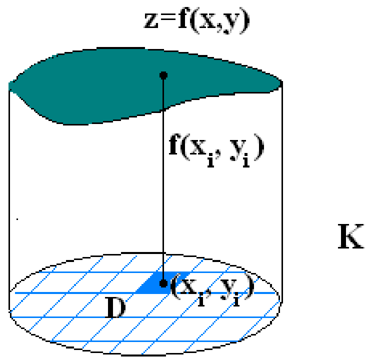
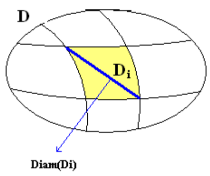
DUBBELINTEGRALER.
Rektangulära (xy) koordinater

Definition. Låt z=f(x,y) vara en reell funktion av två variabler x och y. Vi delar integrationsområde (definitionsområde) D i ändligt antal mätbara delmängder D_i och i varje D_i väljer en godtycklig punkt (x_i, y_i).



Dubbelintegral definieras med hjälp av gränsvärdet



$$\iint_D f(x,y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\max_i diam(D_i)\to 0} \sum_i f(x_i,y_i)Arean(D_i)$$

(om gränsvärdet existerar)

Definition med ε och δ:
Integral $\iint_D f(x,y)dxdy$ existerar och har värdet ***I*** om för varje reellt tal ε > 0 existerar δ > 0 så att

$\max_i diam(D_i) < \delta \Rightarrow |\sum_i f(x_i,y_i)Arean(D_i) - \boldsymbol{I}| < \varepsilon$.

- Om funktionen $z = f(x,y) \geq 0$ (alltså endast om $f(x,y)$ är en **icke-negativ funktion**) då är

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \boldsymbol{Volymen(K)}$$

där $K = \{(x,y,z): (x,y) \in D, \ \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ d.v.s. K består av punkter som ligger mellan definitionsmängden D och ytan $z = f(x,y)$ (se bilden ovan).

Man använder dubbelintegralens definition för att härleda formler inom matematik, fysik och tekniska tillämpningar, men själva beräkningen utför man oftast genom upprepad (itererad, successiv) integration.

Beräkning av dubbelintegraler genom upprepad (itererad) integration

---

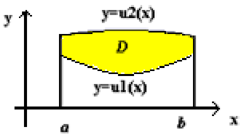
Om integrationsområde D är definierad med

$$a \le x \le b, \qquad och \quad u_1(x) \le y \le u_2(x),$$

d. v. s x mellan två tal, y mellan två funktioner (av x),

beräknas dubbelintegralen med följande upprepad integration

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{u1(x)}^{u2(x)} f(x,y)dy$$



Anmärkning:

$\int_a^b dx \int_{u1(x)}^{u2(x)} f(x,y)dy$ är en kortare beteckning för $\int_a^b \left[\int_{u1(x)}^{u2(x)} f(x,y)dy\right]$,

alltså vi integrerar på y först, substituerar y-gränser, och därefter integrerar vi på x.

Om integrationsområde D är definierad med

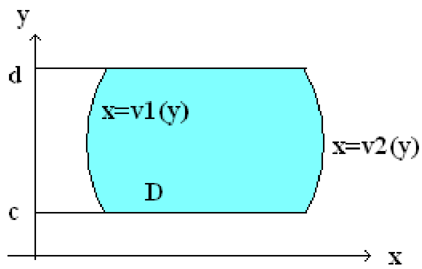
$$c \le y \le d, \qquad och \quad v_1(y) \le x \le v_2(y),$$

d. v. s y ligger mellan två konstanta tal, x mellan två funktioner (av y),

beräknas dubbelintegralen med följande upprepad integration

$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{v1(y)}^{v2(y)} f(x,y)dx,$

alltså , i detta fall, först på x och därefter på y .

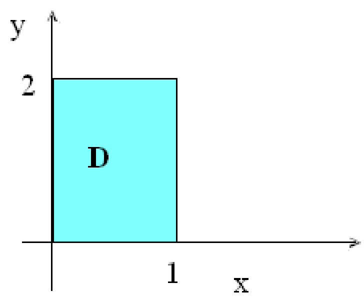


==

Exempel 1. Beräkna dubbelintegral $\iint\limits_D (x + x^2 y^2)dxdy$

då D definieras genom $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$

Lösning:



$\iint\limits_D (x + x^2 y^2)dxdy =$

$\int_0^1 dx \int_0^2 (x + x^2 y^2)dy =$

[Först integrerar vi med avseende på y och betraktar x tillfälligt som en konstant.]

$$\int_0^1 \left[xy + x^2 \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx$$ [Vi substituerar y- gränserna 2 och 0]

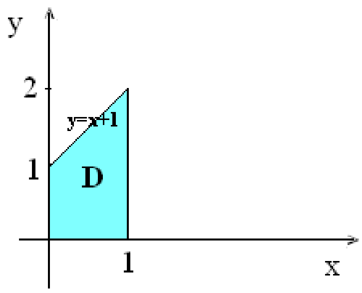
$$= \int_0^1 \left[2x + \frac{8x^2}{3} \right] dx$$ [Till slut integrerar vi med avseende på x.]

$$\left[x^2 + \frac{8x^3}{9} \right]_0^1 = 1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$$

==

Exempel 2. Beräkna dubbelintegral $\iint_D (x+4y)dxdy$

då D definieras genom $0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le x+1.$



Lösning:

$$\iint_D (x+4y)dxdy =$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} (x+4y)dy =$$

[Först integrerar vi med avseende på y och tillfälligt betraktar x som en konstant.]

$$\int_0^1 \left[xy + 2y^2 \right]_0^{x+1} dx$$ Vi substituerar gränserna

$$= \int_0^1 \left[x(x+1) + 2(x+1)^2 \right] dx,$$ förenklar

$$\int_0^1 \left[3x^2 + 5x + 2 \right] dx,$$ och till slut integrerar med avseende på x

$$\left[x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = 1 + \frac{5}{2} + 2 = \frac{11}{2}.$$

==

Uppgift 1. Beräkna dubbelintegral $\iint_D f(x,y)dxdy$ om

a) $f(x,y)=x+2y$ och D definieras genom $0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2$

b) $f(x,y)=x+y^2+2$ och D definieras genom $0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le x$

c) $f(x,y)=2x+2y$ och D definieras genom $1\le x\le 2,\ \ -x\le y\le x$

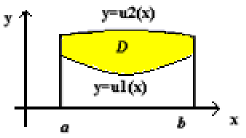
d) $f(x,y)=e^{x+y}$ och D definieras genom $2\le x\le 3,\ \ 0\le y\le 1$

e) $f(x,y)=e^{x+y}$ och D är triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (1,0) och (0,1)

f) $f(x,y)=\sin(2x+2y)$ och D definieras genom $0\le x\le \frac{\pi}{2},\ \ 0\le y\le \frac{\pi}{2}$

Tips: Eftersom **variabeln x ligger mellan två konstanter** integrerar vi först på y och därefter på x,

d.v.s. $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{u1(x)}^{u2(x)} f(x,y)dy$.



Svar:

a) 5 b) 17/12 c) 28/3 d) $e^4-2e^3+e^2$ e) 1 f) 0

Uppgift 2. Beräkna dubbelintegral $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ om

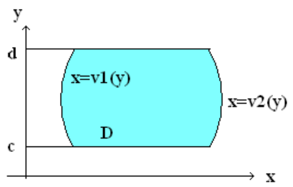
a) $f(x,y)=x+3y$ och D definieras genom $0\le x\le y,\ \ 0\le y\le 1$

b) $f(x,y)=x+y^2$ och D definieras genom $0\le x\le y,\ \ 0\le y\le 2$

c) $f(x,y)=e^{x+y}$ och D definieras genom $0\le x\le y+2,\ \ 0\le y\le 1$

Tips: Eftersom **variabeln y ligger mellan två konstanter** integrerar vi först på x och därefter på y,

alltså $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{v1(y)}^{v2(y)} f(x,y)dx,$



Svar:

a) 7/6 b) 16/3 c) $\frac{e^4}{2}-\frac{e^2}{2}-e+1$

Uppgift 3. Beräkna dubbelintegral $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ där

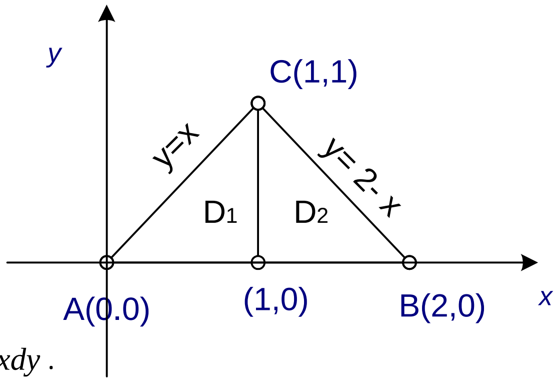
$f(x,y) = 5x + y$ och D är triangel ABC med hörn i A(0,0) , B (2,0) och C(1,1) genom att integrera

a) först på y sedan på x dvs $\int_a^b dx \int_{u1(x)}^{u2(x)} f(x,y)dy$

b) först på x sedan på y dvs $\int_c^d dy \int_{v1(y)}^{v2(y)} f(x,y)dx$

Vilket sätt a eller b ger enklare beräkningar för integralen i uppgiften?

Lösning:



a)

Vi delar D i två områden D_1 och D2

och beräknar därefter

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D1} f(x,y)dxdy + \iint_{D2} f(x,y)dxdy .$$

$$I_1 = \iint_{D1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x (5x+y)dy = \int_0^1 [5xy + \frac{y^2}{2}]_0^x dx = \int_0^1 \frac{11x^2}{2} dx = \frac{11}{6}$$

$$I_2 = \iint_{D2} f(x,y)dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (5x+y)dy = \int_1^2 (2+8x-\frac{9x^2}{2})dx = \frac{7}{2}$$

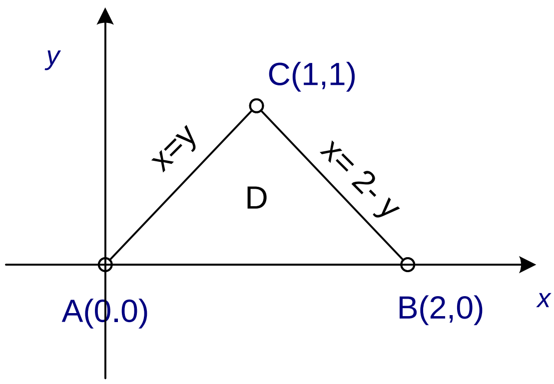
$$\iint_D f(x,y)dxdy = I_1 + I_2 = \frac{16}{3} :$$

b)

Området D kan beskrivas med

$0 \le y \le 1$

$y \le x \le 2-y$



Den här gången kan vi beräkna integralen direkt utan att dela integrations område i två delar.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (5x+y)dx = \int_0^1 (10-8y-2y^2)dy = \frac{16}{3}$$

I den här uppgiften är det enklare att beräkna i ordningen $\int_c^d dy \int_{v1(y)}^{v2(y)} f(x,y)dx$

dvs först med avseende på x [som i b)].

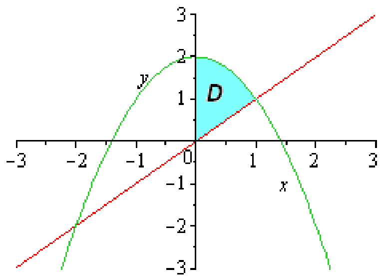
Uppgift 4. Beräkna

$$\iint_D \frac{y}{2+x}dxdy$$

där D definieras av $0 \leq x \leq y \leq 2-x^2$

Tips. Rita integrationsområdet D och integrera i den ordning som enligt din uppfattning ger enklare räkningar.

Lösning:



D ligger i första kvadranten eftersom både

x och y är ≥ 0

Kurvorna

$y = x$ och $y = 2 - x^2$

har i första kvadranten en skärningspunkt (1,1).

$$\iint_D \frac{y}{2+x}dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} \frac{y}{2+x}dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2(2+x)}\right]_{y=x}^{y=2-x^2} dx = \int_0^1 (1-\frac{x}{2}-x^2+\frac{x^3}{2})dx = \frac{13}{24}$$

Några till synes enkla funktioner har inte någon elementär primitiv funktion, t ex

$$e^{x^2}, \quad e^{-3x^2}, \quad \sin(x^2), \quad \cos(x^2), \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x} \quad \ldots$$

T ex

$$\int e^{x^2}dx$$

kan inte uttryckas som ändlig kombination av elementära funktioner (men, med hjälp av Taylorutveckling, kan vi ange integral som en oändlig summa)

Däremot $\int e^{x^2}dy$ är enkelt att beräkna eftersom e^{x^2} är konstant med avseende på *y* och därför $\int e^{x^2}dy = ye^{x^2} + C$

Vi tar hänsyn till detta när vi väljer integrationsordning i nedanstående uppgifter

Uppgift 5. Beräkna

a) $\iint\limits_D \sin y^2 dxdy$ b) $\iint\limits_D e^{3y^2} dxdy$

där D definieras av $0 \le x \le y$, $0 \le y \le 2$

Lösning a)

$$\iint\limits_D \sin y^2 dxdy = \int_0^2 dy \int_0^y \sin y^2 dx = \int_0^2 \left[x \sin y^2\right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^2 y \sin y^2 dy$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cos y^2\right]_0^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 4$$

Substitution: $y^2 = t$

$\Rightarrow \quad 2ydy = dt \Rightarrow ydy = \frac{1}{2}dt$

$$\Rightarrow \int y \sin y^2 dy = \int \frac{1}{2}\sin t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos y^2 + C$$

Svar a) $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4$

Svar b) $\frac{e^{12}}{6} - \frac{1}{6}$

Uppgift 6. Beräkna

a) $\iint\limits_D \cos x^3 dxdy$ b $\iint\limits_D \sin x^3 dxdy$

där D definieras av $0 \le y \le x^2$, $0 \le x \le 2$.

Lösning a)

$$\iint\limits_D \cos x^3 dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} \cos x^3 dy = \int_0^2 \left[y \cos x^3\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 x^2 \cos x^3 dx =$$

[Integralen $\int x^2 \cos x^3 dx$ beräknas med hjälp av substitutionen: $x^3 = t \Rightarrow \quad 3x^2dx = dt$ ....]

$= \left[\frac{\sin x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{\sin 8}{3}$

Svar a) $\frac{\sin 8}{3}$

Svar b) $\frac{1}{3} - \frac{\cos 8}{3}$

Uppgift 7. Beräkna följande integraler genom att ändra integrationsordningen.

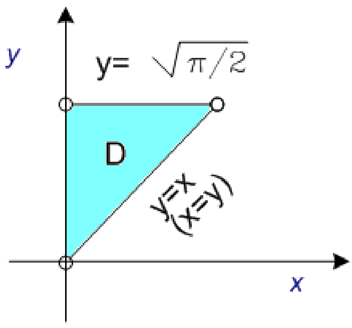
a) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} dx \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \sin y^2 \, dy$ b) $\int_0^1 dx \int_x^1 \mathrm{e}^{-3y^2} \, dy$

Lösning a)

Integrationsområdet (kolla integralens gränser) definieras av

$$0 \le x \le \sqrt{\pi/2}, \qquad x \le y \le \sqrt{\pi/2}$$

Vi ritar området



och ändrar integrationsordning:

$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} dx \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \sin y^2 \, dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} dy \int_0^y \sin y^2 \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} [\, x \sin y^2]_{x=0}^{x=y} \quad dy$

$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \ y \sin y^2 \ dy = \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} \quad = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi/2) = \frac{1}{2}$

Svar a) $\frac{1}{2}$ **Svar b)** $\frac{1}{6} - \frac{e^{-3}}{6}$