DERIVERING AV IMPLICIT GIVNA FUNKTIONER

Exempel 1. Vi betraktar z som en funktion av x och y, z=z(x,y), given på **implicit** form genom $x^2+2y^2+3z^2-6=0$.

Bestäm partiella derivator $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ i punkten P(1,1,–1)

a) med hjälp av implicit derivering (d v s utan att bestämma z=z(x,y))

b) genom att bestämma på **explicit** form z=z(x,y), den gren av funktionen som går genom punkten P.

Lösning:

a) Låt $F(x,y,z)=0$ vara en given ekvation där $F(x,y,z)$ är en C^1 funktion i en omgivning av punkten (x,y,z) . Om vi betraktar z som en funktion av x, och y och deriverar på x ekvationen

$F(x,y,z)=0$ får vi (med kedjeregeln)

$$F'_x+F'_z\cdot z'_x=0 \Rightarrow z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

På samma sätt

$$F'_y+F'_z\cdot z'_y=0 \Rightarrow z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

I vår uppgift har vi

$F=x^2+2y^2+3z^2-6$

$F'_x=2x$, $F'_y=4y$, och $F'_z=6z$.

Därför $z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x}{6z}=-\frac{x}{3z}$. I punkten P gäller $z'_x(P)=\frac{1}{3}$

$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{4y}{6z}=-\frac{2y}{3z}$. I punkten P gäller $z'_y(P)=\frac{2}{3}$

b) Vi kan beräkna derivator genom att först lösa ut z (d v s, skriva z på explicit form) ur ekvationen

$$x^2+2y^2+3z^2-6=0 \Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{6-x^2-2y^2}{3}}$$

Vi får två (explicita) funktioner där

$z=-\sqrt{\frac{6-x^2-2y^2}{3}}$ svarar motpunkten P(1,1,-1).

Vi deriverar z och får $z'_x=-\frac{-2x/3}{2\sqrt{(6-x^2-2y^2)/3}}$ och $z'_x(P)=1/3$

På samma sätt $z'_y(P)=2/3$

Svar: $z'_x(P)=1/3$, $z'_y(P)=2/3$

==

När vi har en funktion given på implicit form med en ekvation F(x,y,z)= 0 är det oftast svårt eller praktiskt omöjligt att lösa ut en variabel (t ex z) ur ekvationen och ange funktionen på explicit form.

I ett sådant fall är **implicit derivering,** d v s direkt derivering av ekvationen F(x,y,z)=0, den metod som vi kan använda för att bestämma partiella derivator utan att behöva lösa ekvationen.

Anmärkning: Det finns ekvationer som inte definierar några deriverbara funktioner i närheten av en given punkt P, som t ex i följande två exempel.

1. Ingen punkt satisfierar ekvationen $x^2+2y^2=-1$.

2. Endast en punkt (0,0) satisfierar $x^2+2y^2=0$ och därmed ingen deriverbar funktion definieras av denna ekvation.

Därför är det viktigt att kontrollera om det finns deriverbara funktioner som satisfierar givna implicita ekvationer.

Nedanstående **implicita funktionssatser** (för en/ två ekvationer**)** ger tillräckliga villkor för existensen av deriverbara funktioner i närheten av en given punkt.

==

(Implicita funktionssatsen (1 ekvation)

Låt F vara en reellvärd funktion. Vi betraktar ekvationen

$F(x_1,x_2,...,x_n)=0$ (*)

i närheten av punkten $P(a_1,a_2,...,a_n)$.

Om följande gäller

1. punkten P satisfierar ekvationen (*)

2. F har kontinuerliga partiella derivator (kortare F är en C^1-funktion) i en omgivning till P

3 . $\frac{\partial F}{\partial x_n}(P) \neq 0$

då existerar x_n som en C^1-funktion av $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ (i närheten av punkten P).

==

Implicit derivering.

För enkelhets skull betraktar vi en ekvation med tre variabler

$F(x, y, z) = 0$ (*)
(På liknande sätt ger vi om $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$)

För att bestämma z'_x och z'_y deriverar vi ekvationen (*) , betraktar z som en funktion $z(x, y)$ av x och y och använder kedjeregeln:

Om vi deriverar

$F(x, y, z(x, y)) = 0$ (**)

på x , som finns i första och tredje koordinaten, får vi enligt kedjeregeln

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$$

och därför

$$z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z}$$

(enligt antagande $F'_z \neq 0$)

På samma sätt $z'_y = \dfrac{-F'_y}{F'_z}$

==

Implicita funktionssatsen (2 ekvationer)

Vi betraktar ekvationer

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ (ekv 1)

$G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ (ekv 2)

i närheten av punkten $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Om följande gäller

1. punkten P satisfierar ekvationen båda ekvationer

2. F och G har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen (kortare F , G är C^1-funktioner) i en omgivning till P

3 . Funktionaldeterminanten (**Jacobis determinant**) i punkten P

$$\frac{d(F,G)}{d(x_{n-1}, x_n)} \neq 0$$

då , existerar x_{n-1} och x_n som C^1-funktioner av $x_1, x_2, ..., x_{n-2}$ (i närheten av punkten P).

===

Uppgift 1. Visa att ekvationen $x^2 + y^2 + 2z^3 - 15 = 0$ definierar en explicit C^1-funktion $z = z(x, y)$ i närheten av punkten P(3,2,1) och bestäm z'_x och z'_y

Lösning:

1. Punkten P satisfierar ekvationen .

2. Funktionen $F = x^2 + y^2 + 2z^3 - 15$ har kontinuerliga partiella derivator

$F'_x = 2x$, $F'_x(P) = 6$; $F'_y = 2y$, $F'_y(P) = 4$; $F'_z = 6z$, $F'_z(P) = 6$.

3. $F'_z(P) \neq 0$

Därför

$$z'_x(P) = \frac{-F'_x(P)}{F'_z(P)} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \text{och} \quad z'_y(P) = \frac{-F'_y(P)}{F'_z(P)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Uppgift 2.

a) Bestäm om ekvationen $x^2+y^2+3\sin z=5$ definierar en explicit C^1-funktion $z=z(x,y)$ i närheten av punkten $P=(1,1,\frac{\pi}{2})$.

b) Visa att ekvationen definierar en explicit C^1-funktion $x=x(y,z)$ och bestäm x'_y och x'_z

Lösning:

$F'_x=2x$, $F'_x(P)=2$; $F'_y=2y$, $F'_y(P)=2$; $F'_z=3\cos z$, $F'_z(P)=0$!!!

Svar a) Nej, eftersom $F'_z(P)=0$

b) Ja, punkten P satisfierar ekvationen, F har kontinuerliga part. derivator och $F'_x(P)=2\neq 0$.

Vi betraktar x som en funktion av oberoende variabler y och z; dvs $x=x(y,z)$.

För att bestämma x'_y deriverar vi $F(x(y,z),y,z)=0$ på y och får

$$F'_x\cdot x'_y+F'_y=0\Rightarrow x'_y=\frac{-F'_y}{F'_x}=-1$$

på samma sätt

$$F'_x\cdot x'_z+F'_z=0\Rightarrow x'_z=\frac{-F'_z}{F'_x}=0$$

Svar b) $x'_y=-1$, $x'_z=0$.

Uppgift 3. Visa att följande två ekvationer

$x+y^2+z^3-6=0$,

$x^2+y+z^3-4=0$

definierar två C^1-funktion $y=y(x)$ och $z=z(x)$ i närheten av punkten P(1,2,1) och bestäm y'_x och z'_x

Lösning:

1. Punkten P(1,2,1) satisfierar båda ekvationer.

2. Vi betecknar $F=x+y^2+z^3-6$ och $G=x^2+y+z^3-4$,

och beräknar partiella derivator

$F'_x = 1, \quad F'_y = 2y \;, \quad F'_z = 3z^2 ,$

$F'_x(P) = 1; \quad F'_y(P) = 4 \;; \quad F'_z(P) = 3$

$G'_x = 2x, \quad G'_y = 1 \;, \quad G'_z = 3z^2 ,$

$G'_x(P) = 2, \quad G'_y(P) = 1 \;, \quad G'_z(P) = 3,$

Som vi ser ovan, alla partiella derivator av första ordningen är kontinuerliga i närheten av punkten P (Ovanstående partiella derivator är faktiskt kontinuerliga funktioner för alla x,y,z)

3. Funktionaldeterminanten (**Jacobis determinant**) i punkten P

$$\frac{d(F,G)}{d(y,z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

är skild från 0.

Enligt **implicita funktionssatsen (2 ekvationer)** definierar ekvationerna

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \qquad (**)$$

två variabler y och z som funktioner av alla andra variabler.

Den här gången har vi endast x kvar och vi kan betrakta y och z om funktioner av x:

y=y(x), z=z(x).

För att bestämma y'_x och z'_x deriverar vi ekvationer (**),på x enligt kedjeregeln , tar hänsyn till att **y och z betraktas som funktioner av x** , och får

$$\begin{aligned} F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x &= 0 \\ G'_x \cdot 1 + G'_y \cdot y'_x + G'_z \cdot z'_x &= 0 \end{aligned}$$

Vi substituerar värdena för part. derivator i punkten P som vi har beräknat ovan och får

$$\begin{aligned} 1 + 4 \cdot y'_x + 3 \cdot z'_x &= 0 \\ 2 + 1 \cdot y'_x + 3 \cdot z'_x &= 0 \end{aligned}$$

Vi löser systemet och får

$$y'_x = \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad z'_x = -\frac{7}{9}$$