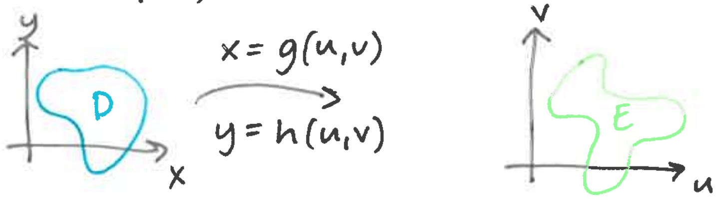
Allmän variabelsubstitution i dubbelintegraler

Betrakta $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. Vill byta från (x,y) till (u,v)



Sats $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(u,v)\,K\,du\,dv$

där skalfaktorn K ges av

$$K = \left|\det \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}_{\text{Jacobimatrisen}}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right|$$

2013·01·10 # 4 Sök $I = \int_\gamma x^2 y\,dx$ $\quad\gamma: 9x^2+y^2=1$ (moturs)

sluten, ty ellips

Steg 1

$$I = \int_\gamma x^2y\,dx = \int_\gamma \underbrace{x^2y}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{0}_{Q(x,y)}\,dy =$$

Green

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (0 - x^2)\,dx\,dy$$

där D är ellipsskivan $9x^2+y^2 \leq 1$

Steg 2 Bestäm gränsena

Knep: $9x^2+y^2 \leq 1$

$\Downarrow$

$(3x)^2+y^2 \leq 1$

Byt $\begin{cases} 3x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ med $\begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x = \frac{1}{3} r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ elliptiskt polära koordinater

Ex $x^2+y^2 \leq 1$
cirkelskiva
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

Steg 3 Byt $dx\,dy = K\,dr\,d\theta$

$$K = \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cos\theta & -\frac{1}{3}r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{3}r\cos^2\theta + \frac{1}{3}r\sin^2\theta\right| = \left|\frac{1}{3}\underset{r\geq 0}{r}\right| = \frac{1}{3}r$$

Steg 4 $$I = \iint_D -x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -\left(\frac{1}{3}r\cos\theta\right)^2 K\,dr\,d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{9}r^2\cos^2\theta \cdot \frac{1}{3}r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{27}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta}_{\text{KLASSIKER \#2} = \pi} \cdot \underbrace{\int_0^1 r^3\,dr}_{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{-\frac{1}{108}\pi}}$$

svar

Erfarenhet

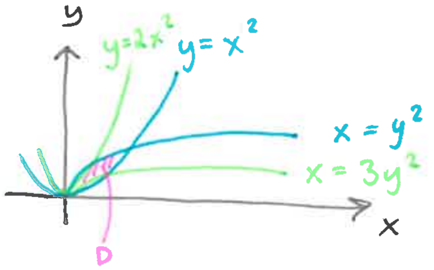
Elliptiskt pol. koord.

$$\begin{cases} x = a\,r\cos\theta \\ y = b\,r\sin\theta \end{cases} \quad (\text{antag } a,b>0)$$

Då gäller $dx\,dy = abr\,dr\,d\theta$

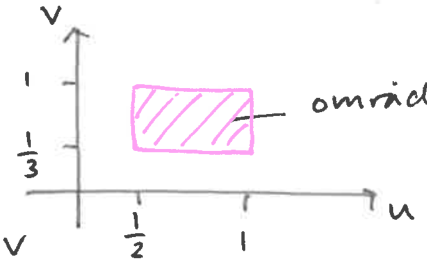
2018.01.09 #4 D begränsas av $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x^2 \\ x = y^2 \\ x = 3y^2 \end{cases}$

a)



$$u = \frac{x^2}{y^2}$$

$$v = \frac{y^2}{x}$$



Nu: Ta fram gränserna för u och v utan hjälp av figuren

Vill ha: $\begin{cases} \ldots \leq u \leq \ldots \\ \ldots \leq v \leq \ldots \end{cases}$ dvs $\begin{cases} 1/2 \leq \frac{x^2}{y^2} \leq 1 \\ 1/3 \leq \frac{y^2}{x} \leq 1 \end{cases}$

"Begränsas" innebär:

$$\begin{cases} x^2 \leq y \leq 2x^2 & (1) \\ y^2 \leq x \leq 3y^2 & (2) \end{cases}$$

(1) ger $\underbrace{\frac{x^2}{y} \leq 1 \leq \frac{2x^2}{y}}_{\text{trygg division med } y \text{, ty } y>0 \text{ i } D} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{x^2}{y} \leq 1 \\ \frac{2x^2}{y} \geq 1 \end{matrix}$ dvs. $\frac{x^2}{y} \geq \frac{1}{2}$

(2) ger $\frac{y^2}{x} \leq 1 \leq \frac{3y^2}{x} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{y^2}{x} \leq 1 \\ \frac{3y^2}{x} \geq 1 \end{matrix}$, dvs $\frac{y^2}{x} \geq \frac{1}{3}$

b) Beräkna $I = \iint_D xy \, dx\,dy$

utnyttjar bytet $\underbrace{\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}}_{\text{steg 1}}$, där $\underbrace{\begin{cases} \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{3} \leq v \leq 1 \end{cases}}_{\text{steg 2}}$

Steg 3 Bestäm $dx\,dy = K \, du\,dv$

inte redo

$$K = \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right|$$

Populär sats

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Här:

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{bmatrix} = \dots = 3$$

$\Downarrow$

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3} \Rightarrow K = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Steg 4 $I = \iint_D xy \, dx\,dy = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \int_{\frac{1}{2}}^{1} u v \frac{1}{3} \, du\,dv =$

$= \{\text{läxa}\} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$ svar

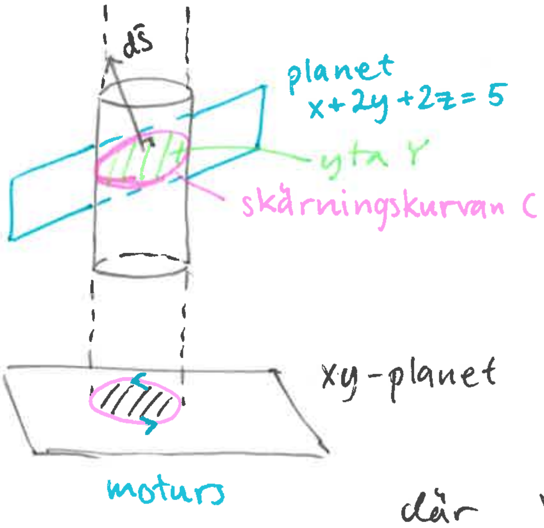
$u = \frac{x^2}{y}$ $v = \frac{y^2}{x}$

Stokes rotationssats

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} \overset{\text{sats}}{=} \iint_Y \text{rot}\, \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

1. C, som är randkurva till Y, ska vara sluten
2. Orienteringen C och av $d\bar{S}$ samspelas enligt HHR

2017. 08. 17 # 8



Beräkna $I = \oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$, där

$\bar{F}(x,y,z) = (y+z,\ x^2+z,\ x+y)$

Steg 1 Stokes sats ger

$$\underset{\text{moturs}}{\oint_C} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_Y \text{rot}\, \bar{F} \cdot \underbrace{d\bar{S}}_{\text{uppåt}}$$

inte $d\bar{S} = (0,0,1)\,dxdy$

där Y är en yta som har C som randkurva, alltså den del av planet $x+2y+2z=5$ som inneslutss av C

Steg 2 Ta fram $\text{rot}\, \bar{F} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \bar{F} = \ldots = (0,0,2x-1)$

Steg 3 Ta fram $d\bar{S}$

$$d\bar{S} \underset{(*)}{=} \pm\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) dxdy =$$

$$= \ldots = \pm\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right) dxdy$$

planet
$x+2y+2z=5$
lös ut z:
(*) $z = \frac{1}{2}(5-x-2y) = f(x,y)$

SATS I Yta Y som ges av $z=f(x,y)$
$d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) dxdy$

Vill ha $d\bar{S}$ uppåt: välj $d\bar{S} = -\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)dxdy = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)dxdy$

Steg 4

$$\iint_Y \text{rot}\, \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_Y (0,0,2x-1) \cdot \left(\tfrac{1}{2},1,1\right) dxdy = \iint_Y (2x-1)\,dxdy$$

Med figur: Se att den projicerade bilden av Y i xy-planet är cirkelskivan $x^2+y^2 \le 9$. Då får vi:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (2r\cos\theta - 1)\, r\, dr\, d\theta = \{\text{LÄXA}\} = \underline{\underline{-9\pi}}$$ svar

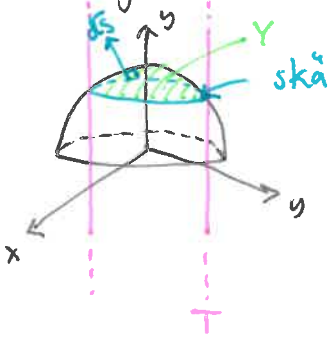
polära koordinater

2019.03.12 # 5

konstant $a>1$

Halvsfär $G: \; x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z \geq 0)$ (dvs. radien större än 1)

Cylinder $T: \; x^2+y^2=1$ (dvs radie 1)



Definition
$d\bar{S} = \bar{N}\,dS$

Beräkna $\iint_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot\bar{N}\,dS = \iint_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S}$ uppåt

enhetsnormalvektor till G som riktar utåt

där $\bar{F}(x,y,z) = (\ldots, \ldots, \ldots)$

Steg 1 Tillämpa Stokes sats

$$\iint_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S} = \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

där C är randkurva till ytan Y som moturs orienterad

METOD I

Steg 2 Beräkna $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$

$$\underset{(\text{igår})}{\overset{\text{def}}{=}} \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt$$

Vill nu parametrisera C: $\quad \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Enligt figuren så ges C av:

$$(*)\begin{cases} x^2+y^2=1 & (\text{ty C ligger på cyl T}) \\ z=\sqrt{a^2-1} & (\text{den höjd där C ligger}) \end{cases}$$

kolla där G skär T : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow 1+z^2=a^2$

$\Downarrow$

$z=\sqrt{a^2-1}$

najs

Då fås

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \overset{(*)}{=} (\cos t, \sin t, \sqrt{a^2-1}), \text{ där } t: 0\to 2\pi$$

$\Rightarrow \{\text{LÄXA}\} = \underline{\underline{\text{Svar}}}\ 2\pi$

Steg 2 METOD II

Vi hade $\iint\limits_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S} = \underbrace{\oint\limits_C \bar{F}\cdot d\bar{r}}_{\text{vill ha}}$

Notera att C också är randkurva till cirkelskivan
$D: x^2+y^2 \le 1$ (på samma höjd)

Då fås:

$$\oint\limits_C \bar{F}\cdot d\bar{r} \underset{\text{Stokes igen}}{=} \iint\limits_D \underbrace{\operatorname{rot}\bar{F}}_{\text{hemma}}\cdot \overbrace{d\bar{S}}^{\text{om erfarenhet igår}} = \iint\limits_D (\ldots,\ldots,2)\cdot(0,0,1)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D 2\,dxdy = 2\iint\limits_D 1\,dxdy = 2\cdot\text{arean av } D = 2\cdot\pi\cdot 1^2 = \underline{\underline{2\pi}}$$

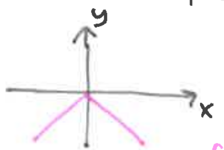
2019.03.13 #3 Funktion $f(x,y)$ definerad på området $D: x^2+y^2\le 1$

Givet: f antar ett lokalt maximivärde där $(x,y)=(0,0)$

a) (P1): $\nabla f(0,0)$ existerar och är $(0,0)$ dvs
$f_x(0,0)=0$
$f_y(0,0)=0$

Tips Kladdpapper Tänk envariabelfallet

Tänk $f(x)$, där $-1\le x\le 1$



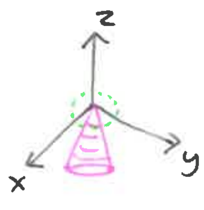
? f har ett maximivärde i $x=0$
men $f'(0)$ existerar inte!

Här För $f(x,y)$

Ta t.ex. $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$ vars graf är ytan $z=-\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

existerar inte i $(x,y)=(0,0)$



d) (P4): $f(0,0) > f(x,y)$ för alla $(x,y) \neq (0,0)$ nära origo

Om detta vore falskt, skulle ett motexempel vara någon $f(x,y)$ s.a. $f(0,0) = f(x,y)$ för något $(x,y) \neq (0,0)$

Ta t.ex. $f(x,y) = -x^2$

Då gäller $f(0,0) = 0$
$f(0,\frac{1}{7}) = 0$

kan ta alla $y \neq 0$, där $-1 \leq y \leq 1$

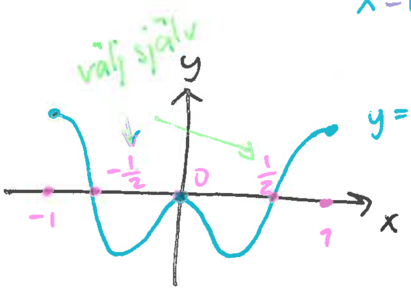
Svar FALSKT
Ett motexempel är $f(x,y) = -x^2$

e) (P5) $f(0,0) \geq f(x,y)$ för alla (x,y) på randen av D dvs där $x^2+y^2=1$

Ett motex. skulle uppfylla $f(0,0) < f(x,y)$ för något (x,y) där $x^2+y^2=1$

Envariabel Konstruera en f som
1) är definerad där $-1 \leq x \leq 1$
2) har ett lokalt maximum där $x=0$
3) $f(0) < f(1)$

$x=1$ är en randpunkt = ändpunkt



$y=f(x)$ jämn funktion

Ett uttryck för f
$f(x) = x^2(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) = x^2(x^2-\frac{1}{4})$

Kontroll om 3) uppfylls
$f(0)=0$ $\quad f(1) = \frac{3}{4} > f(0)$

Tillbaka

$f(x,y) = x^2(x^2-\frac{1}{4})$ duger

Topologi i $\mathbb{R}^2$

Anm: En omgivning till α är en cirkelskiva med α i centrum och har godtyckligt liten radie

inre punkt α

mängd/område S (med innehåll)

yttre punkt β

randpunkt ω — Varje omgivning kring ω som innehåller både punkter som ligger i S och som ligger utanför S

sluten mängd S: Alla randpunkter till S tillhör S

Ex. 

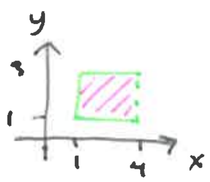
öppen mängd S: Alla randpunkter till S tillhör inte S

Ex. 

$x^2+y^2<1$

"randen $x^2+y^2=1$ saknas"

varken öppen eller sluten mängd S — Några, men ej alla, randpunkter tillhör S

Ex. 

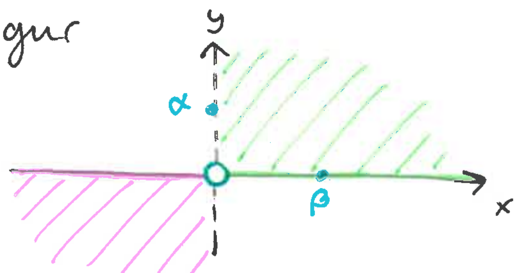
$$\begin{cases} 1 \le x < 4 \\ 1 \le y \le 3 \end{cases}$$

2019·01·10 #4 $\quad f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$

Steg 1 Krav: $\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{y}{x} \geq 0 \end{cases}$ — om $x<0$ så $y \le 0$; om $x>0$ så $y \geq 0$

Steg 2 Def mängden är $D_f = \{x<0,\ y\le 0\} \cup \{x>0,\ y\ge 0\}$

Steg 3 Figur



randpunkter
$\alpha \notin D_f$
$\beta \in D_f$

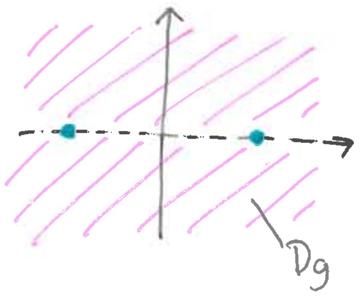
ger Svar: varken sluten eller öppet

Anm:
1. $(x,y)=(0,0) \notin D_f$
2. Hela y-axeln ingår ej i D_f ty $x \neq 0$
3. Hela x-axeln utom $(0,0)$ ingår i D_f

a) $g(x,y) = \sqrt{\dfrac{|x|}{|y|}}$

Krav: $\begin{cases} |y| \neq 0 \\ \dfrac{|x|}{|y|} \geq 0 \end{cases}$ redan uppfyllt ty $|x| \geq 0 \ \forall x$, $|y| \geq 0 \ \forall y$

$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$



Hela x-axeln ingår inte i D_g

Notera att randpunkterna till D_g är alla punkter på x-axeln.
Inga av dessa tillhör D_g (ty $y \neq 0$)
$\Downarrow$ D_g är öppet

b) $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{\ln(x^2+y^2)}$ Har h ett minsta värde i D_h?

Steg 1 Bestäm D_h

Krav: $\begin{cases} \ln(x^2+y^2) \neq 0 \\ x^2+y^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 \neq 1 \quad (\text{ty } \ln 1 = 0) \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

D_h är hela $\mathbb{R}^2$ utom $(0,0)$ och cirkeln $x^2+y^2=1$

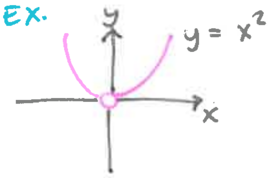
Steg 2 Vi behöver undersöka beteendet av h

1. när $(x,y) \to (0,0)$
2. när $x^2+y^2 \to 1$
3. i övriga punkter

Kladdpapper

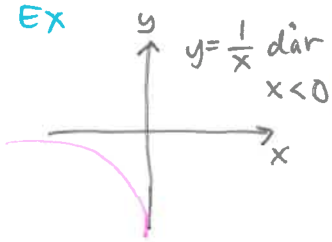
Envariabelanalys

Ex.

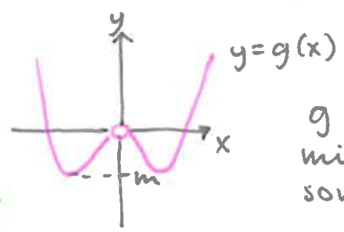


$f(x) = x^2$, med $x \neq 0$ har inte ett minsta värde i D_f

Ex



då $x \to 0^-$ så $y \to -\infty$
$\Rightarrow$ minsta värde saknas



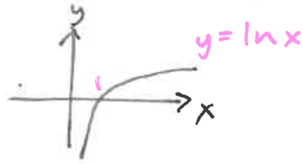
g har ett minsta värde som är m

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2-1}{\ln(x^2+y^2)}$

Populärt knep Övergå till polära koordinater

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, med $x^2+y^2 = r^2$. Om $(x,y)\to(0,0)$, så $r \to 0^+$ ty $r \geq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{r^2-1}{\ln(r^2)} = \left\{ \dfrac{-1}{-\infty} = \dfrac{1}{\infty} \right\} = \underline{\underline{0}}$



2. $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1} \dfrac{x^2+y^2-1}{\ln(x^2+y^2)} = \lim\limits_{r^2\to 1} \dfrac{r^2-1}{\ln(r^2)} = \lim\limits_{r\to 1} \dfrac{r^2-1}{2\ln(r)} = \left\{ \dfrac{0}{0} \text{ l'Hôpital} \right\} =$

$= \lim\limits_{r\to 1} \dfrac{2r}{2\frac{1}{r}} = \dfrac{2\cdot 1}{2\cdot \frac{1}{1}} = \underline{\underline{1}}$ ← kan inte vara h:s minsta värde, för $1 > 0$

3. I övriga punkter: kan $h(x,y) < 0$?

Nej, ty x^2+y^2-1 och $\ln(x^2+y^2)$ alltid har samma tecken!

Fall 1 $x^2+y^2-1 \underline{>} 0$, dvs $x^2+y^2 > 1 \Rightarrow \ln(x^2+y^2) \underline{>} 0$ figur

Fall 2 $x^2+y^2-1 \underline{<} 0$, dvs $x^2+y^2 < 1 \Rightarrow \ln(x^2+y^2) \underline{<} 0$ figur

Anm. $x^2+y^2-1 \neq 0$ ty $x^2+y^2 \neq 1$

Alltså $h(x,y) > 0$ i alla punkter utom $(0,0)$ och där $x^2+y^2 = 1$

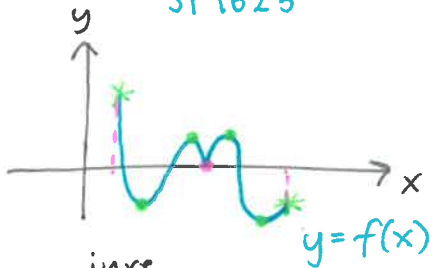
Svar $h(x,y) = \begin{cases} \to 0 & \text{om } (x,y)\to(0,0) \\ \to 1 & \text{om } x^2+y^2\to 1 \\ > 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$ $\Rightarrow$ h saknar ett minsta värde, då h kan bli godtyckligt nära 0, men aldrig exakt 0

Optimering på kompakta områden

$\underbrace{\text{kompakta}}$ = slutna och begränsade

SF1625

Problem Sök största och minsta värdet av $f(x,y)$ definerad på området $g(x,y) \leq c$ ← någon konstant



- inre kritiska (alt. stationära) punkter där $f'(x) = 0$
- inre singulär punkt där derivata ej existerar
- * ändpunkter/randpunkter

EN strategi Undersök kandidatpunkter

T.ex. $\underline{x^2+y^2} \leq 3$
$= g(x,y)$

1. Inre stationära punkter

$$\begin{cases} f_x = f_y = 0 \\ g(x,y) < c \end{cases}$$

2a. inre singulära punkter

$$\begin{cases} f_x, f_y \text{ existerar inte} \\ g(x,y) < c \end{cases}$$

2b. singulära randpunkter

$$\begin{cases} g_x = g_y = 0 \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

Ex  randkurva

3. randpunkter där Lagrangevillkoret uppfylls

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{för någon konstant } \lambda \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

2011 · 10 · 20 #4 Sök största och minsta värdet av

$f(x,y) = xy + x$ i området $\underbrace{x^2+y^2}^{g(x,y)} \leq 1$

1. Inre stationära punkter

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ x^2+y^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+1 = 0 & \Rightarrow y = -1 \\ x = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

Förkasta $(x,y) = (0,-1)$, ty $x^2+y^2<1$ inte uppfylls

2a. finns inte

2b. (hemma) finns inte

3. Lagrangerandpunkter

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1, x) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+1 = \lambda 2x & (1) \\ x = \lambda 2y & (2) \\ x^2+y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Mål sök kandidater (x,y)

Försök lösa ut x eller y

Divisionsknep bli av med λ

Ta $\frac{(1)}{(2)}$ ledvis: $\frac{y+1}{x} = \frac{\lambda 2x}{\lambda 2y}$ (*) $\Leftrightarrow \frac{y+1}{x} = \frac{x}{y}$ korsmultiplikatio

$\Downarrow$

$\boxed{x^2 = y^2 + y}$

kombinera med (3)

och får

$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2+y+y^2 = 1$

$\Rightarrow 2y^2+y = 1 \Leftrightarrow 2y^2+y-1 = 0$ pq-formeln

$\ldots \Rightarrow y = -1$ eller $y = \frac{1}{2}$

Bestäm motsvarande x:

$y = -1 \Rightarrow x^2 = y^2+y = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = y^2+y = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eller $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sammanställning

$$f(x,y) = xy + x$$

$$f(0,-1) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt3}{2}, \frac12\right) = \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac12 + \frac{\sqrt3}{2} = \frac{3\sqrt3}{4} \quad \text{största}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt3}{2}, \frac12\right) = -\frac{\sqrt3}{4} - \frac{\sqrt3}{2} = -\frac{3\sqrt3}{4} \quad \text{minsta}$$

$\boxtimes$

Anm: (*) Om $\lambda = 0$ så: 1. $y+1=0 \Rightarrow y=-1$
2. $x = 0$

ingen ny punkt

2017.06.05 #5 Sök största och minsta värdet

a) av $f(x,y) = x^2 + 2xy - 5y^2$ där $\underbrace{x^2 - 2xy + 2y^2}_{g(x,y)} = 10$

1. Inre stationära punkter irrelevant, ty $g(x,y) < 10$ är aktuellt

2a. 2b. (hemma) finns ej

3. Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = \lambda(2x - 2y) & (1) \\ 2x - 10y = \lambda(-2x + 4y) & (2) \\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

Dela (1) med (2) ledvis:

$$\frac{2x+2y}{2x-10y} = \frac{(2x-2y)}{(-2x+4y)} \quad \text{förkorta \& korsmultiplikation} \Rightarrow 2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$$

Lös ut x m.h.a pq-formeln

$$x^2 - \left(\frac72 y\right)x + \frac32 y^2 = 0$$

$$x = \frac74 y \pm \sqrt{\frac{49}{16}y^2 - \frac32 y^2}$$

$$= \frac74 y \pm \sqrt{\frac{25}{16}y^2}$$

$$= \frac74 y \pm \frac54 y$$

$$x = \frac74 y + \frac54 y = 3y \quad (4)$$

eller

$$x = \frac74 y - \frac54 y = \frac12 y \quad (5)$$

Kombinera (3) (4) & (5) ger

$x = 3y$

$$9y^2 - 6y^2 + 2y^2 = 10 \Rightarrow 5y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 2$$

$y = \sqrt2$ eller $y = -\sqrt2$

Bestäm nu x: $\underline{y = \sqrt{2}}$ ger $x = 3y = \underline{3\sqrt{2}}$

$\underline{y = -\sqrt{2}}$ ger $x = \underline{-3\sqrt{2}}$

(LÄXA)

(5) $x = \frac{1}{2}y$ ger:

$y = 2\sqrt{2}$ ger $x = \sqrt{2}$

eller

$y = -2\sqrt{2}$ ger $x = -\sqrt{2}$

Sammanfattning

$f(3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20$ största

$f(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = -30$ minsta

Anm: 1 Om $\lambda = 0$:

(1) $2x + 2y = 0$

(2) $2x - 10y = 0$

$\Downarrow$ $12y = 0$ dvs $y = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$ (enligt (1))

Förkasta $(x, y) = (0, 0)$ ty (3) ej uppfylls

2 Hur vet vi att området

$x^2 - 2xy + 2y^2 = 10$ faktiskt är kompakt?

Knep Lös ut x mha pq-formeln

$\vdots$

$\Rightarrow x = y \pm \sqrt{10 - y^2}$

Se att $10 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 10 \Rightarrow -\sqrt{10} \leq y \leq \sqrt{10}$

$\Rightarrow$ x är begränsad

$\Rightarrow$ området är begränsat

området är slutet pga "=" i uttrycket $g(x, y) = 10$

området kompakt

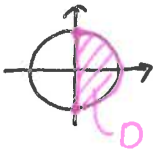
Optimering, kompakt område

1 bivillkor $g(x,y) \leq c$
2 bivillkor då?

2018·08·16 # 3

a) $f(x,y) = y^3\sqrt{1-x^2-y^2}$ definerad på $D: \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

största värdet f kan anta på D?


D

kompakt område

1. inre stationära punkter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot (-2x) = \frac{-xy^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \overset{\text{kräv}}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \{\text{produktregeln}\} = 3y^2\sqrt{1-x^2-y^2} +$$

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$

$$+ y^3 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot (-2y) =$$

$$= 3y^2\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{y^4}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \text{bråkaddition}$$

$$= \frac{3y^2(1-x^2-y^2)-y^4}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{3y^2-3x^2y^2-4y^4}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \overset{\text{kräv}}{=} 0$$

Krav $\begin{cases} xy^3 = 0 & (*) \\ 3y^2-3x^2y^2-4y^4 = 0 & (**) \end{cases}$

$(*)$ Fall 1 $x=0$ ligger inte i det inre området D

Fall 2 $y=0$ $(**) \Rightarrow (0,0)$ dvs x är godtyckligt

Kandidater: $(x,y) = (x,0)$, $0 < x < 1$

2a) Inre singulära punkter, där f_x och/eller f_y inte existerar

Precis när $\sqrt{1-x^2-y^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2-y^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{inte inre punkter}}$

$\Longrightarrow$ inre singulära punkter saknas

Andra sätt att undersöka 2b. och 3.

randpunkter

Betrakta en randkurva i taget

För där $x^2+y^2=1$. Där gäller $f(x,y) = y^3\sqrt{1-x^2-y^2} =$

$= y^3\sqrt{1-(\underbrace{x^2+y^2}_{=1})} = 0$

$\Rightarrow f(x,y) = 0$ (konstant) på

För där $\begin{cases} x = 0 & \text{(konstant)} \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Då fås $f(x,y) = y^3\sqrt{1-y^2} = h(y)$

Nu Bestäm största värdet av h där $-1 \leq y \leq 1$ (SF1625)

[LÄXA]

$\Rightarrow$ största värdet är $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$

Sammanställning

1. $f(x,0) = 0$

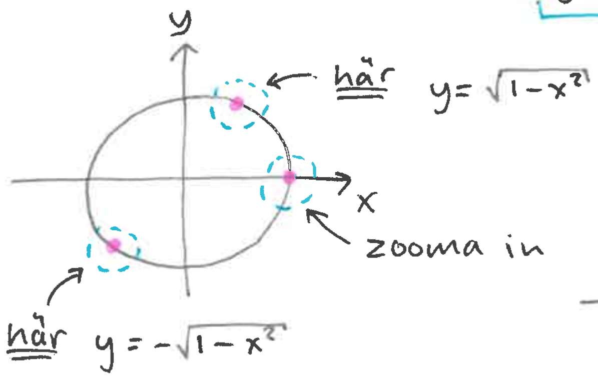
$f(x,y) = 0$

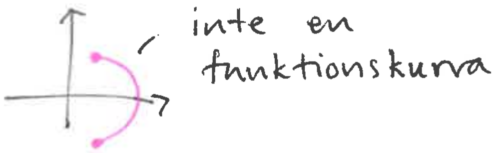
$f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ störst

Implicit derivering & implicita funktionssatsen

Inledande ex. Betrakta kurvan $x^2+y^2=1$

Kan vi lösa ut y som en funktion av x ? så att $y=f(x)$ erhålls





dvs y kan inte lösas ut som $y=f(x)$ i närheten av $(x,y)=(1,0)$ bl. a.

Sats Betrakta ekv $F(a,b)=c$ ← någon konstant

där $F(x,y)$ är kontinuerligt deriverbar i närheten av punkten $(x,y)=(a,b)$

Om $F_y(a,b)\neq 0$ kan vi lösa ut y som en funktion av x i närheten av punkten $(x,y)=(a,b)$

I vårt exempel:

Vi har ekv. $\underbrace{x^2+y^2}_{F(x,y)}=1$

$F_y(x,y)=2y$

$\Downarrow$

$F_y(1,0)=2\cdot 0=0 \Rightarrow$ y kan inte lösas ut som en fkn av x

2016-01-12 # 7 Givet $\underbrace{xe^y + ye^x}_{F(x,y)} = 0 \quad (*)$

$F(x,y)$ ← kontinuerligt deriverbar överallt

a) Visa att det finns en funktion y, med

$\underbrace{g(0) = 0}$, s.a. $F(x, \underbrace{g(x)}) = 0$ för $\underbrace{x \text{ nära } 0}$

om $x = 0$

så $y = g(x) = g(0) = 0$

Logiskt enligt ekv. $(*)$

$y = g(x)$

y är en funktion av x

i närheten av $(x,y) = (0,0)$

Bevis $F_y(x,y) = xe^y + e^x$

$\Downarrow F_y(0,0) = 0 + 1 = 1 \neq 0$ Klart enligt IFS!

b) Sök Taylorpolynom av ordning 2 för $g(x)$ i punkten $x = 0$

Formel: $P_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2$

Steg 1 $g(0) = 0$

Steg 2 Sök $g'(0)$ genom att derivera båda led av $xe^y + ye^x = 0$ m.a.p. x

(Minns att $y = g(x)$)

$$\underbrace{xe^y}_{\text{produktregeln}} + \underbrace{ye^x}_{\text{produktregeln}} = 0$$

$\Downarrow$

$e^y + xe^y \cdot y' + y'e^x + ye^x = 0$ sätt in $x = 0$ och $y = 0$

$\Downarrow$

$1 + 0 + y' + 0 = 0$

$y' = -1$ dvs $g'(0) = -1$

Steg 3 Sök $g''(0)$

TIPS $(f \cdot g \cdot h)' = f'gh + fg'h + fgh'$

Svar

$P_2(x) = -x + 2x^2$