

Skillcheck Flervariabel

Erik Raab

February 22, 2023

Facit innehåller de sökta svaren, men på vissa frågor kan man svara annorlunda. Tanken är inte att du ska memorera svaren här, i vissa har jag skrivit ned längre förklaringar och bevis, i andra lämnas bara svar. Tänk igenom ditt svar, och om det inte matchar facit och du är osäker på om det stämmer kan du alltid maila mig.

Innehåll

| | |
|--|----|
| 1 Krimskrams | 3 |
| 2 Topologi | 4 |
| 3 Koordinatsystem, geometri med kvadratiska former och parametrisering | 5 |
| 4 Funktioner, gränsvärden och kontinuitet | 11 |
| 5 Partiella derivator, differentierbarhet och linjärisering | 12 |
| 6 Gradient och riktningsderivata | 15 |
| 7 Nivåtor, grafer och tangentplan | 16 |
| 8 Optimering, Taylorpolynom och Lagranges metod | 17 |
| 9 Vektorfält, Jacobimatriser, konservativa vektorfält | 19 |
| 10 Implicita funktionssatsen | 21 |
| 11 Linjeintegraler | 23 |
| 12 Dubbel- och trippelintegraler, generella integraler | 27 |
| 13 Integraler med vektorfält, divergens och rotation, generaliserade Stokes sats | 32 |

1 Krimskrams

1. Ett påstående P sägs vara tillräckligt för ett annat påstående Q om P medför Q , alltså om det är så att när P är sant så är även Q sant. P sägs vara nödvändigt om Q medför P . Om P är nödvändigt och tillräckligt är P och Q ekvivalenta påståenden.
2. En vektor är ett element i ett vektorrum, men vi tänker oftast i den här kursen på vektorer som ordnade n -tuplar av reella tal, alltså som objekt i \mathbb{R}^n . Ett exempel är $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$.
3. I denna kurs avses med skalärer tal i \mathbb{R} .
4. Att $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betyder att \mathbf{x} är ett objekt i mängden \mathbb{R}^n , alltså en ordnad n -tupel av reella tal.
5. Att $M \subseteq \mathbb{R}^n$ betyder att M är en mängd bestående endast av objekt som alla ligger i \mathbb{R}^n .
6. Punkt-normalformen för ett plan i \mathbb{R}^3 är $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ där \mathbf{n} är en normalvektor till planet, \mathbf{x} är en godtycklig punkt i planet, och \mathbf{x}_0 är något given punkt i planet.
7. Ett uttryck är en samling symboler. $f(x)$ är ett uttryck, men även $f(x) = 3$ är ett uttryck, specifikt ett uttryck som också är en ekvation.
8. En ekvation är ett uttryck som anger ett samband mellan två objekt, t.ex. $x \leq 3$ är en olikhetsekvation, eller $f(x) = 3$ är en likhetsekvation.

Sidospår: Några av er har när ni löser ekvationer för vana att ersätta likhetstecken " $=$ " med ekvivalenspilar " \Leftrightarrow ", vilket blir smärtabsurt. Antag att vi försöker bestämma kritiska punkter till $f(x) = x^2 + 3x$ och börjar skriva

$$f'(x) \Leftrightarrow 2x + 3$$

Detta skulle alltså utläsas som "Påståendet $f'(x)$ är ekvivalent med påståendet $2x + 3$!" Va?? Varken $f'(x)$ eller $2x + 3$ är påståenden (ekvationer) utan är ju uttryck och vad ni försöker säga är att ekvationen $f'(x) = 2x + 3$ är uppfylld, alltså bör ni göra ett påstående. Detta kan och har gett avdrag för att det är så extremt förvirrat.

9. En funktion kan ses som en regel som till varje godtagbart input-värde har exakt ett output-värde.

Överkurs, endast för intresserad: Tekniskt sett kan vi säga att en funktion $f : A \rightarrow B$ definieras av dess graf: f är en samling av punkter $(a, b) \in \text{graf}(f) \subseteq A \times B$ som uppfyller att om (a, b) och (a, c) tillhör mängden $\text{graf}(f)$ så är $b = c$. Alla sådana mängder definierar funktioner, och alla funktioner kan betraktas som sådana mängder.

10. En bijektiv funktion är en funktion för vilken $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ har en och endast en lösning \mathbf{x} i f s definitionsmängd för varje element \mathbf{y} i f s bildmängd. Paradexemplet är identitetsavbildningen på en godtycklig mängd X som definieras av $id : X \rightarrow X$ och $id(x) = x$.

2 Topologi

Topologi är studiet av kontinuerliga funktioner och ytors övergripande form. T.ex. kan man med topologi-metoder undersöka hur många hålrum av olika slag som en yta eller volym innehåller. *Detta är inte centralt* för kursen men dyker upp lite här och var. De absolut viktigaste begreppen för vår kurs nämner vi här.

1. Vi har två randbegrepp. Det första verkar framförallt vara av intresse i Calculus, medans det senare är allmänt användbart i slutet av denna kurs. För att skilja dem åt i detta dokument har jag gett dem namn, men dessa är ej standardnamn så ni behöver ej lägga dem på minnet så länge ni förstår skillnaden.

- ”Delmängdsranden”. Om $M \subseteq \mathbb{R}^n$ säger vi att $\mathbf{x} \in M$ ligger på ”delmängdsranden” om varje öppen boll som innesluter \mathbf{x} både innehåller en del av M och en del utanför M . I fallet med cirkelskivan ser vi ju att varje punkt på skivan måste vara en del av denna rand, ty en öppen boll runt en godtycklig punkt på cirkelskivan sticker ju ut en liten bit längs z -axeln, så den innehåller ju garanterat en liten bit utanför cirkelskivan, men också punkter på skivan.
- ”Inneboende randen”. Denna är mycket svår att ge en definition av utan att komplisera onödigt mycket för er, men är också den definition av rand som vi använder för integralsatserna, och är därför viktig. Ett sätt att tänka på denna för släta kroppar är att inneboende randen består av de punkter där en riktning längs tangentlinjen/tangentplanet/tangentvolymen för linjen/ytan/volymen leder *vinkelrätt* ut ur linjen/ytan/volymen och inte längs med ytan.

De ytor/volymer vi studerar definieras de ofta som kvadratiska former, och för dessa kan vi säga att inneboende randen ges av ”likhetstricket”. Exempelvis har vi att om $x^2 + y^2 \leq 1$ definierar en volym (detta blir ju en cylinder) och dess rand ges av $x^2 + y^2 = 1$. Motsvarande trick kan användas på de andra ytorna och volymer som definieras av kvadratiska former.

För cirkelskivan blir denna inneboende rand alltså $x^2 + y^2 = 1$.

2. En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är sluten om den innehåller alla sina (delmängds-)randpunkter. Notera att vi också använder ordet sluten när vi betraktar integraler för att referera till sådana kompakta kurvor som har samma

start och slutpunkt, eller mer generellt används det om kompakta kurvor/ytor vars ”inneboende” rand är tomma mängden. Detta är olyckligt språkbruk, och begreppen är alltså inte definitionsmässigt samma.

3. Att en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen betyder att den inte innehåller några av sina (delmängds-)randpunkter.
4. Tomma mängden och \mathbb{R}^n är både öppna och slutna som delmängder till \mathbb{R}^n . Dessa är de enda två.
5. Otaliga. T.ex. är linjsegmentet $[0, 1)$ varken öppet eller slutet i \mathbb{R} .
6. En sammanhängande mängd avser i denna kurs en mängd för vilken det finns en väg som förbinder varje par av punkter i mängden, det vill säga för varje par (a, b) i mängden finns en kontinuerlig avbildning f från $[0, 1]$ som uppfyller att $f(0) = a$ och $f(1) = b$.
7. En enkelt sammanhängande mängd är en sammanhängande mängd i vilken varje ”loop” (kurva som har samma start som slutpunkt) går att kontinuerligt krympa till en punkt utan att lämna mängden.
8. En stjärnformad mängd är en mängd i vilken det existerar en punkt M från vilken vi kan dra en rät linje till varje annan punkt i M utan att den räta linjen lämnar M . Dessa är automatiskt enkelt sammanhängade.
9. En kompakt mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är en sluten och begränsad mängd. Begränsad betyder att mängden kan inneslutas i sin helhet i en boll av ändlig radie.

3 Koordinatsystem, geometri med kvadratiska former och parametrisering

1. Med ett koordinatsystem för \mathbb{R}^n (eller någon delmängd till \mathbb{R}^n) avser vi egentligen en avbildning som för varje vektor \mathbf{x} i \mathbb{R}^n ger oss en unik koordinatvektor $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$. s_1 till s_n kallas då vektor x koordinater med avseende på detta koordinatsystem. Oftast i denna kurs specificeras dessa genom att säga hur \mathbf{x} beror av sina koordinater, t.ex. har vi polära koordinater för $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ att

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

och (r, θ) är alltså koordinaterna för (x, y) . Att koordinatvektorn ska vara unik är inte alltid något vi är noga med - om du undrar varför, fråga mig på en lektion! Kan du se vilka punkter (x, y) i \mathbb{R}^2 som ej har unika koordinater (r, θ) ?

2. Exempel på ett...

- (a) ...ett cylindriskt koordinatsystem för \mathbb{R}^3 ges av att låta för $r \in [0, \infty)$, samt $\theta \in [0, 2\pi)$ och $s \in \mathbb{R}$

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = s$$

Flera andra finns, i detta fall är det ett cylindriskt koordinatsystem runt z -axeln, men vi kan välja vilken axel som helst.

- (b) ...ett polärt koordinatsystem för \mathbb{R}^2 ges av att låta för $r \in [0, \infty)$, samt $\theta \in [0, 2\pi)$

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

- (c) ...ett sfäriskt koordinatsystem för \mathbb{R}^3 ges av att låta för $R \in [0, \infty)$, samt $\theta \in [0, 2\pi)$ och $\phi \in [0, \pi]$

$$x = R \cos(\theta) \sin(\phi) \quad y = R \sin(\theta) \sin(\phi) \quad z = R \cos(\phi)$$

- (d) ...ett koordinatsystem för \mathbb{R}^3 som ej är av ovanstående typ är t.ex.

$$x = u + v + 3w \quad y = v - w \quad z = 3w$$

Detta motsvarar koordinaterna efter ett basbyte från lin. alg.:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{u} = A\mathbf{u}$$

som så klart ger en unik koordinatvektor \mathbf{u} eftersom $\det(A) = 3 \neq 0$.

3. Kvadratiska former. Detta facit läses med fördel med Wolfram Alpha eller Geogebra nära till hands så att du kan plotta ytorna som tas upp, e.g. $x^2 - z^2 = 1$.

- (a) Om $Q(x, y, z)$ är en kvadratisk form går betyder det att $Q(x, y, z) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ för någon symmetrisk matris A , alternativt så kan vi säga att Q är ett homogen kvadratiskt polynom. Principalaxlarna är de axlar som är parallella med någon av vektorerna i en av As ON-baser av egenvektorer. Om i denna bas $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$ har koordinatvektorn $\mathbf{u} = (u, v, w)^t$ så följer att $Q(x, y, z) = \tilde{Q}(u, v, w) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$, där λ_i är As egenvärden.

Med Q s signatur avses tecknet på As egenvärden, alltså om A t.ex. har egenvärdena $2, 0, -3$ så är signaturen $(+, 0, -)$.

- (b) Låt Q vara en kvadratisk form, och antag att vi bytt koordinater så att det nya koordinatsystemet följer principalaxlarna så att

$$\tilde{Q}(u, v, w) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$$

Då kan vi göra ett sista koordinatbyte för att förenkla formen på \tilde{Q} , nämligen genom att krympa/förlänga längs koordinataxlarna: Låt $r = \sqrt{|\lambda_1|}u$, $s = \sqrt{|\lambda_2|}v$, $t = \sqrt{|\lambda_3|}w$, i vilket vi får att

$$\hat{Q}(r, s, t) = \operatorname{sgn}(\lambda_1)r^2 + \operatorname{sgn}(\lambda_2)s^2 + \operatorname{sgn}(\lambda_3)t^2$$

Detta kommer till användning i kommande uppgifter ty om t.ex. $Q(x, y, z) = 1$ beskriver en ellipsoid runt några axlar i x, y, z -koordinaterna så beskriver $\hat{Q}(r, s, t) = 1$ en sfär i r, s, t -koordinaterna.

- (c) Antag att $Q(x, y, z)$ är en kvadratisk form och att vi definierar en yta i \mathbb{R}^3 med $Q(x, y, z) = 1$ eller $Q(x, y, z) = 0$. I den bas/det koordinatsystem som följer principalaxlarna kommer vi då få en bekant yta som bestäms av signaturen. Antag därför, för enkelhets skull, att principalaxlarna följer x - y - och z -axlarna och att vi har satt Q i det jag ovan kallade enhetsformen. Då Q s signatur ges av
 - i. $(+, +, +)$ beskriver detta en ellipsoid (faktiskt en sfär på enhetsformen) om $Q = 1$ eller punkten $\mathbf{0}$ om $Q = 0$.
 - ii. $(+, +, 0)$ beskriver detta en cylinder runt z -axeln om $Q = 1$ eller linjen $x = y = 0$ om $Q = 0$.
 - iii. $(+, +, -)$ beskriver detta en enmantlad hyperboloid runt z -axeln om $Q = 1$ eller en dubbelsidig kon runt z -axeln om $Q = 0$.
 - iv. $(+, -, 0)$ beskriver detta en hyperbolisk cylinder om $Q = 1$ eller planen $x = \pm y$ om $Q = 0$.
 - v. $(-, -, +)$ beskriver detta en tvåmantlad hyperboloid runt z -axeln om $Q = 1$ eller en dubbelsidig kon runt z -axeln om $Q = 0$.
 - vi. $(0, -, -)$ beskriver detta tomma mängden om $Q = 1$ eller linjen $y = z = 0$ om $Q = 0$.
 - vii. $(-, -, -)$ beskriver detta tomma mängden om $Q = 1$ eller punkten $\mathbf{0}$ om $Q = 0$.
- (d) Antag att $Q(x, y)$ är en kvadratisk form och att vi definierar en kurva i \mathbb{R}^2 med $Q(x, y) = 1$ eller $Q(x, y) = 0$. I den bas/det koordinatsystem som följer principalaxlarna kommer vi då få en bekant kruva som bestäms av signaturen. Antag därför, för enkelhets skull, att principalaxlarna följer x - y -axlarna och att vi har satt Q i det jag ovan kallade enhetsformen. Då Q s signatur ges av
 - i. $(+, +)$ beskriver detta en ellips (faktiskt en cirkel på enhetsformen) om $Q = 1$ eller punkten $\mathbf{0}$ om $Q = 0$.
 - ii. $(+, -)$ beskriver detta hyperbler om $Q = 1$ eller linjerna $x = \pm y$ om $Q = 0$.
- (e) Antag att $Q(x, y) = z$ definierar en yta i \mathbb{R}^3 där $Q(x, y)$ är en kvadratisk form. Detta går alltså att se som en graf till den associerade kvadratiska formen i \mathbb{R}^2 . Antag därför, för enkelhets skull, att principalaxlarna följer x - och y -axlarna och att vi har satt Q i det jag ovan kallade enhetsformen. Då Q s signatur ges av

- i. $(+, +)$ beskriver denna graf en (elliptisk/sfärisk på enhetsformen) paraboloid.
 - ii. $(+, 0)$ beskriver denna graf en parabolisk cylinder.
 - iii. $(+, -)$ beskriver denna graf en hyperbolisk paraboloid.
- (f) Om vi sätter $Q(x, y, z) \leq 1$ eller $Q(x, y) \geq z$ t.ex. och sätter olikheten till att vara strikt utesluter vi ("inneboende") randen till ytorna/volymerna - ("inneboende") randen ges av "likhetstricket" - att ersätta olikheterna med likhet.

Vi kan använda detta mycket effektivt för att förstå denna fråga! Vi vet att randen till t.ex. volymen som ges av $Q(x, y, z) \leq 1$ ges av likhet alltså $Q(x, y, z) = 1$, och när vi ersätter med olikhet kommer vi alltså få alla punkter som ligger på "ena sidan" av denna yta! Men dessa ytor är ju bekanta från föregående uppgift så allt vi har att göra här är att bestämma vilken "sida" av randytan som mängden hamnar på beroende på vilken sorts olikhet vi får.

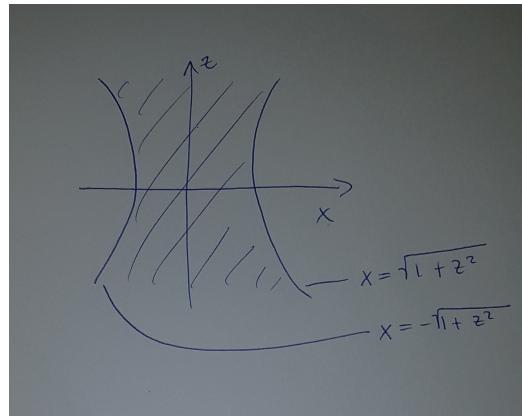
Låt oss ta något exempel. En tvåmantlad hyperboloid gavs av signaturen $(-, -, +)$ och på enhetsform motsvarar $Q = 1$ ekvationen $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, så om vi sätter, t.ex. $Q \geq 1$ så får vi att detta måste ges av $z^2 \geq 1 + x^2 + y^2$ och motsvarar punkterna "ovanför" den övre mantelytan; $z \geq \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ eller "under" den undre mantelytan; $z \leq -\sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

- (g) Det finns alldelens för många svar för att jag ska kunna ge alla, så en allmän kommentar får duga: Vi kan vara lite sluga här. Om signaturen innehåller en nolla, e.g. $(+, +, 0)$ så vet vi att ekvationen som bestämmer ytan/volymen kommer vara oberoende av z så z blir då en fri variabel. Då kan vi rita mängdens skärning med t.ex. xy -planet och vi ser att om vi "förlänger" den form vi då får ut längs med z -axeln så bildar detta formen i sin helhet! Helt oavsett signaturen är det en praktiskt metod för att förstå ytan att sätta någon av variablerna till en konstant och se vad detta beskriver!
- Om tre riktningar har samma signaturtecken, i.e. $(0, 0, 0)$ eller $(+, +, +)$ är problemet sfäriskt symmetriskt och sfäriska koordinater kommer vara praktiska.

Om vi har exakt två riktningar som har samma signaturtecken är problemet rotationssymmetriskt och vi vill antagligen introducera cylindriska koordinater med den tredje axeln som symmetriaxel. Låt oss anta att problemet är symmetriskt runt z -axeln. Vi kan rita upp hur vår mängd ser ut när vi gör en genomskärning med xz -planet - den mängd vi får då kan vi rotera runt z -axeln för att beskriva hela mängden! Detta går ju även för sfäriskt symmetriska problem, men blir inte så effektivt eftersom sfärisk symmetri är mer begränsande än rotationssymmetri runt en axel.

Om inga av riktningarna har samma signaturtecken, alltså om vi har $(+, 0, -)$, så säger ju detta något om $x^2 - z^2$. Signaturen innehåller en 0:a så genom att beskriva mängden i xz -planet och sedan ”förlänga” denna mängd ut längs y -axeln får vi vår objekt.

Låt oss betrakta volymen som ”innesluts” av en enmantlad hyperboloid, som på enhetsformen ges av ekvationen $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$, alltså $x^2 + y^2 \leq 1 + z^2$. Problemet är rotationssymmetriskt runt z -axeln, så vi kan rita mängden när vi tittar på dess genomskärning med xz -planet. Då får vi att $y = 0$ så vi har bara ekvationen $x^2 \leq 1 + z^2$. Detta uppfylls av alla punkter i xz -planet som ligger mellan kurvorna $x = \pm\sqrt{1 + z^2}$ som ritats nedan.



Rotationen av denna kropp runt z -axeln ger oss hela volymen, vilket ger oss en geometrisk bild av vad detta är. Algebraiskt är detta lättare att hantera i cylindriska koordinater. Vi har $x = r \cos(\theta)$ $y = r \sin(\theta)$ $z = s$, där $r \geq 0$, så ekvationen reduceras till $r \leq \sqrt{1 + s^2}$. Vi kan således parametrisera mängden med parametrarna r, s, θ där vi antar att $0 \leq r \leq \sqrt{1 + s^2}$ för $s \in \mathbb{R}$ och $\theta \in [0, 2\pi]$.

- (h) Det första vi bör göra är att bilda oss en geometrisk uppfattning om skärningen (alltså: RITA!). Algebra är så klart bra och fint, men i många lägen är det lättare att veta hur man algebraiskt ska bearbeta ett problem om man redan har en uppfattning om lösningens form. Man kan fråga sig ”Hur ser det ut när ett plan skär en tvåmantlad hyperboloid?” ”Har de alltid en skärning?” osv.

Om vi har fått en parametrisering av en volym eller yta given av t.ex. $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$ eller $x^2 + y^2 = 1$ så bestäms skärningen med ett plan $Ax + By + Cz = D$ oftast lättast genom att lösa ut en av x, y, z i termer av den andra, e.g. för planet genom origo med normal $(1, 0, -1)$ får vi $z = x$. Detta kan sedan sättas in i parametriseringen om z var helt oberoende av de andra alltså om vi hade signaturtecken 0 för z . Som exempel kunde vi ha volymen $Q \leq 1$

för signaturen $(+, +, 0)$. Vi får då $x^2 + y^2 \leq 1$ med parametriseringen $x = r \cos(\theta)$ $y = r \sin(\theta)$ för $r \in \mathbb{R}$ och $\theta \in [0, 2\pi]$ så på planet $z = x$ har vi att punkterna i skärningen mellan planet och ytan ges av $\mathbf{x}^t = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r \cos(\theta))$.

Annars får vi försöka se vilka lösningar som finns till det gemensamma ekvationssystemet för den kvadratiska formen och planet. I fallet med just detta plan $x = z$ och t.ex. insidan av den enmantlade hyperboloiden som vi bestämde i föregående uppgift så har vi

$$x^2 + y^2 - z^2 = y^2 \leq 1$$

så $y \in [-1, 1]$ och skärningen ges i sin helhet av alla punkter som ligger i området som ges av $\mathbf{x}(s, t) = (t, s, t)$ där $t \in \mathbb{R}$ och $s \in [-1, 1]$.

Äntligen färdig med kvadratiska former!... tillsvidare.

4. En parametrisering av en kropp $K \subseteq \mathbb{R}^n$ är en bijektiv avbildning från ett parameterrum $T \subseteq \mathbb{R}^m$, alltså $f : T \rightarrow K$ sådan att vi har en unik parameter-vektor \mathbf{u} motsvarande varje punkt $f(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ i K . I vissa lägen tillåter man att våra parametriseringar inte nödvändigtvis är har ett unikt parametervärde \mathbf{u} till en viss punkt $\mathbf{x} \in K$. Ett exempel på detta är att man ofta ser att enhetscirkeln parametriseras av $x = \cos(\theta)$ och $y = \sin(\theta)$ men $\theta \in [0, 2\pi]$. Det hade varit mera korrekt att krävt att $\theta \in [0, 2\pi)$ eftersom båda värdena 0 och 2π ger ju samma punkt. Ett annat exempel är polära koordinater sedda som parametrisering av planet \mathbb{R}^2 . Origo i \mathbb{R}^2 motsvaras av $r = 0$ och θ kan ju vara *vilket värde som helst*.

Rent praktiskt kräver vi också ofta att våra parametriseringar är (stykvis) släta. Det låter oss ta fram tangentlinjer etc.

5. Om en parametrisering av en kropp K är kontinuerlig och bijektiv kan vi utläsa dimensionen ur antalet parametrar - en kurva ges av en parameter, en yta av två, en volym av tre och så vidare.
6. En linje som parametriserats av $\mathbf{x}(t)$ har tangentvektorn $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$ i punkten $\mathbf{x}(t)$, där vi med derivatan avser komponentvis derivering, alltså

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

7. En yta i \mathbb{R}^3 som har parametriserats av $\mathbf{x}(r, s)$ har tangentvektorer i punkten $\mathbf{x}(r, s)$ givna av

$$\mathbf{t}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \quad \mathbf{t}_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}$$

och i \mathbb{R}^3 vet vi då att normalen i punkten $\mathbf{x}(r, s)$ ges av

$$\mathbf{n}(r, s) = \mathbf{t}_r \times \mathbf{t}_s$$

4 Funktioner, gränsvärden och kontinuitet

1. Antag att $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Då består gs definitionsmängd av vektorer i \mathbb{R}^m , och gs värdemängd består av vektorer i \mathbb{R}^n .
2. Definitionsmängdskonventionen säger att om ett uttryck för en funktion ges, e.g. $f(x, y) = 3x$ så antas att funktionen är definierad i de punkter där detta uttryck ger ett reellt tal, i exemplet hela \mathbb{R}^2 .
3. Beräkning av gränsvärden i \mathbb{R}^n kompliceras av det faktum att vi kan nära oss punkter på många olika sätt, inte bara från två håll som var fallet i envarje.
4. En metod som kan hjälpa oss beräkna gränsvärden av funktioner som har formen $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$ är att byta till polära koordinater, ty om $(x, y) \rightarrow (a, b)$ så motsvarar detta att $r \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}$, men $g(x, y) = f(r^2)$ så detta reduceras till en envariabelgränsvärde!
5. Summaregeln för gränsvärden säger att om båda nedanstående gränsvärden existerar

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = F \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = G$$

så gäller

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = F + G$$

6. Produktregeln för gränsvärden säger att om båda nedanstående gränsvärden existerar

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = F \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = G$$

så gäller

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = FG$$

7. Kvotregeln för gränsvärden säger att om båda nedanstående gränsvärden existerar

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = F \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = G$$

och $G \neq 0$ så gäller

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}) = F/G$$

8. En funktion f sägs vara kontinuerlig i en punkt \mathbf{a} om

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

En funktion som är kontinuerlig i alla punkter $\mathbf{x} \in M$ sägs vara kontinuerlig i M .

9. En funktion som är kontinuerlig i en punkt $\mathbf{x} \in M$ har följande egenskap: För varje avvikelese $\epsilon > 0$ kan vi specificera ett litet område (kanske till och med en boll av någon radie $\delta > 0$) runt \mathbf{x} i M så att alla funktionsvärden i detta område inte avviker med ϵ eller mer från $f(\mathbf{x})$.

10. En funktion sägs vara C^0 ("Continuously differentiable of degree 0 " eller "Continuous derivatives of degree 0 ") i en punkt om den är kontinuerlig. Den är C^0 i ett område om den är kontinuerlig i detta område. Detta är alltså exakt samma sak som kontinuitet.
11. Motexempel: Låt $f(x, y) = 1$ om $y = \pm x$ och 0 annars. Funktionen kan omöjligen vara kontinuerlig ty gränsvärdet längs $y = 0, x = t$ är 0 men funktionsvärdet i $(0, 0)$ är så klart 1.

5 Partiella derivator, differentierbarhet och linjärisering

Låt f vara en skalär funktion i detta kapitel, alltså en funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Partiella derivator ges av samma sorts beräkning som man använder för derivator av en variabel. Den partiella derivatan med avseende på den i :te komponenten i \mathbf{x} , alltså på x_i ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{h}$$

2. Om f är C^0 har f inte nödvändigtvis partiella derivator. Vi kan se detta redan i envariabel så klart $f(x) = |x|$ har ingen derivata i $x = 0$ men är C^0 .
3. Om f har partiella derivator är f inte nödvändigtvis C^0 i flervariabel, till skillnad från fallet i envariabel! Motexempel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \quad \text{alltså om } x = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Då är f inte kontinuerlig i origo (gränsvärdet för $f(x, y)$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ existerar inte - kan du se varför?), men har partiella derivator, ty längs x -och y -axeln är funktionen konstant 1 så

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

4. En funktion sägs vara C^k ("Continuously differentiable of degree k " eller "Continuous derivatives of degree k ") för något heltal k om alla dess partiella derivator upp till ordning k existerar och är kontinuerliga (i en punkt eller mängd).
5. För att en funktion $f(x, y) = f(\mathbf{x})$ ska vara C^1 i en punkt \mathbf{a} måste det gälla att

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$$

samt

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$$

6. Vi säger ibland att en funktion är glatt/slät, vilket innebär att funktionen är oändligt deriverbar, alltså C^k för alla $k \in \mathbb{N}$.
7. Definitionen av att $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar (i en punkt \mathbf{x}) är att det existerar en linjär avbildning $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ så att

$$0 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|}$$

8. Att f är differentierbar innebär att det finns ett plan (som går genom punkten $f(\mathbf{x})$ och är parallellt med bildmängden av den linjära avbildningen L ovan) som tangerar f s graf i punkten \mathbf{x} .
9. Linjäriseringen ges mer eller mindre direkt av formeln för differentierbarhet. Om $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ följer att

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{h})$$

och det visar sig att $L(\mathbf{h})$ ges i punkten \mathbf{a} av

$$L(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})\mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{a})\mathbf{h}_m = (\nabla f(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{h}$$

och faktum är att linjäriseringen blir en god approximation av funktionen då f är differentierbar. För en differentierbar funktion av två variabler har vi därmed t.ex. att

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b)$$

10. Alla differentierbara funktioner är C^0 .

Bevis:

$$0 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|}$$

så enligt produktregeln

$$0 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{h})$$

men linjära avbildningar är kontinuerliga så $L(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ och kvar har vi

$$0 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$$

men sista termen är konstant, så det kvarstår bara att

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{u})$$

då vi låter $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$.

11. Alla differentierbara funktioner har partiella derivator av ordning ett.

Bevis: Vi får fram derivatorna genom att endast betrakta gränsvärdet då vi tar ut gränsvärdet längs en riktning: Om f är differentierbar i \mathbf{x} har vi att om vi betraktar gränsvärdet då vi närmar oss noll längs $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_i$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}) - hL(\mathbf{e}_i)|}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} - L(\mathbf{e}_i) \right| \end{aligned}$$

Men $L(\mathbf{e}_i) = l_i$ är bara en konstant (kom ihåg: just nu betraktar vi \mathbf{x} som någon konstant) och om $|g(h) - k| \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$ så gäller att $g(h) \rightarrow k$ så det följer att för att gränsvärdet ovan ska bli noll måste vi ha

$$l_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}$$

vilket så klart betyder att $l_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ - högerleddet är derivatans definition.

12. Inte alla C^0 funktioner är differentierbara. Detta är ju en direkt följd av att alla differentierbara funktioner har partiella derivator, men som vi visade ovan finns ju funktioner som är C^0 utan att ha partiella derivator (vårt exempel var $f(x) = |x|$).

13. Alla C^1 funktioner är differentierbara.

Bevis: Beviset är lite grötigt, men ett ganska OK bevis finns på sidan 732 i Calculus.

14. Inte alla differentierbara funktioner är C^1 , och vi hittar motexempel redan i envariabel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

och med derivatans definition får vi

$$\frac{df}{dx}(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dock så ser vi direkt att gränsvärdet då $x \rightarrow 0$ för det första uttrycket ej existerar, så vi kan ej ha att $\frac{df}{dx}$ är kontinuerlig i $x = 0$. Däremot är f differentierbar, ty i en dimension är deriverbarhet samma sak som differentierbarhet! Alltså är f ej C^1 men differentierbar.

15. $C^\infty \Rightarrow C^{k+1} \Rightarrow C^k \Rightarrow \dots \Rightarrow C^1 \Rightarrow$ differentierbar \Rightarrow Har partiella derivator och är C^0

16. En version av kedjeregeln för funktioner av flera variabler säger att om $f(\mathbf{x})$ är differentierbar i punkten $\mathbf{y}(\mathbf{a})$ och om $y_i(\mathbf{u})$ som är komponenter i $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ har partiella derivator i \mathbf{a} så följer att för $g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{y}(\mathbf{u}))$ så gäller

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}(\mathbf{a})) \frac{\partial x_1}{\partial u_i}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}(\mathbf{a})) \frac{\partial x_n}{\partial u_i}(\mathbf{a})$$

17. Ett tillräckligt villkor för att

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x})$$

är att f är C^2 .

6 Gradient och riktningsderivata

1. Gradienten $\text{grad}(f) = \nabla f$ till en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (*i kartesiska koordinater!*) definieras av

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$$

2. Gradienten pekar i den riktning som funktionen f ökar mest!
 3. f 's linjärisering ges av

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

4. Riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}}f$ av en funktion definieras av

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

5. Riktningsderivatan kan ges av uttrycket

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{v}\|}$$

6. Riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$ anger hur mycket funktionen ändras när vi tar ett steg i riktningen $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.
 7. Antag att gradienten har en norm given av $\|\nabla f(\mathbf{x})\| = a$. Då följer att $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) \in [-a, a]$, med maximum a då $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x})$ och minimum $-a$ i motsatta riktningen.

7 Nivåytor, grafer och tangentplan

1. En nivåyta till $f(\mathbf{x})$ motsvarande värdet C är den samling punkter i \mathbb{R}^m som uppfyller $f(\mathbf{x}) = C$.
2. \mathbb{R}^m
3. Funktionen är helt bestämd av sina nivåytor, *om vi vet vilket värde* C de alla motsvarar.
4. Defintionen av en graf/grafyta till en funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ är mängden av punkter i \mathbb{R}^{m+1} som går att skriva som $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$.
5. \mathbb{R}^{m+1}
6. En funktions graf bestämmer också funktionen komplett. Idén är att om vi vill bestämma vilket värde $f(\mathbf{x})$ vi får för ett givet \mathbf{x} så är det ju bara "höjden" på grafytan.

Överkurs: Kolla på definitionen av en funktion som gavs i första delen - vad vi menar med en funktion kan definieras av grafer.

7. En funktions f s nivåytor har ∇f som normal, eftersom ytorna definieras av att funktionen ej ändrar värde längs dem. Detta verkar rimligt eftersom gradienten pekar i den riktning där f ändras som mest! Geometriskt ser vi detta genom att tänka på riktningsderivatan. Om funktionen ej ändrar värde i en riktning¹ \mathbf{v} måste vi ju ha $D_{\mathbf{v}}f = 0$ i denna riktning, men enligt vår formel för riktningsderivata $D_{\mathbf{v}}f = \mathbf{v} \cdot \nabla f / \|\mathbf{v}\|$ så blir detta bara noll då \mathbf{v} är ortogonalt mot ∇f . Alltså är gradienten vinkelrät mot de riktningar i vilka funktionen är konstant.
8. Vi får tangentplanet till nivåtan $f(\mathbf{x}) = C$ i \mathbf{a} genom att sätta $\mathbf{n} = \nabla f(\mathbf{a})$ och använda punkt-normalform, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$. Kom ihåg att C endast begränsar vilka \mathbf{a} som är möjliga eftersom vi kräver $f(\mathbf{a}) = C$, men om punkten \mathbf{a} är given är ju detta inget vi behöver kolla så vi behöver i så fall inte tänka på C över huvud taget.
9. Alla grafer är nivåytor ty om e.g. $z = f(x, y)$ så definierar vi $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ vilket betyder att grafen motsvarar nivåtan $g(x, y, z) = 0$.
10. Normalen till en graf kan vi ta fram lätt eftersom grafer är ett specialfall av nivåytor. För en funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ges normalen av $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, -1)$. Detta ger oss tangentytor och normallinjer.
11. Om z ges av linjäriseringen till $f(x, y)$ så har vi ju att

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

¹Snarare att dess linjärisering inte ändrar värde i denna riktning. Detta betyder ju att funktionens värde är mycket nära oförändrat för små steg i denna riktning.

så tangentytan till en graf $z = f(x, y)$ ges av

$$z - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

vilket så klart exakt motsvarar vad vi skrev i föregående uppgift.

8 Optimering, Taylorpolynom och Lagranges metod

Låt f vara en skalär funktion i detta kapitel, alltså en funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

1. En lokal extrempunkt avser en punkt som antingen är ett lokalt maximum eller minimum för funktionen f , alltså en punkt \mathbf{a} så att alla \mathbf{x} i någon omgivning (specifikt i alla \mathbf{x} i någon öppen boll runt \mathbf{a}) av \mathbf{a} uppfyller $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ för ett lokalt maximum, eller $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ för ett lokalt minimum.
2. En kontinuerlig funktion f antar garanterat ett största eller minsta värde på en mängd M om den är kompakt.
3. En kritisk punkt \mathbf{x} till en funktion f uppfyller att $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
4. Lokala extremum kan endast finnas i punkter där \mathbf{x} uppfyller att ...
 - ... \mathbf{x} är en kritisk punkt, $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
 - ... \mathbf{x} är en singulär punkt, $\nabla f(\mathbf{x})$ är odefinierad
 - ... \mathbf{x} är en randpunkt till M

Eftersom mängden är kompakt existerar garanterat ett största och minsta värde, och därmed vet vi att om vi undersöker alla potentiala maxima i denna lista kan vi bestämma dess största och minsta värden och var de antas.

5. Hessematrissen \mathcal{H}_f till en funktion f är den matris som har f 's andraderivator som komponenter: $(\mathcal{H}_f)_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$
6. Hessematrissen är inte nödvändigtvis symmetrisk, men blir det för alla C^2 -funktioner.
7. Taylorpolynomet av grad 2 för en C^2 -funktion f nära \mathbf{a} :

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^t \mathcal{H}_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

eller, något snyggare om vi skriver $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$:

$$T_2(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^t \mathcal{H}_f(\mathbf{a})\mathbf{h}$$

8. Antag att en C^2 -funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ har en kritisk punkt \mathbf{a} .

(a) Taylorpolynomet av grad 2 om man konstruerat runt \mathbf{a} blir förenklat:

$$T_2(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}\mathbf{h}^t \mathcal{H}_f(\mathbf{a})\mathbf{h}$$

(b) En kvadratisk form $Q(\mathbf{x})$ går att skriva som $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ för någon symmetrisk matris. Signaturen (tecknen på denna matris egenvärden) avgör om den är positivt definit, negativt definit, semi-definit eller indefinit. För att förtärliga, givet A s egenvärden säger vi att om

- alla egenvärden är positiva: Q är positivt definit, $Q(\mathbf{x}) > 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- alla egenvärden är negativa: Q är negativt definit, $Q(\mathbf{x}) < 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- inga egenvärden är negativa, något är 0: Q är positivt semi-definit, $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ för alla \mathbf{x}
- inga egenvärden är positiva, något är 0: Q är negativt semi-definit, $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ för alla \mathbf{x}
- egenvärdena har blandade tecken: Q är indefinit, $Q(\mathbf{x})$ antar både positiva och negativa värden beroende på \mathbf{x}

(c) Om Hessematrizen är positivt definit i en kritisk punkt har funktionen definitivt ett minimum i punkten ty Taylorpolynomet av ordning 2 avtar i någon omgivning av punkten:

$$T_2(\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}^t \mathcal{H}_f(\mathbf{a})\mathbf{h} > 0$$

så för värden på \mathbf{h} nära noll måste $T_2(\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{h} + \mathbf{a})$ vara större än $f(\mathbf{a})$.

Om Hessematrizen är neg. def. istället måste det gälla att \mathbf{a} är ett lokalt maximum av samma anledning. I de semi-definita fallen kan vi se att det ej går att avgöra punktens karaktär baserat på Taylorpolynomet av ordning 2 - det krävs högre ordningens polynom för att bestämma karaktären. Om Hessematrizen är indefinit är punkten en sadelpunkt, ty i någon riktning antar funktionen större värden, och i någon annan riktning avtar funktionen istället.

9. Ett bivillkor är ett krav vi ställer vid sidan av något huvudkrav. Vi diskuterar detta främst i sammanhanget av optimering, och då avser vi med bivillkor någon ekvation $g(\mathbf{x}) = 0$ som måste vara uppfylld och vi söker maxima/minima för någon funktion $f(\mathbf{x})$ givet detta bivillkor.
10. Lagranges metod (för ett bivillkor) är en metod för att söka lösningar till problemet: "Bestäm extrempunkter till $f(\mathbf{x})$ givet $g(\mathbf{x}) = 0$ " då f och g är C^1 -funktioner. Man introducerar en ny funktion $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x})$, och bestämmer dess kritiska punkter vilka uppfyller:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

Om det ursprungliga problemet har lösningar kan vi söka dessa med Lagranges metod. Vissa begränsningar finns på hur detta kan användas, se Calculus s. 788.

11. För två bivillkor $g(\mathbf{x}) = 0$ och $h(\mathbf{x}) = 0$ följer vi samma steg som ovan, men nu blir den nya funktionen $L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}) - \mu h(\mathbf{x})$ och vi får

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

12. Vi noterar att kravet på de kritiska punkterna för L ges av ett krav på att gradienterna ska vara linjära kombinationer av varandra. Att n vektorer i \mathbb{R}^n är parallella är samma sak som att matrisen med dessa som kolonner har determinant noll. I fallet med ett bivillkor får vi ett krav att

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

så om ∇f och ∇g är vektorer i \mathbb{R}^2 kan vi skriva detta som

$$\det \begin{pmatrix} | & | \\ \nabla f & \nabla g \\ | & | \end{pmatrix} = 0$$

Detta händer ju då f, g är funktioner av exakt två variabler. och för två bivillkor får vi

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

så om dessa grader är vektorer i \mathbb{R}^3 kan vi skriva detta som

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \nabla f & \nabla g & \nabla h \\ | & | & | \end{pmatrix} = 0$$

vilket alltså händer om f, g, h är funktioner av tre variabler.

9 Vektorfält, Jacobimatrider, konservativa vektorfält

1. Med vektorfält i \mathbb{R}^n avser vi funktioner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och vi tänker oss att dessa specificerar i varje punkt \mathbf{x} en vektor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ som pekar från punkten.

Överkurs, endast för intresserade: I senare kurser diskuteras vektorfält utan att definitionsmängden och bildmängden är vektorrum av samma dimension, eller att definitionsmängden ens är ett vektorrum. Ett exempel skulle kunna vara $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som definieras av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y)$. *Vi kommer i detta dokument med vektorfält alltid avse avbildningar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ för något $n \in \mathbb{N}$.*

2. Avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kan vi tolka som vektorfält, men notationen (som här inte markeras med fetstil) antyder att vi snarare än ett vektorfält vill tolka detta som att vi tar input-punkten \mathbf{x} och skickar till en annan punkt $f(\mathbf{x})$. Det är viktigt att du är med på att vi kan ha olika tolkningar för funktioner $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ beroende på sammahangen! Ett typexempel är ett koordinatbyte

$$\mathbf{x}(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t))$$

Vi skulle kunna se detta som att det ett vektorfält över någon mängd i rt -planet, men det är ju verkligen inte en vanlig tolkning.

3. Ett C^k -vektorfält är ett vektorfält \mathbf{F} vars komponenter F_i är C^k -funktioner.
4. Ett slätt/glatt vektorfält är ett vektorfält \mathbf{F} vars komponenter F_i är släta/glatta.
5. En fältlinje är en linje som följer ett vektorfälts riktning, alltså vars tangentvektorer pekar längs med (eller rakt emot) vektorfältet i varje punkt.
6. För ett vektorfält $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), F_3(\mathbf{x}))$ i \mathbb{R}^3 har vi att

$$\frac{dx}{F_1(\mathbf{x})} = \frac{dy}{F_2(\mathbf{x})} = \frac{dz}{F_3(\mathbf{x})}$$

vilket du kan tolka, om du vill, som att vi har en ekvation för en parametrerad linje $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ som måste uppfylla

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{F_1(\mathbf{x}(t))} = \frac{\frac{dy}{dt}}{F_2(\mathbf{x}(t))} = \frac{\frac{dz}{dt}}{F_3(\mathbf{x}(t))}$$

vilket alltså är någon sorts differentialekvation som måste integreras.

7. Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ så ges Jacobimatrisen av

$$(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

där $i = 1, \dots, m$ och $j = 1, \dots, n$.

8. Antag att en C^1 -avbildning \mathbf{F} är given. Då ges linjäriseringen i en punkt \mathbf{a} av

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{a}) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

och i formeln är det viktigt att man kommer ihåg att detta förutsätter att \mathbf{x} är en kolonnvektor och att första kolonnen i matrisen består av derivatorna med avseende på x_1 , andra kolonnen derivatorna med avseende på x_2 osv. Som minnesregel kan du använda att man i produkten mellan matrisen och $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ ”matchar” en x_j -derivata med en differens $(x_j - a_j)$, t.ex. för $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ så har vi då $\mathbf{x} = (x, y)$ och $\mathbf{a} = (a, b)$ att

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}(y - b)$$

9. Ett konservativt vektorfält \mathbf{F} uppfyller att $\mathbf{F} = \nabla U$ för någon skalärfunktion U som kallas potentialen till \mathbf{F} .
10. Ett nödvändigt villkor för att ett C^1 vektorfält \mathbf{F} ska vara konservativt är att
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Detta är ej tillräckligt.

11. Om \mathbf{F} är C^1 och uppfyller att

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

på en *enkelt sammanhängande* mängd är \mathbf{F} konservativt. Detta är ej nödvändigt, det finns konservativa vektorfält på icke-enkelt sammanhängande mängder! Kravet på derivatorna kan också formuleras med kravet att Jacobimatrisen $J_{\mathbf{F}}$ är symmetrisk.

10 Implicita funktionssatsen

Vi formulerar implicita funktionssatsen i flera steg här.

1. Att en ekvation $f(x, y) = 0$ implicit bestämmer y som en funktion av x betyder att lösningarna (x, y) till ekvationen ges (åtminstone lokalt) av $(x, g(x))$, alltså $y = g(x)$.
2. Implicita funktionssatsen säger att om en samling av n stycken ”snälla”² krav är givna på en vektor \mathbf{x} samt att dessa uppfylls för $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ så bestäms n stycken av \mathbf{x} s komponenter implicit som funktioner av de andra.

Detta kan ses som en sorts generalisering av vad vi vet om linjära ekvationssystem i lin. alg.. Skillnaden är att vi inte alltid kan lösa systemen explicit, eller visa att de saknar lösning.

3. Antag att vi har en samling krav

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{z}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{z}) = 0 \end{cases}$$

Då förväntar vi oss i ett typiskt fall att kunna bestämma n stycken av variablerna z_i implicit som funktioner av de andra. Detta stämmer inte

² C^1 samt andra egenskaper.

alltid, och vi kan se hur genom att tänka på lin. alg. igen. Där kunde vi ha inkonsistenta ekvationssystem, e.g.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

och ekvationssystem av n ekvationer där flera var ekvivalenta:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$$

4. Ibland formuleras implicita funktionssatsen på vektorform $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Då $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ så motsvarar det ett krav för varje komponent, $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ och här är \mathbf{y} den vektor i \mathbb{R}^n bestående av alla de n stycken komponenterna som ska bestämmas i termer av de andra \mathbf{x} . Eftersom den ”sammansatta” vektorn (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ska gå ”att mata in i \mathbf{F} ” ser vi att denna måste bestå av n komponenter och eftersom \mathbf{y} har n komponenter är \mathbf{x} därför en vektor i \mathbb{R}^{n-m} .
5. Om \mathbf{y} implicit bestäms som en funktion $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ nära (\mathbf{a}, \mathbf{b}) som uppfyller $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ så ges \mathbf{y} s värde i \mathbf{a} av $\mathbf{b} = \mathbf{y}(\mathbf{a})$.
6. Man kan bevisa att $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ automatiskt är C^1 om \mathbf{F} är C^1 .
7. Vi kräver att

$$\det(J_{\mathbf{F}, \mathbf{y}}) \neq 0$$

i punkten (\mathbf{a}, \mathbf{b}) där $J_{\mathbf{F}, \mathbf{y}}$ är den del av \mathbf{F} s Jacobimatrizen som fås när vi endast betraktar derivator med avseende på \mathbf{y} . Låt oss tänka på detta i termer av \mathbf{F} s linjärisering (eller under antagandet att \mathbf{F} är linjär!). Om vi har ett linjärt problem där vi försöker bestämma \mathbf{y} genom att undersöka ekvationen $A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ (då matrisen B är kvadratisk) så vet vi att den har en unik lösning då $\det(B) \neq 0$. Om $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + \mathbf{c}$, då hade vi fått $J_{\mathbf{F}, \mathbf{y}} = B$, och systemet är alltså garanterat lösbart då $\det(J_{\mathbf{F}, \mathbf{y}}) \neq 0$!

8. Derivatorna kan ges av ett linjärt ekvationssystem. Längs $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ har vi att

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))$$

vilket ger \mathbf{y} s partiella derivator med avseende på x_i med hjälp av kedjeregeln. Vi kan också skriva detta med Jacobimatrisen från ovan:

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} + J_{\mathbf{F}, \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} = (J_{\mathbf{F}, \mathbf{y}})^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}$$

och i punkten $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ kan vi lösa ut y s derivators värde exakt. Vi är mycket hjälpta av klargöra genom att läsa detta för fallet med en ekvation $f(\mathbf{x}, y) = 0$: Då får vi ju

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} = - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Här avses med derivatorna $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ på x_i ; att vi endast deriverar på den i :te inputen i f inte på hela uttrycket $f(\mathbf{x}, y(x))$, som ju är vad vi har satt till noll. Vi kan *exakt* bestämma värdet på y s derivator i punkten $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

9. Om $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ är C^1 och $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ har en lösning $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ och det dessutom gäller att

$$\det(J_{\mathbf{F}, \mathbf{y}})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$$

så bestäms \mathbf{y} implicit av \mathbf{x} nära $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ alltså det existerar en funktion $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ så att $\mathbf{y}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ och $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ för alla \mathbf{x} nära \mathbf{a} . Denna funktions derivator kan bestämmas genom implicit derivering.

10. En nivåyt till en slät funktion $f(\mathbf{x})$ uppfyller ju $f_C(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - C = 0$ för något C . Detta kan vi se som ett krav, och om $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ löser denna ekvation så ser vi att det är möjligt att tolka nivåytan som en graf i den sista komponenten x_n i \mathbf{x} då

$$\frac{\partial f_C}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$$

Så när derivatan är noll har vi inga garantier för att detta är möjligt. Tänk tillbaka på envariabeln: Vi kan betrakta ekvationen $ax + by = c$ som att den bestämmer y som en funktion av x bara då $b \neq 0$, vilket ju exakt motsvarar derivatakravet, och grafiskt ser vi ju direkt varför - om $b = 0$ beskriver detta en linje $x = c/a$ vilket vi grafiskt ser inte kan vara grafen en funktion av x . Uttryckt slarvigt kan man säga att detta är den geometriska förklaringen - om determinant-/derivatakravet inte är uppfyllt är det inte möjligt att se nivåtor som grafer för att tangentlinjen/planet/volymen/... är vinkelräta mot en av variabel-axlarna. Detta kan du också tolka genom att tänka på vad derivatakravet säger om normalen till nivåtan $f_C = 0$.

11 Linjeintegraler

1. **(V)** Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Integralen längs den kurvan C beräknas genom att parametrisera kurvan $\mathbf{x}(t)$ med $t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ och integrera

$$\int_C f(\mathbf{x}) ds$$

alltså

$$ds = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right\| dt$$

och vi beräknar

$$\int_C f(\mathbf{x})ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t))\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right\| dt$$

alltså en envariabelintegral.

2. Med en (slät) kurvas orientering avses den riktning vilken kurvan följer. Vi kan specificera denna genom att ange en tangentvektor till kurvan i en punkt längs kurvan eller genom att ange dess start och slutpunkt. Linjeintegraler för skalär-värda funktion $f(\mathbf{x})$ som i föregående uppgift beror *ej* på orienteringen.

Bevis för intresserade: Antag att du väljer omvänt orientering i föregående uppgift, t.ex. om $\mathbf{x}(t)$ var en parametrisering av kurvan med orienteringen i föregående uppgift så går $\mathbf{y}(r) = \mathbf{x}(b - (r - a))$ i motsatt riktning då $r \in [a, b]$ men parametriserar samma samling punkter. Vi kan förenkla detta lite genom att låta $t(r) = (b - (r - a))$, så att $\mathbf{y}(r) = \mathbf{x}(t(r))$. Kalla kurvan med motsatt orientering $-C$. Då får vi

$$\int_{-C} f(\mathbf{x})ds = \int_a^b f(\mathbf{y}(r))\left\| \frac{d\mathbf{y}}{dr}(r) \right\| dr$$

men vi ser att $\mathbf{y}(r) = \mathbf{x}(t(r))$ så

$$\frac{d}{dr}\mathbf{y}(r) = \frac{d}{dr}\mathbf{x}(t(r)) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(r))\frac{dt}{dr} = -\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(r))$$

så tangentvektorn från parametriseringen byter bara riktning³ och därmed $\left\| \frac{d\mathbf{y}}{dr}(r) \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(r)) \right\|$ så

$$\int_{-C} f(\mathbf{x})ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t(r)))\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(r)) \right\| dr$$

men om vi nu substituerar $r = r(t)$ i denna envariabelintegral få vi ju att $a \mapsto b$ och $b \mapsto a$ medans

$$dr = \frac{dr}{dt}dt = -dt$$

så

$$\int_{-C} f(\mathbf{x})ds = \int_b^a f(\mathbf{x}(t))\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right\| (-dt) = \int_a^b f(\mathbf{x}(t))\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right\| dt = \int_C f(\mathbf{x})ds$$

QED eller VSB som vi skriver på svenska.

³Vilket ju är rimligt -den pekar i längs med den riktning parametriseringen går, så när vi parametriserar i omvänt riktning är ju detta exakt vad vi väntar oss!

3. En allmän formel ges av att om C parametriseras av $\mathbf{x}(t)$ där $t \in [a, b]$ så gäller att längden ges av

$$l(C) = \int_C ds = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| dt$$

vilket i \mathbb{R}^3 får formen

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

där vi betecknar derivatorna med

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

4. Uttrycken är bara två sorters former av samma integral, P, Q, R är fältet \mathbf{F} s komponenter, vad jag i normalfall skulle skriva som $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (P, Q, R)$, vilket innebär att $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Pdx + Qdy + Rdz$. Beräkning sker genom att parametrisera kurvan C med $\mathbf{x}(t)$ för $t \in [a, b]$ och beräkna integralen

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt$$

5. Integralens värde i föregående uppgift beror av orienteringen! Den byter tecken då orienteringen ändras. Rent beräkningsmässigt är skillnaden mot föregående integral är att vi inte har normerat

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

så när vi byter riktning byter ju detta tecken.

6. En linjeintegral av ett vektorfält mäter i vilken utsträckning fältet längs kurvan pekar i samman riktning som kurvans tangent (under den givna orienteringen!).

För fysiker: Om vi tänker oss att detta mäter en kraft som utövas på en partikel längs en väg blir detta arbetet som utför på partikeln av fältet då den släpas längs med vägen - faktum är att denna sorts integral ofta tas som definitionen av arbete i fysik. Är integralen noll är nettoarbetet längs kurvan noll, är den positiv är nettoarbetet positivt osv.

7. Linjeintegraler är linjära, och detta har inte med "linje" i linjeintegral att göra utan mer med "integral": Vi avser att integrering över en (orienterad) kurva C är en linjär operation (på mängden av integrerbara skalärfunktioner eller vektorfält):

$$\int_C (af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})) ds = a \int_C f(\mathbf{x}) ds + b \int_C g(\mathbf{x}) ds$$

$$\int_C (a\mathbf{F}(\mathbf{x}) + b\mathbf{G}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{r} = a \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} + b \int_C \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}$$

där a, b är godtyckliga skalärer.

8. För linjeintegraler har vi att om en slät kurva C delas upp i två icke-overlappande släta kurvor A och B som tillsammans utgör $C = A \cup B$

$$\text{"} \int_C = \int_A + \int_B \text{"}$$

det vill säga

$$\int_C f(\mathbf{x}) ds = \int_A f(\mathbf{x}) ds + \int_B f(\mathbf{x}) ds$$

och motsvarande för integraler för vektorfält (med det tillagda kravet att A s och B s orientering motsvarar C s orientering)

9. Med integralsymbolen

$$\oint_C$$

avses en helt vanlig integral med den extra egenskapen att kurvan C sluter sig⁴ och är begränsad - alltså har den samma start som slutpunkt och "sticker inte iväg" till oändligheten.

10. (**V**) I envariabel hade vi kalkylens fundamentalssats som vårt huvudsakliga redskap för att beräkna integraler. För linjeintegraler av vektorfält finns något liknande, *men bara för konservativa vektorfält* (som vi tog upp i en tidigare sektion). Antag att \mathbf{F} är konservativt.

- (a) Givet \mathbf{F} s potential U samt att C börjar i \mathbf{a} och slutar i \mathbf{b} så gäller

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$$

- (b) Eftersom start- och slutpunkt sammanfaller för dessa kurvor, alltså $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ så gäller

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

- (c) Om C och D är kurvor som börjar och slutar i samma punkter så följer av potential-uttrycket att

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

⁴Här är vår andra idé för kursen om vad som menas med slutenhet, vilket -som nämnts tidigare- inte är definitionsmässigt samma sak som att den utgör en sluten mängd.

12 Dubbel- och trippelintegraler, generella integraler

- Dubbel- och trippel- och generella integraler är linjära, vilket avser att t.ex. för trippelintegraler

$$\iiint_C (af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x}))dV = a \iiint_C f(\mathbf{x})dV + b \iiint_C g(\mathbf{x})dV$$

då a, b är konstanter.

- I envariabeln kunde vi dela upp integration

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

och för integraler generellt har vi att om ett slätt integrationsområde kan delas upp i två ickeöverlappande släta områden A och B så gäller, e.g. för en dubbelintegral

$$\iint_C f(\mathbf{x})dA = \iint_A f(\mathbf{x})dA + \iint_B f(\mathbf{x})dA$$

- En geometrisk tolkning av en dubbelintegral

$$\iint_D f(x, y)$$

är som volymen mellan grafen $z = f(x, y)$ och planet $z = 0$ - denna går att göra för en trippelintegral (som hypervolymen under grafen $w = f(x, y, z)$) men det är inte värt mycket eftersom vår intuition för 4D lämnar en del att önska.

- En itererad (dubbel-)integral är en integral på formen

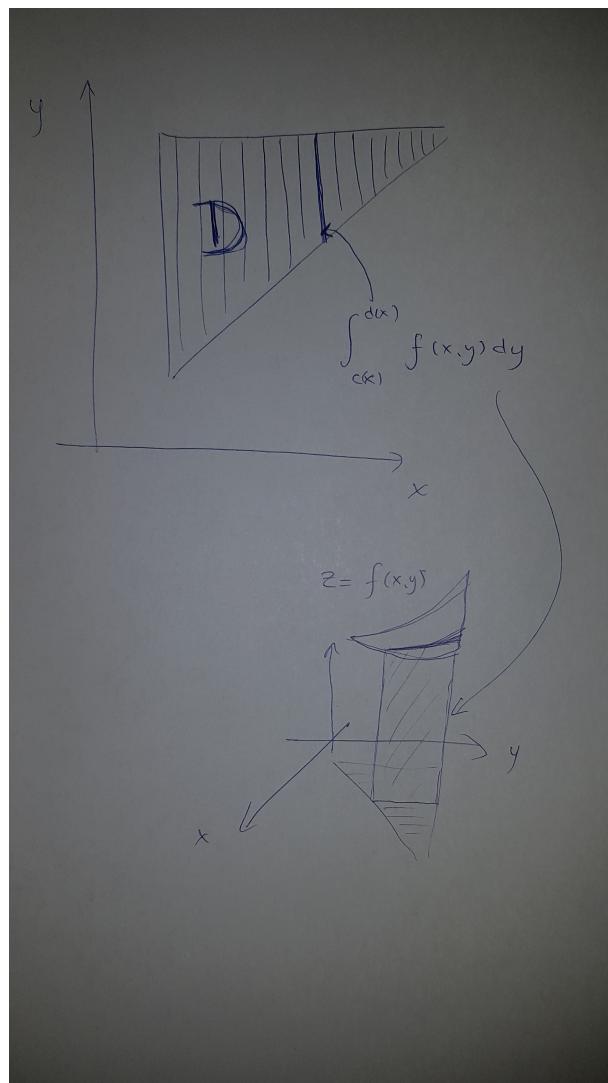
$$\int_a^b dr \int_{c(r)}^{d(r)} ds f(r, s)$$

där vi alltså först integrerar över ds och sedan över r . Motsvarande gäller i för trippelintegraler eller generella integraler. Rent praktiskt använder vi ofta att vi kan skriva om dubbel- eller trippelintegraler över enkla områden som itererade integraler, vilka i princip bara kräver envarreteknik för att utvärdera.

Låt oss beskriva detta geometriskt för en dubbelintegral av typen ovan:
Om

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy f(x, y)$$

betyder det att vi skär mängden D små delar längs linjerna $x = c$. För varje sådan linje räknar vi ut integralen längs y -rikningen. Geometriskt, vad vi gör då är ju att vi räkna ut hur mycket area som ligger under grafen $z = f(x, y)$ längs kurvan $x = c$ då y varierar mellan $c(x)$ till $d(x)$. Sedan, när vi integrerar över x lägger vi ihop alla dessa areor gånger ”ett litet längdelement” dx vilket total ger os en volym, nämligen volymen under grafen. Se bild.



- En generaliserad integral är en integral över ett område D som uppfyller ett av följande krav:

- Området är icke-kompakt.
- Integranden är obegränsad i någon del av området.

Dessa integraler behöver ej nödvändigtvis konvergera - de kan gå mot oändligheten eller sakna (oegentligt) gränsvärde helt och hållt.

Vi beräknar dessa genom att ta gränsvärden på ett sätt som är analogt med envariabeln. Om vi till exempel ska integrera $f(x, y, z) = 1/\|\mathbf{x}\|$ över en boll $B \subseteq \mathbb{R}^3$ av radie ett beräknar vi detta genom att skära ut en liten boll B_δ av radie δ runt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ där funktionen ju blir odefinierad. Sedan tar vi gränsvärdet då $\delta \rightarrow 0$. Vi definierar alltså

$$\iiint_B \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} dV = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \iiint_{B \setminus B_\delta} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} dV$$

Denna integral kan du för övrigt lätt beräkna i sfäriska koordinater.

Motsvarande för icke-kompakta mängder, såsom en integral över första kvadranten $x \geq 0, y \geq 0$ i \mathbb{R}^2 . Här behöver vi dock vara lite försiktiga när vi utvärderar gränsvärden, men för kontinuerliga integrander $f(\mathbf{x})$ som är icke-negativa på sin integrationsmängd D kan vi se att de antingen divergerar eller konvergerar, och om de konvergerar så beror inte värdet inte på hur vi tar gränsvärdet. Vi illustrerar med exempel: Vi kan betrakta en integral över första kvadranten som t.ex.

$$\iint_{Q_1} f(x, y) dA = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s dx \int_0^s dy f(x, y)$$

alltså att vi integrerar över en kvadrat av sidelängd s . Vi kan också integrera på cirkelskivor av radie R och då ta gränsvärdet som

$$\iint_{Q_1} f(x, y) dA = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy f(x, y)$$

och problemet är alltså att vi har olika sätt att "gå mot oändligheten" på, lite analogt med hur gränsvärden kan tas från oändligt många håll i flervariabel. Intresserade studenter kan kolla upp begreppet "uttömmande följd". I praktiken är detta begrepp inte något vi ofta klurar på⁵, utan vi nöjer oss ofta med att undersöka om funktionerna är positiva och tar sedan ut gränsvärdet.

6. Integrationsgränserna blir funktioner eftersom vi kan uttrycka integrationsmängder som enkla, alltså att någon variabel, säg y , varierar mellan alla värden som ges av ett par av grafytor, e.g. $f(x) \leq y \leq g(x)$.

⁵Såpass ovanligt att yours truly inte var bekant med namnet, men så har jag ju bakgrund i teoretisk fysik också, där 90% av integrering består i att säga $\infty - \infty = 0$ vilket inte alls är korrekt, eller ger poäng på tenta! Skämt åsido så har jag inte stött på det utanför teoribitar som kommit upp under föreläsningar/i Calculus.

7. En funktion som är jämn under en reflektion $refl(\mathbf{x})$ är en funktion som uppfyller $f(refl(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$, och en funktion som är udda under en reflektion är en funktion som uppfyller $f(refl(\mathbf{x})) = -f(\mathbf{x})$.

En mängd R sägs vara symmetrisk under en reflektion $refl$ om för alla $\mathbf{x} \in R$ vi har $refl(\mathbf{x}) \in R$.

För en generell integral (linje, dubbel, trippel, fyrdubbel etc.) gäller att om u är udda och j är jämn så följer att

$$\int_R u(\mathbf{x}) + j(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n = 2 \iint_{R^+} j(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n$$

där R^+ är ”ena halvan av reflektionen av R ”⁶. Särskilt viktigt här är att vi ser att integralen av en funktion som är udda m.a.p. en reflektion σ över en mängd som är symmetrisk m.a.p. σ är noll.

8. Dessa blir bara

$$C \times Area(D) \quad \text{resp.} \quad C \times Vol(V)$$

9. Detta följer av ovanstående fråga:

$$Area(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

och motsvarande för volymer.

10. Vi har

$$\iint_D f(x)g(y) dx dy = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \times \left(\int_0^1 g(y) dy \right)$$

om $D = [0, 1] \times [0, 1]$?

11. Substitutionen blir lite annorlunda i flervariabel, men skillnaden är liten.
Schematiskt har vi

$$\int_E f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n = \int_U f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) |\det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \right)| du_1 \dots du_n$$

där

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$$

alltså avser Jacobimatrizen för $\mathbf{x}(\mathbf{u})$. Den avgörande skillnaden här är absolutbeloppet!

⁶Tekniskt sett säger vi att R^+ är en delmängd av R så att $refl(R^+) \cup R^+ = R$ och $refl(R^+) \cap R^+$ är tomma mängden.

12. Area och volymelementen dA och dV ges i kartesiska koordinater av $dxdy$ resp. $dxdydz$. I alla koordinatsystem kan man tänka sig att dessa mäter hur stort ett areastycken resp. volymstykke vi får i \mathbb{R}^2 resp. \mathbb{R}^3 under en liten variation av koordinaterna. Ta polära koordinater t.ex., $dA = rdrd\theta$. Så om S är ett litet område i $r\theta$ -planet med area A så motsvarar detta ungefär ett område i \mathbb{R}^2 med area rA - sambandet anger alltså förhållandet mellan hur "stort" ett område ser ut i parameterrummet ($r\theta$ -planet i detta fall) kontra hur stort det faktiskt är i \mathbb{R}^n (\mathbb{R}^2 i detta fall).
13. • Kartesiska: $dV = dxdydz$
• Cylindriska: $dV = rdrd\theta dz$
• Sfäriska: $dV = R^2 \sin(\phi)dRd\theta d\phi$
14. • Kartesiska: $dA = dxdy$
• Polära: $dA = rdrd\theta$
15. Ytelementet för en yta i \mathbb{R}^3 brukar skrivas dS . Om ytan parametreras av $\mathbf{r}(u, v)$ gäller att vi kan räkna ut dS genom att

$$dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|dudv$$

där

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

För grafer $z = f(x, y)$ gäller att vi kan bestämma detta ännu lite enklare, eftersom vi får att om vi låter $x = u$ och $y = v$ vara våra parametrar så ger ovanstående uttryck

$$dS = \sqrt{1 + \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

I vår diskussion om implicita funktionssatsen sa vi att under vissa milda begränsningar kunde vi se nivåytor $g(x, y, z) = 0$ som grafer, och vi kan nu utnyttja detta! Om g är C^1 och

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$$

så får vi att vi kan uttrycka nivåytan lokalt som en graf $z = f(x, y)$. Putsar vi lite på det ser vi att för nivåytor så har vi

$$dS = \frac{\|\nabla g\|}{\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|} dxdy$$

om kvoten är väldefinierad.

16. Om S är en yta i \mathbb{R}^3 som du har parametriserat med $\mathbf{r}(u, v)$ över en parametermängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ges integralen av

$$\iint_S f(\mathbf{x}) dS = \iint_D f(u, v) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv$$

vilket alltså bara blir en vanlig dubbelintegral.

17. Detta är arean på området, i detta fall en sfär av radie r , så värdet på integralen är 4π .

13 Integraler med vektorfält, divergens och rotation, generaliserade Stokes sats

1. Greens sats säger att om D är ett kompakt område med en slät rand $\partial D = S$ (med den ”inducerade orienteringen”) och \mathbf{F} är ett glatt vektorfält⁷ så gäller att

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Det finns andra liknande versioner av Greens med andra liknande krav, men kontentan är alltid densamma. För tillräckligt ”snälla” vektorfält och ”snälla” områden D i \mathbb{R}^2 så gäller ovanstående formel.

2. En orienterad yta $S \subset \mathbb{R}^3$ avser en yta som kan delas in i två distinkta sidor (inga Möbiusband!) där vi har valt ut en sida som utsida och en sida som insida - normalt sett gör vi detta genom att specificera någonstans på ytan en normalvektor till ytan som pekar i den riktning vi kallar utåt.
3. Det vektoriella ytelementet $d\mathbf{S}$ är i en punkt på ytan definierat av $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$ där dS är det skalära ytelementet och $\hat{\mathbf{n}}$ är en normalvektor av enhetslängd till S i denna punkt. Normalvektorns riktning avgörs av orienteringen.
4. Eftersom vi redan vet hur vi tar fram det skalära ytelementet så behöver vi egentligen bara fundera över hur vi tar fram en enhetsnormalvektor, $\hat{\mathbf{n}}$, men eftersom vi på en parametriserad yta med parametrisering $\mathbf{r}(u, v)$ kan ta fram tangentvektorerna \mathbf{r}_u och \mathbf{r}_v genom att ta partiella derivator på \mathbf{r} med avseende på u resp v och dessa blir linjärt beroende så får vi en normalvektor med kryssprodukt:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

Normalisera vi denna så har vi en enhetsnormal - men det finns ju två, en motsvarande vardera av de två valen av orientering. Vi får helt enkelt

⁷Möjligtvis är \mathbf{F} bara glatt på ett område i vilket D ligger.

försöka undersöka om ovanstående kryssprodukt pekar i den riktning vi vill eller ej - om inte så kan vi bara byta tecken. Alltså

$$d\mathbf{S} = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} dS = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv = \pm (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv$$

Om ytan är en nivåyta $g(\mathbf{x}) = 0$ ges normalen som bekant av $\mathbf{n} = \nabla g$ och vi får ytterligare en förenkling (då nivåytan implicit bestämmer z som en funktion av x och y)

$$d\mathbf{S} = \pm \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} dS = \pm \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \frac{\|\nabla g\|}{\|\frac{\partial g}{\partial z}\|} dx dy = \pm \frac{\nabla g}{\|\frac{\partial g}{\partial z}\|} dx dy$$

Om ytan bara explicit är en graf $z = f(x, y)$ förenklas detta ytterligare

$$d\mathbf{S} = \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) dx dy$$

5. En flödesintegral är en integral av typen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

vilken mäter (netto-)flödet av fältet \mathbf{F} genom ytan S , därav namnet. Tänk typ ett vattenflöde genom ett visst plan eller liknande. Alternativ kan vi tänka detta mäter i vilken utsträckning fältet är ortogonalt mot ytan. Ett vanligt användningsområde i fysik är strålningsflöde - mängden strålning (ljus) genom en yta som täcker ett litet område kan vara bra att veta om man ska sätta upp solceller. Beroende på vad fältet mäter för något finns många olika tolkningar.

Att ytan är orienterad ger oss möjligheten att se vilken riktning nettoflödet sker, alltså åt vilket håll fältet flödar. Byter vi orientering byter integralen tecken.

6. Symbolen

$$\iint_S$$

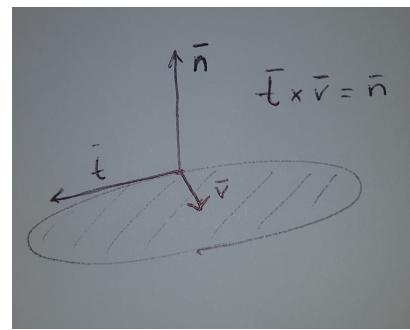
är dubbelintegralsymbolen för ytor S som är slutna, det vill säga ytor som saknar (inneboende)-rand och är kompakta! Exempel på sådana ytor är sfärer eller torusar ("donut"-formade ytor) i \mathbb{R}^3 . Vi kan tänka oss varje sammanhangande sådan yta som randen till någon inneslutet volym i \mathbb{R}^3 .

7. Den inducerade orienteringen till en rand av en yta/volym är ett val av rand som är "kompatibelt" med ytans/volymens orientering. Specifikt så stämmer uttryckena som ges i de stora integralsatserna då vi använder den inducerade orienteringen.

Den inducerade orienteringen av en rand ∂V till en *volym* V ges av tumregeln att normalen till ∂V pekar ut ur volymen.

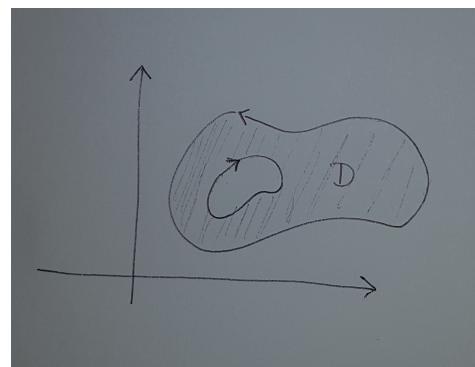
Den inducerade orienteringen av en rand ∂S till en orienterad *yta* S ges av en version av högerhandsregeln. Orienteringen ges av tumregeln att om vi tänker oss att vi går längs med randen i riktningen som den är orienterad och normalen pekar uppåt så har vi ytan på vänster sida. Mer konkret kan man använda en sorts högerhandsregel: Om \mathbf{t} är vektorn som anger randens orientering, och \mathbf{v} är en tangentvektor till ytan är ortogonal mot \mathbf{t} och ytans normal är \mathbf{n} så gäller

$$\mathbf{t} \times \mathbf{v} = \mathbf{n}$$



Om ytan bara är ett område i \mathbb{R}^2 (som i Greens sats) är orienteringen given av att området ska ligga till vänster om vi följer randen i den riktning den är orienterad. För ett område som saknar hålrum motsvarar detta att randen är moturs orienterad.

Om en yta eller volym har hålrum så kommer orienteringen bli i motsatt riktning mot vad man kanske väntar sig (ovanstående regler håller fortfarande).



8. $\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{F})$ brukar man komma ihåg genom minnesregeln

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

men mer konkret ges av

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Notera mönstret! Sånär som på ett tecken har vi på plats 1 i vektorn fältets 2:a komponent deriverad med avseende på dess 3:a komponent, minus omvänta ordningen. Liknande mönster har vi för de andra komponenterna. Minnesregeln är praktisk att komma ihåg, eftersom den hjälper oss hålla koll på minustecknen.

Rotationen $\text{rot}(\mathbf{F})$ beskriver i hur stor utsträckning fältet \mathbf{F} ”pekar moturs i cirklar” (tänk på hur fältlinjerna går). Första komponenten säger hur mycket fältet, i ett litet område runt en punkt, cirkulerar i planet som är parallellt med yz -planet, alltså med \mathbf{e}_1 som normal. Andra och tredje komponenten på $\text{rot}(\mathbf{F})$ säger motsvarande, men för rotation i planen med \mathbf{e}_2 resp. \mathbf{e}_3 som normal. Om komponenterna är negativa betyder det att rotationen sker medurs snarare än moturs.

9. Ett vektorfält är rotationsfritt⁸ då $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.
10. Alla konservativa fält är rotationsfria.
11. Ett rotationsfritt fält är konservativt om det är definierat på en enkelt sammanhängande mängd.
12. Divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div}(\mathbf{F})$ definieras i kartesiska koordinater av

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

vilket blir lite tydligare om man skriver $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Divergensen beskriver i hur stor utsträckning fältet ”spretar ut” ur en given punkt, eller om, du så vill, hur mycket fältet pekar ut ur eller in i en liten sfär runt punkten.

13. Ett divergensfritt vektorfält \mathbf{F} uppfyller $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$.
14. Att \mathbf{F} har en vektorpotential betyder att det finns \mathbf{A} så att $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$.

⁸Man säger ibland också ”solenoidalt” eller ”irrotationellt”.

15. Alla fält med vektorpotential är divergensfria.
16. Om \mathbf{F} är divergensfritt på ett område M sådant att varje sluten yta S i M innesluter en volym som ligger helt i M så har \mathbf{F} en vektorpotential. För stjärn-formade områden är detta uppfyllt.

Sidenote här: Det vore fiffigt om vi gav sådana områden M ett namn (som vi gjorde för enkelt sammanhängande mängder eller stjärnformade mängder t.ex.) - de kommer dock egentligen bara upp när vi diskuterar existens av vektorpotential.

17. Vi har att

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

och

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) = 0$$

för alla C^2 -fält \mathbf{F} och C^2 -funktioner f .

18. Att de är linjära avser samma sak som i lin. alg., fast för funktioner/fält:

$$\text{rot}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\text{rot}(\mathbf{F}) + b\text{rot}(\mathbf{G})$$

$$\text{div}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\text{div}(\mathbf{F}) + b\text{div}(\mathbf{G})$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ är konstanter.

19. Stokes sats, även kallad rotationssatsen säger att om $M \subseteq \mathbb{R}^3$ är ett område i \mathbb{R}^3 i vilket \mathbf{F} är glatt och en kompakt yta $S \subseteq M$ med ("inneboende") rand $C = \partial S$ (med den "inducerade orienteringen") är given så gäller

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Det finns andra liknande versioner av Stokes med andra liknande krav, men kontentan är alltid densamma. För tillräckligt "snälla" vektorfält och "snälla" ytor S i \mathbb{R}^3 så gäller ovanstående formel.

20. Varje område D i \mathbb{R}^2 och vektorfält $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ som uppfyller kraven för Greens kan tolkas som att de är i \mathbb{R}^3 genom att skicka alla punkter i $(x, y) \in D$ på S i \mathbb{R}^3 genom att avbilda på $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ och för fältet definierar vi $\tilde{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, 0)$. Vi orienterar området vi får i \mathbb{R}^3 med normal längs positiva z -axeln. Insättning av S och $\tilde{\mathbf{F}}$ i Stokes sats ger oss Greens eftersom

$$\text{rot}(\tilde{\mathbf{F}}) = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \Rightarrow \text{rot}(\tilde{\mathbf{F}}) \cdot d\mathbf{S} = (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dS$$

men ytan S är plan så $dS = dA$ och vi kan projicera S på D och integrera över D :

$$\iint_S \text{rot}(\tilde{\mathbf{F}}) \cdot (0, 0, 1) dS = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA$$

och samtidigt så har vi enligt Stokes

$$\iint_S \text{rot}(\tilde{\mathbf{F}}) \cdot (0, 0, 1) dS = \oint_{\partial S} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r}$$

men $F_3 = 0$ så $\tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = F_1 dx + F_2 dy$ och vi kan projicera på ∂D och kvar får vi bara

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy$$

Sammantaget har vi alltså visat att

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy$$

i.e. Greens.

21. Om \mathbf{F} har vektorpotential gäller $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$ för något \mathbf{A} . På någon ”snäll” yta S har vi då enligt Stokes att

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

men om ytan är sluten, alltså ytor där (”inneboende”) randen ∂S blir tomma mängden ϕ säger Stokes oss att därmed att

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

eftersom integralen över tomma mängden ϕ är noll.

22. Gauss sats, även känd som divergenssatsen säger att om M är ett område i \mathbb{R}^3 där \mathbf{F} är ett glatt fält och $K \subset M$ är någon slät och kompakt volym med rand $S = \partial K$ (med den ”inducerade orienteringen”) så gäller

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \text{div}(\mathbf{F}) dV$$

Det finns andra liknande versioner av Gauss med andra liknande krav, men kontentan är alltid densamma. För tillräckligt ”snälla” vektorfält och ”snälla” volymer K i \mathbb{R}^3 så gäller ovanstående formel.

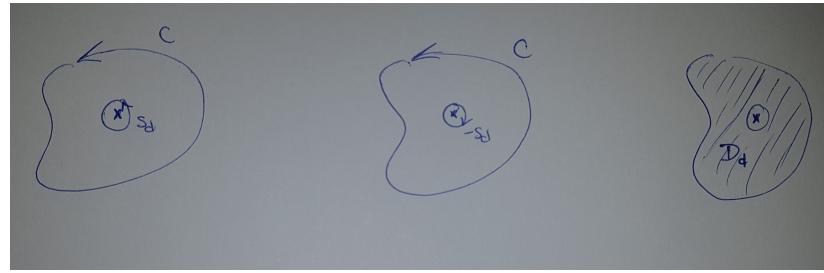
23. (a) Direkt beräkning bekräftar detta.
 (b) Beräknar vi den givna integralen ser vi att dess värde är $\pm 2\pi$ (tecken beroende av orientering) men för konservativa fält måste en integral över en sluten kurva bli noll så fältet kan omöjlig vara konservativt.
 (c) Vi noterar först att vi ej kan använda Greens sats för att beräkna integralen över det kompakta inneslutna området eftersom fältet ej är definierat i origo. Istället får vi använda ”differenstricket” - detta

utnyttjar att integralsatserna i vissa fall säger något om skillnaden mellan att integrera mellan två olika slutna ytor.

Eftersom origo ej är en randpunkt till M så kan vi hitta en cirkel S_d av radie d centrerad i origo som ligger helt innanför M . Vi kan nu fråga oss ”*Vad blir skillnaden att integrera runt min kurva C mot att integrera runt S_d ?*” och Greens ger oss svaret! Om S_d har ”samma” orientering⁹ som C så gäller att differensen ges av

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{-S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C \cup -S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där $-S_d$ är samma mängd som S_d men med motsatt orientering. Detta utgör dock randen till det område D_d som innesluts mellan S_d och C . Eftersom S_d innesluter origo följer att origo *inte* ligger i D_d så vi kan applicera Greens sats ty fältet är glatt i D_d ! Illustration:



Om C var positivt orienterad kan vi direkt applicera Greens, annars får vi bara ett extra minusstecken så

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C \cup -S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pm \iint_{D_d} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

eftersom vi redan visat att (plan-)rotationen av fältet \mathbf{F} är noll och därmed har vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Men vi har inte ens sagt vilken radie vi valde och eftersom detta måste gälla för *alla* kurvor C så antar integralen över alla kurvor av denna typ samma värde allihop, sånär som på ett tecken som beror på C s orientering. Mängden M behöver inte ens vara sammanhängande! Låt mig förtydliga: Vi har bevisat att för varje radie $d > 0$ som är tillräckligt liten så gäller att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

⁹Alltså båda är ”positivt orienterade” eller ”negativt orienterade”

och den vad som begränsar denna radie är ju att S_d ska ligga innanför M . Så om vi nu har två olika randkurvor (med samma orientering) C och C' som utgör randmängder till M och M' respektive vet vi att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

för alla tillräckligt små d , och

$$\oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{S_{d'}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

för alla tillräckligt små d' . Därmed kan vi välja $d = d'$ så länge vi begränsar d av att S_d ska ligga innuti M och innuti M' ! Gör vi detta val ser vi från ovanstående att

$$\oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Så nu vet vi att integralerna alla blir lika, men vad är då värdet av dessa? Det bestämmer vi genom att beräkna integralen för någon enkel kurva C , kanske enhetscirkeln? Direkt beräkning med parametrering ger

$$\oint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pm 2\pi$$

där tecknet beror på orienteringen.

- 24. (a) Direkt beräkning bekräftar detta.
- (b) Beräknar vi den givna integralen ser vi att dess värde är $\pm 4\pi$ (tecken beroende på orientering) men för fält med vektorpotential måste en integral över en sluten yta bli noll så fältet kan omöjliggen ha vektorpotential.
- (c) Gauss sats säger inte något direkt om detta fall, ty Gauss sats kräver att \mathbf{F} ska vara glatt på mängden som innesluts av ytan, men detta fält är inte ens definierat i origo.
- (d) Svaret här är helt analogt med motsvarande fråga för Greens sats och differenstricket ger oss svaret. Om V är en slät och kompakt volym med rand S och S_d är någon sfär av radie d som ligger helt innuti M så följer att

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{-S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S \cup -S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

där $-S_d$ alltså har motsatt orientering mott S_d . Tillsammans utgör dessa två ytor randen till en volym K_d som ej innehåller origo, eftersom vi i princip ”skurit ut” innamätet ur S_d från M . Gauss sats säger oss därmed att

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S \cup -S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iiint_{K_d} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = 0$$

eftersom \mathbf{F} är glatt och divergensfritt in K_d . Tecknet beror såklart på S s orientering. Alltså följer

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint\!\!\!\oint_{S_d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

och därmed har integralen för alla ytor av denna typ samma värde (sånär som på ett tecken). Vi kan se att integralen har värde $\pm 4\pi$ genom att beräkna integralen på enhetssfären.

- 25. M måste ha ett hålrum (kan ej vara enkelt sammanhängande!), eftersom \mathbf{F} är glatt och rotationsfritt på M och därmed skulle \mathbf{F} vara konservativt om M vore enkelt sammanhängande. Men, om \mathbf{F} skulle vara konservativt skulle integralen bli noll, vilket vi har sagt att den inte är.
- 26. M måste ha ett hålrum (måste ha någon yta S i M som innesluter minst en punkt som ej ligger i M !), eftersom \mathbf{F} är glatt och divergensfritt på M så därmed skulle \mathbf{F} ha vektorpotential om M vore sådant att alla ytor S i M endast inneslöt områden som låg helt i M . Men, om \mathbf{F} skulle ha vektorpotential skulle integralen bli noll, vilket vi har sagt att den inte är.
- 27. (a) Idén här är att ytorna tillsamman innesluter en volym på vilken vi kan använda Gauss sats, nämligen om vi bildar differensen mellan integralerna så kommer vi kunna tolka det som en volymintegral och vi bevisar att den är noll. Låt $-S$ ha motsatt orientering mot S , så att integralen över $-S$ får motsatt tecken mot integralen över S . Då har vi ju att

$$\iint_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{-S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint\!\!\!\oint_{C \cup -S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

eftersom dessa två ytor tillsammans innesluter en volym. En snabb inspektion visar att orienteringen på $C \cup -S$ är enhetlig så tillvida att normalen antingen pekar in i volymen som dessa ytor innesluter eller så pekar den ut längs hela $C \cup -S$. Enligt Gauss sats har vi därmed

$$\iint_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = 0$$

där K är volymen som har $C \cup -S$ som rand. Att detta är noll följer ju av att \mathbf{F} är divergensfritt. Därmed har vi

$$\iint_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Mer generellt kan vi säga att integralen över den inneslutna volymen med divergensen bestämmer differensen i att integrera över R mot att integrera över S !! Detta påstående vore alltså giltigt även för ett fält som *inte* var divergensfritt!

- (b) Eftersom \mathbf{F} är divergensfritt och glatt på \mathbb{R}^3 så gäller att \mathbf{F} har vektorpotential, d.v.s. $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$ för något \mathbf{A} och således får vi

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial R} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

där vi använt att $\partial R = \partial S$. Detta går endast att använda då \mathbf{F} är just divergensfritt.

28. Divergenssatsen ger att

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \text{div}(\mathbf{F}) dV$$

men $\text{div}(\mathbf{F}) = \text{div}(\nabla U + \text{rot}(\mathbf{A})) = \text{div}(\nabla U) + \text{div}(\text{rot}(\mathbf{A})) = \text{div}(\nabla U)$ eftersom divergensen av en rotation är noll. Det följer att om $\mathbf{F} = \nabla U + \text{rot}(\mathbf{A})$ så kan vi lätt beräkna

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \text{div}(\nabla U) dV$$

och då potentialen till \mathbf{F} s konservativa del är harmonisk, alltså då $\text{div}(\nabla U) = 0$ följer att ovanstående integral är noll.