Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 3, 19 Jan 2017

Information

Grupptilldelning till seminarier inte klart, görs innan/under helgen.

På måndag börjar vi med derivator.

Funktioner

12.1: Funktioner av flera variabler

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(n \geq 1)$ ”vanlig funktion”.

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(n \geq 1, m \geq 1)$ vektorvärd funktion.

Nivåkurvor (Level Curves)

Given $z = f(x, y)$

En nivåkurva till en funktion är en kurva som uppstår då vi projicerar ner på xy-planet skärningen mellan ytan $z = f(x, y)$ och planet $z = C$, C konstant.

Exempel

$z = f(x, y) = 1 + x^2 + y^2, \quad z = c$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = c - 1$

Exempel kring seminarieuppgift 1:4

$f(x, y) = 3(x + y)^2 + 2(x - y)^2$, hur ser nivåkurvorna $z = 1$ ut?

Variabelbyte $u = x + y, v = x - y$

$z = f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 2xy$

Exempel 2 kring seminarieuppgift 1:4

$z = x^2 + y^2 - 2xy$

Lätt om man ser $z = (x - y)^2$

Hur blir det med $z = f(x, y) = \sin((x - y)^2)$?
”Deras nivåkurvor sammanfaller inte, men ser ut på samma sätt.”

Gränsvärde och kontinuitet (boken 12.2)

I flervariabelanalys blir det lite svårare med kontinuitet eftersom det finns flera håll att komma från. Jämför envariabelanalysen där kontinuitet ges av att gränsvärdet är samma oavsett om man kommer från ”höger eller vänster”.

Definition

Vi säger att $f(x,y)$ har gränsvärdet L i punkten (a,b) om

För varje $\epsilon > 0$: $\exists\delta\ (=\delta_\epsilon) : |f(x,y) - L| < \epsilon$ då $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$

$L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Exempel $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$

givet talet ϵ hitta talet δ så att $0 < |(x,y) - (0,0)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$

$|x^2 - y^2| < \epsilon$ då $|\sqrt{(x-o)^2 + (y-0)^2}| < \delta$

lösning: $\delta^2 = \epsilon$

2) $x^2y \to 0$

3) $\sin(xy) \to 0$

4) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

saknar gränsvärde eftersom olika gränsvärden för $(x=0, y\to 0)$ och $(x=y) \to 0$

5) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

$(x=0, y\neq 0) \to g.v.0$

$(x\neq 0, y=0) \to g.v.0$

$(y=cx, c\neq 0)$

får aldrig ta x=0 eftersom vi då får y=0 och hamnar i origo där fn. ej def.

f saknar gränsvärde

Mer exempel

$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =?$

Bevisa med delta-epsilon att gv = 0

skiss: $|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0| \leq |y|$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 5 & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =?$$

g.v. = 0 oavsett konstanten vald till (0,0)

Räkneregler $f(x,y), g(x,y)$

$\lim(f\pm g) = \lim f \pm \lim g$

$\lim fg = \lim f \cdot \lim g$

$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ om $\lim g \neq 0$