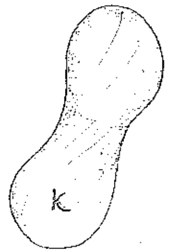
Föreläsning 13–15 : Trippelintegraler (§ 7.1-7.2, § 8.1, 8.2, 8.4)

- Exempel
- Definition
- Iterationsformler
  - Enkla områden
  - Iterationsformler för enkla områden
  - Snittning
  - Iterationsformler för snittområden
- Räkneregler
- Variabelsubstitution
  - Cylindrisk substitution
  - Sfärisk substitution
  - Allmän substitution
  - Linjär substitution
- Symmetrier
- Tillämpningar

Några lösta tal ur övningsboken (8.4, 8.11, 8.13, 8.31)

Exempel på trippelintegraler

Värme

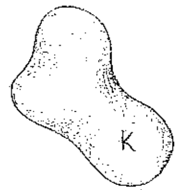


Det värme som en kropp K innehåller ges av

$$Q = C \iiint_K T(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

där C är kroppens värmekapacitet och $T(x,y,z)$ är temperaturen.

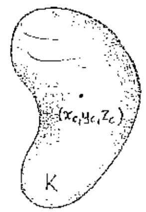
Volym



Volymen av en kropp K ges av

$$\underline{\text{Volym}} = \iiint_K dx\, dy\, dz$$

Masscentrum



Masscentrum för en kropp K med densitet $\rho(x,y,z)$ ges av

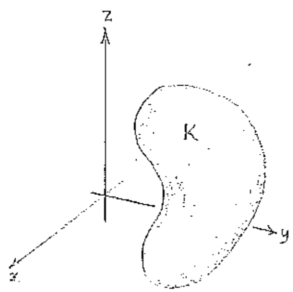
$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_K x\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

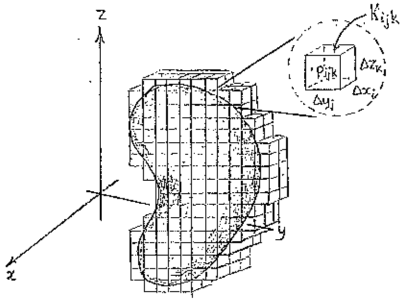
$$y_c = \frac{1}{m}\iiint_K y\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_K z\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

där m är kroppens massa.

Definition av trippelintegral



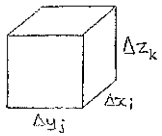


① Vi ska definiera

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

där K är en kropp i rummet.

② Dela upp kroppen K i axelparallella delkuber K_{ijk} och välj en punkt P_{ijk} i varje K_{ijk}.



③ Bidraget från delkuben K_{ijk} till integralens värde approximeras med

$$f(P_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

④ Ställ upp Riemannsumman

$$\sum_{\text{delkuber}} f(P_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

Gör en allt finare indelning och betrakta gränsvärdet

$$\lim_{\text{finhet}\to 0}\ \sum_{\text{delkuber}} f(P_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

Om gränsvärdet i punkt 4 har samma värde oavsett partition så definieras

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\text{finhet}\to 0}\ \sum_{\text{delkuber}} f(P_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

Anteckningar

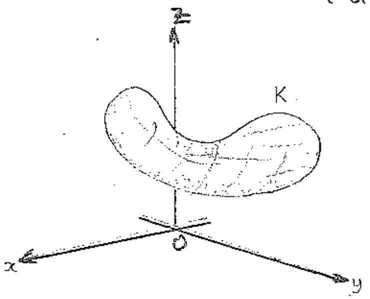
ATT beräkna $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Iterationsformler

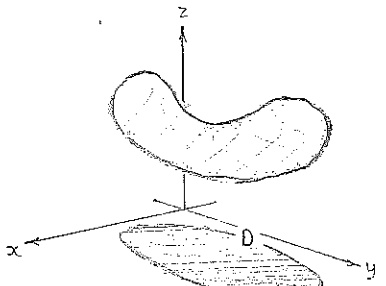
Enkla områden i z-led

Ett område som ligger mellan två funktionsytor i y-led kallas för enkelt i z-led och kan beskrivas som :

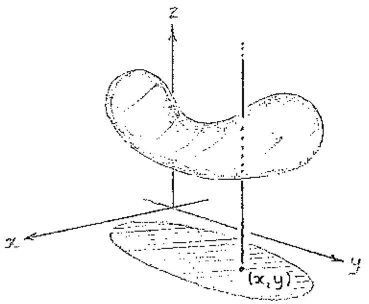
$$\begin{cases} (x,y) \in D \\ a(x,y) \leq z \leq b(x,y) \end{cases}$$



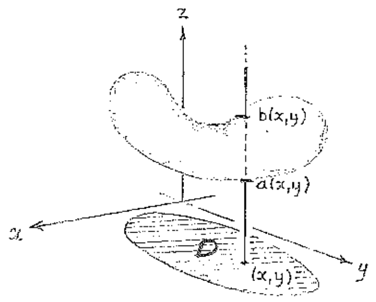
① Vi ska undersöka om kroppen K är enkel i z-led.



② Projicera ner alla punkter i K på xy-planet. Då fås ett område D.

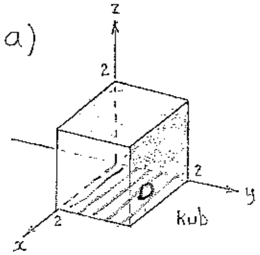


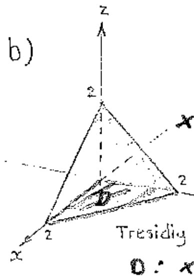
③ Genom varje (x,y) i D drar vi en linje parallell med z-axeln.



④ Om linjens skärning med K är ett sammanhängande intervall $a(x,y) \leq z \leq b(x,y)$ då är K enkel i z-led.

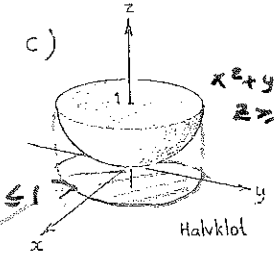
Övning 1: Rita ut projektionen av området på xy-planet och ange om området är enkelt i z-led.

a) 

b) 

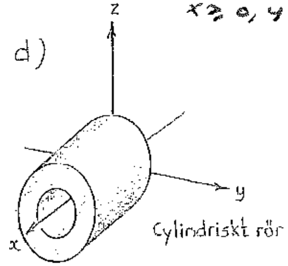
$x+y+z \leq 2$
$x \geq 0,\ y \geq 0,$
$z \geq 0$

D: $x+y \leq 2$
$x \geq 0,\ y \geq 0$

c) 

$x^2+y^2+z^2 \leq 1$
$z \geq 0$

$x^2+y^2 \leq 1$

d) 

Övning 2: Beskriv ovanstående områden på formen

$$(x,y) \in D, \quad a(x,y) \leq z \leq b(x,y).$$

a) $\{(x,y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2$

b) $\{(x,y): 0 \leq z \leq 2-(x+y)$, D: $x+y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

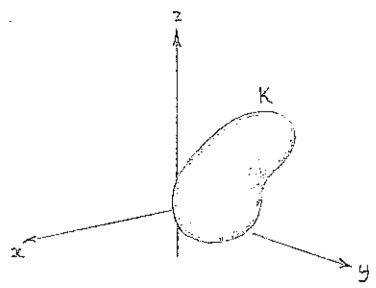
c) $\{(x,y): 0 \leq z \leq \sqrt{1-(x^2+y^2)}$, D: $x^2+y^2 \leq 1\}$

d) se sid 4.

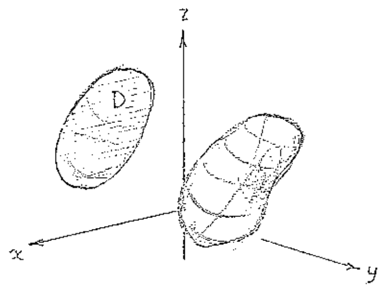
Enkla områden i y-led

Ett område som ligger mellan två funktionsytor i y-led kallas för enkelt i y-led och kan beskrivas som

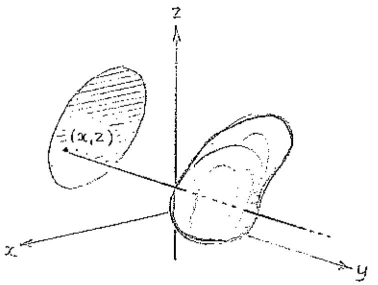
$$\begin{cases} (x,z) \in D \\ a(x,z) \le y \le b(x,z) \end{cases}$$



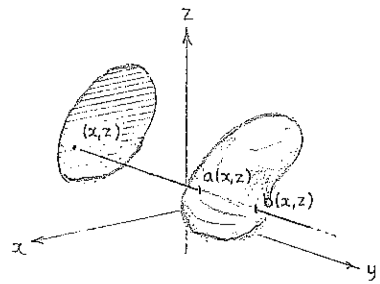
① Vi ska undersöka om kroppen K är enkel i y-led.



② Projicera alla punkter i K på xz-planet. Då fås ett område D.



③ Genom varje (x,z) i D drar vi en linje parallell med y-axeln.



④ Om linjens skärning med K är ett sammanhängande intervall

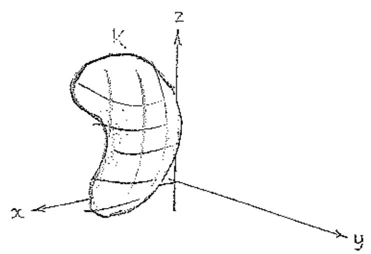
$$a(x,z) \le y \le b(x,z)$$

då är K enkel i y-led.

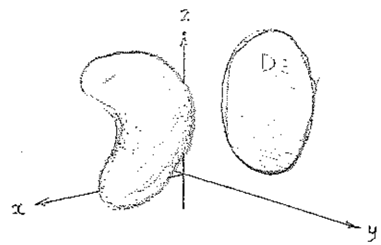
Enkla områden i x-led

Ett område som ligger mellan två funktionsytor i x-led kallas för enkelt i x-led och kan beskrivas som

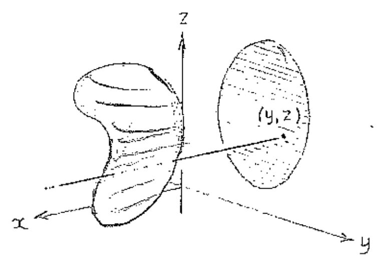
$$\begin{cases} (y,z) \in D \\ a(y,z) \le x \le b(y,z) \end{cases}$$



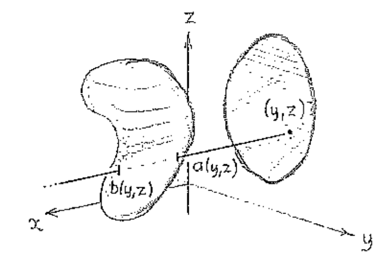
① Vi ska undersöka om kroppen K är enkel i x-led.



② Projicera alla punkter i K på yz-planet. Då fås ett område D.



③ Genom varje (y,z) i D drar vi en linje parallell med x-axeln.

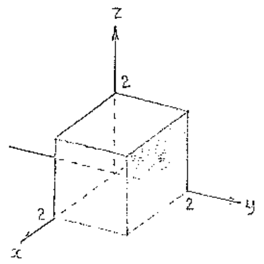


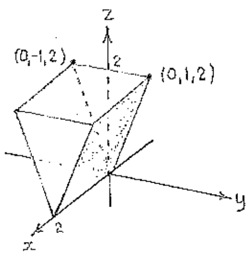
④ Om linjens skärning med K är ett sammanhängande intervall

$$a(y,z) \le x \le b(y,z)$$

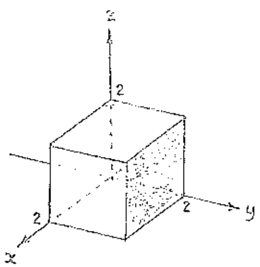
då är K enkel i x-led.

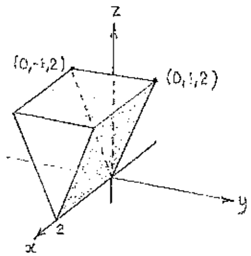
Övning 3: Rita ut projektionen D av området på xz-planet och beskriv området på formen $a(x,z) \le y \le b(x,z)$ när $(x,z) \in D$.





Övning 4: Rita ut projektionen D av området på yz-planet och beskriv området på formen $a(y,z) \le x \le b(y,z)$ när $(y,z) \in D$.





Exempel: 1 Kroppen K begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1 - x$.

a) Bestäm projektionen av K på xy-planet.

b) Är K enkel i z-led?

c) Ge i sådant fall en beskrivning av K.

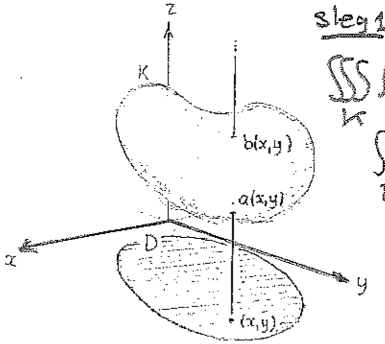
Lösningsförslag (Görs på tavlan)

Hur man beräknar $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Iterationsformler för enkla områden

Om $f(x,y,z)$ är en kontinuerlig funktion på ett enkelt område i z-led $K: a(x,y) \leq z \leq b(x,y)$ när $(x,y) \in D$, då är

$$\boxed{\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.}$$



steg 1 integrera i z-led

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \underbrace{\left(\int_{z=a(x,y)}^{z=b(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right)}_{g(x,y)} dx\,dy$$

$$= \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Övning 5: Skriv

$$\iiint_K \frac{dx\,dy\,dz}{1+z^2}$$

som en upprepad integral, där K är området i förra exemplet.

se Ex 1 sid 5

Exempel 2 Beräkna $\iiint_K y\,dx\,dy\,dz$, där $K: x^2+z^2 \leq y \leq 1$.

Lösningsförslag (görs på tavlan)

För ett område $K: a(x,z) \leq y \leq b(x,z)$ när $(x,z) \in D$, är

$$\boxed{\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{a(x,z)}^{b(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx\,dz.}$$

Här skall man först integrera i y-led

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \underbrace{\left[\int_{y=a(x,z)}^{y=b(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right]}_{g(x,z)} dx\,dz$$

$$= \iint_D g(x,z)\,dx\,dz$$

För ett område $K: a(y,z) \leq x \leq b(y,z)$ när $(y,z) \in D$, är

$$\boxed{\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{a(y,z)}^{b(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz}$$

Här skall man först integrera i x-led

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \underbrace{\left[\int_{x=a(y,z)}^{x=b(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right]}_{g(y,z)} dy\,dz$$

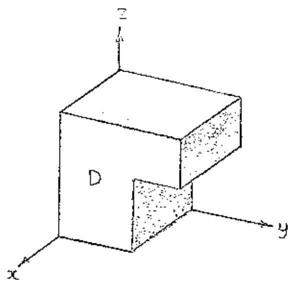
$$= \iint_D g(y,z)\,dy\,dz.$$

Räkneregler

Additivitet

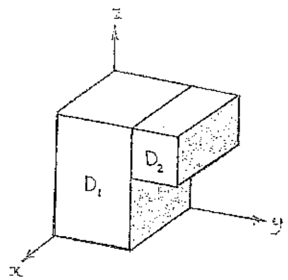
Om D_1 och D_2 är mätbara områden och en uppdelning av området D, då är

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$



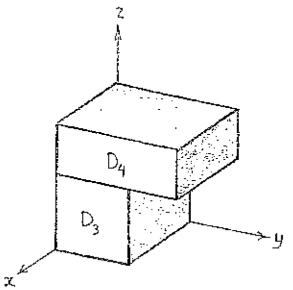
① D är området i figuren och vi ska beräkna

$$I = \iiint_D y\,dx\,dy\,dz$$



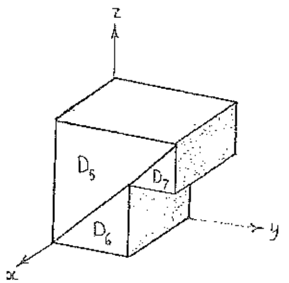
② D kan delas upp i två delrätblock som vi integrerar över var för sig.

$$I = \iiint_{D_1} y\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} y\,dx\,dy\,dz.$$



③ En annan indelning av D ger oss istället

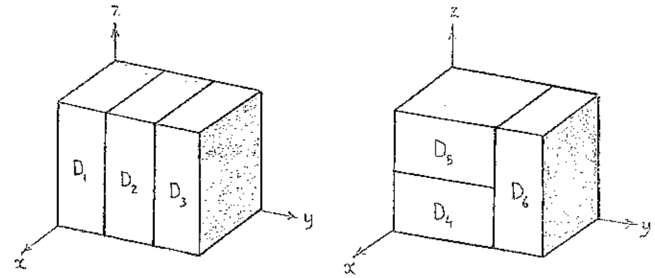
$$I = \iiint_{D_3} y\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_4} y\,dx\,dy\,dz.$$



④ D kan även delas upp i fler än två delar och ge

$$I = \iiint_{D_5} y\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_6} y\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_7} y\,dx\,dy\,dz.$$

Övning 8: Områdena $D_1, \ldots, D_6$ ges av figurerna.



Vilka av likheterna gäller?

a) $\iiint_{D_3} xy\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_6} xy\,dx\,dy\,dz$

b) $\iiint_{D_1} xy\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_3} xy\,dx\,dy\,dz$

c) $\iiint_{D_4} xy\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_5} xy\,dx\,dy\,dz$

$$= \iiint_{D_1} xy\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} xy\,dx\,dy\,dz$$

Linjaritet

Om $f(x,y,z)$ och $g(x,y,z)$ är integrabla på D och a och b är konstanter, då är

$$\iiint_D \left[a f(x,y,z) + b g(x,y,z)\right] dx\,dy\,dz$$

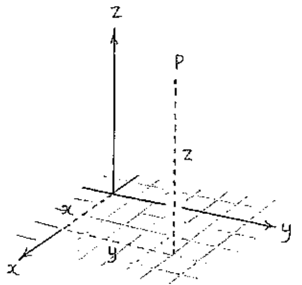
$$= a \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + b \iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Variabelsubstitution

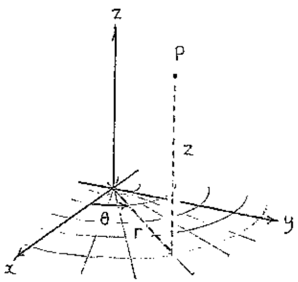
Cylindriska koordinater

I cylindriska koordinater anges en punkts läge i rummet med tre koordinater (r, θ, z), där

$$\begin{cases} (r,\theta): & \text{punktens } (x,y)\text{-koordinater uttryckta i polära koordinater,} \\ z: & \text{punktens } z\text{-koordinat.} \end{cases}$$



Punkten P har de kartesiska koordinaterna (x,y,z).



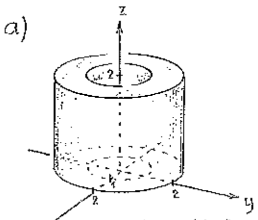
Punkten P har de cylindriska koordinaterna (r,θ,z).

Sambandet mellan en punkts kartesiska koordinater (x,y,z) och cylindriska koordinater (r,θ,z) ges av

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

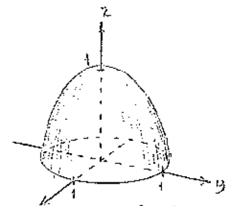
Övning 9: Beskriv området i cylindriska koordinater.

a)



Cylindriskt rör

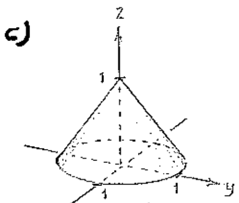
b)



Paraboloid

$z = 1 - (x^2+y^2)$

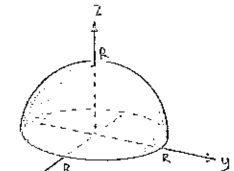
c)



Kon

$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

d)



Halvklot

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Svar

a) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad r: 1 \to 2$, $\theta: 0 \to 2\pi$, $z: 0 \to 2$

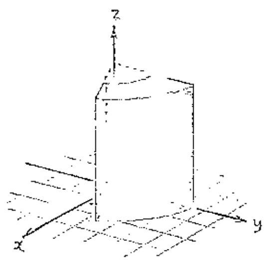
b) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad r: 0 \to 1$, $\theta: 0 \to 2\pi$, $z: 0 \to 1-r^2$

c) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad r: 0 \to 1$, $\theta: 0 \to 2\pi$, $z: 0 \to 1-r$

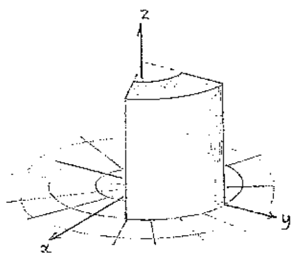
d) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad r: 0 \to R$, $\theta: 0 \to 2\pi$, $z: 0 \to \sqrt{R^2-r^2}$

Cylindrisk substitution

Ett integrationsområde med symmetri kring en axel (z-axeln) beskrivs enklare i cylindriska koordinater.



Området K har en komplicerad beskrivning i x,y,z-koordinater



Området K har en enkel beskrivning i cylindriska koordinater $1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{10} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le 3.$

Vid bytet till cylindriska koordinater anges punkters position med tre koordinater (r, θ, z), där

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r:\ R_1 \longrightarrow R_2 \\ \theta:\ \Theta_1 \longrightarrow \Theta_2 \\ z:\ Z_1 \longrightarrow Z_2 \end{array}$$

och en trippelintegral ändras enligt formeln

$$\boxed{\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.}$$

(Eftersom cylindriska koordinater är polära koordinater med z-koordinaten påhängd så blir integrationselementet $r\,dr\,d\theta\,dz$.) dvs $\boxed{dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz}$

Övning 10: Skriv integralen i cylindriska koordinater.

a) $\iiint_K x^2 z\,dx\,dy\,dz$

där K är paraboloiden i övning 9b.

b) $\iiint_K 3y^2\,dx\,dy\,dz$

där K är konen i övning 9c.

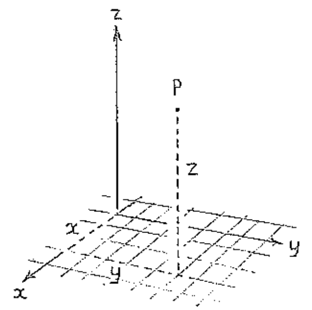
Exempel: Beräkna $\iiint_K (x^2 - y^2)z\,dx\,dy\,dz$, där K är området i övning 9a.

Lösningsförslag (görs på tavlan)

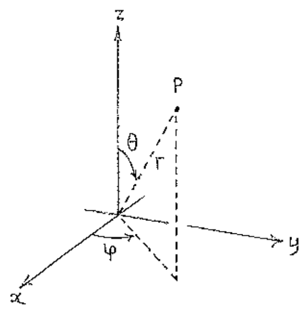
Sfäriska koordinater

I sfäriska koordinater anges en punkts läge i rummet med tre koordinater (r, θ, φ), där

$$\begin{cases} r: & \text{punktens avstånd till origo.} \\ \theta: & \text{vinkeln mellan den positiva } z\text{-axeln och sträckan från origo till punkten.} \\ \varphi: & \text{vinkeln mellan den positiva } x\text{-axeln och sträckan från origo till punktens projektion i } xy\text{-planet.} \end{cases}$$



Punkten P har de kartesiska koordinaterna (x, y, z).

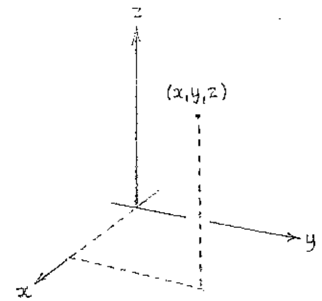


Punkten P har de sfäriska koordinaterna (r, θ, φ).

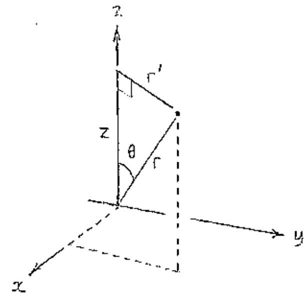
Sambandet mellan en punkts kartesiska koordinater (x, y, z) och sfäriska koordinater (r, θ, φ) ges av

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

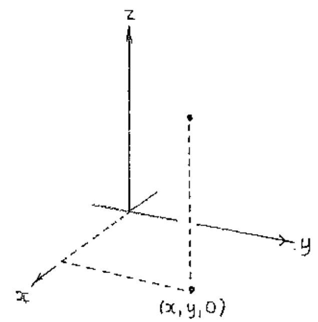
$r: R_1 \longrightarrow R_2$
$\theta: \theta_1 \longrightarrow \theta_2$
$\varphi: \varphi_1 \longrightarrow \varphi_2$



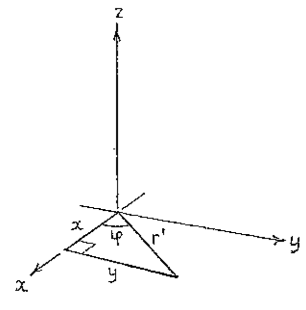
① Vi ska bestämma ett samband mellan (x,y,z) och (r, θ, φ).



② Inför triangeln ovan. Trigonometri ger att
$z = r\cos\theta$
$r' = r\sin\theta$



③ Projicera ner punkten (x,y,z) på xy-planet.



④ Inför triangeln ovan. Trigonometri ger att
$x = r'\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r'\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi$

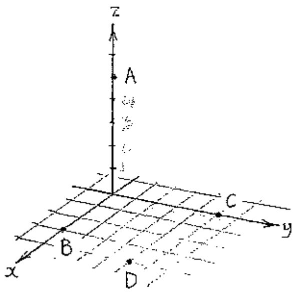
Övning 11: Bestäm de sfäriska koordinaterna för punkterna i figuren.

A : $(r, \theta, \varphi) = (5, 0, 0)$

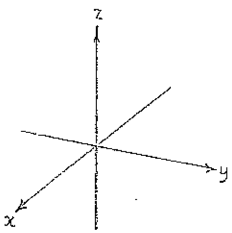
B : $(r, \theta, \varphi) = (3, \frac{\pi}{2}, 0)$

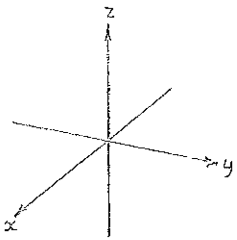
C : $(r, \theta, \varphi) = (5, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

D : $(r, \theta, \varphi) =$



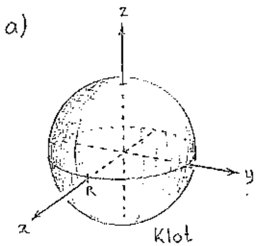
Övning 12: Rita ut koordinatytorna $\theta = \pi/6$ och $\varphi = \pi/2$.





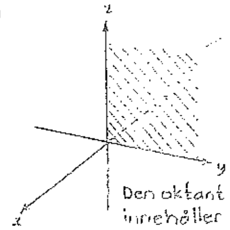
Övning 13: Beskriv områdena i sfäriska koordinater.

a)



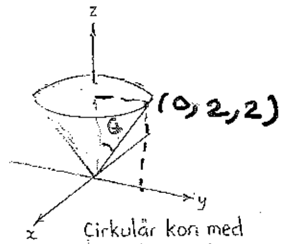
Klot

b)

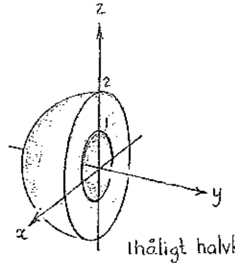


Den oktant som innehåller neg. x-axeln och pos. y-, z-axlar.

c)



Cirkulär kon med sfärisk kalott



Ihåligt halvklot

a) klotsekv : $x^2+y^2+z^2 \le R^2$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} r &: 0 \longrightarrow R \\ \theta &: 0 \longrightarrow \pi \\ \varphi &: 0 \longrightarrow 2\pi \end{aligned}$$

b) $$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} r &: 0 \longrightarrow \infty \\ \theta &: 0 \longrightarrow \pi/2 \\ \varphi &: \pi/2 \longrightarrow \pi \end{aligned}$$

c) Kroppen begränsas av en rak cirkulär kon och sfär kring origo

eftersom $(0,2,2)$ ligger på sfären så har denna sfär radie $\sqrt{0+2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

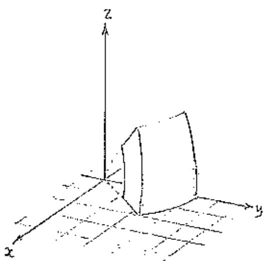
sfärensekv $x^2+y^2+z^2 = 8$ ~~eller~~

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} r &: 0 \longrightarrow 2\sqrt{2} \\ \varphi &: 0 \longrightarrow 2\pi \\ \theta &: 0 \longrightarrow \pi/4 \end{aligned}$$

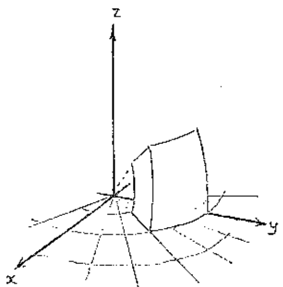
$\tan\theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$

Sfärisk substitution

Ett integrationsområde med rotationssymmetri kring en punkt (origo) beskrivs enklare i sfäriska koordinater.



Området K har en komplicerad beskrivning i x,y,z-koordinater



Området K har en enkel beskrivning i sfäriska koordinater $1 \le r \le 2$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Vid bytet till sfäriska koordinater anges punkters position med tre koordinater (r, θ, φ), där

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

och en trippelintegral ändras enligt formeln

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\underline{\underline{dx\,dy\,dz}} = \iiint_K f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,\underline{\underline{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}}.$$

(En härledning av integrationselementet $\underline{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}$ finns i avsnittet om allmän substitution.)

obs $dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

(se sid 75)

Exempel 3: Beräkna

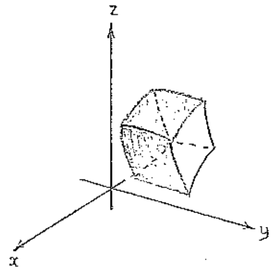
$$\iiint_K (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

där $K: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$.

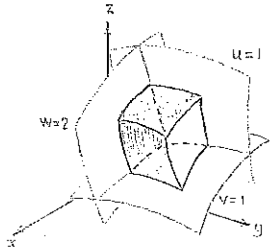
Lösningsförslag (görs på tavlan)

Allmän substitution

Ett integrationsområde kan beskrivas enklare i nya koordinater u, v och w.



Området K har en komplicerad beskrivning i x,y,z-koordinater



Området K har en enkel beskrivning i u,v,w-koordinater: $1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 2,\ 2 \le w \le 3.$

Vid byte till u,v,w-koordinater byts x, y och z mot

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

och en trippelintegral ändras enligt formeln

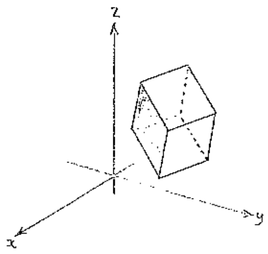
$$\boxed{\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)) \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.}$$

(Formeln är analog med den som gäller för dubbelintegraler.)

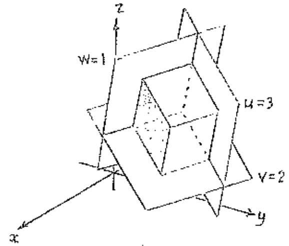
$$dx\,dy\,dz = \underbrace{\left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right)\right|}_{\text{volym skalingsfaktor}} du\,dv\,dw$$

Linjär substitution

Ett integrationsområde begränsat av planstycken kan eventuellt beskrivas enklare efter ett linjärt koordinatbyte.



Området K har en komplicerad beskrivning i x,y,z-koordinater



Området K har en enkel beskrivning efter ett linjärt variabelbyte $3 \le u \le 4,\ 2 \le v \le 3,\ 1 \le w \le 2.$

Vid ett linjärt variabelbyte

$$\begin{cases} x = au + bv + cw \\ y = eu + fv + gw \\ z = hu + kv + \ell w \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & k & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

ändras en trippelintegral enligt formeln

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K f(au+bv+cw,\ eu+fv+gw,\ hu+kv+\ell w) \times \left|\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & k & \ell \end{pmatrix}\right| du\,dv\,dw.$$

Ex 4 Beräkna massa av kroppen

$K = \{(x,y,z) : \quad 0 \leq x+y \leq 2, \; 1 \leq x+z \leq 2, \; 1 \leq y+z \leq 2\}$

med densitet $\quad \rho(x,y,z) = \dfrac{x+y}{(x+z)(z+y)}$.

<u>Lösningsförslag</u> (görs på tavlan)

Exempel **5** Härled formeln för sfäriskt variabelbyte från den allmänna formeln.

Sambandet mellan (x,y,z) och (r,θ,φ) lyder

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

och därför är

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Funktionaldeterminanten beräknas genom att kofaktorutveckla längs tredje raden

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta\,\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} + r^2\sin^3\theta\,\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}$$

$$= r^2\sin\theta\,\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1} = r^2\sin\theta.$$

Alltså är

$$\boxed{dx\,dy\,dz} = \left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| dr\,d\theta\,d\varphi = \boxed{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}$$

och varialbytesformeln för trippelintegraler vid övergång till sfäriska koordinater följer från detta.

Symmetrier

Med hjälp av symmetrier kan uträkning av en del integraler förenklas.

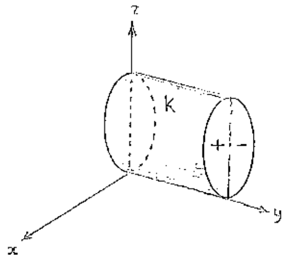
Udda funktioner

Om en funktion $f(x,y,z)$ är udda i x-led, dvs

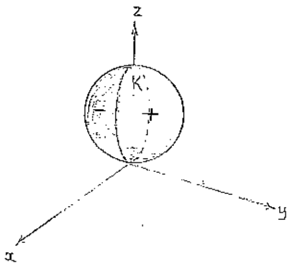
$$f(-x,y,z) = -f(x,y,z),$$

och integreras över ett område K som är symmetriskt i x-led kring $x=0$, då är

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0.$$



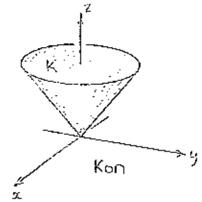
Integralen $\iiint_K x\,dx\,dy\,dz$ har värdet 0 eftersom integranden x är udda i x-led och K är symmetrisk i x-led kring $x=0$.



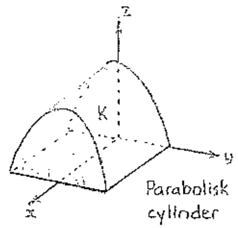
Integralen $\iiint_K \arctan y\,dx\,dy\,dz$ har värdet 0 eftersom integranden $\arctan y$ är udda i y-led och K är symmetrisk i y-led kring $y=0$.

Övning 16: Förklara varför nedanstående integraler har värdet 0.

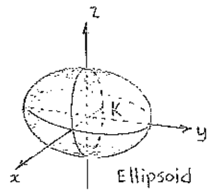
a) $\iiint_K xyz\,dx\,dy\,dz$



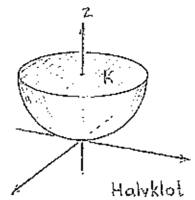
b) $\iiint_K x^2y^3z^4\,dx\,dy\,dz$



c) $\iiint_K (x^2y^2z+z)\,dx\,dy\,dz$



d) $\iiint_K \sqrt{x^3+y^3}\,dx\,dy\,dz$

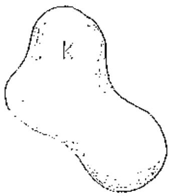


Tillämpningar

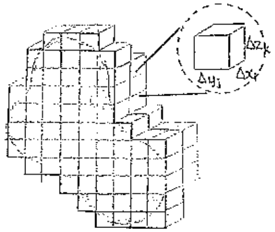
Volym

Volymen av en kropp K ges av

$$V = \iiint_K dx\,dy\,dz$$



① Vi ska bestämma volymen av kroppen K.



② Dela upp K i axelparallella delkuber som har volym

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

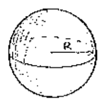
③ Den totala volymen är approximativt summan av delvolymerna

$$V \approx \sum_{\text{delkuber}} \Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k .$$

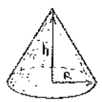
Högerledet är en Riemannsumma som konvergerar mot en trippelintegral när indelningens finhet går mot 0,

$$V = \lim_{\text{finhet}\to 0} \sum_{\text{delkuber}} \Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k = \iiint_K dx\,dy\,dz .$$

Exempel 6 Bestäm volymen av ett klot med radie R.



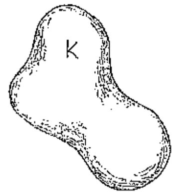
Exempel 7 Bestäm volymen av en rak cirkulär kon med radie R och höjd h.



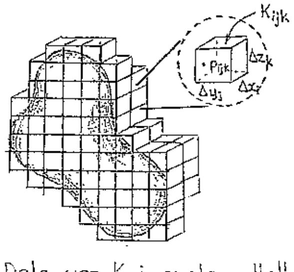
Massa

Massan av en kropp K som har densitet $\rho(x,y,z)$ ges av

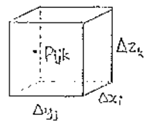
$$\boxed{m = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .}$$



① Vi ska bestämma massan av kroppen K.



② Dela upp K i axelparallella delkuber K_{ijk} och välj en punkt P_{ijk} i varje K_{ijk}.



③ Massan av delkuben K_{ijk} är approximativt

$$\Delta m_{ijk} = \rho(P_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

(massa = densitet · volym)

④ Den totala massan är approximativt summan av delmassorna

$$m \approx \sum_{\text{delkuber}} \rho(P_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k .$$

När indelningens finhet går mot 0 konvergerar Riemannsumman mot en integral,

$$m = \lim_{\text{finhet}\to 0} \sum_{\text{delkuber}} \rho(P_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

Masscentrum

Masscentrum (x_c, y_c, z_c) för en kropp K som har **densitet** $\rho(x,y,z)$ ges av

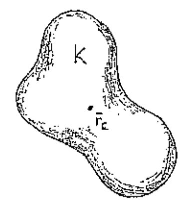
$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m} \iiint_K x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \\ y_c = \frac{1}{m} \iiint_K y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \\ z_c = \frac{1}{m} \iiint_K z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

där m är kroppens massa.

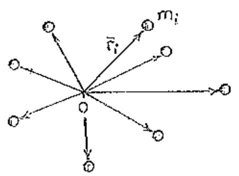
Med vektorbeteckningar kan detta skrivas

$$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{m} \iiint_K (x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{m} \iiint_K \bar{r}\,\rho(\bar{r})\,dx\,dy\,dz.$$



① Vi ska bestämma masscentrum $\bar{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ för K.



② Masscentrum för en samling av n partiklar ges av

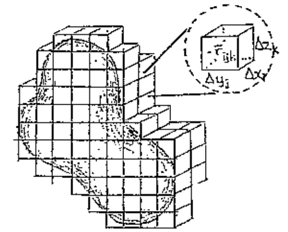
$$\bar{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i$$

där

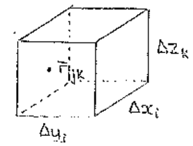
$\bar{r}_i$: ortsvektor till partikel i

m_i : partikel i:s massa

m : partiklarnas sammanlagda massa.



③ Dela upp K i axelparallella delkuber K_{ijk} och välj en punkt $\bar{r}_{ijk}$ i varje K_{ijk}.



④ Varje delkub kan approximativt betraktas som en partikel med massa

$$m_{ijk} = \rho(\bar{r}_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

och läge $\bar{r}_{ijk}$.

⑤ Masscentrum för delkuberna är approximativt

$$\bar{r}_c \approx \frac{1}{m} \sum_{\text{delkuber}} m_{ijk}\,\bar{r}_{ijk}$$

⑥ När indelningens finhet går mot 0 konvergerar Riemannsumman mot

$$\bar{r}_c = \lim_{\text{finhet}\to 0} \frac{1}{m} \sum_{\text{delkuber}} \rho(\bar{r}_{ijk})\,\bar{r}_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

$$= \frac{1}{m} \iiint_K \rho(\bar{r})\,\bar{r}\,dx\,dy\,dz.$$

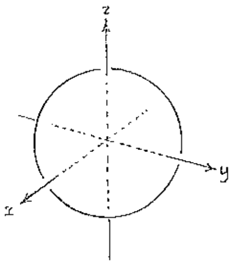
Exempel 8: Bestäm masscentrum för ett halvklot med radie R och konstant densitet.

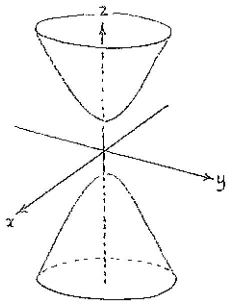
Exempel 9: Bestäm masscentrum för en plan homogen cirkelsektor med radie R och medelpunktsvinkel φ.

Några EX ur övningsboken

8.4 Klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 49$ delas av den tvåmantlade hyperboloiden $x^2+y^2-z^2+1=0$ i tre delar. Två av dessa har samma volym. Bestäm denna.

Vi börjar med att skissera klotet och hyperboloiden (som har z-axeln som symmetriaxel).

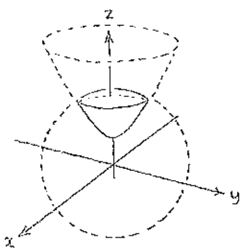




De två delar som innesluts av ytorna och har samma volym utgörs av

- området av klotet ovanför hyperboloidens övre mantelyta i z-led, och
- området av klotet under hyperboloidens undre mantelyta i z-led.

Eftersom de har samma form kan vi koncentrera oss på den övre delen och bestämma dess volym.



8.4 forts. Skärningskurvan mellan ytorna består av de punkter som ligger på båda ytor och uppfyller därför båda ytornas ekvationer

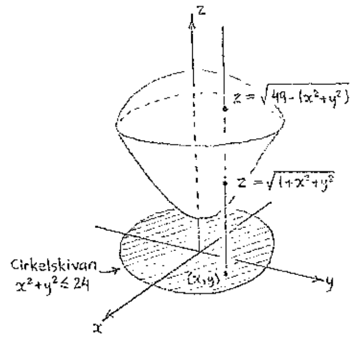
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 49, & (1) \\ x^2+y^2-z^2 = -1. & (2) \end{cases}$$

Differensen (1) - (2) ger att

$$2z^2 = 50 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 5$$

och eftersom vi fokuserar på den övre delen är vi bara intresserade av kurvan med $z=5$. Ekvation (1) ger då att $x^2+y^2=24$. Skärningskurvan är alltså en cirkel i planet $z=5$ med medelpunkt i $(x,y)=(0,0)$ och radie $\sqrt{24}$.

Vi kan beskriva området som bestående av punkter (x,y,z) där (x,y) ligger inom cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 24$ och z varierar från $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ (hyperboloiden) upp till $z=\sqrt{49-(x^2+y^2)}$ (klotytan).



8.4 forts. 2

Om vi kallar området för V så kan vi bestämma dess volym med en integral som vi integrerar i z-led,

$$\text{Volym} = \iiint_V dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 24} dx\,dy \int_{\sqrt{1+x^2+y^2}}^{\sqrt{49-(x^2+y^2)}} dz$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 24} \left(\sqrt{49-(x^2+y^2)} - \sqrt{1+x^2+y^2}\right) dx\,dy.$$

Den återstående dubbelintegralen beräknar vi genom att gå över i polära koordinater,

$$\text{Volym} = \iint_{r\le\sqrt{24}} \left(\sqrt{49-r^2} - \sqrt{1+r^2}\right) r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{24}} \left(\sqrt{49-r^2} - \sqrt{1+r^2}\right) r\,dr$$
$$= \{ s = 1+r^2,\ ds = 2r\,dr \}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{24}} \left(\sqrt{50-s} - \sqrt{s}\right) ds$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\,\theta\,\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \Big[-\tfrac{2}{3}(50-s)^{3/2} - \tfrac{2}{3}s^{3/2}\Big]_{s=1}^{s=25}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\cdot 125 - \tfrac{2}{3}\cdot 125 - \left(-\tfrac{2}{3}\cdot 343 - \tfrac{2}{3}\cdot 1\right)\right)$$
$$= \pi\cdot\frac{1}{6}\left(-500 - 500 + 1372 + 4\right)$$
$$= \frac{188\pi}{3}.$$

8.11

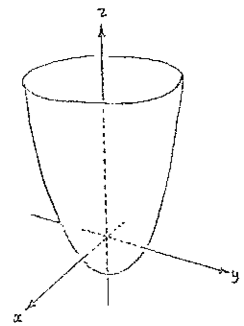
I ett lämpligt koordinatsystem beskrivs en kristallskål av olikheterna

$$z \geqslant x^2 + y^2 - 1,\quad z \leqslant \sqrt{x^2+y^2} + 1,\quad z \geqslant 0.$$

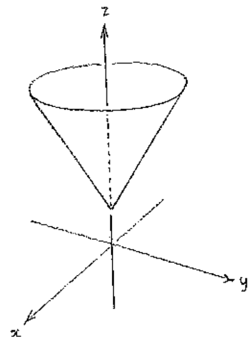
Gör en enkel skiss av skålen samt beräkna volymen av den glasmassa som skålen är gjord av.

De tre olikheterna beskriver var och en följande områden:

- $z \geqslant x^2+y^2-1$ är uppfylld för alla punkter på och ovanför paraboloiden $z = x^2+y^2-1$ som har sin spets i $(0,0,-1)$ och z-axeln som symmetriaxel.
- $z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}+1$ ger de punkter som är på eller under konen $z = \sqrt{x^2+y^2}+1$ som har sin spets i $(0,0,1)$ och z-axeln som symmetriaxel.
- $z \geqslant 0$ satisfieras av alla punkter på eller ovanför x,y-planet.



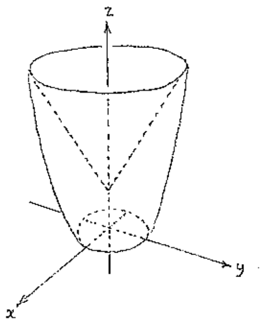
Paraboloiden $z = x^2+y^2-1$



Konen $z = \sqrt{x^2+y^2}+1$

8.11 forts.

När vi kombinerar dessa tre områden får vi följande skålformade kropp (notera den platta botten).



Innan vi försöker beskriva skålen närmare bestämmer vi skärningskurvorna mellan ytorna:

- Paraboloiden och konen.

  Punkterna på skärningskurvan ligger på både paraboloiden och konen, och uppfyller därför båda ytornas ekvationer

$$\begin{cases} z = x^2+y^2-1 & (1) \\ z = \sqrt{x^2+y^2}+1 & (2) \end{cases}$$

  Detta system ger att $z+1=(z-1)^2$ som har lösningarna $z=0$ och $z=3$, varav $z=0$ är en falsk rot (ekvation (2) saknar lösningar). Med $z=3$ ger (1) att $x^2+y^2=4$. Skärningskurvan är alltså en cirkel i planet $z=3$ med medelpunkt i $(x,y)=(0,0)$ och radie $\sqrt{4}=2$.

- Paraboloiden och x,y-planet

  De punkter på paraboloiden som har $z=0$ ges av

$$0 = x^2+y^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=1.$$

  Skärningskurvan är därmed en cirkel i x,y-planet med medelpunkt i origo och radie 1.

8.11 forts. 2

I cirkelskivan $D_1: x^2+y^2 \leq 1$ har paraboloiden z-värden mindre än 0,

$$z = x^2+y^2-1 \leq 1-1 = 0.$$

I cirkelringen $D_2: 1 < x^2+y^2 \leq 4$ har paraboloiden z-värden större än 0 men mindre än motsvarande z-värden på konen,

$$z = x^2+y^2-1 > 1-1 = 0,$$

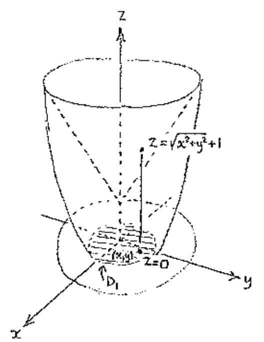
$$z = x^2+y^2-1 \leq \sqrt{x^2+y^2}+1, \quad \text{ty } t-1 \leq \sqrt{t}+1 \text{ för } t \leq 4.$$

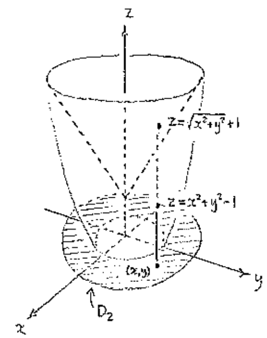
Utanför D_1 och D_2, dvs $x^2+y^2>4$, har paraboloiden z-värden större än motsvarande z-värden på konen,

$$z = x^2+y^2-1 > \sqrt{x^2+y^2}+1, \quad \text{ty } t-1 > \sqrt{t}+1 \text{ för } t>4.$$

Detta visar att skålen kan beskrivas som

- I cirkelskivan D_1 begränsas skålen i z-led underifrån av $z=0$ och ovanifrån av $z=\sqrt{x^2+y^2}+1$.
- I cirkelringen D_2 begränsas skålen i z-led underifrån av $z=x^2+y^2-1$ och ovanifrån av $z=\sqrt{x^2+y^2}+1$.





8.11 forts. 3

Inför vi beteckningarna V_1 och V_2 för den del av skålen som avgränsas av D_1 respektive D_2, så ges skålens volym av

$$\text{Volym} = \iiint_{V_1} dx\,dy\,dz + \iiint_{V_2} dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{D_1} dx\,dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}+1} dz + \iint_{D_2} dx\,dy \int_{x^2+y^2-1}^{\sqrt{x^2+y^2}+1} dz$$

$$= \iint_{D_1} \left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right) dx\,dy + \iint_{D_2} \left(\sqrt{x^2+y^2}+1-(x^2+y^2-1)\right) dx\,dy.$$

I polära koordinater ges D_1 av $0 \le r \le 1$ och D_2 av $1 \le r \le 2$, och vi får att

$$\text{Volym} = \iint_{D_1} (r+1)\,r\,dr\,d\theta + \iint_{D_2} (r+1-(r^2-1))\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2+r)\,dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (r^2-r^3+2r)\,dr$$

$$= \Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \Big[\tfrac{1}{3}r^3+\tfrac{1}{2}r^2\Big]_{r=0}^{r=1} + \Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \Big[\tfrac{1}{3}r^3-\tfrac{1}{4}r^4+r^2\Big]_{r=1}^{r=2}$$

$$= \frac{5\pi}{3} + \frac{19\pi}{3}$$

$$= \frac{29\pi}{6}.$$

8.13 Beräkna volymen av ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

Tricket är att vi inför nya, omskalade, variabler

$$u = x/a$$
$$v = y/b$$
$$w = z/c$$

för då övergår ellipsoiden till att bli ett klot

$$u^2+v^2+w^2 \le 1.$$

Använder vi sedan integralformeln för volymen,

$$\text{Volym} = \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} dx\,dy\,dz,$$

och byter till de nya variablerna, får vi

$$\text{Volym} = \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

Notera nu att eftersom variabelbytet är linjärt blir determinanten bara en konstant,

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= abc,$$

8.13 forts.

och efter att den konstanten flyttas utanför integralen återstår en integral vars värde är volymen av ett klot,

$$\text{Volym} = |abc| \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1} du\,dv\,dw$$

$$= |abc| \cdot (\text{Volym av enhetsklotet})$$

$$= |abc| \cdot \tfrac{4}{3}\pi.$$

Anm. Det går också att räkna ut den sista integralen (om man har glömt formeln för volymen av ett klot),

$$\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1} du\,dv\,dw = \{\text{Rymdpolära koordinater}\}$$

$$= \iiint\limits_{0\le r\le 1} r^2 \sin\theta \,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^1 r^2\,dr$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3}.$$

8.31

a) Beräkna volymen av den ändliga kropp K som begränsas av ytorna

$$z = 2 - x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad z = y^2.$$

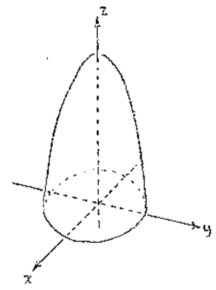
b) Bestäm masscentrum (x_{mc}, y_{mc}, z_{mc}) för kroppen K. Masscentrums koordinater ges av

$$x_{mc} = \iiint_K x\,dx\,dy\,dz \Big/ \iiint_K dx\,dy\,dz,$$

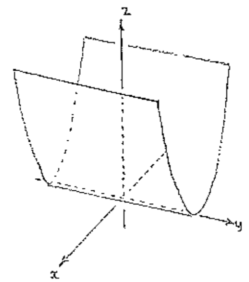
y_{mc} och z_{mc} analogt.

---

a) Ett första steg är att vi ritar upp paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ och den paraboliska cylindern $z = y^2$.

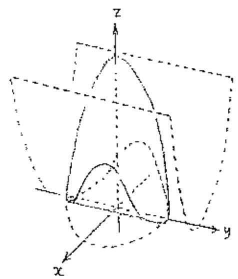


Paraboloiden $z=2-x^2-y^2$



Cylindern $z = y^2$

Ytorna innesluter följande ändliga kropp K.



$\boxed{\begin{array}{c}8.31\\ \text{forts.}\end{array}}$

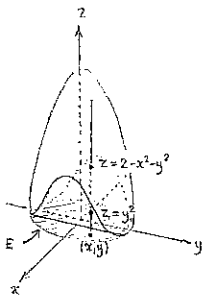
Skärningskurvan mellan ytor bestäms av de punkter som uppfyller båda ytornas ekvationer,

$$\begin{cases} z = 2-x^2-y^2 \\ z = y^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+2y^2 = 2 \\ \qquad z = y^2 \end{cases}$$

Detta visar att kroppen K begränsas i x,y-led av ellipsskivan

$$E: \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 \le 1$$

och för punkter (x,y) inom ellipsskivan begränsas z underifrån av $z=y^2$ och ovanifrån av $z=2-x^2-y^2$.



Volymen av K ges därför av

$$\iiint_K dx\,dy\,dz = \iint_E dx\,dy \int_{z=y^2}^{z=2-x^2-y^2} dz$$

$$= \iint_E (2-x^2-2y^2)\,dx\,dy$$

Denna dubbelintegral beräknar vi genom att gå över i elliptisk-polära koordinater,

$$x = \sqrt{2}\,r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta,$$

$\boxed{\begin{array}{c}8.31\\ \text{forts. 2}\end{array}}$

dvs polära koordinater där vi skalat om i x-led.

I dessa koordinater ges området av

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

och integrationselementet övergår till

$$dx\,dy = \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{pmatrix}\right| dr\,d\theta$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & -r\sqrt{2}\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| dr\,d\theta$$

$$= \left|\sqrt{2}\cos\theta\cdot r\cos\theta - (-r\sqrt{2}\sin\theta)\cdot\sin\theta\right| dr\,d\theta$$

$$= r\sqrt{2}\,\left|\cos^2\theta + \sin^2\theta\right| dr\,d\theta$$

$$= r\sqrt{2}\,dr\,d\theta$$

Vi får att

$$\iint_E (2-x^2-2y^2)\,dx\,dy = \iint_{r\le 1} (2-2r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta)\,r\sqrt{2}\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-2r^2)\,r\,dr$$

$$= \sqrt{2}\,\Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\Big[r^2 - \tfrac{1}{2}r^4\Big]_{r=0}^{r=1}$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

b) För att bestämma masscentrum behöver vi beräkna ytterligare tre integraler

$$\iiint_K x\,dx\,dy\,dz, \quad \iiint_K y\,dx\,dy\,dz \quad \text{och} \quad \iiint_K z\,dx\,dy\,dz.$$

8.31 forts. 3

De två första integralerna blir 0 eftersom vi integrerar en udda funktion i x- resp. y-led över ett integrationsområde som är symmetriskt i dessa ledder.

Den sista integralen blir

$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \iint_E dx\,dy \int_{z=y^2}^{z=2-x^2-y^2} z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\iint_E \left((2-x^2-y^2)^2-(y^2)^2\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_E \left(4-4(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2-y^4\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_E \left(4-4(x^2+y^2)+x^2(x^2+2y^2)\right) dx\,dy$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} x = r\sqrt{2}\cos\theta & x^2+y^2 = r^2(1+\cos^2\theta) \\ y = r\sin\theta & x^2+2y^2 = 2r^2 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_E \left(4-4r^2(1+\cos^2\theta)+2r^2\cos^2\theta\cdot 2r^2\right)\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(4r-4(1+\cos^2\theta)r^3+4\cos^2\theta\, r^5\right) dr$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \left[2r^2-(1+\cos^2\theta)r^4+\frac{2}{3}\cos^2\theta\, r^6\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \left(2-(1+\cos^2\theta)+\frac{2}{3}\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \left(1-\frac{1}{3}\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{6}\left[5\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}.$$

Masscentrum finns i $\left(0, 0, \dfrac{\frac{5\sqrt{2}\pi}{6}}{\pi\sqrt{2}}\right) = \left(0, 0, \frac{5}{6}\right)$.