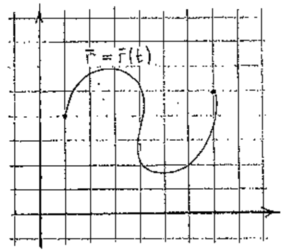
Föreläsning 16 – 17: kursboken §9.1–9.4, §10.5

- Exempel
- Kurvbegrepp
  - Riktade kurvor
  - Enkla och slutna kurvor
  - Orienterade randkurvor
  - Addition och subtraktion
- Båglängdsintegraler
  - Längd av kurvor
  - Båglängdselementet
- Kurvintegraler
  - Vektorfält
  - Definition
  - Vektoriellt båglängdselement
- Räkneregler
- Greens formel
- Konservativa vektorfält
  - Enkelt sammanhängande områden
  - Potentialformel

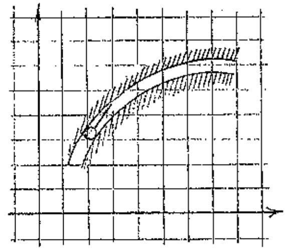
Exempel

Båglängds- och kurvintegraler är två typer av integraler som dyker upp i många tillämpningar.



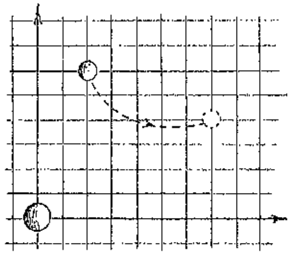
Längden av en parameterkurva γ: $r = r(t)$ ges av båglängdsintegralen

$$L = \int_\gamma ds$$



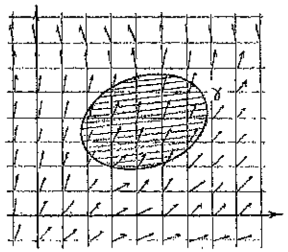
En partikel färdas i ett strävt rör. Friktionskraftens arbete ges av båglängdsintegralen

$$W = f \int_\gamma N(s)\, ds .$$



För att flytta en satellit i ett tyngdkraftfält $\bar{F}$ längs kurvan γ ges arbetet av kurvintegralen

$$W = -\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r}$$



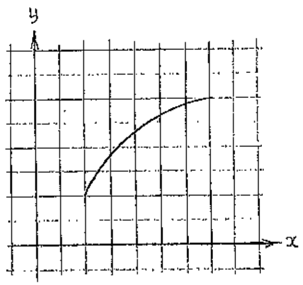
En vätska i planet har hastighetsfältet $\bar{v}$. Då ges flödet genom ett områdes rand γ av kurvintegralen

$$\Phi = \int_\gamma \bar{v} \times d\bar{r} .$$

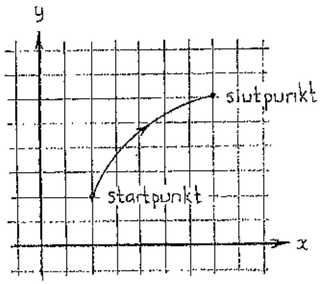
Kurvbegrepp

Riktade kurvor

En kurva är riktad om den ges en genomloppsriktning.

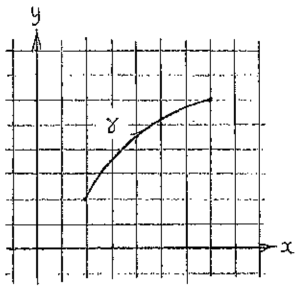


En oriktad kurva

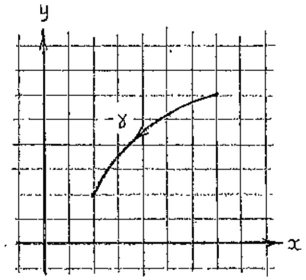


En riktad kurva

Om γ är en riktad kurva, då betecknar $-\gamma$ samma kurva med omvänd genomloppsriktning.

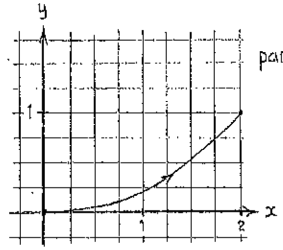


Den riktade kurvan γ.



Den riktade kurvan $-\gamma$.

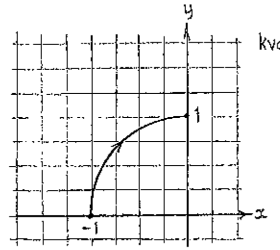
Övning 1: Parametrisera de riktade kurvorna.



parabel

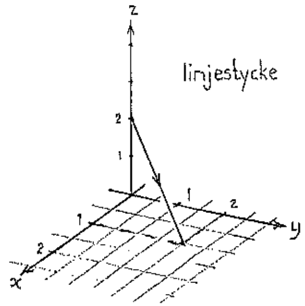
$y = \frac{1}{2}x \qquad x: 0 \to 2$

$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{2} \end{cases} \qquad t: 0 \to 2$



kvartscirkel

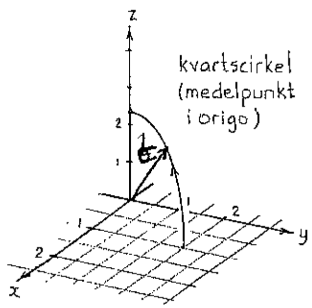
$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t: \pi \to \pi/2$



$\bar{r}(t) = (0,0,2) + t\,\bar{v}$

$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 2 - 2t \end{cases}$



$\begin{cases} x(t) = \sqrt{5}\sin t \\ y(t) = \sqrt{5}\sin t \\ z(t) = \sqrt{5}\cos t \end{cases}$

$t: \frac{\pi}{2} \to 0$

Enkla och slutna kurvor

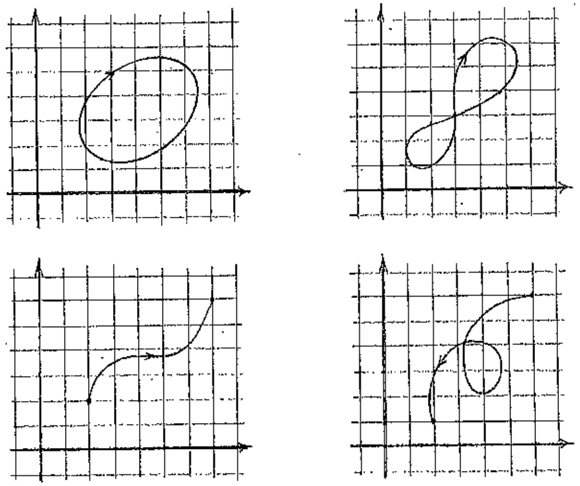
En kurva som inte skär sig själv kallas för enkel.

En kurva där start- och slutpunkten sammanfaller kallas för sluten.

Enkel | Ej enkel

Sluten

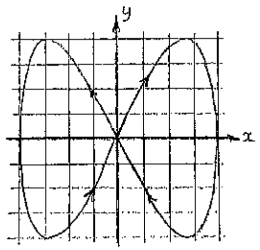
Ej sluten



Övning 2: Visa att $\bar{r}(t) = (\sin t, \sin 2t)$, $(t: 0 \to 2\pi)$ är

a) sluten: $\bar{r}(0) = 0 = \bar{r}(2\pi)$

b) ej enkel

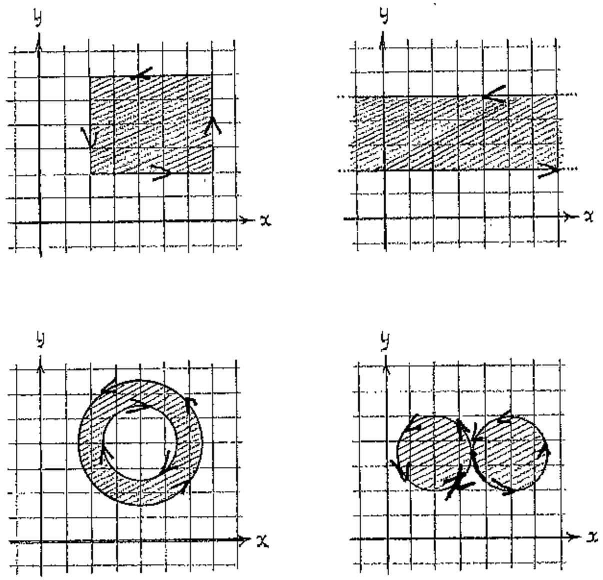


Orienterade randkurvor

En randkurva till ett område är positivt orienterad om området befinner sig till vänster om kurvan i omloppsriktningen.

Motsatt riktning kallas för negativ orientering.

Övning 3: Rita in positivt orienterade randkurvor.



Båglängdsintegraler

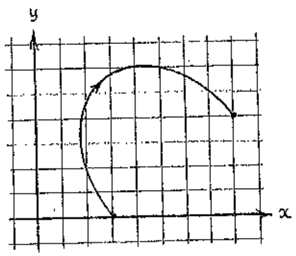
Längd av kurvor

En kontinuerligt deriverbar parameter-kurva

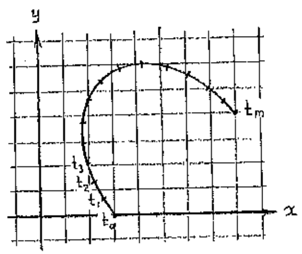
$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{där } a \leq t \leq b,$$

har längden

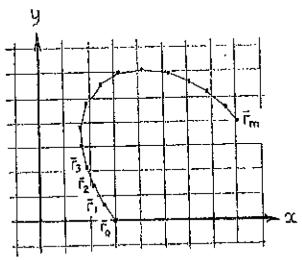
$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$



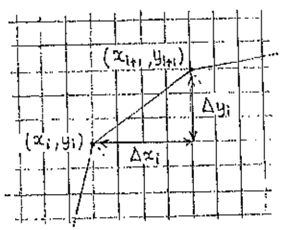
① Vi ska bestämma längden av kurvan $\bar{r} = (x(t), y(t)), \ t: a \to b$



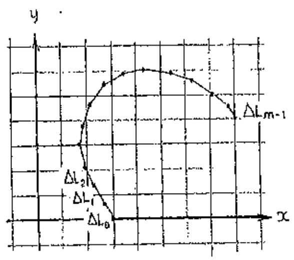
② Dela in parameterintervallet $[a,b]$ i delintervall $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b.$



③ Detta ger en indelning av kurvan i räta linjestycken mellan punkterna $\bar{r}_i = (x(t_i), y(t_i))$.



④ Längden av ett linjestycke är $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.



⑤ Kurvans totala längd är approximativt $L \approx \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

$$L = \lim_{\substack{m \to \infty \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$
$$= \lim_{\substack{m \to 0 \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\, \Delta t_i$$
$$= \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

⑥ Summaformeln för längden är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

Båglängdselementet

Uttrycket

$$ds = |\dot{\bar{r}}(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

kallas för båglängdselementet.

För kurvor i rummet

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad t: a \to b$$

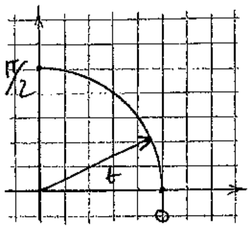
blir båglängdselementet

$$ds = |\dot{\bar{r}}(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt.$$

Längden av kurvan

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

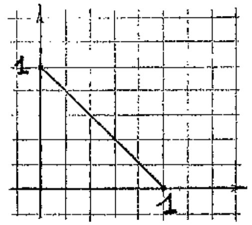
Övning 4: Bestäm båglängdselementet



$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \qquad t: 0 \to \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt$$

$$= \ell .$$



$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 - t \end{cases}$$

$$L = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Exempel: Bestäm längden av kurvan

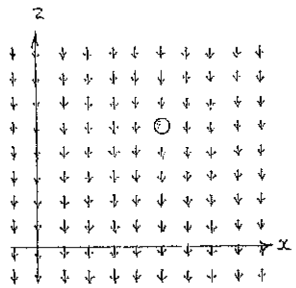
$$\bar{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad \text{där } t: 0 \to 2\pi .$$

Lösningsförslag: Görs på tavlan.

Kurvintegraler

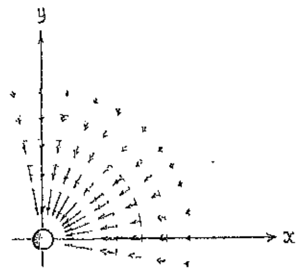
Vektorfält

Ett vektorfält $\bar{F}$ tillordnar till varje punkt $\bar{r}$ en vektor $\bar{F}(\bar{r})$.



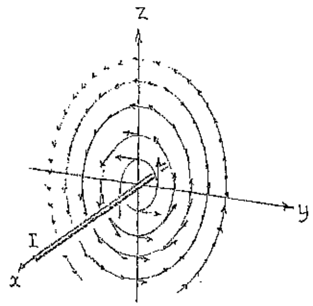
Tyngdkraftfält

$\bar{F} = -mg\,\bar{e}_z$



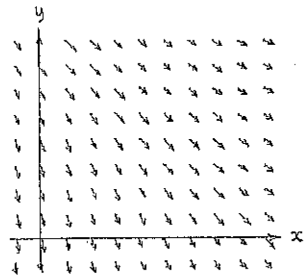
Elektriskt fält

$\bar{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\bar{r}$



Magnetiskt fält

$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y^2+z^2)}(y\bar{e}_z - z\bar{e}_y)$



Hastighetsfält

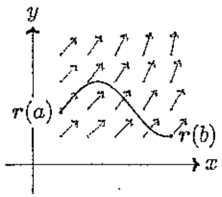
$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$.

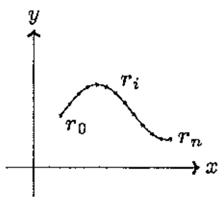
Arbetsintegraler = *kurvintegraler*

En partikel rör sig längs parameterkurvan

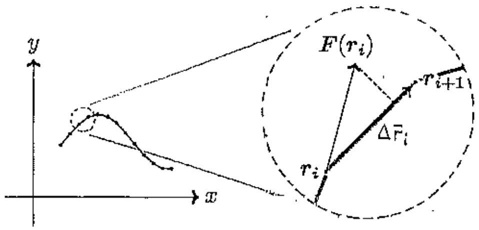
$$\gamma: \bar{r} = \bar{r}(t), \quad \text{för} \quad t: a \to b,$$

i ett kraftfält $\bar{F}(\bar{r})$. Vi ska bestämma det arbete som kraftfältet utför på partikeln.





Dela in parameterintervallet $[a,b]$ i delintervall med ändpunkter $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ och approximera kurvan med räta linjestycken mellan ändpunkterna.



På varje linjestycke är kraftfältet approximativt konstant (Taylors formel till ordning 0) och arbetet därför approximativt $\bar{F}(\bar{r}_i)\cdot\Delta\bar{r}_i$.

Det totala arbetet fås genom att summera det approximativa arbetet på varje linjestycke och låta finheten i indelningen $\to 0$,

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{F}(\bar{r}_i)\cdot\Delta\bar{r}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{F}(\bar{r}_i)\cdot\frac{\Delta\bar{r}_i}{\Delta t_i}\Delta t_i$$

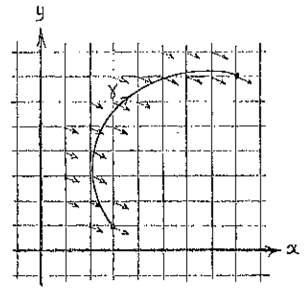
$$= \{\text{Riemannsumma}\} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\dot{\bar{r}}(t)\,dt.$$

Definition

Om $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$ är ett kontinuerligt vektorfält och γ är en riktad kurva, då definieras

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\dot{\bar{r}}(t)\,dt,$$

där $\bar{r} = \bar{r}(t)$ $(t: a\to b)$ är en parametrisering av γ.



Denna definition är konsistent eftersom värdet av kurvintegralen är oberoende av val av parametrisering.

Vektoriellt båglängdselement

Uttrycket

$$d\bar{r} = \dot{\bar{r}}(t)\,dt = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt.$$

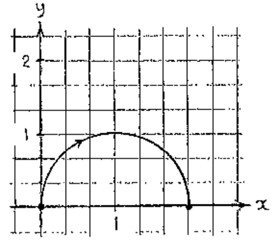
kallas för det vektoriella båglängdselementet.

Obs om $\bar{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$\bar{r} = (x, y, z)$, $\quad d\bar{r} = (dx, dy, dz)$

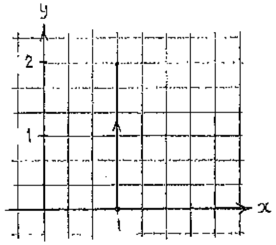
$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_\gamma (P, Q, R)\cdot(dx, dy, dz)$$

Övning 5: Bestäm en parametrisering och det vektoriella bågelementet.



$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t: \frac{\pi}{2} \to 0$$

$$d\bar{r} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt = (-\sin t, \cos t)\,dt$$



$x(t) = 1$
$y(t) = t \quad t: 0 \to 2$

$$d\bar{r} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt = (0, 1)\,dt$$

Övning 6: Avläs vektorfältet $\bar{F}$ från kurvintegralen.

a) $\int_\gamma xy^2 dx - y\,dy = \int_\gamma \underbrace{(xy^2, -y)}_{\bar{F}} \cdot (dx, dy)$

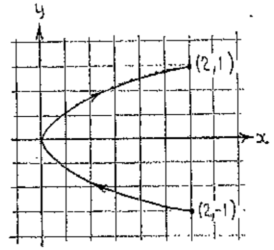
b) $\int_\gamma dy - x\,dx = \int_\gamma \underbrace{(-x, 1)}_{\bar{F}} \cdot (dx, dy)$

c) $\int_\gamma xy\,dy = \int_\gamma \underbrace{(0, xy)}_{\bar{F}} \cdot (dx, dy)$

Exempel: Beräkna

$$\int_\gamma xy\,dx + x^2 dy$$

där γ är parabeln till höger.



Lösningsförslag:

Kurvan γ ges av $x = y^2$

riktning: $(2,-1) \to (2,1)$ längs γ.

$$\int_\gamma xy\,dx + x^2 dy = \begin{bmatrix} y = t & t: -1 \to 1 \\ x = t^2 & \\ dy = dt, & dx = 2t\,dt \end{bmatrix} =$$

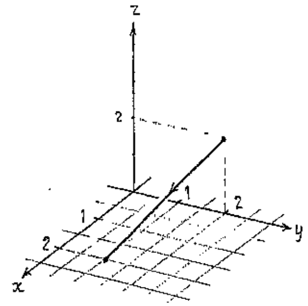
$$= \int_{-1}^{1} t^2 \cdot t \cdot (2t\,dt) + t^4 \cdot dt = \int_{-1}^{1} 3t^4 dt =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 3t^4 dt = \frac{6}{5}$$

Exempel: Beräkna

$$\int_\gamma (2x-y)\,dx + (-x+2y)\,dy + (2x-z)\,dz$$

där γ är linjestycket nedan.



Lösningsförslag

$\bar{r}(t) = (0,2,2) + t\,\bar{v}$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma: \begin{cases} x(t) = 2t & t: 0 \to 1 \\ y(t) = 2-t \\ z(t) = 2-2t \end{cases}$$

$$\int_\gamma (2x-y)\,dx + (-x+2y)\,dy + (2x-z)\,dz =$$

$$= \left[\begin{matrix} x(t) = 2t & t: 0 \to 1 \\ y(t) = 2-t \\ z(t) = 2-2t \end{matrix} \right]$$

$$= \int_0^1 \Big(\big(2(2t)-(2-t)\big) \underbrace{2\,dt}_{dx} + \big(-2t+2(2-t)\big) \underbrace{(-dt)}_{dy} +$$

$$+ \big(2(2t)-(2-2t)\big) \underbrace{(-2\,dt)}_{dz} =$$

$$= \int_0^1 (2t-4)\,dt = -3$$

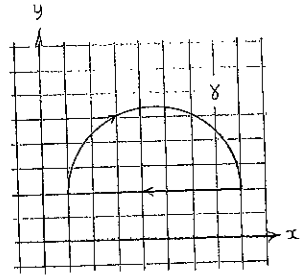
Kontrollera!

Räkneregler

Additivitet

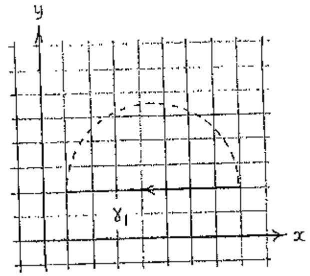
Om γ_1 och γ_2 är två riktade kurvor, då är

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} + \int_{\gamma_2} \bar{F}\cdot d\bar{r}.$$

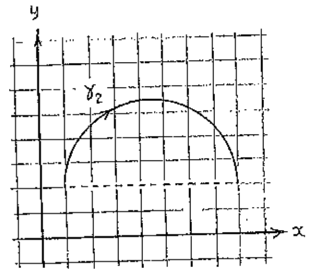


① Vi ska beräkna

$$I = \int_\gamma y^2\,dx$$



② Kurvan γ kan delas upp i delkurvan γ_1



③ och i delkurvan γ_2.

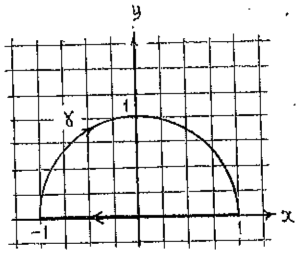
$$I = \int_{\gamma_1} y^2\,dx + \int_{\gamma_2} y^2\,dx.$$

④ Då får vi kurvintegralens värde genom att integrera över resp. delkurva och summera.

Exempel: Beräkna

$$\oint_\gamma x\,dy$$

där γ är kurvan till höger.



Lösningsförslag (Görs på tavlan)

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, där γ är sträckan från $x = 1 \to -1$ och γ är halvcirkel från -1 till 1

$$\oint_\gamma x\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dy = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{\gamma_1} x\,dy = \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x: \cancel{t \to} \; -1 \to 1 \\ dy = 0 \end{array}\right] = \int_\gamma x \cdot 0 = 0$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} x\,dy = \left[\begin{array}{ll} x = \cos t & t: \pi \to 0 \\ y = \sin t & \end{array}\right]$$

$$= \int_\pi^0 \cos t \underbrace{\cos t\, dt}_{dy} = -\int_0^\pi \cos^2 t\, dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2} \\ \text{se SF1625 om trigonometri} \end{array}\right]$$

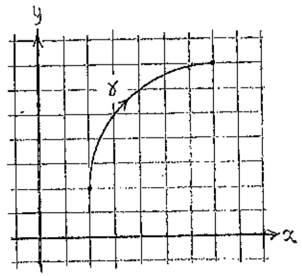
$$= -\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = -\frac{\pi}{2}$$

Svar $\oint_\gamma x\,dy = -\frac{\pi}{2}$

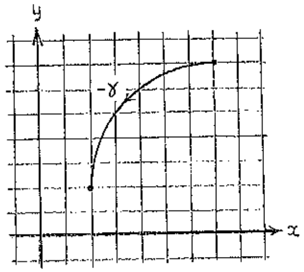
Orientering

Om γ är en orienterad kurva, då är

$$\int_{-\gamma} \bar F \cdot d\bar r = -\int_\gamma \bar F \cdot d\bar r.$$



① Om vi har att $\int_\gamma \bar F \cdot d\bar r = 10.$



② Då är $\int_{-\gamma} \bar F \cdot d\bar r = -10.$

Linjaritet

Om F och G är integrabla vektorfält och a och b är konstanter, då är

$$\int (a\bar F + b\bar G)\cdot d\bar r = a\int \bar F \cdot d\bar r + b\int \bar G \cdot d\bar r.$$

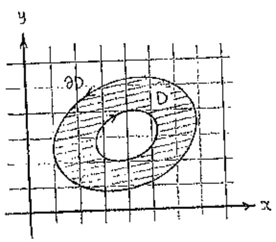
ATT beräkna $\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r}$ via en dubbelintegral

Greens formel i planet

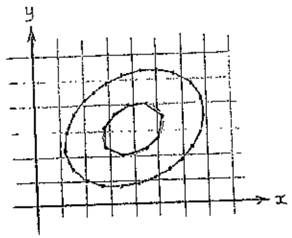
Låt D vara ett slutet område med en styckvis kontinuerligt deriverbar enkel randkurva ∂D som är positivt orienterad, (se sid 6) och antag att vektorfältet $\bar{F} = (P, Q)$ är kontinuerligt deriverbart på D. Då är

$$\oint_{\partial D} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_D \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}}_{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}} dx\,dy. = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

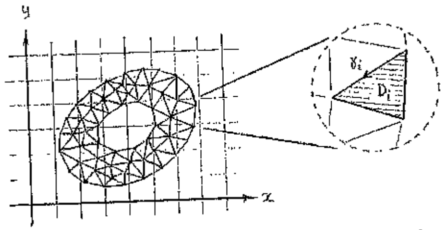
Bevisskiss:



(1) Vi startar med området D och dess positivt orienterade rand ∂D.



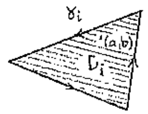
(2) Approximera randen genom att dela upp den i räta linjestycken.



(3) Dela upp området i trianglar D_i utifrån randens linjestycken och låt γ_i vara den positivt orienterade randen till D_i. Då är $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ och integralers additivitet ger att

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy,$$

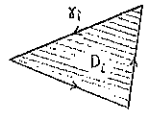
$$\oint_{\partial D} (P,Q)\cdot d\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} (P,Q)\cdot d\bar{r}.$$



(4) Fokusera på en enskild triangel. Dubbelintegralen över D_i är

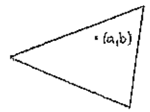
$$\iint_{D_i} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$
$$= \big(Q'_x(a,b) - P'_y(a,b)\big)\,\text{area}(D_i) + \text{R.T.}$$

där (a,b) är en punkt i D_i.



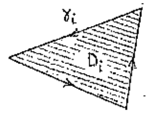
(5) Visa sedan följande elementära hjälpresultat

$$\oint_{\gamma_i} (A + Bx + Cy)\,dx + (E + Fx + Gy)\,dy$$
$$= (F - C)\,\text{area}(D_i).$$



(6) Linjarisera vektorfältet $\bar{F}$ kring $(x,y) = (a,b)$,

$$\bar{F}(a+h, b+k)$$
$$= \begin{pmatrix} P(a,b) + P'_x(a,b)h + P'_y(a,b)k \\ Q(a,b) + Q'_x(a,b)h + Q'_y(a,b)k \end{pmatrix} + \text{R.T.}$$



(7) Kurvintegralen över γ_i är appr.

$$\oint_{\gamma_i} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$
$$= \oint_{\gamma_i} \{P(a,b) + P'_x(a,b)(x-a) + P'_y(a,b)(y-b)\}\,dx$$
$$+ \oint_{\gamma_i} \{Q(a,b) + Q'_x(a,b)(x-a) + Q'_y(a,b)(y-b)\}\,dy + \text{R.T.}$$
$$= \{\text{Hjälpresultat (5)}\}$$
$$= \big(Q'_x(a,b) - P'_y(a,b)\big)\,\text{area}(D_i) + \text{R.T.}$$

(8) Alltså har vi visat att

$$\iint_{D_i} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \oint_{\gamma_i} (P,Q)\cdot d\bar{r} + \text{Restterm}.$$

Summering ger att

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \oint_\gamma (P,Q)\cdot d\bar{r} + \text{Restterm}$$

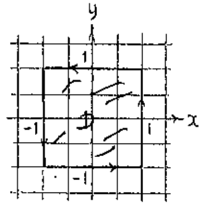
Genom att detta gäller oavsett approximationen kan vi låta approximationens finhet gå mot noll och i gränsen har vi att resttermen är noll.

Övning 7: Skriv upp Greens formel för följande kurvintegraler.

a) $\oint \underbrace{(\overset{P}{xy}, \overset{Q}{x+y})}_{\bar{F}} \cdot \underbrace{d\bar{r}}_{(dx,dy)}$

$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dx\,dy$

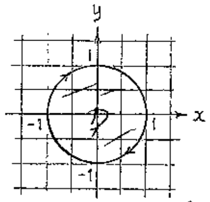
$= \iint_D (1-x)\,dx\,dy$



b) $\oint \underbrace{y^3}_{P} dx \underbrace{-x^3}_{Q} dy =$

$= -\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) \right] dx\,dy$

$= 3 \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$



obs! orientering
Här negativ

Exempel: Beräkna kurvintegralen i övning 7b.

Lösningsförslag: Görs på tavlan

Vi får $\oint y^3 dx - x^3 dy = 3 \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

$= \begin{bmatrix} x = r\cos\theta & r: 0 \to 1 \\ y = r\sin\theta & \theta: 0 \to 2\pi \\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta & \end{bmatrix} = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$

$= 3 \underbrace{\left(\int_0^1 r^3 dr \right)}_{1/4} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta \right)}_{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$

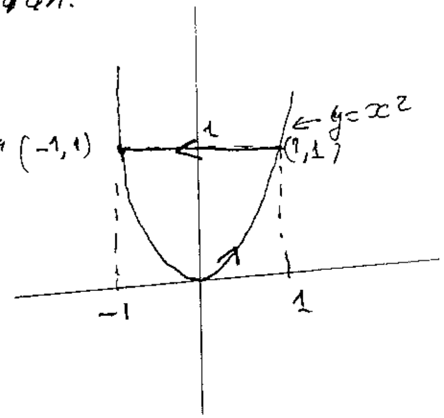
Bra Exempel: Beräkna

$$\int_\gamma (x^4 - y^2)\,dx + (x^4 + y^2)\,dy$$

längs parabeln $y = x^2$ från $(-1,1)$ till $(1,1)$ och linjen $y = 1$ från $(1,1)$ till $(-1,1)$.

Lösningsförslag görs på tavlan.

Hur man använder Greens formeln och parametrisering av kurvan
Två olika metoder.

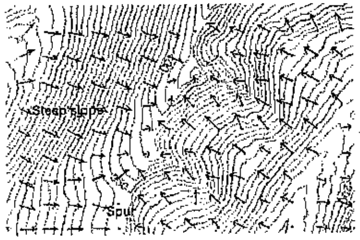


Konservativa vektorfält

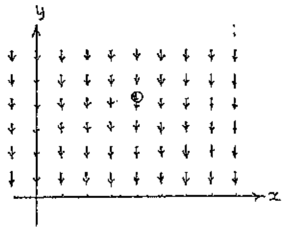
Ett konservativt vektorfält $\bar{F}$ är ett vektorfält som är förändringsfältet till en underliggande skalär storhet U,

$$\bar{F} = \nabla U.$$

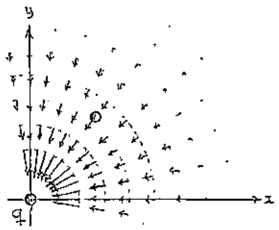
Storheten U kallas för en potential till vektorfältet.



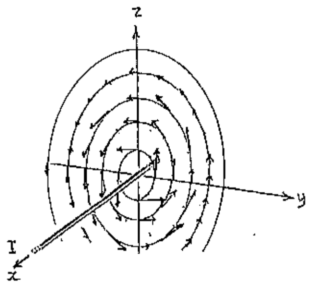
Det vektorfält på en karta som i varje punkt pekar i den riktning markhöjden ökar som mest och vars belopp anger ökningstakten är konservativt med höjden över havet som potential.



Tyngdkraftfältet är konservativt med den potentiella energin som potential.



Det elektriska fältet $\bar{E}$ som omger en laddning q är konservativt med den elektriska potentialen V som potential.



Det magnetiska fältet $\bar{B}$ kring en elektrisk ledare är inte konservativt.

Exempel: Bestäm en potential till det konservativa vektorfältet

$$\bar{F} = (y^3 + 3x^2y^2,\ 3xy^2 + 2x^3y).$$

Lösningsförslag (Görs på tavlan)

Rotationen för ett vektorfält $\bar F=(P,Q,R)$
där $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$
Definieras via

$$rot(\bar F)=\nabla\times\bar F=\begin{vmatrix}\bar e_x & \bar e_y & \bar e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

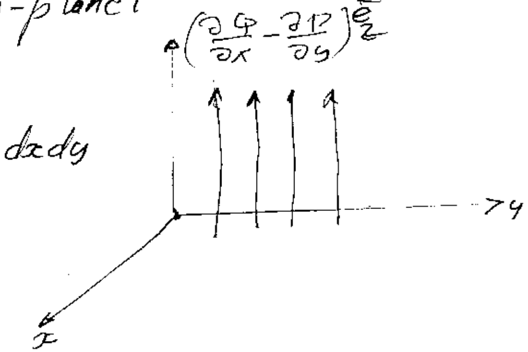
Om $\bar F=(P(x,y),\ Q(x,y))$

$$rot(\bar F)=\nabla\times(P,Q)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar e_z$$

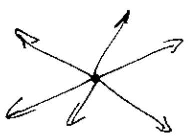
dvs vinkelrät mot xy-planet

Green formel lyder

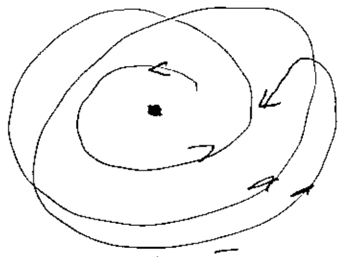
$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D \underbrace{(rot(\bar F)\cdot\bar e_z)}_{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}\,dxdy$$



. rotation $rot(\bar F)$ mäter ett vektorfälts tendens att roterar runt en punkt (virvel)



$rot(\bar F)=\bar 0$



$rot(\bar F)\neq\bar 0$
virvel

Följande sats ger ett nödvändig villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt. (virvelfritt)

Sats $\quad \bar F$ konservativt $\Longrightarrow rot(\bar F)=\bar 0$

Bevis om $\bar F=(P,Q)=\nabla U$ så har vi

$$\begin{cases} P(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x} & (1)\\ Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y} & (2)\end{cases}$$

(1) och (2) är lösbart om

$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\end{cases}\quad \text{dvs } \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$

dvs $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ som säger

$$rot(P,Q)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar e_z=\bar 0$$

Om området D där $\bar F$ är definierad är Enkelt sammanhängde så gäller att $\bar F$ är konservativt $\Longleftrightarrow rot(\bar F)=\bar 0$

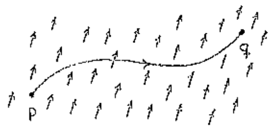
(se sid 28)

Kurvintegraler av konservativa vektorfält

Om $\bar{F}$ är ett konservativt vektorfält med potential U i området D, då är

$$\boxed{\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = U(q) - U(p),}$$

där γ är en riktad kurva i D som har startpunkt p och slutpunkt q.



Bevis: Låt $\bar{r} = \bar{r}(t)$ $(t: a \to b)$ vara en parametrisering av γ. Då är

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \nabla U \cdot \dot{\bar{r}}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \{\text{Kedjeregeln}\}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\bar{r}(t))\, dt$$

$$= U(\bar{r}(b)) - U(\bar{r}(a))$$

$$= U(q) - U(p).$$

Notera hur formeln

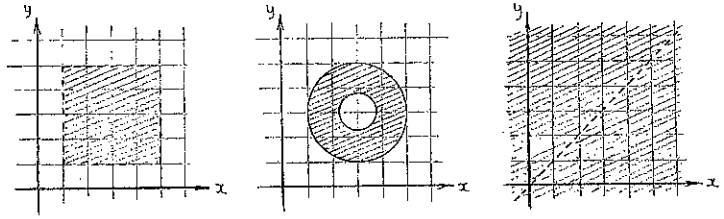
$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = U(q) - U(p)$$

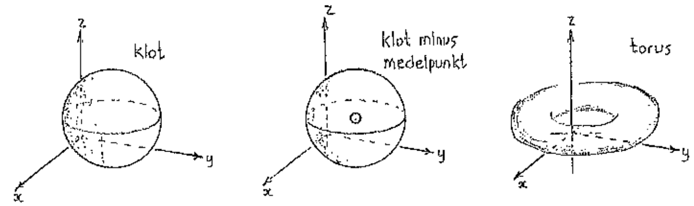
medför att kurvintegralens värde är oberoende av kurvan γ och bara beror på start- och slutpunkten.

Enkelt sammanhängande områden

Ett område D är enkelt sammanhängande om det är sammanhängande och varje sluten kurva i D kan deformeras inuti D till en punkt i D.

Övning 10: Vilka av följande områden är enkelt sammanhängande?





Sats Om D är ett öppet enkelt sammanhängande område, då är

$$\bar{F} \text{ konservativt i } D \iff \text{rot}(\bar{F}) = \bar{0} \text{ i } D$$

Övning 11: Vilka vektorfält i är konservativa?

a) $\bar{F} = (3x^2y + y^2,\ x^3 + 2xy + x)$

b) $\bar{F} = (y\cos xy,\ y + x\cos xy)$

c) $\bar{F} = (2xy,\ x^2 + 2yz,\ y^2 - 2z)$

Kriterier för konservativa fält

Låt $\bar{F}$ vara kontinuerligt deriverbar på den enkla domän D med randen ∂D

Då är följande utsagor ekvivalenta

(1) $\bar{F}$ är konservativt

(2) Värdet $\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r}$ är oberoende av integrationsvägen

(beror endast av startpunkt $\bar{p}$ och slutpunkt $\bar{q}$)

$$\int_{\gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\gamma_2} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

(3) Greens formeln ger

$\oint_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ för alla enkla och slutna kurvor i D.

(4) $\bar{F}$ har en skalär potential U

$$\bar{F} = \nabla U$$

(5) $$\int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = U(\bar{q}) - U(\bar{p})$$

(6) $\mathrm{rot}(\bar{F}) = \bar{0}$ för alla $(x,y,z) \in D$

$$\mathrm{rot}(\bar{F}) = \nabla \times (P,Q,R) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Jakobianen till $\bar{F} = (P,Q,R)$ är

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Vi får att $\mathrm{rot}(\bar{F}) = \bar{0} \iff \frac{\partial \bar{F}}{\partial(x,y,z)}$ är *symmetrisk*

Exempel: Beräkna

$$\int_\gamma (3y + 2\sin(2x-y))\,dx + (3x - \sin(2x-y))\,dy.$$

längs parabeln $y = 2x^2$ från $(0,0)$ till $(1,2)$.

Görs på Tavlan.

Exempel: Beräkna

$$\int_\gamma 2xy\,dx + (x^2+2yz)\,dy + (y^2-2z)\,dz$$

där γ är kurvan $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ från $(1,0,0)$ till $(-1,0,\pi)$

Görs på Tavlan.