SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 14

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion, Avsnitt 15.3-15.4

- Kurvintegraler
- Kurvintegraler av vektorfält
- Beräkna kurvintegraler med parametrisering/potential

Kurvintegraler

Kurvintegraler/linjeintegraler

Båglängd: Börja med avsnitt 11.3 (boken) samt Anteckningar F2 sidan 16-24.

Hur bestämmer vi massan för en metalltråd γ med täthet f?

Låt metalltrådet γ vara en begränsad, slät kurva i $\mathbf{R}^3$ (eller $\mathbf{R}^2$) och täthetsfunktionen f som är definierad och kontinuerlig på γ. Då kan vi definiera kurvintegralen (massan)

$$\int_\gamma f(x, y, z)\, ds$$

som gränsvärdet av Riemannsummor

$$\sum f(x_j^*, y_j^*, z_j^*)\, |\Delta \mathbf{r}_j|.$$

Kurvintegraler

Kurvintegralen kan beräknas genom

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

där $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, är en parametrisering av γ

Exempel 1:
Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma y\,ds$$

där γ är övre halvan av enhetscirkeln, som börjar i $(1,0)$ och slutar i $(0,-1)$.

Svar: 2

Kurvintegraler av vektorfält

Kurvintegraler av vektorfält

Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett kontinuerligt plant vektorfält och γ en orinterad slät kurva så ges kurvintegralen av den tangentiella komponenten av $\mathbf{F}$ längs γ av

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

Om $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)),\ a \leq t \leq b$, parametriserar γ, så kan kurvintegralen beräknas genom

$$\int_a^b \left(P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right)\,dt$$

Motsvarande för vektorfält i $\mathbf{R}^3$

Kurvintegraler av vektorfält

Exempel: kurvintegraler av vektorfält

Exempel 2: Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a fallen nedan

A: $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ och γ är den del av kurvan $y = 1 - x^2$ som ligger i första kvadranten, genomlöpt från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.

B: $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ och γ är den del av enhetscirkeln som ligger i första kvadranten, genomlöpt från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.

Svar: Samma svar i båda fallen: -1.

Genomfört arbete i detta fall är oberoende av vägen.

Kurvintegraler av vektorfält

Quiz (här):

Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ a fallen nedan

A: $\mathbf{H}(x, y) = (-y, x)$ och γ är den del av kurvan $y = 1 - x^2$ som ligger i första kvadranten, genomlöpt från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.

B: $\mathbf{H}(x, y) = (-y, x)$ och γ är den del av enhetscirkeln som ligger i första kvadranten, genomlöpt från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.

Svar: För H olika svar: $4/3$ **resp** $\pi/2$**!**
Genomfört arbete i detta fall är beroende av vägen.
Förklaringen kommer snart.

Kurvintegraler av vektorfält

Kurvintegraler av konservativa vektorfält

Om **F** är ett konservativt vektorfält med potentialfunktion φ och γ är en orinterad slät kurva som startar i (x_0, y_0) och slutar i (x_1, y_1) så gäller att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0)$$

Bevis: Vi har $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, och därför kan vi skriva

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\varphi((x(t), y(t))dt = \varphi(x(t_1), y(t_1)) - \varphi(x(t_0), y(t_0))$$

där $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, etc...

Exempel Tentaproblem 2015-08-20

Betrakta det plana vektorfältet **F** som ges av

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(x + \frac{y}{2} + 3, \frac{x}{2} + y + 5\right)$$

A. Vad innebär det att ett vektorfält är konservativt?
B. Visa att vektorfältet **F** är konservativt.
C. Använd vetskapen att vektorfältet är konservativt för att beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \left(x + \frac{y}{2} + 3\right) dx + \left(\frac{x}{2} + y + 5\right) dy$$

där γ är någon slät kurva som börjar i $(-2, 0)$ och slutar i $(-2, -4)$.

Kurvintegraler av vektorfält

Sats i $\mathbb{R}^2$:

Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett glatt plant vektorfält på en öppen enkelt sammanhängande mängd D, så är följande påståenden ekvivalenta:

1. $\mathbf{F}$ är konservativt i D
2. $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla styckvis släta slutna kurvor γ i D
3. Alla kurvintegraler av $\mathbf{F}$ är oberoende av vägen i D
4. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i D

Kurvintegraler av vektorfält

Sats i $\mathbb{R}^3$:

Om $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ är ett glatt vektorfält på en öppen enkelt sammanhängande mängd D, så är följande påståenden ekvivalenta:

1. $\mathbf{F}$ är konservativt i D
2. $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla styckvis släta slutna kurvor γ i D
3. Alla kurvintegraler av $\mathbf{F}$ är oberoende av vägen i D
4. $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i D

Kurvintegraler av vektorfält

Minitenta 1: 2013-08-22

Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ och kurvan γ parametriseras av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$.

a. Beräkna kurvintegralen genom att använda kurvans parametrisering.

b. Bestäm en potentialfunktion och beräkna kurvintegralen med hjälp av den.

Minitenta 2: 2014-05-26

Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} -2y\,dx + x^2\,dy$$

där γ är en fjärdedel av cirkelbågen med centrum i $(1, 0)$ och radie 1, med start i $(2, 0)$ och slut i $(1, 1)$

Kurvintegraler av vektorfält

Minitenta 3: 2016-03-21

Vektorfältet **F** i planet ges av $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, 2xy + 1)$.

a. Avgör om **F** är konservativt och bestäm om möjligt en potentialfunktion.

b. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där C är kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (te^t, e^{t-1})$ då $0 \leq t \leq 1$.

Kurvintegraler av vektorfält

Se till att du kan dessa

1. Hur beräknar man kurvintegraler av vektorfält?
   a. med parametrisering av kurvan
   b. med potentialfunktion
2. När får man byta väg i en kurvintegral?