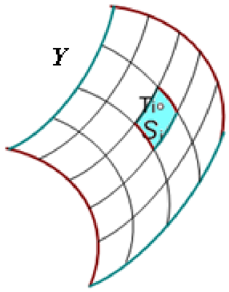
YTINTEGRALER $\iint_Y f(x,y,z)dS$



Definition. Vi betraktar en funktion (x,y,z) som är definierad på ytan Y. Vi delar ytan i ej- överlappande delar S_i, väljer en punkt T_i i varje S_i och beräknar summan
$\sum_{i=0}^{n} f(T_i)\cdot arean(S_i)$.
Om gränsvärdet $\lim_{diam(S_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(T_i)\cdot arean(S_i)$
existerar (oberoende av hur indelningen och punkterna T_i väljs)
betecknas det med $\iint_Y f(x,y,z)dS$ och kallas ytintegral.
Alltså

$$\iint_Y f(x,y,z)dS \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{diam(S_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(T_i)\cdot arean(S_i)$$

Alternativ definition med ε och δ.
Vi säger att ytintegraler $\iint_Y f(x,y,z)dS$ existerar och har värdet A om det f till varje givet tal ε >0 finns ett tal δ > 0 sådant att
$diam(S_i) < \delta \;\Rightarrow\; |\sum_{i=0}^{n} f(T_i)\cdot arean(S_i) - A| < \varepsilon.$

AREAN AV EN BUKTIG YTA

Om $f(x,y,z) = 1$ på ytan S då har vi

$$\iint_Y 1dS = \lim_{diam(S_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} 1\cdot arean(S_i) = Arean(S)$$

D v s

$$\textbf{Arean}\ (\mathbf{Y}) = \iint_Y 1dS$$

YTANS MASSA

Om $f(x,y,z)$ är ytans massbeläggning per areaenhet (t ex i kg / m^2)

då är ytans massa M= $\lim_{diam(S_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(T_i)\cdot arean(S_i) = \iint_Y f(x,y,z)dS$

Därmed

$$\boldsymbol{Ytans\ massa}\ \ \boldsymbol{M} = \iint_Y f(x,y,z)dS$$

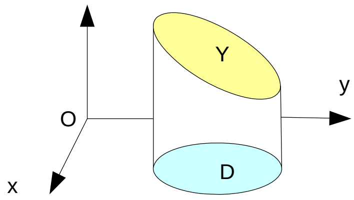
BERÄKNING AV YTINTEGRALER

A) För en yta given på explicitform (funktionsyta)

$$z = z(x,y) \qquad \text{där } (x,y) \in D$$

beräknas **ytintegralen** $\iint_Y f(x,y,z)dS$ som följande dubbelintegral över D,
(D är ytans projektion på xy planet)

$\iint_Y \ f(x,y,z)dS = \iint_D \ f(x,y,z(x,y))\,|\boldsymbol{N}|dxdy$
$= \iint_D \ f(x,y,z(x,y))\,\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy$



där $\boldsymbol{N} = (-z_x',\ -z_y',\ 1)$ (en viktig **normalvektor** till ytan i punkten(x,y))
Uttrycket $|\boldsymbol{N}|dxdy = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy$ kallas **areaelement** och betecknas med dS.
Alltså för för ytan $z = z(x,y)$ gäller
$dS = |\boldsymbol{N}|dxdy = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy$

Anmärkning: Om t ex *y* är en funktion av *x och z, dvs om* $y = y(x,z)$ då använder vi symmetriska formler för *N* och dS :
$\boldsymbol{N} = (-y_x',\ 1, -y_z'\ )$, $dS = |\boldsymbol{N}|dxdz = \sqrt{1+(y_x')^2+(y_z')^2}dxdz$

B) För ytor givna på parameterform
$x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$, där $(s,t) \in D(s,t)$
(eller kortare $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$, $(s,t) \in D(s,t)$)
beräknas ytintegralen $\iint_Y \ f(x,y,z)dS$ som följande dubbelintegral

$$\iint\limits_Y f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D(s,t)} f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\,|\boldsymbol{N}|dsdt$$

$$= \iint\limits_{D(s,t)} f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\,|\boldsymbol{r}_s' \times \boldsymbol{r}_t'|dsdt$$

där $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_s' \times \boldsymbol{r}_t'$
Areaelement för ytan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$ definieras som
$dS = |\boldsymbol{N}|dsdt = |\boldsymbol{r}_s' \times \boldsymbol{r}_t'|dsdt$

===

Uppgift 1.

Beräkna ytintegralen $\iint_Y \ f(x,y,z)dS$ då

$f(x,y,z) = y^2 + z$ och ytan definieras av $z = 2x + 2y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Lösning: $\boldsymbol{N} = (-z_x',\ -z_y',\ 1) = (-2,\ -2,\ 1)$, $|\boldsymbol{N}| = 3$

$\iint_Y f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\,|\boldsymbol{N}|dxdy = \iint_D (y^2+z) \cdot 3\,dxdy$
vi **måste** byta z i integranden mot **z-värdet på ytan,** med andra ord, substituerar vi

$$z = 2x + 2y$$

och får :

$$\iint_D (y^2+z) \cdot 3\,dxdy = \iint_D (y^2+2x+2y) \cdot 3\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (3y^2+6x+6y)dy = 7$$

Svar : 7

Uppgift 2.

Beräkna ytintegralen $\iint_Y f(x,y,z)dS$ då $f(x,y,z) = 5 + z$
och ytan Y är den del av planet $z = 5x + 2y$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 \le 4$.

Lösning:
Ytans projektion på xy planet (definitionsområde) är cirkeln $x^2 + y^2 \le 4$.
Ytans normalvektor är $\boldsymbol{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-5, -2, 1)$,
och $|\boldsymbol{N}| = \sqrt{30}$.
Vi substituerar $= |\boldsymbol{N}|dxdy$ i ytintegralen och får

$\iint_Y f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\,|\boldsymbol{N}|dxdy = \iint_D (5+z) \cdot \sqrt{30}\,dxdy$

[eftersom på ytan gäller $z = 5x + 2y$]

$= \iint_D (5+5x+2y) \cdot \sqrt{30}\,dxdy$

i) $\iint_D 5x\sqrt{30}\,dxdy$=0 eftersom $5x\sqrt{30}$ är en udda funktion och området D: $x^2 + y^2 \le 4$ är symmetrisk i x=0

dessutom

ii) $\iint_D 2y\sqrt{30}\,dxdy$=0 eftersom $2y\sqrt{30}$ är en udda funktion och området D: $x^2 + y^2 \le 4$ är symmetrisk i y=0

Därför

$\iint_D (5+5x+2y) \cdot \sqrt{30}\,dxdy = \iint_D 5\sqrt{30}\,dxdy = 5\sqrt{30}\,Arean(D) = 20\pi\sqrt{30}$

Svar : $20\pi\sqrt{30}$

Uppgift 3.

Beräkna arean av den del av ytan $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 1$.

Lösning:

$$z'_x = x, \qquad z'_y = y$$

Arean (**Y**) $= \iint_Y 1dS = \iint_D |\boldsymbol{N}|dxdy = \iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$

$= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$

[polära koordinater]

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, rdr$

$2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, rdr$

$= 2\pi \left[\frac{(1+r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1$

$= \frac{2\pi}{3}[\, 2^{3/2} \; -1 \;]$

$\int \sqrt{1+r^2}\, rdr =$

[subs: $1+r^2 = t \;\Rightarrow$

$2rdr = dt \Rightarrow rdr = \frac{dt}{2}$]

$= \int t^{1/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{t^{3/2}}{3}$

$\frac{(1+r^2)^{3/2}}{3}$

Svar : **Arean** (**S**) $= \frac{2\pi}{3}[\, 2^{3/2} \; -1 \;]$

Uppgift 4.

Beräkna arean av ytan $\boldsymbol{r}(s,t) = [2s,\; 3t, 5+3s+t]$, $s^2 + t^2 \le 4$

Lösning:

$\boldsymbol{r}'_s = [2,\; 0, 3]$, $\boldsymbol{r}'_t = [0,\; 3, 1]$,

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -9\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} = [-9, -2,\; 6]$$

Därför $|\boldsymbol{N}| = 11$

$$dS = |\boldsymbol{N}|dsdt = 11dsdt$$

och

$$\textbf{Arean (Y)} = \iint_Y |\boldsymbol{N}|dsdt = \iint_Y 11\, dsdt = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 11rdr = 44\pi$$

[vi har använt polära koordinater $s = r\cos\varphi$, $t = r\sin\varphi$, $ds\, dt = r \cdot dr\, d\varphi$]

Svar: 44π

Uppgift 5.

Ytan $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ $x^2+y^2 \le 4$

har en icke-konstant massbeläggning (massan per area)

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 \cdot z$$

Beräkna ytans massa.

Lösning: Vi substituerar f och z i formeln

Ytans massa $\mathbf{M} = \iint_Y f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$ och föränklar integralen:

$$\boldsymbol{M} = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)^2 \cdot z \cdot \sqrt{1+\left[\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right]^2+\left[\frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right]^2}\, dxdy$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)^2 \cdot \sqrt{4-x^2-y^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)^2 \cdot \sqrt{4-x^2-y^2} \cdot \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)^2 \cdot 2\ dxdy$$

Vi använder polära koordinater $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx\,dy = r \cdot dr\,d\varphi$ och får

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^4 \cdot 2 \cdot rdr = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^5 dr = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 = \frac{32\,\pi}{3}$$

Svar: Ytans massa $= \frac{32\,\pi}{3}$