Skillcheck Flervariabel

Erik Raab

February 22, 2023

I det här häftet finns massa korta teorifrågor - om du kan svara snabbt och korrekt på dessa har du ganska bra koll på mycket av det vi tagit upp i kursen. Frågorna är *ungefär* uppdelade efter vilken teoridel de tillhör, *inte* efter vilken modul de kommit upp i.

Jag förelsår att ni använder häftet på följande sätt:

1. Läs ett kapitel i taget, och försök svara på frågorna utan hjälp från boken eller liknande. De allra flesta frågorna här ska du kunna svara på inom en minut när du förstår materialet. Svåra uppgifter har försetts med symbolen **(S)**, viktiga uppgifter förses med symbolen **(V)**. Skriv ned svaren någonstans om du inte är 100% säker på att du kommer ihåg dem.

2. Kolla facit. Om du kunde svara på frågorna väl (och förstod ditt eget svar), gå vidare till nästa modul. Om du fastnade lite eller var osäker på något svar, lägg en kvart eller halvtimme på att plugga in det du missat särskilt om det var en **(V)**-fråga. För **(S)**-frågorna kan du istället återkomma senare när resten av teorin sitter bra.

3. Upprepa kapitlet efter några timmar eller någon dag. Om det känns uppenbart vad svaren är så kan du betrakta kapitlet i skillchecken som klart. Då är det dags att börja jobba med avancerade frågor på samma kapitel istället, och du har då de flesta redskap du behöver.

När du i det här häftet (och på tenta!) frågas om vad en sats/regel säger är det viktigt att du inte bara skriver en formel utan säger vad som krävs av de saker som ingår. Om du kan återge någon version av satsen/regeln med korrekta premisser kan du vara nöjd med ditt svar.

Exempel på dåligt sätt att skriva Gauss sats:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV$$

Exempel på en *korrekt* formulering av Gauss sats: Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är ett glatt vektorfält och V är en slät och kompakt volym i $\mathbb{R}^3$ med en rand $S = \partial V$ med utåtriktad normal gäller att

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mathbf{F}) dV$$

Det första är ett kanske något man slänger ur sig under en diskussion när man kan peka på en ritning av flöden och motivera, men det är en ofullständig och oklar formulering.

Innehåll

1 Krimskrams

1. Vad menas med tillräckligt respektive nödvändigt villkor för ett påstående?
2. Vad är en vektor? Svara med exempel!
3. Vad är en skalär? Svara med exempel!
4. Vad betyder det att $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$?
5. Vad betyder det att $M \subseteq \mathbb{R}^n$?
6. Vad är punkt-normalformen för ett plan i $\mathbb{R}^3$?
7. Vad är ett uttryck? Ge ett exempel.
8. Vad är en ekvation? Ge ett exempel.
9. Vad är en funktion? Ge ett exempel.
10. Vad är en bijektiv funktion? Ge ett exempel.

2 Topologi

Topologi är studiet av kontinuerliga funktioner och ytors övergripande form. T.ex. kan man med topologi-metoder undersöka hur många hålrum av olika slag som en yta eller volym innehåller. *Detta är inte centralt* för kursen men dyker upp lite här och var. De absolut viktigaste begreppen för vår kurs nämner vi här.

1. **(S)** I den här kursen har vi två likartade men distinkta idéer om vad vi menar med randen till en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Försök att förklara skillnaden genom att beskriva hur dess två skiljer sig då man beskriver cirkelskivan $D \subset \mathbb{R}^3$ som uppfyller $x^2 + y^2 < 1$, $z = 0$.
2. Vad betyder det att en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är sluten[1]?
3. Vad betyder det att en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen?
4. Finns det någon/några mängder $M \subseteq \mathbb{R}^n$ som både är öppna och slutna?
5. Finns det någon/några mängder $M \subseteq \mathbb{R}^n$ som är varken öppna eller slutna?
6. Vad menas med en sammanhängande mängd?
7. **(S)** Vad menas med en enkelt sammanhängande mängd?
8. **(S)** Vad menas med en stjärn-formad mängd?
9. **(V)** Vad menas med en kompakt mängd?

[1] Notera att det även här finns ett annat begrepp vi ibland använder för integralsatserna, där vi beskriver mängder som slutna om de innesluter ett område - detta är inte vad som är sökt här.

3 Koordinatsystem, geometri med kvadratiska former och parametrisering

1. Vad är koordinatsystem? Beskriv gärna hur vi skriver dem i denna kurs.

2. **(V)** Ge exempel på ett...

   (a) ...cylindriskt koordinatsystem

   (b) ...polärt koordinatsystem

   (c) ...sfäriskt koordinatsystem

   (d) ...ett koordinatsystem för $\mathbb{R}^3$ som ej är av ovanstående typ.

3. Följande uppgifter på kvadratiska former är egentligen alla ganska lika, och det är inte alls nödvändigt att göra alla. Viktigast är att du förstår hur du generellt sett ska svara på frågorna. Om det känns repetetivt kan du hoppa vidare. Använd din tid klokt.

   (a) Låt $Q(x, y, z)$ vara en kvadratisk form. Vad menas med detta, och vad menas med Qs principalaxlar samt Qs signatur?

   (b) Beskriv hur du givet en kvadratisk form $Q(x, y, z)$ och dess signatur kan ändra koordinater tills vi når enhetsform där $\hat{Q}(r, s, t)$ endast antar värdena ± 1 eller 0 i punkterna $(r, s, t) = (1, 0, 0)$, $(r, s, t) = (0, 1, 0)$ och $(r, s, t) = (0, 0, 1)$.

   (c) Antag att $Q(x, y, z)$ är en kvadratisk form och att vi definierar en yta i $\mathbb{R}^3$ med $Q(x, y, z) = 1$ *eller* $Q(x, y, z) = 0$. Vilken sorts ytor beskriver dessa ekvationer då Qs signatur ges av

      i. $(+, +, +)$
      ii. $(+, +, 0)$
      iii. $(+, +, -)$
      iv. $(+, 0, -)$
      v. $(+, -, -)$
      vi. $(0, -, -)$
      vii. $(-, -, -)$

   (d) Antag att $Q(x, y)$ är en kvadratisk form och att vi definierar en kurva i $\mathbb{R}^2$ med $Q(x, y) = 1$ *eller* $Q(x, y) = 0$. Vilken sorts kurva beskriver detta då Qs signatur ges av

      i. $(+, +)$
      ii. $(+, -)$

   (e) Antag att $Q(x, y) = z$ definierar en yta i $\mathbb{R}^3$ där $Q(x, y)$ är en kvadratisk form. Vilken sorts yta beskriver detta då Qs signatur ges av

      i. $(+, +)$

ii. $(+, 0)$
iii. $(+, -)$

(f) Antag att vi i föregående tre uppgifter istället hade låtit en olikhet definiera mängderna i $\mathbb{R}^3$, alltså, e.g. $Q(x, y) \leq z$ eller $Q(x, y) \geq z$ för signatur $(+, +)$. Ange vilken sort kropp en sådan olikhetsekvation ger och dess relation till kroppen som beskrevs av den motsvarande likheten. Om olikheten vore strikt, vad medför det?

(g) Parametrisera någon eller några av både ytor och volymer ur föregående uppgifter om kvadratiska former. Antag att x-, y- och z-axlarna är deras principalaxlar och att de är på enhetsformen, och försök gärna använda lämpliga koordinatsystem, t.ex. cylindriska koordinater för enmantlade hyperboloider.

(h) Hur kan du bestämma/parametrisera skärningen mellan någon av kropparna ur de föregående uppgifterna på kvadratiska former och ett plan?

4. Vad menas, ungefärligt, med en parametrisering av en kropp i $\mathbb{R}^n$?

5. Hur kan dimensionen av en kropp utläsas ur dess parametrisering (om vi antar att parametrsieringen är t.ex. slät och bijektiv)?

6. Antag att en linje har parametriserats av $\mathbf{x}(t)$. Hur kan du bestämma ta fram dess tangentvektorer i en punkt?

7. **(V)** Antag att en yta i $\mathbb{R}^3$ har parametriserats av $\mathbf{x}(s, t)$. Hur kan du ta fram dess tangentvektorer till ytan? Ange en formel för ytans normal.

4 Funktioner, gränsvärden och kontinuitet

1. Antag att $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Vilken sorts vektorer består gs definitionsmängd av? Vilken sorts vektorer består gs värdemängd av?

2. Vad är definitionsmängdskonventionen?

3. **(V)** Hur skiljer sig beräkning av gränsvärden i $\mathbb{R}^n$ mot beräkning av gränsvärden i $\mathbb{R}$?

4. Ange en metod som kan hjälpa oss beräkna gränsvärden av funktioner som har formen $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

5. Vad säger summaregeln för gränsvärden?

6. Vad säger produktregeln för gränsvärden?

7. Vad säger kvotregeln för gränsvärden?

8. Vad är definitionen av kontinuitet i en punkt respektive en mängd?

9. Ge en geometrisk tolkning av vad kontinuitet innebär.

10. Vad betyder det att en funktion är C^0? Vad betyder det om vi säger att en funktion är C^0 på en given mängd M?

11. **(S)** Antag att $f(x, y)$ är en funktion och att

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \lim_{t \to 0} f(t, -t) = f(0, 0)$$

Är f kontinuerlig i $(0, 0)$? Bevis eller motexempel!

5 Partiella derivator, differentierbarhet och linjärisering

Låt f vara en skalär funktion i detta kapitel, alltså en funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

1. **(V)** Vad är definitionen av fs partiella derivator? Hur beräknas dessa?

2. Om f är C^0 har f då partiella derivator? Ange motexempel annars.

3. Om f har partiella derivator är f då C^0? Ange motexempel annars.

4. Vad betyder det att en funktion är C^k för något heltal k?

5. Skriv ned de ekvationer som måste stämma för att en funktion $f(x, y)$ ska vara C^1 i en punkt $\mathbf{x}$.

6. Vi säger ibland att en funktion är glatt/slät. Vad innebär det? Ge ett exempel på en slät funktion av 3 variabler.

7. Vad är definitionen av att f är differentierbar?

8. Vad är den geometriska innebörden av att f är differentierbar?

9. Ange en formel för linjäriseringen av en funktion. När är formeln giltig, alltså under vilka förutsättningar är linjäriseringen en god approximation av funktionen?

10. Är alla C^0 funktioner differentierbara? Ange motexempel annars.

11. Är alla differentierbara funktioner C^0? Ange motexempel annars.

12. Har alla differentierbara funktioner väldefinierade partiella derivator (av ordning ett)? Ange motexempel annars.

13. Är alla C^1 funktioner differentierbara? Ange motexempel annars.

14. **(S)** Är alla differentierbara funktioner C^1? Ange motexempel annars.

15. **(V)** Ovanstående frågor går att sammanfatta som en ”hierarki” av implikationer, som man kan börja på följande sätt:

   ”f är glatt $\Rightarrow$ För varje heltal $k \geq 1$ gäller att f är C^{k+1} $\Rightarrow$ f är C^k”

   Sammanfatta svaren på ovanstående frågor genom att fylla ut hierarkin, alltså på formen $A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots$.

16. **(V)** Vad säger kedjeregeln för funktioner av flera variabler? Ange minst en korrekt form.

17. Ange ett tillräckligt villkor för att

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathbf{x})$$

   alltså att de partiella derivatorna ”kommuterar”.

6 Gradient och riktningsderivata

Låt f vara en skalär funktion i detta kapitel, alltså en funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

1. **(V)** Vad är definitionen av gradienten $\text{grad}(f) = \nabla f$?

2. **(V)** Gradienten är en sorts vektorfält - mer om det senare - och ger en vektor i varje punkt i en funktion fs definitionsmängd. Vad kan sägas om den riktning gradienten pekar i och om gradientens norm?

3. Beskriv hur fs linjärisering kan skrivas med hjälp av en gradient.

4. Hur definieras riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}}f$ av en funktion?

5. Ange ett uttryck innehålande gradienten ∇f för riktningsderivatan till en funktion f.

6. **(V)** Vad beskriver riktningsderivatan? Ge en geometrisk förklaring.

7. Antag att gradienten har en norm given av $\|\nabla f(\mathbf{x})\| = a$. Ange vilka värden $D_{\mathbf{v}}f$ antar, och ge en förklaring.

7 Nivåytor, grafer och tangentplan

Låt f vara en skalär funktion i detta kapitel, alltså en funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

1. **(V)** Vad är definitionen av en nivåyta[2] till f?

2. Om S är en nivåyta till $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, vilket rum ligger då S i?

[2] Notera att vi säger nivåyta generellt, även för mängder i t.ex. $\mathbb{R}^9$. För endimensionella objekt säger vi ibland nivåkurva.

3. Om alla nivåytor till en funktion och deras motsvarande värden vore givna, kan du då bestämma funktionen? Motivera!

4. **(V)** Vad är defintionen av en graf/grafyta till en funktion?

5. Om S är grafen till $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, vilket rum ligger då S i?

6. Om grafen till en funktion vore given, kan du då bestämma funktionen? Motivera!

7. Ange det samband som gäller mellan en funktions nivåytor och deras gradient samt riktningsderivata. Ge en geometrisk förklaring.

8. **(V)** Antag att vi vill bestämma ett tangentplan till en nivåyta till en funktion $f(x, y, z)$. Hur kan detta göras med hjälp av gradienten ∇f?

9. Kan alla grafer i tolkas som nivåytor? Bevis eller motexempel.

10. Kan du säga något om hur vi kan bestämma tangentplan och normallinjer till grafytor baserat på dina svar från föregående frågor?

11. Ange en formel för tangentplanet till en graf av en funktion $f(x, y)$ som bygger på linjäriseringsformeln.

8 Optimering, Taylorpolynom och Lagranges metod

Låt f vara en skalär funktion i detta kapitel, alltså en funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

1. Vad betyder det att $\mathbf{x}$ är en lokal extrempunkt till en funktion f?

2. **(V)** Ange ett tillräckligt krav för att $f : M \to \mathbb{R}$ ska ha ett största resp. minsta värde på M.

3. Vad är en kritisk punkt till en funktion f?

4. **(V)** Låt $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara någon kontinuerlig funktion och låt M vara kompakt. I vilka sorters punkter kan vi hitta lokala extremum och vad kan vi säga om dessa?

5. Vad är Hessematrisen $\mathcal{H}_f$ till en funktion f?

6. Är Hessematrisen nödvändigtvis symmetrisk? Om inte, ange ett tillräckligt villkor för att den ska vara symmetrisk.

7. Ange Taylorpolynomet av grad 2 för en C^2-funktion f. Skriv gärna dessa med hjälp av gradienten ∇f och Hessematrisen $\mathcal{H}_f$.

8. Antag att en C^2-funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ har en kritisk punkt $\mathbf{a}$. Använd ditt svar till förra frågan för att svara på följande:

(a) Vad är formen för Taylorpolynomet av grad 2 om man konstruerar det runt $\mathbf{a}$?

(b) Från lin. alg. vet vi att kvadratiska former $Q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^t H\mathbf{h}$ kan klassificeras som "positivt definita" eller "indefinita" osv. beroende på någon matris egenvärden. Vad betyder detta, och hur hängder det ihop med egenvärden?

(c) Antag att du vet att Hessematrisen är positivt definit i den kritiska punkten $\mathbf{a}$. Vad säger detta om Taylorpolynomet? Vad gäller om den är semi-definit (av någon typ), negativt definit eller indefinit? Vad säger svaren du gett om funktionen f i punkten $\mathbf{a}$?

9. Vad är ett bivillkor?

10. **(V)** Formulera Lagrangemultiplikator-metoden för ett bivillkor.

11. Formulera Lagrangemultiplikator-metoden för två bivillkor.

12. Ett determinantuttryck kan ibland användas för att förenkla lösningen av Lagrangemultiplikator-problem. Förklara vad detta krav kommer ifrån och vad som krävs för att determinantuttrycket ska kunna användas.

9 Vektorfält, Jacobimatriser, konservativa vektorfält

1. Vad är ett vektorfält?

2. Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Kan vi tolka f som ett vektorfält? Finns det någon annan möjlig tolkning?

3. Vad menas med ett C^k-vektorfält?

4. Vad menas med ett slätt/glatt vektorfält?

5. Vad är definitionen av en fältlinje? Förklara geometriskt!

6. Ange en formel som du kan använda för att bestämma fältlinjer till ett givet vektorfält.

7. **(V)** Ange definitionen av Jacobimatrisen $J_{\mathbf{F}}$ för en avbildning/ett vektorfält[3] $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

8. Antag att en C^1-avbildning är given. Förklara hur Jacobimatrisen är relaterad till dess linjärisering.

[3] Notera att vi sällan diskuterar just Jacobimatriser för vektorfält, framförallt eftersom generaliseringarna av avbildningar kontra vektorfält till mer generella rum än $\mathbb{R}^n$ är så fundamentalt olika. Just för att undersöka potentiellt konservativa vektorfält är det dock behändigt att betrakta Jacobimatrisen för vektorfältet.

9. **(V)** Vad är definitionen av ett konservativt vektorfält? Vad är potentialen till ett konservativt vektorfält?

10. Ange ett nödvändigt villkor för att ett glatt vektorfält $\mathbf{F}$ ska vara konservativt. Är detta ett tillräckligt villkor?

11. Ange ett tillräckligt villkor för att ett glatt vektorfält $\mathbf{F}$ ska vara konservativt. Är detta ett nödvändigt villkor?

10 Implicita funktionssatsen

Vi formulerar implicita funktionssatsen i flera steg här.

1. Vad menar vi när vi säger att en ekvation $f(x, y) = 0$ implicit bestämmer y som en funktion av x?

2. Vad säger implicita funktionssatsen, ungefär?

3. Antag att vi har en samling krav

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{z}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{z}) = 0 \end{cases}$$

   Hur många av variablerna z_i i $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ förväntar man sig, typiskt sett, kunna bestämma implicit som funktioner av de andra variablerna? Stämmer detta alltid, eller kan du komma på motexempel då man kan bestämma fler resp. färre av variablerna?

4. Ibland formuleras implicta funktionssatsen på vektorform $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Vad är $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, och om $\mathbf{F}$ är en avbildning från $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, i vilka rum ligger då $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$?

5. Antag att i någon punkt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ så gäller det att $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, och antag i resten av denna sektion att $\mathbf{F}$ är C^1. Om $\mathbf{y}$ implicit bestäms som en funktion $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ vad gäller då för $\mathbf{y}(\mathbf{a})$?

6. Att bevisa att $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ existerar är en del av implicta funktionssatsen som vi inte kommer att ge oss in på. Bortsett från vad som gäller för $\mathbf{y}(\mathbf{a})$ så kan du dock bevisa att $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ har en annan egenskap - vilken?

7. Förutom att $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ måste vi kräva en sak till av $\mathbf{F}$ i $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ för att $\mathbf{y}$ ska bestämmas implicit. Använd ett uttryck som innehåller en Jacobimatris för att förklara.

8. Antag att premisserna för implicita funktionssatsen är uppfyllda - hur kan du då bestämma derivatorna av de implicit bestämda funktionerna? Motivera och illustrera då exakt ett krav är givet!

9. **(V)** Sammanfatta ovanstående frågor för att formulera implicita funktionssatsen, och glöm inte att ta med premisserna!

10. På sätt och vis förklarar implicta funktionssatsen när nivåytor kan tolkas som grafer och när detta inte är möjligt - hur hänger detta ihop?

11 Linjeintegraler

I detta kapitel antar vi att funktionerna/vektorfälten vi anger är C^1.

1. **(V)** Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Beskriv hur du kan beräkna integralen

$$\int_C f(\mathbf{x})ds$$

då C är någon slät kurva i $\mathbb{R}^n$.

2. Vad menas med en kurva Cs orientering? Beror integralen i föregående uppgift på orienteringen?

3. Ange en formel för båglängden av en kurva C i $\mathbb{R}^n$ och en mer explicit formel då $n = 3$.

4. **(V)** Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält och C någon orienterad kurva i $\mathbb{R}^3$. Betrakta uttrycken

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{och} \qquad \int_C P dx + Q dy + R dz$$

Förklara hur de är relaterade till varandra och hur du kan beräkna dessa.

5. Beror integralens värde i föregående uppgift på orienteringen?

6. Vad mäter en linjeintegral av ett vektorfält? Förklara kopplingen till svaret i föregående fråga.

7. Linjeintegraler är linjära. Förklara vad vi menar med detta.

8. I envariabeln kunde vi dela upp integration

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Vad är motsvarande uttryck för en linjeintegral?

9. Vad avses med integralsymbolen

$$\oint_C$$

10. **(V)** I envariabel hade vi kalkylens fundamentalsats som vårt huvudsakliga redskap för att beräkna integraler. För linjeintegraler av vektorfält finns något liknande, *men bara för konservativa vektorfält* (som vi tog upp i en tidigare sektion). Antag att $\mathbf{F}$ är konservativt.

    (a) Givet $\mathbf{F}$s potential samt att C börjar i $\mathbf{a}$ och slutar i $\mathbf{b}$, vad kan du säga om

    $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

    (b) Vad kan du säga om integralen

    $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

    (c) Om C och D är kurvor som börjar och slutar i samma punkter, vad kan du säga om deras respektive linjeintegraler

    $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{och} \qquad \int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

12 Dubbel- och trippelintegraler, generella integraler

I detta kapitel antar vi att funktionerna/vektorfälten vi anger är C^1. Med en generell integral avses en integral av formen

$$\int \cdots \int_K f(\mathbf{x}) dV$$

där $dV = dx_1 \dots dx_n$ och $K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Detta är inte samma sak som en generaliserad integral.*

1. Dubbel- och trippel- och generella integraler är linjära. Förklara vad vi menar med detta.

2. I envariabeln kunde vi dela upp integration

    $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

    Vad är motsvarande uttryck för en dubbel- eller trippelintegraler?

3. Ge en geometrisk tolkning av vad en dubbelintegral är. Vad är motsvarande för en trippelintegral?

4. **(V)** Vad menas med en *itererad integral*? Förutom definitionen, ge även en geometrisk tolkning/förklaring.

5. **(V)** Vad menas med en generaliserad integral? Hur beräknas dessa?

6. Något som är nytt i flervariabel är att integrationsgränser ofta blir funktioner, även om slututtrycken i våra integration (oftast) är skalärer. Förklara varför integrationsgränserna blir funktioner.

7. Vad menas med en jämn/udda funktion, och vad menas med en symmetrisk mängd? Hur kan dessa användas för att beräkna integraler?

8. Vad kan du säga om integralerna

$$\iint_D C dx dy \qquad \iiint_V C dx dy dz$$

   där $D \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}^3$ och C är någon konstant?

9. Bevisa att arean för en mängd i $\mathbb{R}^2$ som definieras av $x \in [a, b]$ och $f(x) \leq y \leq g(x)$ har formen

$$\int_a^b g(x) - f(x) dx$$

   med hjälp av vad du vet om dubbelintegraler. Vad är det motsvarande uttrycket för volymer och hur tas det fram?

10. Hur kan du beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D f(x)g(y) dx dy$$

    om $D = [0, 1] \times [0, 1]$?

11. **(V)** För linjeintegraler och vanliga envariabelintegraler kan vi göra koordinatbyten (substitution) $x = g(u)$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) g'(u) du$$

    Vad är motsvarande formel för en dubbel-, trippel- eller generell integral?

12. Vad menas med area- eller volymelement? Vad mäter detta?

13. Ange ett uttryck för volymelementet i $\mathbb{R}^3$ i sfäriska, cylindriska samt kartesiska koordinater.

14. Ange ett uttryck för (det skalära!) areaelementet i $\mathbb{R}^2$ i polära samt kartesiska koordinater.

15. Ytelementet för en yta i $\mathbb{R}^3$ brukar skrivas dS. Hur kan du ta fram detta generellt sett? Om en yta S är given som en nivåyta $g(x, y, z)$, beskriv hur du kan bestämma dS. Vad gäller då S är en graf?

16. **(V)** Om S är en yta i $\mathbb{R}^3$ som du har parametriserat med $\mathbf{r}(u, v)$, beskriv hur du kan beräkna

$$\iint_S f(\mathbf{x}) dS$$

17. Vad är värdet på integralen
$$\oiint_{S_r^2} dS$$
då S_r^2 är den tvådimensionella sfären av radie r centrerad i origo?

13 Integraler med vektorfält, divergens och rotation, generaliserade Stokes sats

I detta kapitel antar vi att funktionerna/vektorfälten vi anger är C^1, och att våra ytor/volymer är släta.

1. **(V)** Vad säger Greens sats?
2. Vad menas med en orienterad yta S?
3. **(V)** Vad menas med det vektoriella ytelementet för en orienterad yta? Vad har det för relation till det skalära ytelementet?
4. Antag att S är en yta med en given orientering. Hur kan du bestämma (det vektoriella) ytelementet för ytan? Vad gäller om ytan är en nivåyta? Vad gäller om ytan är en graf?
5. **(V)** Vad menas med en flödesintegral över en orienterad yta, och vad mäter en sådan? Varför är det viktigt att ytan är orienterad?
6. Vad menas med symbolen
$$\oiint_S$$
7. Förklara vad som menas med ”inducerad orientering” (kallas ibland ”positiv orientering”) av en rand. Beskriv en tumregel du kan använda för att komma ihåg den inducerade orienteringen för ytor och volymer i $\mathbb{R}^3$ samt områden i planet $\mathbb{R}^2$.
8. **(V)** Vad definierar $\nabla \times \mathbf{F} = \mathrm{rot}(\mathbf{F})$? Vad mäter detta?
9. Vad menar vi när vi säger att ett vektorfält är rotationsfritt[4]?
10. Ange en samling vektorfält som är rotationsfritt.
11. Ange ett tillräckligt villkor för att ett rotationsfritt vektorfält ska vara konservativt.
12. **(V)** Vad definierar $\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathrm{div}(\mathbf{F})$? Vad mäter detta?
13. Vad menar vi när vi säger att ett vektorfält är divergensfritt?
14. Vad menas med att $\mathbf{F}$ har en vektorpotential?

[4] Man säger ibland också ”solenoidalt” eller ”irrotationellt”.

15. Ange en samling vektorfält som är divergensfria.
16. Ange ett tillräckligt villkor för att ett divergensfritt vektorfält ska ha vektorpotential.
17. En sorts ordning finns på ”differentialoperatorerna” grad, rot och div, nämligen att om man sammansätter vissa av dem blir de automatiskt noll. Om du tittar tillbaka på föregående uppgifter, kan du se vilka kombinationer som blir noll?
18. Vad menar vi med rot och div är linjära?
19. **(V)** Vad säger Stokes sats?
20. Förklara hur Greens sats är ett specialfall av Stokes sats.
21. För konservativa vektorfält gällde att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = 0$$

    Vektorfält med vektorpotential uppfyller liknande över slutna ytor, vad?
22. **(V)** Vad säger Gauss sats?
23. Fältet $\mathbf{F}$ som ges av

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$$

    är glatt på sin definitionsmängd.

    (a) Bevisa att $\mathbf{F}$ är rotationsfritt (i planet - det vill säga att

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

    för alla punkter (x, y) i $\mathbf{F}$s definitionsmängd).

    (b) $\mathbf{F}$ är inte konservativt, och vi kan bevisa detta genom motsägelse. Låt S^1 vara enhetscirkeln runt origo i $\mathbb{R}^2$, med valfri orientering. Gör detta i två steg:

    - Bestäm värdet på

$$\oint_{S^1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

      genom att använda fältets definition.
    - Dra en slutsats baserat på vad du vet om denna typ av integraler för konservativa fält.

(c) **(S)** Låt C vara en godtycklig slät kurva som är enkel och som utgör randen till ett kompakt område M i $\mathbb{R}^2$ i vilket origo utgör en inre punkt[5]. Bestäm alla värden integralen nedan kan anta under sådana förutsättningar.

$$I_C = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

24. Fältet $\mathbf{F}$ som ges av

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

är slätt på sin definitionsmängd i $\mathbb{R}^3$ som alltså består av alla punkter förutom origo.

(a) Bevisa att $\mathbf{F}$ är divergensfritt.

(b) $\mathbf{F}$ har ingen vektorpotential, och vi kan bevisa detta genom motsägelse. Låt S^2 vara enhetssfären runt origo i $\mathbb{R}^3$, med valfri orientering. Gör detta i två steg:

- Bestäm värdet på

$$\oiint_{S^2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

genom att använda fältets definition.

- Dra en slutsats baserat på vad du vet om denna typ av integraler för fält med vektorpotential.

(c) Kunde du ha använt Gauss sats i föregående bevis? Varför/varför inte?

(d) **(S)** Låt S vara en godtycklig slät yta som innesluter ett kompakt område M i $\mathbb{R}^3$ i vilket origo utgör en inre punkt[6]. Bestäm alla värden integralen nedan kan anta.

$$I_S = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

25. **(S)** Låt $M \subseteq \mathbb{R}^2$, och antag ett vektorfält $\mathbf{F}$ är glatt på M samt att $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Låt C vara en enkel och sluten kurva i M så att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

Vad kan du säga om Ms topologi? Har M hålrum? Tänk gärna tillbaka på uppgift 23.

[5] Alltså origo ligger ej på randen.
[6] Alltså origo ligger ej på randen.

26. **(S)** Låt $M \subseteq \mathbb{R}^3$, och antag ett vektorfält $\mathbf{F}$ är glat på M samt att $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$. Låt S vara randen till en volym $V \subseteq M$ så att

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$$

Vad kan du säga om Ms topologi? Har M hålrum? Tänk gärna tillbaka på uppgift 24.

27. Antag att $\mathbf{F}$ är glatt och divergensfritt över hela $\mathbb{R}^3$ och att vi betraktar integralen

$$I_S = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

där S är någon kompakt yta. Bevisa att om R är någon annan kompakt yta med samma rand (med samma inducerade randorientering!) som R så är $I_R = I_S$ med hjälp av

(a) Gauss sats.

(b) vektorpotentialer och Stokes sats.

28. Antag att du är mycket slug och har kommit på ett sätt att dela upp ett visst glatt vektorfält $\mathbf{F}$ i två delar, $\mathbf{F} = \nabla U + \operatorname{rot}(\mathbf{A})$. Med hjälp av det du vet om ”de stora integralsatserna” beskriv hur du skulle kunna beräkna integraler över slutna och kompakta ytor $S \subset M$ (med någon given orientering)

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Vad kan du säga om de slutna ytintegralerna då U är harmonisk, alltså då $\operatorname{div}(\nabla U) = 0$?