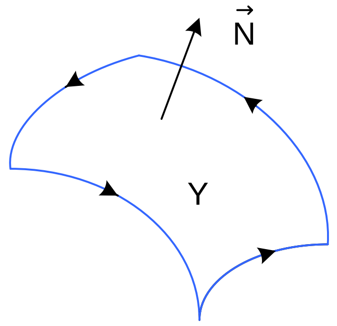
STOKES' SATS



Låt $\vec{F} = (P, Q, R)$ vara ett C^1 vektorfält definierad i ett öppet område Ω. Låt Y vara ett orienterad ytstycke i Ω med randen ∂Y som består av en eller flera C^1 kurvor .

Då gäller

$$\boxed{\int_{\partial Y} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{Y} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS \qquad (*)}$$

där $\hat{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ är ytans enhetsnormalvektor orienterad i enlighet med randkurvans orientation

och $rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})$

Alternativ beteckning för Stokes formel (*) : I några böcker betecknas $\hat{n} dS$ som $d\vec{S}$ och därmed

$$\int_{\partial Y} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{Y} rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} \qquad (**)$$

Anmärkning: Med hjälp av Stokes formel ka vi beräkna en kurvintegral med hjälp av en flödesintegral. I de flesta fall är det enklastatt beräkna kurvintegralen $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ direkt genom att parametrisera kurvan C. Stokes formel kan vara användbar om kurvan definieras som skärningskurvan mellan två ytor och dessutom $rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$ ger ett enkelt uttryck, som i nedanstående exempel.

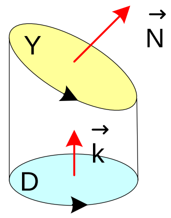
Uppgift 1. Låt C vara skärningskurvan mellan planet $z = 10 - x - y$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$ orienterad så att kurvans projektion i xy-planet är positivt orienterade. Bestäm det arbete som kraftfältet $\vec{F} = (x, x^3, z^3)$ uträttar vid cirkulation runt kurvan C.

Lösning: Vi ska använda Stokes formel $\int_{\partial Y} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{Y} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$.

Först beräknar vi rotationen av fältet $\vec{F}$.

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x^3 & z^3 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(3x^2 - 0) = 3x^2 \vec{k}$$

Alltså $rot(\vec{F}) = (0,0,3x^2)$.



Eftersom kurvan ligger på ytan $z = 10 - x - y$

som är given på explicit form beräknar vi

$\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1,1,1)$.

(Vi riktar $\vec{N}$ uppåt som enhetsvektorn $\vec{k}$ för att få samma orientation för slutna kurvor på ytan Y och kurvor i xy planet)

Eftersom, för ytor på explicit form gäller

$\hat{n}\, dS = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} |\vec{N}|\, dxdy = \vec{N} dxdy$, har vi att

$rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS = rot(\vec{F}) \cdot \vec{N} dxdy$.

Vi beräknar $rot(\vec{F}) \cdot \vec{N} = 3x^2$ och därefter

$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_Y rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$ (flödesintegral)

$= \iint_D rot(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dxdy =$ (vanlig dubbelintegral, där domän D är cirkeln $x^2 + y^2 \le 1$)

$$\iint_D 3x^2\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 3r^2 \cos^2\theta \cdot r dr = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^1 3r^3 dr = \pi \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

Svar: $\frac{3}{4}\pi$ joule (joule = newtonmeter = wattsekund om kraftfält är given i N och längden i m)

Uppgift 2. Låt C vara skärningskurvan mellan planet $z = 5$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$ orienterad så att kurvans projektion i xy-planet är positivt orienterade. Bestäm det arbete som kraftfältet $\vec{F} = (x^4, 3x + y^2, z^3 + x^2 + y^5)$ uträttar vid cirkulation runt kurvan C.

Lösning:

Först beräknar vi rotationen av fältet $\vec{F}$.

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^4 & 3x + y^2 & z^3 + x^2 + y^5 \end{vmatrix} = 5y^4\vec{i} - 2x\vec{j} + 3\vec{k}$$

Alltså $rot(\vec{F}) = (5y^4, -2x, 3)$.

Vi beräknar $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0,0,1)$. (Vi riktar $\vec{N}$ uppåt som enhetsvektorn $\vec{k}$ för att få samma orientation för slutna kurvor på ytan Y och kurvor i xy planet)

Eftersom, för ytor på explicit form gäller

$\hat{n}\, dS = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} |\vec{N}|\, dxdy = \vec{N} dxdy$, har vi att

$$rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS = rot(\vec{F}) \cdot \vec{N} dxdy .$$

Vi beräknar skalärprodukten $rot(\vec{F}) \cdot \vec{N} = 3$ och därefter

$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_Y rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$ (flödesintegral)

$= \iint_D rot(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dxdy =$ (vanlig dubbelintegral, där domän D är cirkeln $x^2 + y^2 \le 1$)

$$\iint_D 3\, dxdy = 3\text{arean(D)} = 3 \cdot 2^2 \pi = 12\pi$$

Svar: 12π joule (joule = newtonmeter = wattsekund om kraftfält är given i N och längden i m)

Uppgift 3. Låt C vara skärningskurvan mellan planet $z = 5 + x^2 + 2y^2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$ orienterad så att kurvans projektion i xy-planet är positivt orienterade. Bestäm det arbete som kraftfältet $\vec{F} = (x^4, y^2, z^3)$ uträttar vid cirkulation runt kurvan C.

Svar 0 (eftersom $rot(\vec{F}) = (0,0,0)$)