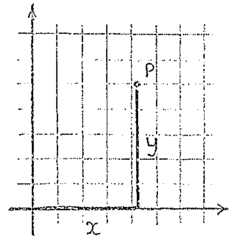
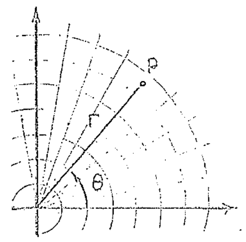
Förläsning 2 **i kursboken § 1.4.6 – 1.6**

- Kroklinjiga koordinatsystem
  - Polära koordinater
  - Cylindriska koordinater
  - Sfäriska koordinater
- Gränsvärde
  - Instängningsprincipen
  - Polära koordinater
- Kontinuitet
  - Elementära funktioner

Några vanliga kroklinjiga koordinatsystem

Polära koordinater





I polära koordinater anges en punkts läge med två koordinater (r, θ), där

r: punktens avstånd till origo

θ: motursvinkeln mellan den positiva x-axeln och sträckan från origo till punkten

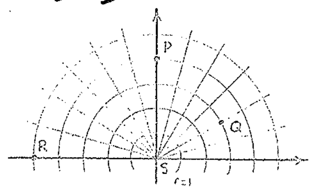
Övning 1: Vilka polära koordinater (r, θ) har punkterna?

$P = (\boxed{4}, \boxed{\pi/2})$

$Q = (\boxed{3}, \boxed{\pi/6})$

$R = (\boxed{5}, \boxed{\pi})$

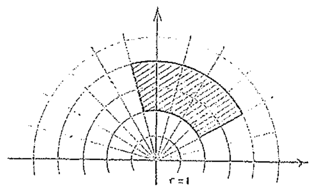
$S = (\boxed{0}, \boxed{0})$



Övning 2: Beskriv området med polära koordinater.

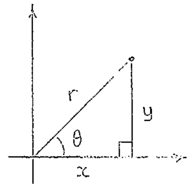
$\boxed{2} \le r \le \boxed{4}$

$\boxed{\pi/6} \le \theta \le \boxed{7\pi/12}$



Med trigonometri kan vi ta fram en översättningsformel mellan kartesiska koordinater (x,y) och polära koordinater (r,θ).

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



<u>Övning 3:</u> Vilka kartesiska koordinater har punkten $(r,\theta) = (2, \pi/3)$?

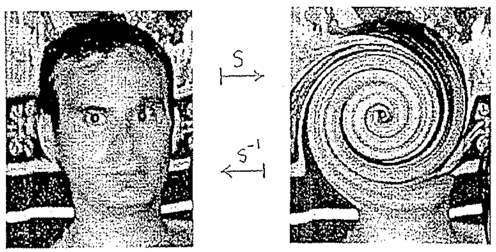
$(x,y) = (\boxed{1}, \boxed{\sqrt{3}})$

<u>Övning 4:</u> Härled den omvända översättningsformeln (från (x,y) till (r,θ)).

$$r = \boxed{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\theta = \boxed{\arctan(y/x)}$$

<u>Exempel 1</u> Brottslingen Christopher Neil försökte dölja sitt ansikte genom att applicera funktionen

$$S: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta + A/r^\alpha \end{pmatrix}$$

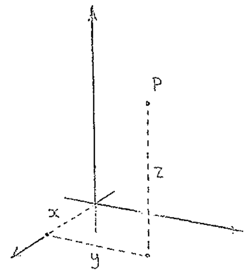


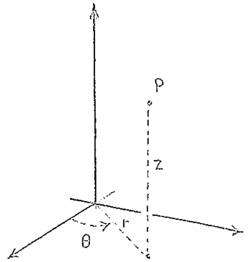
på en digitalbild (origo är i ena ögat). De sluga poliserna hittade inversfunktionen

$$S^{-1}: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta - A/r^\alpha \end{pmatrix}$$

och "vred" tillbaka bilden.

<u>Cylindriska koordinater</u>



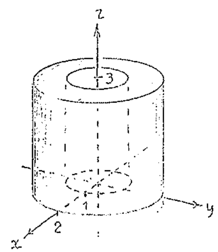


I cylindriska koordinater anges en punkts läge med tre koordinater (r,θ,z), där

(r,θ): punktens (x,y)-koordinater uttryckta i polära koordinater

z: punktens z-koordinat

<u>Övning 5:</u> Beskriv mängderna i cylindriska koordinater.

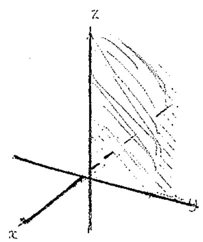


Ett cylindriskt rör

$\boxed{1} \le r \le \boxed{2}$

$\boxed{0} \le \theta \le \boxed{2\pi}$

$\boxed{0} \le z \le \boxed{3}$



Första kvadranten i <u>yz-planet</u>

$\boxed{0} \le r \le \boxed{\infty}$

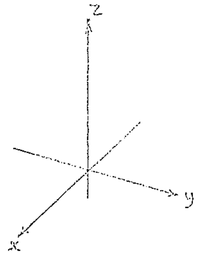
$\boxed{\pi/2} \le \theta \le \boxed{\pi/2}$

$\boxed{0} \le z \le \boxed{\infty}$

Sambandet mellan en punkts kartesiska koordinater (x, y, z) och dess cylindriska koordinater (r, θ, z) ges av

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

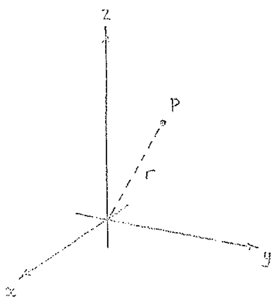
Exempel 2 Skissera ytan
$z = x^2 + y^2$.

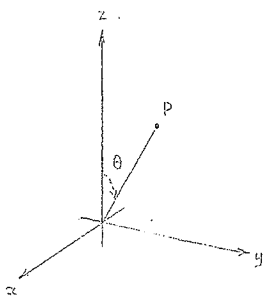


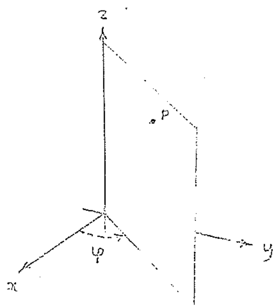
Sfäriska koordinater

I sfäriska koordinater anges en punkts läge med tre koordinater (r, θ, φ), där

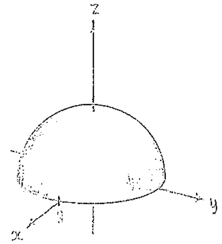
- r: punktens avstånd till origo
- θ: vinkeln mellan den positiva z-axeln och sträckan från origo till punkten **(latitud)**
- φ: vinkeln mellan xz-halvplanet (där $x > 0$) och planet som innehåller z-axeln och punkten. **(Longitud)**







Övning 6: Beskriv mängderna i sfäriska koordinater.

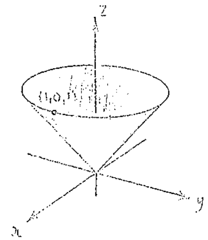


övre halvklot

$\boxed{0} \le r \le \boxed{3}$

$\boxed{0} \le \theta \le \boxed{\pi/2}$

$\boxed{0} \le \varphi \le \boxed{2\pi}$



Konens mantelyta

$\boxed{0} \le r \le \boxed{\sqrt{2}}$

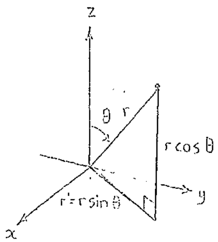
$\boxed{\pi/4} \le \theta \le \boxed{\pi/4}$

$\boxed{0} \le \varphi \le \boxed{2\pi}$

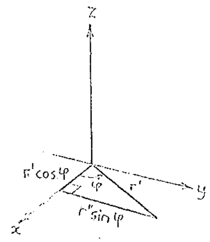
Sambandet mellan en punkts kartesiska koordinater (x, y, z) och dess sfäriska koordinater (r, θ, φ) ges av

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Härledning:



1. Skapa en rätvinklig hjälptriangel med hypotenusa r och vinkel θ. Den lodräta kateten är $z = r\cos\theta$ och kateten i xy-planet är $r' = r\sin\theta$



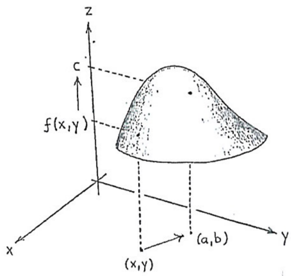
2. Kateten $r' = r\sin\theta$ får bilda hypotenusa i en ny rätvinklig hjälptriangel i xy-planet och med vinkeln φ. Kateterna är här $x = r'\cos\varphi$ och $y = r'\sin\varphi$.

Gränsvärde

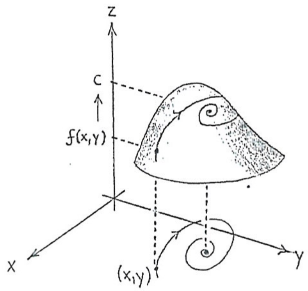
Gränsvärdet

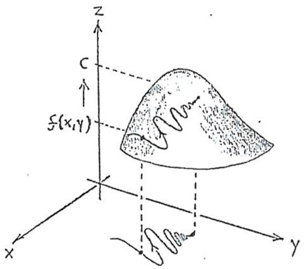
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$$

betyder att när punkten (x,y) närmar sig (a,b) så ska funktionsvärdet $f(x,y)$ närma sig värdet c.



Detta ska gälla oavsett hur (x,y) närmar sig (a,b).





Exempel 3 Sök gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

→ Existerar ej.

Exempel 4 Sök gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(y-x^2)^2+y^2}$.

→ Existerar ej.

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = A$

Steg 1: Kolla längs de räta linjer av formen $y=kx$ $(x,y)=t(a,b)$

$A = [y=kx,\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow x\to 0] =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{1}{1+k^2}$$

För olika k får vi olika gränsvärden →

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar inte.

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(y-x^2)^2+y^2} = [y=kx,\ x\to 0] =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{(kx-x^2)^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{2k^2x^2-2kx^3+x^4} =$$

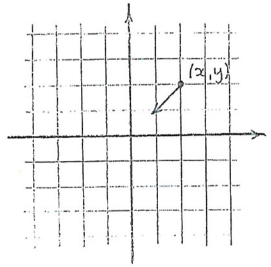
$$= \lim_{x\to 0} \frac{kx}{2k^2-2kx+x^2} = \frac{0}{2k^2} = 0$$

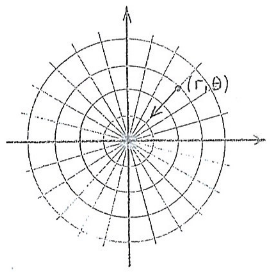
Steg 2: Kolla längs $y=x^2$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1 \neq 0$

Gränsvärde existerar ej.

Polära koordinater

Gränsövergången $(x,y)\to(0,0)$ blir i polära koordinater $r\to 0^+$.





Exempel 5 Sök gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+xy+y^2}$.

Inför polära koordinater,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+xy+y^2} = \left\{ \begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \right\}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r\cos\theta\, r\sin\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r\cdot \frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{1+\cos\theta\,\sin\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r\cdot \frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}$$

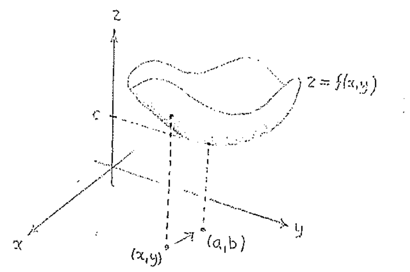
$$= \left\{ 1+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta \geq \tfrac{1}{2} > 0 \right\}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r\cdot \underbrace{\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}}_{\text{begränsad för alla } \theta} = 0.$$

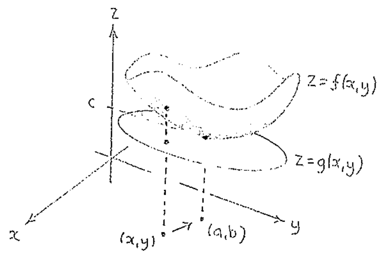
Instängningsprincipen

Säg att vi vill visa att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c.$$



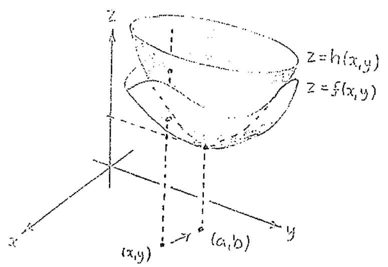
① Vi söker gränsvärdet av $f(x,y)$ när $(x,y)\to(a,b)$.



② Antag att vi kan hitta g s.a.

$$g(x,y) \leq f(x,y)$$

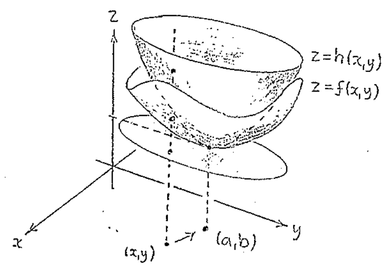
i en omgivning av (a,b) och $g(x,y)\to c$ när $(x,y)\to(a,b)$.



③ Antag att vi kan hitta h s.a.

$$f(x,y) \leq h(x,y)$$

i en omgivning av (a,b) och $h(x,y)\to c$ när $(x,y)\to(a,b)$



④ Då gäller att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c.$$

Exempel 6 Sök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$.

Anteckningar

Instängningsprincipen:

Om
- $g(x,y) \longrightarrow A$, då $(x,y)\to(a,b)$
- $h(x,y) \longrightarrow A$, då $(x,y)\to(a,b)$
- $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ nära (a,b)

så är $f(x,y) \longrightarrow A$, då $(x,y)\to(a,b)$

Övning

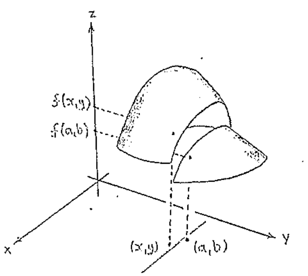
visa att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$

Kontinuitet

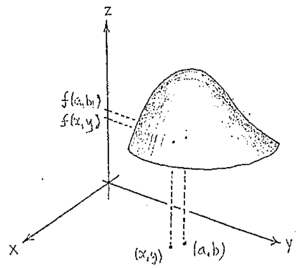
En funktion f är kontinuerlig om funktionsvärdet $f(x,y)$ inte gör plötsliga "hopp" när (x,y) ändras.

Mer precist,

$$(*)\quad \boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad \text{för alla punkter } (a,b).}$$



Funktionen är inte kontinuerlig längs den markerade linjen eftersom punkter som närmar sig linjen från olika sidor har funktionsvärden som närmar sig olika värden.



Funktionen är kontinuerlig eftersom när $(x,y)\to(a,b)$ så går $f(x,y)\to f(a,b)$ för alla (a,b).

Övning 7: Hur lyder villkoret för att

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är kontinuerlig i origo?

Tips. se definition ovan $(*)$

Om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ är $f(x,y)$ kontinuerlig

Elementära funktioner

Sats 1 Följande funktioner är kontinuerliga där de är definierade:

- $(x,y) \mapsto x+y$,
- $(x,y) \mapsto x-y$
- $(x,y) \mapsto x\cdot y$,
- $(x,y) \mapsto x/y$
- $(x,y) \mapsto$ konstant,
- trigonometriska funktioner
- exponential- och logaritmfunktioner
- cyklometriska funktioner

Sats 2 Om $\bar{f}$ och $\bar{g}$ är kontinuerliga funktioner, då är $\bar{f}\circ\bar{g}$ en kontinuerlig funktion.

Eftersom elementära funktioner byggs upp genom sammansättning av funktioner ur den första satsen så ger den andra satsen att alla elementära funktioner är kontinuerliga.

Exempel Visa att $f(x,y,z) = xye^{\sin x + z}$ är kontinuerlig.

Funktionen f kan skrivas som en sammansättning av enkla funktioner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\bar{f}_1}{\mapsto} \begin{pmatrix} xy \\ \sin x \\ z \end{pmatrix} \overset{\bar{f}_2}{\mapsto} \begin{pmatrix} xy \\ \sin x + z \end{pmatrix} \overset{\bar{f}_3}{\mapsto} \begin{pmatrix} xy \\ e^{\sin x + z} \end{pmatrix} \overset{f_4}{\mapsto} xye^{\sin x + z}.$$

Funktionerna $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, f_4$ är uppräknade i sats 1 och därför kontinuerliga. Sats 2 ger sedan att $f = f_4 \circ \bar{f}_3 \circ \bar{f}_2 \circ \bar{f}_1$ är kontinuerlig.

Några Ex på gränsvärden.

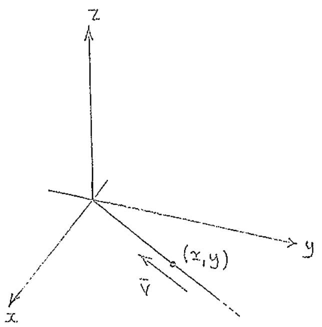
Exempel   Sök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

Om gränsvärdet existerar måste gränsvärdesuttrycket närma sig ett och samma värde oavsett hur $(x,y)\to(0,0)$.

Vi låter därför (x,y) närma sig $(0,0)$ längs en rät linje

$$(x,y) = t(c,d)$$

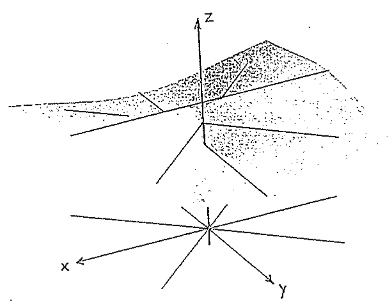
där $\bar{v}=(c,d)$ är linjens riktning och $t=0$ svarar mot $(0,0)$.



Utefter denna linje blir gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} \frac{(ct)^2}{(ct)^2+(dt)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{c^2}{c^2+d^2} = \frac{c^2}{c^2+d^2}.$$

Detta gränsvärde beror av hur vi väljer linjens riktning $\bar{v}=(c,d)$ och därför existerar inte gränsvärdet i uppgiften.

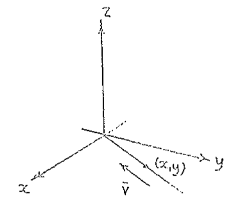


Grafen till $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

Exempel   Sök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{(y-x^2)^2+y^2}$.

Vi låter $(x,y)\to(0,0)$ längs en rät linje med riktning $\bar{v}=(c,d)$,

$$(x,y) = t(c,d).$$



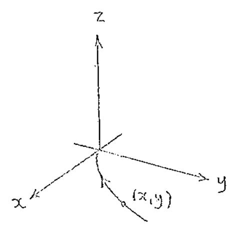
Gränsvärdet blir då

$$\lim_{t\to 0} \frac{(ct)^2 dt}{(dt-(ct)^2)^2+(dt)^2} = \lim_{t\to 0} t\cdot\frac{c^2 d}{(d-c^2t)^2+d^2} = 0\cdot\frac{c^2}{d} = 0,$$

och är oberoende av i vilken riktning $v=(c,d)$ som (x,y) går mot $(0,0)$. Detta betyder <u>inte</u> att gränsvärdet måste existera.

Låt $(x,y)\to(0,0)$ längs parabeln

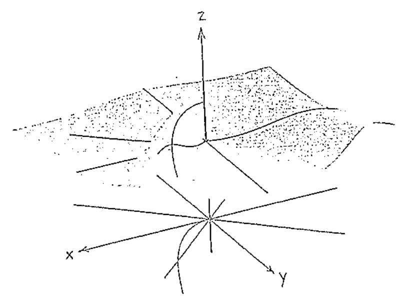
$$(x,y) = (t,t^2).$$



Gränsvärdet blir då

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2\cdot t^2}{(t^2-t^2)^2+t^4} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

Eftersom detta gränsvärde skiljer sig från när $(x,y)\to(0,0)$ längs räta linjer existerar inte gränsvärdet.



Grafen till $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{(y-x^2)^2+y^2}$