Flervariabelanalys sammanfattning

FÖRFATTAREN TAR INGET ANSVAR FÖR EVENTUELLA FEL

Innehåll

Koordinater:

Rektangulära koordinater:

$\overline{e}_1 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{e}_j = (0,\ldots,1,\ldots,0), \ \overline{e}_n = (0,\ldots,0,1)$

$P = x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n$ där $P \in \mathbb{R}^n$

där $(x_1,\ldots,x_n)$ är koordinater för P

Polära koordinater i $\mathbb{R}^2$:

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\gamma : \begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}$, där α,β är avstånd till cirkelns mittpunkten från origo

$\gamma(r,\theta) = F(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta)$

$\iint_c F(x,y) \cdot ds = \iint_D \gamma(r,\theta) r\, dA$

hel cirkel: $D = \{(r,\theta,\varphi) : 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, där $R =$ cirkelns radie

Cylindriska koordinater i $\mathbb{R}^3$:

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\gamma : \begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, där α,β är avstånd till cirkelns mittpunkten från origo

$\gamma(r,\theta,z) = F(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta, z)$

$\iiint_c F(x,y,z) \cdot ds = \iiint_D \gamma(r,\theta,z) r\, dV$

hel cylinder: $D = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ a \le z \le b\}$, där $R =$ cylinderns radie

Sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$:

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\gamma : \begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta\sin\varphi \\ y = \beta + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \eta + r\cos\varphi \end{cases}$, där α,β,η är avstånd till sfärens mittpunkten från origo

$\gamma(r,\theta,\varphi) = F(\alpha + r\cos\theta\sin\varphi, \beta + r\sin\theta\sin\varphi, \eta + r\cos\varphi)$

$\iiint_c F(x,y,z) \cdot ds = \iiint_D \gamma(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\varphi\, dV$

hel sfär: $D = \{(r,\theta,\varphi) : 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$, där $R =$ sfärens radie

Kurvor:

En kurva är en sluten mängd $c \in \mathbb{R}^n$ som kan beskrivas som

$c = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} = \bar{\gamma}(t), t \in I \in \mathbb{R} \right\}$ där $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$ är en parametrisering

$\bar{\gamma}(t) = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ där $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$

$\lim_{t \to t_0} \bar{\gamma}(t) := \left(\lim_{t \to t_0} \gamma_1, ..., \lim_{t \to t_0} \gamma_n \right)$

$I = [a, b]$

$t = a : \bar{\gamma}(a) \in \mathbb{R}^n \to t = b : \bar{\gamma}(b) \in \mathbb{R}^n$

Derivering av en kurva:

$\bar{\gamma}(t) = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \Rightarrow \bar{\gamma}'(t) = (\gamma_1', ..., \gamma_n')$

derivatan $\bar{\gamma}'(t)$ kallas tangenten till en kurva c i punkten $\bar{x} = \bar{\gamma}(t)$

kurvan c som parametriseras av $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \in \mathbb{R}^n$ är singulär i $t_0 \in I$ om

$\bar{\gamma}'(t_0) = \bar{0}$ eller om $\bar{\gamma}'(t_0)$ inte existerar

Tolkning: I singulära punkter saknar kurvan en entydligt definerad riktning

Funktioner:

En funktion $f : u \to \mathbb{R}^n$ kallas för

skalärfält om $u \in \mathbb{R}^m$ och $n = 1$

vektorfält om $u \in \mathbb{R}^m$ och $n > 1$

Definitionsmängden $\left(dom(f), D_f \right)$ till en funktion f är den mängd där f är definerad

Värdemängden $\left(range(f), V_f \right)$ är mängden av alla möjliga värden f kan anta

Gränsvärden:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalärfältet har gränsvärdet

$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = L \in \mathbb{R}$ i $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

om

$\lim_{\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \to 0} \left| f(\bar{x}) - L \right| = 0$

Sats 1:

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

g är kontinuerlig i $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ och f är kontinuerlig i $g(\bar{a}) \in \mathbb{R}^n$

då är $f \circ g$ kontinuerlig i $\bar{a}$

Sats 2:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ så $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ och

$\lim_{x\to a} f(x,y)$ samt $\lim_{y\to b} f(x,y)$ existerar, då gäller

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]$$

Nivåkurvor:

Nivåyta:

Nivåytan till f som svarar mot nivån $c \in \mathbb{R}$ defineras som

$$L(f,c) = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\overline{x}) = c\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

För att beräkna en nivåyta av en kurva $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
sätt $c = F$ och för olika värden på c lös ekvationen

Derivator:

Derivata i en variabel:

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriverbar i $a \in \mathbb{R}$ om

$$\boxed{f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0}$$

Derivata i flera variabler:

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deriverbar i $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ om

$$\boxed{\lim_{\overline{h}\to \overline{0}} \frac{f(\overline{a}+\overline{h}) - f(\overline{a}) - \overline{h}\cdot\nabla f(\overline{a})}{\left\|\overline{h}\right\|} = 0}$$

där

$$\nabla f(\overline{a}) := (\partial x_1 f, ..., \partial x_n f),\ grad(f) = \nabla f$$

f partiellt deriverbar i $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ med avseende på x_i om

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,...,a_i+h,...,a_n) - f(a_1,...,a_n) - h\,\partial x_i f(\overline{a})}{h} = 0}$$

Sats 3:

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$

Antag f är kontinuerlig i $\bar{a}$ samt att $\partial x_i f$ finns

och är kontinuerlig i $\bar{a}$ för $i = 1, \dots, n$

Då är f deriverbar i $\bar{a}$

$$f'(a) = \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})}{\|\bar{h}\|} \quad \text{existerar}$$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$

$f'(\bar{a}):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linjär

$f'(a)(\bar{x}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{x}$

Riktningsderivata och Gradienten:

Riktningsderivata:

$f(a + tu_1, b + tu_2) = f((a,b) + t\bar{u})$ där

$\bar{u} = (u_1, u_2)$, $\|\bar{u}\| = 1$ är en riktningsvektor

$$\partial\bar{u} f(a,b) = \frac{d}{dt} f((a,b) + t\bar{u})\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f((a,b) + t\bar{u}) - f(a,b)}{t}$$

$f'_{\bar{u}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \bar{u}$ där

$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right)$ gradienten av f $\left(grad(f) = \nabla f\right)$ i $\mathbb{R}^2$

$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$ gradienten av f i $\mathbb{R}^3$

skalärfält $\to$ vektorfält

Kedjeregeln:

Kedjeregeln:

$C^n =$ funktioner som är n gånger kontinuerligt deriverbara

1D

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $x \in \mathbb{R}$

antag att g är C^1 i x och f deriverbar i $g(x)$

$\Rightarrow f \circ g$ deriverbar i x och $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

2D

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ där $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $t \in \mathbb{R}$

antag att u, v är C^2 i t och f deriverbar i $(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = \partial x f(x, y)u' + \partial y f(x, y)v'$ där $(x, y) = (u(t), v(t))$

$g(t) = (u(t), v(t))$ ger $g'(t) = (u'(t), v'(t))$

$\Rightarrow \partial x f(x, y)u' + \partial y f(x, y)v' = \nabla f(x, y) \cdot g'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$

I högre dimensioner

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ samt $t \in \mathbb{R}$

antag att g_i är C^1 i t för $i = 1, ..., n$ och f deriverbar i $g(t) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt} f \circ g = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial x_i f(g(t)) \cdot g'_i(t)$

Sats 5:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$ där $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

antag att $u, \partial s\, u, \partial t\, u$ samt $v, \partial s\, v, \partial t\, v$ existerar i punkt $(s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$

och att f deriverbar i $(x_0, y_0) = g(s_0, t_0)$

$\Rightarrow x_0 = u(s_0, t_0), y_0 = v(s_0, t_0)$

om $h = f \circ g,$ dvs $h(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$

$\Rightarrow h$ har parialderivatorna $\partial s\, h$ och $\partial t\, h$ i (s_0, t_0) och

$\partial s\, h(s_0, t_0) = \partial x f(x_0, y_0)\partial s\, u(s_0, t_0) + \partial y f(x_0, y_0)\partial s\, v(s_0, t_0)$

$\partial t\, h(s_0, t_0) = \partial x f(x_0, y_0)\partial t\, u(s_0, t_0) + \partial y f(x_0, y_0)\partial t\, v(s_0, t_0)$

där $h, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

ger $\nabla h(s_0, t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \partial s\, u(s_0, t_0) & \partial s\, v(s_0, t_0) \\ \partial s\, u(s_0, t_0) & \partial t\, v(s_0, t_0) \end{pmatrix}}_{\text{Jakobianen för } g}$

Derivata som linjär modell:

$$
\begin{array}{lclcl}
f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & | & f'(x_0)\in\mathbb{R} & | & L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \\
f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} & | & \nabla f(\bar{x}_0)\in\mathbb{R}^n & | & L(\bar{x})=f(\bar{x}_0)+\nabla f(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}-\bar{x}_0) \\
f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m & | & [\mathrm{J}]f(\bar{x}_0)\in\mathbb{R}^{n\times m} & | & L(\bar{x})=f(\bar{x}_0)+[\mathrm{J}]f(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}-\bar{x}_0)
\end{array}
$$

där $[\mathrm{J}]=$ Jakobianen av f i $\bar{x}_0$

2D

$$
f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)
$$

$$
+\frac{1}{2}(x-x_0,y-y_0)\cdot\begin{pmatrix}\partial^2 xf(x_0,y_0) & \partial y\partial xf(x_0,y_0)\\ \partial x\partial yf(x_0,y_0) & \partial^2 yf(x_0,y_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}
$$

Taylorutveckling:

Taylorutveckling i en variabel:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i en punkt $a\in\mathbb{R}$

$$
\boxed{T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}
$$

med felet $\dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Beräkning av tangentlinje:

Beräkning av tangentlinje i $\mathbb{R}^2$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i någon punkt $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$
\boxed{L=f(a)+\frac{df}{dx}(a)\cdot(x-a)}
$$

Beräkning av tangentlinje i $\mathbb{R}^3$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ i någon punkt $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

hitta $\bar{n}$ sådan att $\nabla f(a,b,c)\times\bar{n}=\bar{0}$

$$
\boxed{L=(a,b,c)+\bar{n}t \quad \text{där } t\in\mathbb{R}}
$$

Approximering av tangentplan:

Taylorutveckling av ordning ett i två variabler:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i någon punkt $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

funktionen f kan approximeras kring punkten $(a,b,f(a,b))$ med

$$
\boxed{\Pi=T_1(x,y)=f(a,b)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}(x-a)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}(y-b)}
$$

Taylorutveckling av ordning två i två variabler:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i någon punkt $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

funktionen f kan approximeras kring punkten $(a,b,f(a,b))$ med

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi = T_2(x,y) = f(a,b) &+ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}(x-a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)}(x-a)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)}(y-b)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(a,b)}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(a,b)}(y-b)(x-a)\end{aligned}}$$

Jakobianen/ Jakobimatrisen:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}(a+h,b+k) = \begin{pmatrix} f_1(a+h,b+k) \\ f_2(a+h,b+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a,b) \\ f_2(a,b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial x f_1(a,b)h + \partial y f_1(a,b)k \\ \partial x f_2(a,b)h + \partial y f_2(a,b)k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(a,b) \\ f_2(a,b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial x f_1(a,b) & \partial y f_1(a,b) \\ \partial x f_2(a,b) & \partial y f_2(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

där Jakobianen är

$$\boxed{\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \partial x f_1(a,b) & \partial y f_1(a,b) \\ \partial x f_2(a,b) & \partial y f_2(a,b) \end{pmatrix}}$$

Implicita funktioner:

<u>n=1</u>

$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

implicit relation som ges av $F:(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$F(x,y)=0$

vi kan beskriva $y = f(x) \Rightarrow F(x,y)=0$

$F(x,f(x))=0$

Sats 6, implicita funktionssatsen i en variabel:

Låt $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara C^1 nära $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$

antag vidare att $F(x_0, y_0)=0$

om $\partial yF(x_0, y_0)\neq 0$ så finns $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som är C^1 och

$F(x, f(x))=0$ då $x\approx x_0$ vidare så $f'(x_0)=-\dfrac{\partial xF(x_0, y_0)}{\partial yF(x_0, y_0)}$

Sats 7:

Om $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är C^2 och $\nabla F(x_0, y_0)\neq 0$

$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0)$ är normal till nivåkurvan $F(x, y)=c$

här antar vi $F(x_0, y_0)=c$

Sats 8, implicita funktionssatsen:

Låt $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara C^1 och $(x_0, y_0, z_0)\in\mathbb{R}^3$ är sådan att $F(x_0, y_0, z_0)=0$

om $\partial zF(x_0, y_0, z_0)\neq 0$ så finns

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ som är C^1 och $F(x, y, f(x, y))=0$ då $(x, y)\approx(x_0, y_0)$

Sats 9, alt. version av implicita funktionssatsen:

Låt $f, g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ vara C^1 och $(*)\begin{cases} f(x_0, y_0, z_0)=c_1 \\ g(x_0, y_0, z_0)=c_2 \end{cases}$

gäller för någon punkt $(x_0, y_0, z_0)\in\mathbb{R}^3$

antag vidare att

$$\frac{d(f, g)}{d(x, y)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ i } (x_0, y_0, z_0)$$

då finns $\gamma_1, \gamma_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som är C^1

och $\begin{cases} x=\gamma_1(z) \\ y=\gamma_2(z) \end{cases}$ uppfyller $(*)$ i (x_0, y_0, z_0)

dvs $\begin{cases} f(\gamma_1(z), \gamma_2(z), z)=c_1 \\ g(\gamma_1(z), \gamma_2(z), z)=c_2 \end{cases}$ gäller då $z\approx z_0$

Def, max/min värden:

$f : K \to \mathbb{R}$ där $K \subset \mathbb{R}^n$ om $\overline{x} \in K$

a) f har lokalt max i $\overline{x}_0$ om det finns en omgivning u till $\overline{x}_0$ så att

$f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}_0)$ för alla $\overline{x} \in K$

$f(\overline{x}) \geq f(\overline{x}_0) \Rightarrow$ lokalt min

b) f har globalt max i $\overline{x}_0$ om

$f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}_0)$ för alla $\overline{x} \in K$

$f(\overline{x}) \geq f(\overline{x}_0) \Rightarrow$ globalt min

Def, stationära punkter:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är stationär i $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ om $\nabla f(\overline{x}_0) = \overline{0}$

Sats 10, karaktärisering av extrempunkter:

$f : K \to \mathbb{R}$ där $K \subset \mathbb{R}^n$ och $\overline{x}_0 \in K$

då är $\overline{x}_0$ en extrempunkt till f om någon av följande gäller

a) $\overline{x}_0 \in K^\circ$ och $\nabla f(\overline{x}_0) = \overline{0}$, dvs $\overline{x}_0$ är en stationär punkt till f

b) f är singulär i $\overline{x}_0$, dvs ej deriverbar eller definerad här

c) $\overline{x}_0 \in rand(K)$

Def, sadelpunkt:

f har en sadelpunkt i $\overline{x}_0$ om $\nabla f(\overline{x}_0) = \overline{0}$ och $\overline{x}_0$ är inte ett lokalt max/min

Urskiljande av lokala max/min från sadelpunkter:

$\underline{n=1}$

$f'(x)=0$ då $x_0 \in K^\circ$

a) om $f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x_0)$ lokalt min

b) om $f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x_0)$ lokalt max

$\underline{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

$\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ där $\nabla f(\overline{x}_0)=\overline{0}$

$$f(\overline{x}_0+\overline{h})=f(\overline{x}_0)+\nabla f(\overline{x}_0)\cdot\overline{h}+\frac{1}{2}\overline{h}\cdot\nabla^2 f(\overline{x}_0)\cdot\overline{h}^{\mathrm{T}}$$

där $\nabla^2 f(\overline{x}_0)=\begin{pmatrix} \partial^2 x_1 f(\overline{x}_0) & \dots & \partial x_1 \partial x_n f(\overline{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_n \partial x_1 f(\overline{x}_0) & \cdots & \partial^2 x_n f(\overline{x}_0) \end{pmatrix}$ är Hessianen till f som är en $(n \times n)$-matris

Om f är $C^2 \Rightarrow \partial x_i \partial x_j f(\overline{x}_0)=\partial x_j \partial x_i f(\overline{x}_0) \Rightarrow$ symmetrisk $\nabla^2 f(\overline{x}_0)$

Sats 11:

$f:K \to \mathbb{R}$ där $K \subset \mathbb{R}^n$ och $\overline{x}_0 \in K^\circ$ så att $\nabla f(\overline{x}_0)=\overline{0}$

a) om $\nabla^2 f(\overline{x}_0)$ positiv definit $\Rightarrow f(\overline{x}_0)$ lokalt max

b) om $\nabla^2 f(\overline{x}_0)$ negativ definit $\Rightarrow f(\overline{x}_0)$ lokalt min

c) om $\nabla^2 f(\overline{x}_0)$ indefinit $\Rightarrow f(\overline{x}_0)$ sadelpunkt

En symmetrisk matris $\mathbb{Q}$ är positiv definit om dess
egenvärden $\geq 0 \Rightarrow \overline{h}\cdot\mathbb{Q}\cdot\overline{h}^{\mathrm{T}} \geq 0$
och negativ definit om dess
egenvärden $\leq 0 \Rightarrow \overline{h}\cdot\mathbb{Q}\cdot\overline{h}^{\mathrm{T}} \leq 0$

Korollarium $(n=2)$:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^2 i $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ och $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$

låt $A=\partial^2 x f(x_0,y_0), B=\partial x \partial y f(x_0,y_0), C=\partial^2 y f(x_0,y_0)$

då gäller

a) $AC-B^2>0$ och $A>0 \Rightarrow f(x_0 y_0)$ lokalt min

b) $AB-B^2>0$ och $A<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)$ lokalt max

c) $AC-B^2<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)$ sadelpunkt

Sats 12:

$\underline{n=2}$

$f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är C^1 och $K=\{(x,y):g(x,y)=0\}\subset\mathbb{R}^2$

antag vidare att (x_0,y_0) är en inre punkt till definitionsmängden för f om dessutom

a) $(x_0,y_0)\in K^\circ$, dvs $g(x_0,y_0)=0$ och (x_0,y_0) är inte en ändpunkt

b) f är en restriktion till K och har lokalt max/min i (x_0,y_0)

c) $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$

då gäller $\nabla L(x_0,y_0,\lambda)=(0,0,0)$ där $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

där L är Lagrangianen och λ är lagrange multiplikatorn

$\underline{n \text{ generellt}}$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ är C^1 i $\overline{x}_0\in\mathbb{R}^n$ och $k=\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n:g_1(\overline{x})=0,\dots,g_m(\overline{x})=0\}$

där $m<n$ för $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ som är C^1 i $\overline{x}_0$

a) $\overline{x}_0\in K^\circ$

b) $\nabla g_1(\overline{x}_0),\dots,\nabla g_m(\overline{x}_0)$ är linjärt oberoende

c) f en restriktion till K och har lokalt max/min i $\overline{x}_0$ då $\nabla L(\overline{x}_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\overline{0}$

då gäller $L(\overline{x},\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(\overline{x}_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\overline{x})$

Dubbla integraler:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ och $D\subset\mathbb{R}^2$

$\iint_D f(x,y)\,dxdy=$ volymen av kroppen mellan xy-planet och $z=f(x,y)$

$$\boxed{\iint_D f(x)g(y)\,dxdy=\int_a^b f(x)\,dx\int_c^d g(y)\,dy}$$

Sats 13:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ och $D\subset\mathbb{R}^2$ är ett Jordanområde

a) f kontinuerlig på $D\Rightarrow f$ integrabel

b) f integrabel $\Rightarrow\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D^\circ} f(x,y)\,dxdy$

Jordanområde:

D har en rand som kan täckas av rektanglar med en total area som kan göras godtyckligt liten.

Sats 14:

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är integrabel på $D \subset \mathbb{R}^2$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

a) $\iint_D \alpha f(x,y)\,dxdy = 0$ om $area(D) = 0$

b) $\iint_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\,dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint_D g(x,y)\,dxdy$

c) om $f(x,y) \le g(x,y)$ på D

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D g(x,y)\,dxdy \Rightarrow \left| \iint_D f(x,y)\,dxdy \right| = \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$

d) om $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ och $|D_i \cap D_j = 0|$

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy = \sum_i \iint_{D_i} f(x,y)\,dxdy$

Def, x- och y-enkelt:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $D \subset \mathbb{R}^2$ är ett Jordanområde

$D \subset \mathbb{R}^2$ kallas för $x-$enkelt om $D = \{(x,y) : a(y) \le x \le b(y), c \le y \le d\}$

för något $c, d \in \mathbb{R}$ och funktioner $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ kallas för $y-$enkelt om $D = \{(x,y) : a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}$

för något $a, b \in \mathbb{R}$ och funktioner $\mathrm{c}, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

D kallas för ett reguljärt område om D kan delas upp i både $x-$ och $y-$enkla områden

Medelvärdesatsen:

Sats 4, medelvärdesatsen för $\mathbb{R}^2$:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Antag f, $\partial x f$, $\partial y f$ är alla kontinuerliga i (a,b)

då finns $0 < \varepsilon, \eta < 1$ så

$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h\partial x f(a + \varepsilon h, b+k) + h\partial y f(a+h, b+\varepsilon k)$

för h, k tillräckligt litet

Sats 15, medelvärdesatsen:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $D \subset \mathbb{R}^2$ är kompakt och sammanhängande

om f är kontinuerlig på D så

$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = area(D)\cdot f(x_0,y_0)$ för något $(x_0,y_0)\in D$

<u>Def</u>: medelvärdet av f ges som $F := \dfrac{1}{area(D)}\iint\limits_D f(x,y)\,dA$

<u>Tillämpning:</u>

masscentrum i området D ligger i punkten (X,Y)

$$X = \frac{1}{area(D)}\iint\limits_D x\,dA$$

$$Y = \frac{1}{area(D)}\iint\limits_D y\,dA$$

Sats 15:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $D = [a,b]\times[c,d]$

om f är integrerbar på alla D och $\int\limits_a^b \left|f(x,y)\right| dxdy < \infty$ för alla $c \le y \le d$

$$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

om dessutom $\int\limits_c^d \left|f(x,y)\right| dxdy < \infty$ för alla $a \le x \le b$

$$\Rightarrow \boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx}$$

Variabelsubstitution i dubbelintegraler:

Sats 16:

Låt $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara integrabel på $D \subset \mathbb{R}^2$ och $u,v:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

sådana att $(s,t) \mapsto \left(u(s,t),v(s,t)\right)$ är ett-till-ett

från $K = \left\{(s,t):\left(u(s,t),v(s,t)\right) \in D\right\}$ till D

om $\frac{\partial u}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial s},\frac{\partial v}{\partial t}$ är konstanta på K och $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_K f\left(u(s,t),v(s,t)\right)\cdot\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| dsdt}$$

där $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|$ är determinanten av Jakobianen

Sats 17:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabel på $D \subset \mathbb{R}^n$ och f kontinuerlig på D°

$\Phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är ett-till-ett mellan $K \subset \mathbb{R}^n$ och D samt C^1 på K utom i en nollmängd

då gäller

$$\int_D f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_K f\left(\Phi(\bar{u})\right)\cdot\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}}\right| d\bar{u}$$

där $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}}\right) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \nabla\phi_1 & \cdots & \nabla\phi_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ är en $n \times n -$ matris

och $\Phi(u_1,\ldots,u_n) = \left(\phi_1(\bar{u}),\ldots,\phi_n(\bar{u})\right)$ där $\phi_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Vektorfält:

Def:

$D \subset \mathbb{R}^n$ fixerat, ett vektorfält på D är en funktion $\bar{F} : D \to \mathbb{R}^m$ så

$\bar{F}(x_1,...,x_n) = (F_1(\bar{x}),...,F_n(\bar{x}))$

där $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kallas för i:e komponenten

Def:

$\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är C^k om F_i är C^k

Def:

En flödeskurva $\left(eng.\text{ integral curve}\right)$ till ett $\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

genom $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ är en kurva $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ där $t \in \mathbb{R}$

sådan att $\bar{\gamma}'(t) = \bar{F}(\bar{\gamma}(t))$ och $\bar{\gamma}'(0) = \bar{x}_0$

Sats 18:

Om $\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är C^0 och $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

så finns det en entydig flödeskurva till $\bar{F}$ genom $\bar{x}_0$ som är C^1

Konservativa vektorfält:

Def:

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow \nabla\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är ett vektorfält

Ett vektorfält $\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är konservativt på $D \subset \mathbb{R}^n$

om det finns ett $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådan att

$\boxed{\bar{F}(\bar{x}) = \nabla\varphi(\bar{x})}$ för $\bar{x} \in D$

φ kallas då för potentialen till $\bar{F}$

Ett konservativ vektorfält har alltid $rot(\bar{F}) = \nabla \times \bar{F} = \bar{0}$

Bästa sätt att bevisa ett konservativt fält är att hitta potentialen φ

Om $\bar{F} = \nabla\varphi$ på någon kurva $c : [\bar{x}_0, \bar{x}_1]$, då gäller

$$\boxed{\int_c \bar{F}ds = \int_c \nabla\varphi ds = \varphi(\bar{x}_1) - \varphi(\bar{x}_0)}$$

Sats 19:

$\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ en enkelt sammanhängande mängd

och $\bar{F}$ är C^1 på D

$\bar{F}(\bar{x}) = (F_1(\bar{x}),...,F_n(\bar{x})) \Rightarrow \bar{F}$ konservativ på $D \Leftrightarrow \partial x_j F_i = \partial x_i F_j$

Ekvipotentialytor:

$\bar{F}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ konservativ med potential $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

nivåytan $\varphi(\bar{x}) = c$ kallas för ekvipotential till $\bar{F}$

$\nabla\varphi = \bar{F} \Rightarrow \nabla\varphi$ är normal till sin nivåyta

$\Rightarrow$ flödeskurvan $\nabla f = c$ är vinkelrät mot ekvipotentialytan $\varphi = c$

Kurvintegraler:

En kurva $c \subset \mathbb{R}^n$ som kan skrivas som

$c = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} = \bar{\gamma}(t), t \in I \subset \mathbb{R} \right\}$

där $\bar{\gamma} : I$ och $I \subset \mathbb{R}$ ett intervall $I = [a,b]$

a) $\bar{\gamma}$ kallas för kurvans parametrisering

b) c är C^k om $\bar{\gamma}$ är en C^k avblidning

c) c kan ha en "orientering", dvs $\bar{\gamma}(a) \in \mathbb{R}^n$ är start och $\bar{\gamma}(b) \in \mathbb{R}^n$ är slutet

Partition:

Partitionen av $I = [a,b]$ är $P = \left\{ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m < b \right\}$

$\Rightarrow$ uppdelning av kurvan c där $c_k = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} = \bar{\gamma}(t), t_{k-1} \le t \le t_k \right\}$

$$S(c,P) := \sum_k \left\| \bar{\gamma}(t_{k-1}) - \bar{\gamma}(t_k) \right\| \le length(c)$$

$$\boxed{length(c) := \lim_{\|P\| \to 0} S(c,P) = \int_c ds}$$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ och $\Delta\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}(t_i) - \bar{\gamma}(t_{i-1})$

$$\Rightarrow S(c,P) = \sum_k \left\| \frac{\Delta\bar{\gamma}(t_k)}{\Delta t_k} \right\| \Delta t_k$$

$$\|P\| \to 0 \Rightarrow \Delta t_k \to dt \text{ och } \left\| \frac{\Delta\bar{\gamma}(t_k)}{\Delta t_k} \right\| \to \left\| \Delta\bar{\gamma}'(t) \right\|$$

$$\int_c ds = length(c) = \int_a^b \left\| \Delta\bar{\gamma}'(t) \right\| dt \approx \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{\Delta\bar{\gamma}(t_k)}{\Delta t_k} \right\| \Delta t_k$$

$\underline{c \subset \mathbb{R}, \text{ kurva}}$

$$\int_c 1\,dt = längd(c)$$

$\underline{I \subset \mathbb{R}}$

$$\int_I 1\,dt = längd(I)$$

$\underline{I \subset \mathbb{R}^2}$

$$\iint_I 1\,dA = area(I)$$

$\underline{I \subset \mathbb{R}^3}$

$$\iiint_I 1\,dV = volym(I)$$

Kurvintegral av skalärfält:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ett skalärfält där $I = [a,b]$

$$\boxed{\int_c f ds := \lim_{\|P\| \to 0} S(f, c, P) = \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) \cdot \|\bar{\gamma}'(t)\| dt}$$

om c ges av två olika parametriseringar $\begin{cases} \bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ \bar{\phi} : [c,d] \to \mathbb{R}^n \end{cases}$, där $\bar{\gamma}(a) = \bar{\phi}(c)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) \cdot \|\bar{\gamma}'(t)\| dt = \int_a^b f(\bar{\phi}(t)) \cdot \|\bar{\phi}'(t)\| dt$$

Kurvintegral av vektorfält:

$\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, c en kurva i $\mathbb{R}^n$

$\int_c \bar{F} ds = \left(\int_c F_1 ds, \ldots, \int_c F_n ds \right)$, teoretiskt

$\boxed{\int_c \bar{F} ds := \int_a^b \bar{F}(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt}$, fysikalisk tolkning där $\bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametriserar c

<u>Tillämpning:</u>

$\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ett kraftfält

Vi vill beräkna arbetet som uträttas av $\bar{F}$ då en partikel förflyttas längst given kurva c

$$\text{"arbete"} = \text{"summa } dW\text{"} = \int_c dW$$

$$dW = ds \cdot (\text{tangentiell komponent av } \bar{F} \text{ till } c)$$

Sats 18:

$\overline{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ en öppet sammanhängande mängd där $\overline{F}$ är C^1 på D
då är följande ekvivalent

a) $\overline{F}$ är konservativ på D, dvs $\overline{F} = \nabla\varphi$ för något $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

b) $\int\limits_{c_1} \overline{F}ds = \int\limits_{c_2} \overline{F}ds$ där c_1 och c_2 är två C^1 kurvor från $\overline{x}_0 \to \overline{x}_1$ i D

c) $\oint\limits_{c} \overline{F}ds = 0$ för alla slutna kurvor c

Ytintegraler:

$Y \subset \mathbb{R}^3$ en yta, 2D objekt, tre sätt att besktiva punkt på Y

a) parametrisering $\overline{\gamma}:D \to \mathbb{R}^3, D \subset \mathbb{R}^2, Y = \{(x,y,z):(x,y,z) = \overline{\gamma}(s,t),\ (s,t) \in D\}$

b) som en graf $Y = \{z = f(x,y)\}$ för $f:D \to \mathbb{R}$ där $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{\gamma}(s,t) = (s,t,f(s,t))$

c) implicit $Y = \{(x,y,z):F(x,y,z) = 0\}$ för $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Y \subset \mathbb{R}^3$ en yta parametriserad av $\overline{\gamma}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där $D \subset \mathbb{R}^2$

$Y = \{(x,y,z):(x,y,z) = \overline{\gamma}(s,t),\ (s,t) \in D\}$

$$area(Y) = \iint\limits_{Y} dS = \iint\limits_{D} \underbrace{\|\partial s\,\overline{\gamma} \times \partial t\,\overline{\gamma}\| dsdt}_{\text{areaytelementet } dA}$$

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalärfält

$$\boxed{\iint\limits_{Y} fdS := \iint\limits_{D} f(\overline{\gamma}(s,t)) \cdot \|\partial s\,\overline{\gamma} \times \partial t\,\overline{\gamma}\| dsdt}$$

Specialfall:

$$z=g(x,y)\Rightarrow\begin{cases}x=s\\ y=t\\ z=g(s,t)\end{cases}\qquad (s,t)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

$$\bar{\gamma}(s,t)=(s,t,g(s,t))$$

$$\partial_s\bar{\gamma}\times\partial_t\bar{\gamma}=(-\partial_s g,-\partial_t g,1)$$

$$\|\partial_s\bar{\gamma}\times\partial_t\bar{\gamma}\|=\left|\sqrt{1+\partial_s g^2+\partial_t g^2}\right|$$

$$dS=\left|\sqrt{1+\partial_s g^2+\partial_t g^2}\right|dsdt$$

$$\iint_Y fdS=\iint_D f(s,t,g(s,t))\cdot\left|\sqrt{1+\partial_s g^2+\partial_t g^2}\right|dsdt$$

$Y=\{(x,y,z):G(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D\}$ för något $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

antag att $\partial zG\neq 0$ på alla $(x,y)\in D$

$\Rightarrow$ implicita funktionssatsen ger att $dS=\left\|\dfrac{\nabla G(x,y,z)}{\partial zG(x,y,z)}\right\|dxdy$

$$\boxed{\iint_Y fdS=\iint_D f(x,y,z)\cdot\left\|\frac{\nabla G(x,y,z)}{\partial zG(x,y,z)}\right\|dxdy}$$

Ytintegral av skalärfält (flux):

$\bar{F}(\bar{x})=$ hastigheten i punkt $\bar{x}$, $Y\subset\mathbb{R}^3$ orienterbar yta

vill utrycka flödet av "vätska" som passerar Y i punkt $\bar{x}$

mängd "vätska" genom dA under $[t,t+dt]=dS\|\bar{F}(\bar{x})\|=\bar{F}(\bar{x})\cdot\bar{N}(\bar{x})dsdt$

flödet $\dfrac{dv}{dt}=\bar{F}(\bar{x})\cdot\bar{N}(\bar{x})dS$

$$\iint_Y\bar{F}\cdot d\bar{S}:=\iint_Y\underbrace{\bar{F}(\bar{x})\cdot\bar{N}(\bar{x})}_{f(\bar{x})}dS=\iint_Y fdS$$

$$Y=\{(x,y,z)=\bar{\gamma}(s,t),(s,t)\in D\},D\in\mathbb{R}^2$$

Ys normalvektor $\bar{N}(\bar{x})=\pm\dfrac{\bar{n}(x,y,z)}{\|\bar{n}(x,y,z)\|}$ där $\bar{n}(x,y,z)=\partial s\,\bar{\gamma}\times\partial t\,\bar{\gamma}$

$$d\bar{S}=\bar{N}dS=\pm\bar{n}(x,y,z)dsdt$$

$$\boxed{\iint_Y\bar{F}\cdot d\bar{S}=\pm\iint_D\underbrace{\bar{F}(\bar{\gamma}(s,t))\cdot(\partial_s\bar{\gamma}(s,t)\times\partial_t\bar{\gamma}(s,t))}_{\text{reellvärd funktion av }(s,t)}dsdt}$$

Divergens och Rotation:

Divergens:

vektorfält $\rightarrow$ skalärfält

$$\boxed{div(\bar{F}) = \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},\ \bar{F} = (F_1, F_2, F_3)\ \bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3}$$

Rotation (curl):

vektorfält $\rightarrow$ vektorfält

<u>i 3D</u>

$\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,\ \bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$$\boxed{rot(\bar{F}) = \nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)}$$

<u>i 2D</u>

$\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,\ \bar{F} = (F_1, F_2) \rightarrow \Phi = (F_1, F_2, 0)$

$$\Rightarrow rot(\Phi) = \nabla \times \Phi = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Laplace-operatorn:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Δ : skalärfält $\rightarrow$ skalärfält

Δ : vektorfält $\rightarrow$ vektorfält

$\Delta \bar{F} = (\nabla F_1, \nabla F_2, \nabla F_3)$

Gravitaionsfält:

$$\bar{F} = -m \cdot \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|^3}, \quad m > 0$$

Regler:

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\bar{F}\right)=0 \text{ dvs } div\left(rot\left(\bar{F}\right)\right)=0$$

$$\nabla\times\left(\nabla\varphi\right)=0 \text{ dvs } rot\left(grad\left(\varphi\right)\right)=0$$

$$\nabla\left(\phi\psi\right)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$$

$$\nabla\cdot\left(\phi\bar{F}\right)=\left(\nabla\phi\right)\cdot\bar{F}+\phi\nabla\cdot\bar{F}$$

$\bar{F}$ är divergensfritt om $div\left(\bar{F}\right)=\nabla\cdot\bar{F}=0$

$\bar{F}$ är rotationsfritt om $rot\left(\bar{F}\right)=\nabla\times\bar{F}=0$

<u>OBS:</u>

$rot\left(\bar{F}\right)=0 \overset{lokalt}{\Leftrightarrow} \bar{F}$ är konservativt, dvs $\bar{F}=\nabla\varphi$

$div\left(\bar{F}\right)=0 \overset{lokalt}{\Leftrightarrow}$ det finns något $\bar{G}$ sådan att $rot\left(\bar{G}\right)=\bar{F}$

om $\bar{F}=rot\left(\bar{G}\right)$ är $\bar{G}$ en av flera vektorpotentialer till $\bar{F}$

Divergenssatsen/ Gauss sats:

Låt D vara en kropp i $\mathbb{R}^3$ och S vara dennes randyta

samt $\bar{n}$ är ett utåtriktande enhetsnormalfält

$\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ett vektorfält $\bar{F}=\left(F_1,F_2,F_3\right)$

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \bar{F}\cdot\bar{n}dS=\iiint_D div\left(\bar{F}\right)dV=\iiint_D\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dV}$$

<u>i 2D</u>

$\bar{G}=\left(G_1,G_2\right)$

$$\boxed{\oint_c \bar{G}\cdot\bar{n}dS=\iint_D div\left(\bar{G}\right)dA=\iint_D\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial y}\right)dA}$$

Greens sats:

Låt R vara ett reguljärt, sammanhängande område i $\mathbb{R}^2$

som innesluts av en positivt orienterad randkurva c

$\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ett vektorfält $\bar{F}=\left(F_1,F_2\right)$

$$\boxed{\oint_c \overbrace{\bar{F}\cdot d\bar{r}}^{\bar{F}\left(\bar{\gamma}(t)\right)\cdot\bar{\gamma}'(t)dt}=\iint_R rot\left(\bar{F}\right)\cdot\left(0,0,1\right)dA=\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA}$$

Areaberäkning med Greens sats:

Varje $\bar{F}$ som uppfyller $rot(\bar{F}) = (0,0,1) \Leftrightarrow \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 1$

kan användas för att beräkna arean av ett område D ty

$$\boxed{\oint_{\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dA = \iint_D 1 \, dA = area(D)}$$

Vanliga val av $\bar{F}$:

$$\bar{F} = (0, x), \quad \bar{F} = (-y, 0), \quad \bar{F} = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

Stokes sats:

Låt S vara en glatt, positivt orienterad yta i $\mathbb{R}^3$ med $\bar{n}$ dess utåtpekande normalfält och c dess randkurva med samma orientering

För vektorfältet $\bar{F}$ på S gäller då

$$\boxed{\oint_c \overbrace{\bar{F} \cdot d\bar{r}}^{\bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt} = \iint_S rot(\bar{F}) \cdot \bar{n} dS}$$

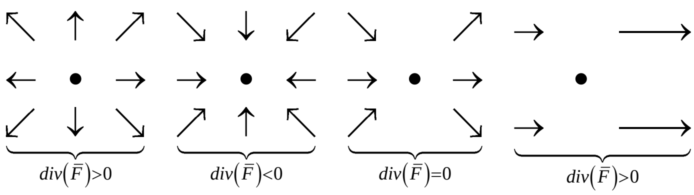
<u>OBS:</u>

Om $\bar{F}$ är konservativt är $rot(\bar{F}) = 0 \Rightarrow \oint_c \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_S \underbrace{rot(\bar{F})}_{=0} \cdot \bar{n} dS = 0$

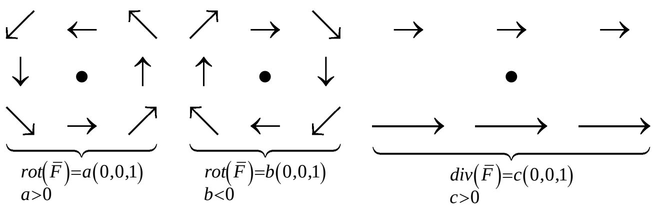
Extra:

Tumregel för att se en hur en kurva c är orienterad är att vandra längst randen i kurvans riktning. Om dess inneslutande område är på vänster sida är den positivt orienterad.

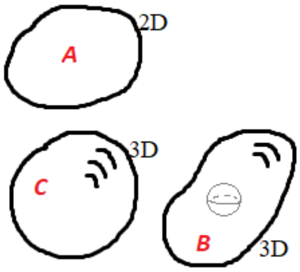
<u>Divergens av ett flöde</u>



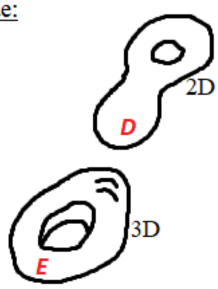
<u>Rotation av ett flöde</u>



Enkelt sammanhängande område:



Icke-Enkelt sammanhängande område:



Icke sammanhängande områden: