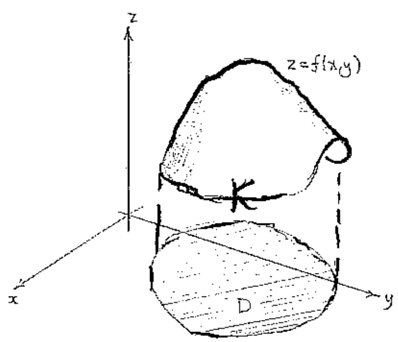
Föreläsning: 10-12 (i kursb § 6.1 - 6.6)

- Exempel
- Definition
- Dubbelintegraler som volymer
- Iterationsformler
  - Iterationsformler för rektanglar
  - Enkla områden
  - Iterationsformler för enkla områden
- Räkneregler
- Variabelsubstitution **Förel: 11**
  - Polär substitution
  - Linjär substitution
  - Allmän substitution
- Symmetrier
- Tillämpningar **Förel: 12**
- Generaliserade dubbelintegraler

Exempel på dubbelintegraler

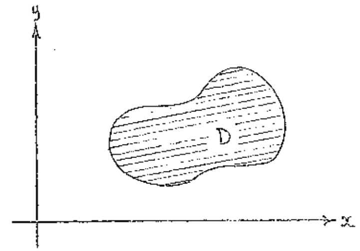
Volym under funktionsyta



Volymen mellan x,y-planet och funktionsytan $z=f(x,y)$ där $f(x,y)\geq 0$ innanför området D i x,y-planet ges av

$$\text{Volym} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

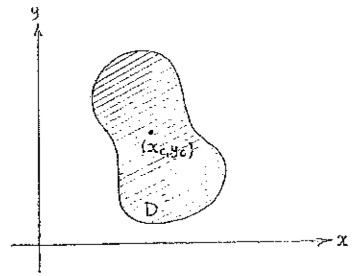
Area av område i planet



Arean av ett område D i planet ges av

$$\text{Area} = \iint_D 1\,dx\,dy$$

Masscentrum



Masscentrum för ett plant området D med densitet $\rho(x,y)$

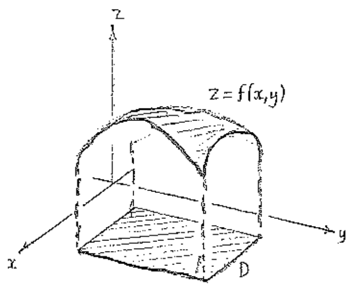
$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

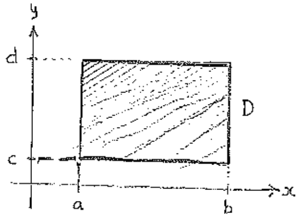
$$y_c = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

där m är områdets massa.

Definition av dubbelintegral

Utgå från problemet att bestämma volymen mellan funktionsytan till en (positiv) funktion och xy-planet inom en rektangel $D: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$.

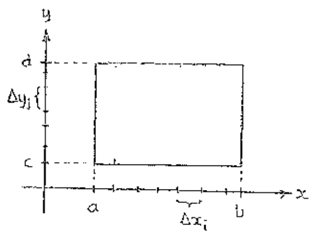


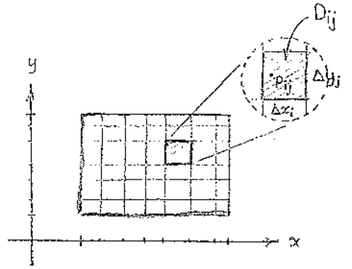


Riemannsumma

Volymen kan bestämmas med en Riemannsumma och det sker i tre steg.

① Partitionera området D





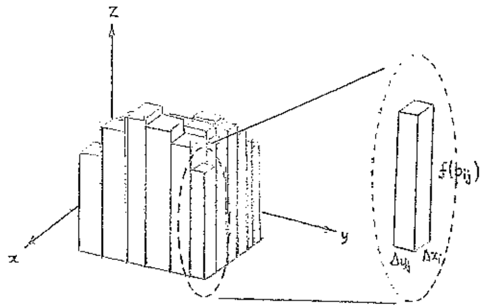
Dela in intervallet $[a,b]$ på x-axeln i m delintervall där intervall i har längd Δx_i

Dela in intervallet $[c,d]$ på y-axeln i n delintervall där intervall j har längd Δy_j

Detta skapar en partition av rektangeln D i delrektanglar D_{ij}.

Välj en punkt p_{ij} i varje delrektangel D_{ij}.

② Ställ upp en Riemannsumma



Approximera volymen inom varje delrektangel D_{ij} med ett rätblock vars höjd är $f(p_{ij})$.

Rätblocket med basytan D_{ij} har då volymen

$$\boxed{\Delta V_{ij} = (\text{basarea})\cdot(\text{höjd}) = \Delta x_i \Delta y_j \cdot f(p_{ij})}$$

och den eftersökta totala volymen är approximativt

$$V \approx \sum_{\substack{0 \leq i < m \\ 0 \leq j < n}} f(p_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j\,.$$

③ Gå i gränsen

En allt finare indelning i delrektanglar ger bättre och bättre approximation av det vi kallar volymen och i gränsen gäller

$$V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{\substack{0 \leq i < m \\ 0 \leq j < n}} f(p_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j\,.$$

Anteckningar

Över- och undersummor

I varje delrektangel D_{ij} har f ett största värde M_{ij} och ett minsta värde m_{ij}.

Som en övre och undre skattning av volymen bildar vi över- resp. undersumman

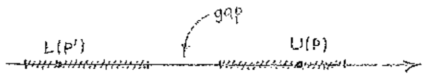
$$U(f,P) = \sum_{\substack{0\le i<m \\ 0\le j<n}} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \qquad (P = \text{partitionen})$$

$$L(f,P) = \sum_{\substack{0\le i<m \\ 0\le j<n}} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

Vi har då

$$L(f,P) \le V \le U(f,P).$$

Om vi ritar upp de möjliga värdena som över- och undersummorna kan anta för alla möjliga partioner P får vi figuren:



Definition

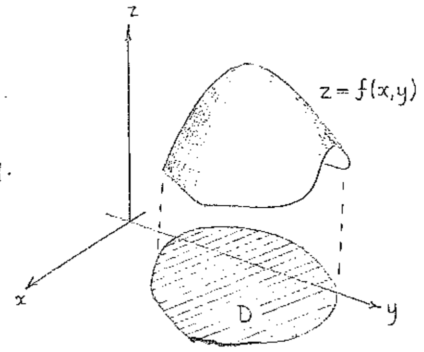
Om gapet mellan över- och undersummor består av exakt ett värde I, säger vi att f är integrabel på D och talet I kallas för den bestämda integralen av f över D och betecknas

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Dubbelintegraler som volymer

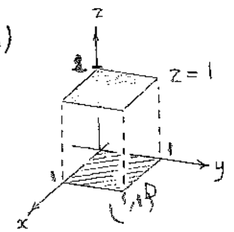
Antag att $f(x,y) \geq 0$ och D är ett område i xy-planet. Då ges volymen mellan xy-planet och funktionsytan $z = f(x,y)$ inom området D av

$$\text{Volym} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$



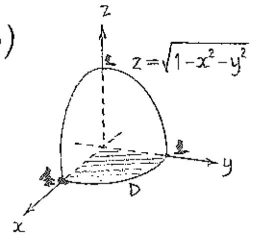
Övning 1: Bestäm $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

a)



$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$

b)

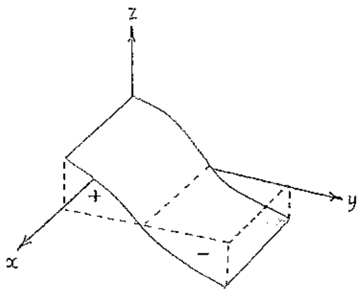


$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$

obs volymen är en sfär med radie R: $\frac{4\pi R^3}{3}$

Om integranden $f(x,y)$ både är positiv och negativ på integrationsområdet, då är

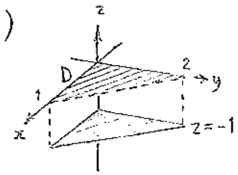
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = (\text{Volym ovanför } xy\text{-planet}) - (\text{Volym under } xy\text{-planet}).}$$



Den del av funktionsytan ovanför xy-planet ger positivt tillskott till integralen medan delen under xy-planet ger negativt bidrag.

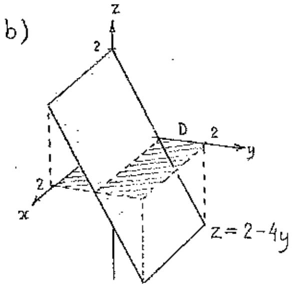
Övning 2: Bestäm $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

a)



$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$

b)



$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$

Iterationsformler

Iterationsformler för rektanglar

Om $f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion på rektangeln $D: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

(se bevisskiss sid 6)

Övning 3: Skriv $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ som upprepade enkelintegraler, där $D: 2 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1$.

a) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \square\, dx \right) dy$

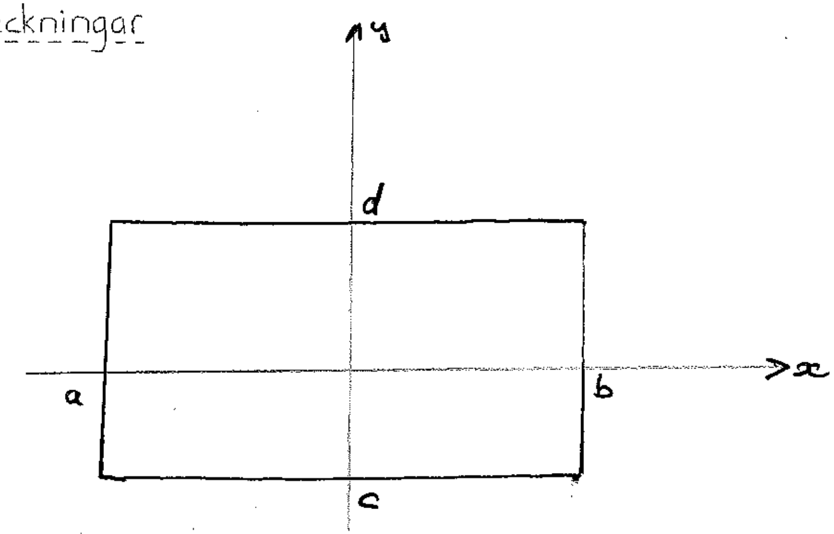
b) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \square\, dy \right) dx$

Exempel Beräkna $\iint_D x \cos xy\,dx\,dy$ där D är rektangeln $0 \leq x \leq \pi,\ 1 \leq y \leq 2$.

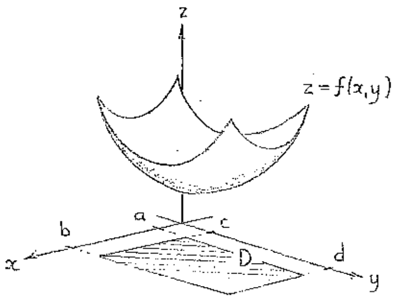
a) genom att först integrera y, sedan x.

b) genom att först integrera x, sedan y.

Anteckningar

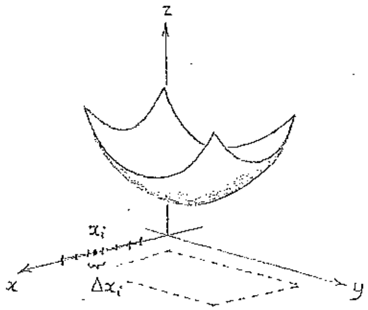


Bevisskiss

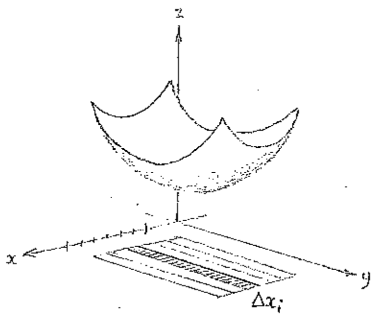


① Vi ska bestämma

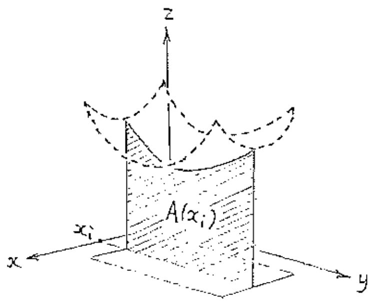
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$



② Dela in intervallet $[a,b]$ i m delintervall av längd Δx_i och välj en punkt x_i i varje delintervall.

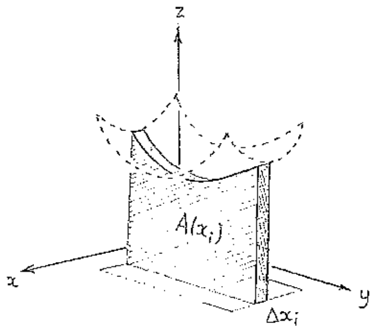


③ Detta ger en indelning av D i smala band parallella med y-axeln och bredd Δx_i.



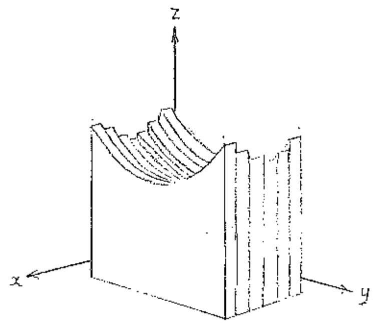
④ Fixera $x = x_i$. Då skär $x = x_i$ ut ett tvärsnitt som har arean

$$A(x_i) = \int_c^d f(x_i,y)\,dy$$



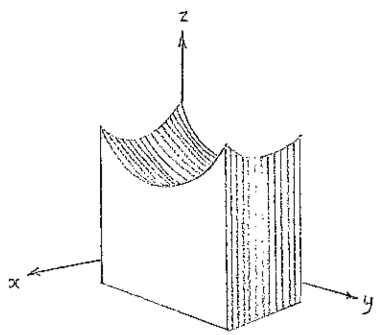
⑤ Inom bandet som innehåller x_i är volymen under funktionsytan

$$\Delta V_i = A(x_i)\,\Delta x_i.$$



⑥ Den totala volymen är approximativt

$$V \approx \sum_{i=0}^{m-1} A(x_i)\,\Delta x_i.$$



⑦ Approximationen blir bättre ju finare indelningen är.

$$V = \lim_{\substack{m \to \infty \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} A(x_i)\,\Delta x_i$$

$$= \int_a^b A(x)\,dx$$

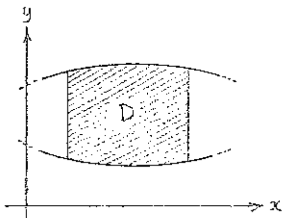
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

⑧ Summaformeln för volymen är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

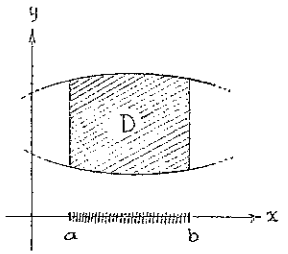
Enkla områden i y-led

Ett område som ligger mellan två funktionskurvor i y-led kallas för enkelt i y-led och kan beskrivas som

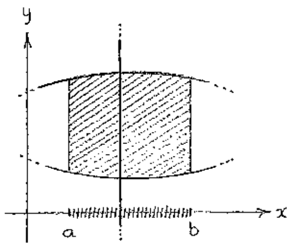
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c(x) \leq y \leq d(x) \end{cases}$$



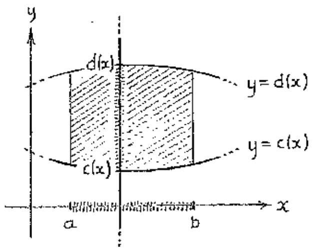
① Vi ska undersöka om området D är enkelt i y-led.



② Projicera ner alla punkter i D på x-axeln. Då fås intervallet $a \leq x \leq b$.

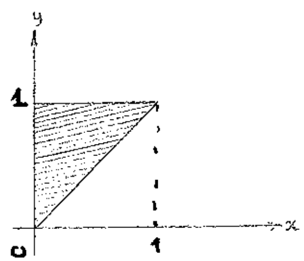


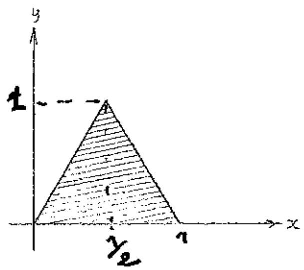
③ Genom varje x i $[a,b]$ drar vi en linje parallell med y-axeln.

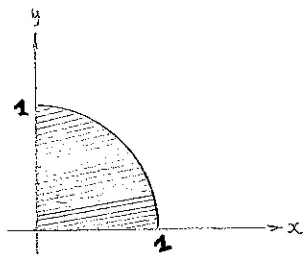


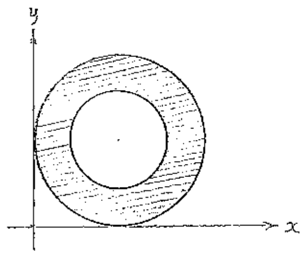
④ Om linjens skärning med D är ett sammanhängande intervall $c(x) \leq y \leq d(x)$ så är D enkelt i y-led.

Övning 4: Vilka områden är enkla i y-led?



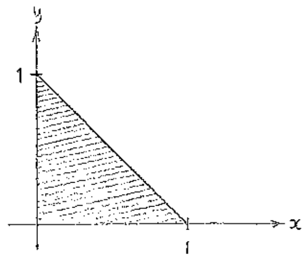


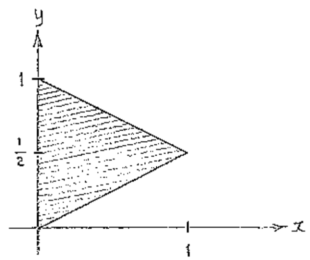




Övning 5: Beskriv områdena på formen

$$a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x).$$

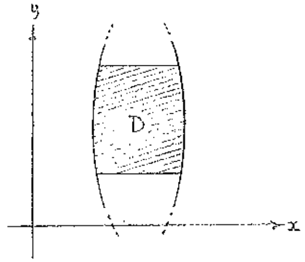




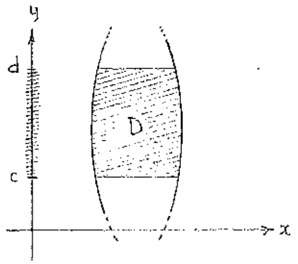
Enkla områden i x-led

Ett område som ligger mellan två funktionskurvor i x-led kallas för enkelt i x-led och kan beskrivas som

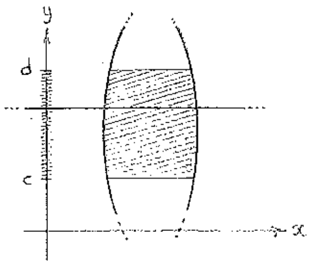
$$\begin{cases} a(y) \leq x \leq b(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$



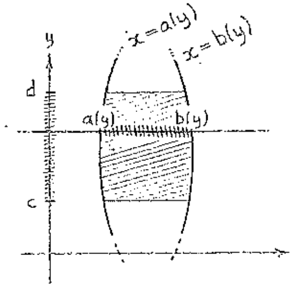
① Vi ska undersöka om området D är enkelt i x-led.



② Projicera alla punkter i D på y-axeln. Då fås ett intervall $c \leq y \leq d$

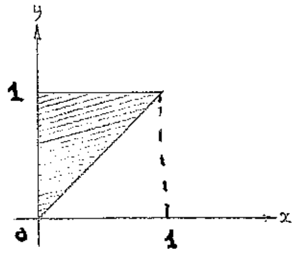


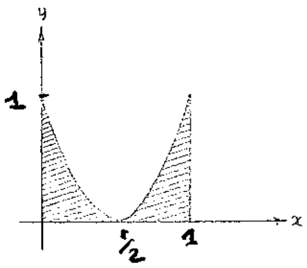
③ Genom varje y i $[c,d]$ drar vi en linje parallell med. x-axeln.

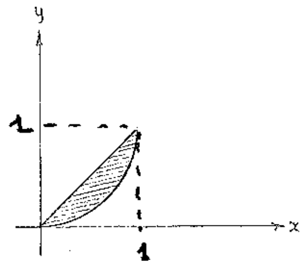


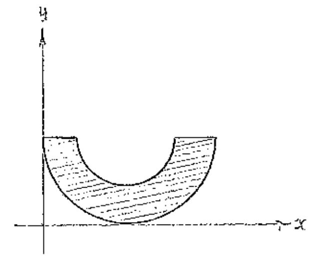
④ Om linjens skärning med D är ett sammanhängande intervall $a(y) \leq x \leq b(y)$ så är D enkelt i x-led.

Övning 6: Vilka områden är enkla i x- resp. y-led?



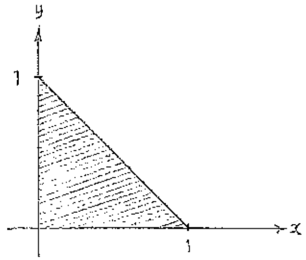


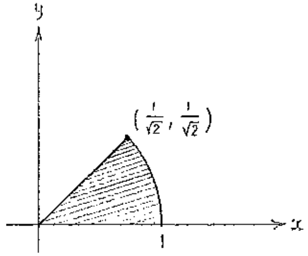




Övning 7: Beskriv områdena på formen

$$a(y) \leq x \leq b(y), \quad c \leq y \leq d.$$





ATT beräkna $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ via:

Iterationsformler för enkla områden

Om $f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion på ett enkelt område $D: \{a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x)\}$, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

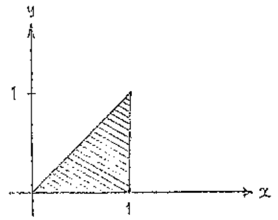
och motsvarande formel för ett enkelt område i x-led $D': \{c \le y \le d,\ a(y) \le x \le b(y)\}$ lyder

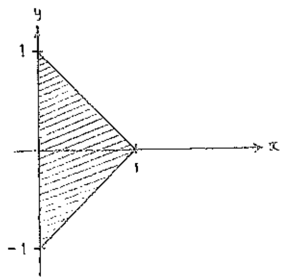
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Notation Ofta skriver man

$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{som} \quad \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy.$$

Övning 8: Skriv $\iint_D xy^2\,dx\,dy$ som upprepade enkelintegraler för följande områden





Exempel 1 Beräkna $\iint_D y\sqrt{x}\,dx\,dy$ där integrationsområdet är $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge x^2,\ y \le 2 - x^2\}$.

Exempel 2 Beräkna $\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$ över fyrhörningen med hörnen i $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$ och $(2,4)$.

Exempel 3 Beräkna $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5\,dx$.

Övning 9: Teknologen Osquar ska beräkna $\iint_D 30y\,dx\,dy$ där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x\}$ och han gör följande uträkning:

!! TÄNK !!

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{x} 30y\,dy = 15 \int_0^2 dx \left[y^2 \right]_{x^2}^{x}$$
$$= 15 \int_0^2 (x^2 - x^4)\,dx$$
$$= \left[5x^3 - 3x^5 \right]_0^2$$
$$= 40 - 48 = -8.$$

a) Varför ska man reagera på svaret?

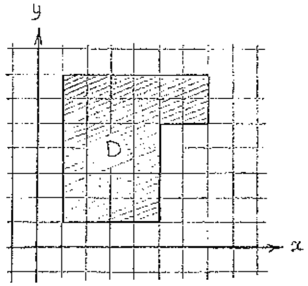
b) Vad är fel i uträkningen?

Räkneregler

Additivitet

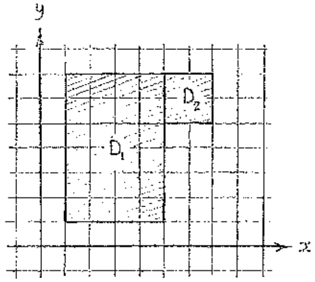
Om D_1 och D_2 är mätbara områden och en uppdelning av området D, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$



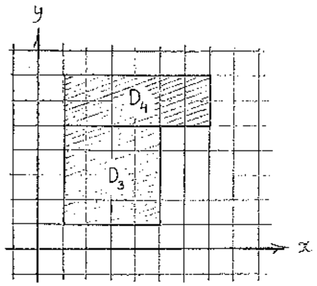
① D är området i figuren och vi ska beräkna

$I = \iint_D x\sqrt{y}\,dx\,dy.$



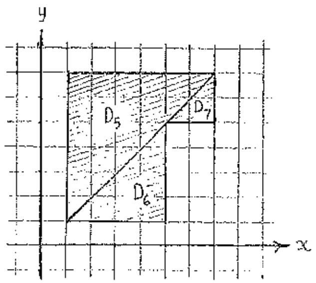
② D kan delas upp i två delrektanglar som vi sedan integrerar över

$I = \iint_{D_1} x\sqrt{y}\,dx\,dy + \iint_{D_2} x\sqrt{y}\,dx\,dy$



③ En annan indelning av D ger oss istället

$I = \iint_{D_3} x\sqrt{y}\,dx\,dy + \iint_{D_4} x\sqrt{y}\,dx\,dy$



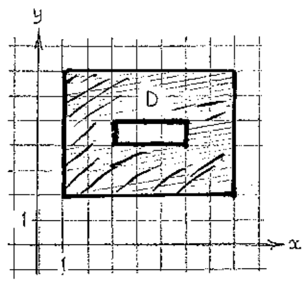
④ D kan även delas upp i fler än två delar och ge

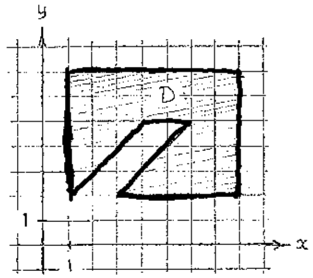
$I = \iint_{D_5} x\sqrt{y}\,dx\,dy + \iint_{D_6} x\sqrt{y}\,dx\,dy + \iint_{D_7} x\sqrt{y}\,dx\,dy.$

Övning 10: Dela upp integrationsområdet D i lämpliga delområden och uttryck

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy$$

som upprepade enkelintegraler över delområdena.

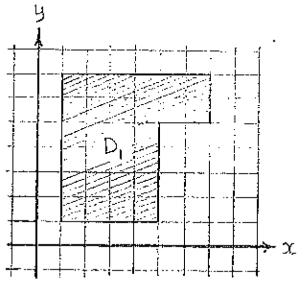




Subtraktivitet

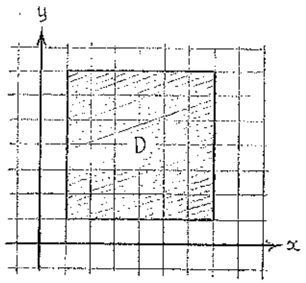
Om D_1 och D_2 är mätbara områden och en uppdelning av området D, då är

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy - \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

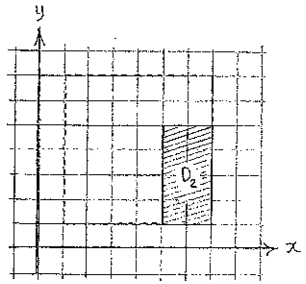


① D_1 är området i figuren och vi ska beräkna

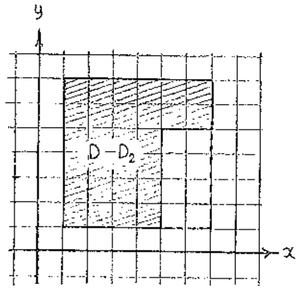
$$\iint_{D_1} x\sqrt{y}\,dx\,dy$$



② Låt D vara kvadraten ovan.



③ Låt D_2 vara rektangeln ovan.



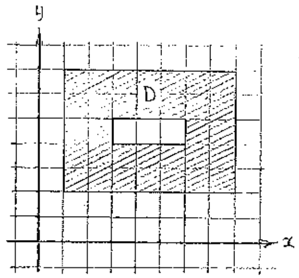
④ Då är D_1 differensen mellan D och D_2, och vi har

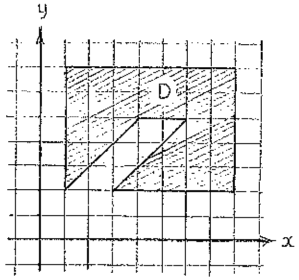
$$\iint_{D_1} x\sqrt{y}\,dx\,dy = \iint_{D} x\sqrt{y}\,dx\,dy - \iint_{D_2} x\sqrt{y}\,dx\,dy$$

Övning 11: Skriv integrationsområdet D som som differensen av två områden och uttryck

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy$$

som differensen av två upprepade enkelintegraler.





Se övning 10.

Linjaritet

Om $f(x,y)$ och $g(x,y)$ är integrabla på D och a och b är konstanter, då är

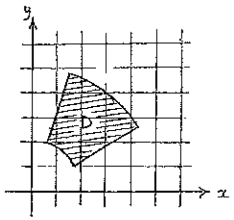
$$\iint_D \left[a f(x,y) + b g(x,y)\right] dx\,dy$$

$$= a \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + b \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

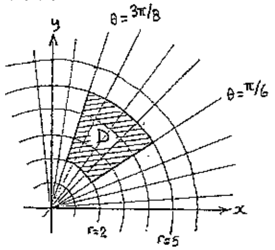
Variabelsubstitution *Förel nr 11*

Polär substitution

Ett integrationsområde med radiell symmetri beskrivs enklare i polära koordinater.

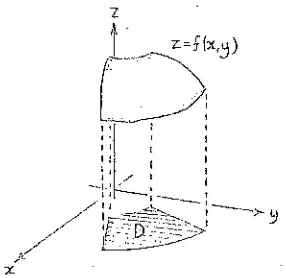


Området D har en komplicerad beskrivning i x,y-koordinater



Området D har en enkel beskrivning i polära koordinater:
$2 \leq r \leq 5$, $\pi/6 \leq \theta \leq 3\pi/8$

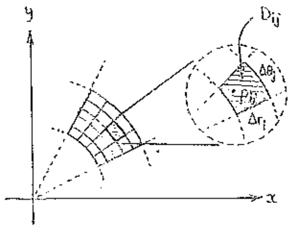
> Vid byte till polära koordinater ändras en dubbelintegral enligt formeln
>
> $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$



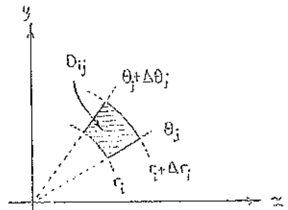
① Problemet är beräkna

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

i polära koordinater.

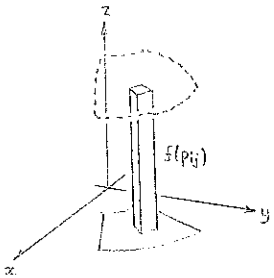


② Partitionera D i delsegment D_{ij} med längd Δr_i i r-led och vinkel $\Delta\theta_j$ i θ-led.
Välj en punkt p_{ij} i varje D_{ij}.



③ Arean av delsegmentet D_{ij}

$$\Delta A_{ij} = \tfrac{1}{2}\Delta\theta_j (r_i+\Delta r_i)^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\theta_j r_i^2$$
$$= r_i \Delta r_i \Delta\theta_j + (\text{restterm})$$



④ Volymen inom D_{ij} approximeras med

$$\Delta V_{ij} \approx \Delta A_{ij} \cdot f(p_{ij})$$
$$\approx f(p_{ij})\, r_i \Delta r_i \Delta\theta_j$$

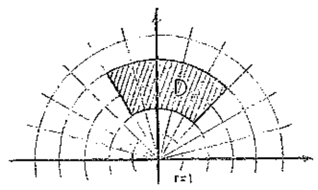
⑤ Den totala volymen blir en Riemannsumma

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{\substack{0\leq i<m \\ 0\leq j<n}} f(p_{ij})\, r_i \Delta r_i \Delta\theta_j = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

Övning 12: Skriv integralen

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy$$

i polära koordinater.



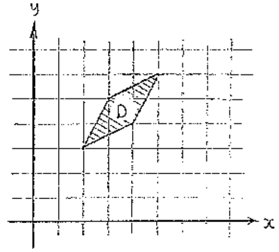
$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy = \boxed{}$$

Övning 13: Beräkna integralen ovan.

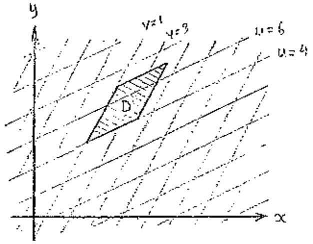
Exempel 4 Beräkna $\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, där $D: x^2+y^2 \leq 1$.

Linjär substitution

Ett integrationsområde begränsat av räta linjestycken kan eventuellt beskrivas enklare efter ett linjärt koordinatbyte.



Området D har en komplicerad beskrivning i x,y-koordinater



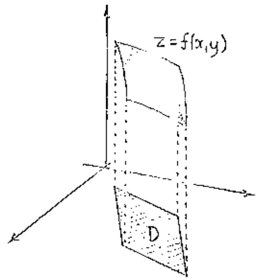
Området D har en enkel beskrivning i koordinaterna $u=-x+2y$, $v=2x-y$: $4 \le u \le 7$, $1 \le v \le 4$.

Vid ett linjärt variabelbyte

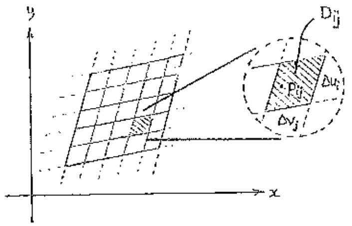
$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + ev \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ändras en dubbelintegral enligt formeln

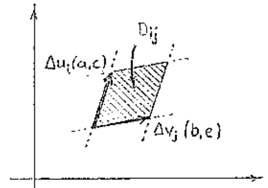
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(au+bv, cu+ev) \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right| du\,dv.$$



① Bestäm $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

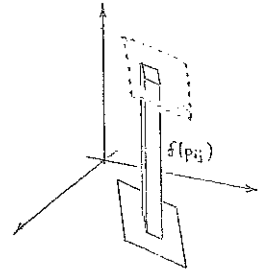


② Partitionera D i parallellogram D_{ij} med kantlängder Δu_i och Δv_j i u- resp. v-led.
Välj en punkt p_{ij} i varje D_{ij}.



③ Arean av parallellogram D_{ij} ges av

$$\Delta A_{ij} = \left| \det \begin{pmatrix} a\Delta u_i & b\Delta v_j \\ c\Delta u_i & e\Delta v_j \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right| \Delta u_i \Delta v_j$$



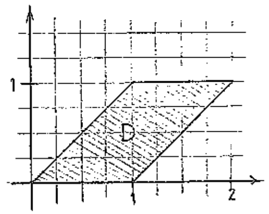
④ Volymen inom D_{ij} approximeras med

$$\Delta V_{ij} \approx \Delta A_{ij} \cdot f(p_{ij}) = f(p_{ij}) \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right| \Delta u_i \Delta v_j$$

⑤ Den totala volymen blir en Riemannsumma

$$V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{\substack{0 \le i < m \\ 0 \le j < n}} f(p_{ij}) \Delta A_{ij} = \iint_D f(au+bv, cu+ev) \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \right| du\,dv$$

Övning 14: Gör ett linjärt variabelbyte så att de nya koordinatlinjerna är parallella med parallellogrammets kanter



$u = $ ______

$v = $ ______

Övning 15: Beskriv parallellogrammet i u och v

______ $\le u \le$ ______ , ______ $\le v \le$ ______

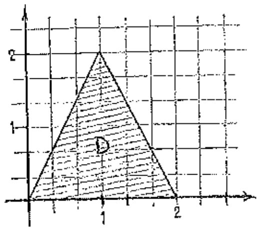
Exempel 5 Beräkna $\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy$.

(se lösningsförslag på sid 15)

Exempel 6 Beräkna $\iint_D y\,dx\,dy$

a) direkt,

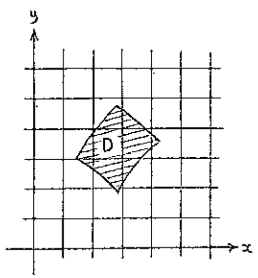
b) genom ett lämpligt linjärt variabelbyte.



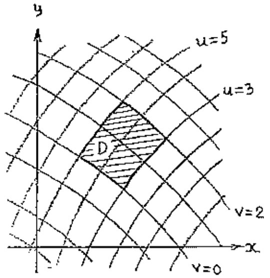
(Se lösningsförslag sid 16 för b)

Allmän substitution

Ett integrationsområde kan beskrivas enklare i nya koordinater u, v.



Området D har en komplicerad beskrivning i x,y-koordinater



Området D har en enkel beskrivning i u,v-koordinater: $3 \le u \le 5,\quad 0 \le v \le 2$

Vid byte till u,v-koordinater byts x och y mot

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

och en dubbelintegral ändras enligt formeln

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u,v),\,y(u,v))\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

(Notera likheten med formeln för ett linjärt variabelbyte, vilket beror på att $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ lokalt är approximativt linjärt.)

Exempel Härled formeln för polärt variabelbyte från den allmänna formeln.

Sambandet mellan (x,y) och (r,θ) lyder

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

och därför är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial\theta} r\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta} r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Alltså är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(r,\theta), y(r,\theta))\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

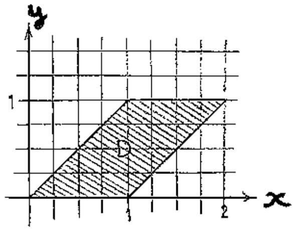
Anmärkning

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$ är Jakobideten se förel nr 9

Vidare

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)}$$

Övning 14: Gör ett linjärt variabelbyte så att de nya koordinatlinjerna är parallella med parallellögrammets kanter



u = $\boxed{}$

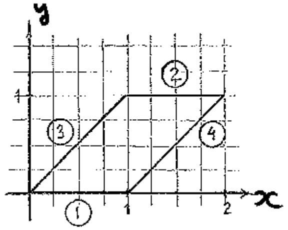
v = $\boxed{}$

Övning 15: Beskriv parallellogrammet i u och v

Lösningsförslag till öv. 14 - 15

Parallellogrammet begränsas av de räta linjestyckena

① $y=0$, ② $y=1$, ③ $y=x$, ④ $y=x-1$.

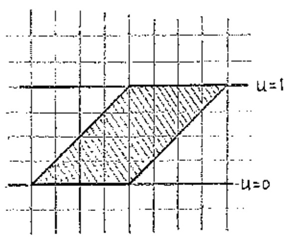


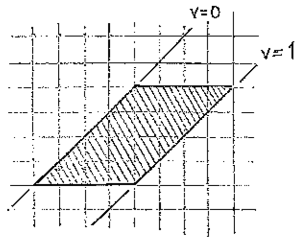
Därför inför vi de nya variablerna

$$\begin{cases} u = y \\ v = x - y \end{cases}$$

för då kan området beskrivas som

$$0 \leq u \leq 1, \qquad 0 \leq v \leq 1.$$





Exempel 7 Beräkna $\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy$.

Planen är att vi gör ett variabelbyte till u och v, för då blir området enkelt att beskriva.

Formeln för variabelbyte lyder

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Från sambandet mellan (u,v) och (x,y) får vi

$$\begin{cases} u = y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = u \end{cases}$$

och därför är

$$e^{x-y} = e^{v},$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u} u & \frac{\partial}{\partial v} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har därför att

$$\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{v} \underbrace{\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|}_{=1} du\,dv$$

$$= \int_0^1 du \int_0^1 e^{v}\,dv$$

$$= \left[u\right]_0^1 \left[e^{v}\right]_0^1$$

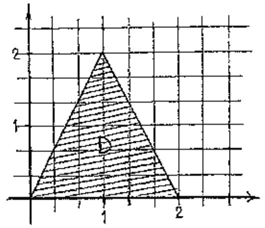
$$= 1 \cdot (e^1 - e^0)$$

$$= e - 1.$$

Exempel 8 Beräkna $\iint_D y\,dx\,dy$

a) direkt,

b) genom ett lämpligt linjärt variabelbyte.



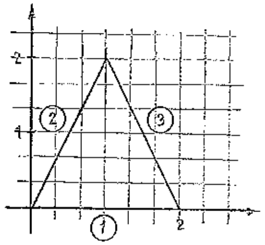
Lösningsförslag

b) Triangelns kantlinjer har ekvationerna

① $y = 0$

② $y = 2x$

③ $y = 4-2x$



och i x,y-koordinater ges området D av olikheterna

(1) $y \geq 0$, (2) $y \leq 2x$, (3) $y \leq 4-2x$.

Vi gör nu ett variabelbyte så att kantlinjerna ① och ② blir parallella med de nya koordinatlinjerna, dvs inför

$$\begin{cases} u = y, \\ v = 2x - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \\ y = u. \end{cases}$$

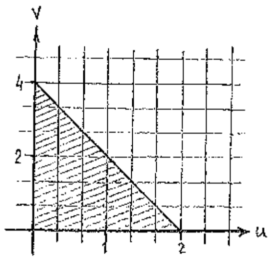
I u och v blir olikheterna

(1) $u \geq 0$

(2) $v \geq 0$

(3) $u \leq 4-u-v$

$\Leftrightarrow v \leq 4-2u$



Området blir alltså en triangel med två kanter parallella med koordinataxlarna. Denna triangel är enkel i v-led och kan skrivas som

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq 2, \\ 0 \leq v \leq 4-2u. \end{cases}$$

Dubbelintegralen blir i de nya variablerna

$$\iint_D y\,dx\,dy = \iint_{\substack{0\leq u\leq 2 \\ 0\leq v\leq 4-2u}} u \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{\substack{0\leq u\leq 2 \\ 0\leq v\leq 4-2u}} u \underbrace{\left|\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|}_{=1/2} du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 u\,du \int_0^{4-2u} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 u(4-2u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[2u^2 - \frac{2}{3}u^3\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(8 - \frac{16}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}.$$

Övning 18: Förklara varför

$$\iint_D (x^2 + xy + 2y^2)\,dx\,dy = \iint_D (x^2 + 2y^2)\,dx\,dy$$

där $D: x^2 + y^2 \leq r^2$.

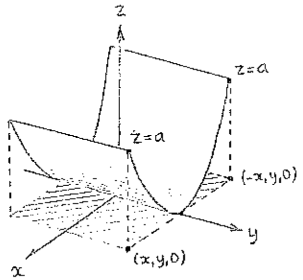
Jämna funktioner

En funktion $f(x,y)$ är jämn i x-led om

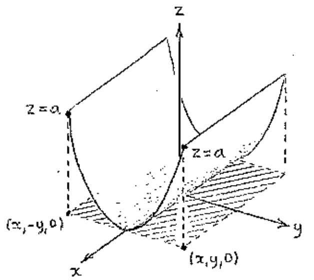
$$f(-x,y) = f(x,y)$$

och jämn i y-led om

$$f(x,-y) = f(x,y).$$



En jämn funktion i x-led



En jämn funktion i y-led

Övning 19: Vilka funktioner är jämna i x- resp. y-led?

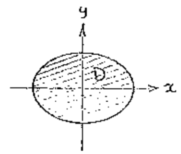
a) $f(x,y) = x^2y^2$ b) $f(x,y) = 1$

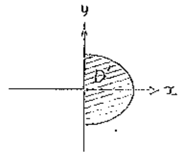
c) $f(x,y) = x^2y$ d) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

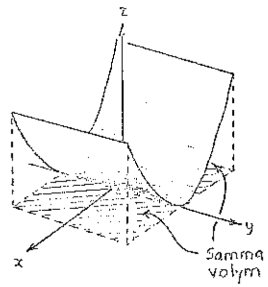
Om en jämn funktion i x-led $f(x,y)$ integreras över ett område D som är symmetrisk i x-led, då är

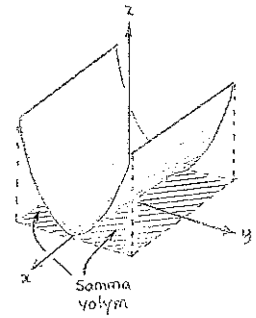
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy$$

där D' är delmängden av D med punkter som har positiv x-koordinat.





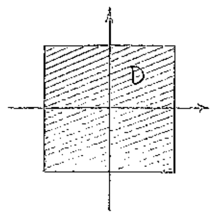


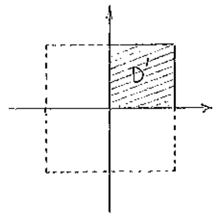


Exempel Visa att

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = 4\iint_{D'} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

där D och D' är nedanstående mängder.





Symmetrier

Symmetriresonemang kan förenkla uträkningar av många integraler.

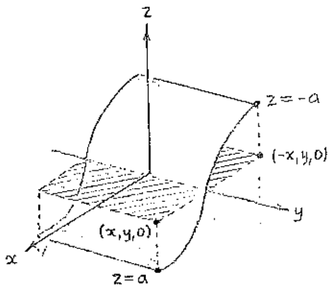
Udda funktioner

En funktion $f(x,y)$ är udda i x-led om

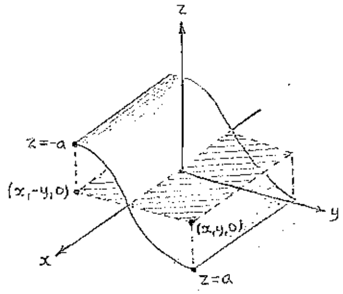
$$f(-x,y) = -f(x,y)$$

och udda i y-led om

$$f(x,-y) = -f(x,y).$$



En udda funktion i x-led



En udda funktion i y-led

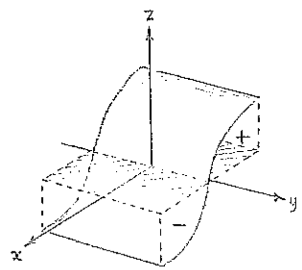
Övning 16: Vilka funktioner är udda i x- resp. y-led?

a) $f(x,y) = xy$ b) $f(x,y) = x$

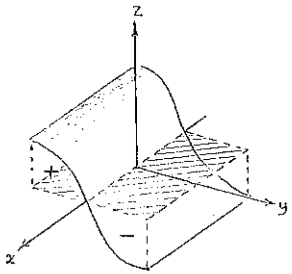
c) $f(x,y) = x^2y$ d) $f(x,y) = \cos xy$

Om en udda funktion i x-led $f(x,y)$ integreras över ett område D som är symmetriskt i x-led, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$



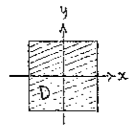
För en udda funktion i x-led över ett symmetriskt område i x-led finns lika mycket volym inneslutet av funktionsytan ovan som under xy-planet



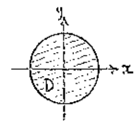
För en udda funktion i y-led över ett symmetriskt område i y-led finns lika mycket volym inneslutet av funktionsytan ovan som under xy-planet.

Övning 17: Vilka integraler har värdet 0 av symmetriskäl?

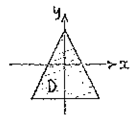
a) $\iint_D \sin xy\,dx\,dy$



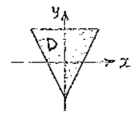
b) $\iint_D x\,dx\,dy$



c) $\iint_D x^2y\,dx\,dy$



d) $\iint_D xy^2\,dx\,dy$

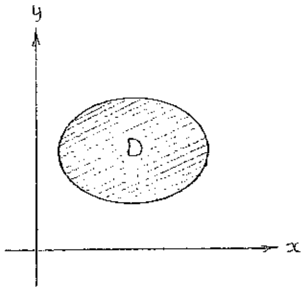


Tillämpningar Föreläsning: 12

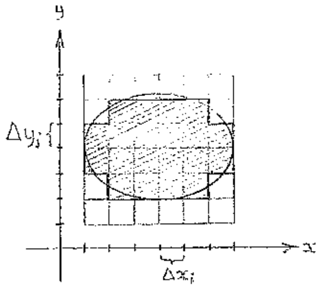
Area

Arean av ett område D ges av

$$\text{Area} = \iint_D dx\,dy.$$

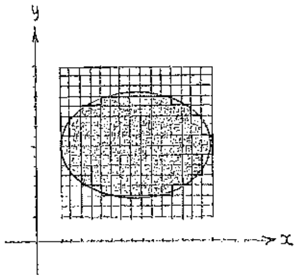


① Vi ska bestämma arean av området D.



② Dela in D i delrektanglar med kantlängder Δx_i och Δy_j,

$$\text{Area} \approx \sum_{\substack{\text{rektanglar}\\ \text{inom D}}} \Delta x_i \Delta y_j$$



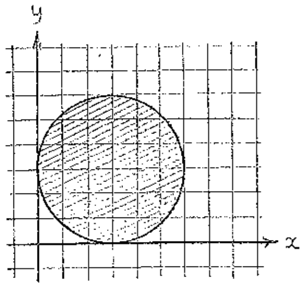
③ Approximationen blir bättre ju finare indelningen är.

$$\text{Area} = \lim_{\text{finhet}\to 0} \sum_{\substack{\text{rektanglar}\\ \text{inom D}}} \Delta x_i \Delta y_j = \iint_D dx\,dy.$$

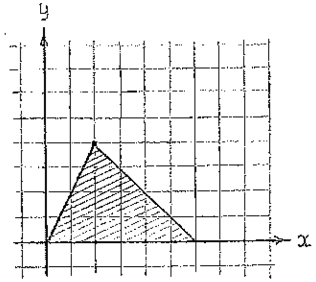
④ Summaformeln för arean är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

Övning

Bestäm arean.



En cirkelskiva med medelpunkt i (3,3) och radie 3.

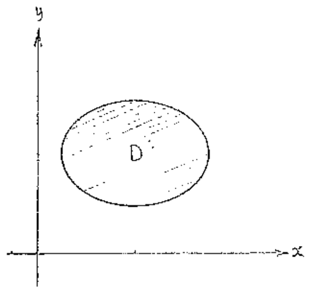


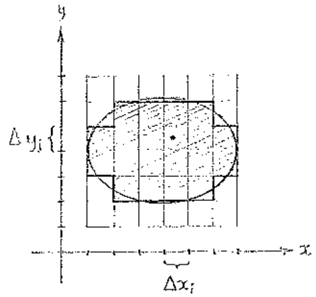
En triangel med hörn i (0,0), (2,4) och (6,0).

Massa

Ett område D med ytdensitet $\rho(x,y)$ har massan

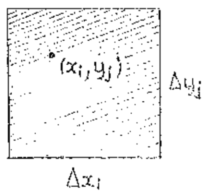
$$\text{Massa} = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy.$$





① Vi ska bestämma massan av området D.

② Dela in D i delrektanglar med kantlängder Δx_i och Δy_j. Välj en punkt (x_i, y_j) i delrektangeln.



$$\text{Massa} = \sum_{\substack{\text{rektanglar}\\ \text{inom } D}} \rho(x_i,y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + \text{Restterm}$$

③ Inom en delrektangel är

$\rho(x,y) = \rho(x_i,y_j) + (\text{Restterm ord. } 1)$

och massan är

$\rho(x_i,y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + (\text{Restterm ord. } 3)$

④ Den totala massan fås genom att summera delrektanglarnas massor.

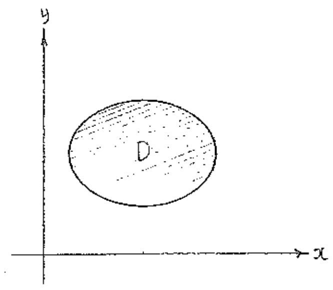
$$\text{Massa} = \lim_{\text{finhet}\to 0} \sum_{\substack{\text{rektanglar}\\ \text{inom } D}} \rho(x_i,y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + \text{Restterm} = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy + 0.$$

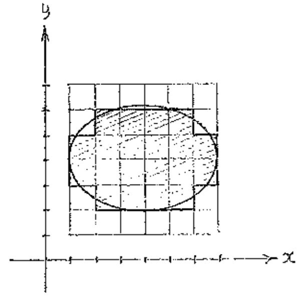
⑤ Summaformeln är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

Laddning

Ett område D med laddningstäthet $q(x,y)$ har laddning

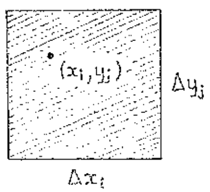
$$\text{Laddning} = \iint_D q(x,y)\,dx\,dy.$$





1 Vi ska bestämma laddningen hos området D.

2 Dela in D i delrektanglar med kantlängder Δx_i och Δy_j. Välj en punkt (x_i, y_j) i delrektangeln.



$$\text{Laddning} = \sum_{\substack{\text{rektanglar}\\ \text{inom } D}} q(x_i,y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + \text{Restterm}$$

③ Inom en delrektangel är

$q(x,y) = q(x_i,y_j) + (\text{Restterm ord. } 1)$

och laddningen är

$q(x_i,y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + (\text{Restterm ord. } 3)$

④ Den totala laddningen fås genom att summera delrektanglarnas laddning.

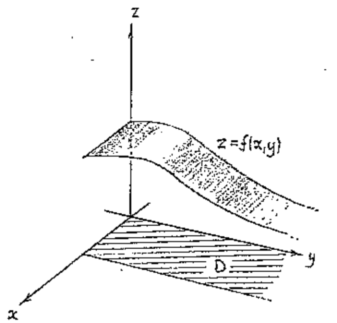
$$\text{Laddning} = \lim_{\text{finhet}\to 0} \sum_{\substack{\text{rektanglar}\\ \text{inom } D}} q(x_i,y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j + \text{Restterm} = \iint_D q(x,y)\,dx\,dy + 0$$

⑤ Summaformeln är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

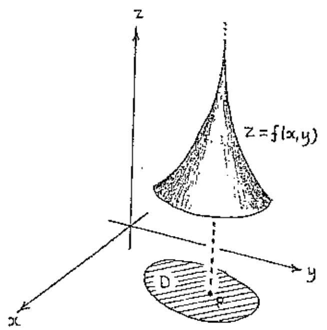
Generaliserade dubbelintegraler

En dubbelintegral är generaliserad om antingen

1. integrationsområdet är obegränsat, eller
2. integranden är obegränsad.



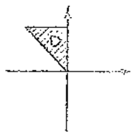
Dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är generaliserad eftersom D är obegränsad.



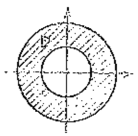
Dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är generaliserad eftersom f är obegränsad nära p.

Övning 20: Vilka av nedanstående integraler är generaliserade?

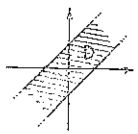
a) $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$



b) $\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$



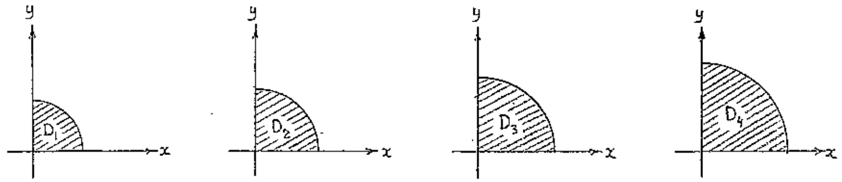
c) $\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$



Uttömmande följd

En följd $D_1, D_2, \ldots \subset D$ tömmer ut D om

1. Varje D_n är begränsad och mätbar,
2. För varje begränsad $G \subset D$, där f är begränsad, finns ett n så att $G \subset D_n$.
3. $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots$



$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset D_4 \subset \cdots$ tömmer ut 1:a kvadranten.

Definition

En generaliserad integral definieras som

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

om gränsvärdet existerar och är lika för alla $\{D_n\}$ som tömmer ut D.

Sats

Om $f \geq 0$ och

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

existerar för en uttömmande följd $\{D_n\}$, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

konvergent.

Sats (Fubini)

Om $f \geq 0$ och någon av integralerna

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy, \quad \int dx \int f(x,y)\,dy \quad \text{eller} \quad \int dy \int f(x,y)\,dx$$

är konvergent, då är alla tre integraler konvergenta och har samma värde.

Exempel 9 Undersök om integralen

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

där D är första kvadranten i xy-planet, är konvergent.

Exempel 10 Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+(x-2y)^2}\,dx\,dy$, där $D: 0 \leq x \leq 1$.

Exempel 11 Beräkna $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.