GENERALISERADE DUBBELINTEGRALER

Dubbelintegralen (Riemannintegral) $\iint_D f(x,y)dxdy$ är definierad om följande två krav är uppfyllda:

V1. Integrationsområdet D är **begränsat** ,

V2 . Funktionen $f(x,y)$ är definierad och begränsad i D.

Definition. Om minst en av ovanstående villkor V1, V2 **inte är uppfylld** säger vi att integralen $\iint_D f(x,y)dxdy$ är en **generaliserad dubbelintegral**.

==

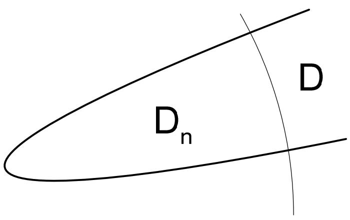
Vi betraktar generaliserade integraler med **icke-negativ integrand** dvs $f(x,y) \geq 0$.

1. Generaliserade integraler med obegränsat integrationsområdet D

(vi antar den här gången att integranden $f(x,y)$ är begränsad icke-negativ integrand $f(x,y)$)

För att beräkna $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ på ett obegränsat område D beräknar vi först

$$I_n = \iint_{Dn} f(x,y)dxdy$$



där D_n är en begränsad, kvadrerbar delmängd till D sådan att $D_n \to D$ om $n \to \infty$

Mer precis $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots D_n \subseteq \cdots \subseteq D$ och $\bigcup_n D_n = D$)

Därefter beräknar vi $\lim_{n\to\infty} I_n$.

(Man kan visa att man får samma gränsvärdet oberoende på vilket sätt vi väljer D_n under ovanstående förutsättningar om D_n .)

Eftersom vi betraktar endast **icke-negativa integrander** kan gränsvärdet vara antingen ett tal eller ∞.

DEFINITION

* Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} I_n$ är **ett tal** (säg A) säger vi att integralen $\iint_D f(x,y)dxdy$ **konvergerar** och har värdet A.

** Om $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$ säger vi att integralen **divergerar**.

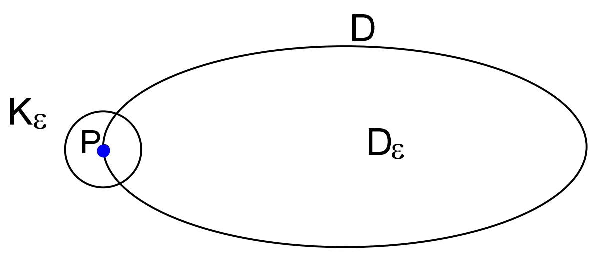
Anmärkning: Talfäljden I_n är en växande talföljd. Därför, för att visa att I_n konvergerar, räcker det att visa att I_n är begränsad talföljd.

2. Generaliserade integraler med obegränsad icke-negativ integrand $f(x,y)$

(Vi antar den här gången att integrationsområdet D är begränsat)

Om vi har en singularitet i en punkt $P(x_0,y_0)$ som ligger i D eller på randen till D beräknar vi integralen på följande sätt.

Vi "isolerar" punkten P (x_0,y_0) med en cirkel K_ε med centrum i P och radien ε (eller en annan mängd med diameter ε) och beräknar integralen



$\iint_{D\varepsilon} f(x,y)dxdy$ på mängden $D_\varepsilon = D \setminus K_\varepsilon$

Därefter

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{D\varepsilon} f(x,y)dxdy\,.$$

Anmärkning: På liknade sätt beräknar vi generaliserade integraler om integranden har singulariteter längs ett linjestycke.

==

För att bestämma om integral konvergerar eller divergerar (utan att beräkna integralen) kan vi (på liknande sätt som i envariabelanalys) jämföra integranden med en annan enklare funktion.

Jämförelsekriterium:

Låt $0 \le f_1(x,y) \le f_2(x,y)$ för $(x,y) \in D$

Då gäller

i) Om (”den större”) integralen $\iint_D f_2(x,y)dxdy$ konvergerar så konvergerar också (”den mindre”) integralen $\iint_D f_1(x,y)dxdy$.

ii) Om (”den mindre”) integralen $\iint_D f_1(x,y)dxdy$ divergerar så divergerar också (”den större”) integralen $\iint_D f_2(x,y)dxdy$.

I samband med jämförelsekriterium använder vi oftast följande resultat

A) Följande generaliserade (obegränsat integrationsområde) dubbelintegral

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dxdy , \qquad \text{där } D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \ge 1\} .$$

konvergerar om och endast om **a > 1** .

B) Följande generaliserade (obegränsad integrand i (0,0)) dubbelintegral

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dxdy , \qquad \text{där } D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1\} .$$

konvergerar om och endast om **a < 1** .

Anmärkning: Vi vet från **envariabelanalys** att

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dr$ **konvergerar** om och endast om **p>1**,

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dr$ **konvergerar** om och endast om **p<1**,

Uppgift 1. Bestäm om följande generaliserade dubbelintegral konvergerar eller divergerar.

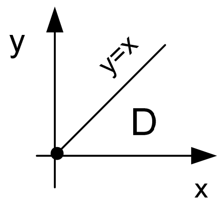
(Ange också varför integralen är generaliserad.)

a) $\iint_D \frac{1}{3+x^2+y^2} dxdy$

där området $D = \{(x,y) \in R^2 : x > 0, \quad 0 \le y \le x\}$.

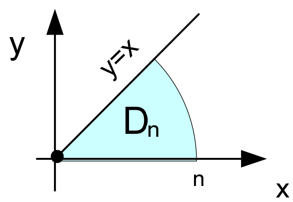
Lösning:

Integral är generaliserad eftersom området D är obegränsat.



Först integrerar över begränsade området

$D_n = \{(x,y) \in R^2 : x > 0, \quad 0 \le y \le x,, \quad x^2 + y^2 \le n^2\}$



(Lägg märke till att $D_n \to D$ då $n \to \infty$)

a)

$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{3+x^2+y^2} dxdy =$ (Vi byter till polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *J=r)* :

$$= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^n \frac{r}{3+r^2} dr = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(3+r^2)\right]_0^n = \frac{\pi}{8}\ln(3+n^2) - \frac{\pi}{8}\ln(3)$$

Om $n \to \infty$ har vi att $I_n \to \infty$

Därmed divergerar integralen $\iint_D \frac{1}{3+x^2+y^2}dxdy$.

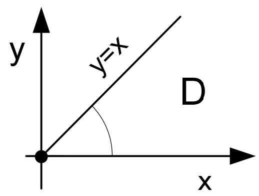
Uppgift 2. Bestäm om följande generaliserade dubbelintegral konvergerar eller divergerar.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy\ , \qquad \text{där } D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\ge 1,\quad 0\le y\le x\}.$$

Lösning:

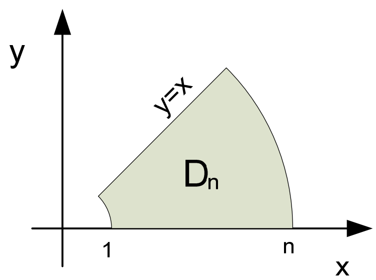
Integral är generaliserad eftersom området D är obegränsat.

(Uttrycket $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ är inte definierad i punkten (0,0)men denna punkt ligger ej i D)



Först integrerar över begränsade området

$$D_n=\{(x,y)\in R^2 : x>0,\quad 0\le y\le x,\quad x^2+y^2\ge 1,\quad x^2+y^2\le n^2\}$$



$$I_n=\iint_{Dn}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy=$$

(Polära koordinater $x=r\cos\theta\,, y=r\sin\theta$, *J=r, med gränser* $0\le\theta\le\pi/4$ och $1\le r\le n$ *)* :

$$=\int_1^{\pi/4}d\theta\int_1^n\frac{r}{r^4}dr=\int_1^{\pi/4}d\theta\int_1^n\frac{1}{r^3}dr=\frac{\pi}{4}\left[\frac{r^{-2}}{-2}\right]_1^n=\left[-\frac{\pi}{8r^2}\right]_1^n=-\frac{\pi}{8n^2}+\frac{\pi}{8}$$

Om $n\to\infty$ har vi att $I_n\to\frac{\pi}{8}$

Därmed integralen $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$ konvergerar och har värdet $\frac{\pi}{8}$.

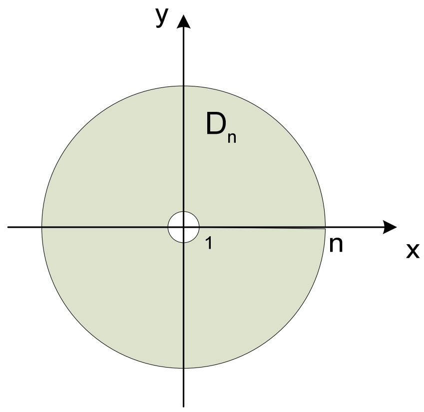
Uppgift 3. Visa att följande generaliserade dubbelintegral konvergerar om och endast om $a>1$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy\ ,\qquad \text{där } D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\geq 1\}\,.$$

Lösning:

Integral är generaliserad eftersom området D är obegränsat.

Först integrerar vi över begränsade området .
Låt $D_n=\{(x,y)\in R^2 :\ \ 1\leq x^2+y^2\leq n^2\}$



$$I_n=\iint_{Dn} \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy \quad = (\text{ polära koordinater})$$

$$I_n=\int_1^{2\pi} d\theta \int_1^n \frac{r}{r^{2a}}\,dr = 2\pi \int_1^n \frac{1}{r^{2a-1}}\,dr$$

Kvarstår att undersöka enkelintegralen $\int_1^n \frac{1}{r^{2a-1}}\,dr$ om $n\to\infty$, dvs att undersöka för vilka a

integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{r^{2a-1}}\,dr$ konvergerar.

Vi vet från envariabelanalys att $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dr$ konvergerar om och endast om p>1,

därför $\int_1^\infty \frac{1}{r^{2a-1}} dr$ konvergerar om och endast om $2a-1>1$ dvs om $a>1$, vad skulle bevisas.

Anmärkning: Ovanstående resultat kan användas i samband med jämförelsesatsen.

Uppgift 4. Bestäm om den generaliserade dubbelintegralen

a) $\iint_D \frac{2+\arctan(xy)+\sin^2 x}{(x^2+y^2)^2} dxdy$,

b) $\iint_D \frac{2+\arctan(xy)+\sin^2 x}{(x^2+y^2)^{1/3}} dxdy$,

där $D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2 \ge 1, \quad \}$.

konvergerar eller divergerar.

Tips. Använd jämförelsekriterium .

Lösning

a) Eftersom

$$0 \le \frac{2+\arctan(xy)+\sin^2 x}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{2+\frac{\pi}{2}+1}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{5}{(x^2+y^2)^2}$$

och $\iint_D \frac{5}{(x^2+y^2)^2} dxdy = 5\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ konvergerar (eftersom a=2 >1)

så (enligt jämförelsesatsen konvergerar också (”den mindre”) integralen
$\iint_D \frac{2+\arctan(xy)+\sin^2 x}{(x^2+y^2)^2} dxdy$.

b) Eftersom

$$0 \le \frac{2-\pi/2}{(x^2+y^2)^{1/3}} \le \frac{2+\arctan(xy)+\sin^2 x}{(x^2+y^2)^{1/3}}$$

och $\iint_D \frac{2-\pi/2}{(x^2+y^2)^{1/3}}dxdy = (2-\pi/2)\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/3}}dxdy$ divergerar (eftersom a=1/3 < 1)

så (enligt jämförelsekriterium) divergerar också (”den större”) integralen

$$\iint_D \frac{2+\arctan(xy)+\sin^2 x}{(x^2+y^2)^{1/3}}dxdy .$$

Uppgift 5. Bestäm om den generaliserade dubbelintegralen

a) $\iint_D \frac{y}{x^2}dxdy$, **b)** $\iint_D e^{y-x}dxdy$

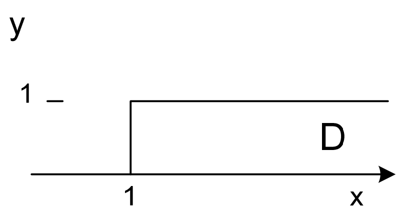
c) $\iint_D \frac{y}{x^{1/3}}dxdy$, **d)** $\iint_D e^{x-y}dxdy$, **e)** $\iint_D \frac{y}{x^2+3x+5}dxdy$

där $D = \{(x,y) \in R^2 : x \ge 1, \quad 0 \le y \le 1\}$.

konvergerar eller divergerar

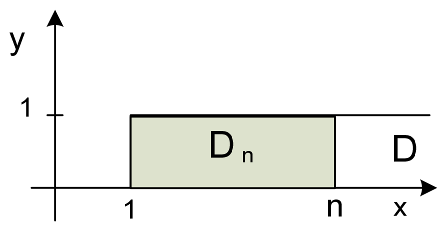
Lösning:

a) Integral är generaliserad eftersom området D är obegränsat.



Först integrerar vi över begränsade området .

Låt $D_n = \{(x,y) \in R^2 : \quad 1 \le x \le n, \quad 0 \le y \le 1\}$



$$I_n = \iint_{D_n} \frac{y}{x^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_1^n \frac{y}{x^2}\,dx = \int_0^1 y\,dy \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$$

Om $n \to \infty$ har vi att $I_n \to \frac{1}{2}$

Därmed är integralen $\iint_D \frac{y}{x^2}\,dxdy$ **konvergent** och har värdet $\frac{1}{2}$.

b) **Svar.** Integralen konvergerar och har värdet $1-e^{-1}$

c)

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{y}{x^{1/3}}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_1^n \frac{y}{x^{1/3}}\,dx = \int_0^1 y\,dy \int_1^n \frac{1}{x^{1/3}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_1^n = \frac{1}{2}(\frac{n^{2/3}}{2/3} - \frac{1}{2/3})$$

Om $n \to \infty$ har vi att $I_n \to \infty$.

därmed är integralen $\iint_D \frac{y}{x^{1/3}}\,dxdy$ **divergent**.

Anmärkning: Vi kunde använda kunskap från envariabelanalys:

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dr$ **konvergerar** om **p>1**, och divergerar om **p≤1**

och inse direkt att $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$ divergerar (för p=1/3 < 1).

d) integralen divergerar

e) Integralen konvergerar . Tips $\frac{y}{x^2+3x+5} \le \frac{y}{x^2}$ på D.

Några exempel där integranden är obegränsad

Uppgift 6. Bestäm om följande generaliserade dubbelintegral konvergerar eller divergerar.

(Ange också varför integralen är generaliserad.)

a) $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$ **b)** $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/3}}\,dxdy$ **c)** $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$

där området $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.

Lösning a)

Integralen är generaliserad eftersom integranden är obegränsad (i närheten av punkten (0, 0).

Vi byter till polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $J=r$,

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{r^6}\,dr = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^5}\,dr$$

Vi kan enkelt beräkna $\int_0^1 \frac{1}{r^5}\,dr = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^5}\,dr = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\varepsilon^4}\right] = \infty$ och inse att integralen divergerar.

(Vi kan även använda kunskap från envariabelanalys:

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dr$ konvergerar om och endast om **p<1**, och divergerar om **p ≥ 1)**

Därför divergerar $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$

Svar a) Divergerar

Lösning b)

Vi byter till polära koordinater och får (den här gången en enkel icke-generaliserad integral):

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/3}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{r^{2/3}}\,dr = 2\pi\int_0^1 r^{1/3}dr = 2\pi\left[\frac{r^{4/3}}{4/3}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}$$

Svar b) Konvergerar och har värdet $\frac{3\pi}{2}$

Svar c) Divergerar

Uppgift 7. Visa att följande generaliserade dubbelintegral konvergerar om och endast om $a<1$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy\ , \qquad \text{där } D = \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2 \le 1\}\,.$$

Lösning

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy \qquad \text{(polära koordinater)}$$

$$= \int_1^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{r^{2a}}\,dr = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{r^{2a-1}}\,dr$$

Sista integralen konvergerar (envariabelanalys eller direkt beräkning) om och endast om $2a-1<1$ dvs $a<1$ vad skulle bevisas.

Ett exempel där både integranden och integrationsområde och integranden är obegränsade

När vi i integralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ har både, en singulär punkt och obegränsat område D då delar vi område D i två delar D_1 och D_2 där D_1är begränsat område men innehåller singularitet. då är

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D2} f(x,y)\,dxdy\,.$$

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ är konvergent om och endast om både $\iint_{D1} f(x,y)\,dxdy$ och $\iint_{D2} f(x,y)\,dxdy$ konvergerar.

Uppgift 8. Bestäm om följande generaliserade dubbelintegral konvergerar eller divergerar.

a) $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$ b) $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$ c) $\iint_D \frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$

där $D = R^2$

Lösning:

Vi har(för alla tre integraler) obegränsad integrand (singularitet i punkten (0, 0)) och obegränsat område D.

Vi delar område D i två delar

$$D_1 = \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2 \le 1\} \text{ och } D_2 = \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2 \ge 1\}\,.$$

a)

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \iint_{D1} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy + \iint_{D2} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy\,.$$

Eftersom den första integralen $\iint_{D1} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$ divergerar (se upp 7) så **divergerar** också

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy\,.$$

b) $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy = \iint_{D1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy + \iint_{D2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$.

Eftersom den andra integralen $\iint_{D2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$ divergerar (se upp 3) så **divergerar**

också $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$

c) $\iint_D \frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy = \iint_{D1} \frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy + \iint_{D2} \frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$

i) Område D_1:

Eftersom $\frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}} \le \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}$ och $\iint_{D1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$ konvergerar på området $D_1 = \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ så , enligt jämförelsekriterium konvergerar också den första integralen $\iint_{D1} \frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$.

ii) Område D_2:

Eftersom $\frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}} \le e^{-x^2-y^2}$ och $\iint_{D2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ konvergerar (visa själv genom byte till polära koord.) på området $D_2 = \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2 \ge 1\}$ så , enligt jämförelsekriterium, konvergerar också den andra integralen $\iint_{D2} \frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$.

Eftersom båda integraler konvergerar så **konvergerar** också $\iint_D \frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{2/5}}\,dxdy$