SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 7

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion Kap 12.8

1. Implicit definierade funktioner (envariabel analys)
2. Implicit definierade funktioner (flervariabel analys)
3. Jacobi determinant
4. implicita funktionsatsen

Se filmen:
Envar: https://www.youtube.com/watch?v=l1EIzNN8slU
Flervar: https://www.youtube.com/watch?v=TSE9-4Wo-kI

Implicita funktioner

Implicita funktioner: Envariabelanalys

Kom ihåg avsnitt 2.9 om implicit derivering i envariabelanalys

$$F(x, y(x)) = 0$$

dvs y ges implicit i termer av x, och genom $F = 0$.

Exempel 1: $yx^2 - 1 = 0$ då $x > 0$. Detta kan skrivas som $y = 1/x^2$ då $x > 0$. Kan x skrivas i termer av y?

Begrepp: Implicit,   Explicit

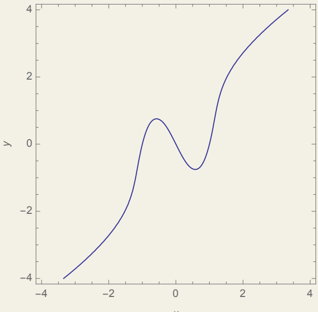
Implicita funktioner

Implicita funktioner: Envariabelanalys

En mer komplicerat exempel ges av

$$F(x, y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0,$$

som inte går att skriva explicit som $y = f(x)$. Fast bilden visar tydligt att y är en funktion av x.



Implicita funktioner

Implicita funktioner: Envariabelanalys

En central del i (differential) Calculus är linjär approximation. Eftersom linjära funktioner är enklast att jobba med, och de approximerar en deriverbar funktion nära en given punkt.

Därför, studiet av givna funktionsgrafer kan utvidgas till mer komplicerade 'funktioner' (eller samband mellan (x, y)) även om y kan inte uttryckligen skrivs som $y = f(x)$.

Huvudvikten i det som ska komma ligger i att kunna visa att givna uttryck i (x, y) (eller (x, y, z) etc) kan lokalt approximeras med linjära uttryck, dvs linjär approximation.

Vi ska lära oss när ch hur detta sker.

Implicita funktioner: Envariabelanalys

Teori (Envariabel Analys)

Hur kan man konstatera att y är en funktion av x, nära en punkt $(x, y) = (a, b)$, då man vet att $F(x, y) = 0$?
Låt oss säga att detta är fallet och att F är deriverbar i x och y. Då har vi

$$0 = \frac{dF(x, y)}{dx} = F_x + y' F_y, \qquad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Detta innebär att om y kan lösas ut i termer av x, i fallet där F är deriverbar i båda variabler, får vi att

$$y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad \text{nära } (x, y) = (a, b),$$

förutsatt att $F_y(a, b) \neq 0$.

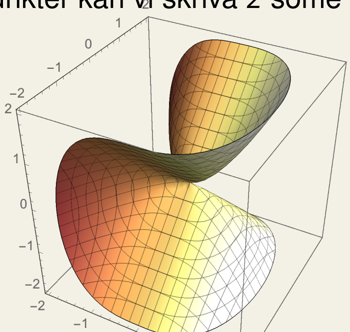
Implicita funktioner: Flervariabelanalys

Fallet: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

En ekvation med flera variabler: $F(x, y, z) = 0$, eller allmänt $F(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.

Exempel 2 : $\qquad x^3 + y^2 - z^2 = 0.$

Nära vilka punkter kan vi skriva z some en funktion av (x, y)?



Implicita funktioner: Flervariabelanalys

Fallet: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Vi ser från bilden ovan att z kan skrivas sm en funktion av (x, y) i de punkter där det finns ett tangentplan som inte är vertikalt mot xy-planet. Dvs z_x, och z_y existerar i dessa punkter.

Att tangentplanet är vertikalt betyder det att nivåytran $F(x, y, z) = 0$ har en normal vektor som är parallell med xy-plane.

Vi vet också från tidigare att normalvektorn till ytan ges av $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$. Att denna vektor inte är parallell med xy-planet i en punkt (a, b, c) betyder det att $F_z(a, b, c) \neq 0$.

Implicita funktioner: Flervariabelanalys

Fallet: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Ovan ger oss att för

$$F(x, y, z) = x^3 + y^2 - z^2 = 0,$$

kan vi lösa ut z i termer av (x, y) variabler i de punkter där $F_z \neq 0$. Dvs

$$F_z = -2z \neq 0 \qquad \to \qquad z \neq 0.$$

Alltså svar på Exempel 2, är att vi kan överallt, förutom de punkter $(x, y, 0)$ som ligger på ytan, dvs

$$z = 0, \qquad x^3 + y^2 = 0,$$

eller

$$z = 0, \qquad x = (-y^2)^{1/3} = -y^{2/3}.$$

Implicita funktioner

Quiz (här): $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Given ekvationen ekvationen $x^2 + y^2 + z^3 + xyz - 5 = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

1. Visa att ekvationen implicit definierar z som funktion av x och y nära punkten $(1, 2, 0)$.

2. Ange den linjära approximationen till funktionen $z = z(x, y)$ i närheten av punkten. Dvs bestäm

$$z = a(x - 1) + b(y - 2)$$

   där $a = z_x(1, 2, 0)$, $b = z_y(1, 2, 0)$.

3. Bestäm alla punkter (x, y, z) där z kan definieras som en funktion av (x, y).

Implicita funktioner: Flervariabelanalys

Fallet: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (mer allmänt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Ekvationssystem med flera variabler: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, där $\mathbf{F} = (F_1, \cdots, F_m)$.

Exempel 3 :
$$\begin{cases} F(x,y,z) = xyz - 1 = 0 \\ G(x,y,z) = x^2 + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Visa att detta implicit definierar x och y som funktioner av z nära punkten $(2, 1, -1)$ och beräkna $x_z(1)$, $y_z(1)$.
Derivera varje ekvation m.a.p. z och se om du kan lösa ut x_z och y_z. Vi har

$$0 = \partial_z F = x_z yz + xy_z z + xy$$

$$0 = \partial_z G = 2xx_z + y_z - 2$$

Implicita funktioner: Flervariabelanalys

Fallet: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (mer allmänt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

I punkten $(2, 1, -1)$ har vi

$$0 = \partial_z F = x_z + y_z + 1$$

$$0 = \partial_z G = 2x_z + y_z - 2$$

som löses och vi får $x_z(1) = 3$, $y_z(1) = -4$.

Se flera exempel i boken, speciellt Exempel 8. samt Sida 732, om Jacobi determinant.
Läs Implicita funktionssatsen på sidan 733.

Ett extra exempel: Inversa funktioner

Visa att funktionen

$$\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + \ln y)$$

är inverterbar i någon omgivning av punkten $(1, 1)$.

Ett extra exempel: Inversa funktioner

Visa att funktionen

$$\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + \ln y)$$

är inverterbar i någon omgivning av punkten $(1, 1)$.
Sätt $u = xy$, $v = x + \ln y$. Då gäller det att för $(x, y) = (1, 1)$ vi har $u = 1$, $v = 1$. Att $\mathbf{f}$ är inverterbar betyder det att vi kan lösa ut x, y i termer av u, v. Sätt

$$F = xy - u = 0, \qquad G = -x + \ln y - v = 0.$$

Vi har då att i punkten $(x, y, u, v) = (1, 2, 2, \ln 2)$

$$F_x = y, \qquad F_y = x, \qquad G_x = -1, \qquad G_y = 1/y.$$

Ett extra exempel: Inversa funktioner

I punkten $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ blir detta

$$F_x = 1, \qquad F_y = 1, \qquad G_x = -1, \qquad G_y = 1.$$

Vi använder oss av det så-kallade jacobi-determinanten (se sidan 732)

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = det \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0.$$

Enligt Implicita funktionssatsen (se även remark sidan 735) har vi att (x, y) kan skrivas som funktioner av (u, v) nära den aktuella punkten. Dvs att **f** har en inverse.