# FLÖDESINTEGRAL

Flödet Φ av ett C[1]-vektorfältet $\vec{F} = (P, Q, R)$ genom ytan Y i riktning av normalvektorn $\vec{N}$ beräknas med hjälp av flödesintegralen

Φ = $\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_Y \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS$, där $\hat{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ betecknar ytans enhetsnormal.

**Anmärkning 1.**

I några böcker används beteckning $d\vec{S}$ för $\hat{n} dS$ och flödesintegralen betecknas med Φ = $\iint_Y \vec{F} \cdot d\vec{S}$

---

Flödesintegral kan användas i samband med transportfenomen (t ex fluidflöde, värmeöverföring, masstransport och strömningsteknik). I sådana tillämpningar visar flödesvektorn $\vec{F}$ riktning medan $|\vec{F}| = \frac{kvantitet}{area \cdot tiden}$, dvs $|\vec{F}|$ visar den mängd som strömmar genom en tvärsnitt area per tidsenhet.

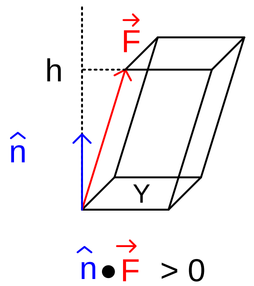
T ex vid massflöde kan vi ha $\vec{F} = \left(1, 1, \frac{1}{1+z^2}\right)$ och $|\vec{F}| = \sqrt{2 + \frac{1}{(1+z^2)^2}}$ i $\frac{kg}{m^2 \cdot s}$.

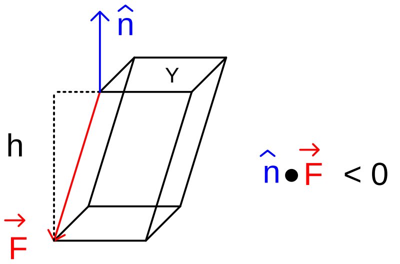
---

***Ett exempel** med fluidflöde. Beräkning av mängden( volymen) av en fluid (vätska eller gas)som under en tidsenhet (en sekund) passerar ytstycket Y. Hastighetsvektor är känd i varje punkt på ytan Y. Vi antar vidare att $\vec{F} = (P, Q, R)$ är ett stationärt fält, dvs, $(P, Q, R)$ beror ej av tiden t utan endast av positionen (x,y ,z).*

Låt $\vec{F} = (P, Q, R)$ vara hastighetsvektorn som beskriver stationärt flöde av en fluid genom en C[1] yta Y som definieras av $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$, $(s,t) \in D(s,t)$. Komponenter $P, Q, R,$ givna i m/s antas vara kontinuerliga i ett öppet område som innehåller Y.

i) Om vi först antar att $\vec{F}$ är **konstant** på ytstycket Y och att Y är ett **plant ytstycke** ( tillexempel en parallellogram) orienterad med enhetsnormalvektorn $\hat{n}$.



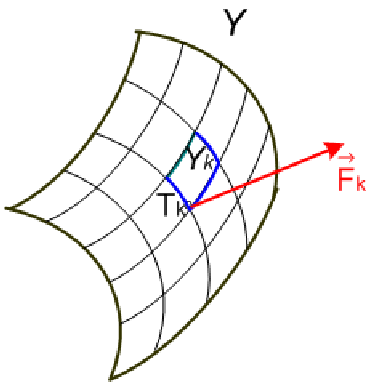




Under en tidsenhet, t ex sekund, fyller fluid parallellepiped med volymen V= h·area(Y)=| $\vec{F} \cdot \hat{n}$ |$area(Y)$. Flöde som passerar Y under en tidsenhet ( t ex en sekund) blir då Φ= ( $\vec{F} \cdot \hat{n}$ )$area(Y)$.

Φ är positivt om $\vec{F} \cdot \hat{n} > 0$, dvs om $\vec{F}$ pekar åt samma sida som $\hat{n}$ .

Om vinkeln mellan $\vec{F}$ och $\hat{n}$ är större än π/2 blir

$\Phi = (\vec{F} \cdot \hat{n})area(Y)$ negativt.




ii) Nu betraktar vi allmänt fall där hastighetsvektorn $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ varierar över en buktig yta Y som definieras av $\vec{r} = \vec{r}(s,t)$ , där $(s,t) \in D(s,t)$. Vi delar ytan Y i små ytor $Y_k$ , genom att välja $s=s_k$ och $t=t_k$, och därefter approximerar flödet $\Phi_k$ genom ytstycket $Y_k$ med

$\Phi_k = (\vec{F}_k \cdot \hat{n}_k)area(Y_k)$ ,

där $\vec{F}_k$ och $\hat{n}_k$ beräknas i en punkt$T_k$ som ligger i $Y_k$.
Därför blir approximationen av flödet genom hela ytan Y
$\Phi \approx \sum_k \Phi_k = \sum_k (\vec{F}_k \cdot \hat{n}_k)area(Y_k)$ (*)
Utrycket går mot ytintegralen $\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ om diam($Y_k$) går mot 0.
Alltså $\Phi = \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}$ är ett uttryck för volymflödet av fluiden genom ytstycket Y (under en tidsenhet).
Enligt ovan kan vara både positivt och negativt.
Vi kan även vidare utveckla (*):
Om vi substituerar $area(Y_k) \approx |\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t|\, \Delta s_k \Delta t_k$ och $\hat{n}_k = \frac{r'_s \times r'_t}{|r'_s \times r'_t|}$ i (*) får vi
$\sum_k (\vec{F}_k \cdot \hat{n}_k)area(Y_k) \approx \sum_k \left(\vec{F}_k \cdot \frac{r'_s \times r'_t}{|r'_s \times r'_t|}\right) |\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t|\; \Delta s_k\, \Delta t_k = \sum_{k=0}^{n} \vec{F}_k \cdot (\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t)\, \Delta s_k \Delta t_k$
som är en Riemannsumma för integralen $\iint_{D(s,t)} \vec{F} \cdot \vec{N} dsdt$.
Vi har därmed visat att flödet $\Phi$ genom ytan Y kan beräknas med
$\Phi = \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} dsdt$ där $\vec{N} = \vec{\boldsymbol{r}}'_s \times \vec{\boldsymbol{r}}'_t$.
där andra integralen beräknas som vanligt dubbelintegral över definitionsområdet D=D(s,t) i st-planet.

**Alternativt** kan vi formellt förenkla ytintegralen $\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$, enligt följande

$$\Phi = \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_Y \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} dS = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} |\vec{N}| dsdt = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} dsdt$$

**Anmärkning 2.** I visa delar av ytan Y kan flödet vara negativt. Formeln

$\Phi = \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ ger **nettoflödet** av $\vec{F}$ genom Y.

BERÄKNING AV FLÖDESINTEGRAL $= \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$

**A)** Om ytan ges på explicit form $z = f(x, y)$ där $(x, y) \in D$ då är **flödet uppåt**

$$\Phi = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N}\, dxdy$$

där $\vec{N} = (-z'_x\,,\ -z'_y\,,\ 1)$ ( eller $\vec{N} = (z'_x\,,\ z'_y\,, -1)$ om vi räknar **flödet neråt**).

$\vec{F} \cdot \vec{N}$ är skalärprodukten mellan $\vec{F}$ och $\vec{N}$.

**B)** För ytor givna på parameterform
$x = x(s,t)$ , $y = y(s,t)$ , $z = z(s,t)$ , eller kortare $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$, där $(s,t) \in D(s,t)$
har vi följande formler: En normalvektor till ytan är $\vec{N} = \vec{\boldsymbol{r}}'_s \times \vec{\boldsymbol{r}}'_t$
där $\vec{\boldsymbol{r}}'_s = (x'_s,\ y'_s,\ z'_s)$ och $\vec{\boldsymbol{r}}'_t = (x'_t,\ y'_t,\ z'_t)$.
Flödet ( i riktningen $\vec{N}$ ) beräknas med hjälp av integralen

$$\Phi = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N}\, dsdt$$

**C)** I några speciella fall kan vi beräkna flödet direkt med ytintegralen $\iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$:

T ex om $\vec{F} \cdot \hat{n} =$ $(= konstant)$ har vi $\Phi = \iint_Y \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$=$\iint_Y k\, dS$= $k \cdot area(Y)$

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

## ÖVNINGAR:

**Uppgift 1.** Beräkna flödet uppåt av vektorfältet $\vec{F}=(x,y,x+y)$ genom den yta som definieras av $z=1+3x+2y$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

**Lösning:** $z=1+3x+2y$,

$\vec{N}=(-z'_x,-z'_y,1)=(-3,-2,1)$, $\vec{F}=(x,y,x+y)$

$\vec{F}\cdot\vec{N} \quad =-3x-2y+x+y=-2x-y$

$$\Phi=\iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}\,dxdy \quad =\int_0^1 dx\int_0^2(-2x-y)dy=\int_0^1(-4x-2)dx=-4.$$

**Svar:** $\Phi=-4$

**Uppgift 2.** Beräkna flödet uppåt av vektorfältet $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+z\vec{k}$ genom den yta som definieras av $z=1+x+y^2$, $-1\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$

**Lösning:** $z=1+x+y^2$

$\vec{N}=(-z'_x,-z'_y,1)=(-1,-2y,1)$, $\vec{F}=(x+y,0,z)$

$\vec{F}\cdot\vec{N} \quad =-x-y+z$ **( Vi måste eliminera z!)**

Vi substituerar $z=1+x+y^2$ och får $\vec{F}\cdot\vec{N}$ **=** $y^2-y+1$

$$\Phi=\iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{-2}^2(y^2-y+1)dy=\frac{56}{3}.$$

**Svar:** $\Phi=\dfrac{56}{3}$

**Uppgift 3.** Beräkna flödet uppåt av vektorfältet $\vec{F}=x\vec{i}+3y\vec{j}+(x+3y)\vec{k}$ genom den yta som definieras av $z=1-x+y$, $0\le x^2+y^2\le 4$, $x>0,\ y>0$.

**Lösning:** $z=1-x+y$, $\vec{N}=(-z'_x,-z'_y,\ 1)=(1,-1,1)$, $\vec{F}=x\vec{i}+3y\vec{j}+(x+3y)\vec{k}$

$\vec{F}\circ\vec{N}=x-3y+x+3y=2x$

$$\Phi=\iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}\,dxdy \quad =\iint_D 2xdxdy=\text{\{polära koordinater\}}$$

$$\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 2r\cos\varphi\cdot rdr=2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^2 r^2dr=\frac{16}{3}.$$

**Uppgift 4.** Beräkna flödet uppåt av vektorfältet $\vec{F}=x\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k}$ genom den yta som definieras av $z=1+x^2+2y$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

**Lösning:** $z=1+x^2+2y$, $\vec{N}=(-z'_x,-z'_y,1)=(-2x,-2,1)$, $\vec{F}=(x,\ 2y,\ z)$

$\vec{F}\circ\vec{N}=-2x^2-4y+z=-2x^2-4y+1+x^2+2y=-x^2-2y+1$

$$\Phi = \iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}dxdy = \int_0^1 dx\int_0^2 (-x^2-2y+1)dy =$$

$$\int_0^1 dx\left[-x^2y-y^3+y\right]_0^2 = \int_0^1(-2x^2-2)dx = \frac{-8}{3}.$$

**Svar:** $\Phi = -8/3$

**Uppgift 5.** Beräkna flödet uppåt av vektorfältet $\vec{F} = (x, 2y, 0)$ genom den yta som definieras av $\vec{r}(s,t) = (2s,\ 2t,\ 3s+t), \quad 0\le s\le 1, \quad 0\le t\le 1.$

**Lösning:** $\vec{r}_s' = (2,\ 0,\ 3)$ och $\vec{r}_t' = (0,\ 2,\ 1)$.

$\vec{N} = \vec{r}_s'\times\vec{r}_t' = (-6,-2,4), \quad \vec{F}\cdot\vec{N} = -6x-4y = -12s-8t$

$\Phi = \iint_{D(s,t)}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dsdt = \iint_{D(s,t)}(-12s-8t)\,dsdt = \int_0^1 ds\int_0^1(-12s-8t)dt = -10$

**Uppgift 6.** Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = (2x, y, 0)$ genom den yta som definieras av $\vec{r}(s,t) = (3s^2,\ -3t^2,\ 2s+t), \quad 0\le s\le 1, \quad 0\le t\le 1.$

**Lösning:** $\vec{r}_s' = (6s,\ 0,\ 2)$ , $\vec{r}_t' = (0,\ -6t,\ 1)$, $\vec{N} = \vec{r}_s'\times\vec{r}_t' = (12t, -6s, -36st)$

$$\vec{F}\cdot\vec{N} = 24tx - 6sy = 72s^2t + 18st^2$$

$$\Phi = \iint_{D(s,t)}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dsdt = \iint_{D(s,t)} 72s^2t+18st^2\,dsdt = \int_0^1 ds\int_0^1 72s^2t+18st^2dt = 15.$$

*[ Vi har faktiskt den här gången beräknat flödet neråt eftersom den tredje koordinaten för vektorn $\vec{N}$ är $-36st \le 0$ i området $0\le s\le 1, \quad 0\le t\le 1$.]*

**Uppgift 7.** Låt $\vec{F} = \left(\dfrac{mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \dfrac{my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \dfrac{mz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$

( kortare beskrivning, $\vec{F} = m\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, där $\vec{r} = (x,y,z)$). Låt Y vara övre halvan av sfären

$x^2+y^2+z^2 = a^2$ .

Visa att $\vec{F}\cdot\hat{n}$ är konstant och beräkna integralen $\iint_Y \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$ direkt.

**Lösning.** På halvsfären gäller $x^2+y^2+z^2 = a^2$. Därför, på halvsfären,

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{a}. \text{ Vidare } \quad \vec{F} = m\frac{\vec{r}}{a^3} \text{ och } \vec{F}\cdot\hat{n} = m\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{a^4} = m\frac{a^2}{a^4} = \frac{m}{a^2}$$

Slutligen $\iint_Y \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_Y \dfrac{m}{a^2}dS = \dfrac{m}{a^2}area(S) = \dfrac{m}{a^2}\cdot 2a^2\pi = 2m\pi$ .

**Svar:** $2m\pi$