F2 Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$

SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 2

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

VT 2019

Program för idag

Funktioner från R till R^n (kap 11.1-11.3)

- Gränsvärde, kontinuitet, derivata
- Tolkningar, tillämpningar, exempel
- Frågor om filmen
- Dagens tentaproblem
- Läxa till nästa gång

Funktioner från R till $\mathbf{R}^n$

Vi betraktar funktioner $\mathbf{r} : D \to \mathbf{R}^n$ där $D \subset \mathbf{R}$ är ett intervall.

Definition. Att $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ betyder att för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \epsilon \text{ för alla } t \text{ sådana att } 0 < |t - a| < \delta.$$

Definition. Att $\mathbf{r}$ är kontinuerlig i en punkt $a \in D$ betyder att

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a).$$

Tolkningar av sådana funktioner

En kontinuerlig funktion **r** från ett intervall i **R** till $\mathbf{R}^n$ kan ses som en parametrisering av en kurva. Aspekter av detta:

- **Kinematik.** En partikel rör sig längs kurvan och $\mathbf{r}(t)$ anger partikelns position vid tidpunkten t. Frågeställningar: Vad har partikeln för hastighet och acceleration?
- **Geometri.** Kurvan som geometriskt objekt. Frågeställningar: Vad har kurvan för tangent och normal i olika punkter? Hur lång är kurvan?

Derivata av en funktion från R till R^n

$$\mathbf{r}'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(a+h) - \mathbf{r}(a)}{h}$$

om detta gränsvärde existerar. Obs att derivatan är en **vektor**. Obs att man deriverar varje komponent för sig.

Om tolkningen är en partikel som rör sig är $\mathbf{r}'(a)$ hastigheten i tidpunkten a och andraderivatan $\mathbf{r}''(a)$ är accelerationen.

I detta fall skriver man ofta $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ och $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Obs att både hastigheten och accelerationen är **vektorer**.

Längden av $\mathbf{v}$, dvs $|\mathbf{v}|$, kallar man farten och den är ett tal.

Exempel.

En partikel rör sig längs en kurva i *xy*-planet så att positionen vid tidpunkten t sekunder efter starten är

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(\pi t), 3\sin(\pi t)), \quad t \geq 0.$$

Rita partikelns bana och beräkna hastigheten och farten av partikeln vid tidpunkten $t = 1$ sekund. Enheten på axlarna är meter.

Exempel.

En kurva i *xyz*-rymden parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 2), \quad t \in \mathbf{R}$$

Visa att punkten $(-1, 1, 2)$ ligger på kurvan och ange en ekvation för tangentlinjen till kurvan i denna punkt.

Deriveringsregler.

Derivering är en linjär operation även för vektorvärda funktioner och dessutom gäller produktregeln och kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \bullet \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$$

Längden av en kurva.

Om $\mathbf{r}(t)$, där $a \leq t \leq b$, är en parametrisering av en kurva, så ges längden L av kurvan av

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Exempel.

Beräkna längden av spiralkurvan

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dagens tentaproblem.

Låt $\mathbf{r}(t)$ beskriva en partikels position i xy-planet där den rör sig med en konstant vinkelhastighet ω radianer per sekund i en cirkel med radie R kring origo.

A. Skriv upp uttrycket för $\mathbf{r}(t)$ om partikeln vid tiden $t = 0$ sekunder befinner sig i punkten $(R, 0)$.

B. Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ och accelerationen $\mathbf{r}''(t)$ av partikeln med hjälp av uttrycket från del A.

C. Rita en figur av partikelns bana och rita i figuren in hastigheten och accelerationen i en valfri tidpunkt.

Gårdagens tentaproblem.

Rita nedanstående mängder i $\mathbf{R}^2$ och avgör om de är öppna eller slutna eller varken eller.

$$M_1 = \{(x, y) : |x + y| \leq 2\}$$

$$M_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2y \leq 3\}$$

$$M_3 = \{(x, y) : 4x^2 + 3y^2 \leq 7\}$$

T.ex. hela rummet och tomma mängden

Kluring.

Många mängder är ju varken öppna eller slutna, men finns det några mängder som är både öppna och slutna?

Gör detta:

- Se film och svara på frågor i filmen
- Lös några av övningsuppgifterna
  Kap 10.1 uppg 11, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39
  Kap 10.6 uppg 3, 5, 9, 13
  kap 11.1 uppg 17, 21, 33
  kap 11.2 uppg 3
  kap 11.3 uppg 5, 7, 11, 13, 15