F14 Kurvintegraler
AV VEKTORFÄLT

Lars Filipsson

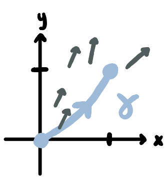
Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

Kurvintegraler av vektorfält

$\bar{F} = (P, Q)$, $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \int_a^b \left(P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right) dt$$

Ex Beräkna $\int_\gamma \bar{F}\,d\bar{r}$ om $\bar{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ och γ är parabeln $y = x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.



γ parametriseras av $\bar{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \le t \le 1$

METOD 1

Vi får: $\int_0^1 (\underbrace{t^4 \cdot 1 + 2 \cdot t \cdot t^2 \cdot 2t}_{5t^4})\,dt = [t^5]_0^1 = \underline{\underline{1}}$

METOD 2

$\varphi(x,y) = xy^2 \Rightarrow$ har potential, så: $\underbrace{\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \varphi(1,1) - \varphi(0,0)}_{\text{Kommer från huvudsatsen}} = 1$

(φ primitiv till $\bar{F}$)

Tolkning av kurvintegral

Arbetet av vektorfältet längs kurvan (där vektorerna indikerar kraft)

$\bar{F} \cdot d\bar{r}$: kraftens projektion i vägens riktning gånger vägen

Summera bidragen från "små bitar" av kurvan

$\Rightarrow$ Det totala arbetet som görs av vektorfältet längs kurvan