# VARIABELBYTE I TRIPPELINTEGRALER. SFÄRISKA KOORDINATER

## Variabelbyte i trippelintegraler ( allmänt fall)

$x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ och $z = z(u,v,w)$

$$\iiint_K f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{K_1} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \,|\, J \,|\, dxdydz$$

Här $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ och $z = z(u,v,w)$ är bijektiva $C^1$ funktioner från $K_1$ i uvw-rummet till K i xyz-rummet och Jacobis determinant (funktionaldeterminanten)

$$J = \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

**Absolutbeloppet** i substitutionsformeln kring J garanterar en positiv areaskala.

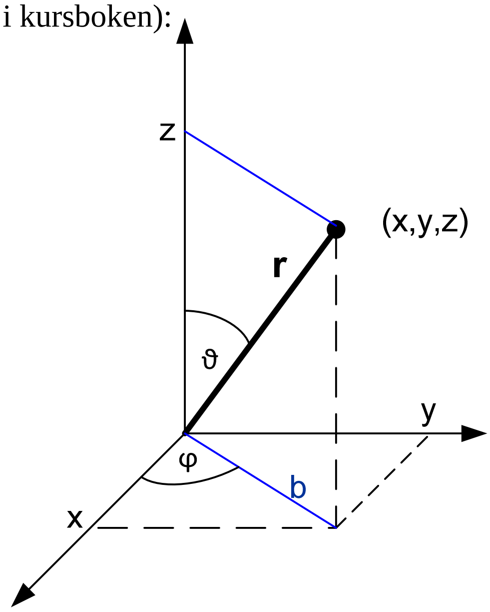
9. För **sfäriska koordinater** ( kallas rymdpolära i kursboken)

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ och $z = r\cos\theta$

är **Jacobis determinant** $J = r^2 \sin\theta$ .

==============================================================

Om kroppen K är ett område som begränsas av en kon och en sfär är det oftast lämpligt att använda **sfäriska koordinater** ( kallas rymdpolära i kursboken):




Vi ser i figuren att

$z = r\cos\theta$

För att bestämma x beräknar vi först

projektionen av r på xy-planet

( som vi betecknar **b** i figuren)

$b = r\sin\theta$ ,

Från $x = b\cos\varphi$ har vi slutligen $x = r\sin\theta\cos\varphi$,

på samma sätt beräknas $y = r\sin\theta\sin\varphi$ .

Därmed har vi sambandet mellan xyz och sfäriska koordinater:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

**Jacobis determinant** är $J = r^2 \sin\theta$ ( kan beräknas från ovanstående formler).

För sfäriska koordinater gäller följande relationer:

$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\theta$ och

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

===========================================================

**Uppgift 1.** Beräkna integralen $\iiint_K f(x,y,z)dxdydz$ av kroppen K där K är det område som ligger mellan en konisk yta och två sfärer:

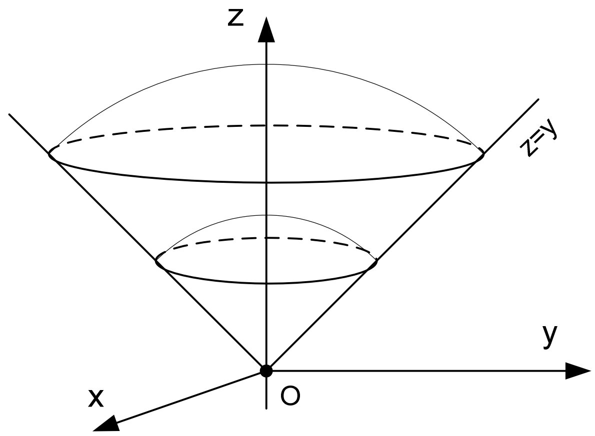
$$K = \left\{(x,y,z) : z \ge \sqrt{x^2+y^2},\quad 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\right\},$$

där a) $f(x,y,z) = z$ , b) $f(x,y,z) = x$ .

**Lösning:**

Vi använder sfäriska koordinater :

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$




där **Jacobis determinant** är $J = r^2 \sin\theta$

där $0 \le \varphi \le 2\pi$ , $0 \le \theta \le \pi/4$ och $1 \le r \le 2$

a) $f(x,y,z) = z$ . Vi har

$$\iiint_K zdxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \cdot \int_1^2 r^3 dr$$

$$= 2\pi \left[ \frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{8}\pi$$

**b)** $f(x, y, z) = x$ . Vi har

$$\iiint_K x dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 r \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot r^2 \sin\theta \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin^2\theta \, d\theta \cdot \int_1^2 r^3 dr = 0$$

eftersom $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$ .

**Svar: a)** $\frac{15}{8}\pi$ b) 0

**Uppgift 2.** Beräkna integralen $\iiint_K z dx dy dz$ av kroppen K där K är det område som ligger mellan en konisk yta och en sfärer:

$$K = \{(x, y, z) : z \le \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1\},$$

**Lösning:**

Vi använder sfäriska koordinater där gränser ges av $0 \le \varphi \le 2\pi$ , $\pi/4 \le \theta \le \pi$ och $0 \le r \le 1$.

**Jacobis determinant** är $J = r^2 \sin\theta$ .

$$\iiint_K z dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi} d\theta \int_0^1 r \cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{\pi/4}^{\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr$$

$$=2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}\pi$$

**Svar:** $-\frac{1}{8}\pi$

**Uppgift 3.** Beräkna massan av kroppen K där K är det område som ligger mellan en konisk yta och två sfärer:

$$K=\{(x,y,z): z\ge\sqrt{x^2+y^2},\quad 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\},$$

om densitet är $\rho(x,y,z)=y^2$

**Lösning:**

$$\text{massan}=\iiint_K \rho(x,y,z)dxdydz=\iiint_K y^2dxdydz$$

Vi använder sfäriska koordinater :

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\theta$$

där **Jacobis determinant** är $J=r^2\sin\theta$

där $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi/4$ och $1\le r\le 2$

$$\iiint_K y^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_1^2(r\sin\theta\sin\varphi)^2\cdot r^2\sin\theta dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_1^2\sin^3\theta\cdot\sin^2\varphi\cdot r^4dr=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\,d\theta\int_1^2 r^4dr$$

**Vi beräknar separat ovanstående integraler:**

I1. $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos 2\varphi)}{2}\,d\varphi\int\frac{(1-\cos 2\varphi)}{2}\,d\varphi=\left[\frac{1}{2}\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi}=\pi$

I2. $\int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sin\theta \cdot \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sin\theta \cdot (1-\cos^2\theta)\, d\theta =$

[ Substitutionen $\cos\theta = t, \quad \Rightarrow \quad -\sin\theta\, d\theta = dt \quad \Rightarrow \quad \sin\theta\, d\theta = -dt$

$\theta = 0 \Rightarrow t = 1$ och $\theta = \pi/4 \Rightarrow t = \sqrt{2}/2$ ]

$$\int_1^{\sqrt{2}/2} (1-t^2)\,(-dt) = \int_1^{\sqrt{2}/2} (t^2-1)\, dt \equiv \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^{\sqrt{2}/2} = \frac{(\sqrt{2}/2)^3}{3} - \sqrt{2}/2 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

I3. $\int_1^2 r^4 dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{5}$

Därför

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\, d\theta \int_1^2 r^4 dr = \pi \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right) \cdot \frac{31}{5} = \left(\frac{62}{15} - \frac{31\sqrt{2}}{12}\right)\pi$$

**Svar:** Massan = $\left(\frac{62}{15} - \frac{31\sqrt{2}}{12}\right)\pi$

**4.a)** Beräkna volymen av kroppen K där

$$K = \left\{(x,y,z) : z \ge \sqrt{x^2+y^2}, \quad 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}$$

**b)** Beräkna masscentrum för samma kropp då $\rho(x,y,z) = 1$.

Formler för **masscentrum** T( $x_c$, $y_c$, $z_c$) :

$x_c = \frac{Mx}{M}$ där M = massan = $\iiint_K \rho(x,y,z)dxdydz$ och $Mx = \iiint_K x\rho(x,y,z)dxdydz$

på samma sätt beräknas

$y_c = \frac{Mz}{M}$ där och $My = \iiint_K y\rho(x,y,z)dxdydz$

$z_c = \frac{Mz}{M}$ där och $Mz = \iiint_K z\rho(x,y,z)dxdydz$

**Lösning:**

Volymen (K)= $\iiint_K 1 \cdot dxdydz$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 r^2 \sin\theta \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_1^2 r^2 dr$$

$$= 2\pi[-\cos\theta]_0^{\pi/4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\pi = \frac{7(2-\sqrt{2})}{3}\pi$$

b) Massan =M= $\iiint_K \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_K 1dxdydz = \frac{14}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\pi = \frac{7(2-\sqrt{2})}{3}\pi$

$x_c$=0 , $y_c$=0 ( på grund av kroppens symmetri)

$Mz = \iiint_K z\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_K zdxdydz =$ ( se upp 1a) $= \frac{15\pi}{8}$

Därför $z_c = \dfrac{\frac{15\pi}{8}}{\frac{7(2-\sqrt{2})}{3}\pi} = \dfrac{45}{56(2-\sqrt{2})}$

Därmed är tyngdpunkten $T(0,\ 0,\ \frac{45}{56(2-\sqrt{2})})$

**Svar a)** Volymen = $\frac{7(2-\sqrt{2})}{3}\pi$ **b)** Tyngdpunkten: $T(0,\ 0,\ \frac{45}{56(2-\sqrt{2})})$