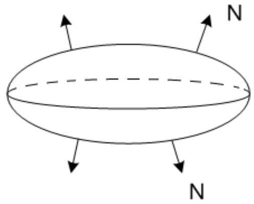
GAUSS' DIVERGENSSATS

Låt $\vec{F} = (P,Q,R)$ vara ett C^1 vektorfält definierad i ett öppet område Ω. Låt K $\subset \Omega$ vara ett kompakt område med randen ∂K som består av en eller flera C^1 ytor .

Flödet Φ av vektorfält $\vec{F} = (P,Q,R)$ **ut ur** kroppen K genom ytan ∂K kan beräknas med hjälp av GAUSS' formel

$$\boxed{\Phi = \iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS = \iiint_K div(\vec{F})dxdydz}$$



där div$(\vec{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z$

Alltså flödet $\Phi = \iiint_K div(\vec{F})dxdydz$

Notera att $\vec{F}$ är ett C^1 - vektorfält i K och på randen ∂K.
Med andra ord: Vi **får använda** GAUSS' formel endast om $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ **och derivator är kontinuerliga** i K och på randen ∂K.

Uppgift 1. Beräkna flödet av $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ut ur kroppen som definieras av :

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$$

Lösning:

$$div(\vec{F}) = 2x + 2y + 2z$$

$$\Phi = \iiint_K div\vec{F}dV = \iiint_K (2x+2y+2z)dxdydz =$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)dxdydz = \int_0^1\int_0^1 \left[2xz + 2yz + z^2\right]_0^1 dxdy =$$

$$\int_0^1\int_0^1 [2x+2y+1]dxdy = \int_0^1 \left[2xy + y^2 + y\right]_0^1 dx =$$

$$\int_0^1 [2x+2]dx = 3$$

Svar: $\Phi = 3$

Uppgift 2. Beräkna flödet av $\vec{F} = (5x+y+z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (y+2z)\vec{k}$ ut ur kroppen

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 4.$$

Lösning:

$$div(\vec{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 5 + 3 + 2 = 10$$

$$\Phi = \iiint_K div\vec{F}dV = \iiint_K 10dxdydz = 10 \cdot Volymen(K) = 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 80$$

Svar: $\Phi = 80$

Uppgift3. Beräkna flödet av $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (3y+z)\vec{j} + 5z\vec{k}$ ut ur klotet

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 4$$

Lösning:

$$div(\vec{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 0 + 3 + 5 = 8$$

$$\Phi = \iiint_K div\vec{F}dV = \iiint_K 8dxdydz = 8 \cdot Volymen(K) = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2^3 \pi = \frac{256}{3}\pi$$

Anmärkning1 : Volymen av klotet med radien R är lika med V=$\frac{4}{3} \cdot R^3\pi$

Anmärkning2 : Om man inte kan formeln för klotets volym då kan man använda sfäriska koordinater och beräkna direkt :

$$\Phi = \iiint_K div\vec{F}dV = \iiint_K 8dxdydz = 8 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2} r^2 \sin\theta dr$$

$$= 8 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2} r^2 dr = 8 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{256}{3}\pi$$

Svar: $\frac{256}{3}\pi$

Uppgift 4. Beräkna flödet av $\vec{F} = (x^2 + y + z)\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}$ ut ur cylindern

$x^2 + y^2 \le 4, \quad 0 \le z \le 10$

Lösning:

$$div(\vec{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 2x + 0 + 0 = 2x$$

$$\Phi = \iiint_K div\vec{F}dV = \iiint_K 2xdxdydz$$

(cylindriska koordinater)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{10} 2r\cos\varphi \cdot r dz = 2\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^2 r^2 dr \int_0^{10} dz = 0$$

Uppgift 5. Beräkna flödet av $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ ut ur halvsfären

$x^2 + y^2 + z^2 \le 9, \quad \ge 0$

Lösning:

$$div(\vec{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 0 + 0 + 2z = 2z$$

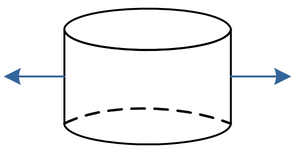
$$\Phi = \iiint_K div\vec{F} dV = \iiint_K 2z dxdydz$$

$$\Phi = 2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, dr$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^3 r^3 dr = 2 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{81}{4} = \frac{81}{2}\pi$$

Uppgift 6. Vi betraktar cylindern

$x^2 + y^2 = 9. \quad där \quad 0 \le z \le 2.$



Beräkna flödet av fältet $\vec{F} = (5x, \ 3x^2, \ 4z)$

ut ur cylinderns **mantelytan.**

Lösning:

Det är enklare i den här uppgiften att beräkna flödet genom botten- och toppenytan, än flödet genom mantelytan.

Det är också enkelt att beräkna flödet genom hela ytan med hjälp av Gausssatsen. .(***Anmärkning:*** *Gauss' sats gäller endast för slutna ytor*!)

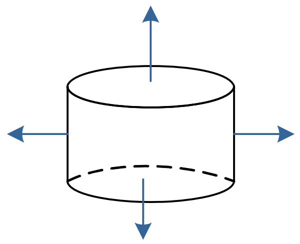
Därför bestämmer vi först :

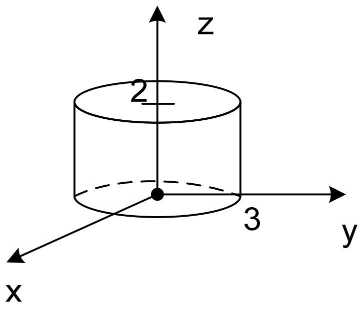
Φ_C =flödet ut ur cylindern genom hela begränsningsyta ytan

Φ_T =flödet genom toppenyta ut ur cylinder (samma som flödet uppåt)

Φ_B = flödet genom bottenyta (samma som flödet nedåt) och därefter flödet genom mantelyta Φ_M

$\Phi_M = \Phi_C - \Phi_T - \Phi_B$





i) Först beräknar vi flödet ur den hela begränsningsytan (**mantelytan+ 2 basytor**) med hjälp av Gauss' sats.

$\text{div}(\vec{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 5 + 0 + 4 = 9$

Flödet ut cylindern genom hela begränsningsytan (**mantelytan + 2 basytor**) är

$\Phi_C = \iiint_K div(\vec{F})dxdydz = \iiint_K 9dxdydz = 9\,Volymen(cylindern) = 9 \cdot 3^2\pi \cdot 2 = 162\pi$

ii) Toppenytan: $z = 2$.

Därför $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 0, 1)$ (normalen pekar uppåt)

$$\Phi_T = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N}\, dxdy = \iint_D 4z\, dxdy \qquad (\text{på toppenytan är } z = 2)$$

$$\Phi_T = \iint_D 8\, dxdy = 8 \cdot Arean(D) = 8 \cdot 3^2\pi = 72\pi$$

iii) Bottenytan: $= 0$.

"Ut ur cylindern" på bottenyta betyder nedåt dvs i riktningen av $\vec{N} = (z'_x, +z'_y, -1) = (0, 0, -1)$

$$\Phi_B = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N}\, dxdy = \iint_D (-4z)\, dxdy \qquad (\text{på bottenytan är } z = 0)$$

$$\Phi_B = \iint_D 0\, dxdy = 0$$

Slutligen, flödet genom mantelyta $\Phi_M = \Phi_C - \Phi_T - \Phi_B = 162\pi - 72\pi = 90\pi$

Svar: Flödet genom mantelyta är 90π

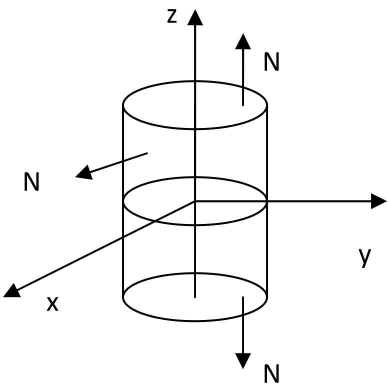
Uppgift 7.

a) Beräkna totalt flöde av fältet $\vec{F} = 5x\vec{i} + 5y\vec{j} + 5z\vec{k}$ ut ur cylindern $x^2 + y^2 \le a^2$, $-3 \le z \le 3$.

b) Beräkna flödet av fältet $\vec{F}$ ut ur cylindern genom cylinderns

b1) bottenyta b2) toppenyta b3) mantelyta

Lösning:



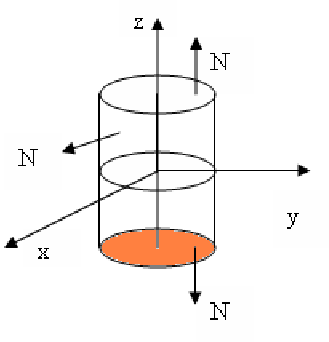
a) Totalt flöde utåt

Vi använder Gauss' divergenssats och beräknar totalt flöde ut ur cylindern:

Eftersom $div(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 15$ har vi

$$\Phi_{total} = \iiint_S div(\vec{F})dxdydz = \iiint_K 15dxdydz = 15 \cdot Volymen(K) = 15 \cdot 6a^2\pi = 90a^2\pi$$

b1) Bottenytan



$z = -3$

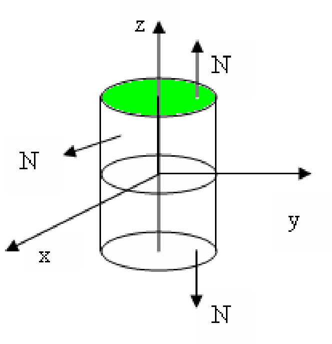
Eftersom “ut ur cylinder” betyder neråt på bottenytan använder vi normalen med negativ z-koordinat.

$$\vec{N}_{botten} = -(-z'_x, -z'_y, 1) = (0,0,-1) \quad \vec{F} = (5x, 5y, -15)$$

$$\vec{F} \circ \vec{N} = (-15)\cdot(-1) = 15$$

$$\Phi_{botten} = \iint_D 15 dxdy = 15 Area(D) = 15a^2\pi$$

b2) Toppenytan



$$z = 3: \qquad \vec{N}_{top} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0,0,1)$$

$$\vec{F} = (5x, 5y, 15)$$

$$\vec{F} \circ \vec{N} = 15$$

$$\Phi_{top} = \iint_D 15 dxdy = 15 Area(D) = 15a^2\pi$$

b3) Mantelytan

Eftersom $\Phi_{total} = \Phi_{top} + \Phi_{boten} + \Phi_{mantel}$ har vi

$$\Phi_{mantel} = \Phi_{total} - (\Phi_{top} + \Phi_{boten}) = 60a^2\pi$$

Svar: $\Phi_{mantel} = 60a^2\pi$

==

Om vi vill använda *Gauss' divergenssats för at beräkna flödet av ett vektorfält* $\vec{F}=(P,Q,R)$ *ut ur en kropp K måste vi kontrollera att* $\vec{F}$ *är C*[1]-vektorfält i K *och på* ∂K *(dvs att* P,Q,R *är kontinuerliga och har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen i K och på* ∂K *).*

Om $\vec{F}$ **inte** *är C*[1]-vektorfält får vi **inte** använda Gauss divergenssatsen.

Uppgift 8. Vi betraktar flödet av

$$\vec{F}=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

ut ur följande kroppar

a) $K_1=\{(x,y,z):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\le 1\}$, (ett klot),

b) $K_2=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 1\}$, (ett klot),

c) $K_3=\{(x,y,z):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}\le 1\}$ (en ellipsoid)

i) Visa att $div(\vec{F})=0$ för alla $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

ii) Får vi använda *Gauss' divergenssats när vi beräknar flödet ut ur klotet* K_1?

iii) Får vi använda *Gauss' divergenssats när vi beräknar flödet ut ur klotet* K_2?

iv) Beräkna *flödet ut ur klotet* K_1.

v) Beräkna *flödet ut ur klotet* K_2.

vi) Beräkna *flödet ut ur ellipsoiden* K_3.

Lösning.

i) Först beräknar vi partiella derivator

$$P'_x=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\quad Q'_y=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\ \text{och}\ R'_z=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Härav får vi divergensen $\mathrm{div}(\vec{F})=P'_x+Q'_y+R'_z=0$.

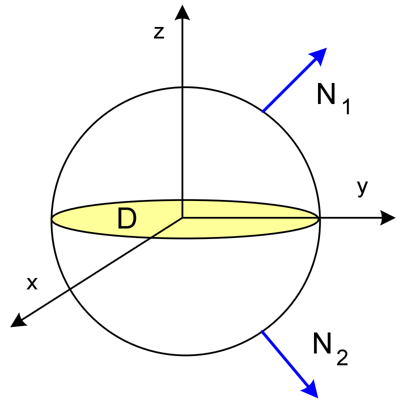
ii) **Ja,** eftersom funktioner P, Q, R och deras derivator är kontinuerliga i K_1 och på randen ∂K_1.

iii) Fältet har en singulärpunkt i (0,0,0), som ligger i K_2. Därmed får vi **INTE** använda Gauss sats när vi beräknar flödet ut ur klotet K_2.

iv) $\iint_{\partial K}\vec{F}\cdot\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}dS=\iiint_K div(\vec{F})dxdydz=\iiint_K 0\,dxdydz=0$

v) Som sagt i iii) , får vi inte använda Gauss divergenssats. Vi beräknar flöde ut ur klotet direkt med hjälp av flödesintegralen.

Vi delar sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (randytan) i två delar



A) Övre halvsfären $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

I övre delen är riktning ut ur klotet ekvivalent med

normalen riktad uppåt

$$\vec{N}_1 = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1\right),$$

B) Nedre halvsfären $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

I nedre delen av sfären är riktning ut ur klotet ekvivalent med normalen riktad nedåt

$$\vec{N}_2 = (z'_x, z'_y, -1) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, -1\right),$$

A) Först beräknar vi flödet uppåt genom den övre sfären:

Vi substituerar $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ i $\vec{F}$ och får vektorfältet på själva ytan

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) =$$

$$\left(\frac{x}{1}, \quad \frac{y}{1}, \quad \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1}\right) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

Normalen på övre halvsfären : $\vec{N}_1 = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1\right)$

Därför: $\vec{F} \cdot \vec{N}_1 = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

Flödet uppåt genom övre halvsfären är

$$\Phi_1 = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N}_1 dxdy = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

(D är projektionen av halvklotet på xy planet, dvs cirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$. Vi använder polära koordinater.)

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot rdr = 2\pi(-\sqrt{1-r^2})\Big|_0^1 = 2\pi$$

(Anmärkning: $\int \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot rdr$ beräknas med hjälp av subst: $1-r^2 = t \Rightarrow -2rdr = dt$)

Alltså flödet uppåt genom övre halvsfären är $\Phi_1 = 2\pi$.

B) På samma sätt beräknar vi flödet nedåt genom nedre halvsfären $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Normalen riktad nedåt (z-negativt) är $\vec{N}_2 = (z'_x, z'_y, -1) = (\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -1)$

Vektorfältet på nedre ytan är

$$\vec{F} = (\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}) =$$

$$(\frac{x}{1}, \quad \frac{y}{1}, \quad \frac{-\sqrt{1-x^2-y^2}}{1}) = (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N}_2 = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$ (samma som i A).

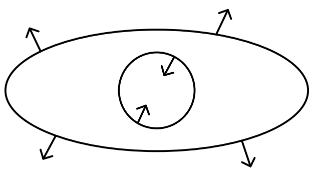
(D är projektionen av nedre halvklotet på xy planet, dvs cirkeln $x^2+y^2 \le 1$; samma cirkel som i A delen.)

Därför $\Phi_2 = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N}_2 dxdy = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = 2\pi$.

Totalt flödet ut ur kroppen är $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 4\pi$

Svar v: 4π

vi) Låt K vara det område som ligger mellan ellipsoiden och sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$. Eftersom $div(\vec{F}) = 0$ har vi att flödet Φ ur ut kroppen är 0.



$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS = \iint_{\partial K3} \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS - \iint_{\partial K2} \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial K3} \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS = \iint_{\partial K2} \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS = 4\pi$$ (enligt v-delen)

Svar vi: 4π

Anmärkning: Man använder ofta beteckningen $\mathbf{r} = \vec{r} = (x, y, z)$ och $r = |\vec{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

i samband med vektorfält. Med en sådan beteckning kan vektorfältet i ovanstående uppgiften kortare anges med $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ (eller $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$).

Uppgift 9. Låt $\vec{r}$ beteckna $\vec{r}=(x,y,z)$. Bestäm flödet av $\vec{F}=\dfrac{m\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ ut ur klotet

$K=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le a^2\}$.

Lösning: Vi får **inte** använda Gauss divergenssats eftersom fältet är **inte definierad** i (0,0,0) som ligger i klotet K. Vi delar sfären i övre $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ och nedre delen $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ och, som i föregående uppgift, beräknar flödet direkt:

A delen:

$$\vec{F}=\left(\frac{mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{mz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

På övre halvsfären hr vi $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ och

$$\vec{F}=\left(\frac{mx}{a^3},\frac{my}{a^3},\frac{m\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a^3}\right)=\frac{m}{a^3}(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2}),$$

$$\vec{N}_1=(-z'_x,-z'_y,1)=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},1\right)$$

och $\vec{F}\cdot\vec{N}_1=\dfrac{m}{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

Därför

$$\Phi_1=\iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}_1 dxdy=\iint_D \frac{m}{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=2m\pi .$$

B delen:

På liknande sätt på den nedre ytan $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ får vi

$$\vec{F}=\frac{m}{a^3}(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2}),$$

$$\vec{N}_2=(+z'_x,+z'_y,-1)=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},-1\right).$$

Härav $\Phi_2=\iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}_2 dxdy=\iint_D \dfrac{m}{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=2m\pi$

och därmed $\Phi=\Phi_1+\Phi_2=4m\pi$

Svar: $\Phi=4m\pi$