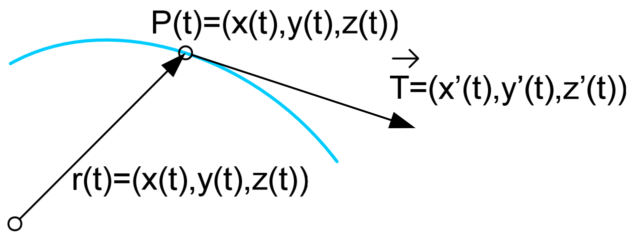
KURVOR OCH PÅ PARAMETER FORM

KURVOR I R^3



En kurva i R^3 beskrivs anges oftast på parameter form med tre skalära ekvationer:

$x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, $t \in D \subseteq R$ (*)

För varje t får vi en punkt på kurvan $P(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Omvänt en given punkt $P(a_1, a_2, a_3)$ ligger på kurvan (*) om och endast om det finns $t = t_0$ så att $a_1 = f_1(t_0)$, $a_2 = f_2(t_0)$ och $a_3 = f_3(t_0)$.

Man kan ange kurvan (*) med en vektor ekvation $\vec{r} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, $t \in D$ eller ekvivalent

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$ eller $(x, y, z) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ och även kortast $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Med andra ord: Vi definierar en kurva i R^3 med hjälp av tre reellvärda funktioner av en variabel *t*

(eller ekvivalent med en vektorfunktion av en variabel *t*)

Definitionsmängden D är vanligen ett intervall på reella axeln.

En vektor som är **parallell med tangentlinje** till kurvan $\vec{r} = \vec{r}(t)$ i punkten $P(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ är $\vec{r}\,' = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$

Om $\vec{r} = \vec{r}(t)$ visar position vid tiden *t*, för en partikel som rör sig i rymden, då är vektorn $\vec{r}\,'$ lika med **hastighetsvektorn** $\vec{v}$ dvs $\vec{v} = \vec{r}\,' = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$ Partikelns farten är då $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2}$ **Accelerationsvektorn** = $\vec{v}\,' = \vec{r}\,'' = (f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t))$

Uppgift 1. Vi betraktar kurvan

$\vec{r} = (2+t, 1+t^2, \sin t)$.

Låt P_0.vara den punkt på kurvan som svarar mot t= 0 som

a) Bestäm en vektor som är parallell med tangentlinje i punkten P_0.

b) Bestäm tangentlinjens ekvation i punkten P.

Lösning :

a) Vi beräknar $\overline{T}(t) = \vec{r}\,'(t) = (1, 2t, \cos t)$.

Om t=0 har vi en riktnings vektor för tangentlinjen $\overline{T}(P_0) = (1, 0, 1)$.

b) Tangentens ekvation i punkten P(0) =(2,1,0) blir då:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uppgift 2.

Låt $\vec{r} = (4\sin t, 4\cos t, \cos t)$, $0 \le t \le 4\pi$ vara positionen vid tiden *t,* för en partikel som rör sig i rymden. Bestäm

a) Hastighetsvektorn, accelerationsvektorn och farten vid tiden t.

b) För vilka t, $0 \le t \le 4\pi$ är farten störst/ minst. Bestäm fartens största / minsta värde inom definitionsintervallet .

Lösning:

a) **Hastighetsvektorn** $\vec{v}$ dvs $\vec{v} = \vec{r}\,' = (4\cos t, -4\sin t, -\sin t)$

Farten = $|\vec{r}\,'| = \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{16 + \sin^2 t}$

Accelerationsvektorn = $\vec{a} = \vec{v}\,' = \vec{r}\,'' = (f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)) = (-4\sin t, -4\cos t, -\cos t)$

b) Eftersom $0 \le \sin^2 t \le 1$ ser vi att **fartens största värde** är $\sqrt{17}$ om $\sin^2 t = 1$ som är uppfylld

för följande t-värden inom definitionsintervallet $0 \le t \le 4\pi$:

$t = \pi/2,\ t = 3\pi/2,\quad t = 5\pi/2$ och $t = 7\pi/2$.

Fartens minsta värde är $\sqrt{16}$ om $\sin^2 t = 0$ som är uppfylld för följande t-värden inom definitionsintervallet $0 \le t \le 4\pi$:

$t = 0$, $t = \pi$, $t = 2\pi$, $t = 3\pi$ och $t = 4\pi$

Uppgift 4. En kurva är given som skärningskurvan mellan två ytor

$x^2 + y + z = 5$ och $x^2 + y - xy = 1$.

Bestäm kurvans ekvation på parameterform

Lösning:

Vi betecknar $x = t$.

Från andra ekvationen har vi

$$t^2 + y - ty = 1 \Rightarrow y = \frac{1-t^2}{1-t} = 1 + t \qquad , t \ne 0.$$

Insättning i första ekvationen ger

$$z = 5 - x^2 - y = 5 - t^2 - 1 - t = 4 - t^2 - t$$

Svar: $\vec{r}(t) = (t, \quad 1+t, \quad 4 - t - t^2)$

Uppgift 5. En kurva är given som skärningskurvan mellan två ytor**:**

$x + y + 4z = 4$ och $x^2 + 4y^2 = 4$

Bestäm kurvans ekvation på parameterform

Andra ekvationen $x^2 + 4y^2 = 4$ som kan skrivas $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ har endast två variabler och beskriver en ellips i R^2. Vi parametriserar ellipsen genom

$x = 2\cos t$, $y = \sin t$ (då gäller $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$)

Från första ekvationen har vi då

$$z = (4 - x - y)/4 \Rightarrow z = \frac{1}{4}(4 - 2\cos t - \sin t)$$

KURVOR I R^2

EXPLICIT FORM $y = f(x)$

IMPLICIT FORM $F(x, y) = 0$

PARAMETER FORM $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

Några ofta förekommande elementära kurvor .

1. **Cirkeln** med radien r=a och centrum i punkten (x_0, y_0) kan anges på :

i) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ (IMPLICIT FORM **)**

ii) $x = x_0 + a\cos t, \quad y = y_0 + a\sin t \quad 0 \le t \le 2\pi$ (PARAMETER FORM)

iii) eller med **två** ekvationer på EXPLICIT FORM som vi får genom att lösa i) på y :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \Rightarrow (y - y_0)^2 = a^2 - (x - x_0)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_0 = \pm\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} \Rightarrow y = y_0 \pm \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}$$

Där $y = y_0 + \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}$ är en ekvation för övre halvcirkeln

och $y = y_0 - \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}$ är en ekvation för nedre halvcirkeln

2. Ellipsen med halvaxlar ***a,b*** och centrum i (x_0, y_0) kan kan anges på :

i) $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ (IMPLICIT FORM **)**

ii) $x = x_0 + a\cos t, \quad y = y_0 + b\sin t \quad 0 \le t \le 2\pi$ (PARAMETER FORM)

iii) eller med **två** ekvationer på EXPLICIT FORM som vi får genom att lösa i) på y :

$$y = y_0 \pm \sqrt{b^2 (1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2})} \Rightarrow y = y_0 \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}$$

3. En kurva på explicit form $y = f(x)$, kan enkelt parametriseras genom att välja

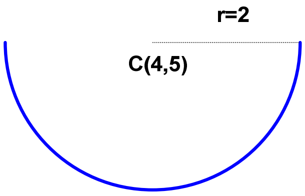
$x = t$, och därmed $y = f(t)$. Då blir $\vec{r}(t) = (t, f(t))$.

Uppgift 6. Beskriv med ord och rita kurvan $y = 5 - \sqrt{4-(x-4)^2}$

Lösning: $y = 5 - \sqrt{4-(x-4)^2} \Rightarrow (y-5)^2 + (x-4)^2 = 4$.

Vi ser att varje punkt på kurvan satisfierar också cirkelns ekvation (men det **betyder inte** att varje punkt på cirkeln satisfierar kurvans ekvation; cirkeln kan ha flera punkter än kurvan) och därmed är kurvan **en del** av cirkeln $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$.

Cirkelns ekvation leder till TVÅ explicita ekvationer $y = 5 \pm \sqrt{4-(x-4)^2}$ som svarar mot övre/ nedre halvcirkeln. Vår kurvan $y = 5 - \sqrt{4-(x-4)^2}$ är **nedre halvcirkeln** med centrum i (4,5) och radien 2.



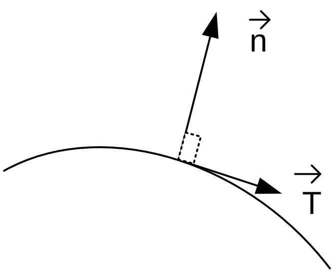
TANGENTLINJE OCH NORMALLINJE I R²

4. Låt $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. **En riktningsvektor till kurvans tangentlinje** i punkten P(t) är

$$\vec{T}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$$

För en **normalvektor** (bland oändligt många) till kurvan $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ kan vi välja då

$$\vec{n} = (-y'(t), x'(t))$$ (eftersom $\vec{T}(t) \cdot \vec{n} = 0$.)



(Anmärkning: För en given vektor $\vec{u} = (a,b)$ kan vi välja på ett enkelt sätt en (bland oändligt många) normalvektor: $\vec{n} = (-b, a)$

(För detta val blir skalärprodukten $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ab + ab = 0$.)

Uppgift 7. Bestäm ekvationer för tangentlinje och normallinje till kurvan

$y = 2x + x^3$ i punkten (1,3)

Lösning:

Vi betecknar $x = t$. Då är $\vec{r}(t) = (t,\, 2t + t^3)$ kurvans ekvation på parametersform .

Vi beräknar

$\vec{r}\,'(t) = (1,\, 2 + 3t^2)$ och $\vec{r}\,'(1) = (1,\, 5)$

Vektorn $\vec{T} = \vec{r}\,'(1) = (1,\, 5)$ är parallell med tangentlinje i punkten (1,1)

Tangentlinjens ekvation blir då $(x, y) = (1,1) + s(1,\, 5)$.

För en normalvektor kan vi använda t ex $\vec{n} = (-5,1)$ (Vi ändrar plats och tt tecken i vektorn $\vec{T}$, då blir $\vec{n}\vec{T} = 0$)

Normallinjens ekvation är därför $(x, y) = (1,1) + s(-5,\, 1)$

5. Om en kurva i R^2 är given på **IMPLICIT FORM** $F(x, y) = 0$ form kan vi med följande formel

$$\vec{n} = (F_x{}', F_y{}')$$

beräkna en normalriktning till kurvan i en given punkt P .

Då är $\vec{T} = (-F_y{}', F_x{}')$ en vektor (bland oändligt många) som är parallell med tangentlinje i punkten .

Uppgift 8.

a) Bestäm ekvationer för tangentlinje och normallinje till ellipsen $x^2 + 3y^2 = 7$ i punkten P(2,1)

b) Ange tangentlinjens ekvation på explicit form

Lösning:

a) Den här gången (implicit form) är det enklare att beräkna en normalvektor till kurvan i punkten P.

Vi skriver ekvationen på formen $F(x, y) = 0$, dvs

$x^2 + 3y^2 - 7 = 0$

och använder formeln $\vec{n} = (F_x{}', F_y{}')$

I vårt fall är $F(x, y) = x^2 + 3y^2 - 7$,

$F_x' = 2x$, $F_x'(P) = 4$

$F_y' = 6y$, $F_y'(P) = 6$

Därför en normalvektor i punkten P är $\vec{n} = (4,6)$,

[Vi kan även använda en parallell vektor $\vec{n}_1 = (2,3)$]

För en vektor (bland oändligt många) som är parallell med tangenten kan vi t ex välja $\vec{T} = (-3,2)$

Nu har vi

Tangentlinjens ekvation: $(x, y) = (2,1) + s(-3,2)$

Normallinjens ekvation: $(x, y) = (2,1) + s(2,3)$
Svar: **Tangentlinjen:** $(x, y) = (2,1) + s(-3,2)$. **Normallinjen** $(x, y) = (2,1) + s(2,3)$

b) För att ange tangentlinjens ekvation $(x, y) = (2,1) + s(-3,2)$ på explicit form eliminerar vi parameter s ur $x = 2 - 3s$, $y = 1 + 2s$

$x = 2 - 3s \Rightarrow s = (2 - x)/3$

Detta insättes i

$y = 1 + 2s \Rightarrow y = 1 + 2 \cdot (2 - x)/3 \Rightarrow y = 7/3 - 2x/3$

Svar b) $y = 7/3 - 2x/3$