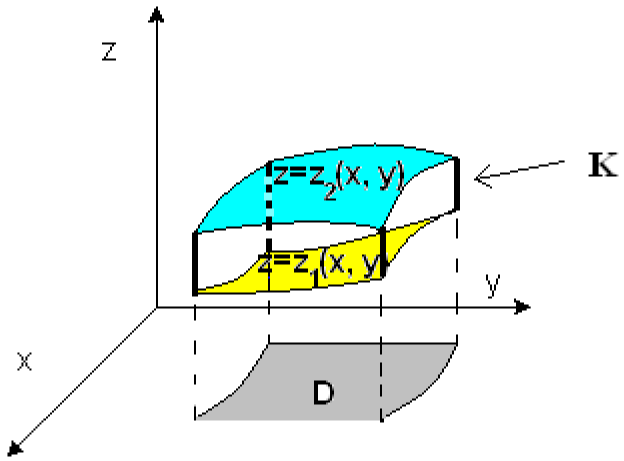
TRIPPELINTEGRALER.



1. Trippelintegralen $\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz$

över kroppen K som definieras av

$$K = \{(x,y,z):\quad a_1 < x < a_2 \quad y_1(x) < y < y_2(x),\quad z_1(x,y) < z < z_2(x,y)\}$$

beräknas genom itererad (upprepad) enkelintegration:

$$\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (*)$$

2. Om vi tänker byta koordinater **efter att vi beräknar** integralen $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ då kan vi skriva (*) som

$$\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \quad (*)$$

Några egenskaper:

3. $\iiint\limits_K 1\cdot dxdydz$ = Volymen(K)

4. $\iiint\limits_K Cdxdydz$ =C · Volymen(K), (där C är en konstant)

5. Om $\rho(x,y,z)$ är densitet i punkten (x,y,z) då är

$$\text{massan(K)} = \iiint_K \rho(x,y,z)dxdydz$$

6. $\iiint_K (af(x,y,z)+bg(x,y,z))dxdydz = \iiint_K af(x,y,z)dxdydz + \iiint_K bg(x,y,z)dxdydz$

(där a,b är en konstanter)

7. Om $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ för $(x,y,z) \in K$

då $\iiint_K f(x,y,z)dxdydz \le \iiint_K g(x,y,z)dxdydz$

Uppgift 1. Beräkna integralen

$$\iiint_K 2xdxdydz$$

där K är pyramiden med hörn i punkterna O(0,0,0), A(2,0,0), B (0,4,0) och C (0,0,8).

Lösning:

Anmärkning: Om ett plan skär x-,y- och z-axeln i punkterna A(a,0,0), B(0,b,0) resp C (0,0,c)

där $a \ne 0, b \ne 0, c \ne 0$ då kan planets ekvation skrivas enklast på formen:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (*)$$

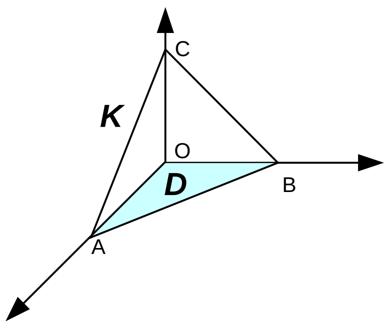
[Det är uppenbart att punkterna A, B och C ligger i planet (*)]

Planet genom A,B och C i vår uppgift har därmed ekvationen

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1$$

eller

$$z = 8-4x-2y$$



Linjen AB har ekvationen (som vi kan få på många sätt t ex genom att substituera z=0 i planets ekv.):

$y = 4 - 2x$

Integralen beräknas iterativt:

$$\iiint_K 2x dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{8-4x-2y} 2x dz$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy [2xz]_{z=0}^{z=8-4x-2y} = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} [16x - 8x^2 - 4xy] dy$$

$$= \int_0^2 [16xy - 8x^2 y - 2xy^2]_{y=0}^{y=4-2x} dx = \int_0^2 [32x - 32x^2 + 8x^3] dx$$

$$= [16x^2 - \frac{32}{3}x^3 + 2x^4]_{x=0}^{x=2} = \frac{32}{3}$$

Svar: $\frac{32}{3}$

Uppgift 2. Beräkna integralen

$\iiint_K xy^2 z^3 dxdydz$ där $K = \{(x,y,z): \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < x \quad 0 < z < xy\}$

Lösning: $\iiint_K xy^2 z^3 dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{4} x^5 y^6 dy = \int_0^1 \frac{1}{28} x^{12} dx = \frac{1}{364}$

===

Efter att vi beräknar i tredje integralen $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz = F(x,y)$ i trippelintegralen

$$\iiint_K f(x,y,z) dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dxdy$$

har vi kvar en dubbelintegral :

$$\iiint_K f(x,y,z)dxdydz = \iint_D F(x,y)dxdy$$

I några fall kan det vara lämpligt att byta variabler i dubbelintegralen som i nedanstående exempel. Om vi ska byta variabler i dubbelintegralen då **behöver vi inte bestämma gränser i xy-variabler** utan **endast gränser för de nya variabler** i dubbelintegraler.

===

Uppgift 3.

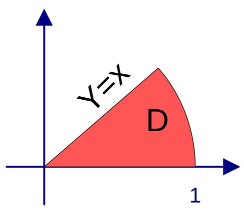
$\iiint_K ydxdydz$ över kroppen K som definieras av

$$K = \{(x,y,z): \quad ,0 \le y \le x, \quad 0 \le x^2 + y^2 \le 1 \quad x + x^2 + y^3 < z < 3x + x^2 + y^3\}$$

Lösning: $\iiint_K ydxdydz = \iint_D [yz]_{z2}^{z1} dxdy = \iint_D [y(z_2 - z_1)]dxdy = \iint_D 2xydxdy$

där D definieras av $0 \le y \le x, \quad 0 \le x^2 + y^2 \le 1$

Fig 2



Vi byter till polära koordinater ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *J=r)* och får

$$\iint_{D_1} 2r^3 \cos\theta \sin\theta drd\theta = \int_0^{\pi/4} \sin(2\theta)d\theta \int_0^1 r^3 dr = \left[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}(0-1)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Svar: $\frac{1}{8}$

Uppgift 4.

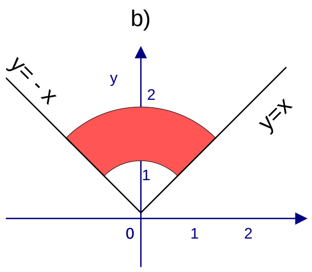
$\iiint_K xdxdydz$ över kroppen K som definieras av

$K = \{(x, y, z): \quad ,|x| \le y, \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \quad x + \sin y < z < 2x + \sin y\}$

Lösning:

$$\iiint_K x dx dy dz = \iint_D [xz]_{z2}^{z1} dxdy = \iint_D [x(z_2 - z_1]dxdy = \iint_D x^2 dxdy$$

där D definieras av $|x| \le y, \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4$



Vi byter till polära koordinater ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *J=r)* :

$$\iint_{D_1} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \int_1^2 r^3 dr = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta}{2})\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}[(3\pi/4 - \frac{1}{2}) - (\pi/4 + \frac{1}{2})] \cdot [\frac{16}{4} - \frac{1}{4}] = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 1)\frac{15}{4} = \frac{15}{8}(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{15\pi}{16} - \frac{15}{8}$$

Svar: $\frac{15\pi}{16} - \frac{15}{8}$