SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 9

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens Lektion

- Extremvärdesproblem (största och minsta värde) Exempel Avsnitt 13.2

Dagens Lektion

- Extremvärdesproblem (största och minsta värde) Exempel
  Avsnitt 13.2
- Extremvärdesproblem med bivillkor
  Lagranges multiplikatormetod
  Avsnitt 13.3,

Dagens Lektion

- Extremvärdesproblem (största och minsta värde) Exempel
  Avsnitt 13.2
- Extremvärdesproblem med bivillkor
  Lagranges multiplikatormetod
  Avsnitt 13.3,
- Lagranges multiplikatormetod i $\mathbb{R}^n$,
  Avsnitt 13.4 (Själva: Ögna igenom)

Lokala extrempunkter, repetition

Exempel 1

Visa att $(1, -1)$ är en kritisk/stationär punkt till funktionen $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$ och avgör dess typ.

Lokala extrempunkter, repetition

Exempel 1

Visa att $(1, -1)$ är en kritisk/stationär punkt till funktionen $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$ och avgör dess typ.

Lösning

Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2.$$

Lokala extrempunkter, repetition

Exempel 1

Visa att $(1, -1)$ är en kritisk/stationär punkt till funktionen $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$ och avgör dess typ.

Lösning

Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2.$$

Genom insättning ser vi att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 0$$

vilket visar att $(1, -1)$ är en kritisk punkt.

Lokala extrempunkter, repetition

Lösning

Nu tar vi fram den kvadratiska formen i $(a, b) = (1, -1)$

$$Q(h_1, h_2) = f_{xx}(1, -1)h_1^2 + 2f_{xy}(1, -1)h_1h_2 + f_{yy}(1, -1)h_2^2$$

Lokala extrempunkter, repetition

Lösning

Nu tar vi fram den kvadratiska formen i $(a, b) = (1, -1)$

$$Q(h_1, h_2) = f_{xx}(1, -1)h_1^2 + 2f_{xy}(1, -1)h_1 h_2 + f_{yy}(1, -1)h_2^2$$

$$\textit{Med} \qquad f_{xx} = 4y + 4, \quad f_{xy} = 4x, \quad f_{yy} = 2,$$

Lokala extrempunkter, repetition

Lösning

Nu tar vi fram den kvadratiska formen i $(a, b) = (1, -1)$

$$Q(h_1, h_2) = f_{xx}(1, -1)h_1^2 + 2f_{xy}(1, -1)h_1 h_2 + f_{yy}(1, -1)h_2^2$$

$$\textit{Med} \qquad f_{xx} = 4y + 4, \quad f_{xy} = 4x, \quad f_{yy} = 2,$$

$$\text{får vi} \qquad f_{xx}(1, -1) = 0, \quad f_{xy}(1, -1) = 4, \quad f_{yy}(1, -1) = 2.$$

Lokala extrempunkter, repetition

Lösning

Nu tar vi fram den kvadratiska formen i $(a, b) = (1, -1)$

$$Q(h_1, h_2) = f_{xx}(1, -1)h_1^2 + 2f_{xy}(1, -1)h_1h_2 + f_{yy}(1, -1)h_2^2$$

$$\textit{Med} \qquad f_{xx} = 4y + 4, \quad f_{xy} = 4x, \quad f_{yy} = 2,$$

$$\text{får vi} \qquad f_{xx}(1, -1) = 0, \quad f_{xy}(1, -1) = 4, \quad f_{yy}(1, -1) = 2.$$

$$\textit{dvs} \qquad Q(h_1, h_2) = 8h_1h_2 + 2h_2^2,$$

Lokala extrempunkter, repetition

Lösning

Nu tar vi fram den kvadratiska formen i $(a, b) = (1, -1)$

$$Q(h_1, h_2) = f_{xx}(1, -1)h_1^2 + 2f_{xy}(1, -1)h_1h_2 + f_{yy}(1, -1)h_2^2$$

$$\textit{Med} \qquad f_{xx} = 4y + 4, \quad f_{xy} = 4x, \quad f_{yy} = 2,$$

$$\text{får vi} \qquad f_{xx}(1, -1) = 0, \quad f_{xy}(1, -1) = 4, \quad f_{yy}(1, -1) = 2.$$

$$\textit{dvs} \qquad Q(h_1, h_2) = 8h_1h_2 + 2h_2^2,$$

vilket vi kvadratkompletterar till

$$Q(h_1, h_2) = 2\left(h_2 + 2h_1\right)^2 - 8h_1^2. \qquad \text{dvs Indefinit och stationär.}$$

Lokala extrempunkter, repetition

Lösning

Nu tar vi fram den kvadratiska formen i $(a, b) = (1, -1)$

$$Q(h_1, h_2) = f_{xx}(1, -1)h_1^2 + 2f_{xy}(1, -1)h_1 h_2 + f_{yy}(1, -1)h_2^2$$

$$Med \qquad f_{xx} = 4y + 4, \quad f_{xy} = 4x, \quad f_{yy} = 2,$$

$$\text{får vi} \qquad f_{xx}(1, -1) = 0, \quad f_{xy}(1, -1) = 4, \quad f_{yy}(1, -1) = 2.$$

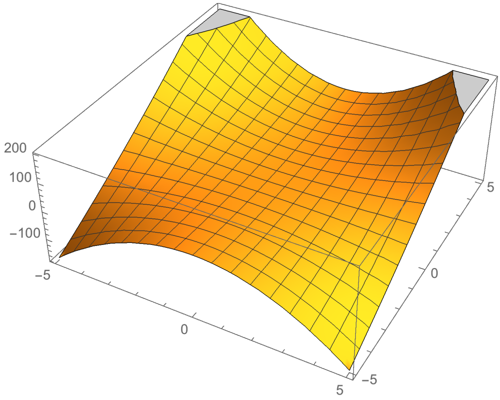
$$dvs \qquad Q(h_1, h_2) = 8h_1 h_2 + 2h_2^2,$$

vilket vi kvadratkompletterar till

$$Q(h_1, h_2) = 2\left(h_2 + 2h_1\right)^2 - 8h_1^2. \qquad \text{dvs Indefinit och stationär.}$$

Quiz (hemma): Prova med Hessianen.

Lokala extrempunkter, repetition



Figur: $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$

Tillämpning: Största och minsta värde

Quiz (här):

Använda extremvärdemetoden för att bestämma avståndet från punkten $(2, 2, 1)$ till området

$$D = \{(x, y, z) : \; x + y - z \leq -1\}.$$

I Algebran löste ni problemet med projektion, eftersom randen till D är ett plan!

Tillämpning: Största och minsta värde

Quiz (här):

Använda extremvärdemetoden för att bestämma avståndet från punkten $(2, 2, 1)$ till området

$$D = \{(x, y, z) : \; x + y - z \leq -1\}.$$

I Algebran löste ni problemet med projektion, eftersom randen till D är ett plan!

Tips

Är punkten i eller utanför D? Undersök.

Tillämpning: Största och minsta värde

Quiz (här):

Använda extremvärdemetoden för att bestämma avståndet från punkten $(2, 2, 1)$ till området

$$D = \{(x, y, z) : \; x + y - z \leq -1\}.$$

I Algebran löste ni problemet med projektion, eftersom randen till D är ett plan!

Tips

Är punkten i eller utanför D? Undersök.
Vad är avståndet (kalla det A) mellan (x, y, z) och $(2, 2, 1)$?

Tillämpning: Största och minsta värde

Quiz (här):

Använda extremvärdemetoden för att bestämma avståndet från punkten $(2, 2, 1)$ till området

$$D = \{(x, y, z) : \; x + y - z \leq -1\}.$$

I Algebran löste ni problemet med projektion, eftersom randen till D är ett plan!

Tips

Är punkten i eller utanför D? Undersök.
Vad är avståndet (kalla det A) mellan (x, y, z) och $(2, 2, 1)$?
Vad betyder avstånd mellan två områden?

Tillämpning: Största och minsta värde

Quiz (här):

Använda extremvärdemetoden för att bestämma avståndet från punkten $(2, 2, 1)$ till området

$$D = \{(x, y, z) : \ x + y - z \leq -1\}.$$

I Algebran löste ni problemet med projektion, eftersom randen till D är ett plan!

Tips

Är punkten i eller utanför D? Undersök.
Vad är avståndet (kalla det A) mellan (x, y, z) och $(2, 2, 1)$?
Vad betyder avstånd mellan två områden?
Vad ska minimeras?

Tillämpning: Största och minsta värde

Quiz (här):

Använda extremvärdemetoden för att bestämma avståndet från punkten $(2, 2, 1)$ till området

$$D = \{(x, y, z) : \; x + y - z \leq -1\}.$$

I Algebran löste ni problemet med projektion, eftersom randen till D är ett plan!

Tips

Är punkten i eller utanför D? Undersök.
Vad är avståndet (kalla det A) mellan (x, y, z) och $(2, 2, 1)$?
Vad betyder avstånd mellan två områden?
Vad ska minimeras?
Kan vi förenkla funktionen som ska minimeras?

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Om punkten är redan i D så är avståndet lika med noll.

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Om punkten är redan i D så är avståndet lika med noll. Men

$$2 + 2 - 1 = 3 > -1,$$

och punkten är utanför D.

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Om punkten är redan i D så är avståndet lika med noll. Men

$$2 + 2 - 1 = 3 > -1,$$

och punkten är utanför D.

Avståndet mellan en punkt (x, y, z) till puntken $(2, 2, 1))$ är

$$A(x, y, z) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Om punkten är redan i D så är avståndet lika med noll. Men

$$2 + 2 - 1 = 3 > -1,$$

och punkten är utanför D.

Avståndet mellan en punkt (x, y, z) till puntken $(2, 2, 1))$ är

$$A(x, y, z) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Vidare är avståndet till D som avståndet till randen av D, dvs planet $x + y - z = -1$.

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Dvs vi ska minimera funktionen

$$A(x,y,z) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2},$$

med villkoret att $x + y - z = -1$, dvs $z - 1 = x + y$,

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Dvs vi ska minimera funktionen

$$A(x, y, z) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2},$$

med villkoret att $x + y - z = -1$, dvs $z - 1 = x + y$,

som efter insättning ger

$$A(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x+y)^2}.$$

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Istället för att minimera A kan vi också minimera A^2 som blir ngt enklare.

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Istället för att minimera A kan vi också minimera A^2 som blir ngt enklare. Sätt $f(x, y) = A^2$ och förenkla ngt

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 8.$$

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Istället för att minimera A kan vi också minimera A^2 som blir ngt enklare. Sätt $f(x, y) = A^2$ och förenkla ngt

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 8.$$

Minimum fås då $\nabla f = 0$ som ger

$$(0, 0) = \nabla f = (4x + 2y - 4, 4y + 2x - 4)$$

Tillämpning: Största och minsta värde

Lösning till Quiz

Istället för att minimera A kan vi också minimera A^2 som blir ngt enklare. Sätt $f(x,y) = A^2$ och förenkla ngt

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 8.$$

Minimum fås då $\nabla f = 0$ som ger

$$(0,0) = \nabla f = (4x + 2y - 4, 4y + 2x - 4)$$

som ger

$$(x,y) = (2/3, 2/3)$$

Lösning till Quiz

Istället för att minimera A kan vi också minimera A^2 som blir ngt enklare. Sätt $f(x,y) = A^2$ och förenkla ngt

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 8.$$

Minimum fås då $\nabla f = 0$ som ger

$$(0,0) = \nabla f = (4x + 2y - 4, 4y + 2x - 4)$$

som ger

$$(x,y) = (2/3, 2/3)$$

Observera att detta måste ge minimi punkt (varför?).
Sätt in i A för att få $A(2/3,2/3) = 4/\sqrt{3}$.

Största och minsta värde

Vidare egenstudie

Studera följande typexempel

1. Bestäm kritiska punkter

Största och minsta värde

Vidare egenstudie

Studera följande typexempel

1. Bestäm kritiska punkter
2. Bestäm typen av en kritisk punkt / Klassifikation

Största och minsta värde

Vidare egenstudie

Studera följande typexempel

1. Bestäm kritiska punkter
2. Bestäm typen av en kritisk punkt / Klassifikation
3. Globala max. min punkter: största/minsta värdet på ett givet område, eller hela $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$).

Största och minsta värde

Vidare egenstudie

Studera följande typexempel

1. Bestäm kritiska punkter
2. Bestäm typen av en kritisk punkt / Klassifikation
3. Globala max. min punkter: största/minsta värdet på ett givet område, eller hela $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$).
4. Bestäm värdemängden hos en funktion.

Största och minsta värde

Vidare egenstudie

Studera följande typexempel

1. Bestäm kritiska punkter
2. Bestäm typen av en kritisk punkt / Klassifikation
3. Globala max. min punkter: största/minsta värdet på ett givet område, eller hela $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$).
4. Bestäm värdemängden hos en funktion.
5. Tillämpningar

Optimering med bivillkor/ Constraint optimization

Motivation: Optimala lösningar med minimala resurser

Optimering med bivillkor/ Constraint optimization

Motivation: Optimala lösningar med minimala resurser

Tillämpningsområden:

Optimering med bivillkor/ Constraint optimization

Motivation: Optimala lösningar med minimala resurser

Tillämpningsområden:

1. Verkstadsindustrin: formen av en pappersförpackning, given mängden papper

Optimering med bivillkor/ Constraint optimization

Motivation: Optimala lösningar med minimala resurser

Tillämpningsområden:

1. Verkstadsindustrin: formen av en pappersförpackning, given mängden papper
2. Algoritm för att rita en graf (kortaste vägen, minimal dator kostnad)

Optimering med bivillkor/ Constraint optimization

Motivation: Optimala lösningar med minimala resurser

Tillämpningsområden:

1. Verkstadsindustrin: formen av en pappersförpackning, given mängden papper
2. Algoritm för att rita en graf (kortaste vägen, minimal dator kostnad)
3. Sökmotorer på webben (optimera sökningstiden)

Optimering med bivillkor/ Constraint optimization

Motivation: Optimala lösningar med minimala resurser

Tillämpningsområden:

1. Verkstadsindustrin: formen av en pappersförpackning, given mängden papper
2. Algoritm för att rita en graf (kortaste vägen, minimal dator kostnad)
3. Sökmotorer på webben (optimera sökningstiden)
4. Trafikplanering (optimal genomströmning, undvik proppar)

Se:
http://demonstrations.wolfram.com/search.html?query=constraint+optimization

Se också film (klistra länken i den webläsare):
https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/lagrange-multipliers-and-constrained-optimization/v/constrained-optimization-introduction

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Låt f och g vara givna C^1 funktioner. Vi vill

$$\boxed{\text{optimera } f(x,y) \text{ under bivillkoret } g(x,y) = 0.}$$

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Låt f och g vara givna C^1 funktioner. Vi vill

$$\boxed{\text{optimera } f(x,y) \text{ under bivillkoret } g(x,y) = 0.}$$

Vi tittar på ett konkret exempel

$$f(x,y) = x + y, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Låt f och g vara givna C^1 funktioner. Vi vill

$$\boxed{\text{optimera } f(x,y) \text{ under bivillkoret } g(x,y) = 0.}$$

Vi tittar på ett konkret exempel

$$f(x,y) = x + y, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Se även följande exempel (själva) på länken nedan

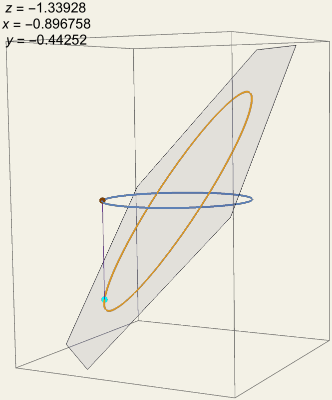
1. $f(x,y) = xy, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
2. $f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Dessa exempel finns här i samma fil/sida:

http://demonstrations.wolfram.com/GraphicalIllustrationOfBivariateConstrainedOptimization/

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod



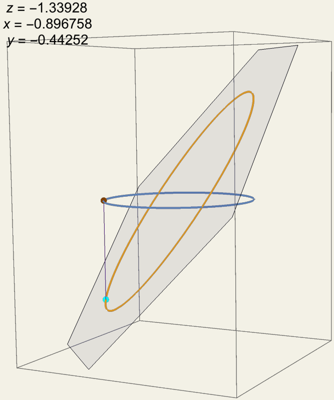
Figur: $f(x,y) = x + y$,
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Quiz (hemma):

1. Rita nivåkurvor för f,

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod



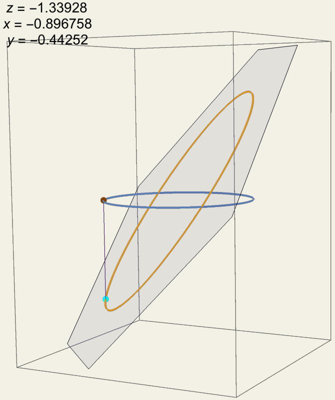
Figur: $f(x, y) = x + y$,
$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Quiz (hemma):

1. Rita nivåkurvor för f,
2. Rita kurvan $g = 0$ i samma bild som ovan?

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod



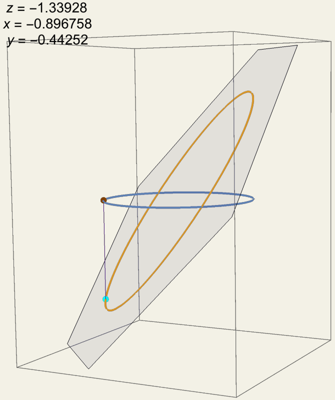
Figur: $f(x, y) = x + y$,
$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Quiz (hemma):

1. Rita nivåkurvor för f,
2. Rita kurvan $g = 0$ i samma bild som ovan?
3. Rita även normalvektor $\mathbf{n}_f$, $\mathbf{n}_g$ till dessa kurvor.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod



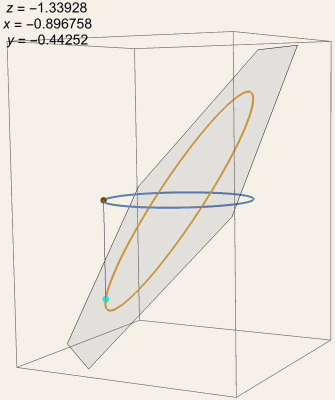
Figur: $f(x,y) = x + y$,
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Quiz (hemma):

1. Rita nivåkurvor för f,
2. Rita kurvan $g = 0$ i samma bild som ovan?
3. Rita även normalvektor $\mathbf{n}_f$, $\mathbf{n}_g$ till dessa kurvor.
4. Vad upptäcker ni?

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod



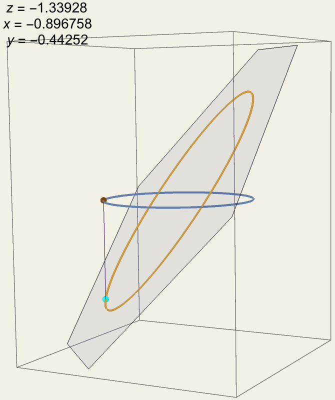
Figur: $f(x,y) = x + y$,
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Quiz (hemma):

1. Rita nivåkurvor för f,
2. Rita kurvan $g = 0$ i samma bild som ovan?
3. Rita även normalvektor $\mathbf{n}_f$, $\mathbf{n}_g$ till dessa kurvor.
4. Vad upptäcker ni?
5. Hur förhåller sig $\mathbf{n}_f$, $\mathbf{n}_g$ till varandra vid max/min punkter.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod



Figur: $f(x,y) = x + y$,
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Quiz (hemma):

1. Rita nivåkurvor för f,
2. Rita kurvan $g = 0$ i samma bild som ovan?
3. Rita även normalvektor $\mathbf{n}_f$, $\mathbf{n}_g$ till dessa kurvor.
4. Vad upptäcker ni?
5. Hur förhåller sig $\mathbf{n}_f$, $\mathbf{n}_g$ till varandra vid max/min punkter.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Börja med att se bilderna på wolfram:

http://demonstrations.wolfram.com/TheGeometryOfLagrangeMultipliers/

Speciellt lägg märke till normalvektorerna till kurvan $g(x, y) = 0$ samt nivåkurvor till $f(x, y)$

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Börja med att se bilderna på wolfram:

http://demonstrations.wolfram.com/TheGeometryOfLagrangeMultipliers/

Speciellt lägg märke till normalvektorerna till kurvan $g(x,y) = 0$ samt nivåkurvor till $f(x,y)$

Vi ser att grafen föreslår att om max/min för $f(x,y)$ antas i en punkt (a,b), på kurvan $g = 0$ och att $\nabla g(a,b) \neq \mathbf{0}$ så är normalvektorerna till nivåkurvan

$$\{f(x,y) = f(a,b)\}, \qquad \text{samt kurvan} \qquad \{g = 0\}$$

ligger längs samma linje, dvs de är parallella.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Börja med att se bilderna på wolfram:

http://demonstrations.wolfram.com/TheGeometryOfLagrangeMultipliers/

Speciellt lägg märke till normalvektorerna till kurvan $g(x, y) = 0$ samt nivåkurvor till $f(x, y)$

Vi ser att grafen föreslår att om max/min för $f(x, y)$ antas i en punkt (a, b), på kurvan $g = 0$ och att $\nabla g(a, b) \neq \mathbf{0}$ så är normalvektorerna till nivåkurvan

$$\{f(x, y) = f(a, b)\}, \qquad \text{samt kurvan} \qquad \{g = 0\}$$

ligger längs samma linje, dvs de är parallella.
Detta innebär att det finns ett tal λ_0 så att

$$\nabla f(a, b) = \lambda_0 \nabla g(a, b). \tag{1}$$

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Ekvationerna (1) samt $g = 0$ ger oss ett system som ska lösas.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Ekvationerna (1) samt $g = 0$ ger oss ett system som ska lösas.

Ekvationen blir

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

och ibland skrivs

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Ekvationerna (1) samt $g = 0$ ger oss ett system som ska lösas.

Ekvationen blir

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

och ibland skrivs

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

dvs, för 2-variabler blir det

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0. \end{cases}$$

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod

Ekvationerna (1) samt $g = 0$ ger oss ett system som ska lösas.

Ekvationen blir

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

och ibland skrivs

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

dvs, för 2-variabler blir det

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0. \end{cases}$$

I 3-variabler har vi ytterligare en ekvation $f_z = \lambda g_z$.

Optimering med bivillkor

Exempel

Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy$ då $x^2 + y^2 = 1$.

Lösning (fortsättning)

Sätt $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Enligt Lagranges metod skall vi lösa

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = \lambda 2x \\ 4y + x = \lambda 2y \\ g = 0 \end{cases}$$

Lösning (fortsättning)

Multiplicera första ekvationen med y och andra ekvationen med x och få

$$y(2x + y) = \lambda 2xy = \lambda 2yx = y(4y + x)$$

Detta förenklas till $(x + 2y)x = y^2$ varav $(x + y)^2 = 2y^2$, vilket ger $x + y = \pm\sqrt{2}y$, dvs $x = ay$, med $a = \pm\sqrt{2} - 1$.

Optimering med bivillkor

Lösning (fortsättning)

Multiplicera första ekvationen med y och andra ekvationen med x och få

$$y(2x + y) = \lambda 2xy = \lambda 2yx = y(4y + x)$$

Detta förenklas till $(x + 2y)x = y^2$ varav $(x + y)^2 = 2y^2$, vilket ger $x + y = \pm\sqrt{2}y$, dvs $x = ay$, med $a = \pm\sqrt{2} - 1$.

Villkoret $x^2 + y^2 = 1$ ger

$$y = 1/\sqrt{1 + a^2}, \qquad x = a/\sqrt{1 + a^2},$$

varför max/minvärdet blir $(1 + a)/(1 + a^2)$.

Optimering med bivillkor

Lösning (fortsättning)

Multiplicera första ekvationen med y och andra ekvationen med x och få

$$y(2x+y) = \lambda 2xy = \lambda 2yx = y(4y+x)$$

Detta förenklas till $(x+2y)x = y^2$ varav $(x+y)^2 = 2y^2$, vilket ger $x+y = \pm\sqrt{2}y$, dvs $x = ay$, med $a = \pm\sqrt{2} - 1$.

Villkoret $x^2+y^2 = 1$ ger

$$y = 1/\sqrt{1+a^2}, \qquad x = a/\sqrt{1+a^2},$$

varför max/minvärdet blir $(1+a)/(1+a^2)$.

Maximum är $1/(2(\sqrt{2}-1))$, och minimum $-1/(2(\sqrt{2}+1))$.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod med flera bivillkor

För att optimera $f(x, y, z)$ under bivillkoren

$$g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 0$$

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod med flera bivillkor

För att optimera $f(x, y, z)$ under bivillkoren

$$g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 0$$

ska vi på liknande sätt lösa ekvationssytemet

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h, \qquad g = 0, \qquad h = 0$$

där λ, μ är fria parametrar.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod med flera bivillkor

För att optimera $f(x, y, z)$ under bivillkoren

$$g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 0$$

ska vi på liknande sätt lösa ekvationssytemet

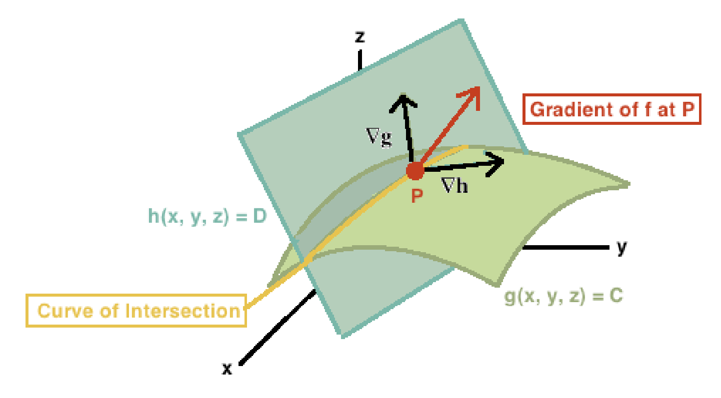
$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h, \qquad g = 0, \qquad h = 0$$

där λ, μ är fria parametrar.

Vissa villkor ska vara uppfyllda, se boken sid 763-764 för teorin bakom detta. Vi illustrerar med ett exempel.

Optimering med bivillkor

Lagranges multiplikatormetod med flera bivillkor



Figur: 2 bivillkor

Optimering med bivillkor

Exempel med flera bivillkor

Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 2z + xy$ på skärningen av planet $x + y + z = 0$ och sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

Se Ex. 5 sidan 764 i boken.

Vidare studie hemma

Gör detta:

1. Uppgift 1-4 till seminarium 3
2. Innan seminarieuppgifterna, kolla på bokens:
   a. kap 12.8 uppgift 13, 17
   b. kap 12.9 uppgift 1, 3, 5, 7, 11
   c. kap 13.1 uppgift 5, 7, 9, 19, 23, 25
   d. kap 13.2 uppgift 3, 5, 9, 15
   e. kap 13.3 uppgift 3, 9, 11, 15
   f. kap 13.4 uppgift 1, 3