SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 10

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

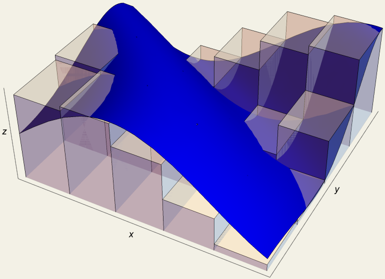
Dagens Lektion

- Dubbelintegraler: Avsnitt 14.1-14.2

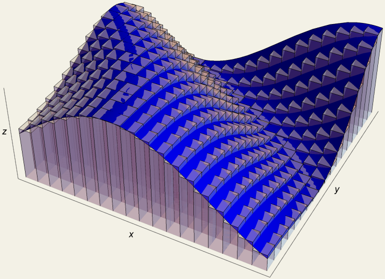
Dubbelintegraler

Att beräkna volym under en funktionsgraf, i rummet.

Se: http://demonstrations.wolfram.com/InterpretingDoubleIntegralAsAVolume/



Figur: Grov approximation



Figur: Finare approximation

Dubbelintegraler

Vad är en dubbelintegral?

Dubbelintegralen av f över den axelparallella rektangeln D definieras via Riemannsummor

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{j,k} f(x_{jk}^*, y_{jk}^*)\,\Delta x_j \Delta y_k$$

Summan till höger kallas alltså en Riemannsumma.

Varje term $f(x_{jk}^*, y_{jk}^*)\,\Delta x_j \Delta y_k$ är volymen av en rätblock, enligt figuren ovan. Riemannsumman är summan av alla dessa volym.

Se ett annat ex.: http://demonstrations.wolfram.com/DoubleIntegralForVolume/

Integraler

Approximation av dubbelintegral?

Läs sidorna 809–811, egenskaper hos integraler. Gör följande enkla exempel (hemma) på att approximera en dubbelintegral med Riemannsumma med några rätblock.

Quiz (hemma): Låt D vara kvadraten $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$. Approximera dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

med hjälp av en Riemannsumma med fyra delrektanglar. Finns det mer än ett sätt att göra detta? Ni kan få olika svar beroende på valet av punkterna (x_{jk}^*, y_{jk}^*).

Två användbara egenskaper hos dubbelintegraler (sida 811)

1. Om $D = D_1 \cup D_2$ så är

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA,$$

Integraler

Två användbara egenskaper hos dubbelintegraler (sida 811)

1. Om $D = D_1 \cup D_2$ så är

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA,$$

vilket kan användas i beräkningar, då D är mer komplicerad, och kan delas upp i enklare delar.

Integraler

Två användbara egenskaper hos dubbelintegraler (sida 811)

1. Om $D = D_1 \cup D_2$ så är

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA,$$

vilket kan användas i beräkningar, då D är mer komplicerad, och kan delas upp i enklare delar.

2. $\iint_D 1\,dA =$ arean av D. Kan användas för area beräkningar.

Integraler

Hur räknar man ut dubbelintegraler?

Exempel 1. För $D = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 2 \ \text{och} \ 0 \leq y \leq 1\}$ beräkna

$$\iint_D xy^2 \, dxdy.$$

Hur räknar man ut dubbelintegraler?

Exempel 1. För $D = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 2 \text{ och } 0 \leq y \leq 1\}$ beräkna

$$\iint_D xy^2 \, dxdy.$$

$$\iint_D xy^2 \, dxdy = \ \{\text{skriv om}\} = \int_0^1 y^2 \left(\int_0^2 x \, dx \right) dy$$

Hur räknar man ut dubbelintegraler?

Exempel 1. För $D = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 2 \ \text{och} \ 0 \leq y \leq 1\}$ beräkna

$$\iint_D xy^2 \, dxdy.$$

$$\iint_D xy^2 \, dxdy = \ \{\text{skriv om}\} = \int_0^1 y^2 \left(\int_0^2 x \, dx \right) dy$$
$$= \int_0^1 y^2 \left(\left[x^2/2 \right]_0^2 \right) dy =$$

Integraler

Hur räknar man ut dubbelintegraler?

Exempel 1. För $D = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 2 \ \text{och} \ 0 \le y \le 1\}$ beräkna

$$\iint_D xy^2 \, dxdy.$$

$$\iint_D xy^2 \, dxdy = \{\text{skriv om}\} = \int_0^1 y^2 \left(\int_0^2 x \, dx \right) dy$$
$$= \int_0^1 y^2 \left(\left[x^2/2 \right]_0^2 \right) dy = \int_0^1 2y^2 \, dy = \frac{2}{3}.$$

Quiz (hemma): Beräkna samma integral genom att först integrera m.a.p. y, sedan x.

Hur räknar man ut dubbelintegraler?

Quiz (här): För $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3 \text{ och } 2 \leq y \leq 4\}$ beräkna

$$\iint_D (x + xy)\, dxdy.$$

Integraler

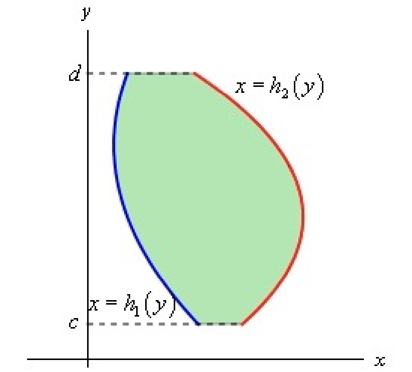
Hur räknar man ut dubbelintegraler?

Quiz (här): För $D = \{(x,y) : 1 \le x \le 3 \text{ och } 2 \le y \le 4\}$ beräkna

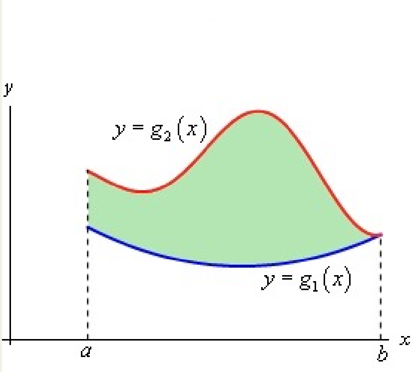
$$\iint_D (x + xy)\,dxdy.$$

$$\begin{aligned}\iint_D (x+xy)\,dxdy &= \int_1^3 dx \int_2^4 (x+xy)\,dy \\ &= \int_1^3 [xy + xy^2/2]_2^4\,dx \\ &= \int_1^3 8x\,dx \\ &= 32\end{aligned}$$

Hur räknar man ut dubbelintegraler? Enkla områden



Figur: Enkel i x-riktning



Figur: Enkel i y-riktning

Integraler

Hur räknar man ut dubbelintegraler? Enkla områden

För enkla områden enligt bilderna ovan gör vi på följande sätt
Enkel i x-riktning: Integrera först m.a.p. x-variabel. sedan m.a.p. y-variabel. Vi har då

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

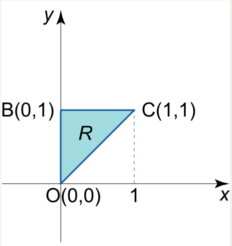
Enkel i y-riktning: Integrera först m.a.p. y-variabel. sedan m.a.p. x-variabel. Vi har då

$$\iint \int_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Dubbelintegraler i enkla områden

Låt D vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. Beräkna

$$\iint_D xydA.$$



$$\iint_D xydA = \int_0^1 y\left(\int_y^1 x\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1 y\left(\Big|\left[x^2/2\right]_y^1 \,dx\right)dy$$

Integraler

Dubbelintegraler i enkla områden

Quiz (här): Beräkna samma integral som ovan, dock m.a.p. y-variabel först.

$$\iint_D xydA = \int_?^? x\left(\int_?^? y\,dy\right)dx$$

Quiz (här):
Beräkna samma integral då D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$
(Svar $1/3$.)

Quiz (hemma): Beräkna dubbelintegraler

Låt D vara området som ges av olikheterna $0 \leq y \leq 1 - x^2$.
Beräkna

$$\iint_D x \, dxdy$$

och

$$\iint_D x^2 \, dxdy$$

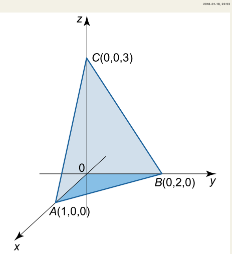
Finns det några symmetrier man kan utnyttja?
(Facit: A. 0. B. 4/15.)

Trippelintegraler: Enkla fallet

Beräkna volymen hos den tetraeder som begränsas av plan som passerar genom punkterna

$$A:(1,0,0), \qquad B:(0,2,0) \qquad C:(0,0,3)$$

samt koordinatplanen: $\quad z=0, \quad x=0, \quad y=0.$



Integraler

Trippelintegraler: Enkla fallet

Lösning Volymen ges av en trippelintegral av funktionen $f(x, y, z) = 1$ över tetraedern , eller en dubbelintegral av det givna planet (varför?).
Vi provar med trippelintegralen. Vi måste först hitta gränserna för x, y, z-variabler för att beräkna integralen (med dV som volymelement)

$$\iiint_T f(x, y, z)dV, \qquad \text{T= tetraeder,} \qquad f \equiv 1.$$

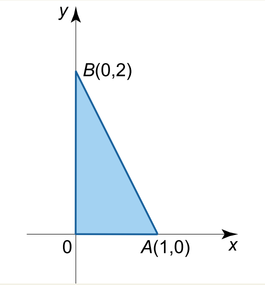
Ekvationen för planet genom ABC måste tas fram, som blir $6x + 3y + 2z = 6$ (gör detta hemma). Vi ser att $0 < z < (6 - 3y - 6x)/2$. Vidare varierar x, y i triangeln AOB.

Trippelintegraler: Enkla fallet

Lösning: Låt D vara triangeln AOB. Vi får då

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_D \left(\int_0^{(6-3y-6x)/2} dz \right) dA = \iint_D \frac{6-3y-6x}{2} dA.$$

Nu blir det en vanlig dubbelintegral över D



Linjen genom AB ges av $y = 2 - 2x$, och därför är

$$D = \{0 < x < 1,\ 0 < y < 2-2x\}$$

Trippelintegraler: Enkla fallet

Lösning fortsättning:

$$\iint_D \frac{6-3y-6x}{2}\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \frac{6-3y-6x}{2}\,dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[6y - \frac{3}{2}y^2 - 6xy \right]_0^{2-2x} dx = 3 \int_0^1 (1-2x+x^2)\,dx = 1$$

Användning av symmetri

Quiz (här): : Vad blir (utan att räkna) dubbelintegralerna

$$\iint_D x\,dxdy, \qquad \iint_D y\,dxdy, \qquad \iint_D (ax+by)\,dxdy$$

om D är cirkelskivan som ges av $x^2 + y^2 \leq 1$?

Se flera exempel i de gamla tentorna.
Uppgift 3b) i Tentamen 2017-10-26
https://kth.instructure.com/courses/2523/files/510231/download?wrap=1
Uppgift 2b) i Tentamen 2017-08-17
https://kth.instructure.com/courses/2523/files/284126/download?wrap=1

Dubbelintegraler

minitenta

1) Beräkna integralen

$$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2}\, dy$$

Går det att byta integrationsordning?
2) Beräkna arean av området D som ges av

$$D = \{(x, y) : \; y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2\}$$

3) Beräkna volymen av den kropp som ligger mellan ytorna

$$z = 4 - x^2 \quad \text{och} \quad z = x + y$$

då $|x| \leq 1$ och $|y| \leq 1$