Föreläsning 19–20 (i kursb §10.1–10.4)

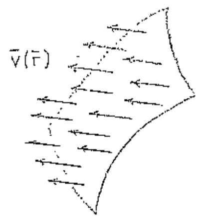
- Exempel
- Flödesintegraler
  - Definition
  - Vektoriellt ytelement
- Räkneregler
- Gauss sats
  - Divergens
- Stokes sats
  - Rotation
- Sammanfattning

[obs! Du behöver repetera Förel. 18]

Lösningsförslag till övningarna:

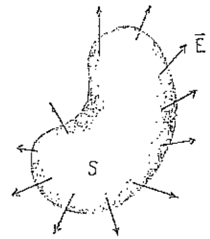
10.11, 10.13, 10.16
10.23, 10.27, 10.53
10.63, 10.64

Exempel på flödesintegraler



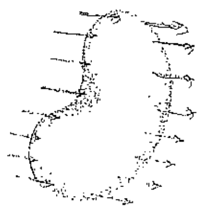
En vätska flödar i rummet med hastighetsfältet $\bar{v}(\bar{r})$. Det totala flödet genom ett ytstycke S ges av

$$\Phi = \iint_S \bar{v}(\bar{r}) \cdot d\bar{S}.$$



Totalladdningen innanför en sluten yta S fås med Gauss lag

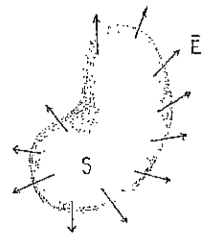
$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}.$$



Eftersom det inte finns magnetiska monopoler så är

$$\iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

där S är en sluten yta.



Totalkraften på en fast kropp i vakuum i ett E-fält ges av

$$F = \iint_S \bar{T} \cdot d\bar{S}$$

där S är kroppens randyta och $\bar{T}$ är den maxwellska spänningen.

Flödesintegraler

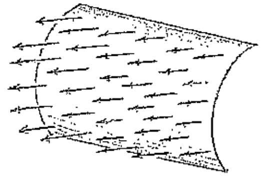
En vätska flödar i rummet med hastighetsfältet $\bar{v}(\bar{r})$. Genom en orienterad parameteryta

$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), \quad \text{där } (s,t) \in D,$$

flödar då mängden

$$\Phi = \iint_D \bar{v}(\bar{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right) ds\, dt$$

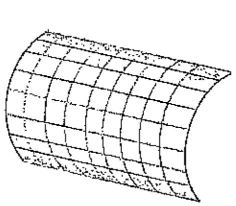
vätska per tidsenhet.



① Vi ska bestämma flödet genom ytan

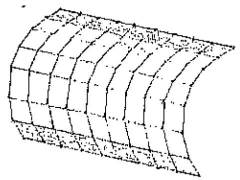
$$\bar{r} = \bar{r}(s,t), \quad (s,t) \in D,$$

där $D: a \leq s \leq b,\ c \leq t \leq d$.



② Dela in parameterområdet D i delrektanglar

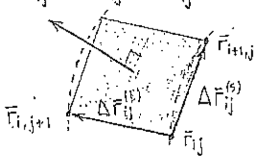
$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m = b,$$
$$c = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = d.$$



③ Detta ger en indelning av ytan i räta planstycken med hörnpunkter i

$$\bar{r}_{ij} = (x(s_i,t_j), y(s_i,t_j), z(s_i,t_j)).$$

$$\bar{n}_{ij} = \Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}$$

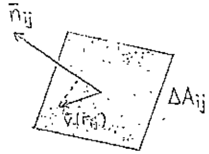


④ Ett planstycke har arean och utåtpekande normalen

$$\Delta A_{ij} = |\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}|,$$
$$\bar{n}_{ij} = \Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}.$$

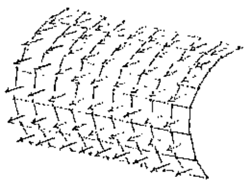
⑤ På ett planstycke är $\bar{v}$ approximativt konstant och i normalens riktning har den en komposant med beloppet

$$\bar{v}(\bar{r}_{ij}) \cdot \hat{n}_{ij} = v(\bar{r}_{ij}) \cdot \frac{|\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}|}{\Delta A_{ij}}.$$



⑥ Flödet genom planstycket är approximativt

$$\Delta \Phi_{ij} = \begin{pmatrix} \text{Belopp av } \bar{v}\text{:s} \\ \text{komposant i} \\ \text{riktning } \bar{n}_{ij} \end{pmatrix} \Delta A_{ij}$$
$$= \bar{v}(\bar{r}_{ij}) \cdot (\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)})$$



⑦ Det totala flödet genom ytan är approximativt

$$\Phi \approx \sum_{\substack{0 < i \leq m \\ 0 < j \leq n}} \bar{v}(\bar{r}(s_i,t_j)) \cdot (\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}).$$

$$\Phi = \lim_{\substack{m,n \to \infty \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{\substack{0 \leq i < m \\ 0 \leq j < n}} \bar{v}(\bar{r}(s_i,t_j)) \cdot (\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)} \times \Delta \bar{r}_{ij}^{(t)})$$
$$= \lim_{\substack{m,n \to \infty \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{\substack{0 \leq i < m \\ 0 \leq j < n}} \bar{v}(\bar{r}(s_i,t_j)) \cdot \left(\frac{\Delta \bar{r}_{ij}^{(s)}}{\Delta s_i} \times \frac{\Delta \bar{r}_{ij}^{(t)}}{\Delta t_j} \right) \Delta s_i \Delta t_j$$
$$= \iint_D \bar{v}(\bar{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right) ds\,dt$$

⑧ Summaformeln för flödet är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

Definition

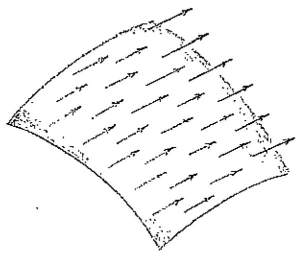
Om $\bar F = \bar F(r)$ är ett kontinuerligt vektorfält och S är en orienterad yta, då definieras

$$\iint_S \bar F \cdot d\bar S = \iint_D \bar F(\bar r(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \bar r}{\partial s} \times \frac{\partial \bar r}{\partial t} \right) ds\, dt,$$

där $\bar r = \bar r(s,t)$, $(s,t) \in D$, är en kontinuerligt deriverbar parametrisering av S så att

$$\bar n = \frac{\partial \bar r}{\partial s} \times \frac{\partial \bar r}{\partial t}$$

är utåtriktad.



Denna definition är konsistent eftersom värdet av flödesintegralen är oberoende av val av parametrisering.

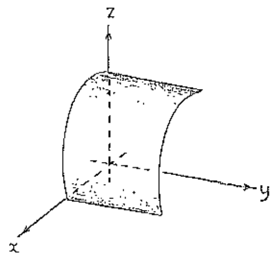
Vektoriellt ytelement

Uttrycket

$$\boxed{d\bar S = \left(\frac{\partial \bar r}{\partial s} \times \frac{\partial \bar r}{\partial t} \right) ds\, dt = \bar n\, ds\,dt}$$

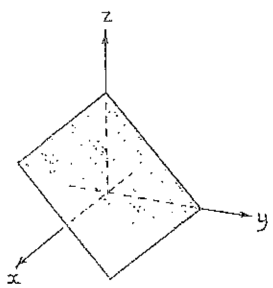
kallas för det vektoriella ytelementet.

Övning 1: Bestäm det vektoriella ytelementet till ytan. **Använd definition ovan.**



$$\begin{cases} x = \cos s \\ y = t \\ z = \sin s \end{cases}$$

Svar? $(-\cos(s), 0, -\sin(s))\, ds\,dt$



$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Svar? $(0, 1, 1)\, ds\,dt$?

Exempel 1: Beräkna flödet av vektorfället $\bar{F} = (2x, 2y, 3)$ ur ytan S som är en del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet och orienterad så att den utåtriktad normalen har positiv z-koordinater

Lösningsförslag: Görs på tavlan

Exempel 2: Beräkna flödet av vektorfället $\bar{F} = (x, y, z)$ ur sfären S med medelpunkt i origo och radien 1

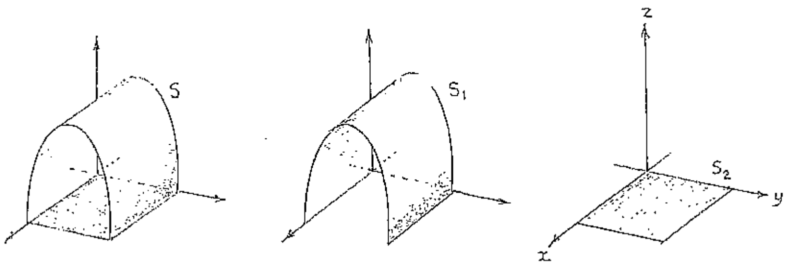
Lösningsförslag görs på Tavlan

Räkneregel

Additivitet

Om S_1 och S_2 är två orienterade ytor, då är

$$\iint_{S_1+S_2} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \bar{F}\cdot d\bar{S} + \iint_{S_2} \bar{F}\cdot d\bar{S}$$

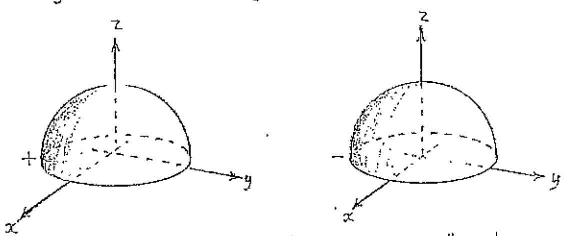


Flödet ut ur ytan S kan bestämmas genom att dela upp S i två delar S_1 och S_2 och addera flödet ut ur S_1 och S_2.

Orientering

Om S är en orienterad yta, då är

$$\iint_{-S} \bar{F}\cdot d\bar{S} = -\iint_{S} \bar{F}\cdot d\bar{S}.$$



Flödet ut ur en yta byter tecken när ytans orientering byter tecken.

Linjaritet

Om $\bar{F}$ och $\bar{G}$ är integrabla vektorfält och a och b är konstanter, då är

$$\iint (a\bar{F}+b\bar{G})\cdot d\bar{S} = a\iint \bar{F}\cdot d\bar{S} + b\iint \bar{G}\cdot d\bar{S}.$$

Exempel 3 Beräkna

$$\oiint_S (x,y,z)\cdot d\bar{S},$$

där S är den totala begränsningsytan till cylindern $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1$, med utåtpekande normal.

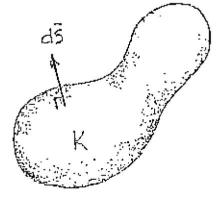
Beteckning: $\oiint_S$ innebär att ytan S är sluten

Lösningsförslag: (Görs på tavlan)

Gauss sats

Låt K vara ett kompakt område med en rand ∂K som består av styckvis kontinuerligt deriverbara ytstycken och där $d\bar{S}$ är det utåtriktade vektoriella ytelementet. Om $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält, så är

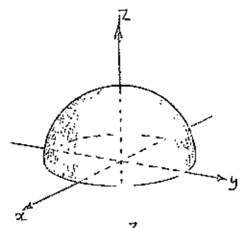
$$\oiint_{\partial K} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_K \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}(\bar{F})} dx\,dy\,dz.$$



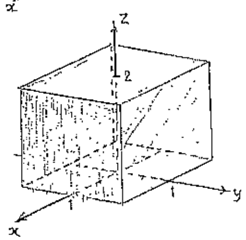
(Beviset är snarlikt det till Greens formel.)

Övning 2: Skriv om flödesintegralen som en trippelintegral enligt Gauss sats.

a) $\oiint_{\partial K} (xy^2, y, xz^2)\cdot d\bar{S}$



b) $\oiint_{\partial K} (y^2, z^2, x^2)\cdot d\bar{S}$

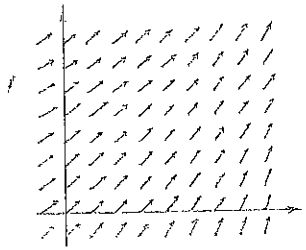


Divergens

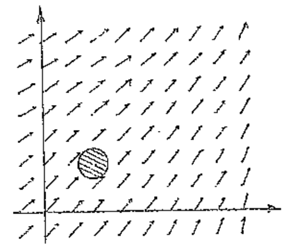
Uttrycket

$$\operatorname{div}(\bar{F}) = \nabla\cdot\bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

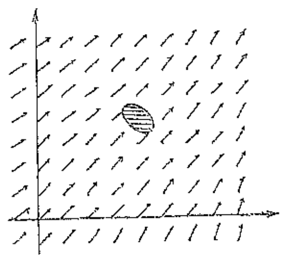
kallas för divergensen/källtätheten av F och mäter vektorfältets relativa volymändring.



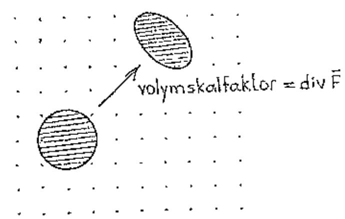
① Antag att vi har en vätska som flödar med hastighetsfältet $\bar{v} = \bar{v}(\bar{F})$.



② Betrakta en liten kontrollvolym K vid tidpunkten t som har volymen ΔV.



③ Låt K flyta med vätskan under tiden Δt.



④ Då har K ändrat sin volym till

$$\Delta V + (\operatorname{div} F)\,\Delta V\,\Delta t + \text{Restterm}.$$

Exempel 1: Beräkna

$$\iint_S (2x, 2y, 3) \cdot d\bar{S}$$

där S är den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ ovanför xy-planet och orienterad så att den utåriktade normalen har z-positiv koordinat.

Lösningsförslag: (Görs på tavlan)

Exempel 2: Beräkna flödet av vektorfältet (xy, yz, xz) ut ur enhetssfären

Gauss sats,

$$\iint_{\partial K} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\,dx\,dy\,dz,$$

kan därmed formuleras

$$\begin{pmatrix}\text{Nettomängd vätska}\\ \text{som flödar ut ur}\\ \text{området}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Nettomängd vätska}\\ \text{som produceras}\\ \text{inom området}\end{pmatrix}.$$

Exempel 4 Beräkna

$$\iint_S (x,y,z)\cdot d\bar{S}$$

där S är en sfär med medelpunkt i origo och radie 1 och $d\bar{S}$ är utåtriktad.

Lösningsförslag: (Görs på tavlan)

(jämför med Exempel 2)

Exempel 5 Beräkna flödet av vektorfältet. $\bar{F} = (x^3y, xz, yz^3)$ ut från området $x^2+z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x \geq 0$ och $z \geq 0$.

Lösningsförslag (Görs på tavlan)

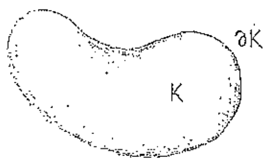
Gauss sats = Huvudsats

Gauss sats kan formuleras som

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \oiint_{\partial K} \bar{F}\cdot d\bar{S} \qquad (*)$$

där $\bar{F}$ är ett vektorfält som uppfyller

$$\operatorname{div} \bar{F} = f(x,y,z)$$



Formeln (*) kan jämföras med integralkalkylens huvudsats för enkelintegraler

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

I båda fallen reduceras en integral över hela området till att evaluera en "primitiv funktion" på randen.

Övning 3: Härled en ytintegralformel för

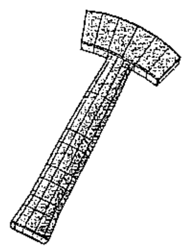
a) Volymen av en kropp

$$V = \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = \boxed{\oiint_K \tfrac{1}{3}(x,y,z)\cdot d\bar{S}}$$

b) Tröghetsmomentet kring x-axeln för en homogen kropp

$$J_x = m\iiint_K (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \boxed{}$$

Exempel (CAD)



När ett nytt verktyg tas fram ritas det först upp i ett CAD-program som ett lappverk av enklare typer av ytstycken (t.ex. planstycken) eller "freeform surfaces" (t.ex. nurbs).

Då kan Gauss sats användas för att beräkna

$$\text{massa} = \iiint \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{masscentrum} = \iiint (x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{tröghetsmoment} = \iiint d(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

genom att skriva om trippelintegralerna som ytintegraler över randytstyckena (som är explicit givna).

Stokes sats

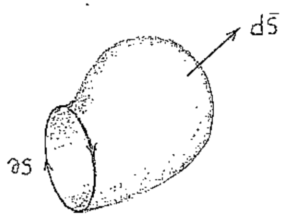
Antag att S är en orienterad yta med en orienterad randkurva ∂S. Om $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält, då är

$$\oint_{\partial S} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\text{rot}\,\bar{F})\cdot d\bar{S},$$

där $\text{rot}\,F = \nabla \times \bar{F}$.

obs! orientering

S ligger till vänster om mig när jag går runt ∂S med huvudet i $d\bar{S} = \bar{n}\,dsdt$:s riktning



Rotation (se t.ex Förel. 17)

Uttrycket

$$\text{rot}\,\bar{F} = \nabla\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

kallas för rotationen av $\bar{F}$.

Övning 4: Bestäm rotationen av vektorfältet.

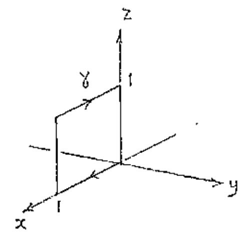
a) $\bar{F} = (x, y, z)$

b) $\bar{F} = (y, z, x)$

Övning 5: Skriv om kurvintegralen

$$\oint_\gamma (y, z, x)\cdot d\bar{r}$$

som en flödesintegral enligt Stokes sats.



Exempel: 6 Beräkna

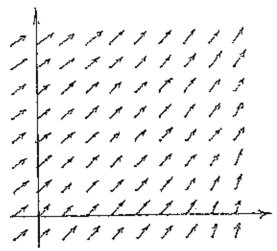
$$\iint_S \operatorname{rot} \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

där S är den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger mellan planen $z=1$ och $z=3$ och $d\bar{S}$ har positiv z-koordinat.

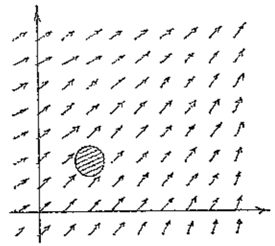
Rotationen

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

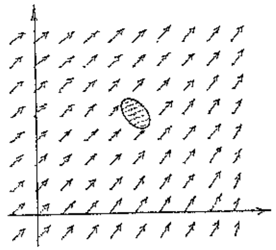
mäter hur mycket vektorfältet virvlar.



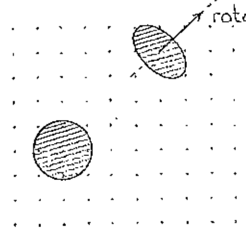
(1) Antag att vi har en vätska som flödar med hastighetsfältet $\bar{v} = \bar{v}(r)$.



(2) Betrakta en liten kontrollvolym K vid tidpunkten t.



(3) Låt K flyta med vätskan under tiden Δt.



(4) Då har K roterat kring axelriktningen $\operatorname{rot}\bar{F}$ + restterm med vinkeln $\frac{1}{2}|\operatorname{rot}\bar{F}|$ + restterm.

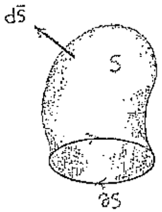
Stokes sats = Huvudsats

För källfria vektorfält $\bar{F}$ (dvs div $\bar{F} = 0$) kan Stokes sats formuleras som

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \oint_{\partial S} \bar{A} \cdot d\bar{r} \qquad (*)$$

där $\bar{A}$ är en s.k. vektorpotential till $\bar{F}$, dvs $\bar{F} = \nabla \times \bar{A}$.

(Om $\bar{F}$ inte är källfritt finns ingen vektorpotential.)



Formeln (*) kan jämföras med integralkalkylens huvudsats för enkelintegraler

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

I båda fallen reduceras en integral över hela området till att evaluera en "primitiv funktion" på randen.

Sammanfattning.

Efter introduktionen av ytintegraler har vi täckt in de möjliga typerna av integraler.

Områdets dimension \ Rummets dimension	1	2	3
1	Enkel-integral	Kurv-integral	Kurv-integral
2	—	Dubbel-integral	Yt-integral
3	—	—	Trippel-integral

För varje integraltyp har vi någon form av huvudsats.

Områdets dimension \ Rummets dimension	1	2	3
0	Punkt-evaluering	Punkt-evaluering	Punkt-evaluering
	Huvudsatsen	Potentialformel (konservativa vektorfält)	Potentialformel (konservativa vektorfält)
1	Enkel-integraler	Kurv-integraler	Kurv-integraler
		Greens formel	Stokes sats (källfria vektorfält)
2	—	Dubbel-integraler	Yt-integraler
			Gauss sats
3	—	—	Trippel-integraler

10.11 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\bar{u} = (x, y, z+1)$$

upp (positiv z-koordinat) genom ytan $z = 1-x^2-y^2$, $z \geq 0$.

Flödet genom ytan ges av integralen

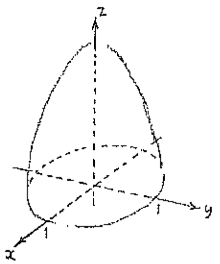
$$\iint_{\text{Ytan}} \bar{u} \cdot d\bar{S}$$

där $d\bar{S}$ är det vektoriella ytelementet (pekandes uppåt).

Ytan $z = 1-x^2-y^2$ är en paraboloid och villkoret $z \geq 0$ ger att

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

dvs vi betraktar den del av paraboloiden som begränsas i xy-led av enhetscirkelskivan.



Eftersom ytan är en funktionsyta $z = z(x,y)$ ges ytelementet av

$$d\bar{S} = \pm (z'_x, z'_y, -1)\, dx\, dy$$

där $\pm$ väljs så att $d\bar{S}$ får önskad riktning. I detta fall

10.11 forts. vill vi att $d\bar{S}$ ska peka uppåt och därför ska $-$:tecknet väljas, dvs

$$d\bar{S} = (-z'_x, -z'_y, 1)\, dx\, dy$$
$$= (2x, 2y, 1)\, dx\, dy.$$

Flödesintegralen blir därmed

$$\iint_{\text{Ytan}} \bar{u} \cdot d\bar{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, z+1) \cdot (2x, 2y, 1)\, dx\, dy$$

$$= \{ z = 1 - x^2 - y^2 \}$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2x^2 + 2y^2 + 2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2 + 2)\, dx\, dy$$

$$= \{ \text{polära koordinater} \}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 + 2)\, r\, dr$$

$$= \Big[\theta \Big]_0^{2\pi} \Big[\tfrac{1}{4} r^4 + r^2 \Big]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \left(\tfrac{1}{4} + 1 \right)$$

$$= \frac{5\pi}{2}.$$

10.13 En lampskärm L har formen av en 'stympad' sfär med ekvationen

$$x^2+y^2+z^2=2, \qquad z \le 1.$$

a) Gör en parameterframställning av L med sfäriska koordinater.

b) Bestäm energiflödet ut genom L från en punktformig ljuskälla i origo med intensiteten

$$\bar{u}(\bar{r}) = c\,\frac{\bar{r}}{r^3} \qquad (\mathrm{W/m^2}).$$

---

a) Sfären har radie $\sqrt{2}$ och med rymdpolära koordinater,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

kan hela sfären beskrivas som

$$r=\sqrt{2}, \quad 0\le\theta\le\pi, \quad 0\le\varphi<2\pi.$$

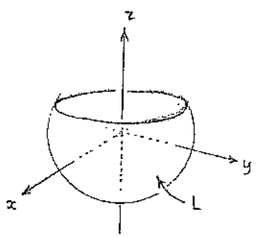
Villkoret $z\le 1$ ger att

$$\sqrt{2}\cos\theta\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta\le\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi.$$

Alltså kan ytan L parametriseras som

$$\bar{r}(\theta,\varphi) = (\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi,\ \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi,\ \sqrt{2}\cos\theta)$$

där $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi$ och $0\le\varphi<2\pi$.



10.13 forts. b) Energiflödet ut genom L fås genom att integrera upp intensiteten (energi per areaenhet)

$$\iint_L \bar{u}\cdot d\bar{S}$$

där $d\bar{S}$ är det utåtriktade ytelementet.

Eftersom ytan är beskriven i parameterform $\bar{r}=\bar{r}(\theta,\varphi)$ kan vi bestämma ytelementet med formeln

$$d\bar{S} = \pm\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi}\,d\theta\,d\varphi$$

där vi kan välja $\pm$ så att $d\bar{S}$ blir utåtriktad.

Vi har att

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi,\ \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi,\ \sqrt{2}\cos\theta)$$
$$= (\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi,\ \sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi,\ -\sqrt{2}\sin\theta),$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi,\ \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi,\ \sqrt{2}\cos\theta)$$
$$= (-\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi,\ \sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi & \sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi & -\sqrt{2}\sin\theta \\ -\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi & \sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \big(0-(-\sqrt{2}\sin\theta)\cdot\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi,$$
$$-(0-(-\sqrt{2}\sin\theta)\cdot(-\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi)),$$
$$\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi\cdot\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi-\sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi\cdot(-\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi)\big)$$

$$= (2\sin^2\theta\cos\varphi,\ 2\sin^2\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))$$

$$= 2\sin\theta\,(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$= \sqrt{2}\sin\theta\ \bar{r}$$

10.13 forts. 2

Eftersom $\sin\theta \geq 0$ för $0 \leq \theta \leq \pi$ så får vi en utåtriktad $d\bar{S}$ genom att välja $+$ i formeln för $d\bar{S}$. Alltså

$$d\bar{S} = \sqrt{2}\sin\theta\,\bar{r}\,d\theta\,d\varphi.$$

Vi får därför att energiflödet är

$$\iint_L \bar{u}\cdot d\bar{S} = \iint_{\substack{\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\pi\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} c\,\frac{\bar{r}}{r^3}\cdot\sqrt{2}\sin\theta\,\bar{r}\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \{\bar{r}\cdot\bar{r} = r^2;\ r = \sqrt{2}\}$$

$$= c\iint_{\substack{\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\pi\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi} \sin\theta\,d\theta$$

$$= c\left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left[-\cos\theta\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi}$$

$$= c\cdot 2\pi\cdot\left(-(-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= c\pi(2+\sqrt{2}).$$

10.16

Beräkna divergensen av följande vektorfält (där $\bar{r}=(x,y,z)$)

a) $\bar{u} = (x^2, 3y, x^3)$

b) $\bar{u} = \bar{r}$

Divergensen av ett vektorfält u definieras som

$$\operatorname{div}\bar{u} = \nabla\cdot\bar{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\bar{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Därför får vi att

a) $\operatorname{div}\bar{u} = \frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}3y + \frac{\partial}{\partial z}x^3 = 2x+3+0 = 2x+3,$

b) $\operatorname{div}\bar{u} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1+1+1 = 3.$

10.23 Låt K vara området som definieras av

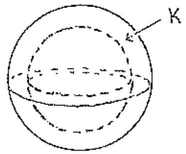
$$K: \ 2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 3.$$

Bestäm flödet av fältet

$$\bar{u} = \frac{\bar{r}}{r^2}$$

ut ur området K.

Området K består av punkterna mellan de två sfärerna med radie $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{3}$ och medelpunkt i origo.



Om vi ska beräkna flödet direkt så behöver vi dela upp flödesintegralen i två integraler, en för varje randsfär. Ett alternativ är att använda Gauss sats och skriva flödet som en trippelintegral av divergensen över området K.

Metod 1 (flödesintegral)

Om vi inför beteckningarna

$$\partial K_1 = \{ x^2+y^2+z^2 = 2 \}$$
$$\partial K_2 = \{ x^2+y^2+z^2 = 3 \}$$

så kan flödet skrivas som

$$\iint_{\partial K} \bar{u}\cdot d\bar{S} = \iint_{\partial K_1} \bar{u}\cdot d\bar{S} + \iint_{\partial K_2} \bar{u}\cdot d\bar{S}$$

10.23 forts. där det vektoriella ytelementet $d\bar{S}$ är riktat utåt från K, dvs riktad in mot origo i integralen över ∂K_1 och riktad bort från origo i integralen över ∂K_2.

Eftersom ytorna ∂K_1 och ∂K_2 är sfärer parametriserar vi dem med hjälp av rymdpolära koordinater:

$$\partial K_1: \quad \bar{r}(\theta,\varphi) = (\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi, \sqrt{2}\cos\theta)$$
$$\partial K_2: \quad \bar{r}(\theta,\varphi) = (\sqrt{3}\sin\theta\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi, \sqrt{3}\cos\theta)$$

och parameterområdet är $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Då ges ytelementet av (se uppgift 10.13b)

$$\partial K_1: \quad d\bar{S} = -\sqrt{2}\sin\theta\,\bar{r}\,d\theta\,d\varphi$$
$$\partial K_2: \quad d\bar{S} = +\sqrt{3}\sin\theta\,\bar{r}\,d\theta\,d\varphi$$

där vi valt $\pm$ så att $d\bar{S}$ får rätt riktning på respektive randsfär.

Vi får nu att

$$\iint_{\partial K} \bar{u}\cdot d\bar{S} = \iint_{\partial K_1} \frac{\bar{r}}{r^2}\cdot(-\sqrt{2}\sin\theta\,\bar{r})\,d\theta\,d\varphi + \iint_{\partial K_2} \frac{\bar{r}}{r^2}\cdot\sqrt{3}\sin\theta\,\bar{r}\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \{\bar{r}\cdot\bar{r} = r^2\}$$

$$= -\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta + \sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\sqrt{2}\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} + \sqrt{3}\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot 2 + \sqrt{3}\cdot 2\pi\cdot 2$$

$$= 4\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

$\boxed{\begin{array}{c}10.23\\ \text{forts. 2}\end{array}}$

Metod 2 (Gauss sats)

Gauss sats ger att

$$\iint_{\partial K} \bar{u} \cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div} \bar{u} \; dV$$

där

$$\operatorname{div} \bar{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2) - z\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}.$$

Eftersom K är ett rotationssymmetriskt område och integranden är $1/r^2$ så är det lämpligt att införa rymdpolära koordinater. Då ges K av

$$\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

och volymformen av

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Vi får nu att

$$\iint_{\partial K} \bar{u} \cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div} u \; dV$$

$$= \iiint_{\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{3}} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$\boxed{\begin{array}{c}10.23\\ \text{forts. 3}\end{array}}$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dr$$

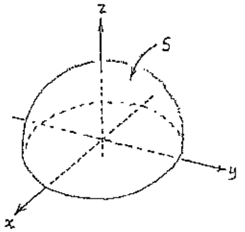
$$= \Big[\varphi \Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} \Big[r \Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

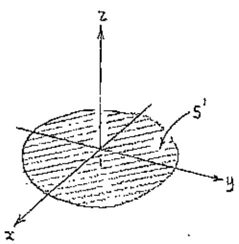
$$= 4\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

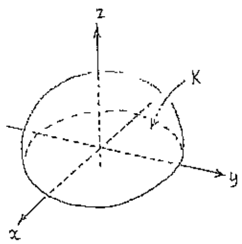
10.27 Ytan S beskrivs av $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$ och är orienterad så att normalen har positiv z-koordinat. Beräkna flödet av fältet $\bar{F} = (x, y, (z-1)^2)$ genom S.

Ytan S är den övre halvan av enhetssfären.



Om vi låter S' vara enhetscirkelskivan i xy-planet så innesluter S och S' tillsammans ett halvklot K.





Vi har nu en sluten yta och Gauss sats ger att vi har sambandet

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} + \iint_{S'} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div} \bar{F}\, dV,$$

där $d\bar{S}$ är nedåtriktad (ut från K) på S'.

10.27 forts. Med andra ord är

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div} \bar{F}\, dV - \iint_{S'} \bar{F}\cdot d\bar{S},$$

så den sökta flödesintegralen kan vi bestämma genom att beräkna integralerna i högerledet:

- Vi har att

$$\operatorname{div} \bar{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot (x, y, (z-1)^2) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}(z-1)^2 = 2z$$

och därför blir

$$\iiint_K \operatorname{div} F\, dV = \iiint_K 2z\, dx\, dy\, dz$$

$$= \{\text{rymdpolära koordinater}\}$$

$$= 2 \iiint_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta\leq\pi/2}} r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr$$

$$= 2\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\Big]_0^{\pi/2} \Big[\tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^1$$

$$= 2\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

- På ytan S' har vi att

$$\bar{F} = (x, y, (z-1)^2)\big|_{z=0} = (x, y, 1),$$

$$d\bar{S} = (0, 0, -1)\, dx\, dy$$

och därmed är

$$\iint_{S'} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_{S'} (x,y,1)\cdot(0,0,-1)\, dx\, dy = -\iint_{S'} dx\, dy = -\operatorname{Area}(S') = -\pi.$$

$\boxed{\begin{array}{c}10.27\\ \text{forts. 2}\end{array}}$ Alltså är

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\,dV - \iint_{S'} \bar{F}\cdot d\bar{S}$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\pi)$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$

$\boxed{10.53}$ Låt γ vara cirkeln

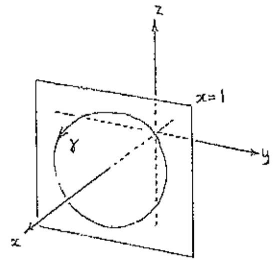
$$y^2+z^2=1, \quad x=1$$

genomlöpt i negativ led sedd från origo. Låt $\bar{u}$ vara fältet

$$\bar{u} = (xyz,\ xy^2z^3-z,\ xy^3z^2).$$

Bestäm det arbete fältet uträttar vid cirkulation runt γ.

Kurvan γ är enhetscirkeln i planet $x=1$ och "negativ led" betyder kurvan genomlöps medurs.



Vi skulle kunna parametrisera kurvan som

$$\bar{r}(t) = (1, \cos t, \sin t) \quad \text{för } \underrightarrow{0 \le t \le 2\pi}$$

och räkna på, men eftersom komponenterna i vektorfältet $\bar{F}$ är polynom av ganska hög grad kan det leda till rätt jobbiga uttryck som ska integreras.

En annan väg är att använda Stokes sats. Om S betecknar en yta som har γ som randkurva, då är

$$\oint_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S},$$

10.53 forts.

där $d\bar{S}$ pekar i den riktning som γ:s omloppsriktning inducerar (enligt högerhandsregeln).

I detta fall har vi att

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \nabla\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & xy^2z^3-z & xy^3z^2 \end{vmatrix}$$

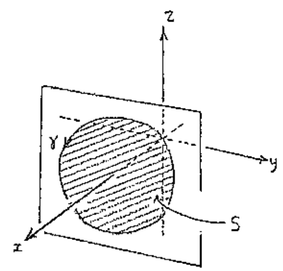
$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy^3z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^3-z),\ -\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^3z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right),\ \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^3-z) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz) \right)$$

$$= (3xy^2z^2 - 3xy^2z^2+1,\ -(y^3z^2-xy),\ y^2z^3-xz)$$

$$= (1,\ xy-y^3z^2,\ y^2z^3-xz)$$

och väljer vi S som enhetscirkelskivan i planet $x=1$ så är

$$d\bar{S} = (1,0,0)\,dy\,dz.$$



Detta gör att integranden i flödesintegralen blir enkel,

$$\operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S} = (1,*,*)\cdot(1,0,0)\,dydz = dy\,dz,$$

10.53 forts. 2

och vi får att

$$\oint_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S \operatorname{rot}\bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_{y^2+z^2\le 1} dy\,dz = \operatorname{Area}(S) = \pi.$$

9.34 forts. 2

Uttryckt i x och y lyder detta

$$g(x,y) = f(x^2+y^2).$$

Svaret är alltså om $g(x,y) = f(x^2+y^2)$, där f är en deriverbar funktion, så är differentialformen exakt. Ett exempel är $f(t) = t$, dvs $g(x,y) = x^2+y^2$.

10.63

Betrakta vektorfältet

$$\bar{u} = (y^2+2xz-yz^3,\ z^2+axy-xz^3,\ 2yz+x^2+bxyz^2)$$

där a och b är konstanter.

a) Bestäm a och b så att fältet $\bar{u}$ blir konservativt.

b) Bestäm för dessa värden på a och b en potential till $\bar{u}$.

---

a) Vektorfältet $\bar{u}$ är definierat i hela $\mathbb{R}^3$ som är en enkelt sammanhängande mängd och då är det konservativt om jakobianen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y^2+2xz-yz^3) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2+2xz-yz^3) & \frac{\partial}{\partial z}(y^2+2xz-yz^3) \\ \frac{\partial}{\partial x}(z^2+axy-xz^3) & \frac{\partial}{\partial y}(z^2+axy-xz^3) & \frac{\partial}{\partial z}(z^2+axy-xz^3) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2yz+x^2+bxyz^2) & \frac{\partial}{\partial y}(2yz+x^2+bxyz^2) & \frac{\partial}{\partial z}(2yz+x^2+bxyz^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2z & 2y-z^3 & 2x-3yz^2 \\ ay-z^3 & ax & 2z-3xz^2 \\ 2x+byz^2 & 2z+bxz^2 & 2y+2bxyz \end{pmatrix}$$

är symmetrisk, dvs

$$ay - z^3 = 2y - z^3,$$
$$2x + byz^2 = 2x - 3yz^2,$$
$$2z + bxz^2 = 2z - 3xz^2.$$

Detta är uppfyllt när $a = 2$ och $b = -3$.

10.63 forts.

b) Vi söker en funktion $U(x,y,z)$ som uppfyller

$$\nabla U = \bar{u},$$

vilket i komponentform lyder

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + 2xz - yz^3,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = z^2 + 2xy - xz^3,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2yz + x^2 - 3xyz^2.$$

Integrerar vi upp dessa samband får vi

$$U = xy^2 + x^2z - xyz^3 + C_1(y,z),$$

$$U = yz^2 + xy^2 - xyz^3 + C_2(x,z),$$

$$U = yz^2 + x^2z - xyz^3 + C_3(x,y),$$

och detta ger att

$$U = xy^2 + x^2z - xyz^3 + yz^2 + C,$$

där C är en konstant.

10.64

Låt $\bar{u}$ vara vektorfältet

$$\bar{u} = (\sin z,\ x\sin z,\ x\cos z).$$

Bestäm alla funktioner $g(y)$, sådana att $g(y)\bar{u}$ blir ett potentialfält.

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att vektorfältet har en potential i $\mathbb{R}^3$, dvs är konservativt där, är att jakobianen

$$\frac{\partial(g(y)u)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g(y)\sin z) & \frac{\partial}{\partial y}(g(y)\sin z) & \frac{\partial}{\partial z}(g(y)\sin z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(g(y)x\sin z) & \frac{\partial}{\partial y}(g(y)x\sin z) & \frac{\partial}{\partial z}(g(y)x\sin z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(g(y)x\cos z) & \frac{\partial}{\partial y}(g(y)x\cos z) & \frac{\partial}{\partial z}(g(y)x\cos z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & g'(y)\sin z & g(y)\cos z \\ g(y)\sin z & g'(y)x\sin z & g(y)x\cos z \\ g(y)\cos z & g'(y)x\cos z & -g(y)x\sin z \end{pmatrix}$$

är symmetrisk. När vi inspekterar matrisen ser vi att detta kräver att

$$g'(y) = g(y).$$

Denna linjära differentialekvation har lösningarna

$$g(y) = Ce^y,$$

där C är en konstant.