Flervariabelanalys SF1626 Föreläsning 1, 17 Jan 2017

Information

Vecka 1: 10.1, 10.6, 11.1, 11.2, 11.3, 12.1, 12.2
Kapitel 11.2 självstudier.

”Allt som står i boken ingår i kursen, jag tar bara upp det jag tycker är viktigast under den tid vi har.”

Analytisk geometri i tre dimensioner

$\mathbb{R}^3 : (x, y, z), (x_1, x_2, x_3)$

Orientering: högerhandregeln

Avstånd i $\mathbb{R}^3 : ||\overrightarrow{p_1p_2}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Exempel på ytor i $\mathbb{R}^3$

a) $y = 1$, ett plan parallellt med xz-planet

b) $z = 2$, ett plan parallellt med xy-planet

c) $x = y$, ett plan parallelt med z-axeln som delar xy-planet diagonalt

d) $x + y + z = 0$, plan genom origo med normal $(1, 1, 1)$
$(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$ (skalärprodukt)

e) $z = x$, snarlikt $x = y$
$(-1)x + 0y + 1z = 0$
$(-1, 0, 1)$, normalen

f) $z^2 + x^2 = 1$
en cirkel i xz-planet, vi får sedan röra oss fritt i y

g) $x = y^2$
en liggande parabel i xy-planet där vi sedan får röra oss fritt i z

h) $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$
sfär radie 2, centrum $(1, 0, 2)$

Topologi

Öppen/sluten mängd

Öppen mängd är en mängd där varje punkt har en omgivning, oavsett hur liten, som tillhör mängden. En randpunkt har ju inte det. Om randen är med är det slutet, om randen inte är med är det öppet, om randen delvis är med är det varken eller.

Exempel öppen: $x^2 + y^2 < 1$

Exempel sluten: $x^2 + y^2 \leq 1$

Tänk på dimensionerna! Kan vara slutet i två dimensioner men öppet i när man tar hänsyn till den tredje!

Olikheter

Vad representerar dessa ekvationer/olikheter i $\mathbb{R}^3$?

a) $x \geq 0$
hela halvrummet inklusive origo
slutet område

b) $x > y$
återigen ett halvrum, skuret diagonalt över xy-planet
origo ingår inte
öppet område

c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
hela klotet med radie 1. slutet område.

d) $(x-1)^2 + (z-2)^2 > 4$ i R3.
hela rummet utom cylindriska hålet som ges av cirkel i xz-planet som sedan utsträcker sig fritt i y. öppen mängd.

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \\ z > 0 \end{cases}$
halvrummet i positiva z utom halvklotet med radie 1.
varken öppen eller sluten (vi kan välja randpunkt på halvklotet men inte vid $z = 0$. hade varit sluten med $z \geq 0$, öppen med $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

f) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$
$z = x^2 + y^2$ är en "roterande parabel", en "parabeloid".
kravet $z = 1$ ger att vi får en cirkel med radie 1 i xy-planet med samtliga punkter vid $z = 1$.

Läs själva

- Analytisk geometri i $\mathbb{R}^n$, sida 569.
- Topologi

Cylindriska koordinater (boken 10.6)

Lämpligt om problemet har någon form av rotationssymmetri.

Polära koordinater i $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Övergång till $\mathbb{R}^3$: lägg till z-variabeln

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Exempel

$$\begin{cases} z = -2 + r\sin\theta \\ r = 1 \end{cases} \quad \text{har vi fått i cylindriska koordinater.}$$

Lösning: $y = r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} z = -2 + y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Undre ekvationen ger en cylinder kring z-axeln, den övre ger ett plan som skär cylindern diagonalt i yz-planet

Hemuppgift: visa att det är en ellips!

Exempel

$$\begin{cases} r = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Två raka linjer i randen av cylindern som ges av $x^2 + y^2 = 1$

$y = x$ ger $2y^2 = 1 \Rightarrow y \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

$(x, y) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \qquad R \geq 0, \quad 0 \geq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

Exempel

Beskriv områden:

a) $\begin{cases} R \leq 2 \\ z = 1 \end{cases}$

ett cirkulärt plansegment skuret ur klotet med radie 2.

slutet eller öppet?

b) $\begin{cases} R = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

cirkeln, randen i a).

Relationer mellan koordinaterna

$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 =$ (cylindriska) $r^2 + z$

$r^2 = (R \sin\phi \cos\theta)^2 + (R \sin\phi \sin\theta)^2 = R^2 \sin^2\phi$

$r = R \sin\phi$

$\sin\phi \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$

Exempel från gammal tenta

Beskriv området

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq |y|\}$

pacman

Gör själva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq |y| \end{cases}$$