SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 12

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion: Trippelintegraler, Avsnitt 14.5-14.7

- Definition
- Upprepad enkelintegration
- Variabelsubstitution
- Tillämpningar (14.7): Ytintegraler,[1] Masscentrum, Tröghetsmoment

[1] Vi återkommer till ytintegraler senare i avsnitt 15.5, Läs gärna Ex. 1, sid 849.

Trippelintegraler

Trippelintegraler

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV \quad \text{eller} \quad \iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz$$

kan definieras med hjälp av gränsvärden av Riemannsummor, typ

$$\sum f(x_j^*, y_k^*, z_\ell^*)\,\Delta x_j \Delta y_k \Delta z_\ell$$

på samma sätt som enkelintegraler och dubbelintegraler.

Trippelintegraler

Tolkning av trippelintegraler

1) För f=1 tolkas detta som volymen av kroppen

$$\iiint_K 1\,dV = \text{Volymen av } K$$

2) Massan hos en kropp K med täthet $\rho(x, y, z)$ ges av

$$\iiint_K \rho(x, y, z)\,dV = \text{Massan av } K.$$

3) Masscentrum:

$$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{m}\left(\iiint_K x\rho\,dV, \iiint_K y\rho\,dV, \iiint_K z\rho\,dV\right)$$

är masscentrum för K om m är massan och ρ densiteten.

Trippelintegraler

Beräkning av trippelintegraler: Enkla fallet

Om K ges av $1 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq 3$ så gäller att

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dy \int_1^2 f(x,y,z)\,dx$$

Exempel 1: Beräkna integralen ovan då $f(x,y,z) = x + yz$.

Trippelintegraler

Variabelsubstitution i trippelintegraler

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_L g(u,v,w) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

där avbildningen

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w)$$

är är en C^1 bijektion mellan L och K och

$$g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

Variabelsubstitution med cylindriska koordinater

I cylindriska koordinater,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

blir volymselementet

$$dV = dxdydz = r\,drd\theta dz$$

Testa att få fram det

Trippelintegraler

Variabelsubstitution med sfäriska koordinater

I sfäriska koordinater,

$$x = R \sin\phi \cos\theta, \quad y = R \sin\phi \sin\theta, \quad z = R \cos\phi$$

blir volymselementet

$$dV = dxdydz = R^2 \sin\phi \, dR d\phi d\theta$$

Testa att få fram det

Trippelintegraler

Quiz (här):

Beräkna

$$\iiint_K xy\,dV$$

om K ges av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

Trippelintegraler

Quiz (här):

Beräkna

$$\iiint_K xy\, dV$$

om K ges av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

Svar: 3

Exempel 3.

Beräkna volymen av den kropp K som ligger över paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och under planet $z = 3 - 2x$.

Trippelintegraler

Exempel 3.

Beräkna volymen av den kropp K som ligger över paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och under planet $z = 3 - 2x$.

Lösning: Vi behöver gränserna för integralen. Vi vet att z varierar mellan ytorna

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2x$$

och på xy-planet (dvs då $z = 0$) har vi ett område D som består av alla punkter (x, y) sådana att $x^2 + y^2 \leq 3 - 2x$ som ger (med kvadratkomplettering)

$$x^2 + y^2 \leq 3 - 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x + y^2 \leq 3 \quad \rightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 \leq 4$$

Exempel 3: Fortsättning

Integralen blir då

$$\iiint_K 1\, dV = \iint_D \left(\int_{3-2x}^{x^2+y^2} 1\, dz \right) dA$$

där

$$D = \left\{ (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \right\} \quad \text{skivan med radie 2, centrum i } (-1, 0)$$

Vi får då att

$$\iiint_K 1\, dV = \iint_D \left[(x^2+y^2) - (3-2x) \right] dA = \iint_D \left[(x+1)^2 + y^2 - 4 \right] dA$$

Inför polära koordinater och beräkna dubbelintegralen.

Trippelintegraler

Exempel 3: Fortsättning

$x + 1 = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dA = rdrd\theta$

$$\iint_D 1 \; dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 [r^2 - 4] rdrd\theta = 8\pi$$

Quiz (här):

Beräkna

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

om K är cylindern $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$.

Exempel 3: Fortsättning

$x + 1 = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dA = rdrd\theta$

$$\iint_D 1\ dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2 [r^2 - 4] rdrd\theta = 8\pi$$

Quiz (här):

Beräkna

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

om K är cylindern $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$.

Svar: 10π

Trippelintegraler

Minitenta

1) Beräkna

$$\iiint_K x^2\,dxdydz$$

om K är halvklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. Svar: $64\pi/15$

2) (Tenta 2015-08-20) Betrakta den homogena kropp K som ges av olikheterna

$$x^2+y^2 \leq z \leq 1.$$

För att beräkna masscentrum för K behöver man bland annat beräkna integralen

$$I_z = \iiint_K z\,dxdydz.$$

a) Hur beräknas masscentrum för K? b) Beräkna integralen I_z