

OPTIMERING PÅ KOMPAKTA OMRÅDEN.

Om för en reellvärd funktion f som är definierad på mängden D gäller följande

1. D är en KOMPAKT mängd
2. funktionen f är KONTINUERLIG på D

då antar f sitt största och sitt minsta värde (dvs funktionen har **globalt maximum** och **globalt minimum**).

För att bestämma funktionens största och minsta värde på en kompakt (dvs begränsad och sluten) mängd analyserar vi

1. eventuella stationära och singulära punkter i det inre delen av D
2. största och minsta värden på randen

och därefter väljer globalt maximum och globalt minimum.

{ Vi **behöver inte** bestämma för varje stationär, singulär punkt , intressanta randpunkter (extrempunkter på randen) , om de är lokala maximi- eller minimipunkter. Det är tillräckligt att helt enkelt jämföra och välja största / minsta värde bland funktionens värden i de punkterna }

Uppgift 1.

Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$f(x, y) = x + 2y$$

i området D som definieras av $x^2 + 2y^2 \leq 2$

Lösning:

Definitionsområdet är kompakt (begränsad och sluten), funktionen är kontinuerlig på D . Därför har (antar) funktionen största och minsta värde.

Vi undersöker 1. Det inre av D och 2. randen till D .

1a. Stationära punkter i det inre av D

Vi löser systemet:

$$f'_x = 0, f'_y = 0$$

I vårt fall $f'_x = 1$ och $f'_y = 2$ och därmed har vi ingen stationär punkt

(**1b. Singulära** punkter i det inre av D *saknas* eftersom f är deriverbar i det inre av D)

2. Randen

Randen är en ellips med ekvationen $x^2 + 2y^2 = 2$. Från den här ekvationen löser vi ut en variabel t ex x

Vi har två lösningar

$$x = \pm\sqrt{2-2y^2} \quad \text{där } -1 \leq y \leq 1 \quad (\text{för att få reella } x)$$

2a) Först undersöker vi funktionen f om $x = +\sqrt{2-2y^2}$, $-1 \leq y \leq 1$:

Vi har $f = \sqrt{2-2y^2} + 2y$, och (viktigt) $-1 \leq y \leq 1$.

Vi har fått en envariabelfunktion definierad på ett slutet intervall $-1 \leq y \leq 1$.

För kollar stationära punkter och ändpunkter :

$$f'(y) = \frac{-4y}{2\sqrt{2-2y^2}} + 2 \equiv 0 \Rightarrow \frac{-2y}{\sqrt{2-2y^2}} = -2 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2-2y^2}} = 1$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2-2y^2} \quad (\text{därmed } y \geq 0) \Rightarrow y^2 = 2-2y^2 \Rightarrow y = +\sqrt{\frac{2}{3}} = +\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{motsvarande } x = +\sqrt{2-2y^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Alltså vi har fått en punkt $P_1(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ som ligger i (det inre av) intervallet $-1 \leq y \leq 1$.

Vi beräknar funktionens värde i punkten ,

$$f(P_1) = \sqrt{6} \quad (*)$$

I intervallets ändpunkter har vi $x=0$ dvs $P_2(0,-1)$ och $P_3(0,1)$. Vi beräknar funktionens värden i de punkterna och får

$$f(P_2) = 0 + 2 \cdot (-1) = -2 \quad (**)$$

$$f(P_3) = 0 + 2 \cdot 1 = 2 \quad (***)$$

2b) Nu undersöker vi funktionen f om $x = -\sqrt{2-2y^2}$, $-1 \leq y \leq 1$:

Vi har $f = -\sqrt{2-2y^2} + 2y$, och (viktigt) $-1 \leq y \leq 1$.

För kollar stationära punkter (ändpunkter är samma som i 2a och vi har vi redan kollat dem)

$$f'(y) = \frac{4y}{2\sqrt{2-2y^2}} + 2 \equiv 0 \Rightarrow \frac{2y}{\sqrt{2-2y^2}} = -2 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2-2y^2}} = -1$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{2-2y^2} \quad (\text{därmed } y \leq 0) \Rightarrow y^2 = 2-2y^2 \Rightarrow y = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{motsvarande } x = -\sqrt{2-2y^2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Alltså har vi fått en punkt $P_4(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$ som ligger i intervallet $-1 \leq y \leq 1$.

Vi beräknar funktionens värde i punkten,

$$f(P_4) = -\sqrt{6} \quad (****).$$

Nu jämför vi värdena i punkter P_1 — P_4

$$f(P_1) = \sqrt{6}$$

$$f(P_2) = -2$$

$$f(P_3) = 2$$

$$f(P_4) = -\sqrt{6}$$

Vi ser att funktionens största värde är $\sqrt{6}$ och minsta $-\sqrt{6}$.

Svar: Funktionens största värde är $\sqrt{6}$ och minsta $-\sqrt{6}$.

=====

I ovanstående exempel beskrivs **randen** med endast **en ekvation**. I sådana fall kan det låna sig att försöka finna största och minsta värden **på randen** med hjälp av **Lagranges metod**.

Vi löser samma uppgift med hjälp av Lagranges metod.

=====

Uppgift 2.

Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$f(x, y) = x + 2y$$

i området D som definieras av $x^2 + 2y^2 \leq 2$.

Använd **Lagranges metod** för att bestämma största och minsta värden **på randen**.

Lösning:

1. Det inre av D

På samma sätt som i uppgift 1 ser vi att funktionen saknar stationära punkter eftersom

$$f'_x = 1 \text{ och } f'_y = 2.$$

2. Randen $x^2 + 2y^2 = 2$

Största och minsta värden på randen den här gången bestämmer vi med hjälp av Lagranges metod

Vi betecknar $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2$ och bildar Lagranges funktion $F = f(x, y) + \lambda g(x, y)$,

dvs

$$F = x + 2y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 2).$$

Därefter löser vi systemet

$$F'_x = 0$$

$$F'_y = 0$$

$$g = 0$$

I vårt fall har vi

$$F'_x = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$F'_y = 2 + 4\lambda y = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 2 = 0$$

Från första ekvationen har vi $\lambda = \frac{-1}{2x}$ som vi substituerar i andra ekv. och får

$$2 + 4 \cdot \frac{-1}{2x} y = 0 \Rightarrow y = x$$

Till slut substituerar vi $y = x$ i tredje ekv. och får

$$x^2 + 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Eftersom $y = x$ har vi två punkter

$$P\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ med } f(P) = \sqrt{6}$$

$$\text{och } Q\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ med } f(Q) = -\sqrt{6}.$$

$$\text{Därför är } f_{\max} = f(P) = \sqrt{6} \text{ och } f_{\min} = f(Q) = -\sqrt{6}$$

Det är uppenbart att Lagranges metod, den här gången, krävde mindre beräkningar än direkt substitutions metod som i uppgift 1.

Svar: Funktionens största värde är $\sqrt{6}$ och minsta $-\sqrt{6}$.

Uppgift 3.

Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$f(x, y) = 1 + x^2 + 4y^2$$

i området D som definieras av $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning:

1a. Det inre av D

Systemet

$$f'_x = 2x = 0$$

$$f'_y = 8y = 0$$

har en **stationär** punkt $P_1(0,0)$ med $f(P_1) = 1$

(**1b. Singulära** punkter i det inre av D *saknas* eftersom f är deriverbar i det inre av D)

2. Randen $x^2 + y^2 = 1$

Största och minsta värden på randen den här gången bestämmer vi med hjälp av Lagranges metod:

Vi betecknar $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ och bildar Lagranges funktion $F = f(x, y) + \lambda g(x, y)$,

alltså

$$F = 1 + x^2 + 4y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Därefter löser vi systemet

$$F'_x = 0$$

$$F'_y = 0$$

$$g = 0$$

I vårt fall har vi

$$F'_x = 2x + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(1 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ eller } \lambda = -1\}$$

$$F'_y = 8y + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2y(4 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \{y = 0 \text{ eller } \lambda = -4\}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Vi har 4 lösningar:

$$R_1(0,1), \text{ med } f(R_1) = 5$$

$$R_2(0,-1), \text{ med } f(R_2) = 5$$

$$R_3(1,0) \text{ med } f(R_3) = 2$$

$$\text{och } R_4(-1,0) \text{ med } f(R_4) = 2$$

Till slut jämför vi $f(P_1) = 1$, $f(R_1) = 5$, $f(R_2) = 5$, $f(R_3) = 2$, $f(R_4) = 2$ och ser

att funktionens största värde är 5 och minsta 1

Svar: Funktionens största värde är 5 och minsta 1.

Uppgift 4.

Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$f(x, y) = 2xy(3 - x - y) = 6xy - 2x^2y - 2xy^2$$

i (den slutna) triangeln med hörn i A(0,0), B(3,0) och C(0,3).

Lösning:

1. Stationära punkter i det inre av D (triangeln ABC)

Vi löser systemet:

$$f'_x = 0, f'_y = 0$$

Vi har

$$f'_x = 6y - 4xy - 2y^2 = 2y(3 - 2x - y) = 0$$

$$f'_y = 6x - 2x^2 - 4xy = 2x(3 - x - 2y) = 0$$

Vi faktorerar systemet och kombinerar faktorer från första ekvationen med faktorer från andra ekvationen

Följande fyra enkla system får vi

$$1. \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad 2. \begin{cases} y = 0 \\ 3 - x - 2y = 0 \end{cases}, \quad 3. \begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad 4. \begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ 3 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Som gör lösningar

$$(0,0), \quad (3,0), \quad (0,3), \quad \text{och} \quad (1,1).$$

Första tre är rand punkter (som vi undersöker nedan i 3. Randpunkter :) medan fjärde punkt $S(1,1)$ ligger i det inre delen av D .

Vi beräknar $f(S) = 2$ och jämför detta värde, i slutet av undersökningen, med andra tänkbara största/ minsta värden.

2. Singulära punkter i det inre saknas. (Funktionen är deriverbar i D och har därmed ingen singulär punkt)

3. Randpunkter :

Vi undersöker funktionens värden på längs AB , BC och AC .

För att inte glömma hörnpunkter, beräknar vi först värdena i A , B och C

$$f(A) = 0, \quad f(B) = 0, \quad f(C) = 0.$$

Vi undersöker sträckan AB som har ekvationen $y = 0$, $x = t$ där $0 \leq t \leq 3$,

eller ännu enklare $y = 0$, $x = x$ där x varierar mellan 0 och 3 dvs $0 \leq x \leq 3$,

Därmed blir $f = 0$ för alla punkter på AB

samma gäller för sträckan AC , $f = 0$ för alla punkter på AC

För sträckan BC har vi $y = -x + 3$ som vi substituerar i $f(x, y)$ och får

$$f(x, y) = 2x(3 - x)(3 - x - (3 - x)) = 0$$

Därmed blir det $f = 0$ för alla punkter på BC

Om vi jämför värdena på randen och i det inre ser vi att

funktionens **största värde** är 2 och **minsta värde** är 0.

Svar. Funktionen **största värde** är 2 och **minsta värde** är 0.