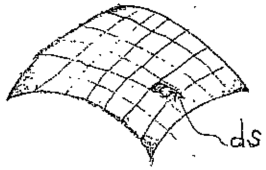
FÖRELÄSNING NR 18 : AREA AV BUKTIGA YTOR (kursboken avsnitt 8.2)

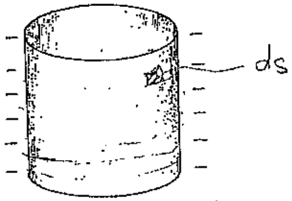
- Exempel
- Parameterytor
- Normalvektor
- Utåtriktad normal
- Areaintegraler
    - Area av ytor
    - Areaelement
    - Sammanfattning
    - Paramettrisering
        - Sfäriska koordinater
        - Exempel1
        - Cylinder koordinater
        - Exempel2
    - Area av en funktionsyta
        - Exempel3
    - Ovning1
    - Övning 2
- Lösningsförslag till övningarna 8.15, 8.16, 8.18, 8.20

Exempel på areaintegraler



Arean av ett parameterytstycke $S: \bar{r} = \bar{r}(s,t)$ ges av areaintegralen

$$A = \iint_S dS.$$



Ett cylindriskt skal S med laddningstätheten $q(x,y,z)$ har den totala laddningen

$$Q = \iint_S q(x,y,z)\, dS.$$

Totalkraften på en platta S som utsätts för en utbredd last $F(x,y)$ ges av

$$F = \iint_S F(x,y)\, dS.$$

Massan av ett skal S som har ytdensiteten $\rho(x,y,z)$ ges av

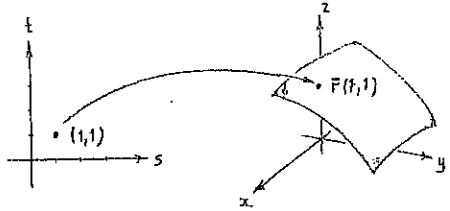
$$M = \iint_S \rho(x,y,z)\, dS.$$

Parameterytor (Förel nr 5)

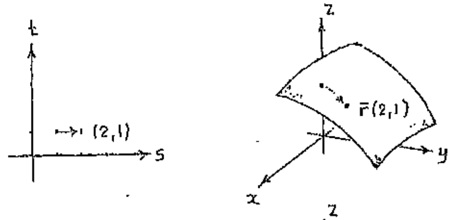
En yta i rummet där x-, y- och z-koordinaterna styrs av två parametrar s och t,

$$\bar{r}: \begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases} \quad \text{alternativt} \quad \bar{r}(s,t) = (x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)),$$

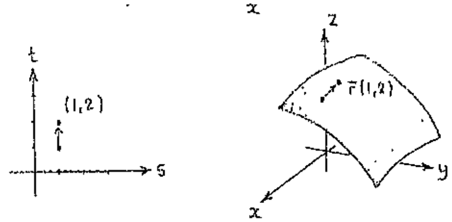
kallas för en parameteryta.



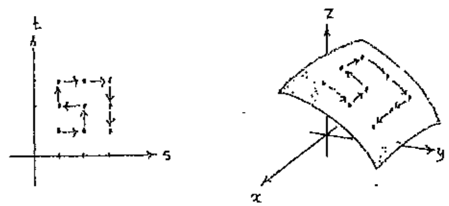
Parameterparet $(s,t) = (1,1)$ ger punkten $\bar{r}(1,1) = (x(1,1), y(1,1), z(1,1))$ på parameterytan.



När parametern $s=1$ flyttas till $s=2$ rör sig punkten på ytan i en riktning till punkten $(x(2,1), y(2,1), z(2,1))$.



Om istället parametern $t=1$ flyttas till $t=2$ rör sig punkten i en annan riktning till $(x(1,2), y(1,2), z(1,2))$.



Låter vi (s,t) variera över parameterområdet kommer $\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ genomlöpa ytan.

2

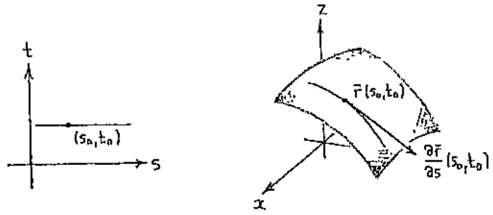
Normalvektor (Förel nr 5)

Tangentplanet till en parameteryta

$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t))$$

i punkten $\bar{r}(s_0,t_0)$ har en normalvektor som är parallell med

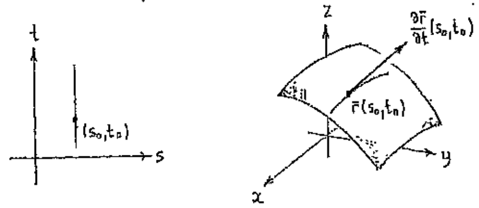
$$\boxed{\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(s_0,t_0)}$$



Fixera $t=t_0$ och låt s variera. Då fås en parameterkurva i ytan, med parameter s, och som har riktningsvektorn

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}(s_0,t_0)$$

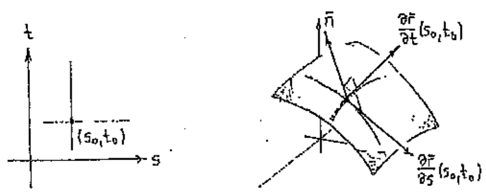
i punkten $\bar{r}(s_0,t_0)$.



Fixera $s=s_0$ och låt t variera. Då fås en parameterkurva i ytan, med parameter t, och som har riktningsvektorn

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(s_0,t_0)$$

i punkten $\bar{r}(s_0,t_0)$.



Vektorerna

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}(s_0,t_0) \text{ och } \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(s_0,t_0)$$

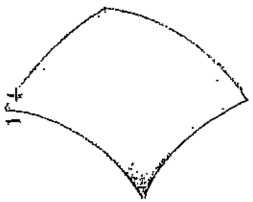
är parallella med ytan i punkten $\bar{r}(s_0,t_0)$ och därför är deras kryssprodukt

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(s_0,t_0)$$

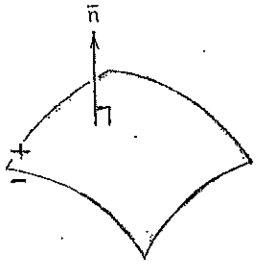
vinkelrät mot ytan.

Utåtriktad normal (Förel nr 5)

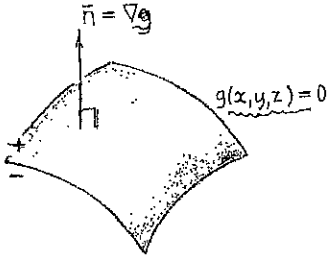
Orienteringen av en yta brukar indikeras genom att ange den utåtriktade normalen.



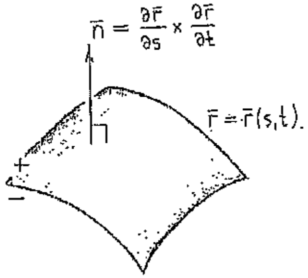
① Vi har ett orienterat ytstycke S.



② Orienteringen indikeras med den utåtpekande normalen.



③ Om ytan skrivs i ekvationsform $g(x,y,z) = 0$, då är $\bar{n} = \nabla g$ en utåtriktad normal om g växer i riktning mot utsidan.



④ Om ytan skrivs i parameterform $\bar{r} = \bar{r}(s,t)$, då är

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

en utåtriktad normal genom ett lämpligt val av parametrisering.

Areaintegraler

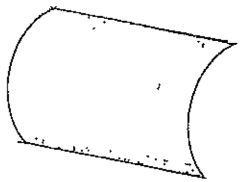
Area av ytor

En kontinuerligt deriverbar parameteryta S

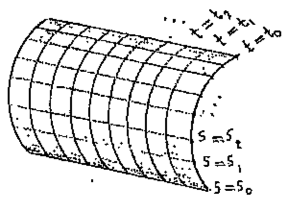
$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), \quad \text{där } (s,t) \in D,$$

har arean

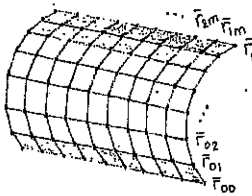
$$\iint_S dS = A = \iint_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\, dt.$$



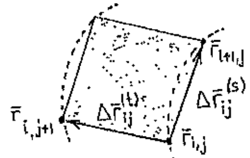
① Vi ska bestämma arean av ytan $\bar{r} = \bar{r}(s,t)$, $(s,t) \in D$, där $D: a \le s \le b,\ c \le t \le d$.



② Dela in parameterområdet D i delrektanglar
$a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m = b$,
$c = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = d$,



③ Detta ger en indelning av ytan i räta planstycken med hörnpunkter i
$\bar{r}_{ij} = (x(s_i,t_j), y(s_i,t_j), z(s_i,t_j))$.



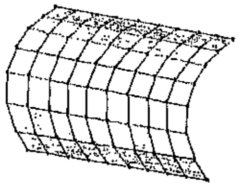
④ Arean av ett planstycke är

$$\Delta A_{ij} = |\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}|.$$

$$A = \lim_{\substack{m,n\to\infty \\ \text{finhet}\to 0}} \sum_{\substack{0\le i<m \\ 0\le j<n}} |\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}|$$

$$= \lim_{\substack{m,n\to\infty \\ \text{finhet}\to 0}} \sum_{\substack{0\le i<m \\ 0\le j<n}} \left| \frac{\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)}}{\Delta s_i} \times \frac{\Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}}{\Delta t_j} \right| \Delta s_i \Delta t_j$$

$$= \iint_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt.$$



(5) Ytans totala area är approximativt

$$A \approx \sum_{\substack{0\le i<m \\ 0\le j<n}} |\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}|.$$

(6) Summaformeln för arean är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

Areaelementet

Uttrycket

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt = |\bar{n}|\, ds\,dt$$

kallas för areaelementet.

Sammanfattning: Arean av en buktig yta S som ges av

$\bar{r} = \bar{r}(s,t) = (x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t))$

där $(s,t) \in D$

$$\text{Arean} = \iint_S dS = \iint_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt$$

där $dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt$

obs!! $\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ är normalen

parametrisering med sfäriska koordinater

Om S är en sfär eller en del av en sfär så används

$$\bar{r}: \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

där radien R är fixt.

$\bar{r}(x,y,z) = r(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta$

$D: \{(\theta,\varphi) : 0 \le \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \le \pi,\ 0 \le \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \le 2\pi$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = R(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = R(-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^2(\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi)$$

$$\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right| = R^2\sqrt{(\sin^4\theta\cos^2\varphi + \sin^4\theta\sin^2\varphi + (\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi)^2}$$

$$= R^2\sqrt{(\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta)} = \{\text{trig. ettan igen}\}$$

$$= R^2\sqrt{\sin^2\theta} = R^2\sin\theta \ge 0$$

$$\boxed{\text{Arean av } S: \iint_{D(\theta,\varphi)} \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right| d\theta\, d\varphi = \iint_{D(\theta,\varphi)} R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

Exempel 1. Ett elektriskt laddat skal S har formen av halvsfären $x^2+y^2+z^2=1$, $y \geq 0$ och har laddningstätheten

$$q(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{\text{laddningsenhet}}{\text{areaenhet}} \quad C/m^2 \right)$$

Beräkna skalets totala laddning

Lösningsförslag: (Görs på tavlan)

Vi skall beräkna $Q = \iint_S q(x,y,z)\, ds$

Parametrisering med cylinderkoordinater

$$\bar{r}: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad R \text{ fixt}$$

$$\bar{r} = (x,y,z) = \bar{r}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$$

$$D = \{(\theta, z) : 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi,\ z_1 \leq z \leq z_2\}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0) \times (0, 0, 1) = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$|\bar{n}| = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial z}\right| = \sqrt{R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = R > 0$$

$$\text{Arean} = \iint_S ds = \iint_{D(\theta,z)} R\, d\theta\, dz$$

Exempel 2. Beräkna arean av konen

$$z = a\sqrt{x^2+y^2}, \quad 0 \leq z \leq b$$

Lösningsförslag: Görs på Tavlan

svar: $\text{arean} = \pi \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{a^2}}$

obs: om $a = b = 1$

$\text{arean} = \pi\sqrt{2}$

Arean av en funktionsgraf

Funktions yta $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$

kan parametriseras via

$$F: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \quad (x,y) \in D$$

$$F = (x,y,z) = F(x,y) = (x,\ y,\ f(x,y))$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\bar{n} = \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

dvs. $\bar{n} = \text{grad}\,(z - f(x,y)) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$

$$|\bar{n}| = \left|\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

$$\boxed{\iint_S dS = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dx\,dy}$$

Exempel 3: Beräkna arean av hyperboliska paraboloiden $z = xy$ då $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Svar: arean $= \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

Övning 1: Beräkna arean av den buktiga ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$

Svar: Arean $= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$ a.e

Övning 2: Beräkna arean av den del av planet $2x + 2y + z = 0$ som ligger innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$

Svar: Arean $= 12\pi$ a.e

Lösningsförslag till övningarna

8.15, 8.16, 8.18, 8.20

$\boxed{8.15}$ Cylindern $x^2+y^2=4$, $0 \leq z \leq 3$, kan parametriseras som

$$\bar{r} = (2\cos s, 2\sin s, t), \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

a) Rita en figur och markera betydelsen av s och t.

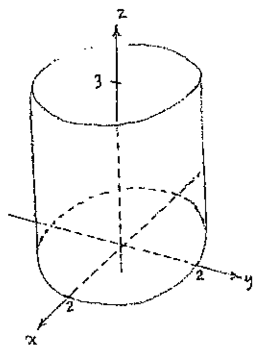
b) Beräkna med hjälp av parametriseringen en normalvektor till cylinderytan i punkten $(1, \sqrt{3}, 2)$. Rita in normalvektorn i figuren och kontrollera svarets rimlighet.

c) Beräkna arean av cylindern med hjälp av parameterframställningen.

d) Använd x och z som parametrar för att beskriva den halva av cylindern där $y>0$. Beräkna en normalvektor i punkten $(1, \sqrt{3}, 2)$ med hjälp av denna parametrisering.

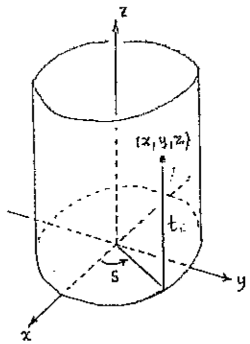
---

a) Från ekvationen $x^2+y^2=4$ ser vi att cylindern har z-axeln som symmetriaxel och radie $\sqrt{4}=2$. I z-led är cylindern begränsad av $z=0$ och $z=3$.



8.15 forts.

I parametriseringen anger t punkters z-koordinat och parametern s är vinkeln som används i framställningen av x- och y-koordinaterna i polära koordinater, dvs s är den moturs vinkel som linjestycket från origo till (x,y) bildar med den positiva x-axeln.



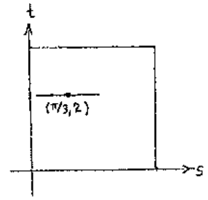
b) Om vi betraktar punkten $(1,\sqrt{3},2)$ så svarar den punkten mot följande parametervärden

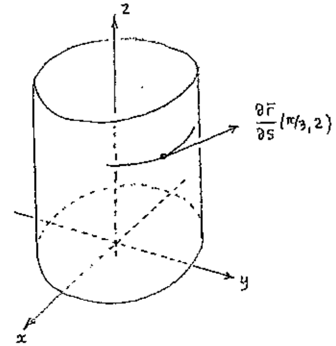
$$\begin{cases} 2\cos s = 1, \\ 2\sin s = \sqrt{3}, \\ t = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pi/3, \\ t = 2. \end{cases}$$

Låter vi $t=2$ vara fix och s variera i parameterområdet så får vi en kurva $\bar{r}=\bar{r}(s,2)$ på cylinderytan och den kurvan har i $s=\pi/3$ en riktningsvektor som ges av

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}(\pi/3,2) &= \frac{\partial}{\partial s}\bar{r}(s,2)\Big|_{s=\pi/3} \\ &= (-2\sin s,\ 2\cos s,\ 0)\Big|_{s=\pi/3} \\ &= (-\sqrt{3},1,0). \end{aligned}$$

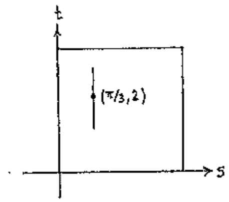
8.15 forts. 2

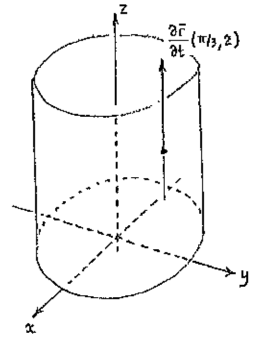




På samma sätt, låter vi $s=\pi/3$ vara fix och t variera så ger det en kurva $\bar{r}=\bar{r}(\pi/3,t)$ på ytan som i $t=2$ har riktningsvektorn

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(\pi/3,2) &= \frac{\partial}{\partial t}\bar{r}(\pi/3,t)\Big|_{t=2} \\ &= (0,0,1). \end{aligned}$$



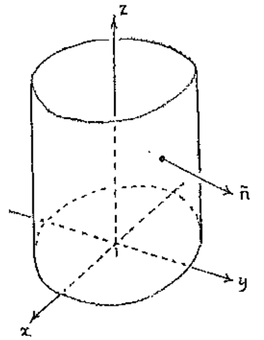


Vi har alltså två kurvor på cylinderytan som går genom punkten $(1,\sqrt{3},2)$ och har där riktningsvektorer $\partial\bar{r}/\partial s\,(\pi/3,2)$ resp. $\partial\bar{r}/\partial t\,(\pi/3,2)$ som båda således ligger i tangentplanet till ytan. Tar vi

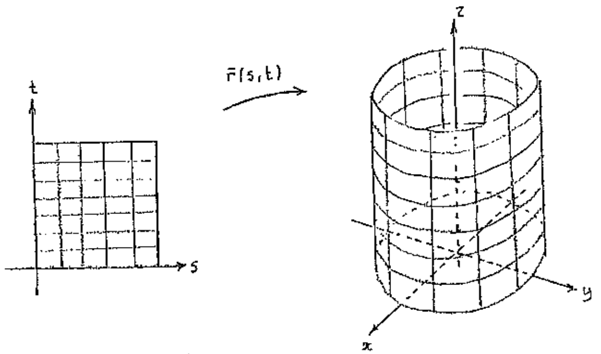
8.15 forts.3

därför kryssprodukten av riktningsvektorerna får vi en normalvektor till ytan i punkten,

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}(\pi/3,2) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}(\pi/3,2) \\ &= (-\sqrt{3},1,0)\times(0,0,1) \\ &= (1,\sqrt{3},0).\end{aligned}$$

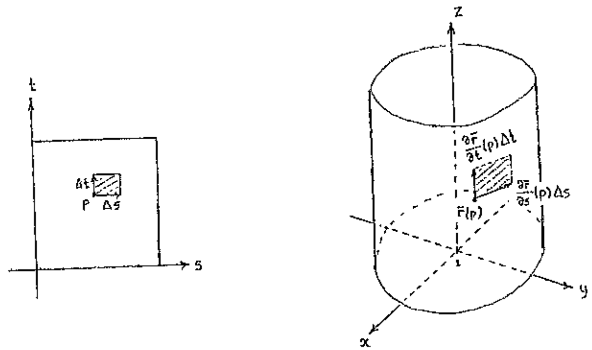


c) För att bestämma cylinderns area kan vi dela upp parameterområdet i små rektanglar med kanter Δs och Δt i s- resp. t-riktningen och betrakta hur varje sådan liten rektangel avbildas med parametriseringen.



8.15 forts. 4

Eftersom rektanglarna är små så kommer en sådan rektangel med hörnpunkt p med god approximation avbildas på ett parallellogram med kanter $(\partial\bar{r}/\partial s)(p)\Delta s$ och $(\partial\bar{r}/\partial t)(p)\Delta t$.



Arean av parallellogrammet är

$$\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\Delta s \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\Delta t\right| = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right|\Delta s\,\Delta t$$

och cylinderns area får vi genom att summera över alla rektanglar och gå i gränsen där rektangelindelningens finhet går mot 0,

$$\sum_{\text{rektanglar}} \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right|\Delta s\,\Delta t \to \iint\limits_{\substack{0\le s\le 2\pi\\ 0\le t\le 3}} \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right| ds\,dt.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} &= (-2\sin s,\ 2\cos s,\ 0),\\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} &= (0,0,1),\\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} &= (-2\sin s,\ 2\cos s,\ 0)\times(0,0,1) = (2\cos s,\ 2\sin s,\ 0),\\ \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right| &= \sqrt{2^2\cos^2 s + 2^2\sin^2 s + 0^2} = \sqrt{4} = 2,\end{aligned}$$

8.15 forts. 5

så är cylinderns area

$$\text{Area} = \iint\limits_{\substack{0\le s<2\pi \\ 0\le t\le 3}} 2\,ds\,dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} ds \int_0^3 dt$$

$$= 2\cdot 2\pi\cdot 3$$

$$= 12\pi.$$

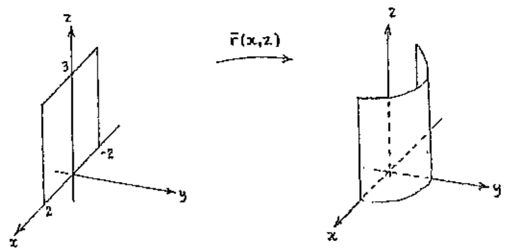
d) Från cylinderns ekvation har vi att

$$x^2+y^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{4-x^2}$$

och det betyder att den halva av cylindern som har $y>0$ ges av $y=\sqrt{4-x^2}$ och att den därför kan parametriseras som

$$\bar{r}(x,z) = (x, \sqrt{4-x^2}, z)$$

där $-2\le x\le 2$ och $0\le z\le 3$.



Ytan har i punkten $(1,\sqrt{3},2)$ normalvektorn

$$\bar{n} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial x}(1,2)\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}(1,2)$$

och eftersom

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}(1,2) = \left(1, \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}, 0\right)\Big|_{\substack{x=1\\z=2}} = \left(1, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right),$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}(1,2) = (0,0,1)$$

8.15 forts. 6

så är

$$\bar{n} = \left(1,-\tfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)\times(0,0,1) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-1,0\right)$$

som är parallell med normalvektorn som togs fram i deluppgift b.

8.16 Låt Y vara den sfäriska kalotten

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad z \geq 1.$$

a) Ge en parameterframställning av Y.

b) Bestäm en normalvektor till Y.

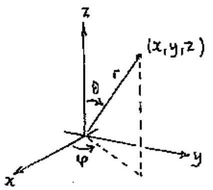
c) Beräkna arean av Y.

d) Beräkna arean av $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geq h$ där $0 \leq h \leq R$.

---

a) Eftersom kalotten är en del av en sfär lämpar det sig att använda rymdpolära koordinater

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$



Då beskrivs sfären av

$$r=\sqrt{4}=2, \quad 0\leq\theta\leq\pi, \quad 0\leq\varphi<2\pi$$

och villkoret $z\geq 1$ avgränsar parameterområdet till

$$2\cos\theta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta \geq 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad 0\leq\theta\leq\pi/3.$$

En parameterframställning av kalotten är alltså

$$\bar{r}(\theta,\varphi) = (2\sin\theta\cos\varphi,\ 2\sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$$

där $0\leq\theta\leq\pi/3$ och $0\leq\varphi<2\pi$.

b) På en origocentrerad sfär är ortsvektorn till en punkt på ytan också normalvektor till ytan i punkten, dvs för en punkt (x,y,z) på kalotten är $\bar{n}=(x,y,z)$ en normalvektor.

8.16 forts. Det går också att komma fram till en normalvektor genom att använda följande formel

$$\bar{n} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi}$$

$$= (2\cos\theta\cos\varphi, 2\cos\theta\sin\varphi, -2\sin\theta)\times(-2\sin\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & -2\sin\theta \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \big(0-(-2)\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\varphi,\ -(0-(-2)\sin\theta\cdot(-2)\sin\theta\sin\varphi),$$
$$2\cos\theta\cos\varphi\cdot 2\sin\theta\cos\varphi - 2\cos\theta\sin\varphi\cdot(-2)\sin\theta\sin\varphi\big)$$

$$= (4\sin^2\theta\cos\varphi,\ 4\sin^2\theta\sin\varphi,\ 4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))$$

$$= 4\sin\theta\,(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta).$$

c) Om vi använder parametriseringen från a- och b-uppgiften så ges ytans areaelement av

$$dS = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi}\right| d\theta\,d\varphi$$

$$= 4|\sin\theta|\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta}\ d\theta\,d\varphi$$

$$= 4|\sin\theta|\sqrt{\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta}\ d\theta\,d\varphi$$

$$= 4|\sin\theta|\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\ d\theta\,d\varphi$$

$$= 4|\sin\theta|\ d\theta\,d\varphi$$

och kalottens area får vi genom att integrera areaelementet över ytan,

$$\text{Area} = \iint_Y dS$$

$$= \iint_{\substack{0\leq\theta\leq\pi/3\\ 0\leq\varphi<2\pi}} 4|\sin\theta|\ d\theta\,d\varphi$$

8.16 forts. 2

$$= \{ |\sin\theta| = \sin\theta \text{ för } 0 \le \theta \le \pi \}$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta \, d\theta$$

$$= 4 \Big[\varphi \Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \Big[-\cos\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3}$$

$$= 4 \cdot (2\pi - 0) \cdot \left(-\tfrac{1}{2} - (-1)\right)$$

$$= 4\pi .$$

d) I denna mer allmänna situation kan kalotten parametriseras som

$$\bar{r}(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta) .$$

där villkoret $z \ge h$ inskränker θ till

$$z = R\cos\theta \ge h \iff \cos\theta \ge h/R \iff 0 \le \theta \le \arccos\frac{h}{R},$$

dvs parameterområdet är

$$0 \le \theta \le \arccos\frac{h}{R}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

Samma uträkning som i b-uppgiften ger att

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin\theta \,(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

och areaelementet blir

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \right| d\theta\, d\varphi = R^2 |\sin\theta| \, d\theta\, d\varphi .$$

Arean av området blir

$$\text{Area} = \iint_{\substack{0 \le \theta \le \arccos(h/R) \\ 0 \le \varphi < 2\pi}} R^2 |\sin\theta| \, d\theta\, d\varphi$$

$$= \{ |\sin\theta| = \sin\theta \text{ när } 0 \le \theta \le \pi \}$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arccos(h/R)} \sin\theta \, d\theta$$

8.16 forts. 3

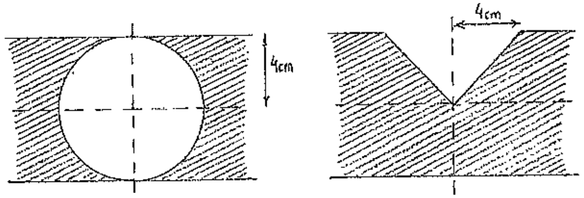
$$= R^2 \Big[\varphi \Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \Big[-\cos\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=\arccos\frac{h}{R}}$$

$$= R^2 \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \cos\arccos\frac{h}{R}\right)$$

$$= 2\pi R^2 \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$= 2\pi R (R-h).$$

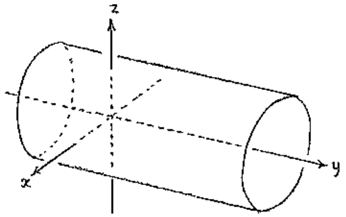
8.18 I ett cylindriskt plåtrör med radien 4 cm 'stansas' ett 'cirkulärt' hål, enligt figur. Hålet har också radien 4 cm.



'uppifrån' 'från sidan'

Beräkna arean av den bortstansade plåtbiten.

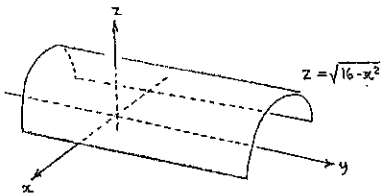
Vi inför ett kartesiskt koordinatsystem med y-axeln längs med rörets symmetriaxel och z-axeln uppåt.



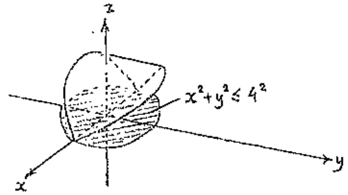
I detta koordinatsystem har röret ekvationen

$$x^2 + z^2 = 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

och därför kan övre halvan av röret (där $z \geq 0$) skrivas som en funktionsyta $z = \sqrt{16 - x^2}$.



8.18 forts. När vi stansar ur ett cirkulärt hål med radie 4 så innebär det att vi tar bort den del av funktionsytan som ryms inuti cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4^2$ (vi har då valt z-axeln som hålets mittaxel).



Areaelementet av en funktionsyta $z = f(x,y)$ ges av

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy$$

och i detta fall är

$$f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{16 - x^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{16 - x^2} = 0$$

varför areaelementet är

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2} + 0^2}\, dx dy = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx\, dy.$$

Integrerar vi areaelementet över cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4^2$ får vi arean av den bortstansade biten

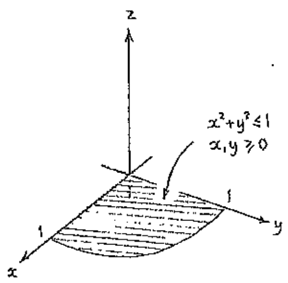
$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4^2} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx\, dy. \\
&= 4 \int_{-4}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \\
&= 4 \int_{-4}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} \cdot 2\sqrt{16 - x^2} \\
&= 8 \int_{-4}^{4} dx \\
&= 64.
\end{aligned}$$

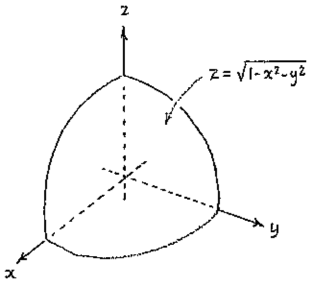
8.20 Ytan

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,,\quad x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1$$

har en massbeläggning (massa per areaenhet) som är proportionell mot höjden över xy-planet och mot avståndet till z-axeln. Beräkna ytans massa.

Vi kan beskriva ytan som en funktionsyta $z=z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ över den del av enhetscirkelskivan som finns i första kvadranten.





Meningen "massbeläggningen (massa per areaenhet) som är proportionell mot höjden över xy-planet och mot avståndet till z-axeln" översätter vi till

$$\frac{dm}{dS}=kz\sqrt{x^2+y^2}$$

där

- dm/dS är massbeläggningen,
- k är proportionalitetskonstanten,
- z är höjden över xy-planet,
- $\sqrt{x^2+y^2}$ är avståndet till z-axeln.

8.20 forts. Eftersom ytan är en funktionsyta har den areaelementet

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy \\ &= \sqrt{1-\frac{x^2}{1-x^2-y^2}-\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy \\ &= \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

Därmed ges masselementet av

$$\begin{aligned} dm &= kz\sqrt{x^2+y^2}\,dS \\ &= k\sqrt{1-x^2-y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \end{aligned}$$

och ytans hela massa får vi genom att integrera upp masselementet över ytan,

$$\text{Massa} = \iint_{\text{Ytan}} dm = \iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x,y\geq 0}} k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Denna dubbelintegral beräknar vi enklast genom att gå över till polära koordinater. Då beskrivs integrationsområdet av

$$0\leq r\leq 1,\quad 0\leq\theta\leq \pi/2$$

och vi får att

$$\text{Massa} = k\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\cdot r\,dr = k\Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_{r=0}^{r=1} = k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = k\cdot\tfrac{\pi}{6}.$$