Sammanfattning Flervariabelanalys

Filippa Leuchfeld

VT 2020

FÖRKUNSKAP:

Potenslagar:

$a^x a^y = a^{x+y}$ $\qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad (a^x)^y = a^{xy}$ $\qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^x b^x = (ab)^x$ $\qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ $\qquad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad a^0 = 1$

Logaritmlagar:

$y = 10^x \iff x = \lg y$ $\qquad y = e^x \iff x = \ln y$

$\lg x + \lg y = \lg xy$ $\qquad \lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$ $\qquad \lg x^p = p \lg x$

Absolutbelopp:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

Räta linjens ekvation:

$y = kx + m$ $\qquad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad y - y_1 = k(x - x_1)$

Derivator:

$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d}{dx} e^{kx} = k \cdot e^{kx}$

$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

$\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\frac{d}{dx} \arcsin = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\frac{d}{dx} \arctan = \frac{1}{1 + x^2}$

$\frac{d}{dx} \arccos = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Deriveringsregler

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot f'(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)=f'(g(x))\,g'(x)$$

PQ formeln:

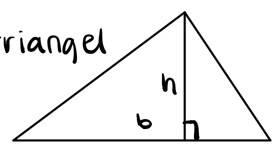
$$x^2+px+q=0 \qquad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Primitiva funktioner

k	$kx+C$	$\sin x$	$-\cos x+C$
$x^n \quad (n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan+C$
e^x	e^x+C	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin+C$
e^{kx}	$ke^{kx}+C$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos+C$
$a^x \quad (a>0,\ a\neq1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$		

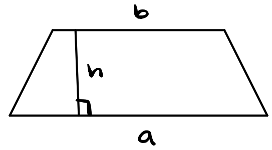
Geometri

triangel



$A=\frac{1}{2}b\cdot h$

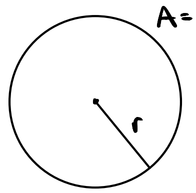
parallelltrapets



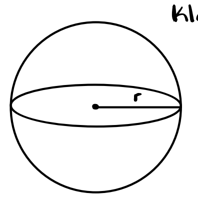
$A=\frac{1}{2}h(a+b)$

cirkel

$A=\pi r^2$

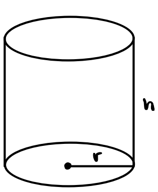


klot

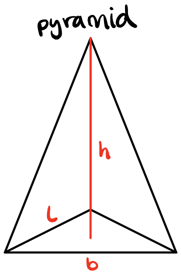


$V=\frac{4\pi}{3}\cdot r^3$

Cylinder $V=\pi r^2 h$

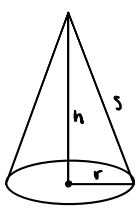


pyramid



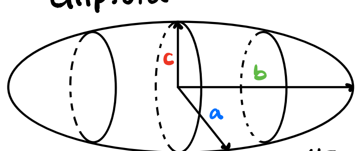
$V=\frac{1}{6}\cdot l\cdot b\cdot h$

kon



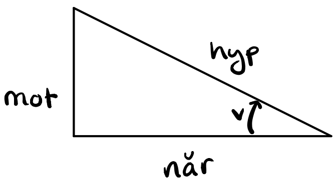
$V=\frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot h$

ellipsoid



$V=\frac{4\pi}{3}\cdot abc$

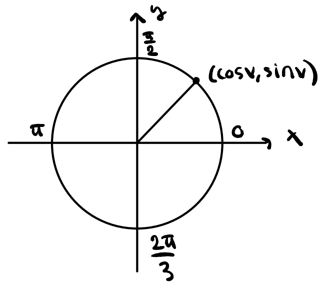
Trigonometri

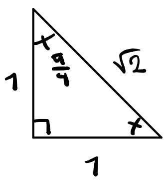


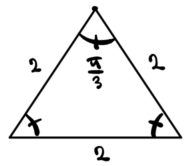
$\sin v = \frac{mot}{hyp}$

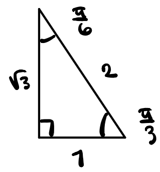
$\cos v = \frac{när}{hyp}$

$\tan = \frac{mot}{när} = \frac{\sin v}{\cos v}$









Trigonomiska formler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Skalärprodukt:

$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

parametrisera linje

$L = P + t\,\overrightarrow{PQ} \qquad t \in \mathbb{R}$

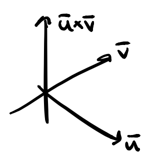
startpunkt

Lutning

Kryssprodukt

$u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 - 3\cdot 4 \\ -(1\cdot 5 - 3\cdot 3) \\ 1\cdot 4 - 2\cdot 3 \end{pmatrix}$

→ kryssprodukt är alltid vinkelrät mot båda input vektorerna



Ta fram ekv. från $\bar{n}$ och punkt.

$ax + by + cz = d$

$\rightarrow \bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\bar{n} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$

Determinant

$$\det\begin{pmatrix} {}^{+}a & {}^{-}b & {}^{+}c \\ {}^{-}d & {}^{+}e & {}^{-}f \\ {}^{+}g & {}^{-}h & {}^{+}i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g\det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} = e \cdot i - h \cdot f$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Norm

$$\bar{u} = (u_1, u_2 \ldots u_n)$$

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_n}$$

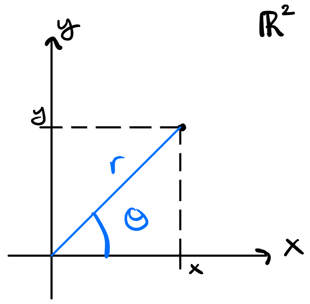
Normalisera en vektor

$$\bar{u}_{norm} = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$$

MODUL 1.

Polära, cylindriska och sfäriska koordinater

POLÄRA $\mathbb{R}^2$

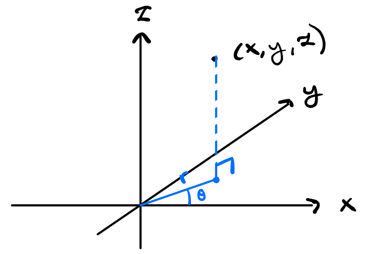


$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

CYLINDRISKA $\mathbb{R}^3$



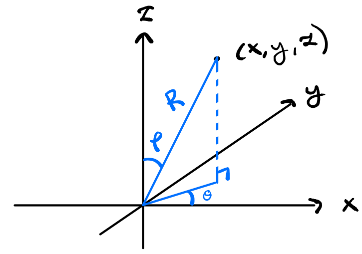
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

SFÄRISKA $\mathbb{R}^3$



$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Vektorvärda funktioner

En partikel rör sig i xy-planet längst en kurva C som ges av den vektorvärda funktionen

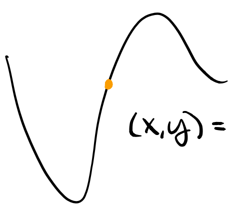
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

1. Vi kan tolka $x(t)$ och $y(t)$ som partikelns position, som beror av tiden t, i xy-planet.

2. Vi säger att kurvan C parametriseras av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, där t är en parameter

3. Vi kan relativt lätt räkna ut partikelns hastighet, fart, acceleration mm.

Parameterkurvor



$(x,y) = (x(t), y(t)) = \bar{r}(t)$ beskriver en partikels position

Hastighet: $\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$

Fart: $v(t) = \|\bar{v}(t)\|$ Från algebra: $\bar{v} = (x, y) \Rightarrow \|\bar{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Acceleration $\bar{a}(t) = \bar{v}'(t) = \bar{r}''(t)$

parametrisering av kurvor

1 Funktionskurvor $y=f(x)$

parametrisera genom $\bar{r}(t)=(x(t), y(t))$

, Tips: sätt $x(t)=t$ och $y(t)=f(x)$

fast byt mot t.

2. Cirklar $x^2+y^2=D^2$

populär parametrisering: $\begin{cases} x(t)=D\cos t \\ y(t)=D\sin t \end{cases}$, där $0 \le t \le 2\pi$

$(x-a)^2+(y-b)^2=D^2$

populär parametrisering: $\begin{cases} x-a=D\cos t \\ y-b=D\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=D\cos t+a \\ y(t)=D\sin t+b \end{cases}$, där $0 \le t \le 2\pi$

3 Ellipser $\left(\frac{x}{a}\right)^2+(b\,y)^2=D^2$

populär parametrisering: $\begin{cases} \frac{x}{a}=D\cos t \\ by=D\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=D\cos t \cdot a \\ y=\frac{D\sin t}{b} \end{cases}$, där $0 \le t \le 2\pi$

gränsvärden och kontinuitet i flera variabler

Kontinuitet:

$f(x,y)$ är kontinuerlig i punkten $(x,y)=(a,b)$ om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

- funktionen är definerad i punkten
- funktionen har ett gränsvärde när $(x,y)\to(a,b)$
- funktionsvärdet och gränsvärdet är lika.

Gränsvärden:

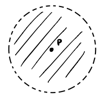
Se om gränsvärdet existerar genom att närma sig det från olika håll och se om de är lika, förslagsvis axlarna.

Nivåkurvor

En nivåyta till en reellvärd funktion f av 2 variabler består av alla punkter (x,y) i definitionsmängden till f som uppfyller en ekvation $f(x,y)=C$ för något fixt tal C.

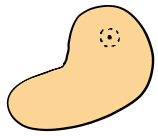
Topologiska grundbegrepp

omgivning



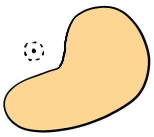
En omgivning av en punkt P är en cirkelskiva (minus randcirkeln) centrerad kring P.

inre punkt



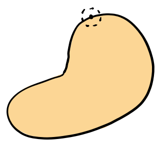
En punkt p är en inre punkt till en mängd om det finns en omgivning till P som ligger helt i mängden

yttre punkt



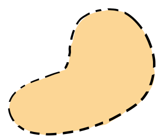
En punkt p är en yttre punkt till en mängd om det finns en omgivning till P som ligger helt utanför mängden.

Randpunkt



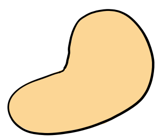
En randpunkt är en punkt som varken är en inre eller en yttre punkt.

öppen



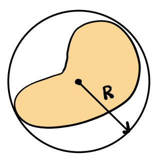
En mängd är öppen om dess randpunkter inte tillhör mängden

sluten



En mängd är sluten om dess randpunkter tillhör mängden

begränsad



En mängd är begränsad om den ryms inuti en cirkelskiva med ändlig radie

kompakt

sluten + begränsad

MODUL 2

Tangentplanets ekvation

1 Om nivåytans funktion redan har tre dimensioner $f(x,y,z)$ går vi direkt till 2. I annat fall måste vi räkna ut z_0 genom att sätta in punktens koordinater i funktionen.

2 Ta fram gradienten ∇f och sätt in P:s koordinater i denna för att få fram normalvektorn $\bar{n}$. Vi har alltså:
$\bar{n} = \nabla f$ i punkten $P(a,b,c)$

3 Räkna ut tangentplanets ekvation:

3 dim:

$$\bar{n} \cdot (x-a,\, y-b,\, z-c)$$

2dim:

$$z - z_0 = \bar{n} \cdot (x-a,\, y-b)$$

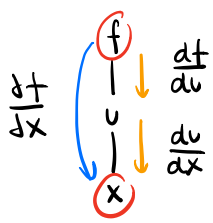
Kedjeregeln i flera variabler

Sats: Om vi vill derivera sammanställningen $z = f(x(t), y(t))$. Då gäller, om f är C_1 (diffbar) och derivatorna av x och y med avseende på t existerar:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

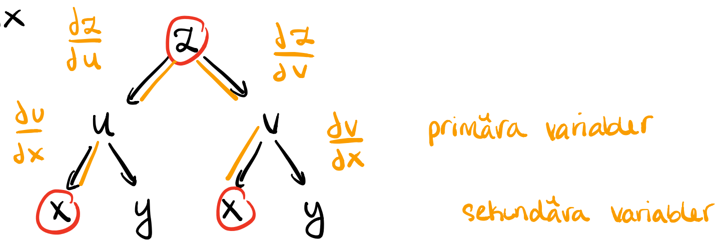
Verktyg: Variabelträdet

SF1625 Givet $f(u(x))$ Då: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$



Flera variabler:

Sök $\frac{dz}{dx}$



$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{2} + \frac{dz}{dv}\underbrace{\frac{dv}{dx}}_{3}$$

Symmetri

$f_{xy} = f_{yx}$

om dessa är kontinuerliga

Gradienter

Def: Gradienten, till en funktion f i flera variabler, är en vektor som innehåller funktionens första partiella derivator.

För $f(x,y)$ gäller: ∇: nabla

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

För $f(x,y,z)$ gäller:

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

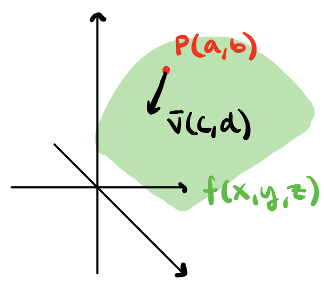
Problemtyp #1 - Fysikalisk tillväxt

Sats Givet en funktion $f(x,y)$, alternativt $f(x,y,z)$

∇f visar den riktning i vilken funktionsvärdet ökar som snabbast.
$-\nabla f$ ——— 〃 ——— minskar ——— 〃 ———

Den maximala öknings- / minskningstakten är $\|\nabla f\| = \|-\nabla f\|$ (vektornormen av ∇f)

Problemtyp #2 - Riktningsderivata



Def. Riktningsderivata av f i riktningen $\bar{v}$ är

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot c + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot d$$

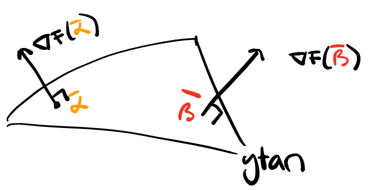
obs! (c,d) är en enhetsvektor!

Innebörd: Hur snabbt något ökar eller minskar i en viss riktning $\bar{v}$.

Problemtyp #3 - Normalvektor och tangent

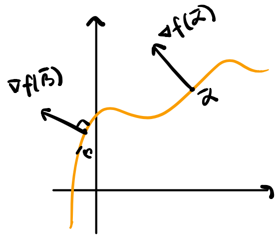
Sats (i $\mathbb{R}^3$) Givet en yta $F(x,y,z) = c$, där c är någon konstant.

Då: ∇F är ortogonal mot ytan i varje punkt på ytan.



Sats (i $\mathbb{R}^3$) Givet en kurva $\underbrace{f(x,y) = c}_{\text{nivå-kurva}}$ (c är en konstant)

Då ∇f är ortogonal mot kurvan i varje punkt på kurvan



Differentierbarhet och C_1

Definition: Funktionen $f = f(x,y)$ sägs vara differentierbar i en punkt (a,b) i (det inre av) definitionsmängden om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Faktum: Om f är C_1, vilket betyder att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga i en omgivning av (a,b), så är f också differentierbar i (a,b).

Differentierbarhet, i vanliga ord: Att f är differentierbar betyder att funktionsytan har ett tangentplan och man kan linjärisera f med ett tillräckligt litet fel.

Ett enkelt villkor som garanterar att så är fallet är att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga i en omgivning av punkten (f är C_1)

Jacobimatrisen

Om f är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ så kallas matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen, funktionalmatrisen eller totala derivatan till f.

MODUL 3

Taylorpolynom i flera variabler

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right)$$

Största minsta värde.

Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd (dvs sluten och begränsad) så vet man garanterat att största och minsta värde finns.

Kritiska punkter

bestämning

Kritiska punkter = Stationära punkter

klassificering

- metod 1 – Taylorpolynom av ordning 2
  - ↳ kvadratiska formen $Q(h,k)$
- metod 2 – 2:a derivatatestet
  - ↳ Hesse-matrisen $H(x,y)$

lokalt maximum, lokalt minimum, sadelpunkt

$\underbrace{\text{lokalt maximum} \quad \text{lokalt minimum}}_{\text{lokalt extremum} = \text{extrempunkt}}$

Metod #1 – Klassificering mha $Q(h,k)$ som ingår i $P_2(x,y)$

Vi skriver kortfattat $P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\underbrace{Q(h,k)}_{\text{tecken?}}$ där $\begin{cases} h = x-a \\ k = y-b \end{cases}$

3 fall: Om

① $Q > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ är (a,b) ett lokalt minimum

positivt definit

ex: $4h^2 + k^2 > 0$ om $(h,k) \neq (0,0)$

② $Q < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ är (a,b) ett lokalt maximum

negativt definit

ex: $-4h^2 - k^2 < 0$ om $(h,k) \neq (0,0)$

③ $Q \gtrless 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ är (a,b) en sadelpunkt

indefinit

ex: $h^2 - hk \gtrless 0$

Metod # 2 – Klassificering m.h.a Hesse-matrisen H eller (ABC-testet)

Låt (a,b) vara en krit. punkt till $f(x,y)$

Ta fram $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow H(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$

3 fall: Om

I $\quad \det H = AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \Rightarrow (a,b)$ lokalt minimi

II $\quad \det H = AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \Rightarrow (a,b)$ lokalt maximum

III $\quad \det H = AC - B^2 < 0 \Rightarrow (a,b)$ är en sadelpunkt

Anm: Om $\det H = 0$ ger testet ingen säker slutsats

Optimering på kompakta områden

(kompakta: slutna & begränsade)

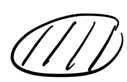
En typisk formulering:

$\underbrace{\text{Sök det största resp. minsta värdet}}_{\text{optimera}}$ av $f(x,y)$

inom området $\underbrace{g(x,y) \leq C}_{\text{kompakt}}$ (C är någon konstant)

Ex: $x^2 + 3y^2 \leq 1$
ellipsskiva

! Sats f:s största och minsta värde antas bland 3 punkttyper



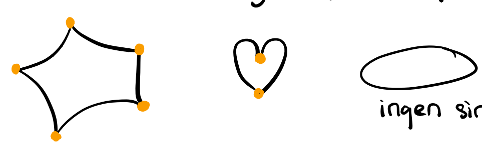
① INRE stationära punkter

$$\begin{cases} f_x = f_y = 0 & \text{stationär} \\ g(x,y) < C & \text{inre} \end{cases}$$

② Singulära RANDpunkter

$$\begin{cases} g_x = g_y = 0 & \text{singulär} \\ g(x,y) = C & \text{rand} \end{cases}$$

Ex Wikipedia: Singular points of a curve

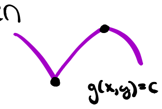


③ RANDpunkter som uppfyller Lagrange-villkoret

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g & (\nabla f \text{ och } \nabla g \text{ är linjärt beroende}) \\ g(x,y) = C & \text{rand} \end{cases}$$

! Skilj mellan $\underbrace{\text{singulär punkt av en funktion } f(x)}_{\text{SF1625 där } f'(x) \text{ saknas}}$ och en

$\underbrace{\text{singulär punkt av/på en kurva } g(x,y) = C}_{\text{SF1626 där } g_x = g_y = 0}$



Implicita funktionssatsen

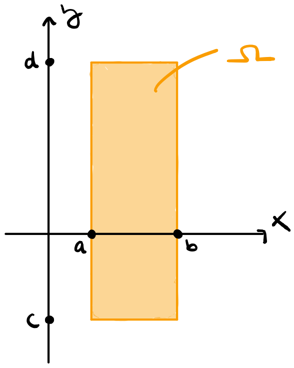
Givet ekvationen $F(x,y,z) = k$ någon konstant

Om $\begin{cases} F(a,b,c) = k \\ \frac{\partial F}{z}(a,b,c) \neq 0 \end{cases}$ Så finns en funktion $z(x,y)$ implicit definerad kring (a,b,c)

Anm: $F(x,y,z)$ och $z(x,y)$ är C_1-funktioner = kontinuerligt deriverbar

MODUL 4

I) Dubbelintegral över rektangulära områden Ω



Ω ges av $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

där a, b, c och d är konstanter

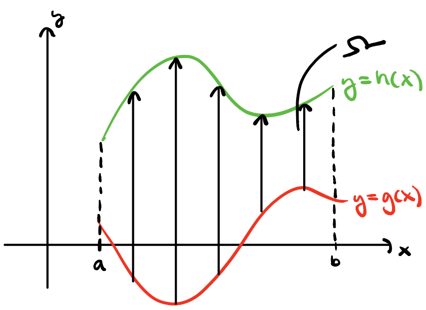
$$\rightarrow \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

II) $\iint$-integral över (nästan) godtyckliga områden i $\mathbb{R}^2$

(inte )

två scenarion:

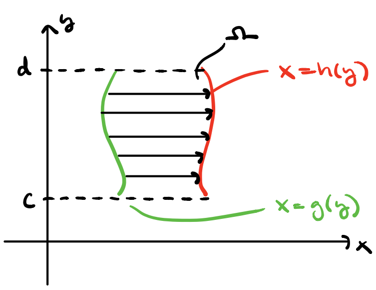
1) y-enkelt område (y-simple domain)



Sats:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

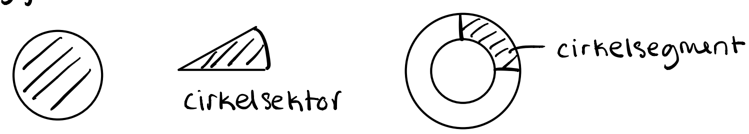
2) x-enkelt område (x-simple domain)

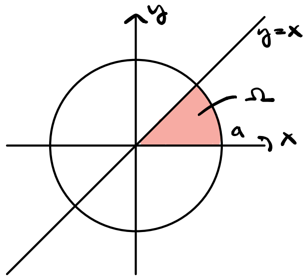


Sats:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)}$$

III $\iint$-integraler över cirkelformade områden i $\mathbb{R}^2$



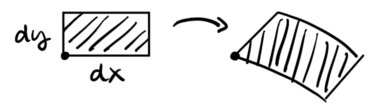


Problem: Svårt att finna gränserna för x och y

! populär strategi: polär substitution $\begin{cases} x = \underline{r}\cos\theta \\ y = \underline{r}\sin\theta \end{cases}$

Sats: $dA = dx\,dy = \underset{\uparrow\ \text{skalfaktor}}{r}\,dr\,d\theta$

SKALFAKTOR



! Allmän regel för multipelintegraler: De yttersta gränserna skall vara konstanter om du vill att att integralen skall bli ett tal, dvs de får inte bero av integrationsvariablerna

Integrationslagar

① Multiplikationslag "variabelseparation"

$$\int_c^d \int_a^b \underbrace{g(x)\,h(y)}_{f(x,y)}\,dx\,dy = \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\text{endast } x} \cdot \underbrace{\int_c^d h(y)\,dy}_{\text{endast } y}$$

, om alla fyra gränser är konstanter

② Additionslagen

SF1625

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

SF1626

$$\iint_\Omega \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dx\,dy =$$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy + \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$$

Populära genvägar

① $\int_a^b dx = \int_a^b 1\,dx = [x]_a^b = b-a =$ intervallängden

② $\iint_\Omega dxdy =$ arean av Ω (om Ω är ett område i xy-planet)

③ $\iiint_K dxdydz =$ volymen av K (om K är en kropp i $\mathbb{R}^3$)

Ⓘⓥ Trippelintegral över cylinderformade kroppar och dylikt.

$$\iiint 1\,\underbrace{dV}_{\text{volymelementet}} = \iiint 1\,dxdydz$$

Övergå till cylindriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$ polära koordinater

Sats: $dV = dxdydz = \overbrace{r}^{\text{skalfaktor}}\,dr\,d\theta\,dz$

Populära integraler

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Ⓥ **Trippelintegral över sfäriska kroppar (oftast klot och halvklot)**

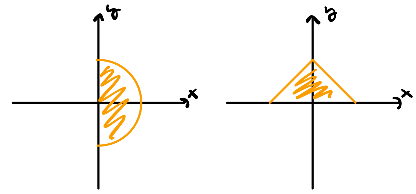
$$\iiint_K (x^2+y^2)\,dV$$, där K är klotet $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ (dvs av radie a)

! Populär strategi: Övergå till sfäriska koordinater (= rymdpolära)

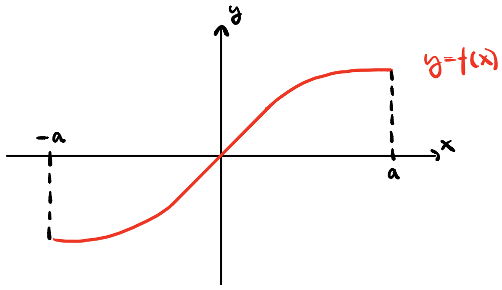
$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\cos\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Sats $\underbrace{R^2\sin\varphi}_{\text{skalfaktor}}\,dR\,d\varphi\,d\theta$

Kraftfullt verktyg över symmetriska områden $\iint$



Scenario 1 SF1625



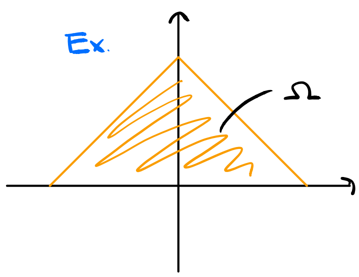
Sats : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

, ty ① intervallet $[-a, a]$ är symmetriskt

② f är en udda funktion, dvs $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in [-a, a]$

SF1626

Ex.



$$\iint f(x,y)\,dxdy = 0$$ om

① Ω är symmetrisk med avseende på x, dvs om punkten $(x,y) \in \Omega$, måste $(-x,y) \in \Omega$

② $f(x,y)$ är udda med avseende på x, dvs $f(-x,y) = -f(x,y)$

eller y.

Allmän substitution och skalfaktor

Vid bytet $\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega g(s,t)\,\underset{\uparrow}{K}\,dsdt$$

skalfaktor

erhålls areaelementet

$$dA = dxdy = K\,dsdt$$

där skalfaktorn ges av

Jacobimatris

$$K = |\det J| = \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \right|$$

observera att skalfaktorn inte kan vara negativ

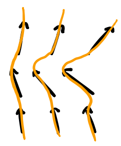
! Populär sats:

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\det \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Vektorfält och fältlinjer

Kort definition Ett vektorfält är en funktion F definerad i någon delmängd av $\mathbb{R}^3$ med funktionsvärden i $\mathbb{R}^3$.

Kort definition En fältlinje till ett vektorfält är en kurva som i varje punkt tangeras av vektorfältet.



vektorfält $\bar{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$

fältlinjer till $\bar{F}$

Alltså om fältlinjen parametriseras av $\bar{r}(t)$ måste det gälla för alla t att

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} \text{ är parallell med } \bar{F}(\bar{r}(t))$$

SATS Fältlinjerna till $\bar{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$ ges av differentialekvationen

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

Konservativa vektorfält och potentialfunktioner

Kort definition Om det finns en funktion f sådan att $\nabla f = F$ så sägs vektorfältet vara konservativt. Funktionen f kallas i såfall för potentialfunktion till F.

Sats Låt $\bar{F}(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))$

Ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för att $\bar{F}$ ska vara konservativt är $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, dvs jacobimatrisen är symmetrisk

$$J\bar{F}(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Sats $\bar{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$

$$J\bar{F}(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

En starkare variant

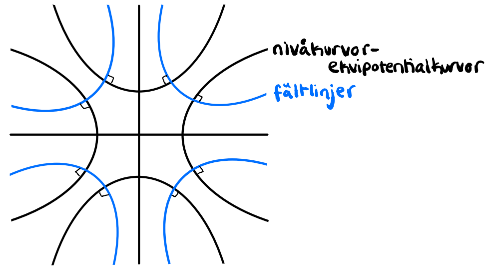
Låt $\bar{F}$ vara ett $\overbrace{\text{kontinuerligt deriverbart}}^{\text{dvs glatt}}$ fält definerat på ett öppet, $\underbrace{\text{enkelt sammanhängande}}_{\text{dvs saknar "hål"}}$ område Ω i $\mathbb{R}^2$.

Då gäller:

$\bar{F}$ är konservativt på/i $\Omega \iff \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ i alla punkter $(x,y)\in\Omega$

Ekvipotentialkurvor och ekvipotentialytor:

Nivåytor till potentialfunktionen kallas ekvipotentialytor till vektorfältet
För plana vektorfält är motsvarigheten ekvipotentialkurvor.



Kurvintegraler

Låt γ vara en begränsad slät kurva i $\mathbb{R}^3$ (eller $\mathbb{R}^2$) och f någon funktion som är definerad och kontinuerlig på γ. Då kan vi definera kurvintegralen

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds$$

som gränsvärdet av Riemannsummor $\sum f(x_j^*, y_j^*, z_j^*)|\Delta r_j|$

Kurvintegralen kan beräknas genom

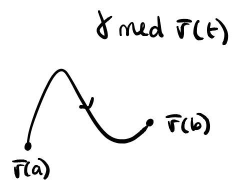
$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot |r'(t)|\,dt$$

där $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$, är en parameter av γ

Kurvintegraler av vektorfält

Def.

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt$$



Möjlig tolkning: arbete

Kurvintegraler och konservativa vektorfält

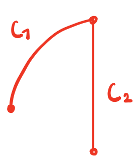
Om F är ett konservativt vektorfält med potentialfunktion f och γ är en orienterad slät kurva som startar i (x_0, y_0) och slutar i (x_1, y_1) så gäller att

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

Två räknelagar:

1. $$\int_{-C} \bar{F} \cdot d\bar{r} = -\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

2. $$\int_{C_1 \cup C_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} + \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$



Sats (i $\mathbb{R}^3$)

Om $F=(P,Q,R)$ är ett glatt vektorfält på en öppen sammanhängande mängd D, så är följande påståenden ekvivalenta:

1. F är konservativt i D
2. $\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ för alla styckvis släta och slutna kurvor γ i D
3. Alla kurvintegraler av $\bar{F}$ är oberoende av vägen D
4. Om D dessutom är enkelt sammanhängande är också detta villkor ekvivalent med de övriga

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{i } D.$$

Ytmått och ytintegraler

På en yta Y parametriserad genom

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad (u,v) \in D$$

är $n = r'_u \times r'_v$ en normalvektor och ytelementet dS ges av

$$dS = |r'_u \times r'_v| \, du dv$$

och Arean av $Y = \iint_Y dS = \iint_D |r'_u \times r'_v| \, du dv$

Ytintegralen av en funktion f över Y kan beräknas

$$\iint_Y f \, dS = \iint_D f(r(u,v)) \, |r'_u \times r'_v| \, du dv$$

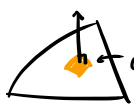
Flödesintegraler

Flödet av ett kontinuerligt vektorfält F genom en orienterad yta Y är integralen av den positiva normalkomponenten av vektorfältet över Y, dvs

$$\iint_Y \bar{F}\cdot d\bar{S}$$

anger mängden som strömmar genom Y per tidsenhet.

där $\hat{N}$ är enhetsnormal till ytan



$d\bar{S}$ det vektoriella ytelementet

Anm: $d\bar{S} = \hat{N}\, dS$, dvs $d\bar{S}$ är vinkelrätt mot varje punkt på Y, om $d\bar{S} \neq \bar{0}$
$= \hat{n}\, dS$

Hitta $d\bar{S}$ till flödesintegraler

Två populära metoder:

Metod #1 Y ges av $z = f(x,y)$ om Y är funktionsvärde $z = f(x,y)$

Då gäller: $d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) dxdy$ om flödet ner → negativ $d\bar{S}$, om flödet upp → positiv $d\bar{S}$

väljs enligt uppgiftslydelsen

Metod #2 för att få $d\bar{S}$. Låt Y parametriseras av $\bar{r}(s,t)$

Sats: Då fås $d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) dsdt$

Nabla, div, rot:

Om $g = g(x, y, z)$ är reellvärd så är

$$\text{grad}\, g = \nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z)$$

Om $F = F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ så är ett

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = (P'_x + Q'_y + R'_z)$$

$$\text{rot } F = \text{curl } F = \nabla \times f = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

Tolkning av begreppen:

- ∇f pekar i riktning för maxtillväxt av f
- $\text{div}\, F(a,b,c) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{S_\varepsilon} F \cdot N \, dS$ vilket anger hur snabbt vektorfältet sprider sig ut från punkten (a,b,c)
- $N \cdot \text{rot}\, F(a,b,c) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} F \cdot dr$ så rot mäter virveltendensen hos vektorfältet. Riktningen hos rot F anger rotationsaxeln och $|\text{rot } F|$ är ett mått på virvelns styrka.

Nablaräkning

- $\text{div}\, F = \nabla \cdot F$
- $\text{rot } F = \nabla \times F$
- $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ Laplace operatorn

Sats

- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ (div rot $F = 0$)
- $\nabla \times (\nabla f) = (0,0,0)$ (rot grad $f = (0,0,0)$)

Definition

Om div $F = 0$ i något område K så sägs F vara källfritt (solenoidal) i K.
Om rot $F = (0,0,c)$ i något område K så sägs F vara virvelfritt (irrotational) i K.

Varje konservativt fält är virvelfrit (rot grad $f = (0,0,0)$) och varje rotationsfält är källfritt (div rot $F = 0$)

Sats

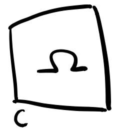
I enkelt sammanhängande områden gäller:

F är virvelfritt $\Longleftrightarrow$ F har potential

F är källfritt $\Longleftrightarrow$ F har vektorpotential

Green:s formel: (relaterar en kurvintegral till en dubbelintegral)

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$



sluten kurva C (som inte skär sig själv)

Fältet $\bar{F}(x,y)$ är kontinuerligt deriverbart i ett område som innehåller Ω

C: sluten och moturs orienterad

Ω: begränsat område i planet med styckvis slät rand C

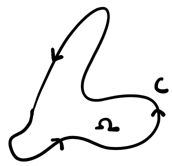
Anm: Om C är negativt orienterat, så:

medurs

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

Listig tillämpning:

Area innanför en sluten kurva



Faktum: Arean av Ω ges av:

$$\int -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy \quad (*)$$

alt:

$$\oint_C -y\,dx = \int -y\,dx + 0\,dy = \int (-y,0)\cdot \overbrace{(dx,dy)}^{=d\bar{r}}$$

alt

$$\oint_C x\,dy = \int 0\,dx + x\,dy = \int (0,x)\cdot(dx,dy)$$

Motivering för (*)

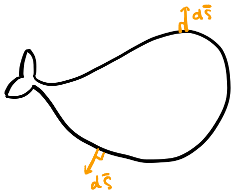
$$\frac{1}{2}\oint \underbrace{-y}_{P(x,y)}dx + \underbrace{x}_{Q(x,y)}dx = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_\Omega (1-(-1))\,dx\,dy = \iint_\Omega 1\,dx\,dy = \text{arean av } \Omega$$

$$\| $$

$$\frac{1}{2}\oint_C (-y,x)\cdot(dx,dy)$$

Gauß divergenssats

(relaterar en flödesintegral till en trippelintegral)



kompakt kropp K i $\mathbb{R}^3$ med en sluten randyta Y

$$\underbrace{\iint_Y}_{\text{sluten yta}} \bar{F}\cdot \underbrace{d\bar{S}}_{\text{riktar utåt ingt}} = \iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\, \underbrace{dV}_{=dxdydz}$$

Anm: Om $d\bar{S}$ riktar inåt gäller

$$\oiint_Y \bar{F}\cdot d\bar{S} = -\iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\,dV$$

Underlättande förkunskap

$\underbrace{\text{Centroid}}_{\text{geometriska centrum}}$ av en kropp K i $\mathbb{R}^3$

Låt K ha centroid (x_c, y_c, z_c)

Def.

$$x_c = \frac{\iiint_K x\,dV}{\iiint_K 1\,dV} \Big\}\ \text{volymen av } K = \text{vol}(K)$$

På samma sätt:

$$y_c = \frac{\iiint_K y\,dV}{\text{vol}(V)} \quad \& \quad z_c = \frac{\iiint_K z\,dV}{\text{vol}(V)}$$

Viktig konsekvens

$$\boxed{\iiint_K x\,dV = x_c \cdot \text{vol}(K)}$$

Bra erfarenhet:

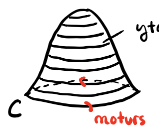
Om ytan Y är i eller parallell med xy planet: $dS = (0,0,1)\,dxdy$ upp

eller

$dS = (0,0,-1)\,dxdy$ ned

Stokes rotationssats:

(relaterar en kurvintegral till en flödesitegral)



$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\bar{F}\cdot dS$$

, där orienteringen av C och $d\bar{S}$ samspelar enligt högerhandsregeln

Masscentrum av en kropp K:

$$x_M = \frac{\iiint_K x\,\rho(x,y,z)\,dV}{\iiint_K \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{kroppens densitet}}\,dV} \Big\}\ \text{kroppens massa}$$

Anm: Om ρ är konstant så

$$x_M = \frac{\iiint_K x\rho\,dV}{\iiint_K \rho\,dV} = \frac{\rho\iiint_K x\,dV}{\rho\iiint_K dV} = \frac{\iiint_K x\,dV}{\iiint_K dV} = x_c$$

Alltså

Om kroppens densitet är konstant gäller: (bland annat)

$$x_c = x_M = \frac{\iiint_K x\,dV}{\text{Volymen av } K}$$

Analogt fås centroiden och masscentret av ett område i planet:

$$x_c = x_M = \frac{\iint_\Omega x\,dA}{\text{arean av } \Omega}$$

Klassiska integraler

0

$$\int xe^{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u=x^2 \\ du=2xdx \\ dx=\frac{1}{2x}du \end{matrix}\right\} = \int xe^{u}\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{1}{2}e^{u}+C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

1 formeln för dubbla vinkeln: $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$

$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x)+C$$

2 f. för dubbla vinkeln & trig ettan: $\cos(2x) = \cos^2 x-\sin^2 x = (1-\sin^2 x)-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

3 $\sin^3 x = \sin x\sin^2 x = \sin x(1-\cos^2 x)$ $\cos^3 x = \cos(1-\sin^2 x)$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\sin^2 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\cos x \\ du=-\sin x\,dx \\ dx=\frac{1}{-\sin x}du \end{matrix}\right\} = \int -(1-u^2)\,dx =$$

$$= -u+\frac{1}{3}u^3+C = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos(1-\sin^2 x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \\ dx=\frac{1}{\cos x}du \end{matrix}\right\} = \int 1-u^2\,du = u-\frac{1}{3}u^3+C = \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

4. $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \int(\sin x\cos x)^2\,dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\sin^2(2x)\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)\right)dx = \int\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx = \frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin(4x)+C$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x\,dx = \int \sin^2 x\,(1-\cos^2 x)\,dx = \int (\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x)\,dx =$$

$$= \int \sin^2 x\,dx - \int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) - \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos^2 x\,dx = \int \cos^2 x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x)\,dx =$$

$$= \int \cos^2 x\,dx - \int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right) - \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$