Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 14, 15 Feb 2017

Rekap

- Ett vektorfält är en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ för $n \geq 2$
- $\bar{F}$ Konservativt vektorfält om det existerar en potentialfunktion f sådan att $\nabla f = \bar{f}$
- Test på konservativitet var att prova om $\partial_y P = \partial_x Q$, detta följer av att konservativ $\Rightarrow \bar{F} = \nabla f = (\partial_x f, \partial_y f)$ om detta stämmer så får vi $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$ (blandade derivator är lika) men eftersom $\nabla f = (P, Q) \Rightarrow \partial_y P = \partial_x Q$ Svårigheten: givet ett konservativt vektorfält $\bar{F} = (P, Q)$, bestäm potentialfunktionen $f : \nabla f = \bar{F}$. Hur gör vi? vi har $\begin{cases} 1)\partial_x f = P \\ 2)\partial_y f = Q \end{cases} \to$ integration av (1) $f = \int P + C(y)$ ($C(y)$ är konstant m.a.p x). Använd uttrycket i (2): $\partial_y f = \partial_y (\int P) + \frac{d}{dy} C(y) = Q$, ni får $C(y)$

15.3 (jämför 11.3 båglängd)

Vi definierar en linjeintegral (alt. kurvintegral) av en funktion f över en kurva C genom följande:

$$\int_C f(x, y, z) ds \stackrel{def}{=} \int_a^b f(\bar{r}(t)) \left| \bar{r}' \right| dt \text{ med } \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Ex:

$f = x^2 + y^2$, kurvan C är en rak linje från origo till punkten $(2, 1)$. Vad är $\int_C f\, ds$?

Linjen ges av $x = 2y$, vi får $\begin{cases} y = t \\ x = 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$
så $\bar{r}(t) = (2t, t)$ och $\bar{r}'(t) = (2, 1) \Rightarrow |\bar{r}'| = \sqrt{5}$
Vi får $\int_C f\, ds \stackrel{def}{=} \int_0^1 (2t)^2 + t^2) \sqrt{5}\, dt$
Se fler exempel på sidor 876-878.

15.4 Kurvintegral och vektorfält [arbete]

Vi vet att arbete = kraft · väg (enkel tolkning då kraften är konstant och verkar i en enda riktning, vägen 1-dimensionell)

Att beräkna arbete med varierande kraft och riktning blir lite komplicerat.
Vi använder en approximation (jämför 11.3 båglängd).
(bild)
Så arbete $= \Delta w = \bar{F}(\bar{r}) \bullet \Delta \bar{r} \approx \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \underbrace{\bar{r}' \Delta t}_{\Delta r}$
Vi gör addition $\sum \Delta w = \sum \Delta \bar{F} \bullet \bar{r}' \Delta t \to \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'\, dt$
Vi inför beteckning $\displaystyle\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} \stackrel{def}{=} \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t)\, dt$

En annan standardbeteckning: $\displaystyle\int_C Pdx + Qdy$ om $\bar{F} = (P, Q)$ vilket kommer från $\bar{F} \bullet d\bar{r} = (P, Q) \bullet (dx, dy) = Pdx + Qdy$

Motsvarande i $\mathbb{R}^3$ läses på sida 880.

Fråga

Kan ett utfört arbete vara oberoende av vägen? När händer detta?

Exempel 1 sida 880

Exempel 2 sida 881

Sats (883)

Om $\bar{F}$ konservativt och C_1, C_2 två kurvor i ett enkelsammanhängande område D med samma start och slutpunkt (C_1, C_2 startar och slutar i samma punkter) så gäller att $\int_{C_1} \bar{F} \bullet d\bar{r} = \int_{C_2} \bar{F} \bullet d\bar{r}$

Definition: enkelsammanhängande område

Sammanhängande: samtliga par av punkter som tillhör området kan parvis sammanbindas med en kurva.

Enkel: betyder ”typ inga hål i området”, mer formellt om varje **sluten** kurva kan dras ihop till en punkt.

Satsen följer av att om kurvan γ sluten i enkelsammanhängande område D så gäller $\int_\gamma \bar{F} \bullet d\bar{r} = 0$

Bevis: $\bar{F}$ konservativt så $\int_\gamma \bar{F} \bullet d\bar{r} = \int_a^b \nabla f \bullet \bar{r}'(t)dt$ med $\nabla f \bullet \bar{r}'(t) = \frac{d}{dt} f(\bar{r}(t))$

Så $= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\bar{r}(t))dt = f(\bar{r}(b)) - f(\bar{r}(a)) = 0$

Exempel

Låt $\bar{F} = (P, Q) = (y \sin(xy), x \sin(xy))$. Beräkna $\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$

Lösning: $\bar{F}$ konservativt ty $P_y = Q_x$ så $\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$ är oberoende av väg för kurvan C.

Exempel

Är vektorfälten nedan konservativa?

$$\bar{F} = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$$

$$\bar{G} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2})$$

Lösning: vi ser att $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$ och $\partial_y G_1 = \partial_x G_2$

Exempel

Bestäm potentialfunktionerna till $\bar{F}$ och $\bar{G}$ ovan.

Lösning: $\partial_x f = \frac{-y}{y^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-y}{y^2} \cdot \frac{1}{1+u^2}$ med $u = \frac{x}{y}$ så $f = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C(y)$ (obs $-y/y^2 = -1/y$)