EXTREMVÄRDESPROBLEM MED BIVILLKOR.

LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD

Problem.

Bestäm lokala (eller globala) extremvärden till

$f(x_1,...,x_n)$

under bivillkoret $g(x_1,...,x_n)=0$

METOD 1. Substitutionsmetod.

Vi löser ut en variabel ur $g(x_1,...,x_n)=0$ t ex x_n och substituerar i $f(x_1,...,x_n)$ och får

ett extremvärdes problem med n-1 variabler.

METOD 2. Parametrisering .

Vi beskriver villkoret $g(x_1,...,x_n)=0$ på parameterform med n-1 parametrar

substituerar $x_1 = x_1(t_1,...,t_{n-1})$, ..., $x_n = x_n(t_1,...,t_{n-1})$ i $f(x_1,...,x_n)$

och får ett extremvärdesproblem med n-1 variabler.

Här ska vi göra några uppgifter med tredje metoden:

METOD 3. LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD

Två ovanstående metoder leder ibland till stora beräkningar, då kan vi försöka lösa problemet med hjälp av Lagranges metod.

För att bestämma lokala (eller globala) extremvärden till

$f(x_1,...,x_n)$ under bivillkoret $g(x_1,...,x_n)=0$

bildar vi en ny funktion (Lagranges funktion)

$$F(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n) + \lambda g(x_1,...,x_n)$$

och bestämmer extrempunkter till funktionen F under villkoret g=0.

Parameter λ kallas **Lagranges multiplikator**. Vi använder λ endast som en hjälp-parameter, för att på enklare sätt finna $x_1,...,x_n$ i extrempunkter.

För att finna extrempunkter till F under villkoret g=0 löser vi systemet

$$\begin{cases} F'_{x1} = 0 \\ \vdots \\ F'_{xn} = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Anmärkning. Sällan förekommer i vår kurs, men extrempunkter kan också finnas bland lösningar (om de finns)

till följande system (s k *degenererad fall)* :

$$\begin{cases} grad(g) = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$ som är ekvivalent med $$\begin{matrix} g'_{x1} = 0 \\ \vdots \\ g'_{xn} = 0 \\ g = 0 \end{matrix}$$

Uppgift 1.

Använd Lagranges metod för att bestämma största och minsta värde för funktionen

$f(x, y) = x + 2y$

under villkoret $x^2 + 4y^2 = 4$

Lösning:

Vi betecknar $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$ och bildar Lagranges funktion $F = f(x, y) + \lambda g(x, y)$,

dvs

$F = x + 2y + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$.

Därefter löser vi systemet

$$\begin{matrix} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ g = 0 \end{matrix}$$

I vårt fall har vi

$$\begin{matrix} F'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 2 + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{matrix}$$

Från första ekvationen har vi $\lambda = \frac{-1}{2x}$ som vi substituerar i andra ekv. och får

$$2+8\cdot\left(\frac{-1}{2x}\right)y=0 \Rightarrow x=2y$$

Vi substituerar $x=2y$ i tredje ekv. och får

$$4y^2+4y^2-4=0 \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Eftersom $x=2y$ har vi två punkter

$P(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ med och $f(P)=2\sqrt{2}$

och $Q(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ med $f(Q)=-2\sqrt{2}$.

Därför är $f_{\max}=f(P)=2\sqrt{2}$ och $f_{\min}=f(Q)=-2\sqrt{2}$

=====================================

(Anmärkning: Sällan behövs i vår kurs, men om man vill vara noggrann kan man kolla även om degenererade fallet har lösningar :

$$\begin{cases} grad(g)=0 \\ g=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} g'_x=0 \\ g'_y=0 \\ g=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x=0 \\ 8y=0 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{matrix}$$

ingen lösning för x=0 , y=0 satisfierar inte tredje ekvationen.)

==

Uppgift 2.

Använd Lagranges metod för att bestämma största och minsta värde för funktionen

$f(x,y)=3x+y$

under villkoret $4x^2+3xy+y^2=4$

Lösning:

Vi betecknar $g(x,y)=4x^2+3xy+y^2-4$ och bildar Lagranges funktion
$F=f(x,y)+\lambda g(x,y)$,

dvs

$F=3x+y+\lambda(4x^2+3xy+y^2-4)$.

Därefter löser vi systemet

$$F'_x = 0$$
$$F'_y = 0$$
$$g = 0$$

I vårt fall har vi

$$F'_x = 3 + \lambda(8x + 3y) = 0$$
$$F'_y = 1 + \lambda(3x + 2y) = 0$$
$$4x^2 + 3xy + y^2 - 4$$

Från första ekvationen har vi $\lambda = \dfrac{-3}{8x+3y}$ som vi substituerar i andra ekv. och får

$$1 + \left(\frac{-3}{8x+3y}\right)(3x+2y) = 0 \Rightarrow \frac{9x+6y}{8x+3y} = 1 \Rightarrow 9x + 6y = 8x + 3y \Rightarrow x = -3y$$

Vi substituerar $x = -3y$ i tredje ekv. och får

$$y = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}$$

Eftersom $x = -3y$ har vi två punkter

$P(\frac{3\sqrt{7}}{7}, \frac{-\sqrt{7}}{7})$ med och $f(P) = \dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

och $Q(\frac{-3\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7})$ med och $f(Q) = \dfrac{-8\sqrt{7}}{7}$

Därför är $f_{\max} = f(P) = \dfrac{8\sqrt{7}}{7}$ och $f_{\min} = f(Q) = -\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

===

Uppgift 3.

Använd Lagranges metod för att bestämma största och minsta värde för funktionen

$$f(x,y) = 6 - 4x - 3y$$

då (x,y) ligger på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Svar: $f_{\max} = 11$ i punkten (4/5, 3/5) , $f_{\min} = 1$ i punkten (–4/5, –3/5)

==

Uppgift 4. (Funktioner av tre variabler)

Bestäm största och minsta värde till $f(x,y,z)=x+y^2+z$

under villkoret $x^2+y^2+3z^2=4$

Hur vet vi att funktionen antar största och minsta värden på ellipsoiden $x^2+y^2+3z^2=4$?

Lösning:

Eftersom (x,y,z) satisfierar $x^2+y^2+3z^2=4$ kan vi uppfatta villkoret som funktionens definitionsmängd. Ellipsoiden $x^2+y^2+3z^2=4$ är en kompakt (=begränsad och sluten) mängd, och funktionen f är kontinuerlig. Därför antar f sitt största/ minsta värde på def. mängden.

Vi använder **Lagranges metod** för att bestämma funktionens största / minsta värde:

Vi betecknar $g(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2-4$ och bildar **Lagranges funktion**
$F=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$,

dvs

$$F=x+y^2+z+\lambda(x^2+y^2+3z^2-4).$$

Därefter löser vi systemet

$$F'_x=0$$
$$F'_y=0$$
$$F'_z=0$$
$$g=0$$

I vårt fall har vi

$$F'_x=1+2\lambda x=0$$
$$F'_y=2y+2\lambda y=0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ eller } 1+\lambda=0$$
$$F'_z=1+6\lambda z=0$$
$$x^2+y^2+3z^2-4=0$$

Vi har ovan faktoriserad ekv2 och fått två enkla ekvationer som vi kombinerar med andra ekvationer i systemet. På detta sätt får vi **två enkla** system:

system 1

$$\begin{cases} 1+2\lambda x = 0 \\ y = 0 \\ 1+6\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+3z^2-4=0 \end{cases}$$

och

system 2

$$\begin{cases} 1+2\lambda x = 0 \\ 1+\lambda = 0 \\ 1+6\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+3z^2-4=0 \end{cases}$$

A) system 1.

Från system 1 har vi direkt y=0. Från ekv1 har vi $\lambda = -1/2x$ som vi subst. i ekv 3 och får x=3z.

Vi subs x=3z i ekv 4 och får $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Därmed har vi två lösningar till system1:

$P(\sqrt{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3})$, $Q(-\sqrt{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3})$,

B) På samma sätt får vi två lösningar till från system 2:

Från ekv2 har vi $\lambda = -1$ som vi subst. i ekv 1 och ekv 3 och får x=1/2 och z=1/6.

Vi substituerar x=1/2 och z=1/6 i ekv 4 och får $y = \pm\frac{\sqrt{33}}{3}$.

Därmed

$R(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{33}}{3},\frac{1}{6})$, $S(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{33}}{3},\frac{1}{6})$,

När vi beräknar funktionens värden i punkterna P,Q,R och S ser vi att

$$f_{\max} = \frac{11}{3} \quad \text{och} \quad f_{\min} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$