EGENSKAPER HOS DUBBELINTEGRALER.

Vi antar att f och g ar **begränsade** och **integrerbara** funktioner på givna mätbara (kvadrerbara) områden och att a, b ar konstanter.
Då gäller:

E1. $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$ om arean(D) =0 (dvs. om D är en nollmängd)

E2i. $\iint_D 1\, dxdy = \boldsymbol{arean(D)}$

E2ii. $\iint_D a\, dxdy = a \cdot \boldsymbol{arean(D)}$

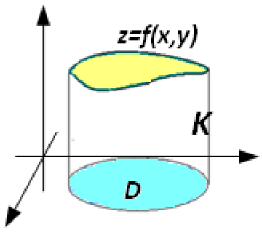
E3. Om $f(x,y) \le 0$ då är $\iint_D f(x,y)dxdy \le 0$

E4i. Om $f(x,y) \ge 0$ då är $\iint_D f(x,y)dxdy \ge 0$

I detta fall (alltså endast om $f(x,y)$ är en **icke-negativ funktion**)

gäller

$\boldsymbol{Volymen(K)} = \iint_D f(x,y)dxdy$



där $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \ 0 \le z \le f(x,y)\}$ d.v.s. K består av punkter som ligger mellan definitionsmängden D och ytan $z = f(x,y)$ (se bilden ovan).

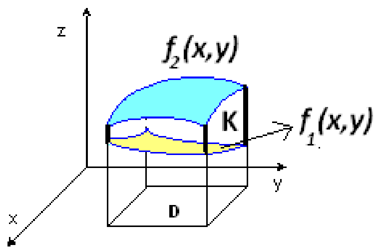
E4ii. Om kroppen K består av punkter som ligger ovanpå D mellan två ytor

$f_1(x,y)$ och $f_2(x,y)$ där $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$ dvs

$K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\quad f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$

då gäller

$Volymen(K) = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy$



E5. (monotonicitet)

Om $f(x,y) \le g(x,y)$ för alla $(x,y) \in D$ då är $\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$

E6.

$|\iint_D f(x,y)dxdy| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$

E7. (additivitet)

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \quad om\ D_1\ och\ D_2\ är\ disjunkta.$$

E8. (linearitet)

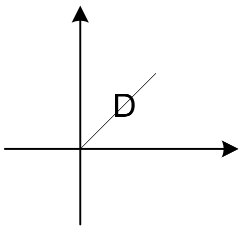
$$\iint_D (af(x,y) + bg(x,y))dxdy = a\iint_D f(x,y)\,dxdy + b\iint_D g(x,y)dxdy$$

Uppgift 1. Bestäm värdet av integralen

a) $\iint_D \sin(x^2 + 3y^2)dxdy$ där D är sträckan mellan punkterna A(0.0) och B(1,1).

b) $\iint_D e^{(5x^2+3y^2)}dxdy$ där D är cirkellinjen {(x,y) , $x^2 + y^2 = 1$}. (Lägg märke till att D består av de punkter som ligger på cirkellinjen $x^2 + y^2 = 1$ och **inte** på hela cirkelskivan. Därmed är arean(D)=0)

Lösning: a)



Eftersom arean(D)=0 har vi, enligt egenskapen **E1** att $\iint_D \sin(x^2 + 3y^2)dxdy = 0$.

b) $\iint_D e^{(5x^2+3y^2)}dxdy = 0$ eftersom arean(D) =0

Uppgift 2. Bestäm och rita en integrationsmängd D så att integralen

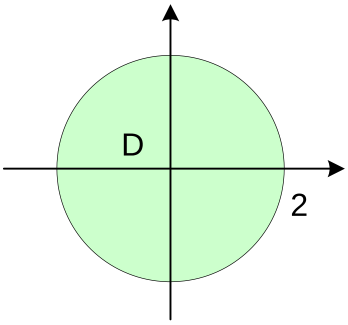
$\iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ blir störst. (Du behöver inte beräkna integralen.)

Tips. Använd egenskaper E3, E4 och E7.

Lösning: Vi väljer det största område där integranden $4 - x^2 - y^2 \geq 0$.

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$

Alltså väljer vi D = cirkeln som definieras av $x^2 + y^2 \leq 4$.



Förklaring:

Låt E vara ett godtyckligt integrationsområde och $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.

Vi ska visa att

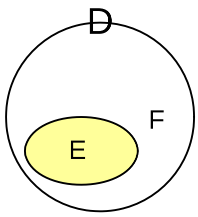
$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_E f(x,y)dxdy$$

i) Först antar vi att E är en delmängd av D.

Då gäller D=E ∪ F (där F = D \ E se nedanstående figur)

och , enligt **E7,**

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy + \iint_F f(x,y)dxdy$$



Eftersom $f(x,y) \geq 0$ på D är alla ovanstående integraler icke-negativa (egenskap **E4)**

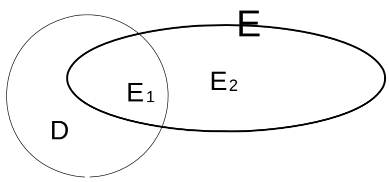
och därför är

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_E f(x,y)dxdy$$

ii) Allmänt fall. Låt E vara ett godtyckligt integrationsområde.

och $E_1 = E \cap D$, $E_2 = E \backslash E_1$

Då är $E = E_1 U E_2$ (se figuren) och



$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy$$

där $f(x,y) \geq 0$ om (x,y) ligger i E_1 och

$f(x,y) \leq 0 \ om\ (x,y)\ ligger\ i\ E_2$.

Därför $\iint_{E_1} f(x,y)dxdy \ \geq\ 0$ och $\iint_{E_2} f(x,y)dxdy \leq\ 0$ som medför att

$$\iint_E f(x,y)dxdy \ \leq \iint_{E_1} f(x,y)dxdy \ \leq\ (enligt\ i)\ \leq \iint_D f(x,y)dxdy$$

Vi har därmed visat att $\iint_D\ f(x,y)dxdy \geq \iint_E\ f(x,y)dxdy$ för ett godtyckligt integrationsområde E.

Alltså $\iint_D\ f(x,y)dxdy$ är störst om vi väljer D så att D består av de punkter som satisfierar olikheten

$$\boldsymbol{f(x,y) \geq 0}$$

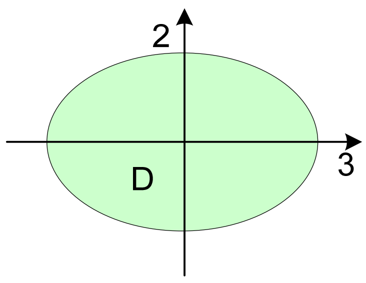
Anmärkning. Ovanstående lösning är inte entydig. Om K är en mängd som har arean =0 (så kallade nollmängd)

och $D' = D \setminus K$ (eller $D' = D \cup K$) så har dubbelintegral över D' samma värde som dubbelintegral över D.

Uppgift 3. Bestäm och rita en integrationsmängd D så att integralen. $\iint_D\ (1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})dxdy$ blir störst. (Du behöver inte beräkna integralen.)

Svar: $1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1$

dvs D är det elliptiskt område som definieras av $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1$. (Samma förklaring som i Uppgift 2.)



Uppgift 3. a) Bestäm och rita en integrationsmängd D som ligger inuti kvadraten K

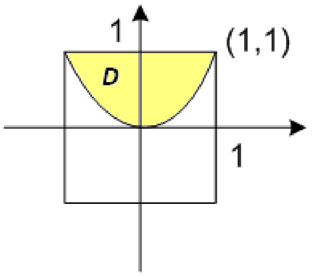
$$-1 \leq x \leq 1, \qquad -1 \leq y \leq 1$$

så att integralen $\iint_D\ (y-x^2)dxdy$ blir störst.

b) Beräkna integralen för detta D.

Svar a) D består av de punkter som ligger i kvadraten K och som satisfierar

$y - x^2 \geq 0$ eller $y \geq x^2$ (Samma förklaring som i Uppgift 2.)



b)

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (y - x^2) dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2} - x^2 y \right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right] dx = \frac{8}{15}$$

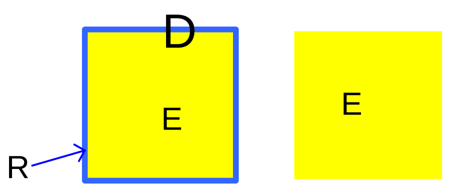
Uppgift 4. Om vi vet att $\iint_D f(x,y)dxdy = 38$ där **D** är (sluten) kvadrat $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$

bestäm $\iint_E f(x,y)dxdy$ då **E** definieras av

a) $0 < x < 2,\ \ 0 < y < 2$ (öppen mängd),

b) $0 \leq x < 2,\ \ 0 \leq y < 2$ (varken öppen eller sluten mängd),

Lösning a) Skillnaden mellan mängderna D och E består av randpunkter som vi betecknar med R dvs R = D \ E. Då är arean(R)=0 och därför $\iint_R f(x,y)dxdy = 0$.



D = E ∪ R, arean R =0.

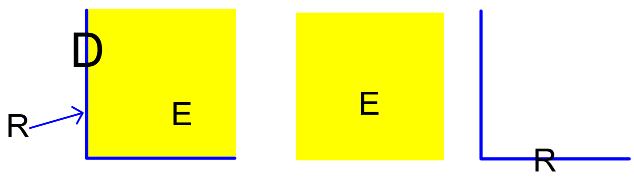
Vi har

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy + \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy + 0 = \iint_E f(x,y)dxdy$$

Alltså $\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy = 38$ (enligt antagande)

Svar a) 38

b)



D = E ∪ R, arean R =0.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy + \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy + 0 = \iint_E f(x,y)dxdy$$

Alltså $\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy = 38$ (enligt antagande)

Svar b) 38

Uppgift 5. Beräkna volymen av den kropp som definieras av

a) $K = \{(x,y,z): \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le e^{3x+2y+1}\}$

b) $K = \{(x,y,z): \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad e^x + 2x + 3y + 1 \le z \le e^x + 2x + 3y + 5\}$

Svar:

a) Funktionen $z = f(x,y) = e^{3x+2y+1}$ är icke-negativ på D. Därför

$Volymen(K) =$

$= \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 e^{3x+2y+1} dy = \cdots = \frac{1}{6}\mathrm{e} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^5 - \frac{1}{6}\mathrm{e}^4 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^8$

b) Vi betecknar $f_1(x,y) = e^x + 2x + 3y + 1, \quad f_2(x,y) = e^x + 2x + 3y + 5$

Kroppen K ligger mellan två ytor $f_1(x,y)$ och $f_2(x,y)$ där $f_1(x,y) < f_2(x,y)$ på D.

$$Volymen(K) = \iint_D [\, f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy = \iint_D 4dxdy = 4\, Arean(D) \;= 4 \cdot 2 = 8$$

Ovanstående egenskaper kan enkelt bevisas med hjälp av dubbelintegralens definition (Riemannsummor). Som ett exempel bevisar vi E2 i nedanstående uppgift.

Uppgift 6. Bevisa ovanstående egenskap **E2:**

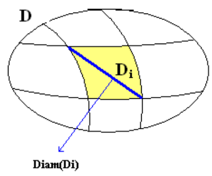
$\iint_D \; 1\; dxdy = \boldsymbol{arean(D)}$.

Bevis:

Enligt antagande är $f(x,y) \;=\; 1$ för $(x,y) \;\in\; D$. Vi delar integrationsområde (definitionsområde) D i ändligt antal mätbara, ej överlappande, delmängder D_i och i varje D_i väljer en godtycklig punkt (x_i, y_i).

För tillhörande Riemannsumma gäller

$\sum_i f(x_i, y_i)Arean(D_i) = \sum_i 1 \cdot Arean(D_i) = \; \sum_i Arean(D_i) = \;\; Arean(D)$



Alltså har varje Riemannsumma konstant värde = Arean(D).

Därför dubbelintegral har också samma värde Arean(D).

$$\iint_D f(x,y)\; dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\max_i diam(D_i)\to 0} \sum_i f(x_i, y_i)Arean(D_i)$$

$\lim_{\max_i diam(D_i)\to 0} \sum_i 1 Arean(D_i) = \lim \text{Arean(D)} = \text{arean(D)}$, vad skulle bevisas .