SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 11

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

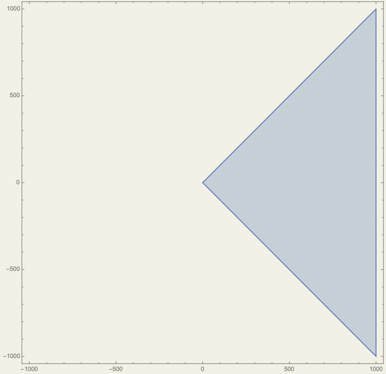
Dagens Lektion: Avsnitt 14.3-14.4.

- Något om generaliserade integraler och medelvärden
- Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Generaliserade dubbelintegraler

integration över obegränsat område (se även ex. 4, sid. 821)

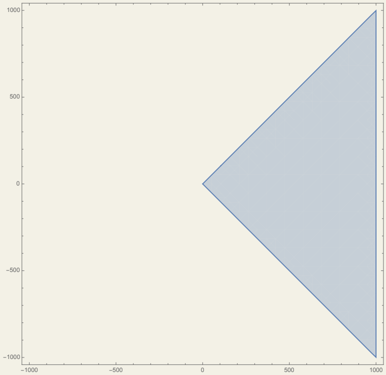
$$\iint_D e^{-x^2}\,dA, \quad \text{där } D = \{(x,y) : -x \le y \le x,\ x \ge 0\}$$



Generaliserade dubbelintegraler

integration över obegränsat område (se även ex. 4, sid. 821)

$$\iint_D e^{-x^2}\,dA, \quad \text{där } D = \{(x,y) : -x \leq y \leq x,\ x \geq 0\}$$

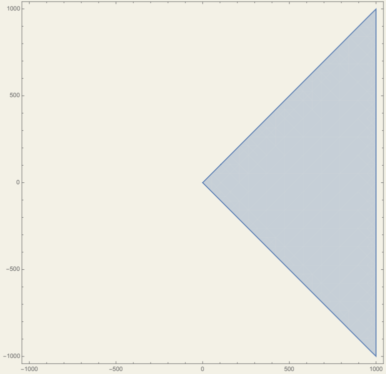


Låt $D_R = D \cap \{0 < x < R\}$ och beräkna

Generaliserade dubbelintegraler

integration över obegränsat område (se även ex. 4, sid. 821)

$$\iint_D e^{-x^2}\,dA, \quad \text{där } D = \{(x,y) : -x \le y \le x,\ x \ge 0\}$$



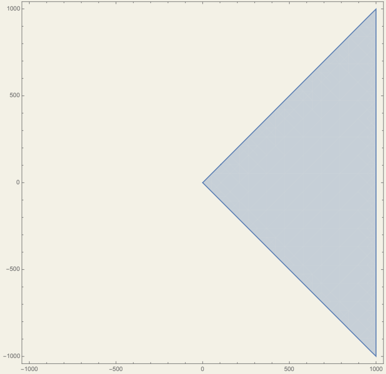
Låt $D_R = D \cap \{0 < x < R\}$ och beräkna

$$\iint_{D_R} e^{-x^2}\,dA = \int_0^R \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy\,dx$$

Generaliserade dubbelintegraler

integration över obegränsat område (se även ex. 4, sid. 821)

$$\iint_D e^{-x^2}\, dA, \quad \text{där } D = \{(x,y) : -x \le y \le x,\ x \ge 0\}$$



Låt $D_R = D \cap \{0 < x < R\}$ och beräkna

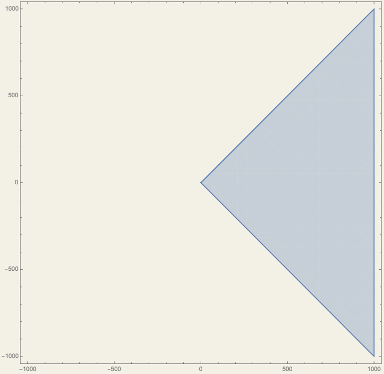
$$\iint_{D_R} e^{-x^2}\, dA = \int_0^R \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dy dx$$

$$= 2\int_0^R x e^{-x^2}\, dx = -Re^{-R^2} + 1$$

Generaliserade dubbelintegraler

integration över obegränsat område (se även ex. 4, sid. 821)

$$\iint_D e^{-x^2}\, dA, \quad \text{där } D = \{(x,y) : -x \le y \le x,\ x \ge 0\}$$



Låt $D_R = D \cap \{0 < x < R\}$ och beräkna

$$\iint_{D_R} e^{-x^2}\, dA = \int_0^R \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dydx$$

$$= 2\int_0^R xe^{-x^2}\, dx = -Re^{-R^2} + 1$$

$$\to 1, \quad \text{då } R \to \infty.$$

Generaliserade dubbelintegraler

Integration av en obegränsad funktion

Beräkna integralens värde

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}\, dA,$$

Generaliserade dubbelintegraler

Integration av en obegränsad funktion

Beräkna integralens värde

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}\, dA,$$

där

$$D = \{(x,y) : 0 < y,\ 0 < x,\ x^2+y^2 < 1\}.$$

Generaliserade dubbelintegraler

Integration av en obegränsad funktion

Beräkna integralens värde

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}\,dA,$$

där

$$D = \{(x,y) : 0 < y,\ 0 < x,\ x^2+y^2 < 1\}.$$

Låt $D_s = D \cap \{r > s\}$ och använd polära koordinater, över D_s

Generaliserade dubbelintegraler

Integration av en obegränsad funktion

Beräkna integralens värde

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}\, dA,$$

där

$$D = \{(x,y) : 0 < y,\ 0 < x,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

Låt $D_s = D \cap \{r > s\}$ och använd polära koordinater, över D_s

$$\int_{D_s} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_s^1 \frac{r\, dr d\theta}{r^{3/2}} = (\pi/2) \int_s^1 \frac{dr}{r^{1/2}}$$

Generaliserade dubbelintegraler

Integration av en obegränsad funktion

Beräkna integralens värde

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}\,dA,$$

där

$$D = \{(x,y) : 0 < y,\ 0 < x,\ x^2+y^2 < 1\}.$$

Låt $D_s = D \cap \{r > s\}$ och använd polära koordinater, över D_s

$$\int_{D_s} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_s^1 \frac{r\,dr d\theta}{r^{3/2}} = (\pi/2) \int_s^1 \frac{dr}{r^{1/2}}$$

$$= \pi(1 - s^{1/2}) \quad \to \quad \pi \qquad \text{då } s \to 0.$$

Medelvärde

Medelvärdessatsen för dubbelintegraler

Om f är kontinuerlig på en sluten, begränsad, sammanhängande mängd D i xy-planet, så finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ så att

Medelvärde

Medelvärdessatsen för dubbelintegraler

Om f är kontinuerlig på en sluten, begränsad, sammanhängande mängd D i xy-planet, så finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0) \cdot (\text{arean av } D)$$

Medelvärde

Medelvärdessatsen för dubbelintegraler

Om f är kontinuerlig på en sluten, begränsad, sammanhängande mängd D i xy-planet, så finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0) \cdot (\text{arean av } D)$$

Medelvärdet av f över D ges av

$$\bar{f} = \frac{1}{(\text{arean av } D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Medelvärde

Medelvärdessatsen för dubbelintegraler

Om f är kontinuerlig på en sluten, begränsad, sammanhängande mängd D i xy-planet, så finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0) \cdot (\text{arean av } D)$$

Medelvärdet av f över D ges av

$$\bar{f} = \frac{1}{(\text{arean av } D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Quiz (här): Beräkna medelvärdet av $f(x,y) = x^2 + y^2$ över enhetsskivan.

Medelvärde

Medelvärdessatsen för dubbelintegraler

Om f är kontinuerlig på en sluten, begränsad, sammanhängande mängd D i xy-planet, så finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0) \cdot (\text{arean av } D)$$

Medelvärdet av f över D ges av

$$\bar{f} = \frac{1}{(\text{arean av } D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Quiz (här): Beräkna medelvärdet av $f(x,y) = x^2 + y^2$ över enhetsskivan. (svar: $1/2$)

Integraler

Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Om $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ är en C^1 bijektiv avbildning av E i uv-planet på D i xy-planet.

Integraler

Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Om $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ är en C^1 bijektiv avbildning av E i uv-planet på D i xy-planet.

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

Integraler

Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Om $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ är en C^1 bijektiv avbildning av E i uv-planet på D i xy-planet.

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

där

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \text{ Jacobianen}$$

Observera absolut beloppet.

Integraler

Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Om $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ är en C^1 bijektiv avbildning av E i uv-planet på D i xy-planet.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

där

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \text{ Jacobianen}$$

Observera absolut beloppet.

Se: http://demonstrations.wolfram.com/2DJacobian/

Integraler

Jacobianen

Viktig att komma ihåg

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Integraler

Jacobianen

Viktig att komma ihåg

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Exempel 1: Bestäm Jacobianen $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ då

$$(u,v) = (xy, x-y).$$

Jacobianen

Viktig att komma ihåg

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Exempel 1: Bestäm Jacobianen $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ då

$$(u,v) = (xy, x - y).$$

Lösning:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right| = \left|-(y+x)^{-1}\right| = \frac{1}{|x+y|}.$$

Quiz (här): Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2)dxdy,$$

Quiz (här): Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2)dxdy,$$

då

$$1 < xy < 2, \qquad 1 < x - y < 2.$$

Quiz (här): Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2)dxdy,$$

då

$$1 < xy < 2, \qquad 1 < x - y < 2.$$

Använd Exempel 1. Sätt $u = xy$ och $v = x - y$:

Quiz (här): Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2)dxdy,$$

då

$$1 < xy < 2, \qquad 1 < x - y < 2.$$

Använd Exempel 1. Sätt $u = xy$ och $v = x - y$:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = -(y+x)^{-1}$$

Integraler

Fortsättning

Vi vet från Exempel 1 att

$$dxdy = \frac{1}{x+y}dudv$$

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2)dxdy =$$

Integraler

Fortsättning

Vi vet från Exempel 1 att

$$dxdy = \frac{1}{x+y} dudv$$

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2) dxdy = \int\int_D xy(x-y)(x+y) dxdy =$$

Integraler

Fortsättning

Vi vet från Exempel 1 att

$$dxdy = \frac{1}{x+y} dudv$$

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2) dxdy = \int\int_D xy(x-y)(x+y) dxdy =$$

$$= \int_1^2 \int_1^2 uv(x+y) \frac{1}{x+y} dudv =$$

Integraler

Fortsättning

Vi vet från Exempel 1 att

$$dxdy = \frac{1}{x+y} dudv$$

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2)dxdy = \int\int_D xy(x-y)(x+y)dxdy =$$

$$= \int_1^2 \int_1^2 uv(x+y)\frac{1}{x+y}dudv = \int_1^2 \int_1^2 uv\, dudv = 9/4.$$

Variabelsubstitution polära koordinater

Exempel 2: Låt $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Inför polära koordinater för att beräkna

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Variabelsubstitution polära koordinater

Exempel 2: Låt $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Inför polära koordinater för att beräkna

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Enligt tidigare beräkning (F5, sidan 14)

$$J = \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \qquad |J| = r$$

Variabelsubstitution polära koordinater

Exempel 2: Låt $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Inför polära koordinater för att beräkna

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Enligt tidigare beräkning (F5, sidan 14)

$$J = \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \qquad |J| = r$$

Därför övergår integralen i

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\, drd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Minitenta 1

1) Visa med hjälp av polära koordinater

$$\iint_D x \, dxdy = 8/3,$$

om D ges av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 + y^2 \leq 4$

2) Visa med hjälp av lämplig substitution att

$$\iint_D (2y - x) \, dxdy = 5/6$$

om D ges av olikheterna $0 \leq x + y \leq 1$ och $2 \leq 2y - x \leq 3$.

3) Beräkna med hjälp av lämplig substitution att

$$\iint_D (x + y) \, dxdy = 1$$

om D är det område i första kvadranten som ges av olikheterna $1 \leq xy \leq 2$ och $3 \leq y - x \leq 4$.

Minitenta 2: tentaproblem (2015-03-16)

1) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{y^2}\, dxdy$$

då området D i xy-planet ges av olikheterna $0 \leq x \leq 2y \leq 3$.

2) Beräkna med hjälp av dubbelintegraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Jfr med övning 37, Avsnitt 14.4, Error function.

Minitenta 3: Tillämpningar av integraler

1) Beräkna volymen av den begränsade kropp som helt innesluts av ytorna $z = 1 - x^2 - y^2$ och $z = x^2 + y^2 - 1$. *Svar* π

2) Triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(2, 0)$ förses med en ytbeläggning vars densitet i punkten (x, y) ges av $\rho(x, y) = 1 + x$ kg per kvadratmeter (enheten på axlarna är meter). Beräkna massan av beläggningen. *Svar* 2 *kg*

3) Bestäm mass centrum för den homogena skivan D som ges av $D = \{x^2 \leq y \leq x\}$. Svar: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$