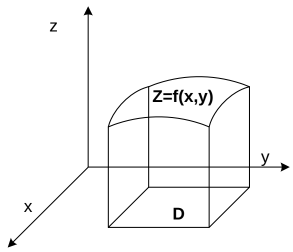
TILLÄMPNINGAR AV DUBBELINTEGRALER

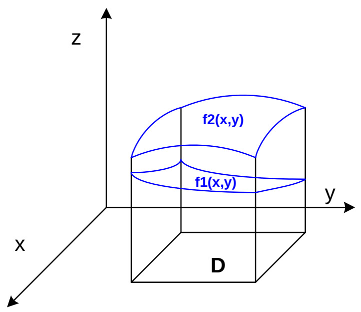
VOLYMBERÄKNING

Volymen V av området $0 \le z \le f(x,y), \quad (x,y) \in D$

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$



Volymen V av området $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y), \quad (x,y) \in D$



$$V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy$$

Uppgift 1

Beräkna volymen av den kropp som definieras av

a) $K = \{(x,y,z): \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad 0 < z < x + 2y + 1\}$

b) $K = \{(x,y,z): \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad 2x + 3y + 1 < z < 2x + 3y + 5\}$

c) $K = \{(x,y,z): \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 3, \quad x^2 + 3y + 1 < z < x^2 + x + 3y + 2\}$

d) $K = \{(x,y,z): \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x, \quad x^2 + y < z < x^2 + 3y\}$

Lösning a) Vi använder formeln $V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy$ med $f_2(x,y) = x + 2y + 1$ och $f_1(x,y) = 0$:

$$V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x + 2y + 1 - 0)dy = \cdots = 7$$

Lösning b) Vi använder formeln $V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy$ med $f_2(x,y) = 2x + 3y + 5$ och $f_1(x,y) = 2x + 3y + 1$

$$V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (2x + 3y + 5) - (2x + 3y + 1)dy = \int_0^1 dx \int_0^2 4dy \ \ldots = 8$$

Svar:

a) 7 b) 8 c) 9/2 d) 1/3

Uppgift 2.

a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $f_1(x,y)$ och $f_2(x,y)$ då $f_1(x,y)=2x^2+3y^2+3$ och $f_2(x,y)=3x^2+4y^2-6$

b) Beräkna volymen av kroppen

$K=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad 0\le y\le x,\quad 0\le z\le e^{(x^2+y^2)}\}$

Lösning a):

Skärningskurvans projektion i xy-planet:

$2x^2+3y^2+3 = 3x^2+4y^2-6 \Rightarrow 9=x^2+y^2$

(cirkeln med radien r=3)

V= $\iint_D (z_2-z_1)dxdy$ = $\iint_D (9-x^2-y^2)dxdy$ **= (polära koordinater,** $dxdy = rdrd\theta$**)**

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (9-r^2)rdr$ = $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (9r-r^3)dr$ = $\int_0^{2\pi} d\theta (\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}) \Big|_0^3$ = $\int_0^{2\pi} \frac{81}{4}d\theta = \frac{81}{2}\pi$

Lösning b):

V= $\iint_D (z_2-z_1)dxdy$ = $\iint_D (e^{(x^2+y^2)}-0)dxdy$ **= (polära koordinater,** $dxdy = rdrd\theta$**)=**

$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 e^{r^2} rdr$ **==** $\int_0^{\pi/4} d\theta [\frac{e^{r^2}}{2}]\Big|_0^1$ = $\int_0^{\pi/4} (\frac{e}{2}-\frac{1}{2})d\theta = \frac{(e-1)\pi}{8}$

Uppgift 3. Beräkna volymen av den kropp som definieras av

a) $K=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2\le 4,\quad 0\le z\le 5(x^2+y^2)\}$

b) $K=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2\le 9,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad 0\le z\le (x^2+y^2)^2\}$

Svar:

a) 40π b) $\frac{243\pi}{4}$

Uppgift 4

Beräkna volymen av det område som ligger mellan ytorna:

$z = 4x^2 + 4y^2 + 1$ och $z = 33 + 2x^2 + 2y^2$

Lösning:

Skärningskurvans projektion i xy-planet :

$4x^2 + 4y^2 + 1 = 33 + 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow 32 = 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow 16 = x^2 + y^2$

(definitionsområdet D är alltså cirkeln med radien r=4)

V= $\iint_D (z_2 - z_1)dxdy$ **=** $\iint_D (32 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$ **= (polära koordinater** $dxdy = rdrd\theta$**)=**

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (32 - 2r^2)rdr$ **=** $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (32r - 2r^3)dr$ $\int_0^{2\pi} d\theta (\frac{32r^2}{2} - \frac{2r^4}{4}) \Big|_0^4$ **=** $\int_0^{2\pi} 128 d\theta = 256\pi$

Uppgift 5. Beräkna volymen av det område som ligger mellan ytorna:

$z = 3x^2 + 3y^2 + 1$ och $z = 9 + x^2 + y^2$

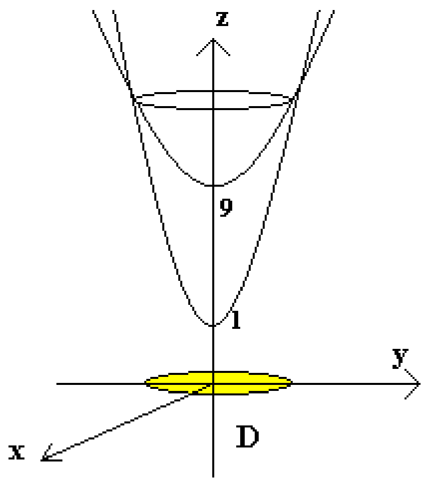
Lösning:

Skärningslinje får vi ur

$3x^2 + 3y^2 + 1 = 9 + x^2 + y^2 \Rightarrow$

$2x^2 + 2y^2 = 8 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 4$ (detta är definitionsområdet D)



Volymen:

V= $\iint_D (z_2 - z_1)dxdy$ =

$\iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$ =

(vi substituerar polära koordinater)

V= $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (8 - 2r^2)rdr$ **=** 16π

Uppgift 6. Beräkna volymen av det (begränsade) område som ligger mellan ytorna:

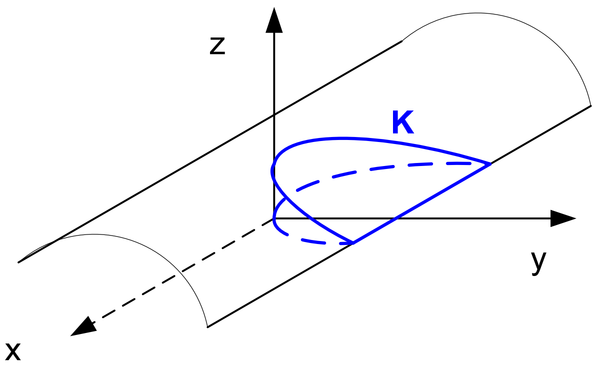
$z = 9 - y^2$, $z = 0$ och $y = \frac{x^2}{3}$

Lösning:

I ekvationen $z = 9 - y^2$ saknas variabeln x. Därför är ytan $z = 9 - y^2$ en cylindrisk yta

(som " uppstår" då parabeln $z = 9 - y^2$ i yz- planet förflyttas parallellt med x axeln)

Ytan $y = \frac{x^2}{3}$ är också en cylindrisk yta (saknas z- variabel) som "uppstår" då parabeln $y = \frac{x^2}{3}$ i yz-planet förflyttas parallellt med z axeln.



Kroppen ligger mellan $z = 9 - y^2$ och z=0. Integrationsmängden D bestäms av skärningen mellan ytorna.

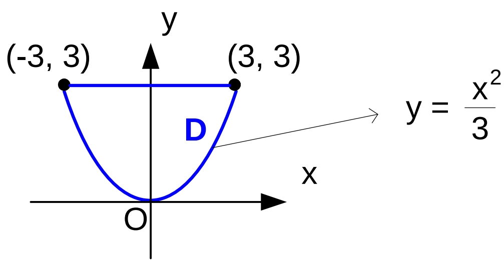
För att bestämma D kollar vi skärnings punkter i xy-planet (där z=0):

Ytorna $z = 9 - y^2$ och $z = 0$ skär varandra längs linjen $z = 0$, $y = \pm 3$.

(Endast linjen $z = 0$, $y = +3$ har gemensamma punkter med ytan $y = \frac{x^2}{3}$)

Gränsen till D i xy planet består av parabeln $y = \frac{x^2}{3}$ och linjen $y = +3$.

För gemensamma punkter gäller
$3 = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x = \pm 3$



Volymen V= $\iint_D (9 - y^2)dxdy = \int_{-3}^{3} dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{3} (9 - y^2)\, dy = \ldots = \frac{432}{7}$.