PARTIELLA DERIVATOR AV HÖGRE ORDNINGEN

Uppgift 1. Låt $f(x, y, z) = x^3yz^2 + \ln(yz^4 + y)$

Beräkna $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2}$

Lösning:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2yz^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xyz^2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 6xz^2$$ och till slut

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2} = 12xz$$

Svar: $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2} = 12xz$

Uppgift 1. Visa att funktionen $z(x, y) = 10\sin(3ax)\sin(3y)$, a är en konstant, satisfierar ekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Lösning:

$$z(x, y) = 10\sin(3ax)\sin(3y)$$

$$z'_x(x, y) = 30a\cos(3ax)\sin(3y)$$
$$z''_{xx}(x, y) = -90a^2\sin(3ax)\sin(3y)$$
$$z'_y(x, y) = 30\sin(3ax)\cos(3y)$$
$$z''_{yy}(x, y) = -90\sin(3ax)\sin(3y)$$

VL i ekvationen är:

VL= $z''_{xx}(x,y) = -90a^2\sin(3ax)\sin(3y)$

HL är lika med:

HL $= a^2 z''_{yy}(x,y) = -90a^2\sin(3ax)\sin(3y)$

Alltså gäller **VL=HL,** vad skulle bevisas.

Uppgift 2. Visa att funktionen $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$, satisfierar ekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(Laplace ekvation)}$$

Uppgift 3. Visa att funktionen $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, satisfierar ekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(Laplace ekvation)}$$

Uppgift 4. Visa att funktionen $F(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$,

där *a* är en konstant, *h, g* godtyckliga funktioner i C^2, satisfierar ekvationen

$$a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad \text{(endimensionell vågekvation)}$$

Lösning:

Vi betecknar $u = (x+at) \quad v = (x-at)$,

och betraktar F som en sammansatt funktion

$$F(x,t) = g(u(x,t)) + h(v(x,t))$$

Vi deriverar på x och enligt kedjeregeln får

$$\frac{\partial F}{\partial x} = g'_u \cdot u'_x + h'_v v'_x = g'_u \cdot 1 + h'_v \cdot 1 = g'_u + h'_v$$

Vi deriverar en gång till på x och får

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = g''_u \cdot 1 + h''_v \cdot 1 = g''_u + h''_v$$

Derivering på t ger

$$\frac{\partial F}{\partial t} = g'_u \cdot u'_t + h'_v v'_t = g'_u \cdot a + h'_v \cdot (-a) = a g'_u - a h'_v$$

Vi deriverar en gång till på t och får

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = a g''_u \cdot a - a h''_v \cdot (-a) = a^2 g''_u + a^2 h''_v$$

För vänsterledet i ekvationen $a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ har vi

$$VL = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = a^2 (g''_u + h''_v) = a^2 g''_u + a^2 h''$$

$$HL = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = a^2 g''_u + a^2 h''_v = a^2 g''_u + a^2 h''$$

(Anmärkning: Både VL och HL beräknas i punkten $u = (x + at)$, $v = (x - at)$)

Alltså VL = HL vad skulle bevisas.

Uppgift 5. Bestäm alla funktioner *f*(x,y) som satisfierar nedanstående ekvation

a) $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ b) $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ c) $\frac{\partial F}{\partial x} = 5\cos x + 4$, d) $\frac{\partial F}{\partial y} = y^3 + \sin y$

e) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ f) $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ g) $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

Lösning a) $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ betyder att funktionen ej beror av x utan bara av y.

Därför $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow F = f(y)$ där *f(y)* är vilken som helst funktion av *y.*

Svar a) $F = f(y)$ där f(y) är en godtycklig, deriverbar funktion.

Svar b) $F = f(x)$

Svar c) $F = 5\sin x + 4x + f(y)$

Svar d) $F = \frac{y^4}{4} - \cos y + f(x)$

Lösning e) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ dvs $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$ betyder att $\frac{\partial F}{\partial x}$ ej beror av x utan endast av y.

Därför $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = f(y) \Rightarrow F = xf(y) + g(y)$

Svar f) $F = yf(x) + g(x)$

Svar g) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = f(x) \Rightarrow F = \int f(x)dx + g(y)$

Eftersom $\int f(x)dx$ är igen en funktion av x , som vi betecknar $h(x)$ får vi

$F = h(x) + g(y)$

Svar: $F = h(x) + g(y)$, (där h(x) och g(y) är godtyckliga deriverbara funktioner)

Uppgift 6. (Gammal KS)

Bestäm alla funktioner av typ $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2)$ som satisfierar ekvationen

$$x\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + z\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 4(x^2 + y^2 + z^2) \cdot f(x,y,z)$$

Lösning: Vi betecknar $u = x^2 + y^2 + z^2$ och $f(x, y, z) = g(u)$.
Enligt kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xg'(u)$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2yg'(u)$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2zg'(u).$$

Vi substituerar derivatorna samt $f(x, y, z) = g(u)$ i ekvationen och förenklar:

$$2x^2g'(u) + 2y^2g'(u) + 2z^2g'(u) = 4(x^2 + y^2 + z^2) \cdot g(u)$$
$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2)g'(u) = 4(x^2 + y^2 + z^2)g(u)$$
$$\Rightarrow g'(u) = 2g(u)$$

Vi har fått en linjär, homogen DE ev första ordningen med konstanta koefficienter. Den karrakteristiska ekv. $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$. Härav $g(u) = Ce^{2u}$och därmed

$$f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2) = Ce^{2(x^2+y^2+z^2)}$$

Svar:

$$f(x, y, z) = Ce^{2(x^2+y^2+z^2)}$$