Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 7, 31 Jan 2017

Recap förra veckan

Gränsvärden, deriverbarhet ($lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$), differentierbarhet (existerar tangentplan)·

Kedjeregeln

Jacobianen, jacobimatrisen $D\bar{f}$

Översikt denna vecka

- Implicit derivering $f(x,y)=0$
- Närmaste polynom (av grad m) till en funktionsgraf $p_m \approx f$ nära en punkt.
- Extrempunkter (max/min), kritiska punkter ($\nabla f = 0$)
- Bestämma lokala max/min, Hessianen (andraderivatorna) hjälper kvalificera max vs. min.
- Lagrange multiplikatormetod - maximera eller minimera $z = f(x,y)$ då $g(x,y) = 0$, genom $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ i max/minpunkten.

Implicit derivering

1-var

Om vi ska skriva $y = y(x)$ då y ges i relationen $f(x,y) = 0$,
t.ex $e^x \cos(xy) + 2\sin(y) = 0$, kan inte göra explicit i x eller y.

Vi är intresserade av $y'(p_0)$ för en punkt $p_0 = (x_0, y_0)$, hur kan vi hitta $y'(p_0)$?

Om $\nabla f = (a, 0)$, dvs. de punkter där $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ har vi ingen chans till en graf av typen $y = y(x)$

Vi ser att y' kan fås då $\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0 = f_1 + f_2 * y' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{-f_1}{f_2} \quad f_2 \neq 0$

Exempel

I vilka punkter (x,y) i planet kan $z = z(x,y)$ då $f(x,y,z) = 0$? Bestäm z_x och z_y i dessa punkter (derivator).
(i vilka punkter kan z skrivas som en funktion av x och y)
$f(x,y,z) = \sin(zx+y) - x = 0$

$$z_x = \frac{-f_1}{f_3} = -\frac{((\cos(zx+y))z - 1)}{(\cos(zx+y))x - 0}$$

I de punkter $(x,y,z) : (\cos(zx+y))x \neq 0$ så existerar $z = z(x,y)$.

System av ekvationer

$$\begin{cases} f(x,y,z,w) = 0 \\ g(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$$

Där en del variabler beror på andra/övriga.

Exempel

$$\begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases}$$

Eller (var uppmärksam på vilka variabler som gäller):

$$\begin{cases} y = y(x,z) \\ w = w(x,z) \end{cases}$$

Vi använder en beteckning $(\frac{\partial x}{\partial z})_w$ - detta innebär att $x = x(z,w)$ och $y = y(z,w)$. dvs. när vi deriverar m.a.p. z så är w konstant m.a.p. z, men inte y.

Exempel

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \qquad x = x(y,z) \qquad w = w(y,z)$$

Exempel

Ett tredje fall: hur tolkas följande?

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \qquad w = w(x,y) \qquad z = z(x,y)$$

Exempel:

Bestäm $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ då $\begin{cases} f(x,y,z,w) = 0 \\ g(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$

Detta innebär $\begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases}$

Derivera $f = 0, g = 0$

$0 = f_1 x_z + f_2 y_z + f_3 z_z + f_4 w_z$ (derivatan av $f = 0$ med avseende på z)
$\Rightarrow 0 = f_1 x_z + f_2 y_z + f_3$

På samma sätt $\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \Rightarrow 0 = g_1 x_z + g_2 y_z + g_3$

Lösning:

$$(x_z)_w = \frac{-f_3 g_2 - f_2 g_3}{f_1 g_2 - f_2 g_1}$$

Så om $f_1 g_2 - f_2 g_1 \neq 0$ finns x_z och $x = x(w,z)$ etc.

Exempel (boken s. 729)

$$\begin{cases} u = x^2 + xy - y^2 \\ v = 2xy + y^2 \end{cases} \quad \text{Bestäm a) } (x_u)_v \text{ och b) } (x_u)_y \text{ i } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

a) Derivera med avseende på u och behåll v konstant.

$$\frac{\partial}{\partial u} : \begin{cases} 1 = 2x \cdot x_u + (x_u y + x y_u) - 2y \cdot y_u \\ 0 = 2(x_u y + x y_u) + 2y \cdot y_u \end{cases}$$

Om $x = 2$ och $y = -1$ får vi $(x_u)_v = 1/7$

Gör b) själva hemma.

Jacobideterminanten

Definition

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

Exempel

Låt $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ och $g(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$. Detta kan ge en representation av y_1, y_2 som funktioner av (x_1, x_2)

dvs. $\begin{cases} y_1 = h_1(x_1, x_2) \\ y_2 = h_2(x_1, x_2) \end{cases}$ nära $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

Villkoret för detta är: jacobideterminanten nollskild.

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \neq 0$$

Vi får samtidigt:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x_1,y_2)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)}}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,x_2)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)}}$$