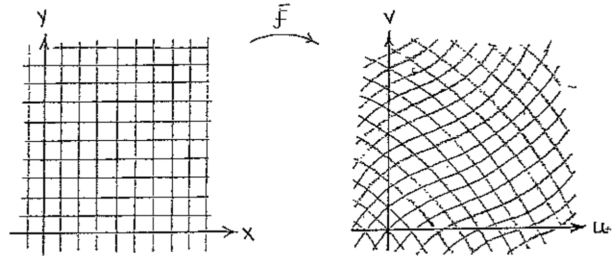
Föreläsning 9 i Kursboken (§3.2–3.4)

- Taylors formel för vektorvärda funktioner
  - Funktionalmatris
  - Funktionaldeterminant
- Kedjeregeln för vektorvärda funktioner
- Inversa funktionssatsen
  - Lokal inverterbarhet ≠ global inverterbarhet
  - Inversens funktionalmatris
- Implicita funktioner
  - Samband mellan två variabler
  - Samband mellan tre variabler

Taylors formel för vektorvärda funktioner

Betrakta en funktion

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$



När $\bar{f}$ linjariseras kring $(x,y)=(a,b)$ så linjariseras varje komponent separat

- $u(a+h, b+k) = u(a,b) + u'_x(a,b)h + u'_y(a,b)k + (\text{Restterm})$
- $v(a+h, b+k) = v(a,b) + v'_x(a,b)h + v'_y(a,b)k + (\text{Restterm})$

och linjariseringen av $\bar{f}$ blir

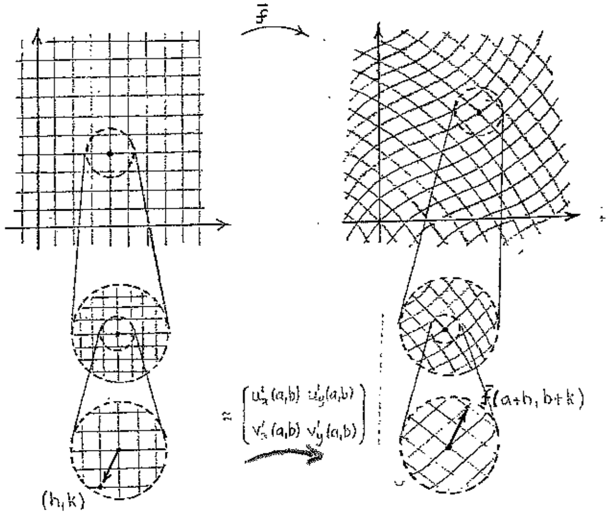
$$\bar{f}(a+h, b+k) = \begin{pmatrix} u(a,b) + u'_x(a,b)h + u'_y(a,b)k \\ v(a,b) + v'_x(a,b)h + v'_y(a,b)k \end{pmatrix} + (\text{Restterm})$$

eller i matrisform

$$\bar{f}(a+h, b+k) = \underbrace{\begin{pmatrix} u(a,b) \\ v(a,b) \end{pmatrix}}_{\text{konstant}} + \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} u'_x(a,b) & u'_y(a,b) \\ v'_x(a,b) & v'_y(a,b) \end{pmatrix}}^{\bar{f}\text{:s funktionalmatris}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{\text{linjära termer}} + (\text{Restterm}).$$

Geometriskt betyder formeln att lokalt kring (a,b) är $\bar{f}$ approximativt lika med en linjär avbildning som har matrisen

$$J_{\bar f} = \begin{pmatrix} u'_x(a,b) & u'_y(a,b) \\ v'_x(a,b) & v'_y(a,b) \end{pmatrix} .= \text{Jakobimatris tecknas} = \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x,y)=(a,b)}$$



Exempel 1 Linjarisera

$$\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y - 2xy + 3xy^2 \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

kring punkten $(x,y) = (1,1)$.

Lösningsförslag

Taylors formel lyder

$$\bar{f}(1+h,1+k) = \begin{pmatrix} u(1,1) \\ v(1,1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_x(1,1) & u'_y(1,1) \\ v'_x(1,1) & v'_y(1,1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (\text{Restterm}),$$

där $u(x,y) = x^2y - 2xy + 3xy^2$ och $v(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

Vi har att

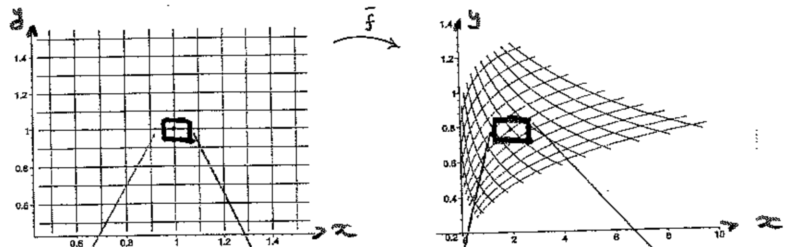
$$u(1,1) = 2, \qquad v(1,1) = \pi/4,$$

$$u'_x(1,1) = 2xy - 2y + 3y^2\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 3, \qquad v'_x(1,1) = \left.\frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\tfrac{1}{2},$$

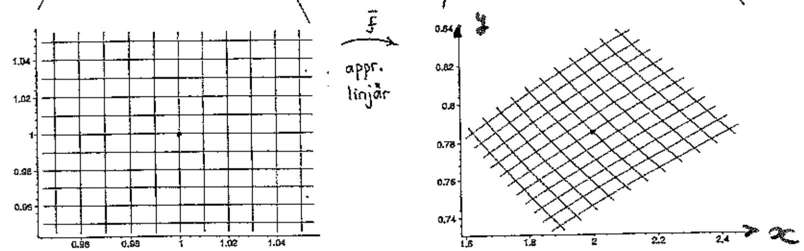
$$u'_y(1,1) = x^2 - 2y + 6xy\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 5, \qquad v'_y(1,1) = \left.\frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \tfrac{1}{2}.$$

Alltså är

$$f(1+h,1+k) = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (\text{Restterm}).$$



Förstorings glas



Funktionalmatris

Taylors formel av ordning 1 för en differentierbar funktion $\bar{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{pmatrix},$$

lyder

$$\bar{f}(a_1+h_1, \ldots, a_m+h_m) = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(a_1,\ldots,a_m) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(a_1,\ldots,a_m) \end{pmatrix}}_{\text{konstant}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}}_{\text{linjära termer}} + (\text{Restterm}).$$

Matrisen i den linjära delen kallas för $\bar{f}$:s funktionalmatris och betecknas

Jakobi matris

$$J_{\bar{f}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial(x_1,\ldots,x_m)} = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Övning 1 Bestäm funktionalmatrisen för

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(x+z) \\ \frac{xy}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial(x,y,z)} = \boxed{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y,z)}$$

Funktionaldeterminant

För en funktion

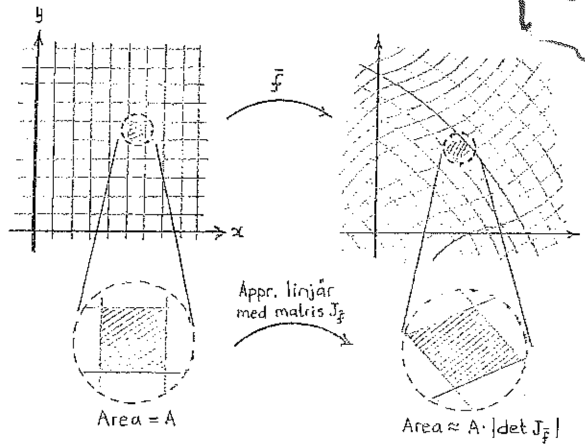
$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

anger funktionaldeterminanten

$$\det(J_{\bar{f}}) = \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

skalfaktorn för hur arean av små ytstycken förändras under avbildning med funktionen $\bar{f}$.

Används i variabelbyte vid dubbelintegraler



Se kursen för linjär algebra vad gör en linjär avb.

För funktioner $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ anger funktionaldeterminanten skalfaktorn för hur volymen av små kroppar förändras under avbildning med $\bar{f}$.

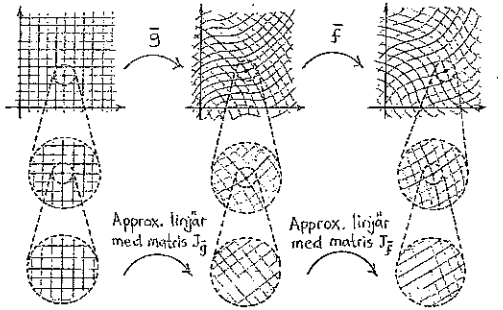
(används vid variabelbyte av trippelintegralen)

Kedjeregeln för vektorvärda funktioner

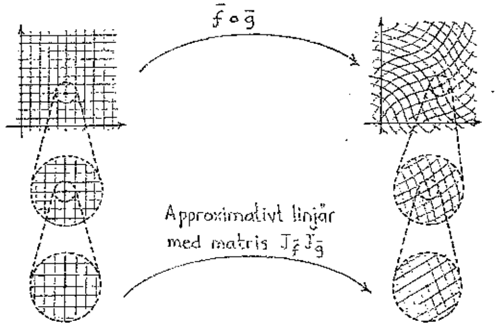
I en sammansättning $\bar{f}\circ\bar{g}$ av två differentierbara funktioner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\bar{g}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \overset{\bar{f}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

approximeras $\bar{f}$ och $\bar{g}$ lokalt väl av sina linjariseringar.



Sammansättningen $\bar{f}\circ\bar{g}$ kommer därför lokalt approximeras väl av $\bar{f}$ och $\bar{g}$:s linjariseringar utförda efter varandra, dvs $\bar{f}\circ\bar{g}$ har en linjarisering med matrisen $J_{\bar{f}\circ\bar{g}} = J_{\bar{f}}\,J_{\bar{g}}$.



Bra Exempel för kedjeregeln

Exempel 2: Bestäm funktionalmatrisen för

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{xy} \\ z\sin x \end{pmatrix}$$

a) direkt,

b) genom att dela upp $\bar{f}$ i två enklare steg och använda kedjeregeln.

Lösningsförslag

a) Vi har att

$$J_{\bar{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{xy} & \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{xy} & \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x} z\sin x & \frac{\partial}{\partial y} z\sin x & \frac{\partial}{\partial z} z\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{xy}} & \frac{x}{2\sqrt{xy}} & 0 \\ z\cos x & 0 & \sin x \end{pmatrix}.$$

b) Se $\bar{f}$ som sammansättningen $\bar{g}\circ\bar{h}$, där

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\bar{h}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} xy \\ \sin x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \overset{\bar{g}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \sqrt{u} \\ vw \end{pmatrix}.$$

Då säger kedjeregeln att

$$J_{\bar{f}} = J_{\bar{g}}\,J_{\bar{h}}.$$

Delfunktionerna har funktionalmatriserna

$$J_{\bar{h}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} xy & \frac{\partial}{\partial y} xy & \frac{\partial}{\partial z} xy \\ \frac{\partial}{\partial x}\sin x & \frac{\partial}{\partial y}\sin x & \frac{\partial}{\partial z}\sin x \\ \frac{\partial}{\partial x} z & \frac{\partial}{\partial y} z & \frac{\partial}{\partial z} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\bar{g}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{u} & \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{u} & \frac{\partial}{\partial w}\sqrt{u} \\ \frac{\partial}{\partial u} vw & \frac{\partial}{\partial v} vw & \frac{\partial}{\partial w} vw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 0 & 0 \\ 0 & w & v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & z & \sin x \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & z & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{xy}} & \frac{x}{2\sqrt{xy}} & 0 \\ z\cos x & 0 & \sin x \end{pmatrix}.$$

Övning 2 Givet funktionen

$$\bar{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin xy \\ \ln \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

a) Skriv f som en sammansättning av två enkla funktioner

$$\bar{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

b) Beräkna funktionalmatrisen $J_{\bar{f}}$ med kedjeregeln.

Skall utföras som hemläxa
(Se Exempel 1)

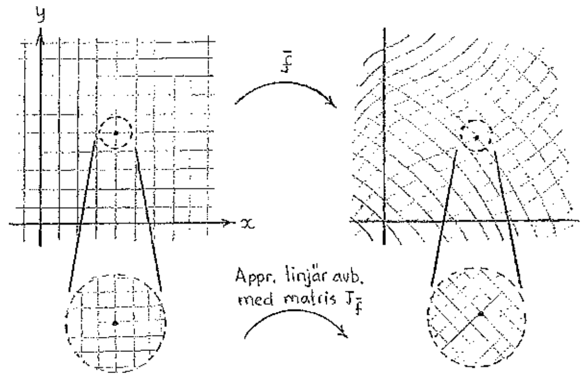
Inversa funktionssatsen

En kontinuerligt deriverbar funktion

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

ser lokalt ut som en linjär avbildning med matrisen

$$J_{\bar{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$



Om den linjära avbildningens matris $J_{\bar{f}}$ är inverterbar (dvs $\det(J_{\bar{f}}) \neq 0$) då är avbildning $\bar{f}$ <u>lokalt</u> <u>inverterbar</u> <u>kring</u> <u>linjariseringspunkten.</u>

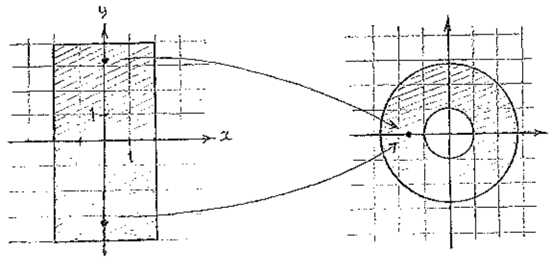
<u>Övning</u> **3** Visa att funktionen

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} xy \\ \ln \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

har en differentierbar lokal invers kring punkten $(x,y) = (1,1)$.

Lokalt inverterbar $\neq$ globalt inverterbar

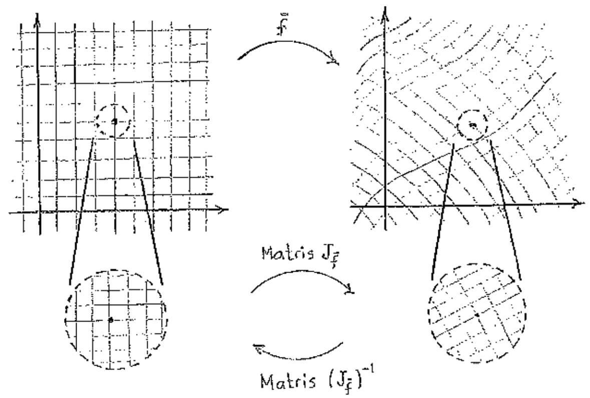
Observera att bara för att en funktion är lokalt inverterbar överallt i en mängd behöver inte funktionen vara globalt inverterbar.



Funktionen $\bar{f}(x,y) = (e^{(x+2)/4}\cos y,\ e^{(x+2)/2}\sin y)$ är lokalt inverterbar $(\det J_{\bar{f}}(x,y) = \frac{1}{4}e^{(x+2)/2} > 0)$ men inte globalt $(\bar{f}(0,-\pi) = \bar{f}(0,\pi) = (-\sqrt{e},0))$.

Inversens funktionalmatris

<u>Den lokala inversfunktionens funktionalmatris är inversen av funktionens funktionalmatris.</u>



Implicita funktioner

Vi behandlar vanligtvis funktioner som ges direkt av formler, men vissa typer av funktioner definieras istället via samband.

Exempel 3 Den ideala gaslagen lyder

$$pV = nRT. \qquad (*)$$

Om vi har givet $p = 200$ Pa, $n = 0{,}2$ mol och $T = 300$ K så går det från gaslagen att bestämma volymen V,

$$200\,V = 0{,}2 \cdot 8{,}314 \cdot 300 \quad \Leftrightarrow \quad V = 2{,}5 \text{ m}^3.$$

Gaslagen definierar volymen V som en funktion av p, n och T,

$$V = \frac{nRT}{p}.$$

Exempel 4 van der Waals gaslag

$$\left(p - \frac{a^2 n}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

definierar också volymen V som en funktion av de övriga tillståndsvariablerna p, n och T, men det är svårt att uttrycka $V = V(p,n,T)$ med en explicit formel.

Samband mellan två variabler : implicita funktionssats

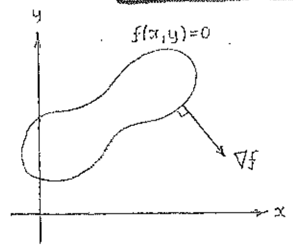
Antag att x och y hänger ihop via sambandet

$$f(x,y) = 0,$$

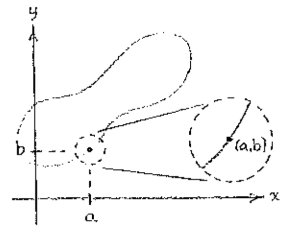
där f är en kontinuerligt deriverbar funktion.

Då definierar sambandet y som en kont. deriverbar funktion av x lokalt kring $(x,y) = (a,b)$ om

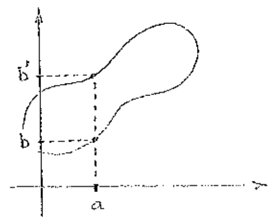
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.}$$



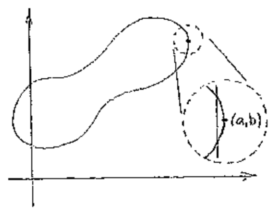
Alla punkter (x,y) som uppfyller $f(x,y)=0$ bildar en nivåkurva i planet och kurvan har normalvektorn $\nabla f = (f'_x, f'_y)$.



I punkten (a,b) är $f'_y(a,b) \neq 0$ och i en omgivning av (a,b) råder ett 1:1-förhållande mellan x- och y-värden på kurvan.

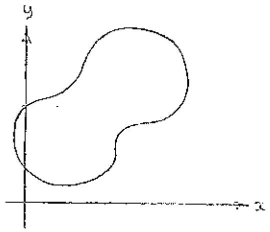


Observera att 1:1-förhållandet bara garanteras gälla lokalt och inte för hela kurvan.



I punkten (a,b) är $f'_y(a,b) = 0$ och oavsett hur liten omgivning kring (a,b) väljs så går det inte att definiera $y = y(x)$ eftersom mot x-värden till vänster om $x=a$ svarar två y-värden.

Övning 4 Markera de punkter där sambandet $f(x,y)=0$ inte definierar $y=y(x)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion.



Övning 5 Undersök om sambandet

$$e^{xy}+x+y=2$$

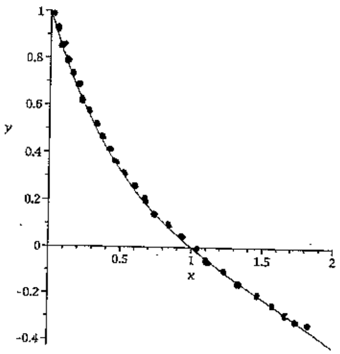
i en omgivning av punkten $(x,y)=(1,0)$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $y=y(x)$.

$f(x,y) =$ ____________

$\frac{\partial f}{\partial y} =$ ____________ i punkten $(1,0)$

Exempel 5 Bestäm $y'(1)$ för funktionen ovan.

Se lösningsförslaget på tavlan.



De röda punkterna uppfyller sambandet

$$e^{xy}+x+y=2.$$

kring punkten $(x,y)=(1,0)$

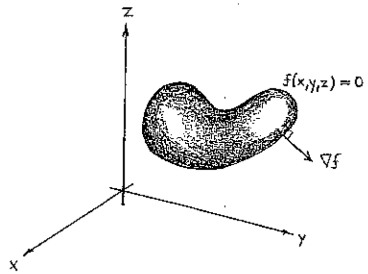
Samband mellan tre variabler : Implicita funktionssats

Säg att vi har ett samband mellan tre variabler

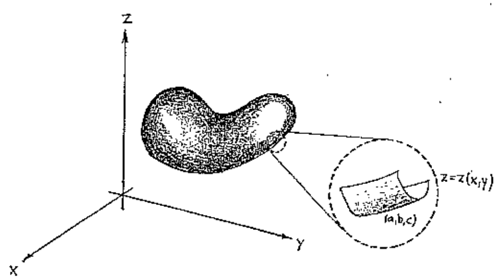
$$f(x,y,z)=0,$$

där f är en kontinuerligt deriverbar funktion. Då definierar sambandet z som en kontinuerligt deriverbar funktion av x och y lokalt kring $(x,y,z)=(a,b,c)$ om

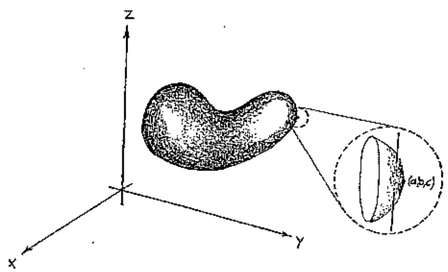
$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\neq 0.$$



Alla punkter (x,y,z) som uppfyller sambandet $f(x,y,z)=0$ bildar en nivåyta i rummet och ytan har normalvektorn $\nabla f=(f_x',f_y',f_z')$.



I en punkt (a,b,c) där $f_z'\neq 0$ går det att välja en omgivning vari det råder ett 1:1-förhållande mellan (x,y)-värden och z-värden på ytan.



I punkten (a,b,c) är $f_z'=0$ och det spelar ingen roll hur liten omgivning som väljs, det kommer alltid finnas (x,y)-värden mot vilka det svarar två z-värden.

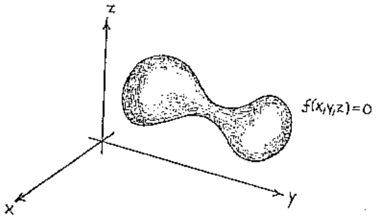
Övning 5: Hur lyder villkoret för att sambandet

Svar:

$$f(x,y,z) = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \neq 0$ ska definiera en kontinuerligt deriverbar funktion $x = x(y,z)$ i en omgivning av $(x,y,z) = (a,b,c)$.

Övning 6: Markera de punkter där $f(x,y,z) = 0$ inte definierar $y = y(x,z)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion.



Exempel 6: Visa att sambandet $3xyz - z^3 = 10$ definierar $z = z(x,y)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion kring $(x,y,z) = (1,3,2)$. Bestäm därefter $z'_x(1,3)$ och $z'_y(1,3)$.

Lösningsförslag

Definiera

$$f(x,y,z) = 3xyz - z^3 - 10.$$

Eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,3,2) = 3xy - 3z^2 \Big|_{\substack{x=1\\y=3\\z=2}} = -3 \neq 0$$

så ger implicita funktionssatsen att sambandet $f(x,y,z) = 0$ definierar $z = z(x,y)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion lokalt kring $(x,y,z) = (1,3,2)$.

I en omgivning av $(x,y) = (1,3)$ finns alltså en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller

$$3xy\,z(x,y) - z(x,y)^3 \equiv 10.$$

Derivera nu båda led med avseende på x,

$$3y\,z(x,y) + 3xy\frac{\partial z}{\partial x} - 3z(x,y)^2\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0 \qquad (1)$$

respektive y,

$$3x\,z(x,y) + 3xy\frac{\partial z}{\partial y} - 3z(x,y)^2\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0. \qquad (2)$$

(1) och (2) är ett linjärt ekvationssystem med $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ som obekanta och vi får

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy},$$

dvs

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,3) = \frac{3 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 3} = 6,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,3) = \frac{1 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 3} = 2.$$