# SF1626 Flervariabelanalys

## Föreläsning 17

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

## Dagens Lektion: Avsnitt 16.3-16.4

1. Greens formel för $D$ i planet med randkurvan $\gamma$, och $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

## Dagens Lektion: Avsnitt 16.3-16.4

1. Greens formel för $D$ i planet med randkurvan $\gamma$, och $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

2. Gauss sats (divergenssatsen) i $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\,dA$$

# Vektoranalys

## Dagens Lektion: Avsnitt 16.3-16.4

1. Greens formel för $D$ i planet med randkurvan $\gamma$, och $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

2. Gauss sats (divergenssatsen) i $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\,dA$$

3. Gauss sats (divergenssatsen) i $\mathbb{R}^3$: $K$ i rummet med randytan $Y$

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV$$

Viktig: En del villkor ska vara uppfyllda för dessa påståenden

# Greens formel

## Ett problematiskt problemet!

Beräkna[1]

$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

där $\gamma$ är ellipsen $x^2/4 + y^2/9 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led.

[1] Se boken sidan 923, Ex. 4. Vad kan ni säga om $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

# Greens formel

## Ett problematiskt problemet!

Beräkna[1]

$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

där $\gamma$ är ellipsen $x^2/4 + y^2/9 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led.

Greens sats: Fungerar den?

[1] Se boken sidan 923, Ex. 4. Vad kan ni säga om $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

# Greens formel

## Ett problematiskt problemet!

Beräkna[1]

$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

där $\gamma$ är ellipsen $x^2/4 + y^2/9 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led.

Greens sats: Fungerar den?

Parametrisering: Går det att räkna integralen då?

[1] Se boken sidan 923, Ex. 4. Vad kan ni säga om $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

# Greens formel

## Ett problematiskt problemet!

Beräkna[1]

$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

där $\gamma$ är ellipsen $x^2/4 + y^2/9 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led.

Greens sats: Fungerar den?

Parametrisering: Går det att räkna integralen då?

Har funktionen en potentialfunktion? Går det att använda den?

[1] Se boken sidan 923, Ex. 4. Vad kan ni säga om $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

# Greens formel

## Ett problematiskt problemet!

Beräkna[1]

$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

där $\gamma$ är ellipsen $x^2/4 + y^2/9 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led.

Greens sats: Fungerar den?

Parametrisering: Går det att räkna integralen då?

Har funktionen en potentialfunktion? Går det att använda den?

Hur ska vi beräkna integralen?

[1] Se boken sidan 923, Ex. 4. Vad kan ni säga om $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

# Tekniker för kurvintegraler

## Vilka villkor ska vara uppfyllda för varje metod:

1. Parametrisera kurvan;
   villkor: Beräkningsbart integral
2. Hitta en potential;
   villkor: Måste vara kontinuerlig, och deriverbar
3. Byt väg;
   villkor: Vektorfältet måste vara deriverbar i området
4. Greens formel;
   villkor: Sluten kurva, samt vektorfältet måste vara deriverbar i området

# Gauss sats (divergenssatsen) i $\mathbb{R}^3$

## Gauss sats (divergenssatsen):

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

om $K$ är en en reguljär kropp vars rand $Y$ är en orienterad sluten yta med utåtriktat enhetsnormalfält $\hat{\mathbf{N}}$ och $\mathbf{F}$ är ett glatt vektorfält på $K$.

**Exempel:** Flödet ut från enhetskuben $K$ av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y, z)$ är

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K 3\, dV = 3$$

(Två andra varianter av satsen finns i bokens sats 9 i kap 16.4)

## Gauss sats (divergenssatsen)

### Exempel

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2, 0, 3)$ ut från enhetskuben som ges av
$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Svar: 0

# Gauss sats (divergenssatsen)

## Exempel

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y,\ y,\ z)$$

ut från området som ges av olikheterna $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$.
Svar: $3\pi/2$

## Exempel

För $g$ kontinuerlig funktion i planet samt oberoende av $z$-variabler beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (z,\ x,\ g(x, y))$$

ut från klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Svar: 0

# Gauss sats (divergenssatsen)

## Exempel

Beräkna nettoflödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 3)$ ut ur området som ges av olikheterna $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

Svar: $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$

**Stokes sats:**

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

där förstås vissa förutsättningar krävs (se boken), och underförstått att $\gamma$ är den rätt orienterade randen till ytan $Y$.

**Obs:** Om ytan $Y$ ligger i $xy$-planet så är detta Greens formel.

## Stokes sats:

**Exempel:** Om $\mathbf{F} = (3z, 5x, -2y)$ och $\gamma$ är skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $z = y + 3$, orienterad moturs (sett uppifrån) så får vi med Stokes sats

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (-2, 3, 5) \cdot (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\, dS = 2\pi$$