SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 8

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion: Avsnitt 12.9 och 13.1

1. Taylors formel i flera variabler
2. Användningar av Taylors formel
    a. Approximation
    b. Klassifikation av kritiska punkter
    c. Extrempunkter och extremvärden

Taylors formel i en variabel

Taylorpolynom: En variabel

Taylorpolynomet p_n av grad n till f kring a är

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exempel: TP av grad 2 kring punkten $x = 1$ till $f(x) = \sqrt{x}$ är

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-1/4}{2}(x-1)^2$$

Taylors formel i en variabel

Taylorpolynom: En variabel

Eegenskaper:

p_n har samma funktionsvärde och derivator ($\leq n$) i a som f och

$p_n(x) \approx f(x), \quad$ för x nära a.

Felet i approximationen ges av

$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ för ngt c mellan x och a.

$p_1(x)$ är *linjariseringen* av f.

Taylors formel

Taylorpolynom: Envariabel

Här är några exempel på Taylor polynom kring $x = 0$:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$$

Taylors formel i flera variabler

Taylorpolynom: Fleravariabel

Taylorpolynomet p_n av grad n till f kring $\mathbf{a}$ kan skrivas

$$p_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{d^1 f(\mathbf{a})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a})}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(\mathbf{a})}{n!}$$

där $d^j f(\mathbf{a}) = ((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \bullet \nabla)^j f(\mathbf{a})$.

p_n har samma funktionsvärde och derivator ($\leq n$) i $\mathbf{a}$ som f och
$p_n(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}),$ för $\mathbf{x}$ nära $\mathbf{a}$.

Felet i approximationen ges av

$$f(\mathbf{x}) - p_n(\mathbf{x}) = \frac{d^{n+1} f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))}{(n+1)!} = O(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^{n+1})$$

$p_1(\mathbf{x})$ kallas *linjariseringen* av f.

Taylors formel

Taylorpolynom i $\mathbb{R}^2$

Om $f = f(x, y)$ då ges Taylorpolynomet av **grad** 2 till f kring (a, b) av

$$p_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot (x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot (x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot (y - b)^2\right)$$

där andraderivatorna förstås också ska tas i punkten (a, b).

Taylors formel

Taylorpolynom i $\mathbb{R}^2$

Om vi sätter $x - a = h$ och $y - b = k$ kan vi skriva Taylorpolynomet på formen

$$p_2(h,k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k +$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right)$$

Se: Approximation of 1,2, and 3 degree polynomials at:
http://demonstrations.wolfram.com/TaylorApproximationsInTwoVariables/

Taylors formel

Taylorpolym i flera variabler

Exempel: TP av grad 2 till $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ kring $(x,y) = (1,2)$ är

$$p_2(x,y) = 3 + \frac{1}{3}(x-1) + 2(y-2) \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{8}{27}(x-1)^2 + 2\left(-\frac{2}{9}\right)(x-1)(y-2) + \frac{2}{3}(y-2)^2\right).$$

Detta kan användas för approximation. Vi får

$$\sqrt{1.02^2 + 1.97^3} \approx p_2(1.02, 1.97) \approx 2.9471593$$

med ett fel som är mindre än 10^{-5}.

Taylors formel

Quiz (här):

1. Ta fram Taylorpolynomet av grad 2 kring $(x, y) = (0, 0)$ till $f(x, y) = e^{x+2y}$

2. Vilken approximation av $f(0.1, 0.2)$ ger polynomet?

Taylors formel

Quiz (här):

1. Ta fram Taylorpolynomet av grad 2 kring $(x, y) = (0, 0)$ till $f(x, y) = e^{x+2y}$

2. Vilken approximation av $f(0.1, 0.2)$ ger polynomet?

Räkna fram p_2 som tidigare, alternativ var *streetwise*

$$e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3), \qquad t = x + 2y$$

$$f(x, y) = e^t = 1 + (x + 2y) + (x + 2y)^2/2 + O((x^2 + y^2)^{3/2})$$

Därför har vi

$$p_2(x, y) = 1 + x + 2y + x^2/2 + 2y^2 + 2xy.$$

$$f(0.1,\ 0.2) \approx p_2(0.1,\ 0.2) \approx 1.625$$

Taylors formel

Quiz (här):

Ta fram Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

A. Kring $(x, y) = (0, 0)$

B. Kring $(x, y) = (1, 0)$

C. Kring $(x, y) = (1, 1)$

Kan någon av punkterna vara ett lokalt max eller lokalt min?
(Vi återkommer till begreppen härnäst.)

Extrempunkter och extremvärden

En variabel

En punkt a där $f'(a) = 0$ kallas en **kritisk** eller **stationär** punkt.

En punkt a där $f'(a)$ saknas kallas en **singulär** punkt.

En punkt där f tar ett största eller minsta värde (lokalt eller globalt) kallas en **extrempunkt**.

Extrempunkter och extremvärden

En variabel: Några viktiga punkter

1. Funktionen $f(x) = x^3$ har inte en extrempunkt i $x = 0$ (trots att det är en kritisk punkt).
2. Funktionen $f(x) = |x|$ har en extrempunkt i origo (som inte är en kritisk punkt).
3. Största och minsta värde finns inte alltid utan detta kräver argument. Bara ett fall är enkelt: om f är kontinuerlig på ett slutet o begränsat intervall så vet man att max och min finns.

Extrempunkter och extremvärden

En variabel

Extremvärden, om de finns, kan antas i

1. Kritiska punkter
2. Singulära punkter
3. Ändpunkter

För att visa med hjälp av derivata att en punkt a är en lokal extrempunkt har man två vägar:

1. Visa att $f'(a) = 0$ och $f''(a) > 0$ (för min)
eller att $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$ (för max)

2. Visa att $f'(a) = 0$ och göra ett teckenschema för derivatan, där $-\ 0\ +$ betyder min och $+\ 0\ -$ betyder max.

Extrempunkter och extremvärden

Extrempunkter och extremvärden i flera variabler

Global Maximum punkt: Om $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x}$ i definitionsmängden sägs $\mathbf{a}$ vara en global maxpunkt för f. Värdet $f(\mathbf{a})$ sägs då vara funktionens största värde. Om olikheten bara gäller för alla $\mathbf{x}$ i någon omgivning till $\mathbf{a}$ så sägs $\mathbf{a}$ vara en lokal maxpunkt.

Global Minimum punkt: Om $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x}$ i definitionsmängden sägs $\mathbf{a}$ vara en global minpunkt för f. Värdet $f(\mathbf{a})$ sägs då vara funktionens minsta värde. Om olikheten bara gäller för alla $\mathbf{x}$ i någon omgivning till $\mathbf{a}$ så sägs $\mathbf{a}$ vara en lokal minpunkt.

Extrem punkt: Antingen max. eller minpunkt. Motsvarande funktionsvärden kallas extremvärden.

Extrempunkter och extremvärden

Max. min punkter

Finns alltid största och minsta värde? NEJ!

Existensen av max och min kan aldrig förutsättas utan kräver alltid argument.

Ett enkelt fall: Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd (dvs en mängd som är sluten och begränsad) så vet man att största och minsta värde finns.

Annars kan vad som helst hända och man får argumentera olika i olika fall.

Extrempunkter och extremvärden

Kritiska och singulära punkter

Om $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ så sägs $\mathbf{a}$ vara en **kritisk punkt** för f. Obs att detta betyder att alla partiella derivator är noll i punkten.

Om $\nabla f(\mathbf{a})$ saknas så sägs $\mathbf{a}$ vara en **singulär punkt** för f. Obs att detta betyder att f inte är partiellt deriverbar (med avseende på alla variabler) i punkten.

Extrempunkter och extremvärden

Hur hittar vi Extremvärden, om de finns.

Sök bland följande punkter:

1. Kritiska punkter: $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
2. Singulära punkter: $\nabla f(\mathbf{a})$ existerar inte
3. Randpunkter till undersökningsområdet

För att visa med hjälp av derivata att en punkt **a** är en lokal extrempunkt kan man Taylorutveckla f till grad 2 kring **a**.
Då ska två saker gälla:

1. $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Dvs alla första ordningens partiella derivator ska vara 0.
2. Andragradspolynomet ska dessutom vara positivt (för min) eller negativt (för max).

Extrempunkter och extremvärden

Andragradstermen p_2: vad säger den

Observera att

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = p_2(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3)$$

$$\text{ger:} \quad p_2(\mathbf{x}) > 0 \text{ för } \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \geq 0$$

dvs **a** är en lokal minimum punkt.

$$\text{Om:} \quad p_2(\mathbf{x}) < 0 \text{ för } \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \leq 0$$

dvs **a** är en lokal maximum punkt.

Om p_2 tar både positiva och negativa värden kring punkten **a** då är det en sadelpunkt

Extrempunkter och extremvärden

Andragradstermen p_2: vad säger den

Hemma: Tolka dessa i termer av Hessianen (Hessianmatrisen)

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx}(\mathbf{a}) & f_{xy}(\mathbf{a}) \\ f_{yx}(\mathbf{a}) & f_{yy}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Observera att

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a})H(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T = p_2(x).$$

Exempel

$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ antar sitt största värde, som är 1, i punkten $(0, 0)$ där $\nabla f = \mathbf{0}$. Minsta värde saknas.

Vad är värdemängden till f?

Extrempunkter och extremvärden

Exempel

$g_1(x, y) = 1 + x^2 - y^2$ har varken största eller minsta värde, och funktionen har inte heller några lokala extrempunkter. Den kritiska punkten $(0, 0)$, där $\nabla f = \mathbf{0}$, är en sadelpunkt och ingen extrempunkt.

Quiz (hemma):

Undersök huruvida funktionen $g_2(x, y) = \sin(x^2 - y^2 + x^3)$ har en extrempunkt i origo.

Tips: Studera andragradspolynomet p_2, och jämför med exemplet ovan.

Exempel

$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ har inga kritiska punkter. Den antar sitt minsta värde, som är 0, i punkten $(0, 0)$ som är en singulär punkt där funktionen inte är partiellt deriverbar. Största värde saknas.

Extrempunkter och extremvärden

Quiz (här):

1. Avgör om funktionen f som ges av

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

antar något största eller minsta värde.

2. Avgör om funktionen g som ges av

$$g(x,y) = \frac{y^2 \arctan(1+x)}{e^{x^2+y} + 5}$$

antar något största eller minsta värde när x och y uppfyller olikheterna $|x| \leq 1$ och $|y| \leq 1$.

Extrempunkter och extremvärden

Undersökningen av andragradstermen.

Avgör om den är positivt definit eller negativt definit eller indefinit eller något annat!

1. $h^2 + 2k^2$

2. $3h^2 - 2k^2$

3. $h^2 + k^2 + hk$

4. $h^2 + k^2 + 2hk$

5. $h^2 + k^2 - 4hk$

Extrempunkter och extremvärden

Exempel

Finn alla lokala extrempunkter till $f(x, y) = x^3 + 18xy + 9y^2$.

Läxa

Gör detta

Lös några av de rekommenderade uppgifterna och börja på uppgift 1 och 2 till seminarium 3.

De rekommenderade uppgifterna i boken är 1, 3, 5, 7, 11 från kap 12.9 och 5, 7, 9, 19, 23, 25 från kapitel 13.1.