SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 1

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Välkomna till kursen!

Föreläsare: Henrik Shahgholian,

Examinator: Henrik Shahgholian
Biträdande Examinator: Hans Thunberg

Hemsida All information finns på Canvas:
https://kth.instructure.com/courses/2523

Ni ska aktiv ta del av den information som finns där.

SF1626 Flervariabelanalys

Rekommenderad Studieteknik för kursen

- Innan föreläsningen: Läs aktuella avsnittet samt se film på http://www.matematikblogg.se/video.html
  Komplettera gärna med andra web-filmer om flervariabel.
- Under föreläsningen: Genomgång och aktivt deltagande av studenter (quizzes).
- Efter föreläsningen: Arbete med uppgifter i boken, samt förståelse.
- Rekommenderas aktiv använding av: http://demonstrations.wolfram.com/
- Under övningarna: Se föreslagna uppgifter
- Bouns frå Seminarier kan avgöra er betyg (livslina).

Vad handlar kursen om och vad ska vi lära oss

- En fortsättning på Envariabelanalys
- Funktioner av flera variabler samt vektorvärda funktioner.
- Gränsvärde i olika riktningar (samt kontinuitet)
- Derivering i olika riktningar
- Integration i planet och rymden (area, volym, massa)
- Tilämpningar: optimeringsproblem, flödesberäkningar, Arbete, ...

Nödvändiga förkunskaper

Mycket goda kunskaper i Envariabel och Linjär algebra.

De euklidiska[1] rummen $\mathbb{R}^n$. (I de flesta fallen är $n \leq 3$)

Euklidisk geometri i $\mathbb{R}^n$: Begrepp som ska kunnas

- Standardbas: Boken använder **i**, **j**, **k**,
  Lämpligare för tavelpresentation är $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$
- Punkter i $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$
- Avstånd $\|\overrightarrow{P_2P_1}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- Skalärprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n$
- Norm/Längd/Absolutbelopp $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$
- Ortogonalitet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$
- Kryssprodukt (vektorprodukt)
- Linjer och plan

[1] Varför kallas det euklidiska? Vad finns det för annat rum som inte är euklidiska?

Väsentliga skilnader mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

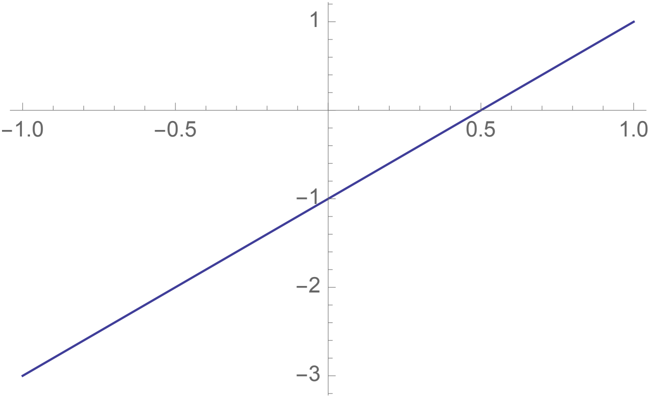
Exempel:

Vi ritar grafisk de punkter som representerar

1) $y = 2x - 1$ i xy-planet.

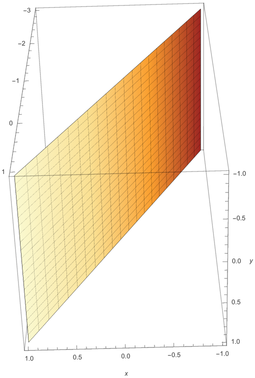
2) $y = 2x - 1$ i $xyz - rummet$.

Väsentliga skilnader mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$



Figur: $y = 2x - 1$ i planet.

Väsentliga skilnader mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$



Figur: $y = 2x - 1$ i rummet. Här finns även z-riktningen.

Väsentliga skilnader mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Som bekant ges ekvationen för en linje i planet genom

$$ax + by = d.$$

Samma ekvation betraktad i rummet representerar ett plan! (Även om z-variablen saknas i ekvationen.)

Ekvation för plan i rummet ges allmänt genom

$$ax + by + cz = d.$$

Vad representerar ekvationen

$$2x = 5 \qquad \text{i } \mathbb{R}^2? \qquad \text{i } \mathbb{R}^3?$$

Topologiska begrepp i $\mathbb{R}^n$, sidan 569

i) **Omgivning** / **Öppen boll**. $B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$

ii) En punkt **a** sägs vara en **inre punkt** till en mängd M om **a** har en omgivning som ligger helt i M.

iii) En punkt **a** sägs vara en **yttre punkt** till en mängd M om **a** har en omgivning som ligger helt utanför M.

iv) En punkt **a** sägs vara en **randpunkt** till en mängd M om varje omgivning till **a** både innehåller punkter som ligger i M och punkter som inte ligger i M.

v) En mängd M sägs vara **öppen** om varje punkt $\mathbf{a} \in M$ har en omgivning som ligger helt i M (alla punkter i M är då inre punkter)

vi) En mängd M är sägs vara **sluten** om dess komplement är en öppen mängd (alla randpunkter tillhör då M)

Mängder i $\mathbb{R}^2$

Vi ritar nedanstående mängder i $\mathbb{R}^2$

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$.
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 1\}$.
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$.
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^2, \ y < x + 1\}$.

Vilka av dessa mängder är öppna/slutna/ingendera?
Bestäm även randpunkter.

Mängder i $\mathbb{R}^2$

Exempel på Andragradskurvor (några exempel)

Rita bild:

- Parabel $y = x^2$,
- Ellips $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
- Hyperbel $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Quiz (hemma):

För alla $a \in \mathbb{R}$ (positiv, negativ, noll) illustrera med bild mängden

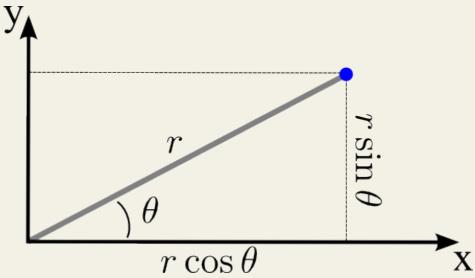
$$y^2 - x^2 = a.$$

Mängder i $\mathbb{R}^2$

Polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{där} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

r är avståndet till origo och θ är vinkeln med positiva x-axeln.



Figur:

Mängder i $\mathbb{R}^2$

Quiz (här): Beskriv i polära koordinater området som ges av

1) $x^2 + y^2 < 1$, 2) $x^2 - 2x + y^2 = 3$.

Quiz (utmaning): Rita området och beskriv det i polära Koord.

$$\Big\{(x, y): \; x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \leq |y|, \quad y > 0\Big\}.$$

Quiz (hemma): Rita dessa områden

$i)$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $ii)$ $y \geq |x|$,

$iii)$ $\Big\{(x, y): \; x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq |y|\Big\}$.

Mängder i $\mathbb{R}^2$

parametrisering: Några exempel

Ex1) Kurvan $y = 2x^2 + 1,\ -2 < x < 2$ kan parametriseras genom valet $t = x$ och

$$(x, y) = (t, 2t^2 + 1) \qquad -2 < t < 2.$$

Ex2) Kurvan $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ parametriseras genom att först kvadratkomplettera: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ och sen använda polära koordinater

$$\begin{cases} x + 1 = r\cos\theta \\ y - 2 = r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{där} \qquad \begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = 2 + r\sin\theta \end{cases}$$

där $r = 3$ (obs $r^2 = 9$) och $0 \leq \theta < 2\pi$. Rita bild!

Mängder i $\mathbb{R}^2$

Dagens minitenta.

Rita mängderna i $\mathbb{R}^2$ och avgör huruvida de är öppna/slutna/ingendera.

$$A = \{(x, y) : |x + 2y| \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) : x < y < 1, \quad x < 0\}$$

$$D = \{(x, y) : 2x^2 + 5y^2 \leq 6\}$$

Något att tänka på!

Ge ett exempel på en Clopen mängd (både öppen och sluten).

Mängder i $\mathbb{R}^3$

Andragradsytor (några exempel)

1) Paraboloid: $z = 3x^2 + 2y^2$

2) Ellipsoid: $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{2} = 1$

3) Cylinder: $x^2 + 2y^2 = 3$

4) Hyperboloid: $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{5} - \dfrac{z^2}{3} = 1$

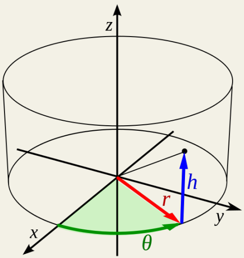
Nya koordinater i $\mathbb{R}^3$

Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ avståndet till } z - \text{axeln} \\ \theta \text{ är vinkeln med positiva x-axeln} \\ \text{ i xy-planet} \end{cases}$$

Se: http://demonstrations.wolfram.com/CylindricalCoordinates/

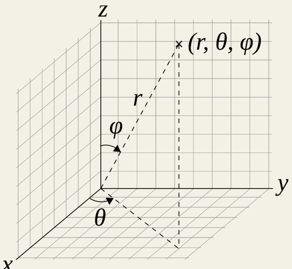


Nya koordinater i $\mathbb{R}^3$

Sfäriska koordinater

Se http://demonstrations.wolfram.com/SphericalCoordinates/

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{cases} R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \quad (\text{varför?}) \end{cases}$$



Mängder i $\mathbb{R}^3$

Exempel i $\mathbb{R}^3$

Beskriv följande områden med föreslagen koordinatsystem.

1) Cylindriska koordinater: $\quad r \leq 2, \quad x = y.$

2) Cylindriska koordinater:

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

3) Sfäriska koordinater: $\quad R \leq 2, \quad z = 1.$

4) Sfäriska koordinater:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Läxa till nästa gång

Gör detta idag:

- Registrera er på kursen
- Fixa konto på scalable, kursnyckel: BSLXN-72840
- Se film och svara på frågor
- Titta igenom kapitel 10 i kursboken, några nyckelord: omgivning, öppen, sluten, rand, polära, cylindriska och sfäriska koordinater, parametrisering
- Lär er ekvationerna för ellipsoid, paraboloid, hyperboloid, kon och cylinder
- Räkna några av de rekommenderade uppgifterna:
  kapitel 10.1 nr 11, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39
  kapitel 10.6 nr 3, 5, 9, 13
- Gör uppgift 1 till Seminarium 1