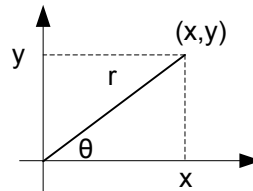


POLÄRA KOORDINATER

Samband mellan rektangulära och polära koordinater:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

därmed $x^2 + y^2 = r^2$



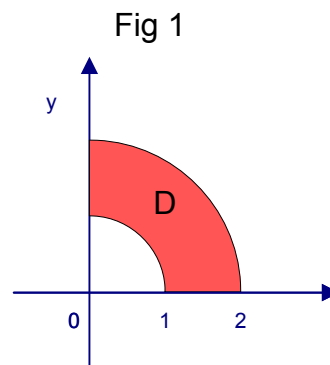
Exempel 1.

Beskriv i polära koordinater området D i Fig1.

Lösning:

Från figuren har vi gränserna för θ och r :

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 1 \leq r \leq 2.$$



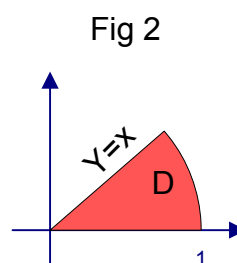
Exempel 2.

Beskriv i polära koordinater området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ och } 0 \leq y \leq x\}$

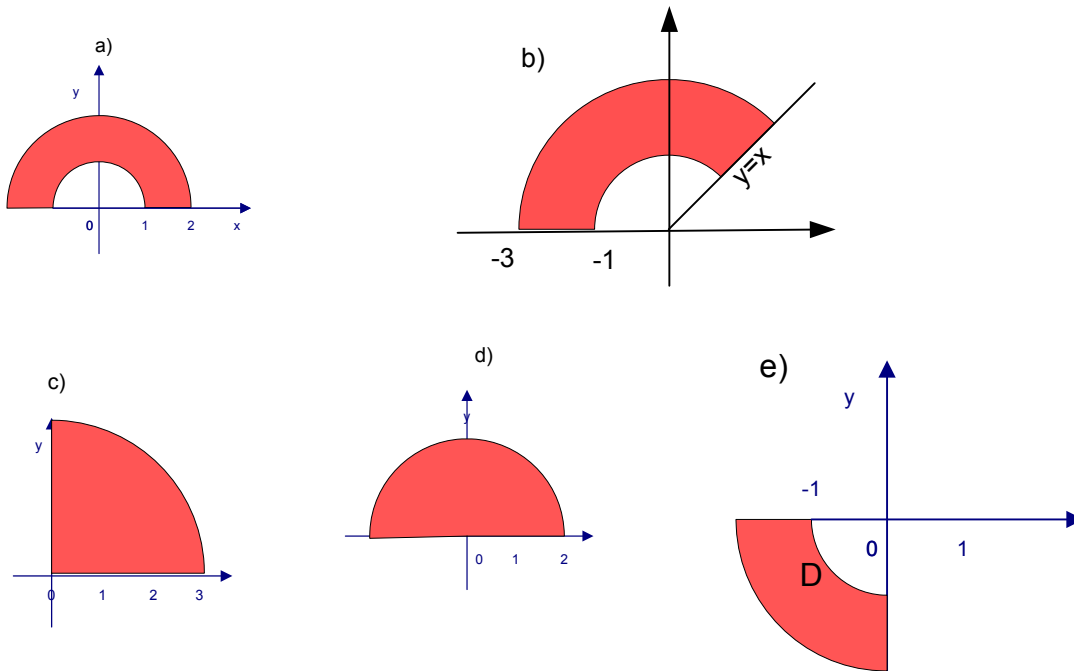
Lösning:

Från Fig2. har vi gränserna för θ och r :

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{och} \quad 0 \leq r \leq 1.$$



Uppgift 1. Ange gränserna för θ och r för nedanstående integrationsområden



Svar: a) $0 \leq \theta \leq \pi$ och $1 \leq r \leq 2$ b) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ och $1 \leq r \leq 3$

c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ och $0 \leq r \leq 3$ d) $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq r \leq 2$

e) $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, $1 \leq r \leq 2$.

Uppgift 2. Rita nedanstående områden och ange gränserna för θ och (polära koordinater).

a) $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2 \text{ och } 0 \leq y \leq x\}$

b) $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 3 \text{ och } 0 \leq y \leq x\}$

c) $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ och } x \leq y \leq 2x\}$

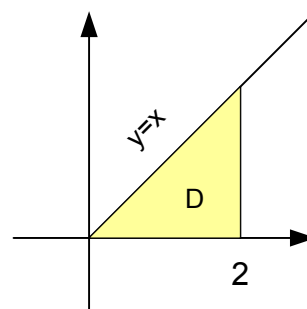
d) $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 1, x \leq 3 \text{ och } 0 \leq y \leq x\}$

Lösning.

a) För θ gäller uppenbart $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Vi beskriver randlinjen $x = 2$ i polära koordinater:

Genom att substituera $x = r \cos \theta$ i $x=2$ får vi

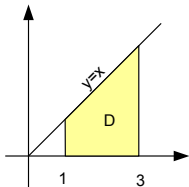


$$r \cos \theta = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\cos \theta}$$

Därmed har vi gränser för : $0 \leq r \leq \frac{2}{\cos \theta}$

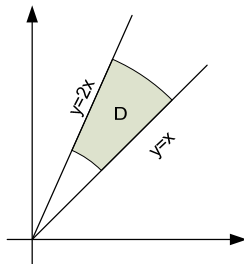
Svar a: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq r \leq \frac{2}{\cos \theta}$

Svar b)



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} , \quad \frac{1}{\cos \theta} \leq r \leq \frac{3}{\cos \theta}$$

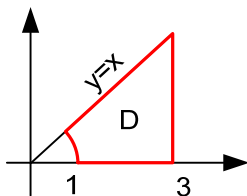
Svar c)



$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \theta_1 , \text{ där } \theta_1 = \arctan 2 \approx 1.1 \text{ rad } (63.4^\circ) ,$$

$$1 \leq r \leq 2$$

Svar d)



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} , \quad 1 \leq r \leq \frac{3}{\cos \theta}$$