UDDA FUNKTIONER OCH DUBBELINTEGRALER.

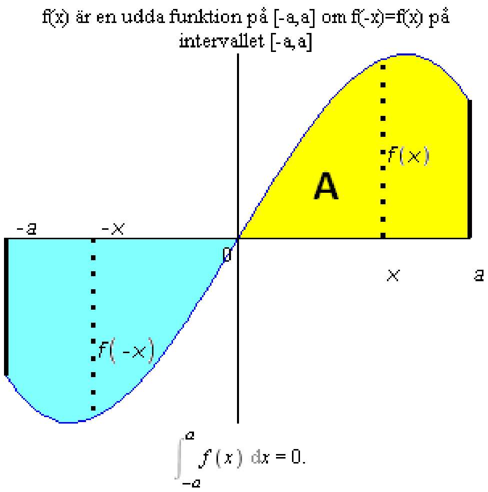
Från en variabelanalys vet vi

att integral över ett symetrisk intervall $[-a, a]$

av en udda funktion $f(x)$ är lika med 0.

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ om $f(x)$ är udda.

T ex $\int_{-4}^{4} x^5 dx = 0$



Här upprepar vi def. av udda (och jämna) funktioner

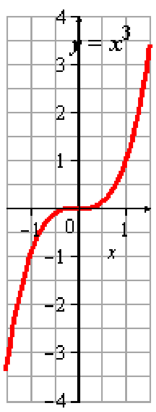
Låt f vara en reell funktion av en reell variabel med definitionsmängden D_f som är symmetrisk i origo.

DEFINITION 1: Vi säger att funktionen $y = f(x)$ är **jämn** om

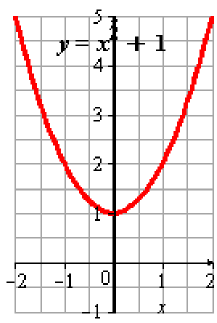
$$f(-x) = f(x) \quad för\ varje\ x \in D_f$$

DEFINITION 2: Vi säger att funktionen $y = f(x)$ är **udda** om

$$f(-x) = -f(x) \quad för\ varje\ x \in D_f$$



Grafen till en udda funktion är symmetrisk i origo



Grafen till en jämn funktion är symmetrisk kring y-axeln

Exempel 1. Följande funktioner är jämna:

a) $y = x^2 + 1$ b) $y = x^4$ c) $y = cos(x)$ d) $y = |x|$

e) $y = x^2 - 4$ f) $y = x^4 - 3x^2 + 3$ g) $y = x^8 + cos(x) + 5$

Exempel 2. Några udda funktioner:

a) $y = x^3 + x$ b) $y = x^{23}$ c) $y = sin(x)$ d) $y = tan(x)$ e) $y = cot(x)$

Exempel 3. Följande funktioner är varken jämna eller udda:

a) $y = x^3 + x^4$ b) $y = x^5 + x^2 - 5$ c) $y = sin(x) + cos(x)$

d) $y = ln(x)$ e) $y = e^x$

Anmärkning: Följande regler kommer direkt från definitionen

UDDA + UDDA= UDDA (funktion) (Ex: $x^7 + arctan(x)$ är en udda funktion)

TAL*UDDA=UDDA (Ex: $23 * x^7$är en udda funktion)

UDDA*JÄMN= UDDA (Ex: $x^{23} * cos(x)$ är en udda funktion)

UDDA* UDDA = JÄMN (Ex: $x^3 * sin(x)$ är en jämnfunktion)

JÄMN * JÄMN = JÄMN (Ex: $x^4 * cos(x)$ är en jämnfunktion)

När vi beräknar integral över ett **symetriskt** intervall $[-a, a]$ förenklar vi beräkning om det finns **udda** termer i integranden, som i nedanstående exempel:

Uppgift 1. Beräkna integralen

a) $\int_{-3/2}^{3/2}[x^7 + 3x^5 + 8x + 5sin(x) + arctan(x) + 5]dx$

b) $\int_{-10}^{10}[x^7 + 3x^2 + 8x + 5tan(x) + arctan(x) + sin(x)]dx$

c) $\int_{-4}^{4}[3t^2tan(t) + sin(t) + 5t]dt$

d) $\int_{-5}^{5}[3y^3 + arctan(y) - 23sin(5y)]dy$

Lösning a)

Vi har ett symmetriskt intervall [-1/2, 1/2] och därför blir integralen av varje udda term lika med 0 (vi har kvar endast integralen av icke-udda termen 5:

$\int_{-3/2}^{3/2}[x^7+3x^5+8x+5sin(x)\ +arctan(x)\ +\ 5]dx$ =0+0+0+0+0+0+ $\int_{-1/2}^{1/2}5dx$ =15

b) $\int_{-10}^{10}[x^7+3x^2+8x+5tan(x)\ +arctan(x)\ +sin(x)]dx$ =$\int_{-10}^{10}3x^2dx\ \ =2000$

c) 0 **d)** 0

UDDA FUNKTIONER OCH DUBBELINTEGRAL

Ovanstående förenkling vid beräkning av en enkelintegral av udda funktioner över ett symmetrisk interval $[-a,\ a]$ kan vi också använda vid beräkning av en dubbelintegral om integrationsområde är symmetriskt i en av axlarna.

FALL 1. Om

i) integrationsområde D i xy-planet definieras av

$$a\le x\le b,\qquad -u(x)\ \le y\ \le +u(x)$$

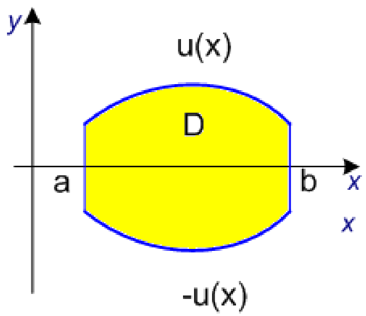
(alltså området är **symetrisk i x-axeln**) och

ii) $f(\,x,y)$ är en **udda funktion med avseende på y**

(dvs $f(\,x,-y)\ =-f(x,y)$ för alla $(x,y)\in D$)

då gäller

$\iint_{D}\ \boldsymbol{f(x,y)dxdy=0}$.



Bevis:

Enligt regler för enkelintegraler med udda integranden över symmetriskt intervall gäller

$\int_{-u(x)}^{u(x)}\ f(x,y)\ dy$ för varje (fixt) x.

Därför

$\iint_{D}\ f(x,y)dxdy$ = $\int_a^b dx\int_{-u(x)}^{u(x)}\ f(x,y)\ dy\ \ =\int_a^b 0\ dx\ \ =0$

Exempel. Beräkna

$\iint_D x^2 y^{33}\, dxdy$

där $D = \{ (x,y),\ 2 \le x \le 5, \quad - e^{3x} \le y \le +e^{3x}\}$.

Lösning

$$\iint_D x^2 y^{33}\, dxdy = 0$$

eftersom D är symmetrisk i x-axeln och $x^2 y^{33}$ är en udda funktion på D med avseende på y

(uppenbart $f(x,-y) = -f(x,y)$)

Uppgift 2. Låt $D = \{ (x,y),\ 1 \le x \le 3, \quad - e^{2x} \le y \le +e^{2x}\}$.

Beräkna

a) $\iint_D [x^4 y^3 - 8x^3 y^{25} + \sin y + 8x^4 \tan(y) + x^3 \tan(y)]\ dxdy$

b) $\iint_D [x^4 y^{25} + x^3 \tan(y) + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} + 5]\ dxdy$

c) $\iint_D [x^4 y^{25} + y^3 \cos(y) + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}]\ dxdy$

Lösning b)

Första tre termer i integranden $x^4 y^{25}$, $x^3 \tan(y)$ och $\frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$ är

är udda med avseende på y (för, tillfälligt, fixt x). T ex för tredje term gäller

$$f_3(x,-y) = \frac{x(-y)}{\sqrt{1+(-y)^2}} = -\frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} = -f_3(x,y)$$

Kontrollera själv för första två termer.

Om vi integrerar termviss får vi

$$\iint_D [x^4 y^{25} + x^3 \tan(y) + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} + 5]\ dxdy = 0 + 0 + 0 + \iint_D 5\ dxdy$$

$$= \int_{1}^{3} dx \int_{-e^{2x}}^{e^{2x}} 5dy = \int_{1}^{3} 10e^{2x} dx = \left[10\frac{e^{2x}}{2}\right]_{1}^{3} = 5(e^6 - e^2)$$

Svar: a) 0, b) $5(e^6 - e^2)$ c) 0

==

FALL 2. Om

i) integrationsområde D i xy-planet definieras av

$$c \le y \le d, \qquad -v(y) \le x \le +v(y)$$

(alltså området är **symetrisk i y-axeln**) och

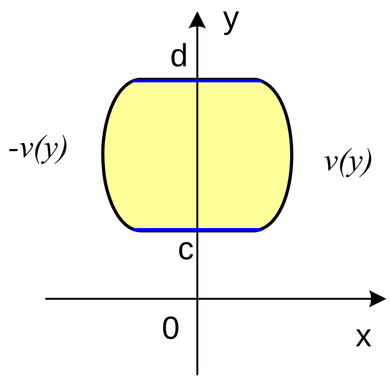
ii) $f(x, y)$ är en **udda funktion med avseende på x**

(dvs $f(-x, y) = -f(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$)

då gäller

$\iint_D \boldsymbol{f(x,y)dxdy = 0}$.

(Detta bevisas på samma sätt som i FALL 1)



Exempel. Beräkna

$\iint_D y^3 \, sin(5x) \, dxdy$

där $D = \{ (x, y), \; 2 \le y \le 4, \qquad - y^2 \le x \le +y^2\}$.

Lösning

$$\iint_D y^3 \, sin(5x) \, dxdy = 0$$

eftersom D är symmetrisk i y-axeln och $sin(5x)y^3$ är en udda funktion på D med avseende på x.

Uppgift 3. Låt $D = \{ (x,y),\ 1 \le y \le 3,\quad |x| \le 2\}$. Beräkna

a) $\iint_D [x^3y^3 - 4x^5y^{25} + sinx + y^4 tan(x)\ ]\ dxdy$

b) $\iint_D\ x^3 sin(y) + \frac{3xy}{\sqrt{1+x^4}} + 10]\ dxdy$

c) $\iint_D [x^3y^{25}cosy + x^2]\ dxdy$

Svar:

{ Området $D = \{ (x,y),\ 1 \le y \le 3,\ -2 \le x \le 2\}$ är symmetriskt i y axeln. }

a) 0

b) $\iint_D\ x^3 sin(y) + \frac{3xy}{\sqrt{1+x^4}} + 10]\ dxdy$ =0+0+ $\iint_D\ 10\ dxdy$ =10·arean(D)=80

c) $\iint_D [x^3y^{25}cosy + x^2]\ dxdy$ =0+ $\iint_D\ x^2\ dxdy = \int_1^3 dy \int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{32}{3}$

==

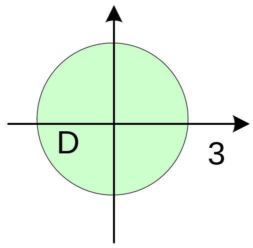
I nedanstående uppgift är integrationsområdet symmetriskt i både x- och y- axeln som vi utnyttjar för att förenkla beräkningen.

Uppgift 4. Beräkna

$\iint_D (y^5\ cos(5x) + x^5\ cos(y) + 4)\ dxdy$

där $= \{ (x,y),\ x^2 + y^2 \le 9\}$.

(D är cirkeln som har radien=3 och centrum i origo)



Lösning

$\iint_D (y^5\ cos(5x) + x^5\ cos(y) + 4)\ dxdy$

$= \iint_D\ y^5\ cos(5x)\ dxdy + \iint_D\ x^5\ cos(y)\ dxdy + \iint_D\ 4\ dxdy$ (*)

=0+0 + 4·arean(D) = 4· 9 π=36 π

Anmärkning : 1. Den första integralen i (*) är 0 eftersom integranden $y^5\ cos(5x)$ är en udda funktion på y och D är symmetrisk i x-axeln.
2. Den andra integralen i (*) är 0 eftersom integranden $x^5\ cos(y)$ är en udda funktion på x och D är symmetrisk även i y-axeln.

JÄMNA INTEGRANDER

Vi kan (lite) förenkla beräkning av dubbelintegralen för funktioner som är jämna

i en variabel (t ex y) om området är symmetrisk kring en axel (t ex x-axeln):

FALL 3. Om

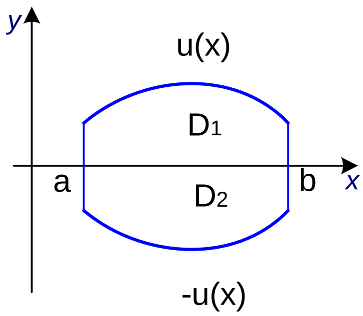
i) integrationsområde D i xy-planet definieras av

$$a \le x \le b, \qquad -u(x) \le y \le +u(x)$$

(alltså området är **symetrisk i x-axeln**) och

ii) $f(x,y)$ är en **jämn funktion med avseende på y**

(dvs $f(x,-y) = f(x,y)$ för alla $(x,y) \in D$)



då gäller

$$\iint_{D1} f(x,y)dxdy = \iint_{D2} f(x,y)dxdy$$

och därför

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = \iint_{D1} f(x,y)dxdy + \iint_{D2} f(x,y)dxdy$$

$$= 2\iint_{D1} f(x,y)dxdy\,.$$

FALL 4. Om

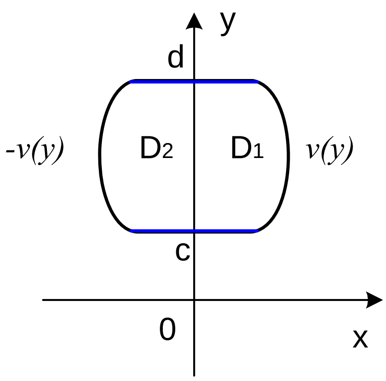
i) integrationsområde D i xy-planet definieras av

$$c \le y \le d, \qquad -v(y) \le x \le +v(y)$$

(alltså området är **symetrisk i y-axeln**) och

ii) $f(x,y)$ är en **jämn funktion med avseende på x**

(dvs $f(-x,y) = f(x,y)$ för alla $(x,y) \in D$)



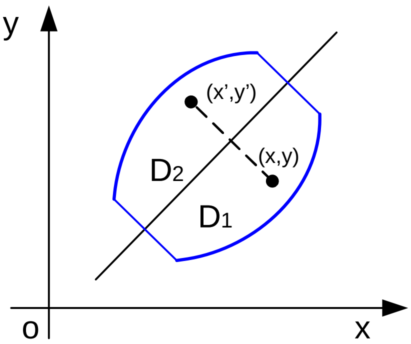
då gäller

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = 2\iint_{D1} f(x,y)dxdy\,.$$

FALL 5.

Alla fall F1-F4 kan generaliseras och användes på allmänna symmetriska område:

Låt D vara ett integrationsområde i xy planet symmetriskt kring linjen L som är delad i två symmetriska områden $D_1 \; och \; D_2$. Låt (x', y') beteckna den punkt i D2 som är symmetrisk till (x, y).



A) Om

$f(\, x', y') \; = f(x, y)$ (för alla $(x, y) \in D1$)

då är $\iint_{D1} f(x,y)dxdy \; = \iint_{D2} f(x,y)dxdy$ och därför

$\iint_{D} \boldsymbol{f(x,y)dxdy} = \mathbf{2} \iint_{D1} \boldsymbol{f(x,y)dxdy}$.

B) Om

$f(\, x', y') \; = -f(x, y)$ (för alla $(x, y) \in D1$)

då är $\iint_{D1} f(x,y)dxdy \; = -\iint_{D2} f(x,y)dxdy$ och därför

$\iint_{D} \boldsymbol{f(x,y)dxdy} = \mathbf{0}$.

Anmärkning: A, B kan enkel bevisas med hjälp av dubbelintegralens definition (Riemannsummor).

Uppgift 5 . Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Beräkna $\iint_D f(x,y)dxdy$ om

a) D är triangeln med hörn i (0,0), (1,0) och (0,1).

b) D är triangeln med hörn i (1,0) , (0,1) och (-1,0)

Tipps: Använd a) .

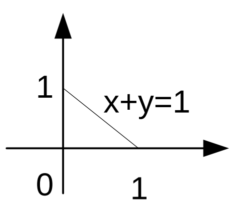
c) D är rektangeln med hörn i (1,0) , (0,1), (-1,0) och (0,-1)

Tipps: Använd a) eller b) .

d) D definieras av $|x| + |y| \leq 1$

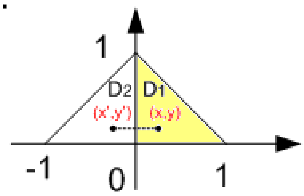
Lösning a)

$\iint_D f(x,y)dxdy$ =



$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy = \ldots = \int_0^1 (\frac{1}{3} - x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3)dx = \frac{1}{6}$

b) Punkten $(x', y') = (-x, y)$ är *symmetrisk till* (x,y).



Eftersom $f(x', y') = f(-x, y) = (-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 = f(x,y)$ (för alla $(x,y) \in D1$)

har vi $\iint_{D1} f(x,y)dxdy = \iint_{D2} f(x,y)dxdy$

och därför

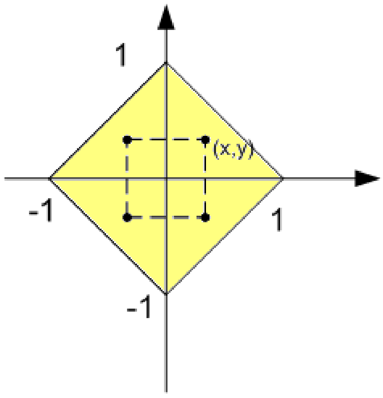
$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D1} f(x,y)dxdy =$ (enligt a) $= 2 \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

c) På grund av symmetri, eftersom

$f(-x,y) = f(-x,-x) = f(x,-y) = x^2 + y^2 = f(x,y)$

gäller att

$\iint_D f(x,y)dxdy = 2 * (resultat\ \ b) = 4 * (resultat\ a) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$



d)

Lägg märke till att randlinjen består av fyra delar

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 & om\ \ (x,y)\ ligger\ i\ första\ kvadranten \\ -x + y = 1 & om\ \ (x,y)\ ligger\ i\ andra\ kvadranten \\ -x - y = 1 & om\ \ (x,y)\ ligger\ i\ tredje\ \ kvadranten \\ x - y = 1 & om\ \ (x,y)\ ligger\ i\ fjärde\ kvadranten \end{cases}$$

Därför är definitionsområde, $|x| + |y| \le 1$, samma som i frågan c.

Integranden i d är också samma som i c frågan, och därmed har integralen i d samma värde som den i frågan c dvs $\frac{2}{3}$.

Svar: a) 1/6, b) 1/3, c) 2/3, d 2/3

Uppgift6 . Låt $f(x,y) = 2xy\sqrt{x^2+y^2}$.

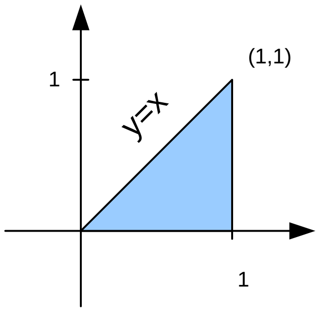
a) Beräkna $\iint_D f(x,y)dxdy$ om D är triangeln med hörn i (0,0), (1,0) och (1,1).

b) Använd resultat i a) för att beräkna $\iint_D f(x,y)dxdy$

om D är rektangeln med hörn i (0.0), (1,0) , (1,1) och (0,1).

Lösning:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x 2xy\sqrt{x^2+y^2}dy \quad (*)$$



Först beräknar vi integralen

$\int 2xy\sqrt{x^2+y^2}\, dy$

med hjälp av substitutionen

$x^2+y^2 = t; \quad 2y\,dy = dt$

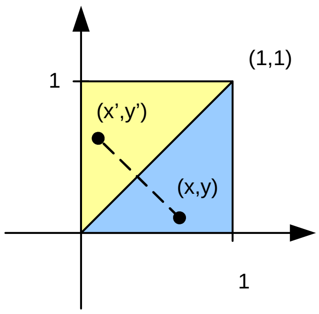
(Vi tillfälligt betraktar x som en konstant)

$$\int 2xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = \int x\sqrt{t}\,dt = x\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x(x^2+y^2)^{3/2} + C$$

Från (*) har vi

$$\int_0^1 dx\int_0^x 2xy\sqrt{x^2+y^2}dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x(x^2+y^2)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2^{5/2}}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^4\right]dx = \int_0^1 \left[\frac{2^{5/2}}{3} - \frac{2}{3}\right]x^4 dx = \left[\frac{2^{5/2}}{3} - \frac{2}{3}\right]\frac{x^5}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=5} = \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{2}{15}$$



b) Området är symmetrisk kring linjen $y = x$.
Om (x', y') är symmetrisk punkt till (x,y)
kring linjen $y = x$då är
$(x', y') = (y, x)$ [alltså y och x byter plats].
Därför

$$f(x',y') = f(y,x) = 2yx\sqrt{y^2+x^2} = 2xy\sqrt{x^2+y^2} = f(x,y).$$

Därför $\iint_{D1} f(x,y)dxdy = \iint_{D2} f(x,y)dxdy$ och därmed

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D1} f(x,y)dxdy = (\text{ enligt a}) = \frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{8}{15}$$

Svar: a) $\frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{2}{15}$ b) $\frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{8}{15}$