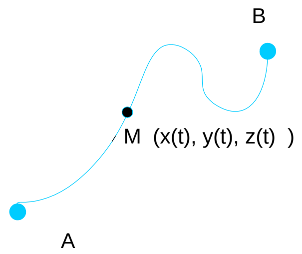
BERÄKNING AV KURVINTEGRALER (LINJEINTEGRALER)

Låt $\vec{F}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$ vara ett kontinuerligt vektorfält (d v s en vektorfunktion) definierat i en öppen mängd Ω.

Låt γ vara en orienterad C^1 kurva given på parameter form
$x=x(t), y=y(t)\,, z=z(t)$ eller $\vec{r}(t)=(x(t)\,,\ y(t)\,,\ z(t)$ där $t_A \le t \le t_B$



Kurvintegralen $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ längs kurvan γ från punkten A (som svarar mot t=t_A) till punkten B (som svarar mot t=t_B) beräknas enligt följande

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t)\cdot \vec{r}\,'(t)\ dt$$

$$= \int_a^b [P(x(t),y(t)\,z(t)\,)\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t)\,z(t)\,)\cdot y'(t)+R(x(t),y(t)\,z(t)\,)\cdot z'(t)\,]dt$$

Beteckningar:

$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ betecknas ofta som $\int_\gamma (Pdx+Qdy+Rdz)$.

Om kurvan är en sluten kurva då betecknas ibland kurvintegralen

$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ som $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

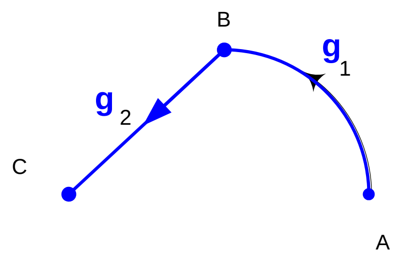
Egenskaper:

1. $\displaystyle\int_{t_B}^{t_A} \vec{F}(t)\cdot \vec{r}\,'(t)\ dt = -\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t)\cdot \vec{r}\,'(t)\ dt$

2. Om $\vec{F}=(P,Q,R)$ är ett kraftfält då är $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ fältets arbete längs kurvan γ:

$$\text{Arbetet längs kurvan } \gamma = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

3. Om kurvan γ består av två (orienterade) delar γ_1 och γ_2 (se bilden) då gäller:



$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Uppgift 1. Låt $\vec{F} = (2y, 2x, z+y)$. Beräkna kurvintegralen (linjeintegralen) $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs sträckan AB,
då A=(1,1,1) och B=(2,2,3)

Lösning:

Sträckans ekvation:

$x = 1+t$

$y = 1+t \qquad 0 \le t \le 1$

$z = 1+2t$

Alltså $\vec{r}(t) = (1+t, 1+t, 1+2t)$ och därför

$\vec{r}\,'(t) = (1,1,2)$.

$\vec{F} = (2y, 2x, z+y) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(t) = (2+2t,\ 2+2t, 2+3t)$

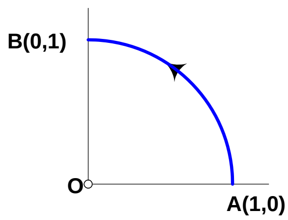
Härav: $\vec{F}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 8+10t$ och

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (8+10t)dt = \left[8t+5t^2\right]_0^1 = 13$$

Svar $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 13$

Uppgift 2. Låt $\vec{F} = (-2y, 2x)$ Beräkna kurvintegralen längs den kvartcirkelbåge av $x^2 + y^2 = 1$ i första kvadranten som börjar i A(1,0) och slutar i B(0,1) (d v s moturs eller i **positiv riktning**).

Lösning.



$x = \cos t, \quad y = \sin t \ , \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$\vec{F}(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$ och

$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$

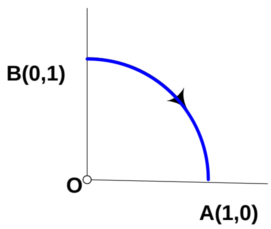
Därför $\vec{F}(t) \circ \vec{r}\,'(t) = 2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \vec{F}(t) \circ \vec{r}\,'(t)dt = \int_0^{\pi/2} 2dt = \pi$$

Svar π

Uppgift 3. Låt $\vec{F} = (2x+y, x)$ Beräkna kurvintegralen längs den kvartcirkelbåge av $x^2 + y^2 = 1$ som börjar i B(0,1) och slutar i A(1,0)
(d v s medurs eller i **negativ riktning**) .

Lösning:



Vi parametriserar cirkelns ekvation:

$x = \cos t \quad dx = -\sin t dt$

$y = \sin t \quad dy = \cos t dt$

Lägg märke till att startpunkt A (0,1) svarar mot $t = \pi/2$ och ändpunkt B(1,0) mot $t = 0$.

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma (2x + y)dx + xdy = = \int_{\pi/2}^{0} (2\cos t + \sin t)(-\sin t)dt + \cos t \cos t dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} (-2\cos t \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t)dt = \int_{\pi/2}^{0} (-\sin 2t + \cos 2t)dt$$

$$= \left[\frac{\cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\pi/2}^{0} = 1$$

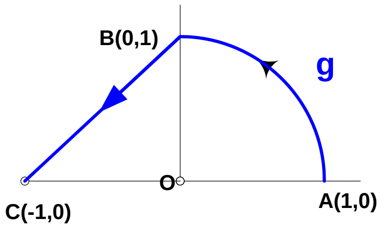
Svar: $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$

Uppgift 4. Låt $\vec{F} = (-3y, 3x)$ Beräkna kurvintegralen längs kurvan γ som består av två delar:

Del 1 Den kvartcirkelbåge av $x^2 + y^2 = 1$ i första kvadranten som börjar i A(1,0) och slutar i B(0,1)

Del 2. Sträkan BC från punkten B (0,1) till C (-1,0)

Lösning:



$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{t_B}^{t_C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Del 1:

$x = \cos t, \quad y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ där $t_A = 0$ och $t_B = \frac{\pi}{2}$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$\vec{F}(t) = (-3\sin t, 3\cos t)$ och

$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

Därför $\vec{F}(t) \circ \vec{r}'(t) = 3\sin^2 t + 3\cos^2 t = 3$

$$\int_0^{\pi/2} \vec{F}(t) \circ \vec{r}'(t)dt = \int_0^{\pi/2} 3dt = \frac{3\pi}{2}$$

Del 2:

Först parametriserar vi sträckan BC :

Vi kan använda ekvationen för den linje som går genom B och C,
$y = x + 1$.
Vi tar $x = t$ och därför $y = t + 1$
Altså
$\vec{r}(t) = (t, t+1)$
$\vec{r}'(t) = (1, 1)$
$\vec{F}(t) = (-3(t+1),\ 3t)$
Därför $\vec{F}(t) \circ \vec{r}'(t) = -3t - 3 + 3t = -3$
Den här gången $t = 0$ svarar mot B och $t = -1$ mot C, d v s vi har
$t_B = 0$ och $t_C = -1$

$$\int_{t_B}^{t_C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{-1} \vec{F}(t) \circ \vec{r}'(t) dt = \int_0^{-1} -3dt = 3$$

Slutligen

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{t_B}^{t_C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2} + 3$$

Svar: $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2} + 3$

Uppgift 5. Låt $\vec{F} = (\frac{-4y}{x^2+y^2}, \frac{4x}{x^2+y^2})$. Beräkna kurvintegralen ett varv längs cirkeln $x^2 + y^2 = 25$
a) i positiv riktning (moturs) b) i negativ riktning (medurs)

Lösning:

Cirkelns ekvation på parameter form:

$$x = 5\cos t, \quad y = 5\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

eller

$$\vec{r}(t) = (5\cos, 5\sin t)$$

Därför

$$\vec{r}\,'(t) = (-5\sin t, 5\cos t)$$

$$\vec{F}(t) = (\frac{-20\sin t}{25}, \frac{20\cos t}{25}) = (\frac{-4\sin t}{5}, \frac{4\cos t}{5})$$

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4$$

a) Kurvintegral längs positivt orienterade cirkeln

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) dt = \int_0^{2\pi} 4dt = 8\pi$$

b) Kurvintegral längs negativt orienterade cirkeln

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{2\pi}^{0} \vec{F}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) dt = \int_{2\pi}^{0} 4dt = -8\pi$$