TANGENTPLAN OCH NORMALVEKTOR TILL YTAN $z = f(x,y)$

LINEARISERING

NORMALVEKTOR (NORMALRIKTNING) TILL YTAN.

Låt $z = f(x,y)$ vara en differentierbar funktion i punkten $(x,y) = (a,b)$.

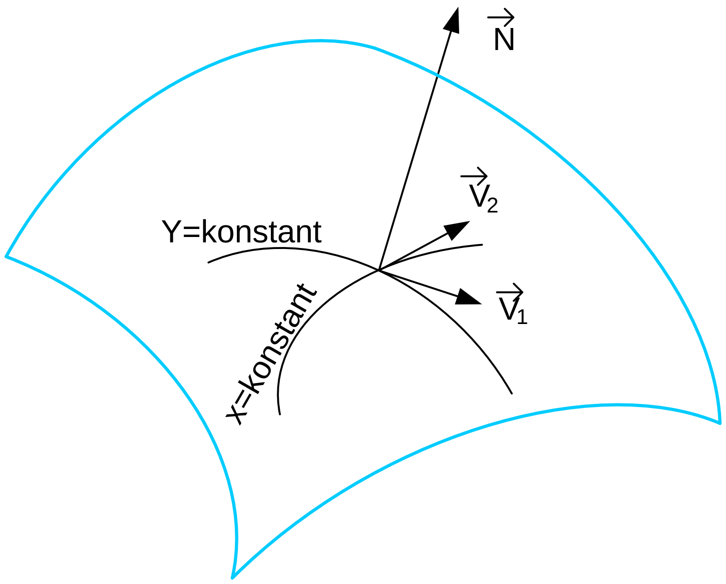
Då är

$$\vec{N} = (-f_x'(a,b), -f_y'(a,b), 1)$$

en normalvektor (normalriktning) till ytan i punkten $(a,b, f(a,b))$.

Vektorn $\vec{N}$ är orienterad uppåt (eftersom z-koordinaten är +1)

Vektorn $-\vec{N} = (f_x'(a,b), \quad f_y'(a,b), \quad -1)$ är en ytans normalvektor orienterad nedåt (eftersom z-koordinaten är -1)



Kort förklaring:

Om $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en kurva i R^3, då är $\vec{T} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ kurvans tangentvektor.

(se en lektion om kurvor på parameterform).

En punkt på ytan $z = f(x, y)$ har koordinater $(x, y, f(x, y))$. Om vi väljer *y*= konstant =*b* och varierar endast x , får vi kurvan $\vec{r}_1(x) = (x, b, f(x,b))$ som ligger på ytan och som har tangent vektorn $\vec{r}_1\,'(x) = (1, 0, f_x\,'(x,b))$ .Kurvans tangentvektor i punkten P blir därför

$\vec{V}_1 = \vec{r}_1\,'(a) = (1, 0, f_x\,'(a,b))$.

På samma sätt visar vi att $\vec{V}_2 = (0, 1, f_y\,'(a,b))$ är en tangentvektor i punkten P till kurvan

$\vec{r}_2(y) = (a, y, f(a, y))$ (som definieras av x=konstant=a) .

Härav är

$$\vec{N} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x\,' \\ 0 & 1 & f_y\,' \end{vmatrix} = (-f_x'(a,b), -f_y'(a,b), 1)$$

vad skulle visas.

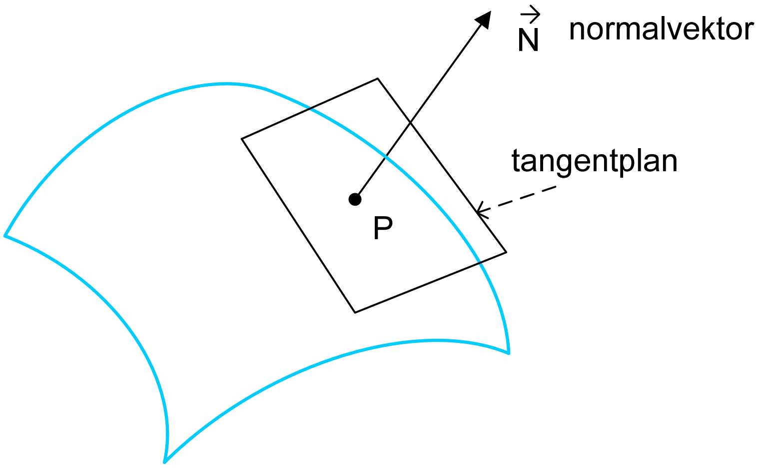
EXEMPEL 1: Om $z = f(x, y) = 5 + x^2 + y^2$ då är

$f_x' = 2x$, $f_x'(1,1) = 2$, $f_y' = 2y$, $f_y'(1,1) = 2$.

En normalvektor i punkten P(1,1,7) blir då

$\vec{N} = (-f_x'(1,1), -f_y'(1,1), 1) = (-2, -2, 1)$

TANGENTPLAN.



För tangentplanet i P har vi punktens koordinater (a,b,c) och en normalvektor $\vec{N} = (-f'_x(a,b), -f'_y(a,b), 1)$.

Därför ges tangentplanets ekvation i punkten $P(a,b,c)$ på ytan $z = f(x,y)$, där $c = f(a,b)$,

av följande formel.

$$-f'_x(a,b)(x-a) - f'_y(a,b)(y-b) + 1\cdot(z-c) = 0$$

eller $z = c + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$

som ofta skrivs på följande form:

Tangentplanets ekvation i punkten $P(a,b,f(a,b))$ på ytan $z = f(x,y)$ ges av

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

EXEMPEL 2: Om $z = f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ då är

$f'_x = 2x$, $f'_x(1,1) = 2$, $f'_y = 2y$, $f'_y(1,1) = 2$,

Tangentplanets ekvation i punkten (1,1,4) blir då

$$z = 4 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

LINJÄRA APPROXIMATIONER

Låt $z = f(x,y)$ vara en given yta med kontinuerliga partiella derivator i en öppen omgivning till punkten $x = x_0, y = y_0$.

Låt vidare

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (*)$$

vara tangentplanets ekvation i punkten $P(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

Om en punkt (x_1,y_1) i xy-planet ligger nära punkten (x_0,y_0) då kan vi använda tangentplanets ekvation (*) för att approximativt bestämma $f(x_1,y_1)$ dvs funktionens värde i (x_1,y_1):

$$f(x_1,y_1) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x_1-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y_1-y_0) \qquad (**)$$

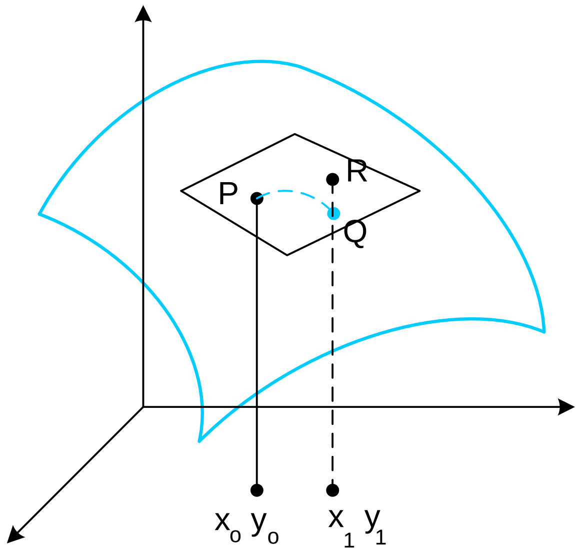
Vi kan också skriva

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y_1 - y_0)$$

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + \varepsilon \qquad (***)$$

där ε betecknar **restterm** dvs **felet vid approximationen**.

Uttrycket (**) eller (***) kallas för **linjär approximation** eller **linearisering (linjärisering, linjarisering**) av funktionen $f(x, y)$.



Andra skrivsätt:

Om vi betecknar $\Delta x = (x_1 - x_0)$ och $\Delta y = (y_1 - y_0)$ kan vi skriva

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta x + \varepsilon$$

eller

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon$$

Anmärkning. Approximationer av högre grad och mer om felet behandlar vi senare i kursen i samband med Taylors formel.

DIFFERENTIAL

Vi kan skriva ovanstående approximationsformel för funktionen $z = f(x, y)$ på följande sätt:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y_1 - y_0) \qquad \text{(F1)}$$

Om vi betecknar $\Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$ och $df = f'_x(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y_1 - y_0)$

kan vi skriva

$$\boxed{\Delta f \approx df}$$

Uttrycket på högersidan i formeln (F1) ,
$df = f'_x(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y_1 - y_0)$,

kallas **differential** till funktionen $z = f(x, y)$ och betecknas dz eller d*f*.

Kortare $df = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y$

Om x , y är oberoende variabler betecknar vi $\Delta x = dx$ och $\Delta y = dy$ och

$$df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$ (**differential** i en allmän punkt (x,y))

På liknande sätt definieras differential av en funktion ed n variabler

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$df = f'_1 \cdot dx_1 + f'_2 \cdot dx_2 + \cdots + f'_n \cdot dx_n$$

Om *f* är differentierbar då

$$\Delta f \approx df$$

EXEMPEL3: Om $f(x, y) = y^2 \sin(x)$ då är funktionens differential

$$df = y^2 \cos(x) \cdot dx + 2y \sin(x) \cdot dy$$

DIFFERENTIERBARHET.

Om en funktion av en variabel harderivatan i en punkt x=a, då är funktionen automatiskt kontinuerlig i denna punkt.

Detta egenskap gäller INTE för funktioner av flera variabel. Det finns funktioner (t ex med två var) $z = f(x, y)$ som har partiella derivator i en punkt men som är INTE kontinuerliga i punkten

Ett exempel : Funktionen $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

är INTE kontinuerlig i punkten trots att båda derivator existerar och $f'_x(0,0) = 0,\ f'_y(0,0) = 0$ (som kan visas med hjälp av derivatans definitionen.)

I många satser inom flervariabelanalys är kravet att en funktion $z = f(x,y)$ har partiella derivator oftast för svag. Vi använder oftast ett starkare antagande : att funktion är differentierbar.
Begreppet differentierbar definierar vi nedan:

DEFINITION: Låt $z = f(x,y)$ vara en funktion definierad i en öppen mängd D som innehåller en punkt $P(x_0, y_0)$.

Vi säger att funktionen är **differentierbar** om följande gäller

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot h + f'_y(x_0,y_0)\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\cdot \varepsilon(h,k)$$

där $\varepsilon(h,k) \to 0$ om $(h,k) \to 0$.

På liknande sätt definieras differentierbarhet för en funktion av *n* variabler.
För en funktion av en variabel är differentierbarhet och deriverbarhet detsamma.

Följande sats är direkt följd av definitionen:

SATS 1. Om en funktion är differentierbar i punkten P så är funktionen kontinuerlig i P.

Nedanstående sats hjälper oss att undersöka om en funktion är differentierbar (se kursboken för bevis.)

SATS 2. Låt $z = f(x,y)$ vara en funktion definierad i en öppen mängd D som innehåller en punkt $P(x_0, y_0)$. Om funktionen har **partiella derivator** i D som är **kontinuerliga** i punkten P så är funktionen **differentierbar** i $P(x_0, y_0)$.

EXEMPEL 4. Om $f(x,y) = e^y \sin(x)$ har **partiella derivator**

$$f'_x = e^y \cos(x) \qquad f'_y = e^y \sin(x)$$

som är **kontinuerliga** i varje punkt (x,y) i R^2. Därför är funktionen **differentierbar i** hela R^2.

Uppgift 1. Bestäm en normalvektor till ytan $z = f(x,y) = x^2 + y^3 + 2$ i punkten P(1,1,4).

Lösning:
Vi beräknar partiella derivator i punkten P(1,1,4):

$f'_x(x,y)=2x \Rightarrow f'_x(1,1)=2$,

$f'_y(x,y)=3y^2 \Rightarrow f'_y(1,1)=3$ och substituerar i formel n

$$\vec{N}=(-f'_x(a,b),-f'_y(a,b),1)=(-2,-3,1)$$

Svar: $\vec{N}=(-2,-3,1)$

Uppgift 2. Bestäm alla punkter på ytan $z=f(x,y)=2+\sqrt{1-x^2-y^2}$ där ytans normalvektor är parallell med räta linjen L: (x,y,z) = (1+x, 2+y, 3+z).

Lösning:

Linjens riktningsvektor är $\vec{v}=(1,1,1)$.

Partiella derivator:

$$f'_x=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad f'_y=\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Ytans normalvektor (i punkten (x,y,z)) är nu

$$\vec{N}=(-f'_x,-f'_y,1)=(\frac{-(-x)}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{-(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,1)$$

Vektorerna $\vec{N}$ och $\vec{v}$ är parallella om det finns k så att

$\vec{N}$ = k $\vec{v}$

som leder till tre skalära ekvationer:

$\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=k$ (ekv 1) , $\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=k$ (ekv 2) och 1=k (ekv 3)

Enligt sista ekvationen har vi k=1 som vi använder i första två ekv och får

$\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=1$ och $\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=1$

eller

$x=\sqrt{1-x^2-y^2}$ och $y=\sqrt{1-x^2-y^2}$ som visar att x,y måste vara **positiva** och dessutom

x=y (*) .

Härav och från en av ovanstående ekvationer till ex $x=\sqrt{1-x^2-y^2}$ följer:

$$x=\sqrt{1-x^2-x^2} \Rightarrow x=\sqrt{1-2x^2} \Rightarrow x^2=1-2x^2 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Eftersom x positiv har vi slutligen $\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Från x=y har vi att $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$z=2+\sqrt{1-x^2-y^2}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Svar. Normalen i punkten $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},2+\frac{1}{\sqrt{3}})$ är parallell med linjen L.

Uppgift 3. Betrakta funktionen $z=f(x,y)=2+\ln(x^2+y-4)$.

a) Bestäm tangentplanets ekvation i punkten P(2, 1, *f*(2,1)).

b) Beräkna approximativt $f(2.2,1.1)$.

Lösning:

$$f(2,1)=2+\ln 1=2$$

$$f'_x=\frac{2x}{x^2+y-4} \Rightarrow f'_x(2,1)=\frac{4}{1}=4, \qquad f'_y=\frac{1}{x^2+y-4} \Rightarrow f'_y(2,1)=\frac{1}{1}=1$$

Tangentplanet har ekvation

$$z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

dvs: $z=2+4(x-2)+1(y-1)$ (tangentens ekvation)

(eller kortare, $z=4x+y-7$)

b) Vi approximativt beräknar $f(2.2,1.1)$ genom att substituera x=2.2, y=1.1 i tangentens ekvation

$$f(2.2,1.1)\approx 2+4(2.2-2)+1(1.1-1)=2+0.8+0.1=2.9$$

Svar. $f(2.2,1.1)\approx 2.9$.

Uppgift 4. Betrakta funktionen $z=f(r,h)=3+h\cdot\ln(h^2+r^2-4)$.

a) Linearisera funktionen kring punkten $r=1, h=2$.

b) Beräkna approximativt $f(1.2,2.1)$.

Lösning:

$$f(1, 2) = 3 + 2\ln 1 = 3$$

$$f_r' = \frac{2hr}{h^2 + r^2 - 4} \Rightarrow f_r'(1,2) = \frac{4}{1} = 4,$$

$$f_h' = \ln(h^2 + r^2 - 4) + h\frac{2h}{h^2 + r^2 - 4} \Rightarrow f_r'(1,2) = \ln 1 + \frac{8}{1} = 8$$

(Anmärkning: Om du tycker att det är enklare att hantera uttryck då kan du byta beteckning till $z = f(x, y) = 3 + y \cdot \ln(y^2 + x^2 - 4)$)

Vi substituerar beräknade värden i formeln för linearisering av funktionen $z = f(r, h)$

$$f(r,h) = f(r_0, h_0) + f_r'(r_0, h_0)(r - r_0) + f_h'(r_0, h_0)(h - h_0) + \varepsilon$$

och får

dvs: $f(r,h) = 3 + 4(r-1) + 8(h-2) + \varepsilon$

Med andra ord $f(r,h) \approx 3 + 4(r-1) + 8(h-2)$

b) Vi approximativt beräknar $f(1.2, 2.1)$ genom att substituera r=1.2, h=2.1 i

$$f(r,h) \approx 3 + 4(r-1) + 8(h-2)$$

$f(1.2, 2.1) \approx 3 + 0.8 + 0.8 = 4.6$

Svar. $f(1.2, 2.1) \approx 4.6$.

Uppgift 5. Låt Π vara det tangentplan till ytan $z = 2x^2 + y^2 + 4$ som är parallell med planet $-8x + 4y + 2z = 9$. Låt A, B och C vara skärningspunkter mellan tangentplanet Π och koordinataxlarna. Bestäm volymen av pyramiden OABC, där O betecknar origo (0,0,0).

Lösning:

Först bestämmer vi den punkt i vilken tangentplanets normalvektor $\vec{N}$ är parallell med $\vec{v} = (-8, 4, 2)$.

Vi beräknar

$\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1) = (-4x, -2y, 1)$.

$\vec{N}$ och $\vec{v}$ är parallella om $\vec{N}$ = k $\vec{v}$ dvs om

$(-4x, -2y, 1) = k(-8, 4, 2)$

som ger $-4x = -8k, \quad -2y = 4k, \quad 1 = 2k$

Härav k=1/2, x=1 och y=–1. z=f(1,-1)= 7)
Tangentplanet I punkten P(1,-1,7) är parallell med givna planet.

I punkten P gäller $f'_x, = 4x = 4$ och $f'_y, = 2y = -2$

Därmed blir tangentplanets ekvation i punkten P(1, -1, 7)

$$z = 7 + 4(x-1) - 2(y+1)$$

eller $z = 4x - 2y + 1$

Tangentplanet skär axlarna i följande punkter:

x=0, y=0 $\Rightarrow$ z=1 och därmed A(0, 0, 1)

x=0, z=0 $\Rightarrow$ y=1/2 och därmed B(0, 1/2 , 0)

y=0, z=0 $\Rightarrow$ x=-1/4 och därmed B(-1/4, 0 , 0)
Basen i pyramiden är rätvinkliga triangeln OAB med arean

$$areanOAB = \frac{1}{2}|1|\cdot|\frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$$

Volymen av pyramiden $= \frac{1}{3}$ (Basytans area)* höjden= $\frac{1}{3}(\frac{1}{4}\cdot|-\frac{1}{4}|) = \frac{1}{48}$

Svar: Volymen = 1/ 48 v. e.