Greens formel

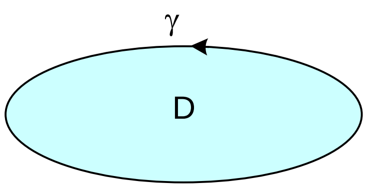
Greens formel. Vi betraktar ett C^1 vektorfält $\vec{F} = (P,\ Q)$ definierad i ett öppet område Ω i R^2. Låt D vara ett kompakt delområde av Ω med randen som består av en eller flera styckvis C^1 kurvor, där randen orienteras så att området D ligger till vänster om randen. Då gäller

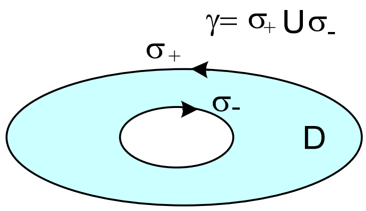
$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Alternativ beteckning:

$$\int_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Greens formel gäller om randkurvor är orienterade som i nedanstående två exempel:





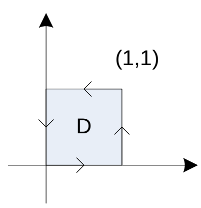
Anmärkning: Antagandet i Greens formel att vektorfält $\vec{F} = (P,\ Q)$ är C^1, med andra ord, att P,Q och deras partiella derivator av första ordningen $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}$ och $\frac{\partial P}{\partial y}$ är kontinuerliga kan ersättas med svagare villkor.

Det är **tillräckligt** att anta i Greens formel att P, Q , $\frac{\partial Q}{\partial x}$ och $\frac{\partial P}{\partial y}$ är **kontinuerliga** (med samma antagandet om randen som ovan).

Beräkning av kurvintegraler i R^2 längs en sluten kurva med hjälp av Greens formel

Uppgift 1. Låt $\vec{F} = (x,\ x^2 + 2xy)$. Beräkna med hjälp av Greens formel $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs randen till kvadraten ABCD där A(0,0), B(1,0), C(1,1) och D(0,1) genomlöpt i positiv riktning (moturs).

Lösning:

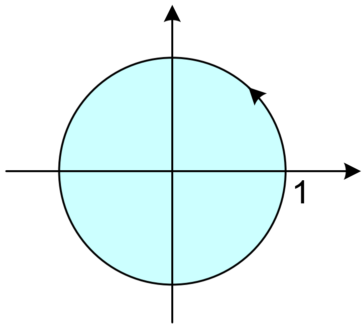


Eftersom komponenter $P = x,\ och\ \ Q = x^2 + 2xy$ är kontinuerliga och har kontinuerliga partiella derivator i D och på randen, kan vi använda Greens formel

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (2x + 2y - 0)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (2x + 2y)dy = 2$$

Svar: $\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2$

Uppgift 2. Låt $\vec{F} = (e^{x^2} + x^2y, \;\; y^2 + sin(y))$. Beräkna med hjälp av Greens formel $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv riktning (moturs).



Lösning:

Eftersom $P = e^{x^2} + x^2y, \; och \quad Q = y^2 + sin(y)$ är kontinuerliga och har kontinuerliga partiella derivator i D och på randen,, kan vi använda Greens formel

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-x^2)dxdy$$

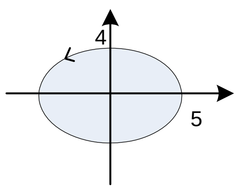
(Polära koordinater)

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-r^2cos^2\varphi)rdr = \int_0^{2\pi} cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 (-r^3)dr = \int_0^{2\pi} \frac{1 + cos(2\varphi)}{2} d\varphi \int_0^1 (-r^3)dr = -\frac{\pi}{4}$$

Svar: $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\pi}{4}$

Uppgift 3. Låt $\vec{F} = (sin(x) \; + 2y, \;\; 5x + y^2 + e^{3y})$. Beräkna med hjälp av Greens formel $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs elipsen $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led (moturs).

Lösning:



Eftersom $P = och \quad Q$ är kontinuerliga och har kontinuerliga partiella derivator i D och på randen,, kan vi använda Greens formel

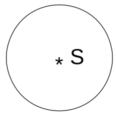
$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (5 - 2)dxdy = \iint_D 3dxdy = 3\,Arean(D) = 3 \cdot 5 \cdot 4\pi = 60\pi$$

Svar: $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 60\pi$

Uppgift 4. Låt $\vec{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. Låt γ vara cirkeln $x^2+y^2=1$ genomlöpt ett varv i positiv riktning (moturs).

a) Får man använda Greens formel för att beräkna $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

b) Beräkna integral direkt, genom att parametrisera cirkeln.



Lösning:

a) Greens formel får **inte** användas eftersom fältet **inte är kontinuerlig** i punkten S(0,0) som ligger inom cirkeln.

b) Vi parametriserar cirkeln och beräknar kurvintegralen direkt.

$$x = cost, \quad y = sint, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\vec{F}(t) = (\frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1})$

$\vec{F}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$$

Svar: $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$

Uppgift 5. Vi betraktar fältet $\vec{F} = (\frac{-3y}{x^2+y^2}, \frac{3x}{x^2+y^2})$,som har en singulär punkt (0,0) dvs fältet är **ej definierad i (0,0).**

För komponenter $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ gäller (kontrollera själv)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

i alla punkter förutom (0,0).

Beräkna $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ längs den givna slutna kurvan i positiv led då

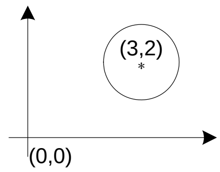
a) är cirkeln $(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$

b) γ är cirkeln $x^2+y^2=1$

c) γ är den slutna kurvan (fyrhörning) ABCDA där A(4,0), B(0,3) C(-2,0), D(0,-2)

Lösning:

a)
γ är cirkeln $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.
Den singulära punkten (0,0) ligger utanför cirkeln.
Eftersom P och Q och deras derivator
är kontinuerliga inuti cirkeln och på själva
cirkelns linje kan vi använda Greens formel.
Enligt Greens formel får vi

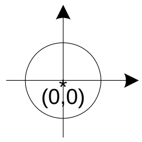


$$\int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D 0dxdy = 0$$

b) är cirkeln $x^2+y^2=1$
Den här gången ligger fältets singulära punkt (0,0) inuti cirkeln, och därför gäller **inte Greens formel.**
Vi parametriserar cirkeln och beräknar kurvintegralen direkt .

$x=cost, \quad y=sint, \qquad 0\le t \le 2\pi$

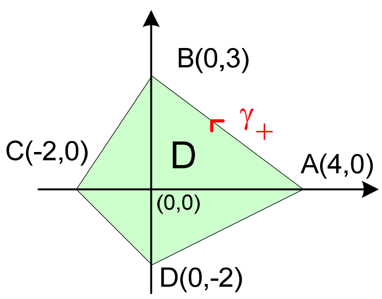
$\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t)$
$\vec{r}\,'(t)=(-\sin t,\cos t)$
$\vec{F}(t)=\left(\frac{3-\sin t}{1},\ \frac{3\cos t}{1}\right)$
$\vec{F}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=3\sin^2 t+3\cos^2 t=3$



$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)dt = \int_0^{2\pi} 3dt = 6\pi$$

Svar b: 6π

c)
Den här gången ligger fältets singulära punkt (0,0) inuti cirkeln, och därför gäller **inte Greens formel** för området D_1 som innesluts av kurvan ABCDA .

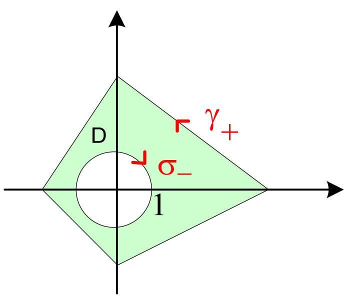


Vi kan beräkna integraler genom att parametrisera de fyra linjestyckena, som leder till stora beräkningar.
Men, eftersom

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \quad om \quad (x,y)\neq(0,0) ,$$

kan vi beräkna integralen på enklare sätt:

Vi omringar den singulära punkten (0,0) med en enkel kurva till ex cirkeln $x^2+y^2=1$, och tillämpar Greens formel på **området D mellan de två kurvorna** (inga singularitet finns mellan kurvorna).
Randen består nu av
i) positivt orienterade och
ii) negativt orienterade σ : $x^2+y^2=1$



D. v. s. $\quad = \gamma_+ \quad \cup \ \sigma_-$

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{g} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\sigma_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Enligt **Greens formeln har vi**

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

där

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\sigma_-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\sigma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Därför

$$\int_{\gamma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\sigma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

och slutligen

$$\int_{\gamma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\sigma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (*)$$

De två integraler på höger sidan är enkelt att beräkna:

1. $\int_{\sigma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6$ (som vi har beräknat **i b)**)

2. $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D 0dxdy \ = 0$

Från (*) har vi nu

$$\int_{\gamma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6\pi + 0 = 6\pi$$

Svar c: 6π