SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 15

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion: Avsnitt 15.5-15.6

- Ytintegraler, $\iint_Y f\, dS$
- Flödesintegraler, $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$

Ytintegraler

Parameterytor i $\mathbb{R}^3$

En parameteryta är värdemängden till en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}$ definierad på något lämpligt område D i $\mathbb{R}^2$ med värden i $\mathbb{R}^3$.
Typ:

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D.$$

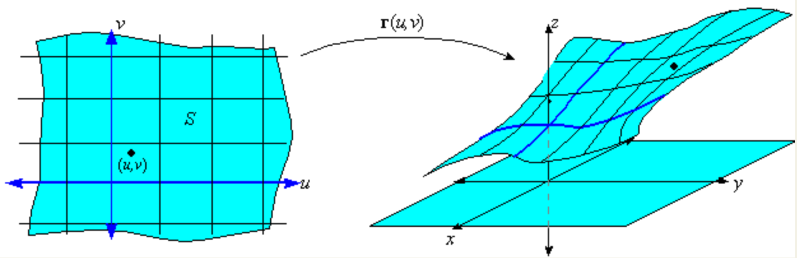
Oftast är D en rektangel. Om $\mathbf{r}$ är 1-to-1 så skär inte ytan sig själv. Bilden av randen av D kallas då randen av parameterytan.

En yta sägs vara glatt om den har ett unikt tangentplan i varje punkt (utom längs randen). En normalvektor till detta tangentplan sägs vara en normalvektor till ytan.

Ytintegraler

Parameterytor i $\mathbb{R}^3$

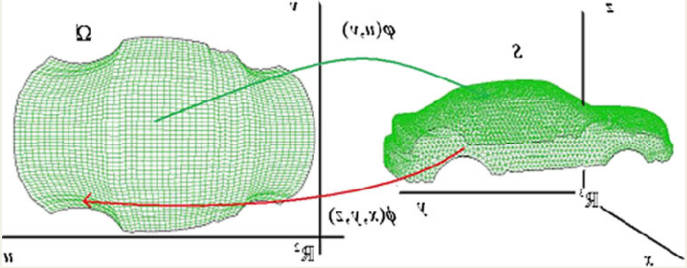
En avbildningen från ett plant området till en yta i rummet.



Ytintegraler

Parameterytor i $\mathbb{R}^3$

En märklig, dock användbar, avbildning i bilindustrin.



Figur:

Ytintegraler

Parameterytor: Exempel

1. En funktionsyta $z = f(x, y)$, då $(x, y) \in D$, kan ses som en parameteryta

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \qquad (x, y) \in D$$

2. Enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ kan parametriseras genom

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

där $0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi$

Ytintegraler

Ytmått

På en yta Y parametriserad genom

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D.$$

är $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ en normalvektor och Ytelement dS ges av

$$dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv = \textit{Ytelement}$$

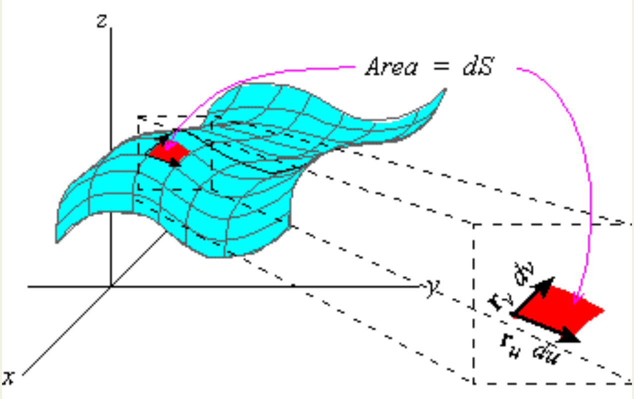
$$\text{och Arean}(Y) = \iint_Y dS = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv$$

Ytintegralen av en funktion f över Y kan beräknas

$$\iint_Y f \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv$$

Ytintegraler

Ytelement dS



Ytintegraler

Ytelement dS i ett speical fall: $z = g(x, y)$

Om ytan ges av en funktionsgraf $z = g(x, y)$ så får vi att

$$dS = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}.$$

Undersök detta i mer detalj, på sidan 892.

Exempel 1: Beräkna ytelementen för dessa ytor

a) Y_1 är ytan $z + y + x = 1$

b) Y_2 är Konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) Ytan Y_3, som parametriseras genom

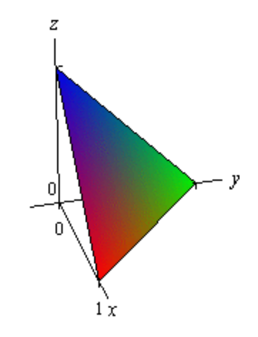
$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad \text{med } 0 \leq u \leq 1 \text{ och } 0 \leq v \leq \pi,$$

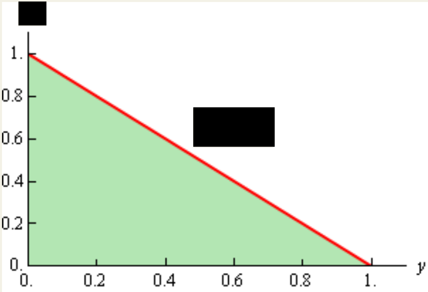
Ytintegraler

Exempel 2

Beräkna ytintegralen $\iint_S xy\, dS$ då S är den del av planet $z + y + x = 1$ som ligger i första oktanten.

Lösning av Exempel 2: grafen samt dess projektion i planet





Ytintegraler

Exempel 2

Observera att dS har redan beräknats i Exempel 1a, och vi har $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}dxdy$ där $z = 1 - x - y$. Dvs $dS = \sqrt{3}dxdy$. Integralen blir då en dubbelintegral över det området D, där x, y varierar, dvs den gröna triangel i bilden ovan. Alltså vi får

$$\iint_S xydS = \iint_D xy\sqrt{3}dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,dxdy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \left[xy^2/2\right]_0^{1-x} dx = (\sqrt{3}/2)\int_0^1 [x^3 - 2x^2 + x]dx = (\sqrt{3}/24)$$

Quiz (hemma): Beräkna samma integral då vi betraktar $x = 1 - y - z$ som graf.

Orienterade ytor och flödesintegraler

Orienterade ytor i $\mathbb{R}^3$

På en yta Y parametriserad genom

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D.$$

med $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ som normalvektor, säger vi att den sida av ytan åt vilken denna normalvektor pekar är den positiva sidan.

Orienterade ytor och flödesintegraler

Orienterade ytor i $\mathbb{R}^3$

På en yta Y parametriserad genom

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D.$$

med $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ som normalvektor, säger vi att den sida av ytan åt vilken denna normalvektor pekar är den positiva sidan.

OBS: Inte alla ytor är orienterbara på detta sätt, jfr t ex Möbiusbandet. http://demonstrations.wolfram.com/HandMovingOnAMoebiusStrip/

Orienterade ytor och flödesintegraler

Orienterade ytor i $\mathbb{R}^3$

På en yta Y parametriserad genom

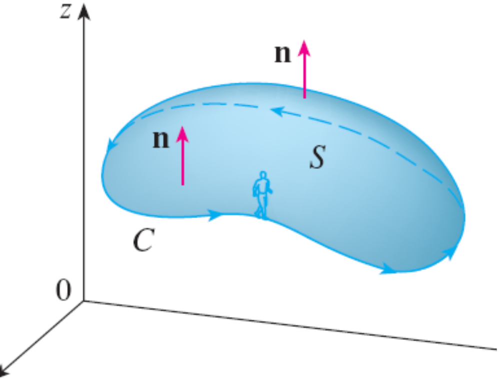
$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D.$$

med $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ som normalvektor, säger vi att den sida av ytan åt vilken denna normalvektor pekar är den positiva sidan.

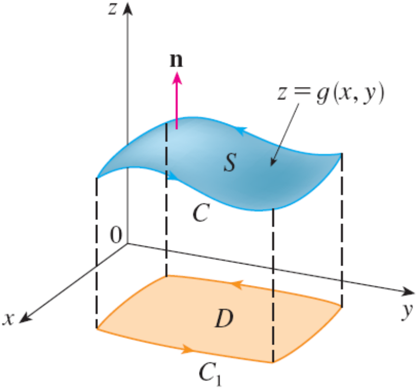
OBS: Inte alla ytor är orienterbara på detta sätt, jfr t ex Möbiusbandet. http://demonstrations.wolfram.com/HandMovingOnAMoebiusStrip/

En orientering av ytan inducerar en orientering på dess randkurvor: en sådan sägs vara positivt orienterad om ytan är till vänster om kurvan när vi är på den positiva sidan av ytan och går längs kurvan.

Orienterade ytor och flödesintegraler



Figur:



Figur:

Orienterade ytor och flödesintegraler

Flödet av ett vektorfält genom en yta i $\mathbf{R}^3$

Flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ genom en orienterad yta Y ges av

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är enhetsnormal till ytan (med rätt orientering).

Orienterade ytor och flödesintegraler

Flödet av ett vektorfält genom en yta i $\mathbf{R}^3$

Flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ genom en orienterad yta Y ges av

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är enhetsnormal till ytan (med rätt orientering).

Enbart det som går i $\hat{\mathbf{N}}$ riktningen räknas.

Orienterade ytor och flödesintegraler

Flödet av ett vektorfält genom en yta i $\mathbf{R}^3$

Flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ genom en orienterad yta Y ges av

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är enhetsnormal till ytan (med rätt orientering).

Enbart det som går i $\hat{\mathbf{N}}$ riktningen räknas.

Det som går i tangentriktningen bidrar inte till integralen.

Orienterade ytor och flödesintegraler

En vanlig tillämpning av flödesintegraler

Om vektorfältet **F** är hastighetsfältet för en tidsoberoende strömning, så kan flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

tolkas som den volym av det strömmande mediet som per tidsenhet passerar genom ytan Y.

Se: http://demonstrations.wolfram.com/ElectricFlux/

Orienterade ytor och flödesintegraler

Beräkning av flödet av ett vektorfält genom en yta i $\mathbb{R}^3$

Eftersom $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ är en normalvektor på ytan som pekar åt rätt håll, får vi en enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ genom

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$$

Och eftersom $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv$ ser vi att vi kan beräkna flödesintegraler genom

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \, dudv$$

om Y parametriseras av $\mathbf{r}(u, v)$ för $(u, v) \in D$.

Obs: högerledet är en vanlig dubbelintegral.

Orienterade ytor och flödesintegraler

Exempel 3

Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y, z, x)$, genom ytan

$$S = \{(x, y, z) : \ z + x^2 + y^2 = 5, \ z > 1\},$$

då ytan är orienterad så att normalen är riktad uppåt i z-riktningen.

Lösning av Exempel 3

Normalen till ytan blir $\mathbf{n} = (2x, 2y, 1)$. Använder vi att $z = 5 - x^2 - y^2$ på ytan, så får

$$\text{Flödet } = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (y, (5 - x^2 - y^2), x) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy =$$

Lösning av Exempel 3, fortsättning

$$\iint_D (2xy+2y(5-x^2-y^2)+x)dxdy = \iint_D (2xy+10y-2yx^2-2y^3+x)dxdy,$$

där D är projektionen av ytan i xy-planet, dvs

$$D = \{x^2 + y^2 = 5 - z \leq 5 - 1 = 4\}.$$

Alltså

$$\text{Flödet } = 0,$$

antingen genom kalkyl, eller att alla involverade funktioner är udda, i antingen x eller, y, och att integrationsområdet är symmetriskt.

Orienterade ytor och flödesintegraler

Minitenta 1

A. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ ut genom den totala begränsningsytan till cylindern som ges av $x^2 + y^2 \leq 1$ och $0 \leq z \leq 1$.

B. Beräkna flödet av det elektrostatiska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ kring en punktladdning i origo ut genom sfären med radie R och medelpunkt i origo. Här är $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

C. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 0, x^2)$ uppåt genom den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger ovanför kvadraten $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ i xy-planet.

(Facit: A. 3π, B. 4π, C. $4/3$)

Orienterade ytor och flödesintegraler

Minitenta 2

Vi betraktar flödet av vektorfältet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y,\ y,\ 2xy + z + 3)$$

upp genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför *xy*planet.

A. Parametrisera ytan.

B. Ställ upp integralen som beräknar flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av parametriseringen från A.

C. Beräkna flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av integralen från B.

(Facit: $9\pi/2$*)*