SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 5

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion: Avsnitt 12.5-12.6

- Linjär approximation och differentierbarhet
- Kedjeregeln i flera variabler
- Partiella differentialkvationer
- funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Tangentplan och linjär approximation

Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ till funktionsytan $z = f(x, y)$ ges av

Tangentplan och linjär approximation

Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ till funktionsytan $z = f(x, y)$ ges av

$$T(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Tangentplan och linjär approximation

Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ till funktionsytan $z = f(x, y)$ ges av

$$T(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

$T(x, y)$ är en **linjära approximation** av f kring (a, b)

Tangentplan och linjär approximation

Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ till funktionsytan $z = f(x, y)$ ges av

$$T(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

$T(x, y)$ är en **linjära approximation** av f kring (a, b)

$$f \approx T, \qquad \text{eller} \qquad f = T + \text{litet fel.}$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

linjär approximation: Exempel

Bestäm en linjär approximation för $f(x, y) = 2x + y^2$

1. i en omgivning av $(a, b) = (0, 0)$,
2. i en omgivning av $(a, b) = (1, 1)$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

linjär approximation: Exempel

Bestäm en linjär approximation för $f(x, y) = 2x + y^2$

1. i en omgivning av $(a, b) = (0, 0)$,
2. i en omgivning av $(a, b) = (1, 1)$.

Quiz (här):

1. Visa att för $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ så är $T = f$ överallt.

2. Bestäm tangentplanet då $f(x, y) = -x + 2y^2 + xy$ i punkten $(0, 0)$, samt $(0, 1)$?

3. Bestäm tangentplanet då $f(x, y) = -y^2 + x^3$ i punkten $(0, 0)$, samt $(0, 1)$?

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

linjär approximation som kalkylator

Använd linjär approximation kring $(a, b) = (1, 2)$ för att hitta ett närmevärde till $f(1.2, 1.8)$ då $f(x, y) = y \ln(xy - 1)$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

linjär approximation som kalkylator

Använd linjär approximation kring $(a, b) = (1, 2)$ för att hitta ett närmevärde till $f(1.2, 1.8)$ då $f(x, y) = y \ln(xy - 1)$.

Lösning: Vi har $f(1.2, 1.8) \approx T(1.2, 1.8)$, då

$$T(x, y) = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$$

$$T(1.2, 1.8) = 0 + (0.2)f_x(1, 2) + (-0.2)f_y(1, 2) = 0.4$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

linjär approximation som kalkylator

Använd linjär approximation kring $(a, b) = (1, 2)$ för att hitta ett närmevärde till $f(1.2, 1.8)$ då $f(x, y) = y \ln(xy - 1)$.

Lösning: Vi har $f(1.2, 1.8) \approx T(1.2, 1.8)$, då

$$T(x, y) = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$$

$$T(1.2, 1.8) = 0 + (0.2)f_x(1, 2) + (-0.2)f_y(1, 2) = 0.4$$

Kalkylatorn ger 0.267156. Hmm! Så det finns andra bättre sätt att approximera! Ex.vis approx med högre grad polynom.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Använd linjär approximation kring $(-1, 1)$ för att hitta ett närmevärde till $f(-0.5, 1.3)$ då

$$f(x, y) = e^{x^2 y - 1}.$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Differentierbarhet, $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$:

Differentierbarhet är lite bättre egenskap än deriverbarhet och definieras enligt nedan.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Differentierbarhet, $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$:

Differentierbarhet är lite bättre egenskap än deriverbarhet och definieras enligt nedan.

Definition: Funktionen $f = f(x, y)$ sägs vara differentierbar i en punkt (a, b) i (det inre av) definitionsmängden om det finns en linjär funktion $T(x, y)$ sådan att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Differentierbarhet, $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$:

Differentierbarhet är lite bättre egenskap än deriverbarhet och definieras enligt nedan.

Definition: Funktionen $f = f(x, y)$ sägs vara differentierbar i en punkt (a, b) i (det inre av) definitionsmängden om det finns en linjär funktion $T(x, y)$ sådan att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Om detta gäller så är

$$T(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Differentierbarhet, $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$:

Detta säger att avståndet mellan grafen $z = f(x, y)$ nära punkten (a, b) är mycket mindre än avståndet mellan (x, y) och (a, b). Vi säger då att f är C^1 i (a, b).

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Differentierbarhet, $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$:

Detta säger att avståndet mellan grafen $z = f(x, y)$ nära punkten (a, b) är mycket mindre än avståndet mellan (x, y) och (a, b). Vi säger då att f är C^1 i (a, b).

Faktum: Om f är C^1, vilket betyder att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga, i en omgivning av (a, b), så är f också differentierbar i (a, b).

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vi vill derivera sammansättningen

$$z = f(x(t), y(t)).$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vi vill derivera sammansättningen

$$z = f(x(t), y(t)).$$

Anta att f är C^1 och x och y deriverbara m.a.p. t.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vi vill derivera sammansättningen

$$z = f(x(t), y(t)).$$

Anta att f är C^1 och x och y deriverbara m.a.p. t.
Då har vi: $z_t = f_x x_t + f_y y_t.$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vi vill derivera sammansättningen

$$z = f(x(t), y(t)).$$

Anta att f är C^1 och x och y deriverbara m.a.p. t.
Då har vi: $z_t = f_x x_t + f_y y_t$.

Exempel

$z = f(x, y) = x^2 + \sin y$, samt $(x, y) = (t^2, 3t)$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vi vill derivera sammansättningen

$$z = f(x(t), y(t)).$$

Anta att f är C^1 och x och y deriverbara m.a.p. t.
Då har vi: $z_t = f_x x_t + f_y y_t.$

Exempel

$z = f(x, y) = x^2 + \sin y$, samt $(x, y) = (t^2, 3t)$.
Då är: $x_t = 2t$, $y_t = 3$, samt

Kedjeregeln, i fallet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vi vill derivera sammansättningen

$$z = f(x(t), y(t)).$$

Anta att f är C^1 och x och y deriverbara m.a.p. t.
Då har vi: $z_t = f_x x_t + f_y y_t.$

Exempel

$z = f(x, y) = x^2 + \sin y$, samt $(x, y) = (t^2, 3t)$.
Då är: $x_t = 2t$, $y_t = 3$, samt

$$z_t = 2xx_t + (\cos y)y_t = 2(t^2)(2t) + (\cos 3t)3 = 4t^3 + 3\cos 3t$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Bestäm z_t genom att använda kedjeregeln ovan då $z = f(x, y) = 2xy^2 + e^y$, samt $(x, y) = (3t, t^2 - 1)$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Bestäm z_t genom att använda kedjeregeln ovan då
$z = f(x, y) = 2xy^2 + e^y$, samt $(x, y) = (3t, t^2 - 1)$.

Quiz (utmaning):

Låt $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ vara en kurva i planet.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Bestäm z_t genom att använda kedjeregeln ovan då $z = f(x, y) = 2xy^2 + e^y$, samt $(x, y) = (3t, t^2 - 1)$.

Quiz (utmaning):

Låt $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ vara en kurva i planet. Anta att funktionen $z = g(x, y)$ inte ändrar värde på kurvan $\mathbf{r}(t)$, dvs att den är konstant på kurvan.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Bestäm z_t genom att använda kedjeregeln ovan då $z = f(x, y) = 2xy^2 + e^y$, samt $(x, y) = (3t, t^2 - 1)$.

Quiz (utmaning):

Låt $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ vara en kurva i planet. Anta att funktionen $z = g(x, y)$ inte ändrar värde på kurvan $\mathbf{r}(t)$, dvs att den är konstant på kurvan.

Visa att $z_t = 0$ och tolka detta i termer av $\mathbf{r}'$ och (f_x, f_y)?

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Quiz (här):

Bestäm z_t genom att använda kedjeregeln ovan då $z = f(x, y) = 2xy^2 + e^y$, samt $(x, y) = (3t, t^2 - 1)$.

Quiz (utmaning):

Låt $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ vara en kurva i planet. Anta att funktionen $z = g(x, y)$ inte ändrar värde på kurvan $\mathbf{r}(t)$, dvs att den är konstant på kurvan.

Visa att $z_t = 0$ och tolka detta i termer av $\mathbf{r}'$ och (f_x, f_y)?

Obs: (f_x, f_y) kallas gradienten av f. Betecknas med ∇f

Minitenta 1: (liknar 2011-10-20 nr 8)

Anta att f uppfyller differentialekvationen

$$f_x - 3f_y = 0$$

i hela planet. Visa att f är konstant på varje linje som är parallell med linjen $L: \; 3x + y = 1$.

Minitenta 1: (liknar 2011-10-20 nr 8)

Anta att f uppfyller differentialekvationen

$$f_x - 3f_y = 0$$

i hela planet. Visa att f är konstant på varje linje som är parallell med linjen $L: \; 3x + y = 1$.

Lösning: Linjer parallella med L ges av vad?

Minitenta 1: (liknar 2011-10-20 nr 8)

Anta att f uppfyller differentialekvationen

$$f_x - 3f_y = 0$$

i hela planet. Visa att f är konstant på varje linje som är parallell med linjen $L: \ 3x + y = 1$.

Lösning: Linjer parallella med L ges av vad? De ges av $L_p: \ 3x + y = p$, för $p \in \mathbb{R}$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Minitenta 1: (liknar 2011-10-20 nr 8)

Anta att f uppfyller differentialekvationen

$$f_x - 3f_y = 0$$

i hela planet. Visa att f är konstant på varje linje som är parallell med linjen $L: \ 3x + y = 1$.

Lösning: Linjer parallella med L ges av vad? De ges av $L_p: \ 3x + y = p$, för $p \in \mathbb{R}$. Parametrisering av L_p kan ges genom $(x, y) = (t, p - 3t)$.

Minitenta 1: (liknar 2011-10-20 nr 8)

Anta att f uppfyller differentialekvationen

$$f_x - 3f_y = 0$$

i hela planet. Visa att f är konstant på varje linje som är parallell med linjen $L: \ 3x + y = 1$.

Lösning: Linjer parallella med L ges av vad? De ges av $L_p: \ 3x + y = p$, för $p \in \mathbb{R}$. Parametrisering av L_p kan ges genom $(x, y) = (t, p - 3t)$. Derivering m.a.p. t (dvs längs linjen L_p) ger

$$\frac{d}{dt} f(x, y)) = f_x x' + f_y y' = f_x - 3f_y = 0.$$

Minitenta 1: (liknar 2011-10-20 nr 8)

Anta att f uppfyller differentialekvationen

$$f_x - 3f_y = 0$$

i hela planet. Visa att f är konstant på varje linje som är parallell med linjen $L:\ 3x + y = 1$.

Lösning: Linjer parallella med L ges av vad? De ges av $L_p:\ 3x + y = p$, för $p \in \mathbb{R}$. Parametrisering av L_p kan ges genom $(x, y) = (t, p - 3t)$. Derivering m.a.p. t (dvs längs linjen L_p) ger

$$\frac{d}{dt} f(x, y)) = f_x x' + f_y y' = f_x - 3f_y = 0.$$

Dvs f är konstant längs L_p för varje p.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Kedjeregeln: Fallet $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sats: Låt $z = f(x(s,t), y(s,t))$, där f är differentierbar och $\partial_t x$, $\partial_s x$, $\partial_t y$, $\partial_s y$ existerar. Då gäller det att:

$$z_s = f_x x_s + f_y y_s, \qquad z_t = f_x x_t + f_y y_t,$$

Kedjeregeln: Fallet $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sats: Låt $z = f(x(s,t), y(s,t))$, där f är differentierbar och $\partial_t x$, $\partial_s x$, $\partial_t y$, $\partial_s y$ existerar. Då gäller det att:

$$z_s = f_x x_s + f_y y_s, \qquad z_t = f_x x_t + f_y y_t,$$

Bevis: Se bokens sats 5 i kap 12.6

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Jacobimatris, funktionalmatris, total derivata:

Om $\mathbf{f}$ är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ så kallas matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen, funktionalmatrisen eller totala derivatan till $\mathbf{f}$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Jacobimatris, funktionalmatris, total derivata:

Om **f** är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ så kallas matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen, funktionalmatrisen eller totala derivatan till **f**.

Vanliga beteckningar är $J_{\mathbf{f}}$, $D\mathbf{f}$ och $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Jacobimatris, funktionalmatris, total derivata:

Om $\mathbf{f}$ är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ så kallas matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen, funktionalmatrisen eller totala derivatan till $\mathbf{f}$.

Vanliga beteckningar är $J_{\mathbf{f}}$, $D\mathbf{f}$ och $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$

Quiz (här): Skriv upp Jacobimatrisen till $f(x, y) = x^2 y$ i $(1, 2)$.

Exempel:

För $\mathbf{f} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ bestäm $\mathbf{f}'$.

Lösning: Vi har

$$\mathbf{f}' = \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Kedjeregeln, allmänna fallet:

Om $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ så är $\mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Kedjeregeln, allmänna fallet:

Om $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ så är $\mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$

Idén bakom linjär approximation

Ändringen i funktionen är ungefär derivatan gånger ändringen i variabeln.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Kedjeregeln, allmänna fallet:

Om $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ så är $\mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$

Idén bakom linjär approximation

Ändringen i funktionen är ungefär derivatan gånger ändringen i variabeln.

Geometrisk Tolkning:

Se: http://demonstrations.wolfram.com/2DJacobian/

http://demonstrations.wolfram.com/SurfaceParametrizationsAndTheirJacobians/

Minitenta 2: (2015-08-20)

Låt $f(x, y)$ vara differentierbar och sätt

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Använd kedjeregeln för att beräkna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}),$$

då vi vet att

$$\frac{\partial g}{\partial r}(2, \pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(2, \pi/3) = 9.$$

Minitenta 3:

Fråga 1. Om $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, vad säger linjär approximation om den här funktionen nära punkten $t = 0$? Vad ger den linjära approximationen för närmevärde till $\mathbf{r}(0.1)$?

Fråga 2. Om $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 \ln y, xy)$, vad säger linjär approximation om den här funktionen nära punkten $(x, y) = (2, 1)$? Vad ger den linjära approximationen för närmevärde till $\mathbf{f}(2.1, 1.2)$?

Läxa till nästa gån

Gör detta:

1. Uppgifter i boken:
   a. kap 12.3 uppg **5** , 7, **13**, 23
   b. kap 12.4 uppg **5**, 7, **11**, 15, 17
   c. kap 12.5 uppg **7**, 11, **17**, 21
   d. kap 12.6 uppg 3, **5, 17**, 19
2. De fetstilta kan komma på seminarieprovet!
3. Börja titta på uppgift 1-2 till seminarium 2
4. Se film och svara på frågor inför nästa föreläsning