Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 10, 07 Feb 2017

Information

- Nu börjar vi med integraler.
- Dubbelintegraler, trippelintegraler.
- Även i cylindriska och sfäriska koordinater.

Att beräkna volym under en yta/funktionsgraf (14.1)

(Ritar först en godtycklig mängd i xy-planet med en funktion z=f(x,y) ovanför och begrundar volymproblemet)

(Ritar sedan en mindre graf med rektangulär mängd i xy-planet och en z=f(x,y) ovanför, tänkt att vara "liten")

dA = liten area, $hdA \approx volym$

(Ritar sedan kopia på första grafen med godtycklig botten, med rutnät i xy-planet som representerar partitioneringen och illustrerar hur summan av "staplarna" ger hela volymen)

Om P partition, p_j små boxar. Volym $\approx \sum f(p_j^*)|p_j|$ där p_j^* någon punkt i p_j och $|p_j|$ arean av p_j.

Exempel

I två dimensioner: att bestämma arean av en cirkelskiva. Vi approximerar cirkeln med raka linjer, en uppsättning linjer som löper inuti cirkeln och en uppsättning som löper precis utanpå. Vi låter antalet hörn gå mot oändligheten och kan matematiskt bevisa att vi får cirkelns area.

Åter till integralen. $p_{ij}^* = (x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. Vi summerar över x och sen y.

Mer formellt, dubbel Riemannsumma som konvergerar mot ett tal I:

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}, \qquad \Delta A_{ij} \text{ arean.}$$

$$I = \lim_{m \to \infty} \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{m} ..$$

Vi använder beteckningen: (D definitionsområde)

$$I = \int_D \int f(x, y)\, dA$$

Vi vill använda envariabelanalysen för att göra själva beräkningen (med två integraler; en i x-led och en i y-led).

OBS! sidor 809-811 läses själva. Egenskaper hos (dubbel)integraler.

Upprepade integraler (14.2)

Enkla områden

Bokens ”x-simple” och ”y-simple”, dvs. områden som avgränsas av ”raka linjer” i x-led eller y-led (eller båda) samt envärda funktioner i den andra leden. T.ex något område som avgränsas av linjerna $y_1 = a$ och $y_2 = b$ samt funktionerna $x_1 = f(x)$ och $x_2 = g(x)$.

Notation

Räkna dubbelintegral på det enkla området D (y-enkelt avgränsat av linjerna $y_1 = a, y_2 = b, x_1 = c(x), x_2 = d(x)$).

$$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy$$

Vi har då

$$\int_D\int f(x,y)\, dA = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy\right)\, dx$$

Alternativt skrivsätt (boken skippar nog t.om parentesen i högra uttrycket)

$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy\right)\, dx = \int_a^b dx \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy\right)$$

Omvänd ordning om området lättare behandlas så:

$$\int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx\right)\, dy = \int_c^d dy \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx\right)$$

Ofta ytterst viktigt med ”basytan” för våra beräkningar, dvs. det begränsande området i xy-planet.

Exempel

Triangulärt område T i xy-planet med hörn i $(0,0),(1,1)$ och $(1,0)$.

$$\int_T\int xy\, dA = ?$$

$$T = \begin{cases} y < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \qquad \text{”större eller lika med spelar ingen roll med integraler”}$$

$$T = \begin{cases} y < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \quad \to I = \int_0^1 \left(\int_{x=y}^{x=1} xy\, dx\right)\, dy$$

$$= \int_0^1 y\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\, dy = \frac{1}{8}$$

Vi kunde ha räknat (just i detta exempel) även i y-led först eftersom området kan skrivas

$$T = \begin{cases} 0 < y < x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \rightarrow I = \int_0^1 \left(\int_0^x xy \; dy \right) \; dx$$

Exempel

Beräkna m.a.p basområdet som begränsas av x-axeln, y-axeln, linjen x=1 och funktionen $y = \sqrt{x}$

$$\int_D \int e^{y^3} \; dA$$

$$D = \{(x, y \mid \sqrt{x} < y < 1, \; 0 < x < 1\}$$

$$I = \int_D \int e^{y^3} \; dA = \int_0^1 dx \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy \right) = \text{ går ej lösa}$$

Vi provar nåt annat.

$$D = \{(x, y) \mid 0 < y < 1, \; 0 < x < y^2\}$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3} \; dx \right) \; dy = \int_0^1 \left(e^{y^3} \cdot \int_0^{y^2} 1 \; dx \right) \; dy \overset{\text{subst } u=y^3}{=} \frac{e-1}{3}$$

Generaliserade integraler (improper integrals) (14.3)

I envarren

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \; dx = \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} \; dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx = \lim_{r \to 0} \int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx$$

Dubbelintegraler

$$\int_D \int e^{-x^2} \; dA, \qquad D = \begin{cases} x \geq 0 \\ -x < y < x \end{cases}$$

Vi definierar

$$I = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \left(\int_{-x}^x e^{-x^2} \; dy \right) \; dx = \int_0^\infty \int_{-x}^x \ldots$$

Exempel 4 sidan 821

$$I = \int_D \int \frac{dA}{xy}, \qquad D = \begin{cases} y > x^2 \\ y \leq x \end{cases} \quad \rightarrow I = \int_0^1 \left(\int_{y=x^2}^{y=x} \frac{1}{xy} \; dy \right) \; dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\int_{x^2}^x \frac{dy}{y} \right) \; dx = \int_0^1 \frac{1}{x} [\ln y]_{x^2}^x dx \; = \int_0^1 \frac{-\ln x}{x} \; dx$$

Medelvärdessatsen för dubbelintegralen

$f(x, y)$ kontinuerlig på D (D är slutet, begränsad, sammanhängande)

Då existerar en punkt $(x_0, y_0) \in D$ där det gäller

$$\frac{1}{|D|} \int_D \int f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)$$

Exempel (övning 25 [???])

Bestäm genomsnittsavstånd från punkter på området $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ på linjen $x + y = 0$.

Vi behöver få fram avståndsfunktionen $d(x, y)$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, bestäm avstånd från (x, y) till linjen $x + y = 0$.

Vi ser att normalen till linjen $x + y = 0$ ges av $\bar{n} = (1, 1)$

Så linjesegmentet $\bar{p}_t = (x, y) + t(1, 1) = (x + t, y + t), \qquad -\infty < t < \infty$, normallinje till linjen $x + y = 0$ som går genom punkten (x, y).

Vi vill ta ett segment från (x, y) till linjen $x + y = 0$, vi får $(x + t) + (y + t) = 0$

Närmaste punkt på linjen är alltså $(x-(x+y)/2,\ y-(x+y)/2) = ((x-y)/2,\ (y-x)/2)$

Vi får $d(x, y) = \sqrt{\text{vanliga avståndsformeln euklidiskt}}$

Svaret blir $\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$