SF1626 Flervariabelanalys

Föreläsning 2

Henrik Shahgholian

Vid Institutionen för matematik, KTH

VT 2018, Period 3

Dagens lektion: avsnitt 11.1–11.3

- Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$ (vektorvärda funktioner)
- Partikelrörelse: Hastighet, fart, acceleration,
- Kurvor och parametrisering
- båglängd
- Dagens minitenta

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$

Vi betraktar funktioner $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$, där $I \subset \mathbb{R}$ är ett intervall.

$$\mathbf{r} = (x_1(t), \cdots, x_n(t)).$$

Speciellt i 3-dimensioner skriver man ofta

$$\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t)).$$

Begrepp: Gränsvärden, Kontinuitet, derivata, integration, följer med från 1-variabel analys för dessa vektorvärda funktioner precis som förut. Man tillämpar varje begrepp komponentvis.

Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$

Gränsvärde: Att $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0}$ betyder att för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r_0}| < \epsilon$$

Kontinuitet: Att $\mathbf{r}$ är kontinuerlig i en punkt $t_0 \in I$ betyder att

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Derivata:

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}$$

om detta gränsvärde existerar. Obs att derivatan är en **vektor.**

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

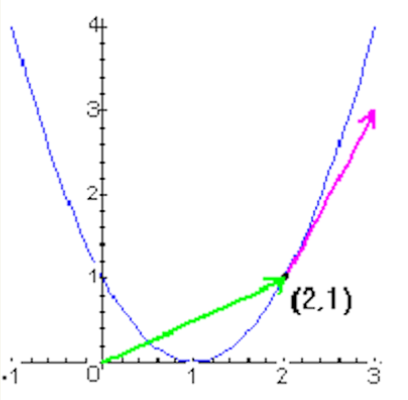
Tolkningar av vektorvärda funktioner

- Kurvor i $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, parametrisering av en kurva.
  - Kurvans tangent och normal i olika punkter?
  - Hur lång är kurvan?

- Kinematik: En partikel rör sig längs kurvan och $\mathbf{r}(t)$ anger partikelns position vid tidpunkten t.
  - Hastighet: $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ (en vektor)
  - Fart: $v = \|\mathbf{r}'\|$ (ett positivt reelt tal)
  - Accelerationen: $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = \mathbf{r}''$ (en vektor)

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Position och hastighetsvektor grafisk



Bilden visar:
Positionsvektor $\mathbf{r}(t)$, samt
hastighetsvektor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$.

$\mathbf{v}(t)$ är tangentvektor till kurvan i punkten $\mathbf{r}(t)$.

Från Algebrakursen:
Ekvationen för tangentlinjen i punkten $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$ blir
$P_0 + s\mathbf{v}(t_0)$ där $s \in \mathbb{R}$.

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Exempel

En partikels rörelse i xy-planet ges av

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos 3\pi t, 3\sin 2\pi t), \quad t \geq 0.$$

Beräkna hastigheten och farten av partikeln vid tiden t.

Exempel

En partikels rörelse i *xy*-planet ges av

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos 3\pi t, 3\sin 2\pi t), \quad t \geq 0.$$

Beräkna hastigheten och farten av partikeln vid tiden t.

Lösning

Hastigheten ges av

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-6\pi \sin 3\pi t, 6\pi \cos 2\pi t).$$

Farten ges av

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-6\pi \sin 3\pi t)^2 + (6\pi \cos 2\pi t)^2}.$$

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Quiz (här):

En kurva i *xyz*-rymden parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 2), \quad t \in \mathbb{R}$$

Visa att punkten $(-1, 1, 2)$ ligger på kurvan och ange en ekvation för tangentlinjen till kurvan i denna punkt.

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Deriveringsregler

- $$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$
- $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \bullet \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}'(t)$$
- $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$
- $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$$

Exempel

Låt **r** vara en positionsvektor och **v** dess hastighet (vektor). Vi har dessutom farten $v(t) = \|\mathbf{v}\|(t)$ och accelerationen **a**. Efter derivering har vi

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}.$$

Om nu farten är konstant får vi $\frac{d}{dt}v^2 = 0$ och från ekvationen ovan att $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$. Dvs farten är konstant om och endast om accelerationen är ortogonal mot hastigheten.

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Parametrisering av kurvor

Det är ytterst viktigt att ni kan behärska *konsten* att parametrisera en kurva i planet eller rymden. Gör flera övningar på detta. I boken finns en del exempel, och här ska vi göra några till.

Exempel: Parametrisering av funktionsgraf i planet

Grafen till funktionen $y = f(x)$, där $a \leq x \leq b$, är en kurva i planet och kan parametriseras genom valet $x = t$ och vi får kurvan

$$C: \ (t, f(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Det går lika väl att skriva detta som

$$C: \ (x, f(x)), \quad a \leq x \leq b.$$

Exempel

En kurva C ges i parameterform av

$$C: \ (2t, t^2 - 1), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Rita kurvan i planet.

Om vi sätter $x = 2t$, så får vi

$$0 \leq x \leq 2, \quad t = x/2, \quad y = t^2 - 1 = (x/2)^2 - 1,$$

dvs

$$y = \frac{x^2}{4} - 1, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

som representerar en parabel i planet.

Quiz (här):

En kurva C ges i parameterform av

$$C: \ (t-1, \sqrt{-t^2+2t}), \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Rita kurvan i planet genom at representera den med xy-kooridinater.

Quiz (här):

En kurva C ges i parameterform av

$$C: \ (t-1, \sqrt{-t^2+2t}), \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Rita kurvan i planet genom at representera den med xy-kooridinater.

Tips: Sätt $x = t - 1$ och Kvadratkomplettera andra komponenten.

Exempel: Kurva i rymden

En kurva C som går från $(0, 0, 0)$ till $(1, 1, 2)$ ges genom skärningen

$$x = y, \qquad z = x^2 + y^2.$$

Skriv kurvan på parameterform.

Exempel: Kurva i rymden

En kurva C som går från $(0,0,0)$ till $(1,1,2)$ ges genom skärningen

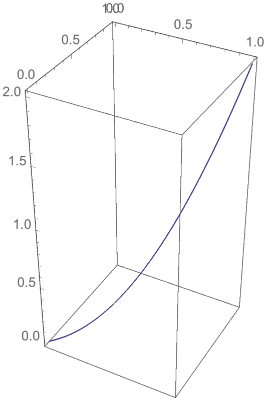
$$x = y, \qquad z = x^2 + y^2.$$

Skriv kurvan på parameterform.

Valet $x = t$ ger $y = t$ och $z = 2t^2$. Vidare är $0 \leq t \leq 1$ (varför?). Dvs vi har

$$C: \ (t, t, 2t^2), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Exempel: Kurva i rymden: $C: \ (t, t, 2t^2), \qquad 0 \leq t \leq 1.$



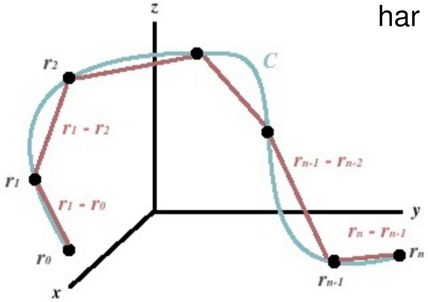
Båglängd

Om $\mathbf{r}(t)$, där $a \leq t \leq b$, är en parametrisering av en kurva, så ges längden L av kurvan genom

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt$$

Hur får man formeln?

Vektorvärda funktioner av en reell variabel



Figur: Approximation av en kurva med styckvis raka segment

Varje kurvstycke C_j approximeras med motsvarande segment som har längden $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}\| \approx \|C_j\|$

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Båglängd

$$\text{Kurvans Längd } = \sum_{j=1}^{n} \|C_j\| \approx \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}\|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}\|}{t_j - t_{j-1}} \right) (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{r}'(\xi_j)\| (t_j - t_{j-1}) \approx \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt,$$

där

$$t_{j-1} \leq \xi_j \leq t_j, \qquad dt \approx (t_j - t_{j-1}).$$

Båglängdselement

Om vi definierar kurvans längd från $\mathbf{r}(t)$ till $\mathbf{r}(t)$ genom

$$s(t) = \int_a^t v(\tau)d\tau = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\|d\tau,$$

så får vi enligt 1-variabelanalys att $s'(t) = v(t)$. Därför kan vi formellt sätta

$$ds = v(t)dt \qquad \textit{eller} \qquad \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|dt.$$

Vektorvärda funktioner av en reell variabel

Båglängdselement

Om kurvan ges av $y = f(x)$ (i planet), så får enligt tidigare med parametriseringen att $C: \ \mathbf{r}(x) = (x, f(x))$, där x är parametern nu, dvs $t = x$. Vi får att

$$ds = \|\mathbf{r}'(x)\|dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Polära koordinater i planet

Motsvarande båglängdselement i planet för polära koordinater ges av

$$ds = \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2}d\theta$$

då $\mathbf{r}(\theta) = g(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$.

Exempel

Beräkna längden av spiralkurvan

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Exempel

Beräkna längden av spiralkurvan

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

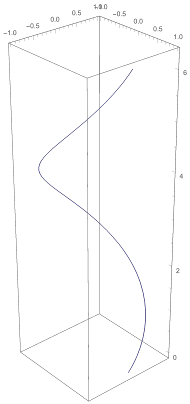
Lösning: Vi har $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, dvs

$$ds = \|\mathbf{r}'\| dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt = \sqrt{2}\, dt$$

och längden blir

$$\int_0^{2\pi} ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

spiralkurvan



Dagens minitenta

Låt $\mathbf{r}(t)$ beskriva en partikels position i xy-planet där den rör sig med en konstant vinkelhastighet ω radianer per sekund i en cirkel med radie R kring origo.

a) Skriv upp uttrycket för $\mathbf{r}(t)$ om partikeln vid tiden $t = 0$ sekunder befinner sig i punkten $(R, 0)$.

b) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ och accelerationen $\mathbf{r}''(t)$ av partikeln med hjälp av uttrycket från del a).

c) Rita en figur av partikelns bana och rita i figuren hastigheten och accelerationen i en valfri tidpunkt.

d) Arbetet som utförs av en kraft $\mathbf{F}(t)$ under rörelsen ges av $\int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r}$. Newtons andra lag säger att den kraft som verkar på partikeln är $m\mathbf{r}''(t)$, där m är partikelns massa. Vilket arbete utför denna kraft medan partikeln färdas ett halvt varv kring origo?

a) Om vi använder polära koordinater har vi $r = R$ och $\theta = \omega t$ och när vi skriver det i rektangulära koordinater får vi

$$\mathbf{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)).$$

b) Vi deriverar $\mathbf{r}(t)$ med avseende på t och får

$$\mathbf{r}'(t) = (-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t))$$

$$\mathbf{r}''(t) = \left(-R\omega^2\cos(\omega t), -R\omega^2\sin(\omega t)\right).$$

d) Arbetet ges av

$$\int_C \mathbf{F}(t)\cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\mathbf{r}''(t)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = 0$$

eftersom $\mathbf{r}''(t)$ är vinkelrät mot $\mathbf{r}'(t)$ för alla t.

Läxa till nästa gång

Gör detta:

- Se film och svara på frågor i filmen
- Lös några av övningsuppgifterna
  kap 11.1 uppg 17, 21, 33
  kap 11.2 uppg 3
  kap 11.3 uppg 5, 7, 11, 13, 15
- Lös uppgift 1, 2 och 3 till Seminarium 1