EXTREMVÄRDEN OCH EXTREMPUNKTER.

LOKALA OCH GLOBALA EXTREMPUNKTER

Definition 1. Låt $f : R^n :\to R$ vara en reell funktion av n variabler och P_0 en punkt i funktionens definitionsområde D.

Vi säger att f har ett **lokalt maximum** i punkten P_0 om det finns ett (oavsett hur litet) klot K med centrum i P_0 så att

$f(P) \le f(P_0)$ för alla punkter P i $K \cap D$

[Om $f(P) < f(P_0)$ för alla $P \ne P_0$ i $K \cap D$ då har funktionen ett **strängt lokalt maximum**]

Punkten P_0 kallas en **lokal maximipunkt.**

Funktionens värde f(P) kallas ett **lokalt maximivärde** [ett strängt lokalt maximivärde]

Om

$f(P) \le f(P_0)$ för alla punkter i **hela definitionsmängden** D

säger vi att funktionen har sitt **globalt maximum** eller **största värde i** P_0.

(På liknande sätt definierar vi lokalt / globalt minimum.)
==

Definition 2. Låt $f : R^n :\to R$ vara en reell funktion av n variabler och P_0 en inre punkt i funktionens definitionsområde D. Punkten P_0 är en **stationär punkt** om f är deriverbar i punkten och om **alla partiella derivator av första ordningen är lika med 0** i punkten P_0:

Definition 3. Maximi- och minimipunkter kallas med ett gemensamt namn **extrempunkter.** En stationär punkt som är varken maximipunkt eller minimipunkt kallas **sadelpunkt**.

Extrempunkter söker vi bland:

1. STATIONÄRA PUNKTER

2. RANDPUNKTER

3. INRE SINGULÄRA PUNKTER , dvs inre punkter i definitionsmängden som saknar minst en partiell derivata. Exempelvis punkten (0,0) är en singulär punkt för koniska ytan

$f=\sqrt{x^2+y^2}$ eftersom partiella derivator är ej definierade i punkten. [Funktionen har minimum f_{min} =0 i punkten (0,0) ; skissera ytan]

STATIONÄRA PUNKTER OCH TAYLORS FORMEL

Stationära punkter bestämmer vi genom att finna alla lösningar till systemet

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

som ligger i inre delen av funktionens definitions område.

För att avgöra om en stationär punkt minimipunkt, kan vi använda Taylors formel av andra ordningen:
Låt t ex f=f(x,y) .
I en stationär punkt (a,b) till f blir partiella derivator av första ordningen =0 och därför blir Taylors formel av andra ordningen kring (a,b) :

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{2!}[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)]+R$$

Vi betecknar $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ $\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$ $\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$

och $Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$.

1. Från Taylors formel ser vi att om $Q(h,k)>0$ för alla $(h,k)\neq(0,0)$ så är $f(a+h,b+k)>f(a,b)$ och (a,b) **en (sträng) lokal minimipunkt.**

2. Om $Q(h,k)<0$ för alla $(h,k)\neq(0,0)$ så är $f(a+h,b+k)<f(a,b)$ och (a,b) **en (sträng) lokal maximipunkt.**

3. Om $Q(h,k)$ antar såväl positiva som negativa värden så är (a,b) en **sadelpunkt**

Därmed har vi följande fall för en stationär punkt (a,b)

1. Om $Q(h,k)>0$ för alla $(h,k)\neq(0,0)$ så är (a,b) **en lokal minimipunkt.**
(Vi säger att formen Q är **positivt definit**)

2. Om $Q(h,k)<0$ för alla $(h,k)\neq(0,0)$ så är (a,b) en **lokal maximipunkt.**
(Vi säger att formen Q är n**egativt definit**)

3. Om $Q(h,k)$ antar såväl positiva som negativa värden så är (a,b) en **sadelpunkt**
(Vi säger att formen Q är **indefinit**)

I följande fall **kan vi INTE bestämma punktens karaktär** med andragrads Taylors formel utan måste använda **andra metoder** (t ex direkt undersökning eller Taylors formel av högre ordning).

Fall1. Om $Q(h,k)\ge 0$ där det finns minst en punkt $(h_1,k_1)\ne(0,0)$ sådan att $Q(h_1,k_1)=0$ **.**
(Vi säger att formen Q är **positivt semidefinit**)
{ Anmärkning: Om $Q(h_1,k_1)=0$ då är också $Q(th_1,tk_1)=t^2Q(h_1,k_1)=0$ dvs i detta fall är Q=0 längs hela linjen (th_1,tk_1) .}

Fall2. Om $Q(h,k)\le 0$ där det finns minst en punkt $(h_1,k_1)\ne(0,0)$ sådan att $Q(h_1,k_1)=0$.
(Vi säger att formen Q är **negativt semidefinit**)

Fall3. Om $Q(h,k)\equiv 0$ dvs $Q(h,k)=0$ för alla (h,k) (fallet kan räknas som både positivt eller negativt semidefinit)

Uppgift 1.
Bestäm alla stationära punkter och avgör deras karaktär (maximi-, minimi-, sadelpunkt)
a) $f(x,y)=10+x^3+y^3-3xy$
b) $f(x,y)=e^{x^2+y^2+2y+5}$
c) $f(x,y)=-x^2-2x-y^2+4y+11$
d) $f(x,y)=2x^3+2y^2-12xy+10$
e) $f(x,y)=2x^3+2y^3-6xy+10$
f) $f(x,y)=xy-x^3-y^2+20$

Lösning a)
$f'_x=3x^2-3y \qquad f'_y=3y^2-3x$

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases}$$

Från ekv 1 får vi
$y=x^2$ (*)
som vi substituerar i ekv2 :
$x^4-x=0 \quad\Rightarrow\quad x(x^3-1)=0\Rightarrow$
$x_1=0, \qquad x_2=1$
Från (*)
$y_1=0, \qquad y_2=1$
Vi har fått två stationära punkter (0,0) och (1,1)
$A=f''_{xx}=6x\,, \qquad B=f''_{xy}=-3\,, \qquad C=f''_{yy}=6y$

1. Stationär punkt (0,0)
För punkten (0,0) får vi $Q-3hk$ som antar både positiva och negativa värden och därmed är stationära punkten (0,0) en SADELPUNKT.

2. Stationär punkt (1,1)
För punkten (1,1) har vi $6h^2-6hk+6k^2$. För att avgöra typ göt vi en kvadratkomplettering:
$Q=6h^2-6hk+6k^2=6[(h-\frac{1}{2}k)^2+\frac{3}{4}k^2]$.
Det är uppenbar att $Q\geq 0$ och därför har vi **två möjligheter** :
Antingen är Q positivt definit (dvs Q= 0 endast i punkten (0,0))
eller positivt semidefinit form (dvs Q= 0 i minst en punkt $(h,k)\neq(0,0)$).
För att avgöra frågan löser vi ekvationen Q= 0:
Vi ser att Q= 0 om och endast om följande villkor är uppfyllda

$$\left\{\begin{array}{l} h-\frac{1}{2}k=0 \\ k=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow h=0, \quad k=0 .$$

Alltså $Q\geq 0$ där Q= 0 endast i punkten (0,0).Därmed är formen Q **positivt definit** och stationära punkten (1,1) är en MINIMIPUNKT.

Vi kan använda nedanstående tabell för att åskådligt göra föregående analys:

Punkt	***A***	***B***	***C***	$Q=Ah^2+2Bhk+Ck^2$	**Formens typ**	**Punktens typ**	***f(x,y)***
(0,0)	0	-3	0	$-3hk$	indefinit	sadelpunkt	10
(1,1)	6	-3	6	$6h^2-6hk+6k^2$ $=6[(h-\frac{1}{2}k)^2+\frac{3}{4}k^2]$	positivt definit	minimipunkt	9

a) Svar: (0,0) sadelpunkt, (1,1) minimum

Tips b)

Punkt	***A***	***B***	***C***	$Q=Ah^2+2Bhk+Ck^2$	**Formens typ**	**Punktens typ**	*f(x,y)*
(0,-1)	$2e^4$	0	$2e^4$	$2e^4h^2+2e^4k^2$	positivt definit	minimipunkt	e^4

Tips c)

Punkt	***A***	***B***	***C***	$Q=Ah^2+2Bhk+Ck^2$	**Formens typ**	**Punktens typ**	*f(x,y)*
(-1,2)	-2	0	–2	$-2h^2-2k^2$	negativt definit	maximipunkt	16

Tipsd)

Punkt	***A***	***B***	***C***	$Q=Ah^2+2Bhk+Ck^2$	**Formens typ**	**Punktens typ**	*f(x,y)*
(0,0)	0	–12	4	$-24hk+4k^2$	indefinit	sadelpunkt	10

(6,18)	72	–12	4	$72h^2 - 24hk + 4k^2$	positivt definit	minimipunkt	– 206

Svar till uppgift 1.
a) Svar: (0,0) sadelpunkt, (1,1) minimum
b) Minimum $f_{\min} = e^4$ i punkten $(0,-1)$
c) Maximum $f_{\max} = 16$ i punkten $(-1,2)$
d) Sadelpunkt i $(0,0)$, $f(0,0) = 10$
och minimum $f_{\min} = -206$ i punkten $(6,18)$
e) Sadelpunkt i $(0,0)$, $f(0,0) = 10$ och minimum $f_{\min} = 8$ i punkten $(1,1)$
f) (0,0) sadelpunkt, (1/6, 1/12) maximum

Uppgift 2.
Bestäm alla stationära punkter och avgör deras karaktär (max, min sadel, ..)
(Tillhörande kvadratiska former är **semidefinita**!)
a) $f(x,y) = 10 + x^2 + y^4$ b) $f(x,y) = 10 + x^3 + y^4$
c) $f(x,y) = 5 + x^4 + y^4$ d) $f(x,y) = 5 - x^4 - y^4$
e) $f(x,y,z) = 3 + x^4 + y^4 + z^4$ f) $f(x,y,z) = 3 + x^3 + y^4 + z^4$
Lösning a):

$$f'_x(x,y) = 2x, \quad f'_y(x,y) = 4y^3$$

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \quad f''_{xy}(x,y) = 0, \quad f''_{yy}(x,y) = 12y^2$$

En stationär punkt S(0,0) med motsvarande $Q = 2h^2 \geq 0$.

Eftersom exempelvis $Q(0,3) = 0$ (dvs Q(h,k)= 0 i en punkt skild från (0,0)

är formen **semidefinit.** Därför kan vi **inte** använda andragrads Taylors formel för att bestämma punktens typ.
Å andra sidan det är uppenbart, på grund av jämna potenser att $f(x,y) > f(0,0) = 10$ för alla $(x,y) \neq (0,0)$. Med andra ord har funktionen **(strängt) minimum** i punkten (0,0); $f_{\min}$=10.

Svar

a) minimipunkt (0,0). b) sadelpunkt (0,0) c) minimipunkt (0,0) d) maximipunkt (0,0)

e) minimipunkt (0,0,0) f) sadelpunkt(0,0,0)