Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 11, 08 Feb 2017

Information

Rekap från igår:

- Dubbelintegraler (bestämma volym under en yta/funktionsgraf $z = f(x, y)$, över ett område D) Volymen $= \int_D \int f(x, y)dA$, dA arean av ett "litet" element.
- Vi kom fram till att (vissa?) dubbelintegraler går att beräkna exakt, i så kallade enkla områden.
- "Huvuduppgiften är att komma fram till ett sådant uttryck där du kan använda envariabelanalys."

Exempel från igår

Beräkna medelavståndet från punkter i ett område D till en linje L.

$$\begin{cases} D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\} \\ L = \{(x + y) \mid x + y = 0\}, \text{ en linje} \end{cases}$$

Vi fick fram avståndsfunktionen för en punkt $(x, y) \in D$: $d(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

Arean av $D : area(D) = \frac{\pi a^2}{4}$

Vi får

$$\frac{1}{area(D)} \int_D \int \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}\right) dA$$

Alternativ: använd symmetri

$$\int_D \int x + y \; dA = 2 \int_D \int x \; dA, \qquad \text{dvs} \int_D \int x \; dA = \int_D \int y \; dA \text{ i detta fall}$$

Vi hamnar i

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} \; dx \qquad \overset{\text{variabelbyte } u=a^2-x^2}{du = -2xdx}$$

Dubbelintegraler i polära koordinater (14.4)

Polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = y/x$$

Kan vi beräkna integralen

$$I = \int_{(x^2+y^2\leq 1)}\int (1-x^2-y^2)\,dA = \int_{.}^{.} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right) dy \right) dx, \quad \text{"kanske svår"}$$

Enklare i polära koordinater

$$D = \{(r,\theta) \mid r^2 \leq 1\} = \{(r,\theta) \mid r \leq 1\} \;\Rightarrow\; I = \int_{\{r\leq 1\}}\int \left(1-r^2\right) dA$$

Vad är dA? Måste skrivas i termer av $dr, d\theta : r \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

Så vi måste hitta det nya dA i polära koordinater. Vi måste gå över till polära koordinater (från $dA = dxdy$ i kartesiska koordinater) och beräkna just areaelement där.

Vi får $dA^* = r\,dr\,d\theta$

Anmärkning: "I polära koordinater är areaelementet $dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta$"

Generellt om transformationer, avbildningar

Om

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

tar rummet uv till rummet xy, så kan vi tänka oss att byta variabler från x, y i $\int_{.}\int f(x,y)\,dA$ till u, v i en ny integral.

Boken sida 831, sats 4

Under denna transformation $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ så ändras $dx\,dy$ genom

$$dx\,dy = dA = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$\int_D\int f(x,y) \underbrace{dA}_{=dx\,dy} = \text{ genom transformation hitta ett nytt område } S = \{(u,v) \mid ...\}$$

$$= \int_S\int f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \underbrace{du\,dv}_{=dA^*}$$

Var kom jacobideterminanten ifrån? (härledning med "liknar parallellogram" vars area ges av $((x_u, y_u)\,du) \times ((x_v, y_v)\,dv)$)

Kryssprodukt av två $\mathbb{R}^2$-vektorer: sätt en tredje komponent till noll. Dvs
$((x_u, y_u, 0)\,du) \times ((x_v, y_v, 0)\,dv)$

"Glöm inte absolutbeloppet" på jacobideterminanten?

Exempel 8 sida 832-833

Arean =

$$\int_D \int dx\, dy = \int_R \int (1/3)\, du\, dv = 1/9$$