Nr 21, 10 maj -05, Amelia 2

21 Flödesintegraler och Gauss sats

21.1 Divergens och Gauss sats

21.1.1 Flöden genom slutna ytor

I detta avsnitt beräknar vi flödesintgraler på slutna ytor. Låt oss tänka oss en vind, som är ett flöde av luftmolekyler, som strömmar genom ett hus där alla fönster står öppna. Man mäter strömningen vid varje fönster, alltså vid husets ytterskal. Då kan man vänta sig att lika mycket luft strömmar in i huset som strömmar ut ur det. Detta gäller om det inte tillkommer luft i huset, som att en gastub är öppen och det ständigt strömmar ut luft från den. Lika mycket som strömmar in på ena sidan strömmar ut på den andra.

Om vi frågar hur mycket luft som strömmar in i huset räknat på hela den sida där vinden blåser, så blir inte resultatet noll. Detta illusterar att för ett massflöde där ingenting skapas eller försvinner någonstans så kan man vänta sig att totala flödet genom en sluten yta är noll, men genom en yta som inte är sluten normalt inte är noll. Om ytan är sluten kommer flödet att strömma igenom ytan igen, på andra sidan.

För ett flöde $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ kan man lätt räkna ut hur mycket som skapas i en punkt (x,y,z). Det är den s.k. divergensen:

Definition 1 ***Divergensen*** *av* $\mathbf{F}(x,y,z)$ *i punkten* (x,y,z) *är* $div\mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$. *En annan beteckning är* $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

Divergensen kallas också **källstyrkan** för $\mathbf{F}(x,y,z)$. Vi motiverar efter Gauss sats nedan varför denna summa av derivator bör ha något att göra med hur mycket som "skapas" i en punkt (x,y,z).

21.1.2 $\nabla-$operatorn

Beteckningen $\nabla\cdot\mathbf{F}$ är motiverad av den s.k. "dell-operatorn" ∇ (tecknet utläses "dell" eller "nabla"), vars definition är

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}).$$

Symbolen ∇ är alltså en vektor, om än inte en vanlig vektor. Den kallas operator för den betyder något först när den verkar på en funktion, som ska stå till höger. Vi kan skriva gradienten grad $f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ med ∇, enligt

$$\begin{aligned}(f'_x, f'_y, f'_z) &= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})f = \{\text{flytta in } f \text{ i vektorn}\} \\ &= \nabla f.\end{aligned}$$

Så ∇f =grad$f$ då f är en skalär funktion, dvs $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. För ett vektorfält $\mathbf{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$, som är $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, kan man se divergensen $P'_x + Q'_y + R'_z$ som en skalärprodukt med operatorn ∇, som följer:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P,Q,R) = P'_x + Q'_y + R'_z.$$

Vi kommer senare att stöta på rotationen av ett vektorfält $\mathbf{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$, som är

$$\text{rot}\mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y).$$

Om denna storhet, rot$\mathbf{F}$, inte är noll finns det en virvel i $\mathbf{F}$ vid punkten (x,y,z). Den kan skrivas med ∇-operatorn som $\nabla \times \mathbf{F}$ på sätt som stämmer utmärkt överens med både kryssprodukt och derivering, vi återkommer till rot$\mathbf{F}$. De tre begreppen ∇f, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ och $\nabla \times \mathbf{F}$ (alias grad$\mathbf{F}$, div$\mathbf{F}$ och rot$\mathbf{F}$) är tre ganska starka beteckningsmässiga motiveringar till operatorn $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Det finns fler.

21.1.3 Gauss sats

Efter Gauss sats motiverar vi varför denna summa av partiella derivator svarar mot hur mycket som "skapas" i (x,y,z). Hursomhelst så borde man kunna mäta totala flödet genom en sluten yta alternativt genom att summera hur mycket som skapas i alla punkter i det inre. Skapas ingenting någonstans är denna storhet noll och totala flödet genom ytan är noll.

Totala flödet genom ytan kan vi beräkna som en flödesintegral. Mängden som skapas inuti, som är div$\mathbf{F}$ summeras genom en trippelintegral över området. De två är alltså lika. Således:

Sats 2 (Gauss' sats) *Om S är en sluten yta med utårtiktad normal $\widehat{n}$ som avgränsar volymen V, och $\mathbf{F}$ är ett vektorfält med kontinuerliga derivator överallt i V, så gäller*

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \widehat{n}\ dS = \iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{F}\ dxdydz.$$

Vi kan alltså alternativt räkna ut totala flödet genom en sluten yta som en trippelintegral över hela volymen innanför ytan. Då är integranden div$\mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$.

Bevis: Beviset, i likhet med beviset av Greens formel, egentligen bara interrad integration i ett steg. Detta berör inte mycket tolkningarna ovan av divergensen som en källstyrka, men matematiska bevis handlar inte om tolkningarna. De handlar om kalkylerna. Ett matematiskt bevis kontrollerar att de numeriska kalkylerna, bokstäver där man kan sätta in tal, är korrekta.

Om vi skriver ut de två skalärprodukterna $\mathbf{F} \cdot \widehat{n} = Pn_x + Qn_y + Rn_z$ och $\nabla \cdot \mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$ så säger Gauss sats

$$\iint\limits_S (Pn_x + Qn_y + Rn_z) dS = \iiint\limits_V (P'_x + Q'_y + R'_z) dxdydz.$$

I själva verket är dessa tre delar lika var och en för sig:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S Pn_x dS &= \iiint\limits_V P'_x dxdydz,\\ \iint\limits_S Qn_y dS &= \iiint\limits_V Q'_y dxdydz \text{ och}\\ \iint\limits_S Rn_z dS &= \iiint\limits_V R'_z dxdydz.\end{aligned}$$

Vi visar först de tre likheterna separat. Gauss sats fås genom att addera de tre likheterna.

Låt oss först utföra itererad integration i z-led i trippelintegralen. Vi bevisar Gauss' sats i fallet att volymen är av det slag att den kan skrivas på formen $V = \{f(x,y) \leq z \leq g(x,y), (x,y) \in D\}$ – området mellan två funktionsytor i z-led. Dessutom kan V skrivas analogt i x-led och y-led, inte endast i z-led. Så är fallet om volymen är en konvex mängd.

Området $\{f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$ passar ju utmärkt för denna integration, liksom att R'_z är lätt att integrera m.a.p. z. Vi får

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V R'_z dxdydz &= \iint\limits_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} R'_z(x,y,z)dz\right)dxdy\\ &= \iint\limits_D (R(z,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y)))dxdy.\end{aligned}$$

Låt oss nu beräkna $\iint\limits_S Rn_z dS$. Volymen $V = \{f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$ omsluts av två delar, undersidan $S_f = \{f(x,y) = z\}$ och översidan $S_g = \{g(x,y) = z\}$. På S_f har vi

$$\iint\limits_{S_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = -\iint\limits_D (-P(x,y,f(x,y))f'_x - Q(x,y,f(x,y))f'_y + R(x,y,f(x,y)))dxdy.$$

Minustecknet beror på att vi har nedåtriktad normal. Detta beror i sin tur på att S_f är undersidan av volymen, och normalen är utåtriktad. På analogt sätt är integralen över S_g

$$\iint\limits_{S_g} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \iint\limits_D (-P(x,y,f(x,y))f'_x - Q(x,y,f(x,y))f'_y + R(x,y,f(x,y)))dxdy.$$

Integralen $\iint\limits_S Rn_z dS$, som vi är intresserade av här, svarar mot den tredje termen. Tydligen är z-komponenterna av dessa två integraler samma som vad vi fick genom integration i z-led av $\iiint\limits_V R'_z dxdydz$. Därmed har vi visat $\iint\limits_S Rn_z dS = \iiint\limits_V R'_z dxdydz$.

Vi kan visa $\iint\limits_S Qn_y dS = \iiint\limits_V Q'_y dxdydz$ på liknande sätt genom att beskriva området i y-led, $f_1(x,z) \leq y \leq g_1(x,z)$, $(x,z) \in D_1$. Och en analog metod för $\iint\limits_S Pn_x dS = \iiint\limits_V P'_x dxdydz$. Genom att addera de tre likheterna följer Gauss sats.

21.2 Flödesintegraler med Gauss sats – lösta exempel

Exempel 3 *(1109b) Beräkna ytintegralen* $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\, dS$ *till vektorfältet* $\mathbf{F}(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ *ut från kuben* $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Lösning: Om vi använde definitionen för att beräkna denna ytintegral får vi dela upp integralen i sex delar, en för varje yta. Vi får då normalriktningar $\widehat{x}$ för $x = 1$, $-\widehat{x}$ för $x = 0$, osv. Gauss ger i stället en enda trippelintegral, med en enkel integrand. Betydligt enklare. Gauss sats kan användas ty $\mathbf{F} = (4xz, -y^2, yz)$ är kontinuerlig överallt – speciellt överallt i kuben.

Vi har utåtriktad normal till kubens begränsningsytor ("ut från kuben"). Divergensen blir

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot (4xz, -y^2, yz) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}4xz - \frac{\partial}{\partial y}y^2 + \frac{\partial}{\partial z}yz \\
&= 4z - 2y + y = 4z - y.
\end{aligned}$$

Gauss' sats ger nu

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\, dS &= \iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z - y) dxdydz \\
\{y\text{-led}\} &= \int_0^1 dx \int_0^1 [4zy - \frac{1}{2}y^2]_0^1 dz \\
&= 1 \cdot \int_0^1 (4z - \frac{1}{2}) dz = [2z^2 - \frac{1}{2}z]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Svar: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\; dS = \frac{3}{2}$.

Vi såg i samband med Greens formel, där vi integrerar ett vektorfält $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ i två dimensioner, att om $Q'_x - P'_y = 0$ så kan kurvan modifieras, ty integralen över området som stängs inne av den "gamla" och "nya" kurvan är noll. Vi får ju enligt Greens formel $\displaystyle\iint (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint 0dxdy = 0$. Samma sak gäller för ett vektorfält där divergensen är noll, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, som vi ser i nästa exempel.

Exempel 4 *(1109b) Beräkna ytintegralen* $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\; dS$ *till vektorfältet* $\mathbf{F}(x,y,z) = (zy^2, e^{xz} - 3z, e^{x^2+y^2})$ *över halvsfären* S $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ *med uppåriktad normalriktning.*

Lösning: Här har vi inte en sluten yta. Detta vektorfält har divergens noll

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) &= \nabla \cdot (zy^2, e^{xz} - 3z, e^{x^2+y^2}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} zy^2 + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xz} - 3z) + \frac{\partial}{\partial z} e^{x^2+y^2} \\
&= 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Vi lägger då till halvsfärens bottenyta $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$, med nedåtriktad normalriktning. Det är alltså en cirkel i xz-planet med radie 2. Låt oss kalla denna yta S_1. Då är $S + S_1$ en sluten yta, så Gauss' sats kan användas. Vi får genom att lägga till och dra ifrån $\displaystyle\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS$:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS &= \iint_{S+S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS - \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS \\
\{\text{Gauss' sats i första termen}\} &= \iiint_V 0dxdydz - \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS \\
&= -\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS.
\end{aligned}$$

På S_1 har vi en normal $(0,0,-1)$, och $z=0$. Vi får då

$$\begin{aligned}
-\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n} dS &= -\iint\limits_{S_1} (zy^2, e^{xz}-3z, e^{x^2+y^2})\cdot(0,0,-1)dxdy \\
&= \iint\limits_{S_1} e^{x^2+y^2} dxdy \\
\{\text{polära koord.}\} &= \int_0^2\int_0^{2\pi} e^{r^2} r dr d\varphi = 2\pi[\frac{1}{2}e^{r^2}]_0^2 \\
&= \pi(e^4-1).
\end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\ dS = \pi(e^4-1).$

En yta med ett hål är också en sluten yta, om ej enkelt sammanhängande. Detta belyses i det följande exemplet.

Exempel 5 *(1110c) Beräkna ytintegralen* $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\ dS$ *till vektorfältet* $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}$ *över kuben* $-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\ -1\le z\le 1$ *där* $|\mathbf{a}|<1$.

Lösning: Här har vi en sluten yta. Gauss' sats kan ändå inte användas ty vektorfältet är inte definierat i punkten $\mathbf{a}$. Denna punkt ligger ju i kuben på grund av att $|\mathbf{a}|<1$. Att använda definitionen är inte heller så lätt för vi får sex delintegraler, en för varje begränsningsyta, och integranden blir inte så enkel heller på dessa ytor.

Beteckna $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, och notera att

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} = \frac{(x-a_1, y-a_2, z-a_3)}{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Men divergensen av fältet är

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-a_1}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{3}{2}}} &= \{\text{derivering av produkt}\} \\
&= \frac{1}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad -\frac{3}{2}\frac{(x-a_1)2(x-a_1)}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-3(x-a_1)^2}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

På liknande sätt får vi att

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-a_2}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-3(y-a_2)^2}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

och

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-a_3}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-3(z-a_3)^2}{((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Om vi adderar de tre termerna så får vi faktiskt att divergensen blir noll:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-3(x-a_1)^2\\ &\quad +(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-3(y-a_2)^2\\ &\quad +(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-3(z-a_3)^2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Så kan vi använda Gauss' sats ändå så får vi en stor förenkling. Detta betyder också att vi kan modifiera området utan att integralens värde ändras.

Och om vi tar bort en sfär runt $\mathbf{a}$ med radie säg ε (så sfären är helt innanför kuben) med inåtriktad normal, så är kuben minus detta runda hål en sluten yta där $\mathbf{F}$ är definierad överallt, ty då är punkten $\mathbf{a}$ inte i området. Om vi kallar denna sfär för $S_\varepsilon(\mathbf{a})$ så får vi

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS &= \iint_{S+S_\varepsilon(\mathbf{a})}\mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS-\iint_{S_\varepsilon(\mathbf{a})}\mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS\\ &= \iiint_V \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{F}}_{=0}dxdydz-\iint_{S_\varepsilon(\mathbf{a})}\mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS\\ &= -\iint_{S_\varepsilon(\mathbf{a})}\mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS.\end{aligned}$$

En parametrisering av $S_\varepsilon(\mathbf{a})$ är $(a_1+\varepsilon\cos\varphi\sin\theta, a_2+\varepsilon\sin\varphi\sin\theta, a_3+\varepsilon\cos\theta)$. Ytmått är $dS=\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi$. På ytan är

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y,z) &= \frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}=\frac{(a_1+\varepsilon\cos\varphi\sin\theta, a_2+\varepsilon\sin\varphi\sin\theta, a_3+\varepsilon\cos\theta)-(a_1,a_2,a_3)}{\varepsilon^3}\\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta).\end{aligned}$$

Normalriktning är $(-\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi\sin\theta,-\cos\theta)$, där vi har minustecken på grund av den inåtriktade normalen. Vi har då också $\mathbf{F}\cdot\widehat{n}=-\frac{1}{\varepsilon^2}$. Vi får

$$\begin{aligned}-\iint_{S_\varepsilon(\mathbf{a})}\mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS &= -\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(-\frac{1}{\varepsilon^2})\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi\\ &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi=\{\text{arean av enhetssfären}\}\\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

Svar: $\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\ dS=4\pi.$

Exempel 6 *(1111) Antag att* $\mathbf{F} = (r - r^3)\mathbf{r}$, *där* $\mathbf{r} = (x, y, z)$ *och* $r = |\mathbf{r}|$. *Bestämd den kropp* K *där ytintegralen* $\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\, dS$ *är maximal.*

Lösning: Notera att

$$\mathbf{F} = r(1-r^2)\mathbf{r} = (xr(1-r^2), yr(1-r^2), zr(1-r^2)),$$

och att

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} r &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}.\end{aligned}$$

På samma sätt har vi

$$\frac{\partial}{\partial y} r = \frac{y}{r} \text{ och } \frac{\partial}{\partial z} r = \frac{z}{r}.$$

Detta använder vi i följande kalkyl, som är första termen i divergensen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} xr(1-r^2) &= r(1-r^2) + x\frac{x}{r}(1-r^2) + xr(-2r)\frac{x}{r} \\ &= (r + \frac{x^2}{r})(1-r^2) - 2rx^2.\end{aligned}$$

På samma sätt får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} yr(1-r^2) &= (r + \frac{y^2}{r})(1-r^2) - 2ry^2 \text{ och} \\ \frac{\partial}{\partial z} zr(1-r^2) &= (r + \frac{z^2}{r})(1-r^2) - 2rz^2.\end{aligned}$$

Genom att lägga ihop de tre termerna får vi divergensen:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= (r + \frac{x^2}{r})(1-r^2) - 2rx^2 \\ &\quad + (r + \frac{y^2}{r})(1-r^2) - 2ry^2 \\ &\quad + (r + \frac{z^2}{r})(1-r^2) - 2rz^2 \\ \{\text{samla } x^2+y^2+z^2 \text{ till } r^2\} &= (3r + \frac{r^2}{r})(1-r^2) - 2r^3 \\ &= 4r - 6r^3 = 2r(2-3r^2).\end{aligned}$$

Gauss sats ger nu

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n} dS &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F} dxdydz \\ &= \iiint_V 2r(2-3r^2) dxdydz.\end{aligned}$$

Integranden i trippelintegralen är positiv precis då $2 - 3r^2 \geq 0$, dvs $r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Trippelintegralen är maximal då den innehåller precis det område där integranden är positiv. Således är trippelintegralen maximal på klotet $x^2+y^2+z^2 \leq \frac{2}{3}$. Så ytintegralen är maximal på den sfäriska ytan $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{3}$.

Svar: $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\, dS$ är maximal då S är sfären maximal på klotet $x^2+y^2+z^2 = \frac{2}{3}$.