# TAYLORS FORMEL FÖR FUNKTIONER AV FLERA VARIABLER . APPROXIMATIONER. FELANALYS.

-----------------------------------------------------------------------------------------

**Taylors formel används bl. a. vid i) numeriska beräkningar ii) felanalys iii) optimering och iv) härledningar inom olika tekniska och matematiska områden.**

**A) Taylors formel** av första ordningen

Låt $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ vara en funktion av n variabler som har kontinuerliga derivator av andra ordningen i en öppen omgivning *D* av punkten $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Anta att $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ är en punkt i D sådan att sträckan AP ligger i *D*.

**Taylors formel** (eller **Taylors utveckling**) av första ordningen kring punkten A är:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$= f(a_1, a_2, ..., a_n) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) + (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(A) + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(A) + R$$

-----------------------------------------------------------------------------------------

Uttrycket på högersidan, utan R , dvs

$$T(x_1, x_2, ..., x_n) = f(a_1, a_2, ..., a_n) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) + (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(A) + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

kallas **Taylorpolynom (av första ordningen)**.

Exempelvis, Taylorpolynomet av första ordningen kring punkten $A = (a, b, c)$ för funktionen $f = f(x, y, z)$ är

$$T(x, y, z) = f(a,b,c) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + (z-c)\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)$$

-----------------------------------------------------------------------------------------

För **resttermen** R har vi följande (symboliska) uttryck:

$$R = \frac{1}{2!}d^2 f(C) = \frac{1}{2!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(C)$$

där $C = (a_1 + \theta(x_1 - a_1), \quad \cdots \quad , \quad a_n + \theta(x_n - a_n)), \quad 0 < \theta < 1.$

Eftersom derivator av andra ordningen i närheten av punkten A enligt antagande är kontinuerliga, kan resttermen R i Taylorformeln skrivas som

$R = ((x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2) B(x_1, x_2, ..., x_n)$ där $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ är begränsad nära punkten A. Därmed går R mot 0 om $(x_1, x_2, ..., x_n)$ går mot $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Med andra ord

$$\boxed{f(x_1, x_2, ..., x_n) \approx T(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

Dvs. funktionen $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kan **approximeras** med sitt Taylorpolynom (som är generellt enklare än själva funktionen). Felet vid denna approximation är resttermen R.

### B) Taylors formel av andra ordningen för en funktion av två variabler kring punkten *(a,b)* .

Låt $f = f(x, y)$ vara en funktion som har kontinuerliga derivator av tredje ordningen i närheten av punkten (*a,b*).

**Taylors formel** av andra ordningen kring (a,b) är:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}[(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)] +$$

$$+\frac{1}{2!}[[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)] + R.$$

Resttermen R kan skrivas som

$R = \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}\right)^3 B(x, y)$ där $B(x, y)$ är begränsad nära punkten (a,b)

Om vi betecknar $x = a + h$, $y = b + k$ och därför $x - a = h$, $y - b = k$ kan vi skriva samma formel på följande sätt:

$$f(a+h, b+k) =$$

$$f(a, b) + \frac{1}{1!}[h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)] + \frac{1}{2!}[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)] + R$$

Resttermen R kan skrivas som

$R = \left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3 B(h, k)$ där $B(h, k)$ är begränsad nära (0,0)

-----------------------------------------------------------------------------------------

Uttrycket på högersidan utan R kallas **Taylorpolynom** (av andra ordningen) i potenser av $(x-a)$ och $(y-b)$ :

$$T(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}[(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)] +$$

$$+\frac{1}{2!}[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)]$$

eller i potenser av *h* och *k*:

$$T(h,k)= f(a,b)+\frac{1}{1!}[h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]+\frac{1}{2!}[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)]$$

### C) Taylors formel av andra ordningen för en funktion i tre variabler $f = f(x,y,z)$ kring punkten *(a,b,c)* är

$$f(a+h,b+k,c+l)= f(a,b,c)+\frac{1}{1!}[hf_x'(a,b,c)+kf_y'(a,b,c)+lf_z'(a,b,c)]+$$

$$\frac{1}{2!}[h^2 f_{xx}''(a,b,c)+k^2 f_{yy}''(a,b,c)+l^2 f_{zz}''(a,b,c)$$

$$+2hkf_{xy}''(a,b,c)+2hlf_{xz}''(a,b,c)+2klf_{yz}''(a,b,c)]+R$$

Resttermen R kan skrivas som

$R=\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)^3 B(h,k,l)$ där $B(h,k,l)$ är begränsad nära (0,0,0)

### D) TAYLORS FORMEL AV ORDNING K FÖR FUNKTIONER AV N VARIABLER

Låt $f = f(x_1,x_2,...,x_n)$ vara en funktion av *n* variabler som har kontinuerliga derivator av ordning (k+1) i en omgivning av punkten $A=(a_1,a_2,...,a_n)$. Beteckna $P=(x_1,x_2,...,x_n)$ och $\Delta x_1 = x_1-a_1,\cdots,\Delta x_n = x_n-a_n$ .

**Taylors formel** (eller **Taylors utveckling**) av ordning *k* kring punkten A är:

$$\boxed{f(P)= f(A)+\frac{1}{1!}df(A)+\frac{1}{2!}d^2 f(A)+\cdots\frac{1}{k!}d^k f(A)+R}$$

Differentialer $df(A)$,...., $d^k f(A)$ i ovanstående formel kan beräknas med hjälp av följande ***symboliska*** uttryck:

$$df(A)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(A)\cdot\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\cdot\Delta x_n$$

$$d^2 f(A)=\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(A) \qquad \left(=\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(A)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta x_j\right)$$

...

$$d^k f(A)=\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(A)$$

För resttermen R gäller

$$R=\frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(C)=\frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k+1} f(C)$$

där $C=(a_1+\theta(x_1-a_1), \quad \cdots \quad , \quad a_n+\theta(x_n-a_n))$, $\quad 0<\theta<1$.

**ÖVNINGAR:**

**Uppgift 1**. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom kring punkten (a,b)=(0,0) till funktionen

$$f(x,y)=7+e^{x^2+y^2}$$

Ange resultat i potenser av

i) h,k ii) (x-a) , (y-b)

**Lösning:**

$$f(0,0)=8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2e^{x^2+y^2}+4x^2e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e^{x^2+y^2}+4y^2e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2$$

Substitution i ovanstående formel för taylorpolynom av andra ordningen ger

$$T(h,k)=8+\frac{1}{1!}[h\cdot 0+k\cdot 0]+\frac{1}{2!}[h^2\cdot 2+2hk\cdot 0+k^2\cdot 2]$$

dvs

$$T(h,k)=8+h^2+k^2$$

**Svar :**

i) $T=8+h^2+k^2$

ii) $T=8+(x-0)^2+(y-0)^2=8+x^2+y^2$

**Uppgift 2**. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom kring punkten (a,b)=(1,1) till funktionen

$$f(x,y) = x + y + xy + y^3 + x^4$$

Ange resultat i potenser av

i) h,k ii) (x-a) , (y-b)

**Lösning:**

$$f(1,1) = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y + 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 6;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x + 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6$$

Substitution i ovanstående formel för taylorpolynom av andra ordningen ger

$$T(h,k) = 5 + 6h + 5k + \frac{1}{2}[12h^2 + 2 \cdot 1 \cdot hk + 6k^2]$$

**Svar** i) $T(h,k) = 5 + 6h + 5k + 6h^2 + hk + 3k^2]$

ii) $T(x,y) = 5 + 6(x-1) + 5(y-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)(y-1) + 3(y-1)^2]$

**Låt** $f = f(x,y,z)$ är en $C^3$ funktion i den öppna mängden D som innehåller punkten (*a,b,c*).

**Uppgift 3.**

Taylorutveckla funktionen $f(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$ kring punkten (0,0,0) t o m andragradstermer.

**Svar:** $f(0+h, 0+k, 0+l) = h^2 + k^2 + l^2 + R$

Resttermen $R=\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)^3 B(h,k,l)$ där $B(h,k,l)$ är begränsad nära (0,0,0).

===========================================================

## APPROXIMATIV BERÄKNING

**Uppgift 4.**

Betrakta funktionen $z=f(r,h)=3+h\cdot\ln(h^2+r^2-4)$ .

**a)** Bestäm Taylorpolynomet av första ordningen kring punkten P(1,2) (dvs $r=1, h=2$).

**b)** Beräkna approximativt $f(1.2,\ 2.1)$ och jämför med det värde som du får med en miniräknare.

(Tips: Om du tycker att det är enklare att hantera uttryck då kan du byta beteckning till $z=f(x,y)=3+x\cdot\ln(y^2+x^2-4)$ )

**Lösning:**

$$f(1,\ 2)=3+2\ln 1=3$$

$$f_r'=\frac{2hr}{h^2+r^2-4}\Rightarrow f_r'(1,2)=\frac{4}{1}=4,$$

$$f_h'=\ln(h^2+r^2-4)+h\frac{2h}{h^2+r^2-4}\Rightarrow f_r'(1,2)=\ln 1+\frac{8}{1}=8$$

Taylorpolynomet är $T=3+4(r-1)+8(h-2)$

( eller kortare, $T=4r+8h-17$ )

**b)** Vi approximativt beräknar $f(1.2,\ 2.1)$ genom att substituera r=1.2, h=2.1 i polynomet $T=3+4(r-1)+8(h-2)$:

$$f(r,h)\approx 3+4(r-1)+8(h-2)$$

$f(1.2,\ 2.1)\approx 3+0.8+0.8=4.6$

**Svar.** a) $T=3+4(r-1)+8(h-2)$

b) $f(1.2,\ 2.1)\approx 4.6$ (miniräknaren ger $f(1.2,\ 2.1)=4.2918898$).

**Anmärkning:** Bättre approximation får vi om vi använder Taylorpolynom av högre grad.

==========================================================

## FELANALYS

Låt $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ vara en funktion av n variabler som vi vill beräkna i punkten P= $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Antag att man genom mätning känner närmevärden $a_1, a_2, ..., a_n$ till $x_1, x_2, ..., x_n$. Då är $x_1 = a_1 + \Delta x_1, \quad \cdots \quad , \quad x_n = a_n + \Delta x_n$,
där $\Delta x_1 = x_1 - a_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - a_n$ är (i allmänt okända ) felen i mätningarna. Substitution av mätvärdena $a_1, a_2, ..., a_n$ i funktionen ger resultat $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ som är ett närmevärde till det exakta värdet $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

För att bestämma tillförliktighet vid beräkningen uppskattar vi felet
$\Delta f = f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Från Taylorformeln (av första ordningen) kring punkten A= $(a_1, a_2, ..., a_n)$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(a_1, a_2, ..., a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot \Delta x_n + R \qquad (**)$$

får vi

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot \Delta x_n$$

och (genom att använda absolutbeloppet på varje leden)

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot \Delta x_n \right|$$

Med hjälp av triangelolikheten för absolutbeloppet får vi så kallade

**felfortplantningsformeln**:

$$|\Delta f| \quad \lesssim \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\right| \cdot |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(A)\right| \cdot |\Delta x_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right| \cdot |\Delta x_n| \qquad (***)$$

**Anmärkning:** Tecknet $\lesssim$ utläses " approximativt mindre än".

**Uppgift 5.** Vi vill beräkna värdet av funktionen $f(x, y, z) = x^3 y z^{-1/5}$ i punkten P=(x,y,z).
Mätningar av x, y och z avrundas till hela tal och ger

$x = 5 \pm 0.5$, $y = 10 \pm 0.5$ och $z = 32 \pm 0.5$.
( Detta skrivsätt betyder att vi har mätvärdena $x \approx 5$, $y \approx 10$ och $z \approx 32$ med motsvarande

feluppskattningarna $|\Delta x| \leq 0.5$, $|\Delta y| \leq 0.5$ och $|\Delta z| \leq 0.5$.)
Bestäm funktionens värde i punkten A=(5,10,32) och uppskatta felet.

**Lösning:**

Funktionens värde i punkten A=(5,10,32) är

$$f(A) = f(5,10,32) = 5^3 \cdot 10 \cdot 32^{-1/5} = 625.$$

Vi kan därmed skriva $f(P) \approx f(A) = 625$.

Vad kan vi säga om tillförlitlighet för vår approximation?

Partiella derivator av första ordningen i punkten A:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 3x^2 y z^{-1/5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} f(5,10,32) = 375,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = x^3 z^{-1/5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} f(5,10,32) = \frac{125}{2} = 62.5,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = -\frac{1}{5} x^3 y z^{-6/5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} f(5,10,32) = -\frac{125}{32} = -3.90625.$$

Felfortplattningsformeln ger

$$|\Delta f| \quad \underset{\sim}{<} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(A)\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right| \cdot |\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}(A)\right| \cdot |\Delta z|$$

( notera absolutbeloppet runt varje term)

$$|\Delta f| \quad \underset{\sim}{<} \quad 375 \cdot 0.5 + 62.5 \cdot 0.5 + 3.90625 \cdot 0.5 = 220.703125$$

Alltså gäller feluppskattningen $|\Delta f| \quad \underset{\sim}{<} \quad 221$.

Vi kan skriva resultat på följande sätt

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 625 \pm 221$$

dvs det exakta värdet av $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ligger (approximativt) mellan $625 - 221 = 404$ och $625 + 221 = 846$ .

**Anmärkning 1.** Felgränsen (221) i vårt fall är väldigt stort i jämförelse med funktionens approximativa värde (625). (För att förbättra noggrannhet kan man försöka göra mätningar med flera korrekta decimaler.)

**Anmärkning 2.** För en så enkel funktion som $f(x,y,z)=x^3yz^{-1/5}=\frac{x^3y}{z^{1/5}}$, som **växer med avseende på x och y** och **avtar med avseende på z**-variabeln, kan vi uppskatta felet direkt, med hjälp av elementär matematik. Enligt antagandet $x=5\pm 0.5$, $y=10\pm 0.5$ och $z=32\pm 0.5$ har vi

$4.5\le x\le 5.5$, $9.5\le y\le 10.5$ och $31.5\le z\le 32.5$.

Därför blir funktionen störst om $x=5.5$ (f växer m.a.p. x), $y=10.5$ (f växer m.a.p. y)

och $z=31.5$ (f avtar m.a.p. z):

$f_{\max}=5.5^3\cdot 10.5\cdot 31.5^{-1/5}$ = 876.22.

Funktionen blir minst om $x=4.5$, $y=9.5$ och $z=32.5$ (ju större z desto mindre f):

$f_{\min}=4.5^3\cdot 9.5\cdot 32.5^{-1/5}$ = 431.50.

Därmed ser vi (utan att använda felfortplattningsformeln) att det exakta värdet $f(x,y,z)$ ligger mellan 431 och 877. (För säkerhets skull avrundar vi intervallets övre gräns uppåt och nedre gräns nedåt.)