YTOR

En yta kan anges på

EXPLICIT FORM $z = f(x, y)$

IMPLICIT FORM $F(x, y, z) = 0$

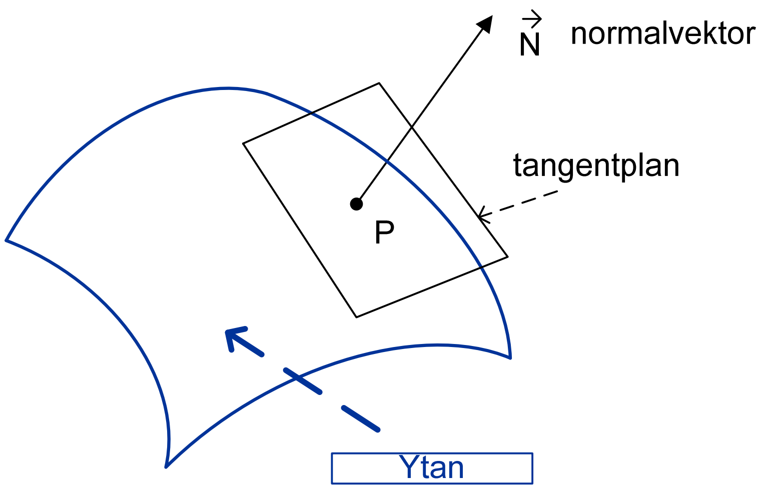
och

PARAMETER FORM med tre skalära ekvationer

$$x = f_1(s,t), \quad y = f_2(s,t), \quad z = f_3(s,t)$$

eller ekvivalent en vektorekvation

$$\vec{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$



TANGENTPLANETS EKVATION

Om $\vec{N} = (A, B, C)$ är ytans normalvektor i punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

då är $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ **tangentplanets ekvation** i P_0.

YTANS NORMALVEKTOR (eller normalriktning) $\vec{N}$ i en punkt på ytan beräknas enligt följande:

1. Om ytan anges på **explicit form** $z = f(x, y)$ då är

$$\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

2. Om ytan anges på **implicit form** $F(x, y, z) = 0$ då är

$$\vec{N} = (F_x', F_y', F_z')$$

3. Om ytan anges på parameterform form $\vec{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ då är

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

Uppgift 1. Bestäm en normal vektor och tangentplanets ekvation

a) till ytan $z = x^2 + y^4$ i punkten $P_0(1,1,2)$

b) till ytan (ellipsoid) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ i punkten $P_0(2,1,0)$.

c) till ytan $\vec{r}(s,t) = (s + 2t, 1 - 3t, s + t^2))$ i punkten P_0 som svarar mot s= 1, t=0.

Lösning:

a) Ytan är given på **explicit form** och därför beräknar en normalvektor i en punkt enligt formeln

$$\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1) = (-2x, -4y^3, 1).$$

I punkten $P_0(1,1,2)$ får vi därmed en normalvektor $\vec{N}(P_0)=(-2,-4,1)$.

Tangentplanets ekvation blir då $-2(x-1)-4(y-1)+1(z-2)=0$

Svar a) En normalvektor $\vec{N}(P_0)=(-2,-4,1)$
Tangentplanets ekvation $-2(x-1)-4(y-1)+1(z-2)=0$

b) Ytan är given på **implicit form** och därför beräknar en normalvektor i en punkt enligt formeln

$$\vec{N}=(F_x', F_y', F_z')=(2x,4y,6z)$$

I punkten $P_0(2,1,0)$ har vi en normalvektor $\vec{N}(P_0)=(4,4,0)$.

Tangentplanets ekvation blir då $4(x-2)+4(y-1)=0$ som kan förenklas till

$x+y-3=0$

Svar b: $\vec{N}(P_0)=(4,4,0)$. Tangentplanets ekv: $x+y-3=0$

c) Ytan är given på **parameter form** $\vec{r}(s,t)=(s+2t, 1-3t, s+t^2)$

och en normalvektor kan bestämmas med **hjälp av formeln** $\vec{N}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$.

Först bestämmer vi

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}=(1,0,1)$ och

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}=(2,-3,2t)$ Vi substituerar värden s= 1, t=0 (som gäller för punkten P_0) och får

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(P_0)=(2,-3,0)$

Nu är $\vec{N}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{vmatrix}=(3,2,-3)$

Genom insättning s= 1, t=0 får vi punkten P_0 (1, 1,1).

Tangentplanets ekvation är $3(x-1)+2(y-1)-3(z-1)=0$ eller $3x+2y-3z-2=0$

Svar c) $\vec{N} = (3,2,-3)$. Tangentplanets ekvation är $3x + 2y - 3z - 2 = 0$

Uppgift 2. Låt K beteckna skärningskurvan mellan ytorna

$x + 2y^2 + z^2 = 10$ och $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$.

Bestäm ekvationen för tangenten i punkten P_0(1,2,1) .

Lösning:

Låt $\vec{N}_1$ och $\vec{N}_2$ vara ytornas normalvektorer i punkten P_0.

Då är vektorn $\vec{T} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ parallell med tangentlinje i punkten P_0.

En normal vektor till ytan $x + 2y^2 + z^2 = 10$ är

$(F_x', F_y', F_z') = (1,4y,2z)$ och därför I punkten P_0 har vi $\vec{N}_1 = (1,8,2)$

En normal vektor till ytan $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$ är $\vec{N}_2 = (2,4,6)$

Därför $\vec{T} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = (40,-2,-12)$ som vi kan ersätta med en parallell vektor

(20,-1,-6)

Tangentlinjens ekvation är (x,y,z)=(1,2,1)+t(20,-1,-6).

Svar: (x,y,z)=(1,2,1)+t(20,-1,-6).

Uppgift 3. Bestäm konstanten A så att kurvan $\vec{r}(t) = (1 + t\cos t,\quad 2 + t\sin t,\quad t + 5)$ ligger på ytan

$(x-1)^2 + (y-2)^2 - (z-A)^2 = 0$

Lösning:

Kurvan ligger på ytan om punkten $(1 + t\cos t,\quad 2 + t\sin t,\quad t + 5)$ ligger på ytan för varje t.

Vi substituerar $x = 1 + t\cos t,\quad y = 2 + t\sin t,\quad z = t + 5$ i ytans ekvation och får

$$t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t - (t + 5 - A)^2 = 0 \Rightarrow t^2 - (t + 5 - A)^2 = 0$$
$$\Rightarrow -2(5 - A)t - (5 - A)^2 = 0, \quad \text{som måste gälla för alla t.}$$

Härav A=5.

Svar: A=5