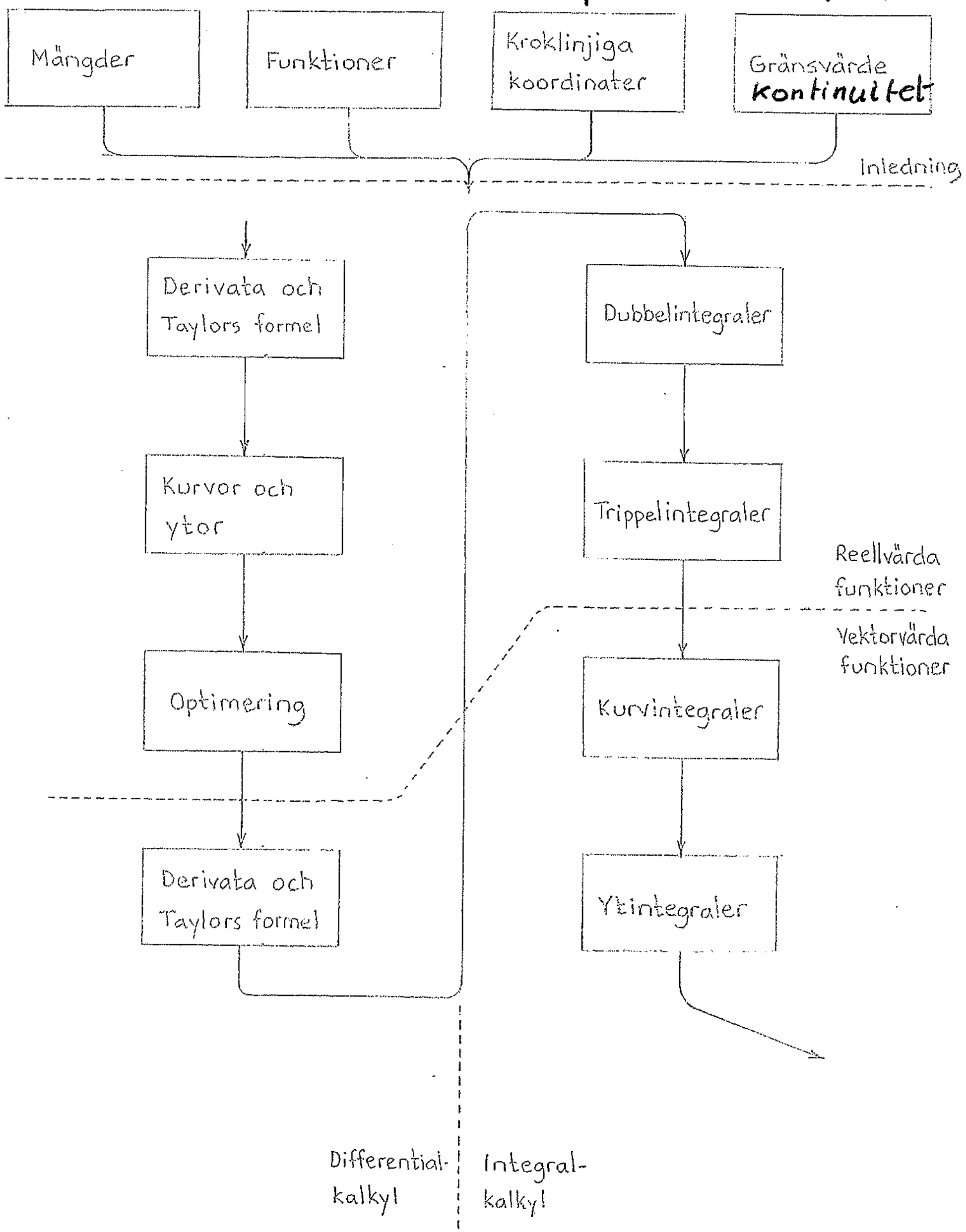
Flödesschema över kursen : se kurshemsida
http:// www. math. kth. se/~ karim /SF1626. html

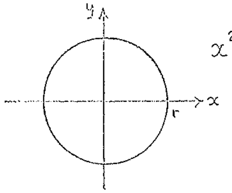


Föreläsning 1 kursboken §1.1 – 1.4.5

- Mängder
  - Några mängder i planet
  - Några transformationer i planet
  - Några mängder i rummet
  - Topologiska grundbegrepp
- Funktioner
  - Reellvärda funktioner
  - Vektorvärda funktioner
  - Definitionsmängd
  - Värdemängd

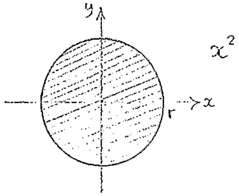
Några mängder i planet

En cirkel med medelpunkt i origo och radie r.



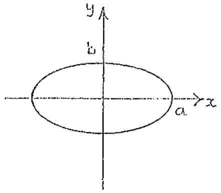
$$x^2 + y^2 = r^2$$

En cirkelskiva med medelpunkt i origo och radie r.



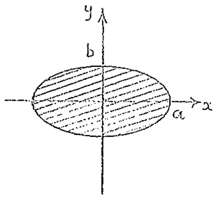
$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

En ellips med medelpunkt i origo och halvaxlar a och b.



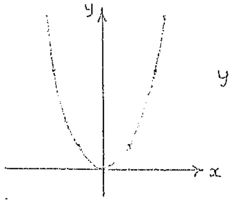
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En ellipsskiva med medelpunkt i origo och halvaxlar a och b



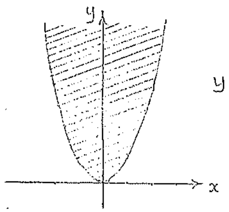
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

En nedåtvänd parabel med spets i origo och y-axeln som sym.-axel.



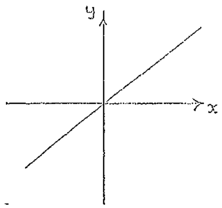
$$y = kx^2, \quad k > 0$$

Området ovanför parabeln.



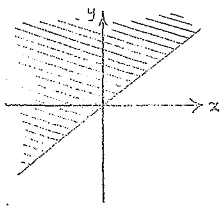
$$y \geq kx^2, \quad k > 0$$

En rät linje genom origo och med riktningskoefficient k.



$$y = kx$$

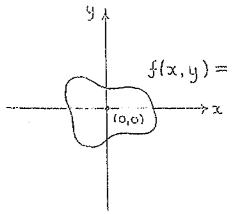
Ett halvplan med linjen som rand.



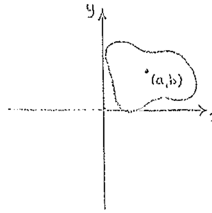
$$y \geq kx$$

Några transformationer i planet

Translation En mängd förskjuts a enheter i x-led och b enheter i y-led.

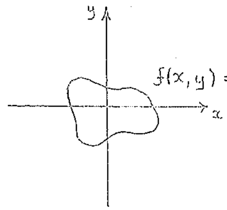


$f(x, y) = 0$

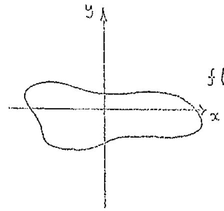


$f(x-a, y-b) = 0$

Töjning En mängd expanderas med en faktor a i x-led.

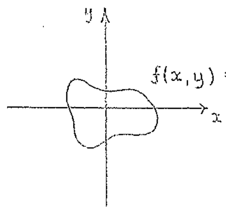


$f(x, y) = 0$

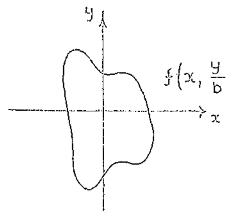


$f(\frac{x}{a}, y) = 0$

En mängd expanderas med en faktor b i y-led.

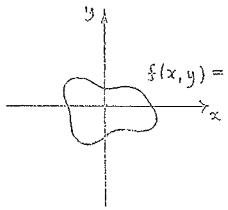


$f(x, y) = 0$

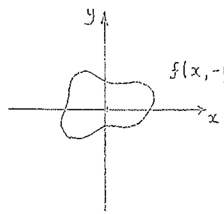


$f(x, \frac{y}{b}) = 0$

Spegling En mängd reflekteras i x-axeln.



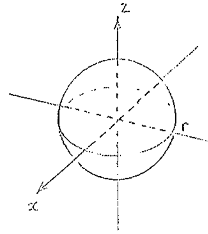
$f(x, y) = 0$



$f(x, -y) = 0$

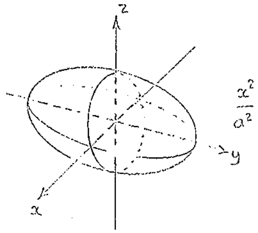
Några mängder i rummet

En sfär med medelpunkt i origo och radie r.



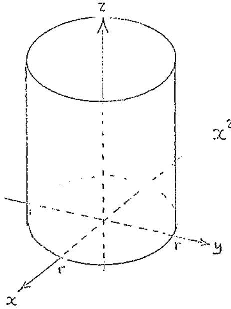
$x^2+y^2+z^2=r^2$

En ellipsoid med medelpunkt i origo och halvaxlar a, b och c.



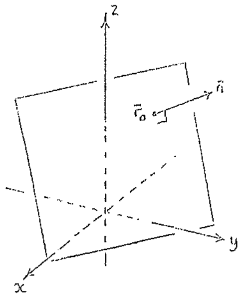
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

En cylinder med radie r och z-axeln som sym.-axel.



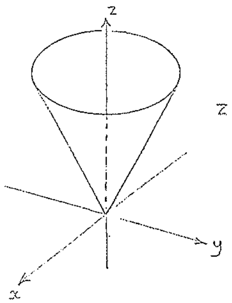
$x^2+y^2=r^2$

Ett plan som innehåller $\bar{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ och har normalen $\bar{n}=(a,b,c)$.



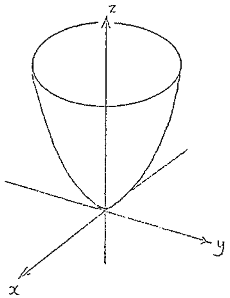
$\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)=0$ där $\bar{r}=(x,y,z)$.

En nedåtvänd kon med spets i origo och z-axeln som sym.-axel.



$z=\sqrt{x^2+y^2}$

En nedåtvänd paraboloid med spets i origo och z-axeln som sym.-axel.



$z=x^2+y^2$

-Se även sid 10-

Topologiska grundbegrepp

Omgivning

En omgivning av en punkt p är en cirkelskiva (minus randcirkeln) centrerad kring p.

inre punkt

En punkt p är en inre punkt till en mängd om det finns en omgivning till p som ligger helt i mängden.

yttre punkt

En punkt p är en yttre punkt till en mängd om det finns en omgivning till p som ligger helt utanför mängden.

randpunkt

En randpunkt är en punkt som varken är en inre eller yttre punkt.

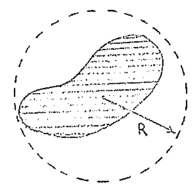
öppen

En mängd är öppen om dess randpunkter inte tillhör mängden.

sluten

En mängd är sluten om dess randpunkter tillhör mängden.

begränsad

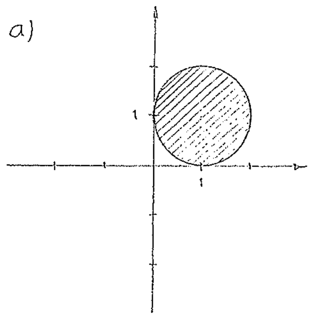


En mängd är begränsad om den ryms inuti en cirkelskiva med ändlig radie.

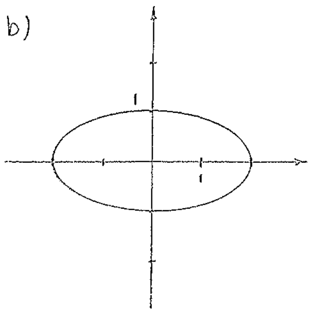
kompakt

sluten + begränsad

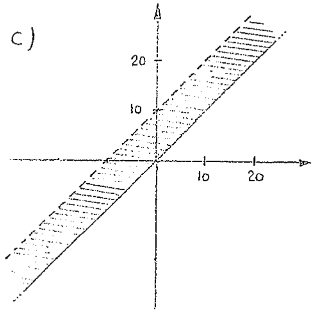
a)



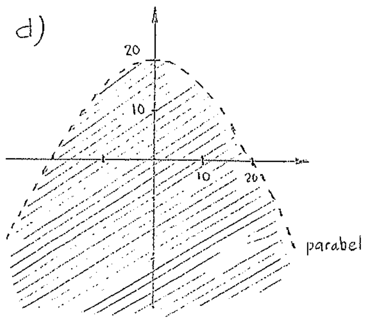
b)



c)



d)



(Streckade kurvor ingår inte i området.)

Övning 1: Skriv mängderna som ekvationer/olikheter.

a) $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1$ b) $x^2/4+y^2=1$

c) $x \leq y < x+10$ d) $y < -\frac{x^2}{20}+20$

Övning 2: Bestäm randen till respektive mängd

a) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ b) $x^2/4+y^2=1$

c) $y=x$ d) –

Övning 3: Kategorisera mängderna som öppna, slutna, begränsade och kompakta.

a) kompakt (slutet och begränsad) b) kompakt (slutet och begränsad)

c) ~~öppen~~ sluten och obegränsad d) öppen och obegränsad

Reellvärda funktioner

En reellvärd funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är en regel som anger hur m (reella) invärden $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ger ett reellt utvärde y:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto y$$

Övning 4: Givet $f(x_1, x_2) = \arctan(x_1 + x_2)$, fyll i rutorna

$f(3, -2) = \boxed{\pi/4}$

$f : \mathbb{R}^{\boxed{2}} \to \mathbb{R}$

Övning 5: Givet $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 + \sqrt{xy} - z^2)$, fyll i rutorna

$f(1, 1, -1) = \boxed{0}$

$f : \mathbb{R}^{\boxed{3}} \to \mathbb{R}$

Övning 6: Givet $f(x, y, z, w) = \frac{5}{xy}$, fyll i rutan

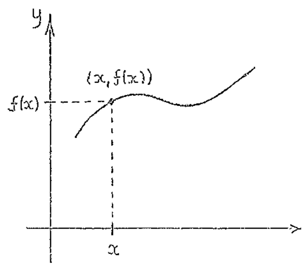
$f : \mathbb{R}^{\boxed{4}} \to \mathbb{R}$

Exempel En funktion ges inte alltid av ett analytiskt uttryck (en formel).

$T(x,y)$ = Temperaturen på jordens yta i positionen longitud x och latitud y vid tidpunkten kl. 9^{15} den 18 mars 2013.

Funktionsgraf

Funktionskurva

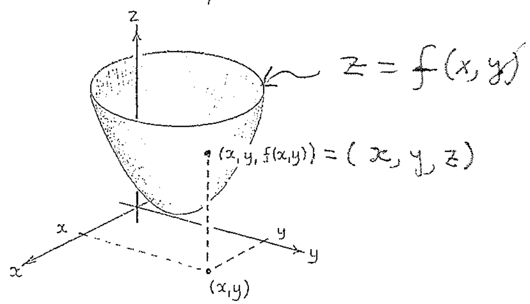


För en funktion $f(x)$ av en variabel markerar vi för varje x punkten

$(x, f(x))$.

Då får vi funktionskurvan.

Funktionsyta



För en funktion $f(x,y)$ av två variabler markerar vi för varje (x,y) punkten

$(x, y, f(x,y))$.

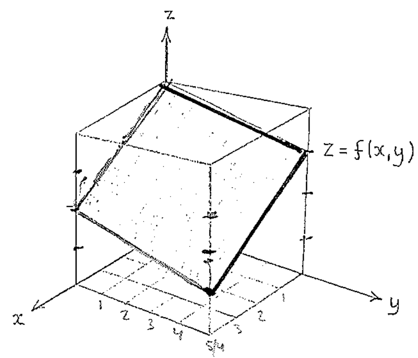
Då får vi funktionsytan.

Övning 7: Bestäm

a) $f(0,0) = \boxed{4}$

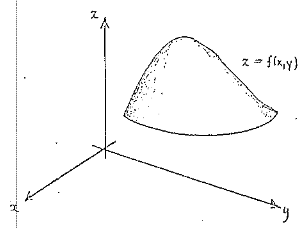
b) $f(4,0) = \boxed{2}$

c) $f(4,5) = \boxed{1}$

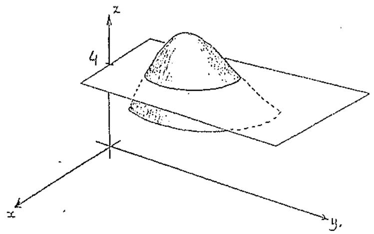


Nivåkurvor

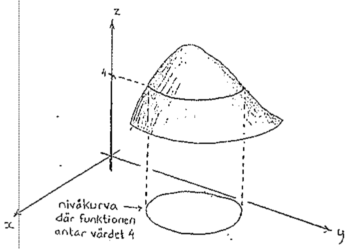
Antag att vi har en reellvärd funktion $f(x,y)$ av två variabler.



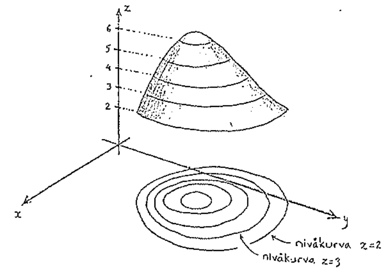
① Rita funktionsytan till f.



② Välj $z=4$ och betrakta skärningskurvan mellan planet $z=4$ och funktionsytan.

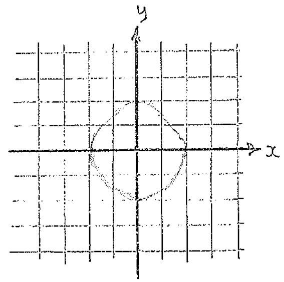


③ Skärningskurvan nedprojicerad på x,y-planet ger den kurva som består av punkter (x,y) där $f(x,y)=4$, den s.k. nivåkurvan $f=4$.



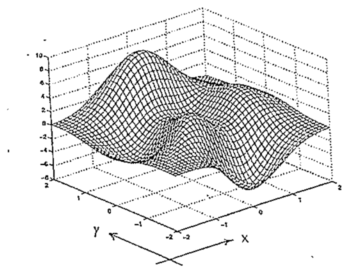
④ Genom att välja olika nivåer på planet $z=C$ får vi olika nivåkurvor.

Övning 8: Givet $f(x,y) = x^2+y^2$, bestäm nivåkurvan $f(x,y)=4$.

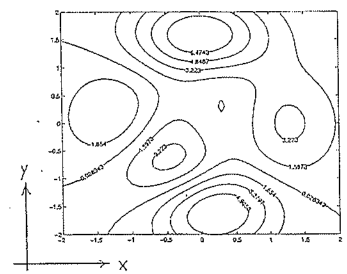


Exempel

Funktionsyta

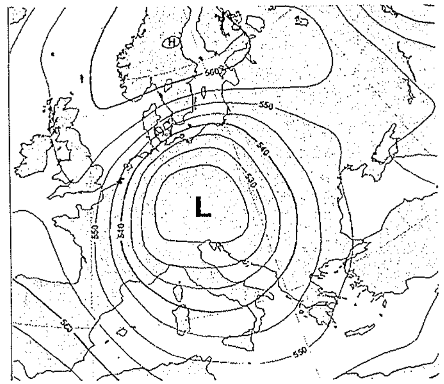


Nivåkurvor



Exempel

Nivåkurvor för temperaturen kallas för isotermer.

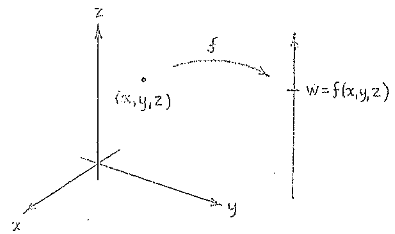


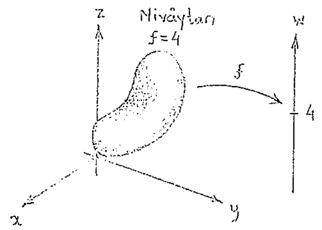
Nivåkurvor för lufttrycket kallas för isobarer.

Nivåytor

Anteckningar

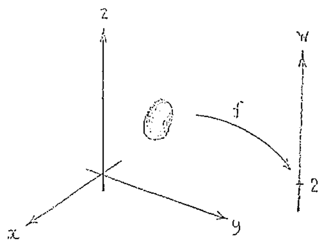
Antag att vi har en reellvärd funktion $f(x,y,z)$ av tre variabler.

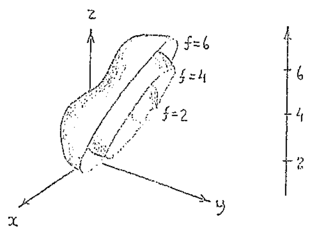




(1) Funktionen avbildar punkter (x,y,z) på värden $f(x,y,z)$.

(2) Fixera nivån $w=4$ och betrakta alla punkter (x,y,z) som ger $f(x,y,z)=4$. Då får vi den s.k. nivåytan $f=4$.





(3) Väljer vi en annan nivå $w=2$, får vi på samma sätt en annan nivåyta $f=2$.

(4) Genom att välja olika nivåer $f=C$ får vi olika nivåytor (i figuren beskurna).

Vektorvärda funktioner

En vektorvärd funktion $\bar{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en regel som anger hur m (reella) invärden $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ger n reella utvärden $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

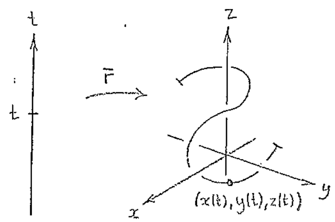
Övning 9: Givet $\bar{f}(x,y,z) = (xy, \sin \pi z, 1-\sqrt{xz}, 3)$, fyll i rutorna

$$\bar{f}(3,-2,3) = (\boxed{-6}, \boxed{0}, \boxed{-2}, \boxed{3})$$

$$\bar{f}: \mathbb{R}^{\boxed{3}} \to \mathbb{R}^{\boxed{4}}$$

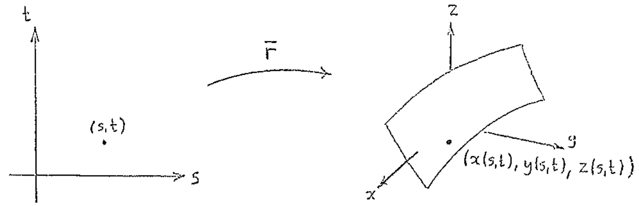
Exempel Parameterkurva

En parameterkurva $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ är en funktion $\bar{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.



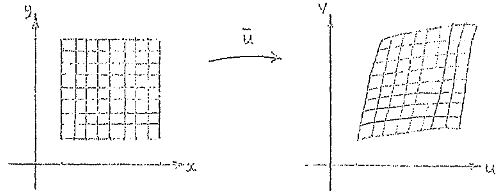
Exempel Parameteryta

En parameteryta $\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ är en funktion $\bar{r}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.



Exempel Deformation

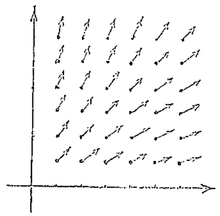
En deformation $\bar{u} = (u(x,y), v(x,y))$ av en platta är en funktion $\bar{u}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



Exempel Vektorfält

Ett vektorfält som till varje punkt (x,y) tillordnar en vektor $\bar{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ är en funktion

$$\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$



Definitionsmängd

Definitionsmängden till en funktion är alla punkter där funktionen är definierad.

Övning 10: Skissera definitionsmängden till

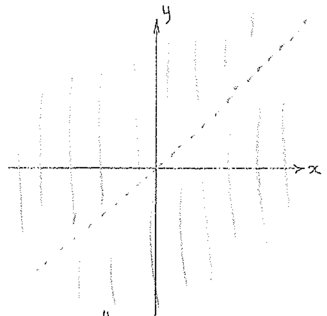
$f(x,y) = \frac{1}{x-y}$. $x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$

Övning 11: Skissera definitionsmängden till

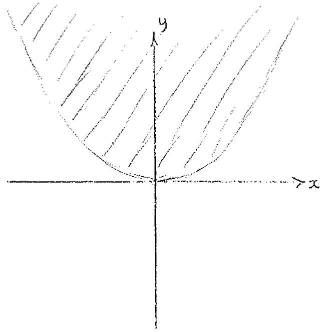
$f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$. $y - x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2$

Övning 12: Skissera definitionsmängden till

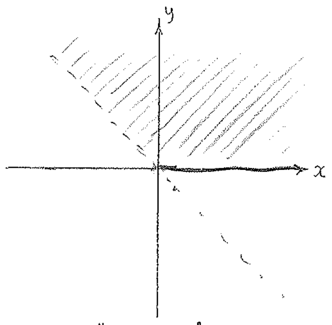
$\bar{f}(x,y) = (\ln(x+y), x+\sqrt{y})$. $y \geq 0$ $y \neq -x$



Övning 10



Övning 11



Övning 12

Värdemängd

Mängden av alla värden som en funktion kan anta kallas för funktionens värdemängd.

Övning 13: Ingår punkten (2,3) i värdemängden till

a) $\bar{f}(x,y,z) = (2x, y+z)$ Ja

b) $\bar{f}(x,y) = (\sqrt{x+y}, x-y)$ Ja

c) $\bar{f}(x,y) = (\sqrt{x+y}, x+y)$ Nej

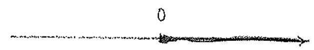
d) $\bar{f}(x,y) = (\cos(x^2y+\pi), \frac{x+y}{x-y})$ Nej

Övning 14: Skissera värdemängden till

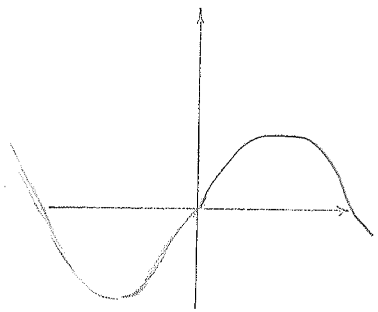
$f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

Övning 15: Skissera värdemängden till

$\bar{f}(t) = (t, \sin t)$.

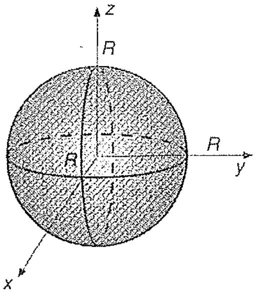


Övning 14



Övning 15

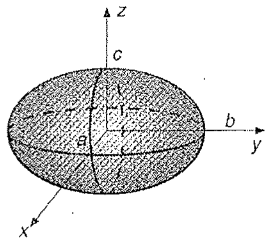
Second degree surfaces in standard form



Sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

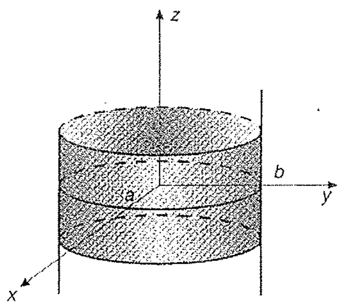
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



Ellipsoid

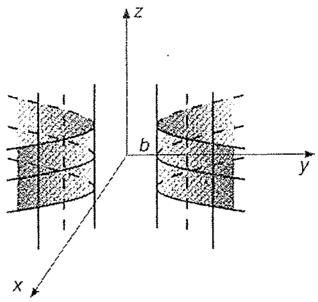
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$V = \frac{4\pi abc}{3}$$



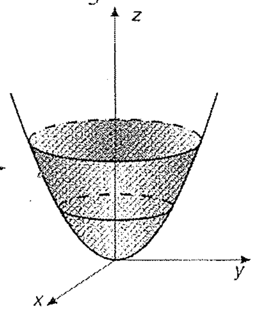
Elliptic cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



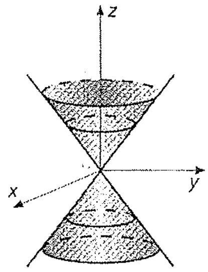
Hyperbolic Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$



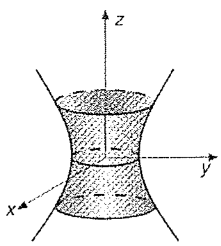
Elliptic Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



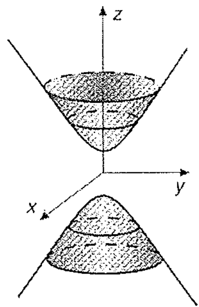
Elliptic Cone

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



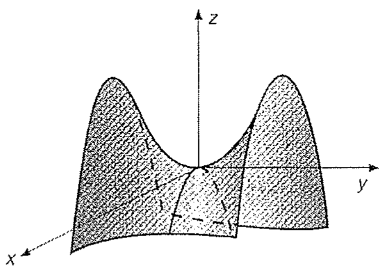
Elliptic Hyperboloid of one sheet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Elliptic Hyperboloid of two Sheets

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Hyperbolic Paraboloid

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$