SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 3

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ (kap 12.1-12.2)

1. Definitionsmängd, Värdemängd, Funktionsgraf
2. Nivåkurvor, nivåytor
3. Gränsvärde
4. Kontinuitet

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Temperaturspriding

Temperaturen vid tiden t i punkten (x, y) i en platta (Enhetskvadrat) med noll temperatur på randen och en initial temperature

$$T_0(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y, \qquad \text{(dvs vid tiden } t = 0\text{)}$$

ges av

$$T(t, x, y) = e^{-2\pi t} \sin \pi x \sin \pi y.$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Definition: Funktion

En reellvärd **funktion** f av n variabler är en regel som ordnar ett entydigt bestämt reellt tal $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ till varje punkt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i någon mängd $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$.
Mängden $\mathcal{D}(f)$ kallas definitionsmängd (eng: domain) och mängden av alla funktionsvärden kallas värdemängd (eng: range).

Konvention

Om inget sägs angående definitionsmängden antar man alltid att den är den största mängd i $\mathbb{R}^n$ för vilken $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är ett väldefinierat reellt tal.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

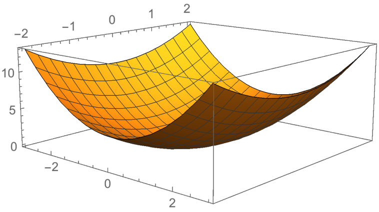
Funktionsgraf

Funktionsgrafen till en reellvärd funktion f av 2 variabler består av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ sådana att den tredje koordinaten är funktionsvärdet av de båda första. Dvs alla (x, y, z) sådana att $z = f(x, y)$

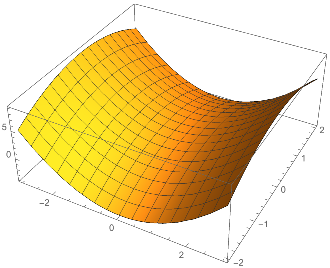
På samma sätt definierar man funktionsgraf för en funktion av n variabler (fast den är svårare att rita). Den blir då en n-dimensionell hyperyta i $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exempel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = x^2 - y^2.$$



Figur: $f = x^2 + y^2$



Figur: $g = x^2 - y^2$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Nivåkurvor: topografiska kartor!

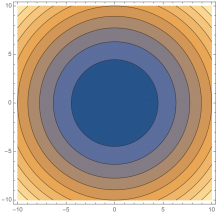
En nivåkurva till en reellvärd funktion f av 2 variabler består av alla punkter (x, y) i definitionsmängden till f som uppfyller en ekvation $f(x, y) = C$ för något fixt tal C.

Exempel

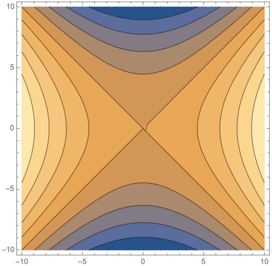
Rita några av nivåkurvorna till funktionerna

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = x^2 - y^2.$$

Lösning: Får $f(x, y) = C$ får vi $x^2 + y^2 = C$ dvs då $C > 0$ ger detta cirklar med centrum i origo och radie $\sqrt{C}$.
Får $g(x, y) = C$ får vi $x^2 - y^2 = C$, se bilden.



Figur: $f = x^2 + y^2 = C$



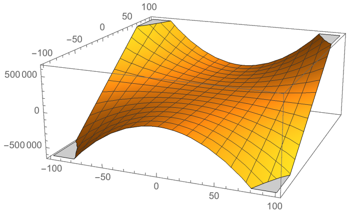
Figur: $g = x^2 - y^2 = C$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

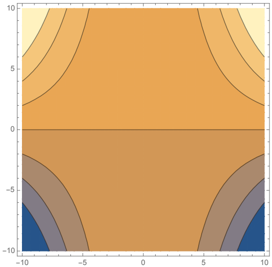
Quiz (här):

Bestäm definitionsmängden till funktionerna nedan, rita två valfria nivåkurvor till respektive funktion samt skissa funktionsgrafen.

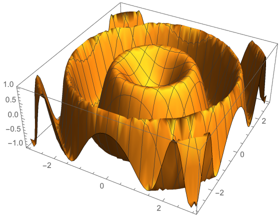
1. $f_1(x, y) = x^2 y$.
2. $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $f_3(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.



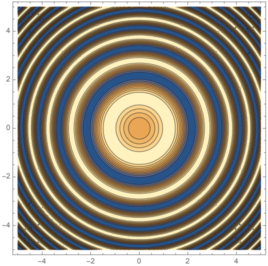
Figur: *grafen* : $f = x^2 y$



Figur: Nivåkurvor: $f = x^2 y = C$



Figur: *grafen* : $f = \sin(x^2 + y^2)$



Figur: Nivåkurvor: $f = \sin(x^2 + y^2) = C$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Anmärkningar

Kurvor i $\mathbb{R}^2$ kan beskrivas på flera olika sätt:

- funktionskurva $\quad y = f(x)$,
- nivåkurva $\quad F(x, y) = C$,
- parameterkurva $(x(t), y(t)), \quad a < t < b$.

Quiz (här):

Ge ett exempel på en kurva i planet som kan beskrivas på all tre sätten ovan.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Anmärkningar

Kurvor i $\mathbb{R}^2$ kan beskrivas på flera olika sätt:

- funktionskurva $\quad y = f(x)$,
- nivåkurva $\quad F(x, y) = C$,
- parameterkurva $(x(t), y(t)), \quad a < t < b$.

Quiz (här):

Ge ett exempel på en kurva i planet som kan beskrivas på all tre sätten ovan.
Svar: En parabel i planet.

- $y = x^2$,
- $y - x^2 = C$,
- $(x, y) = (t, t^2), \quad -\infty < t < \infty$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

Här ges en nivåyta på formen

$$f(x, y, z) = constant$$

då $w = f(x, y, z)$ är en funktion av 3-variabler.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

Här ges en nivåyta på formen

$$f(x, y, z) = constant$$

då $w = f(x, y, z)$ är en funktion av 3-variabler.

1) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$?

Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

Här ges en nivåyta på formen

$$f(x, y, z) = constant$$

då $w = f(x, y, z)$ är en funktion av 3-variabler.

1) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$? sfärer med olika radier

Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

Här ges en nivåyta på formen

$$f(x, y, z) = constant$$

då $w = f(x, y, z)$ är en funktion av 3-variabler.

1) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$? sfärer med olika radier

2) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2$?

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

Här ges en nivåyta på formen

$$f(x, y, z) = constant$$

då $w = f(x, y, z)$ är en funktion av 3-variabler.

1) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$? sfärer med olika radier

2) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2$? cirkulära cylindrar med olika radier.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

Här ges en nivåyta på formen

$$f(x, y, z) = constant$$

då $w = f(x, y, z)$ är en funktion av 3-variabler.

1) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$? sfärer med olika radier

2) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x^2 + y^2$? cirkulära cylindrar med olika radier.

2) Vad är nivåytorna för $f(x, y, z) = x + y - z$?

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

Här ges en nivåyta på formen

$$f(x,y,z) = constant$$

då $w = f(x,y,z)$ är en funktion av 3-variabler.

1) Vad är nivåytorna för $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$? sfärer med olika radier

2) Vad är nivåytorna för $f(x,y,z) = x^2 + y^2$? cirkulära cylindrar med olika radier.

2) Vad är nivåytorna för $f(x,y,z) = x + y - z$? plan i rymden.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Gränsvärde

En funktion f av n variabler sägs ha gränsvärdet L när $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{a}$, skrivet

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L,$$

om det för varje tal $\epsilon > 0$ finns det ett tal $\delta > 0$ så att

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$$

(förutsatt att $\mathbf{x}$ tillhör definitionsmängden för f).

I ovanstående definition förutsätter vi att varje omgivning av $\mathbf{a}$ innehåller punkter från definitionsmängden till f (skilda från $\mathbf{a}$).

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

De vanliga räknereglerna för gränsvärden gäller:

Om $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ och $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = M$ (och varje omgivning till **a** innehåller punkter som ligger i båda funktionernas definitionsmängder) så gäller att

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = L + M$

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = LM$

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})) = L/M$ (om $M \neq 0$)

För sammansättning gäller: om $H(t)$ är kontinuerlig i $t = L$ så är

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} H(f(\mathbf{x})) = H(L)$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Kontinuitet

En reellvärd funktion f av n variabler är kontinuerlig i en punkt $\mathbf{a}$ om

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

Om detta gäller för alla punkter i definitionsmängden sägs f vara en kontinuerlig funktion.

Om $n = 2$ och punkten har koordinater (a, b) betyder detta

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Faktum

Elementära uttryck är kontinuerliga överallt där de är definierade.

Exempel

I vilka punkter är funktionen

$$f(x,y) = \frac{y}{x}$$

kontinuerlig? Beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x}.$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Viktig Anmärkning

Att beräkna gränsvärden (när de existerar) är mycket svårare än att visa att de inte har gränsvärden (när den inte existerar).

Försök mest med exempel där gränsvärden inte existerar.

Exempel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{\text{ längs } x = y\} =$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Viktig Anmärkning

Att beräkna gränsvärden (när de existerar) är mycket svårare än att visa att de inte har gränsvärden (när den inte existerar).

Försök mest med exempel där gränsvärden inte existerar.

Exempel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{\text{ längs } x = y\} = \frac{1}{2}.$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Viktig Anmärkning

Att beräkna gränsvärden (när de existerar) är mycket svårare än att visa att de inte har gränsvärden (när den inte existerar).

Försök mest med exempel där gränsvärden inte existerar.

Exempel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{\text{ längs } x = y\} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{\text{ längs } x = 2y\} =$$

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Viktig Anmärkning

Att beräkna gränsvärden (när de existerar) är mycket svårare än att visa att de inte har gränsvärden (när den inte existerar).

Försök mest med exempel där gränsvärden inte existerar.

Exempel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{\text{ längs } x = y\} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{\text{ längs } x = 2y\} = \frac{2}{5}.$$

Existens av gränsvärden: Generellt svåra problem.

Beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Existens av gränsvärden: Generellt svåra problem.

Beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Vi har

$$|xy| \leq 2|x||y| \leq x^2 + y^2,$$

eftersom $0 \leq (|x| - |y|)^2$.

Existens av gränsvärden: Generellt svåra problem.

Beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Vi har

$$|xy| \leq 2|x||y| \leq x^2+y^2,$$

eftersom $0 \leq (|x|-|y|)^2$. Därför har vi

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq |x|\left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right) \leq |x|\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right) = |x| \quad \to \quad 0$$

då $(x,y)\to(0,0)$.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Exempel

Avgör om gränsvärdena existerar:

$$\text{Enkel:} \quad 1) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x+y}$$

$$\text{Svår:} \quad 2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{\sqrt{4x^2+4y^2}}$$

Lösning

1) ser vi direkt att funktionen inte är definierad då $x = -y$, men väl definierad längs $x = y$, och har gränsvärdet noll längs denna linje. Alltså funktionen saknar gränsvärde i origo.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$

Lösning

1) ser vi direkt att funktionen inte är definierad då $x = -y$, men väl definierad längs $x = y$, och har gränsvärdet noll längs denna linje. Alltså funktionen saknar gränsvärde i origo.

2) Här ser vi att då $|y|$ är litet så är $y^4 < y^2$, och därför kan hela uttrycket skrivas som

$$0 \leq \frac{x^2 + y^4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} < \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \to 0.$$

Alltså funktionen har gränsvärde som är noll.

Minitenta

Beräkna gränsvärdena:

$$3)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \qquad 4)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}$$

Lösning till Minitenta

Uppgift 3) Vi ser att både nämnaren och täljaren är av samma grad, ds grad 2. Det bådar inte gott! Exvis valet $x = y$ ger

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

Samtidigt som valet $x = -y$ ger

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Alltså gränsvärde saknas, då vi har 2 olika värden beroende vilken riktning vi tittar på.

Lösning till Minitenta

Uppgift 4) Här är det lite mer intressant. Vi ska använda oss av 1-variabel analys också. Tänk på

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Uttrycket vi har kan med hjälp av substitutionen $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ skrivas som

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Läxa till nästa gång

Gör detta:

- Förbered er för seminariet!
- Se film och svara på frågor i filmen till föreläsning 4
  https://www.youtube.com/watch?v=F7dtfXcKgzk&index=7&list=PLN8b0iQL-uXu6ww-gT1qx9tAf49ZfT08N
- Gränsvärden: exempel 1, 2, 3 och 4 i boken är illustrativa
- Rekommenderade uppgifter i kap 12.1: 5, 9, 13,15, 17, 23, 27, 33
- Rekommenderade uppgifter i kap 12.2: 5, 7, 9, 11, 15