^2 + (y-q)^2 \;=\; a^2$



Anmärkning 1. Endast en punkt(0,0) satisfiera ekvationen $x^2 + y^2 = 0$

Anmärkning 2. Ingen punkt satisfierar ekvationen $x^2 + y^2 = -1$.

Exempel 1. Rita cirkeln

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$$

Vi kvadratkompletterar

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4 \;\Rightarrow\; (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 4$$

$$\Rightarrow\; (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

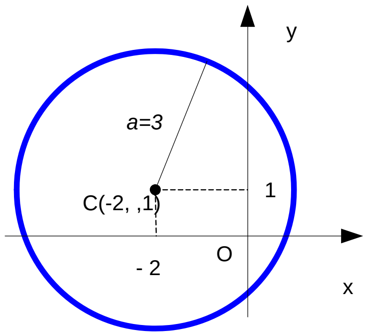
Om vi jämför med cirkelns ekvationen $(x-p)^2 + (y-q)^2 \;=\; a^2$, ser vi att

$-p = 2, \quad -q = -1 \quad och \quad a^2 = 9$

eller

$p = -2, \quad q = 1 \quad och \quad a = 3$

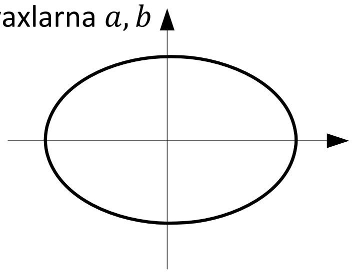
Alltså C(-2,1) är centrum och a=3 är cirkelns radie.



Ellipsen med centrum i origo (0,0) och halvaxlarna a, b

har ekvationen

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1.$



Anmärkning1: Om ellipsens centrum ligger i punkten C(p,q) då har ellipsen följande ekvation

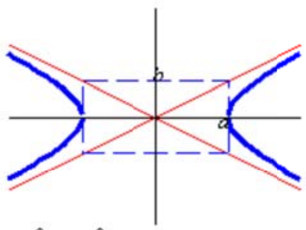
$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 .$$

Anmärkning 2. Endast en punkt(0,0) satisfiera ekvationen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 0$

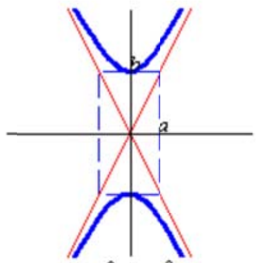
Anmärkning 3. Ingen punkt satisfierar ekvationen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = -1.$

Hyperbler: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ (har 2 skärningspunkter med x-axeln)

och $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2} = 1.$ (har 2 skärningspunkter med y-axeln)



Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ med asymptoter $y=\frac{b\,x}{a}$ och $y=-\frac{b\,x}{a}$



Hyperbeln $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ med asymptoter $y=\frac{b\,x}{a}$ och $y=-\frac{b\,x}{a}$

Anmärkning 1. Ekvationen $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 0$ kan faktoriseras och skrivas som

$$(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}) = 0.$$

och därmed punkter som satisfierar ekvationen ligger på två linjer

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = 0 \quad och \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 0 .$$

Exempel 2. Rita hyperbeln $2y^2-8x^2=8.$

Lösning: För att bestämma a och b skriver vi ekvationen på formen $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2} = 1.$

Vi delar ekvationen $2y^2-8x^2=8$ med 8 och får

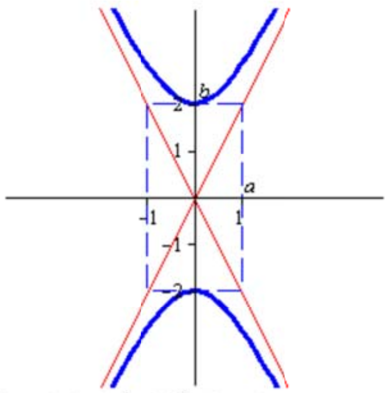
$$\frac{y^2}{4}-x^2 = 1 \Rightarrow \quad b = 2 \quad och \;\; a = 1.$$

Därför är $y = \pm 2$ hyperbelns asymptoter.

Vi ritar asymptoter och,

med hjälp av en rektangel (se bilden),

skisserar vi hyperbeln.

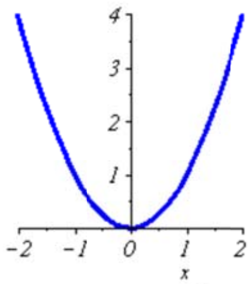


Hyperbeln $2y^2 - 8x^2 = 8$ med asymptoter
$y = 2x$ och $y = -2x$

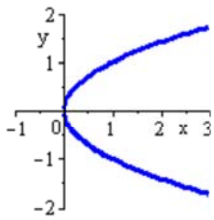
Parabler

$y = ax^2 + bx + c$ (där $a \neq 0$) och $x = ay^2 + by + c$ (där $a \neq 0$)

Exempel 3.



Parabeln $y = x^2$



Parabeln $x = y^2$

==

MÄNGDER

Standard talmängder:

N= {0, 1, 2, 3,….} mängden av alla **naturliga tal** (I några böcker N={1,2,3,…)

Z= { … –3, –2, –1,0 , 1, 2, 3 , 4, … } mängden av alla **hela tal**

Q= { $\frac{m}{n}$, där m, n är hela tal och $n \neq 0$ } mängden av alla **rationella tal**

R mängden av alla **reella tal**

C mängden av alla **komplexa tal**

Endimensionella Intervall :

(*a*, *b*) Öppet intervall = mängden av reella tal x sådana att $a < x < b$
[*a*, *b*) halvöppet intervall = mängden av reella tal x sådana att $a \leq x < b$
(*a*, *b*] halvöppet intervall = mängden av reella tal x sådana att $a < x \leq b$
[*a*, *b*] Slutet intervall= mängden av reella tal x sådana att $a \leq x \leq b$

GRUNDLÄGGANDE BEGREPP OCH BETECKNINGAR

Begrepp "mängd" och "element" är grundläggande begrepp i matematiken (och därmed begrepp "mängd" och "element" inte definieras .)

Exempel 4. Låt A vara mängden av alla heltal som är större är 3 och mindre än 8.

A består av element 4, 5, 6 och 7. Vi betecknar detta på följande sätt

A= {4, 5, 6, 7}.

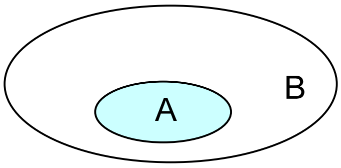
Därmed $4 \in A$ som utläses 4 **tillhör** A (eller 4 är ett element i mängden A)

Vi kan skriva att $5 \in A$, $6 \in A$ och $7 \in A$

men t ex $51 \notin A$ (51 **tillhör inte** A)

Definition 1. Mängden utan element { } kallas **den tomma mängden** och betecknas $\varnothing$.

Definition 2. Mängden A är en **delmängd** av mängden B om varje element i A är också element i B.



Vi betecknar $A \subseteq B$ (utläses A är en delmängd av B)

Alltså : $A \subseteq B$ om $(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Definition 3. Två mängder A och B är lika om

(varje element som tillhör A , tillhör också B) och (varje element som tillhör B tillhör också A)

Alltså:

$A = B$ om och endast om $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ och $(x \in B \Rightarrow x \in A)$.

Därmed $A = B$ är ekvivalent med $[A \subseteq B$ och $B \subseteq A]$

Anmärkning: Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ säger vi att A är en **äkta delmängd** av B och skriver

$A \subset B$

En mängd definieras av de element som mängden innehåller. Det sätt på vilket vi anger mängdens element, eller om element upprepas spelar inte roll.

Därför t ex

{1,2,3}={1,1,3,3,2,2,2}= {3,1,2}

(Vi ser att alla tre mängder består av element 1, 2 och 3 . Upprepning och ordning spelar inte roll i mängdens definition.)

En mängd **definieras oftast** som mängden av alla element som satisfierar ett eller flera villkor och ligger i en redan känd mängd:

$A = \{x \in G: \; P(x)\}$,

utläses A är mängden av alla x som tillhör G och som satisfierar villkoret P(x) .

En mängd definieras av de element som mängden innehåller. Det sätt på vilket vi anger mängdens element, eller om element upprepas spelar inte roll.

Därför t ex

{1,2,3}={1,1,3,3,2,2,2}= {3,1,2}

(Vi ser att alla tre mängder består av element 1, 2 och 3 . Upprepning och ordning spelar inte roll i mängdens definition.)

Exempel 5. Låt Z beteckna mängden av alla heltal. Ange alla element för följande mängder

a) $A = \{x \in Z: \; -2 \leq x \leq 4\}$ b) $B = \{x \in Z: \; x^2 = 25\}$

c) $C = \{x \in Z: \; x^2 = -25\}$ d) $D = \{x \in Z: \; 2x = 3\}$

Svar: a) A={-2, -1,0 , 1, 2, 3, 4} b) B={-5, 5} c) C= Ø d) D= Ø

Exempel 6. Låt R beteckna mängden av alla reella tal . Ange alla element för följande mängder

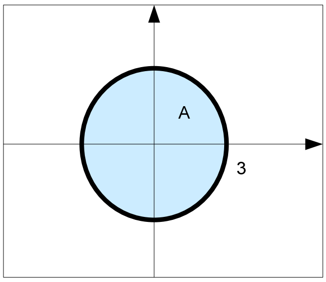
a) $A = \{x \in R: \; x^2 = 5\}$ b) $B = \{x \in R: \; 2x = 3\}$ c) $A = \{x \in R: \; x^2 = -5\}$ d)

Svar: a) A={$-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ } b) B={3/2} c) C= Ø

Exempel 7. Rita följande mängd i xy-planet

A= {(x,y) ∈ R^2 : $x^2+y^2 \le 9$ }

Svar:

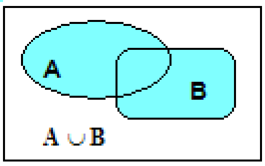


Exempel 8. Rita följande mängd i xy-planet

D= $\{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1$ och $y \ge 0$ }

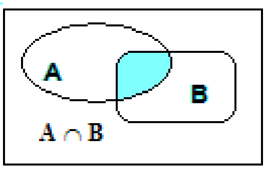
MÄNGDOPERATIONER. **1. Unionen** mellan två mängder A och B är mängden av alla element som finns i A **eller** B. Unionen betecknas $A \cup B$ (utläses A union B) .

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

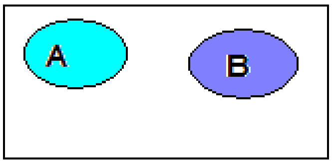


2. Snittet (skärningen**)** av två mängder A och B är mängden av alla element som finns i **både** A och B. Snittet betecknas $A \cap B$ (utläses A snitt B)

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$$

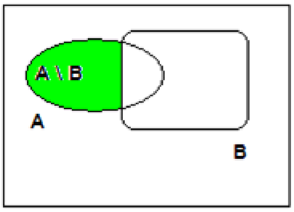


3. A och B är **disjunkta** mängder om de har inga gemensamma element dvs $A \cap B = \emptyset$ (där Ø betecknar den **tomma mängden**) .



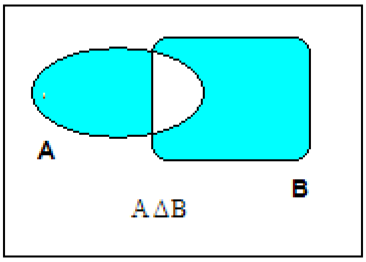
4. Differensen mellan två mängder A och B är mängden av alla element som ligger i A men inte i B.

A \ B $= \{x : x \in A \text{ och } x \notin B\}$.



6. Symmetrisk differens.

$A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

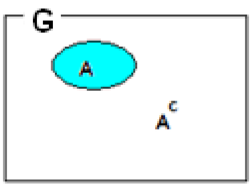


7. Oftast betraktar vi mängdoperationer mellan delmängder till en känd mängd **(grundmängd) ,**

Om G är en grundmängd (t ex R^n) och A en delmängd till G då definieras **komplementet** till A som

mängden av alla element i G som inte ligger i A. komplementet betecknas A^C

$A^C = \{x \in G : x \notin A\}$



PUNKTMÄNGDER I R^n

Definition 4. R^n definieras som mängden av alla reella **n-tipplar :**

$R^n \overset{def}{=} \{(x_1, x_2, \dots x_n), \text{där alla koordinater } x_k \text{ är reella tal}\}$.

Element i R^n dvs n-tipplar $(x_1, x_2, \dots x_n)$ kallar vi punkter.

Låt M vara en delmängd till R^n.

Vi använder följande beteckningar:

$P \in M$ betecknar att punkten P **tillhör** mängden M (P ligger i M)

$Q \notin M$ betecknar att punkten Q inte tillhör mängden M (Q ligger inte i M).

Punkter och vektorer.

Om A $(a_1, a_2, \dots a_n)$ och B $(b_1, b_2, \dots b_n)$ är två punkter i R^n och $\vec{AB}$ vektorn med startpunkt i A och eendpunkt i B då gäller

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots b_n - a_n).$$

Positionsvektorn (=ortvektorn) till en punkt A $(a_1, a_2, \dots a_n)$ är vektorn

$$\vec{OA} = (a_1 - 0, a_2 - 0, \dots a_n - 0) = (a_1, a_2, \dots a_n),$$

{har samma koordinater som punkten A}.

Därför kan en n-tippel $(a_1, a_2, \dots a_n)$ betraktas som både en punkt eller en vektor { dvs punkten A $(a_1, a_2, \dots a_n)$ eller tillhörande ortvektor vektor $\vec{OA} = (a_1, a_2, \dots a_n)$.

Avståndet mellan A och B, som betecknas $d(A,B)$, är lika med längden av vektorn $\vec{AB}$:

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Anm. Om vektorlängd definieras på ovanstående (standard) sätt kallas $\mathbf{R}^n$ för euklidisk vektorrum.

Triangelolikheten: $d(A,C) \le d(A,B) + d(B,C)$

är viktig och kan enkelt bevisas med hjälp av elementär algebra.

Öppet och slutet klut.

Definition 5. Låt $C(c_1, c_2, \dots c_n)$ vara en punkt i $\mathbf{R}^n$ och r>0 ett reellt tal. Ett **öppet klot** i R^n består av alla punkter $X(x_1, x_2, \dots x_n)$ som satisfierar $d(X,C) < r$. Vi kallar C för klotets medelpunkt eller centrum och r för dess radie.

Alltså det öppna klotet $Kö(C,r)$, med centrum C och radien r, definieras av

$Kö(C,r) = \{X \in R^n : d(X,C) < r\}$ eller

$Kö(C,r) = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < r\}$

som är ekvivalent med

$Kö(C,r) = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}$

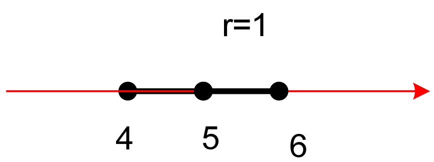
Definition 6. Ett **slutet klot** $Ks(C,r)$, med centrum C och radien r, definieras av

$Ks(C,r) = \{X \in R^n : d(X,C) \le r\}$

Anmärkning: Ett "klot" enligt ovanstående definiton blir ett intervall i det endimensionella rummet och en cirkel i det tvådimensionella rummet

T ex endimensionella (slutna) "klotet" med centrum i punkten C=5 och radien r=1 är

$K_1(C,r) = \{x \in R : d(x,C) \le 1\} = \{x \in R : |x - 5| \le 1\} = \{x \in R : -1 \le x - 5 \le 1\} = \{x \in R : 4 \le x \le 6\}$
dvs "klotet" är faktiskt intervallet [4,6]



Sfär.

Definition 7. En **sfär** $S(C,r)$ i R^n, med centrum C och radien r, definieras av

$S(C,r) = \{X \in R^n : d(X,C) = r\}$

Exempel 9. Bestäm ekvationen som beskriver 5-dimensionella sfären med centrum

C(1, 2, –3, –10, 7) och radien r=3.

Lösning: Om $X(x_1, x_2, \ldots x_5)$ är en punkt på sfären då

$d(C,X) = r \Rightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} = r$
$\Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = r^2$

I vårt fall blir sfärens ekvation

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 3)^2 + (x_4 + 10)^2 + (x_5 - 7)^2 = 9$

Begränsade och obegränsade mängder.

Definition 8. En mängd M i R^n är begränsad om det finns ett tal c sådant att

$d(O,P) < c$ för alla $P \in M$.

Anmärkning 1 Vi kan skriva villkoret på ekvivalent sätt : $|\overrightarrow{OP}| < c$.

Anmärkning 2. Definitionen kan geometriskt tolkas på följande sätt:

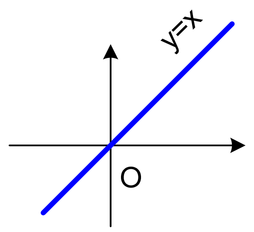
(Mängden M i R^n är begränsad.) $\Leftrightarrow$ (Det finns minst ett klot med centrum i origo som innehåller hela M.)

Exempel 10. Bestäm om följande mängder i R^2 är begränsade eller obegränsade.

a) $M_1 = \{(x,y) \in R^2 : y = x\}$ (en rät linje)

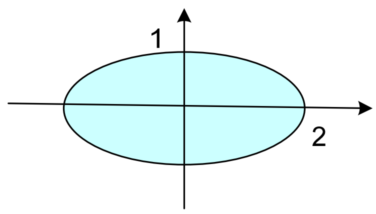
b) $M_2 = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \le 1\}$ (ellipsen med centrum i origo och halvaxlar 2 och 1)

Svar: a) Mängden M_1 är obegränsad .



Förklaring: Avståndet från en punkt (x,y) i M_1 til origo är
$d(P,O) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{2}$ är obegränsad (avståndet $d(P,O) \to \infty$ om $x \to \infty$)

Svar: b) Mängden M_2 är begränsad .

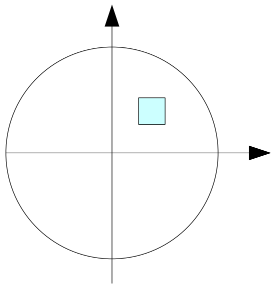


Hela ellipsen ligger i en cirkel t ex i cirkeln med radien r= 3 och centrum i origo.

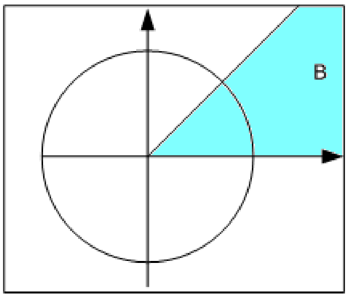
Exempel 11. Avgör om följande mängd är begränsad

a) $A = \{(x,y\},\ 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$ **b)** $B = \{(x,y\}, 0 \le y \le x\}$

Svar a) Mängden A är **begränsad**. (Mängden ligger t ex i cirkeln $x^2 + y^2 \leq 25$



b) Mängden är **obegränsad**. Oavsett hur stor cirkel ritar vi, finns det alltid punkter utanför cirkeln.

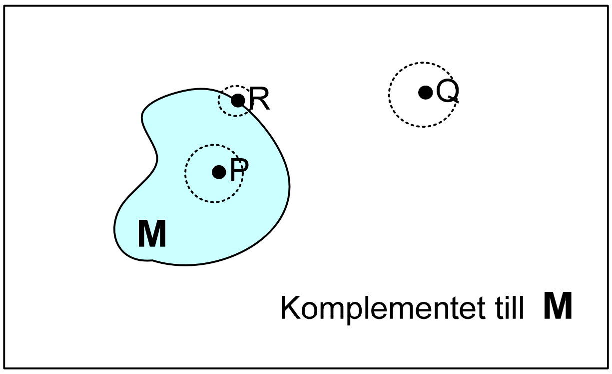


RANDPUNKTER. INRE OCH YTTRE PUNKTER

Vi betraktar en punkt P i R^n och en mängd M som är äkta delmängd av R^n.

Definition 9 .

1. En punkt P i R^n kallas en **randpunkt** till M om **varje** öppet klot med centrum i punkten P (oavsett hur litet klotets radie är) innehåller minst en punk från M och minst en punkt från komplementet C(M).
2. En punkt P i R^n kallas en **inre punkt** till M om det finns **minst ett** öppet klot med centrum i P vars alla punkter ligger i M.
2. En punkt P i R^n kallas en **yttre punkt** till M om det finns **minst ett** öppet klot med centrum i P vars alla punkter ligger i CM.



I ovanstående figur är R en randpunkt till M. P är en inre punkt medan Q är en yttre punkt till M

Definition 10. Mängden av alla randpunkten till M kallas **randen** av M och betecknas oftast $\partial(M)$.

ÖPPNA OCH SLUTNA MÄNGDER

Definition 11.

1. En mängd M i R^n är **sluten** om mängdens ALLA gränspunkter också tillhör mängden.
2. En mängd är **öppen** om INGEN mängdens gränspunkt tillhör mängden.
3. En mängd är **varken öppen eller sluten** om några, men inte alla, gränspunkter tillhör mängden.

Lägg märke till att enligt Definitionen vi har följande påstående:

P1. En öppen mängd innehåller endast inrepunkter (ingen gränspunkt)
P2. (M är öppen) $\Leftrightarrow$ (Komplementet C(M) är sluten)
P3. (M är sluten) $\Leftrightarrow$ (Komplementet C(M) är öppen)

OMGIVNING TIL EN PUNKT

Definition 12. Vi säger att mängden M är en **omgivning** till punkten P om M innehåller ett öppet klot med centrum i P.

Exempel 12. Beskriva randpunkter, eventuella inrepunkter och avgör om följande mängder i R^2 är öppna, slutna eller ”varken öppna eller slutna”.

a) $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1\}$

b) $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} < 1\}$

c) $M_3 = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1\}$

d) $M_4 = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \le 1, \quad x > 0\}$

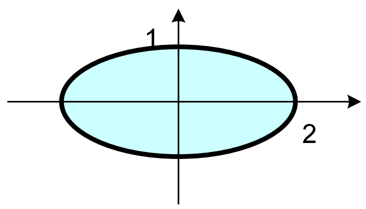
e) $M_5 = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} < 1, \quad x \ge 0\}$

f) $M_6 = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \le 1, \quad x \ge 0\}$

Lösning a) Randen $\partial(M_1)$ består av alla punkter i R^2 som ligger på ellipsen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ och alla ligger i M_1 (se Definitionen av M_1).

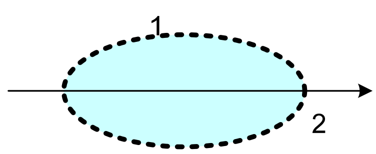
Alltså $\partial(M_1) = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1\}$

Inre punkter satisfierar $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} < 1$.



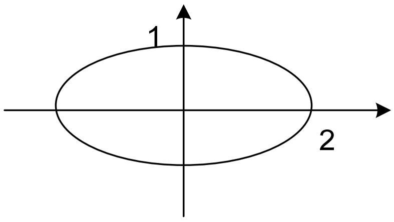
Mängden M_1 är sluten eftersom den innehåller alla sina randpunkter.

b) $\partial(M_2) = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1\}$ samma som i a-frågan men, den här gången, ingen randpunkt tillhör M_2. Därför är M_2 en öppen mängd. Alla punkter i M_2 är inre punkter.



c) Alla punkter på ellipsen M_3 är randpunkten. Mängden saknar inrepunkter. Randen $\partial(M_3) = \{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1\} = M_3$.

M_3 är en sluten mängd.

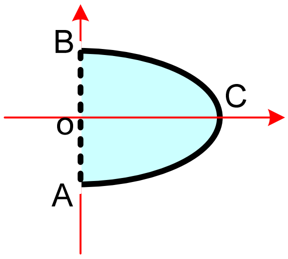


d) Randen består av sträckan AB (se figuren nedan) och den delen av ellipsen som ligger till höger om y-axeln.

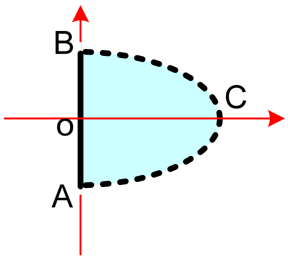
Sträckan AB tillhör inte M_4 medan halvellips tillhör M_4.

Mängden är varken öppen eller sluten. Inre punkter är de punkter som definieras av

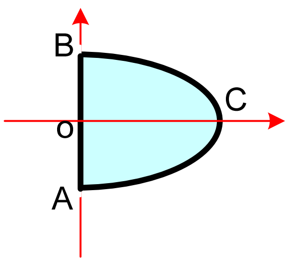
$\{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} < 1, \quad x > 0\}$



e) Mängden är varken öppen eller sluten. Se nedanstående figur.



f) M_6 är en sluten mängd. se figuren nedan.



KOMPAKTA MÄNGDER

Definition 13. En mängd som är både **begränsad och sluten** kallas **kompakt.**

Exempel 13. Bestäm om följande mängder i planet R^2 är kompakta

a) $\{(x, y\}, \ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 3\}$ **b)** $\{(x, y), \ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\}$

c) $\{(x, y\}, \ 0 < x < 3, \ 0 < y < 4\}$ **d)** $\{(x, y), \ y \ge x\}$

Svar: a) Ja. Mängden är **kompakt** eftersom den är **begränsad och sluten.**

b) Ja. Mängden är **kompakt** eftersom den är **begränsad och sluten.**

c) Nej . Mängden är INTE kompakt eftersom den är INTE sluten**.**

d) Nej . Mängden är INTE kompakt eftersom den är INTE begränsad**.**

DEFINITIONSMÄNGD FÖR EN FUNKTION AV FLERA VARIABLER

I nedanstående uppgifter använder vi kunskap om Definitionsmängder för elementära envariabelfunktioner:

i) En rationell funktion $\frac{p(t)}{q(t)}$ är definierad om $q(t) \neq 0$

ii) Logaritm $\ln(t)$ är definierad om $t > 0$.

iii) Funktionen $\sqrt{t}$ är definierad om $t \ge 0$.

iv) Funktioner $\arcsin(t)$ och $\arccos(t)$ är definierade om $-1 \le t \le 1$

Exempel 14. Bestäm och skissera (rita) största möjliga Definitionsmängd D till följande funktioner.

Bestäm också om Definitionsmängden är en **sluten**, **öppen** eller **varken sluten eller öppen** mängd.

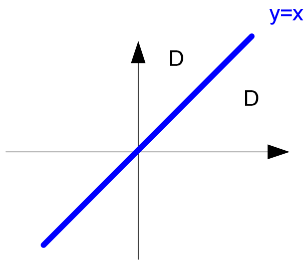
a) $z = \frac{1}{y-x}$ b) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ c) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$

d) $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ e) $z = \sqrt{2y} + \ln(4 - x^2 - 4y^2)$

f) $z = \arcsin(y) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + y^2}$

Lösning:

a) Funktionen $z = \frac{1}{y-x}$ är definierad om $y - x \neq 0$ d vs $y \neq x$. Definitionsmängden består av alla punkten i planet R^2 förutom de som ligger på linjen *y=x*.

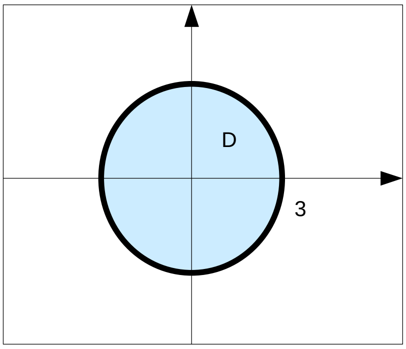


Gränsen till Definitionsmängden består av punkter som ligger på linjen $y = x$.

Ingen gränspunkt tillhör D och därför är D är en **öppen** mängd.

b) Funktionen $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ är definierad om $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ d vs $x^2 + y^2 \leq 9$.

Definitionsmängden består av alla punkter som ligger på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$

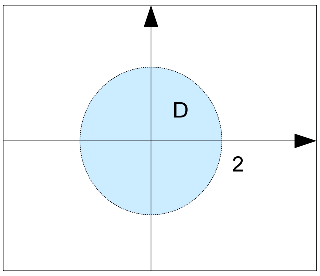


Gränspunkter, d vs punkter som ligger på själva cirkelns linje $x^2 + y^2 = 9$ tillhör också D.

(Alla gränspunkten tillhör D) $\Rightarrow$ (D är en **sluten** mängd).

c) Funktionen $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ är definierad om $4 - x^2 - y^2 > 0$ d vs $x^2 + y^2 < 4$.

Definitionsmängden består av alla ”inre” punkter på cirkelskivan.

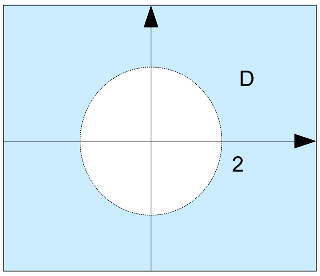


Gränspunkter, d vs punkter som ligger på själva cirkelns linje $x^2+y^2 = 4$ tillhör INTE D.

(INGEN gränspunkt tillhör D) $\Rightarrow$ (D är en **öppen** mängd).

d) Funktionen $\mathrm{z}=\ln(x^2+y^2-4)$ är definierad om $x^2+y^2-4 > 0$ d vs $x^2+y^2 > 4$.

Definitionsmängden består av alla ”yttre” punkter till cirkelskivan $x^2+y^2 > 4$



Gränspunkter, d vs punkter som ligger på själva cirkelns linje $x^2+y^2 = 4$ tillhör INTE D.

(INGEN gränspunkt tillhör D) $\Rightarrow$ (D är en **öppen** mängd).

e) Funktionen $\mathrm{z}=\sqrt{2\mathrm{y}} + \ln(4-x^2-4y^2)$ är definierad om

två villkor är uppfyllda

Villkor 1. $2\mathrm{y} \geq 0$ dvs $\mathrm{y} \geq 0$ (Punkter som ligger på linjen y=0 uppfyller också villkor 1)

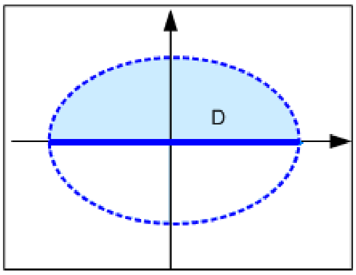
och

Villkor 2.

$$4-x^2-4y^2 > 0 \Rightarrow x^2+4y^2 < 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2 < 1$$

(Gränspunkter på ellipsskivan uppfyller INTE villkor 2)

Båda villkor är uppfyllda i övre delen av ellipsen $\frac{x^2}{4} + y^2 < 1$. Några gränspunkter tillhör D men inte alla.



(Några gränspunkter tillhör D men inte alla) ⇒ (D är en **varken öppen eller sluten** mängd).

f) $z = \arcsin(y) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + y^2}$ Funktionen $z = \arcsin(y) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + y^2}$ är definierad om

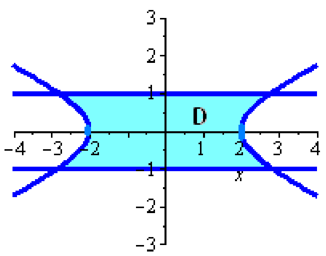
två villkor är uppfyllda

Villkor 1. $-1 \le y \le 1$ och

Villkor 2.

$$1 - \frac{x^2}{4} + y^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 \le 1$$

Gränspunkterna för det här villkoret består av de punkter som ligger på hyperbeln $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Hyperbeln delar planet i tre delar och olikheten $\frac{x^2}{4} - y^2 \le 1$ är uppfylld på själva hyperbeln och i den del som innehåller (0,0) (som vi kan inse genom att testa tre punkter t ex (0,0) , (3,0) och (-3,0)).



Båda villkor är uppfyllda mellan linjerna $y = 1$, $y = -1$ och mellan två grenar av hyperbeln.

Alla gränspunkten tillhör D) ⇒ (D är en **sluten** mängd).