Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 6, 26 Jan 2017

Information

Läs själva: s. 710-711

Obs: skriv inte partiell derivata om det inte är partiell!

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Repetition

Normal till ytan $z = f(x,y)$: $\bar{n} = (f_1, f_2, -1)$

Mer kedjeregeln

$$\begin{cases} f(g(x,y)) = e^{x/y} \\ f(t) = e^t \\ g(x,y) = x/y \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Gräver sig ner i trädet till alla löv

Avbildningar

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \bar{x} \to \bar{y} \\ \bar{x} = (x_1, ..., x_n) \\ \bar{y} = (y_1, ..., y_m) \end{cases}$$

Jacobimatrisen

$$D\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exempel

Bestäm J-matrisen för polära koordinattransformation

$$(r, \theta, z) : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \bar{f} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$D\bar{f} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Anmärkning: om $u(t)$ är en kurva i uv-planet och $\bar{x}(t) = \bar{f}(u(t), v(t))$ är bilden av kurvan i xy-planet så avbildar Jacobimatrisen $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ tangentvektorer till $\bar{u}(t)$-kurvan till tangentvektorer till $\bar{x}(t)$-kurvan.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = D\bar{f}$$

Exempel 2

Hur snabbt förändras funktionsvärdet för $z = x^2 - y^2 x$ i punkten $(x, y) = (1, 1)$ med riktning $(3, 4)$?

Exempel 3: 12.3.13

Exempel 4: 12.4.11

Exempel 5: 12.5.17

Gradient och riktningsderivata (boken 12.7)

Gradient

$$f(x_1, ..., x_n) \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases} \qquad \nabla f \text{ en vektor i } \mathbb{R}^2\text{, ortogonal mot nivåkurvor}$$

Sats: f differentierbar i (a, b) och $\nabla f \neq \bar{0}$ i (a, b) så är ∇f ortogonal mot nivåkurvan till ytan för f i (a, b)

Gradienten ortogonal mot nivåkurvan.

Gradienten ”pekar” i den positivt brantaste riktningen.

Riktningsderivata

OBS! glöm inte unit vector $||\bar{u}|| = 1$

Henriks def:

$$D_{\bar{u}} f = f_{\bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \bar{u} \bullet \nabla f \qquad ||\bar{u}|| = 1$$

Detta kommer från

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((x, y) + h\bar{u}) - f(x, y)}{h}$$

$$\bar{v} \bullet \nabla f = \left(v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \nabla_{\bar{v}} f(\bar{x})$$

Exempel

$f(x, y) = x^2 y - y^2$, räkna $D_{\bar{u}} f$ i punkten $(x, y) = (2, 1)$ med $\bar{u} = (-1, 2)$