SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 13

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion, Avsnitt 15.1-15.2

- Vektorfält
- Konservativa vektorfält
- Potentialfunktioner

Vektorfält

Vektorvärda funktioner kan också betraktas som vektorfält.

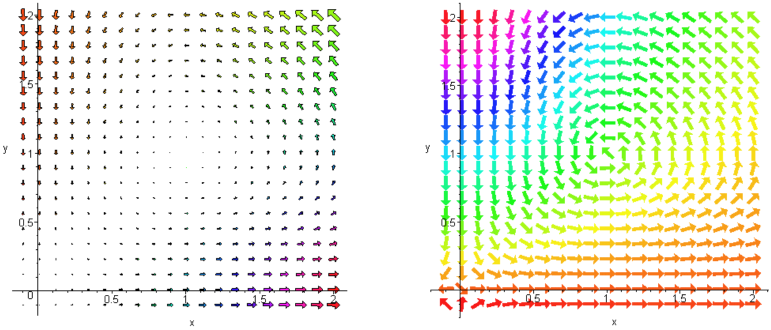
I så fall kan de illustreras med *pilar/vektoer*
Vanliga beteckningar är **F**, **G**, etc.

Tolkning: I varje punkt (x, y, z) sitter en vektor $\mathbf{F}(x, y, z)$

Exempel 1: Skissa de plana vektorfälten

$$\mathbf{F}(x, y) = (x+y, x), \quad \mathbf{G}(x, y) = (-y, 0), \quad \mathbf{H}(x, y) = (x(1-y), y(x-1))$$

Se några exempel:
http://demonstrations.wolfram.com/MultipoleFields/
http://demonstrations.wolfram.com/DielectricSphereInAUniformElectricField/
http://demonstrations.wolfram.com/A2DFlowField/



Fältet $\mathbf{H}(x, y) = (x(1 - y), y(x - 1))$ presenterat med olika bild intensitet.

Vektorfält

Exempel of tillämpningar

1. Gravitationsfält
2. Elektrostatiska fält
3. Magnetfält
4. Hastighetsfält
5. Gradientfält

Ofta antar vi att de är minst C^1, där de är definierade.

Formel definition of vektorfält

Ett vektorfålt associerar en vektor med varje punkt i rummet. Vektorfält används för att ange en hastighet och riktning för (ex.vis) en flytande vätska i rummet.

Quiz (här):

1) Rita följande vektorfält i planet:

$$\mathbf{F}(x,y) = (x,y), \qquad \mathbf{G}(x,y) = (-y,x).$$

2) Rita färdvägen (kurvan) för en kork som släpps i vektorfältet **F**, eller **G**.

Dessa färdvägar kallas Fältlinjer/strömlinje/flödeslinje/trajektoria/integralkurva.[1]

Fältlinje: är en kurva till vilken vektorfältet är tangentiellt i varje punkt.

[1] Ett kärt barn har många namn!

Fältlinjer/strömlinje/flödeslinje/trajektoria/integralkurva

Hur hittar man Fältlinjer: $\mathbb{R}^2$

Om $\mathbf{F}(x, y) = (P, Q)$ så ges fältlinjerna av[2]

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}.$$

Observera att detta kan skrivas som

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{d}{dt} \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}' = (x', y') = (P, Q).$$

[2] På liknande sätt fås fältlinjerna i 3d (sidan 861-862).

Vektorfält

Fältlinjer och nivåkurvor

Exempel 2 (Jfr uppg. 2, seminarium 5): Låt $f(x, y) = xy$.
Bestäm ett vektorfält **F** (ej identisk noll) s.a. fältlinjerna till **F** är nivåkurvor till f.

Fältlinjer ges av $\mathbf{r}' = \mathbf{F} = (P, Q)$. Det ska vara tangent till nivåkurvor.

Vi har även $\nabla f = (y, x)$ är ortogonal mot nivåkurvor till f, dvs

$$\nabla f \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \rightarrow \quad (y, x) \cdot (P, Q) = 0 \quad \rightarrow \quad yP + xQ = 0.$$

Ett enkelt val ger att $P = -x$, $Q = y$.

Fältlinjer och nivåkurvor

Quiz (hemma): Kan ni bestämma alla vektorfällt i Exempel 2, ovan?

Alla sådana vektorfällt ges av $P = \frac{-Qx}{y}$, då $y \neq 0$. Vektorfälten ska vara deriverbara därför ska $Q = yH(x, y)$ och vi får

$(-xH(x, y), yH(x, y))$, där $H(x, y)$ är en kontinuerlig funktion.

Vektorfält

Konservativa vektorfält

Om det finns en funktion φ sådan att $\nabla\varphi = \mathbf{F}$ så sägs vektorfältet $\mathbf{F}$ vara **konservativt**. Funktionen φ kallas i så fall för en **potentialfunktion** till $\mathbf{F}$.

Exempel 2:
Varje gradientfält $\mathbf{F} = \nabla f$ för en given funktion f är konservativt fält.

Exempel 3:
Är det plana fältet $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ konservativt?

Vilkor för konservativitet

Plana vektorfält: $\mathbf{F}(x, y) = (P, Q)$.

Om inte $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ så kan vektorfältet inte vara konservativt.

3d-vektorfält: $\mathbf{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$.

Om inte

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

så kan vektorfältet inte vara konservativt.

Vektorfält

Quiz (här): Konservativa vektorfält

Undersök vilka av dessa vektorfält är konseravtiva

1) $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$.

2) $\mathbf{G}(x, y) = (y, x)$.

3) $\mathbf{H}(x, y) = (\sin x, \sin y, \sin z)$.

4) $\mathbf{K}(x, y) = (yz, xz, xz)$.

Vektorfält

Ekvipotentialkurvor och Ekvipotentialytor

Nivåytor till potentialfunktionen kallas ekvipotentialytor till vektorfältet.
För plana vektorfält är motsvarigheten ekvipotentialkurvor.

Exempel 4: Visa att det plana vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y) = (x, -y)$$

är konservativt och bestäm dess fältlinjer och ekvipotentialkurvor

Svar: $\varphi(x,y) = x^2/2 - y^2/2 + C$, fältlinjerna är hyperbler med koordinataxlarna som asymptoter, ekvipotentialkurvorna är hyperbler med linjerna $y = \pm x$ som asymptoter.

Vektorfält

Quiz (här):

Avgör om det finns en potentialfunktion för vektorfälten nedan och om ja, bestäm en potentialfunktion:

1. $\mathbf{F} = (y, x)$
2. $\mathbf{G} = (y, x, 1)$
3. $\mathbf{H}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Vektorfält

Quiz (hemma):

Vilka av vektrofälten nedan är konservativa. Bestäm en potentialfunktion då fältet är konservativt.

1. $\mathbf{F} = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$
2. $\mathbf{G} = \frac{(x,y)}{x^2+y^2}$

Vektorfält

Se till att du kan dessa:

a. Hur visar man att ett vektorfält är konservativt?
b. Hur visar man att ett vektorfält inte är konservativt?
c. Vad betyder ordet potentialfunktion?
d. Hur hittar man en potentialfunktion?