GRADIENT OCH RIKTNINGSDERIVATA

GRADIENT

Gradienten till en funktion $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i en punkt $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är vektor som innehåller alla partiella derivator:

$$grad\ f(P) \overset{def}{=} \left(f'_{x_1}(P),\ f'_{x_2}(P), \dots,\ f'_{x_n}(P) \right).$$

Viktig egenskaper:

1. I punkten P **växer** funktionen **snabbast** om vi förändrar oberoende variabler i gradientens riktning dvs i riktning $grad\ f(P)$.

2. I punkten P **avtar** funktionen **snabbast** i riktningen $-grad\ f(P)$.

Uppgift 1.

Beräkna gradienten till nedanstående funktioner

a) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$, i punkten (x, y).

b) $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$, i punkten $(1,1)$.

c) $f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^3 + z^4$, i punkten (x, y, z).

d) $f(x, y, z) = xye^z$, i punkten $(2,1,0)$.

Svar:

a) $grad\ f(x, y) = (\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2})$

b) $grad\ f(x, y) = (\frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2}, \frac{1/x}{1 + (y/x)^2}) \Rightarrow grad\ f(1,1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) $grad\ f(x, y, z) = (2x, 3y^2, 4z^3)$

d) $grad\ f(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z) \Rightarrow grad\ f(2,1,0) = (1,2,2)$

Uppgift 2.

I vilken riktning ska vi förändra oberoende variabler i punkten P så att funktionen f växer snabbast.

a) $f(x,y) = 2 + \ln(1 + x^2 + y^2)$, $P = (1,1)$

b) $f(x,y,z) = z^2 + \arctan(x^2 + y^2)$ $P = (1,2,3)$

Lösning:

Funktionen växer snabbast i riktningen $grad\ f(P)$

a) $grad\ f(x,y) = (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}) \Rightarrow grad\ f(1,1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

b) $grad\ f(x,y,z) = (\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}, \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}, 2z) \Rightarrow grad\ f(1,2,3) = (\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, 6)$

Svar: a) I riktningen $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. b) I riktningen $(\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, 6)$.

RIKTNINGSDERIVATA

Riktningsderivata till en funktion f i en punkt P och i en given riktning $\vec{v}$

visar funktionens förändring om oberoende variabler förändras i riktningen $\vec{v}$

och betecknas

$$f'_{\vec{v}}(P)$$

Om $\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ då definieras riktningsderivatan enligt följande

$$f'_{\vec{v}}(P) \overset{deff}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + ta_1, \ldots, x_n + ta_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t}.$$

Riktningsderivatan i punkten P i riktningen $\vec{v}$ beräknas enklast med hjälp av följande skalärprodukt

$$f'_{\vec{v}}(P) = gradf(P) \cdot \vec{v}_0, \quad \text{där} \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}.$$

Anmärkning: Enligt Cauchy – Schwarz olikheten gäller

$| \, grad f(P) \cdot \vec{v}_0 \, | \leq | \, grad f(P) \, | \cdot | \, \vec{v}_0 \, | = | \, grad f(P) \, |$ dvs

$| \, f'_{\vec{v}}(P) \, | \leq | \, grad f(P) \, |$ eller

$-| \, grad f(P) \, | \leq f'_{\vec{v}}(P) \leq | \, grad f(P) \, |$

I R^2 och R^3 kan vi dra samma slutsats direkt, med hjälp av egenskaper för skalärprodukt :

$f'_{\vec{v}}(P) = grad f(P) \cdot \vec{v}_0 = \; = | \, grad f(P) \, || \, \vec{v}_0 \, | \cos\theta = | \, grad f(P) \, | \cos\theta$, där θ är vinkeln mellan gradienten och riktningsvektorn .

Eftersom $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ser vi att :

1. Om funktionen f och punkten P är givna så är **riktningsderivatan störst**

$f'_{\vec{v}}(P) = | \, grad f(P) \, |$

om $\theta = 0$ (dvs om $\vec{v}$ är parallell med gradienten och har samma riktning.

2. **Riktningsderivatan är minst**

$f'_{\vec{v}}(P) = -| \, grad f(P) \, |$

om $\theta = \pi$ (dvs i riktning som är motsatt gradienten.)

Uppgift 3.

Funktionen f ges av $f(x, y) = 2xy + y^3$
Bestäm riktningsderivatan av f i punkten P (1, 1) i riktning som bestäms av vektorn $\vec{v} = (1,3)$

Lösning:

a) Riktingsderivatan kan beräknas med hjälp av gradienten till f,

$grad f(x, y) = (2y, 2x + 3y^2) \Rightarrow grad f(P) = (2,5)$

Riktningsvektorn $\vec{v} = (1,3)$ normeras:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$$

$$f'_{\vec{v}}(P) = grad f(P) \cdot \vec{v}_0 = (2,5) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3) = \frac{17}{\sqrt{10}}$$

Svar: $f'_{\vec{v}}(P) = \dfrac{17}{\sqrt{10}}$

Uppgift 4.

Funktionen f ges av $f(x, y, z) = 2x + ye^z$
a) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten P (1, 1, 0) i riktning mot punkten

Q(2, 2, 1).
b) I vilken riktning är *f*:s riktingsderivata som störst i punkten (1, 1, 0)?
c) Bestäm största värde för riktingsderivata av *f* i punkten P.
d) I vilken riktning är *f*:s riktingsderivata som minst i punkten (1, 1, 0)?
e) bestäm minsta värde för riktingsderivata av *f* i punkten P.

Lösning:

a) Riktingsderivatan kan beräknas med hjälp av gradienten till f,
$grad f(x,y,z) = (2, e^z, ye^z) \Rightarrow grad f(P) = (2,1,1)$

Riktningsvektorn $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$ normeras:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$f'_{\vec{v}}(P) = grad f(P)\cdot\vec{v}_0 = (2,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

b) Funktionens riktingsderivata i punkten P är störst i riktningen $\vec{u} = grad f(P) = (2,1,1)$

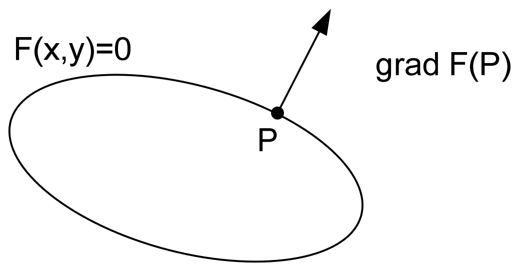
c) Största värde för riktingsderivata av *f* i punkten P är $|grad f(P)| = \sqrt{6}$.

d) Funktionens riktingsderivata i punkten P är minst i riktningen
$\vec{w} = -grad f(P) = (-2,-1,-1)$

e) Minsta värde för riktingsderivata av *f* i punkten P är $-|grad f(P)| = -\sqrt{6}$.

GRADIENT som en normalvektor till en kurva i R^2 .

Om en kurva i R^2 är given på explicit form F(x,y)=0 (eller F(x,y)=k, där k är en konstant) då är $grad\ F(P)$ en normalvektor till kurvan i punkten P som ligger på kurvan (under förutsättning att $grad\ F(P) \neq \vec{0}$).



Uppgift 5. Bestäm en normalvektor i punkten P till nedansående kurva

a) $x^2 = 8 - y^2$, P(2,2) b) $x^2 = 4 - \sin y$, P(2,0)

Lösning a)

Först skriver vi ekvationen $x^2 = 8 - y^2$ på formen F(x,y)=0, alltså

$x^2 + y^2 - 8 = 0$.

Härav $grad\ F = (2x, 2y)$, och därför

$grad\ F(P) = (4,4)$ är en vektor (bland oändligt många) som är vinkelrät mot kurvan (cirkeln) i punkten (2,2)

Lösning b)

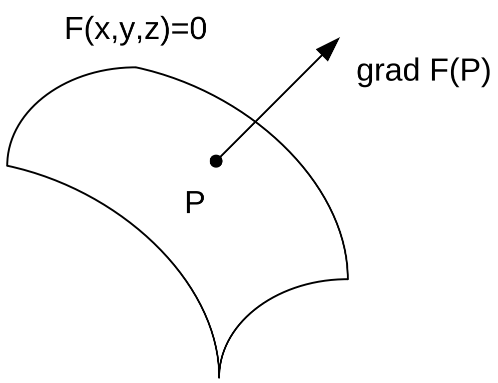
Vi skriver ekvationen $x^2 = 4 - \sin y$ på formen F(x,y)=0, dvs

$x^2 + \sin y - 4 = 0$.

Härav $grad\ F = (2x, \cos y)$ och $grad\ F(P) = (4,1)$ som är en normalvektor till kurvan i punkten P.

GRADIENT som en normalvektor till en yta i R^3.

Om en yta i R^3 är given på explicit form F(x,y,z)=0 (eller F(x,y,z)=k, där k är en konstant) då är $grad\ F(P)$ en normalvektor till ytan i punkten P som ligger på ytan (under förutsättning att $grad\ F(P) \neq \vec{0}$).



Uppgift 6. Bestäm en normalvektor i punkten P till nedansående yta

a) $x^2 + 2y^2 = 2z^2 + 1$, P(1,1,1) b) $x^2 + y^2 = 4 + e^z$, P(1,2,0)

Lösning a) Kontrollera själv att P ligger på ytan.

Vi skriver ekvationen på formen F(x,y,z)=0, dvs

$x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 1 = 0$.

Vi har $grad\ F = (2x, 4y, -4z)$ och därför $grad\ F(P) = (2,4,-4)$ som är en normalvektor till ytan i punkten P.

b) Från $x^2 + y^2 - 4 - e^z = 0$ får vi $grad\ F = (2x, 2y, -e^z)$ och $grad\ F(P) = (2,4,-1)$ som är en normalvektor till ytan i P.

Uppgift 6. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten (1,1,1) till ellipsoiden $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

Lösning: $grad\ F = (6x, 4y, 2z)$

En normalvektor (bland oändligt många) är $grad\ F(P) = (6,4,2)$. Vi kan även använda

$\vec{N} = (3,2,1)$ som en normalvektor .

Tangentplanets ekvation blir då

$3(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0$,

eller $3x + 2y + z - 6 = 0$

Svar: $3x + 2y + z - 6 = 0$