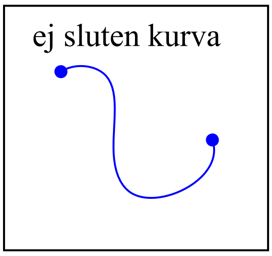
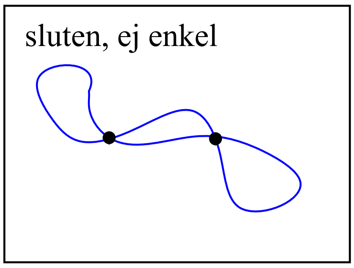
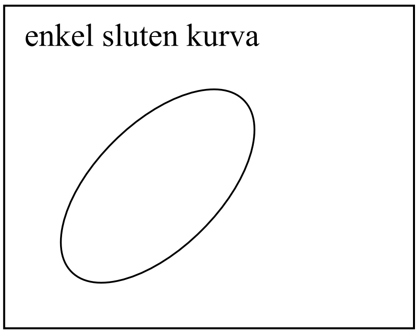
POTENTIALFÄLT (=konservativt fält).
POTENTIALER. EXAKTA DIFFERENTIALER

Definition A1. En kurva $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad a \le t \le b$ är **sluten** om $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ dvs om startpunkten och ändpunkten sammanfaller.

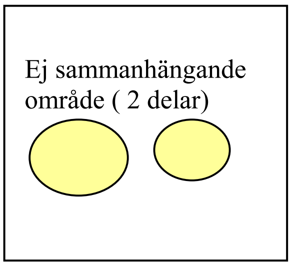
Definition A2. Vi säger att $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad a \le t \le b$ är en **enkel**, **sluten kurva** om $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ och $\vec{r}(t_1) \ne \vec{r}(t_2)$ om $t_1 < t_2$ och $(t_1, t_2) \ne (a, b)$.

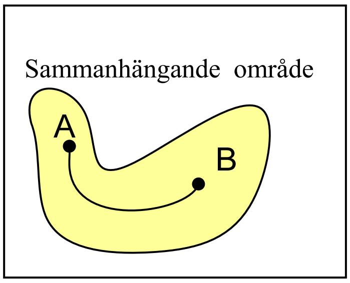




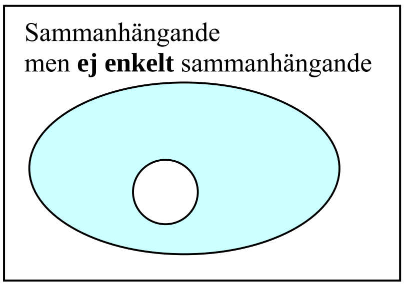


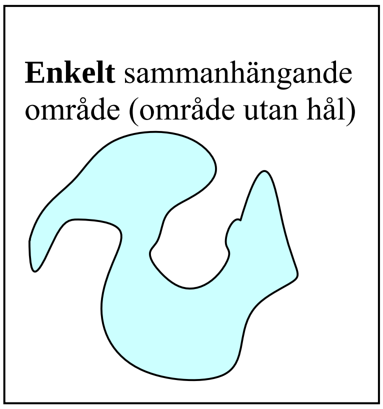
Definition B1. Ett område Ω i R^n kallas **sammanhängande** om två godtyckliga punkter i Ω kan förbindas med en kontinuerlig kurva som helt ligger i Ω.





Definition B2.(R^2 **)**Ett sammanhängande område Ω i planet R^2 kallas **enkelt sammanhängande** om varje enkel, sluten kontinuerlig kurva i Ω omsluter ett område som helt ligger i Ω.
(Med andra ord Ω är ett sammanhängande område utan hål)





Definition B3. (R^3) Ett sammanhängande område Ω i planet R^3 kallas **enkelt sammanhängande** om varje enkel, sluten kontinuerlig kurva L i Ω kan kontinuerligt deformeras, utan att lämna Ω, till en punkt i Ω.
(Med andra ord, till varje enkel, sluten kontinuerlig kurva L kan vi skapa en yta som ligger i Ω och har L som randen.)

POTENTIALFÄLT (=konservativt fält)

Vi betraktar ett vektorfält $\vec{F}$ definierad i ett öppet område Ω,

$\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ i R^2, eller $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ i R^3.

Definition1. Vektorfältet $\vec{F}$ kallas ett **potentialfält** eller ett **konservativt fält** i området Ω om det finns en C^1 funktion U sådan att

$$\vec{F} = grad(U) \qquad (*)$$

Funktionen U kallas då en **potential** till fältet $\vec{F}$ eller en potentialfunktion till $\vec{F}$.

Eftersom $grad(U) = (U'_x, U'_y)$ i R^2
och $grad(U) = (U'_x, U'_y, U'_z)$ i R^3
kan vi skriva (*) på följande sätt:

Definition 2a (för $fält\ i\ R^2$**)** . Vektorfältet $\vec{F} = (P, Q)$ kallas ett **potentialfält** eller ett **konservativt fält** i ett öppet området Ω om det finns en C^1 funktion U sådan att

$$U'_x = P \text{ och } U'_y = Q$$

Definition 2b. Vi säger att uttrycket $Pdx + Qdy$ är en **exakt differential** i $\Omega \subseteq R^2$, om det finns en C^1- funktion U så att $dU = Pdx + Qdy$ i området Ω.

Sats om exakta differentialer i R^2 :

$\vec{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält i Ω med potentialen U då och endast då gäller $dU = Pdx + Qdy$ dvs uttrycket $Pdx + Qdy$ är en **exakt differential** i Ω.

Definition 3a (för $fält\ i\ R^3$**)** . Vektorfältet $\vec{F} = (P, Q, R)$ kallas ett **potentialfält** eller ett **konservativt fält** i ett öppet området Ω om det finns en C^1 funktion U sådan att

$$U'_x = P\ , \quad U'_y = Q \quad \text{och } U'_z = R$$

Definition 3b. Vi säger att uttrycket $Pdx + Qdy + Rdz$ är en **exakt differential** i $\Omega \subseteq R^3$ om det finns en C^1-funktion U så att $dU = Pdx + Qdy$ i området Ω.

Sats om exakta differentialer i $\mathbf{R}^3$:

{ $\vec{F} = (P, Q, R)$ är ett potentialfält i Ω med potentialen U} $\Leftrightarrow$

{ $dU = Pdx + Qdy + Rdz$ dvs uttrycket $Pdx + Qdy + Rz$ är en **exakt differential** i Ω. }

==

Exempel 1.

a) Visa att $\vec{F} = (2xy, x^2 + 3)$ är ett potentialfält (dvs att $\vec{F}$ har en potentialfunktion $U(x, y)$).

b) Bestäm för vektorfältet $\vec{F}$ den potentialfunktion $U(x, y)$ som satisfierar $U(1,1) = 3$.

Lösning:

a) Vi löser systemet:

$$\begin{cases} U'_x = 2xy & Ekv\ 1 \\ U'_y = x^2 + 3 & Ekv\ 2 \end{cases}$$

Ekv 1 medför $U(x, y) = \int 2xydx = x^2 y + \varphi(y)$ (*)

För att bestämma $\varphi(y)$ substituerar vi (*) i ekv 2

$U'_y = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 3 \Rightarrow \varphi'(y) = 3 \Rightarrow \varphi = 3y + C$

Alltså har fältet en potential $U(x, y) = x^2 y + \varphi(y) = x^2 y + 3y + C$

Kontroll :

$U'_x = 2xy = P$ *och* $U'_y = x^2 + 3 = Q$

Därmed har vi visat att fältet är ett potentialfält (= konservativt fält)

Svar a) $U(x, y) = x^2 y + 3y + C$

b) Villkoret $U(1,1) = 3 \Rightarrow$ C= –1 och därför $U(x, y) = x^2 y + 3y - 1$

Svar b) $U(x, y) = x^2 y + 3y - 1$

===

Nödvändiga och tillräckliga villkor för ett potentialfält

Ett nödvändigt villkor för ett potentialfält i $\mathbf{R}^2$.

Låt $\vec{F} = (P, Q)$ vara ett C^1 vektorfält (dvs P och Q har kontinuerliga derivator) i ett öppet området Ω i $\mathbf{R}^2$. Om $\vec{F}$ är ett potentialfält då gäller {Eftersom $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x})$}

$$Q'_x = P'_y \qquad \text{för alla punkter } (x, y) \in \Omega.$$

Alltså $Q'_x = P'_y$ är ett **nödvändigt villkor** för att ett C^1 vektorfält $\vec{F} = (P, Q)$ blir potentialfält i området Ω.

Nödvändiga villkor för ett potentialfält i $\mathbf{R}^3$.

Låt $\vec{F} = (P, Q, R)$ vara ett C^1 vektorfält (dvs P och Q har kontinuerliga derivator) i ett öppet området Ω i $\mathbf{R}^2$. Om $\vec{F}$ är ett potentialfält då gäller

{Eftersom $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial U}{\partial x})$ *och* $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial U}{\partial y})$ }

$$Q'_x = P'_y, \quad R'_x = P'_z \ , \quad R'_y = Q'_z \qquad\qquad \textit{för alla punkter } (x,y,z) \in \Omega$$

Alltså $Q'_x = P'_y$, $R'_x = P'_z$, $R'_y = Q'_z$ är **nödvändiga villkor** för att ett C^1 vektorfält $\vec{F} = (P, Q, R)$ blir potentialfält området Ω.

Tillräckliga villkor för ett potentialfält

Om området Ω är ett **enkelt sammanhängande område** (ett sammanhängande område utan hål) då är ovanstående villkor även **tillräckliga** för att ett C^1 vektorfält $\vec{F}$ blir ett potentialfält.

T ex för R^3 har vi följande

Om följande villkor är uppfyllda

1. Ω är ett enkelt sammanhängande område
2. P, Q, R har kontinuerliga partiella derivator
3. $Q'_x = P'_y$, $R'_x = P'_z$, $R'_y = Q'_z$

då är $\vec{F} = (P, Q, R)$ ett potentialfält i Ω.

Exempel 2. Avgör om följande vektorfält är potentialfält i Ω.

a) $\vec{F} = (x^2 + y^2, 5x^2 + y)$ där Ω är hela R^2

b) $\vec{F} = (x^2 + 5y^2, 10xy + 8y)$ där Ω är hela R^2

Svar a) $Q'_x = 10x$, $P'_y = 2y$. Nej, eftersom $Q'_x \neq P'_y$ i R^2 .

Svar b) Ja eftersom , P, Q har kontinuerliga partiella derivator

och $Q'_x = P'_y = 10\,y$ i hela R^2 (som är ett enkelt sammanhängande område)

Exempel 3. Avgör om följande vektorfält är potentialfält i hela R^2.

a) $\vec{F} = (x + y + z,\ x,\ 3z)$, där Ω är klotet $x^2 + y^2 + z^2 < 1$
b) $\vec{F} = (yz, xz,\ xy)$, där Ω är klotet $x^2 + y^2 + z^2 < 1$

Svar a) Nej, eftersom $0 = R'_x \neq P'_z = 1$.
Svar b) Ja eftersom ,
1. Ω är ett enkelt sammanhängande område
2. P, Q, R har kontinuerliga partiella derivator
3. $Q'_x = P'_y \ (= z)$, $R'_x = P'_z \ (= y)$, $R'_y = Q'_z \ (= x)$

Uppgift 1.
Avgör om vektor fältet $\vec{F}$ är ett potentialfält i R^2. Om detta är fall bestäm fältets potential U(x,y) om $U(1,1) = 4$.

a) $\vec{F} = (x, 4x + y)$ **b)** $\vec{F} = (5xy, \frac{5x^2}{2} + 2y)$

Lösning a)
$Q'_x = 4$, $P'_y = 0$
Svar a) Fältet är **inte** ett potentialfält eftersom $Q'_x \neq P'_y$.

Lösning b)
Fältet är ett potentialfält eftersom $Q'_x = P'_y$ och alla partiella derivator är kontinuerliga i R^2.

Vi löser systemet:

$$\begin{cases} U'_x = 5xy \\ U'_y = \dfrac{5x^2}{2} + 2y \end{cases}$$

Ekv 1 medför $U(x,y) = \int 5xy\,dx = \frac{5x^2y}{2} + \varphi(y)$ (*)

För att bestämma $\varphi(y)$ substituerar vi (*) i ekv 2

$$U'_y = \frac{5x^2}{2} + 2y \Rightarrow \frac{5x^2}{2} + \varphi'(y) = \frac{5x^2}{2} + 2y \Rightarrow \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi = y^2 + C$$

Alltså $U(x,y) = \frac{5x^2}{2} + \varphi(y) = \frac{5x^2}{2} + y^2 + C$

Startvillkoret $U(1,1) = 4 \Rightarrow$ C=1/2 och

$$U(x,y) = \frac{5x^2}{2} + y^2$$

Svar b) $U(x,y) = \frac{5x^2y}{2} + y^2 + \frac{1}{2}$

Uppgift 2.
Avgör om vektorfältet $\vec{F}$ är ett potentialfält i R^3. Om detta är fall bestäm fältets potential.

a) $\vec{F} = (x + y + 2z,\ x + y,\ 3x + z)$ **b)** $\vec{F} = (2x + yz, 2y + xz, xy + 3)$

Lösning a)

Vi kollar de nödvändiga villkoren

$$Q'_x = P'_y,\quad R'_x = P'_z\ ,\quad R'_y = Q'_z$$

är uppfyllda.

Eftersom $R'_x = 3,\ \ P'_z = 2$ ser vi att andra villkoret $R'_x = P'_z$ är INTE uppfylld.

Svar a) Fältet är **inte** ett potentialfält eftersom $R'_x \neq P'_z$.

Lösning b)

P,Q,R har kotinuerliga derivator i hela R^3 och villkoren

$$Q'_x = P'_y,\quad R'_x = P'_z\ ,\quad R'_y = Q'_z$$

är uppfyllda. alltså $\vec{F}$ är ett potentialfält.

För att finna potentialen U löser vi systemet :

$$\begin{cases} U'_x = 2x + yz & (ekv1) \\ U'_y = 2y + xz & (ekv2) \\ U'_z = xy + 3 & (ekv3) \end{cases}$$

Från ekv1 har vi $U(x, y, z) = \int (2x + yz)dx = x^2 + xyz + g(y, z) \quad (*)$

För att finna $g(y, z)$ substituerar vi (*) i (ekv 2)

$U'_y = 2y + xz \quad \Rightarrow \quad xz + g'_y(y, z) = 2y + xz \Rightarrow g'_y(y, z) = 2y \Rightarrow g(x, y) = y^2 + h(z)$.

Detta och (*) ger

$U(x, y, z) = x^2 + xyz + y^2 + h(z) \quad (**)$

För att finna $h(z)$ substituerar vi (**) i (ekv3)

$U'_z = xy + 3 \quad \Rightarrow \quad xy + h'_z(z) = xy + 3 \Rightarrow h(z) = 3z + C$

Detta och (**) ger $U(x, y, z) = x^2 + xyz + y^2 + 3z + C$.

(Kontroll $U'_x = 2x + yz = P$, $U'_y = 2y + xz = Q$, $U'_z = xy + 3 = R$

Svar b) $U(x, y, z) = x^2 + xyz + y^2 + 3z + C$

KURVINTEGRALER I ETT POTENTIALFÄLT

Potentialfält (=konservativa fält) har en viktig egenskap: deras kurvintegraler är oberoende av vägen utan endast av kurvans start- och ändpunkt .

Sats 1a. **(**Om kurvintegraler i ett potentialfält. **)**

Låt $\vec{F}$ är ett potentialfält med potentialen U i det öppna sammanhängande området Ω. För varje kurva γ i Ω, med startpunkt i A och ändpunkt i B, gäller då att

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A).$$

Från ovanstående formell har vi speciellt att **kurvintegralen i ett potentialfält är oberoende av vägen**. Integralen beror endast av startpunkten A och ändpunkten B.

Omvänt påstående är också sant, och därmed har vi följande ekvivalens som karakteriserar potentialfält (= konservativa fält):

Sats 1b. Låt $\vec{F}$ är ett kontinuerligt vektorfält i det öppna sammanhängande området Ω och γ en C^1 kurva som ligger i Ω.
Då gäller :
$\{\vec{F}=(P,Q)$ är potentialfält$\}$ ⇔ {Integralen $\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$ beror ej av vägen }

Ett annat sätt att formulera sats 1a är följande sats.

Sats 2. (Om kurvintegraler längs en sluten kurva i ett potentialfält.)
Låt $\vec{F}$ är ett kontinuerligt potentialfält med potentialen U i det öppna sammanhängande området Ω. Då gäller att kurvintegral längs varje **sluten styckvis C^1 kurva γ** i Ω är 0 d v s

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Uppgift 3. Avgör om vektorfältet $\vec{F} = (2x, cos(y))$ är ett potentialfält i R^2. Om detta är fall bestäm fältets potential och beräkna med hjälp av en potentialfunktion $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ längs γ då

a) γ är linjestycken från A (0,0) till $M(4,6)$ och från $M(4,6)$ till $B(1,\pi/2)$

b) är cirkeln $x^2+y^2=4$.

Lösning :
Eftersom P, Q har kontinuerliga partiella derivator och $Q'_x = P'_y = 0$ i hela R^2 (som är ett enkelt sammanhängande område) ser vi att $\vec{F}$ är ett potentialfält.
Vi bestämmer $U(x,y)$ från ekvationerna

$$U'_x = 2x \qquad \text{ekv1}$$
$$U'_y = \cos(y) \qquad \text{ekv2}$$

Från ekv1 har vi

$$U(x,y) = x^2 + f(y) \qquad (*)$$

som vi substituerar i ekv2 för att få f(y):

$$U'_y = cos(y) \;\Rightarrow f'(y) = cos(y) \Rightarrow f(y) = sin(y) + C$$

Vi substituerar (y) i (*) och får potentialen

$$U(x,y) = x^2 + siny + C$$

a) För att beräkna kurvintegralen i potentialfältet $\vec{F}$ behöver vi inte räkna direkt längs kurvan γ utan vi använder en potentialfunktion t ex (om vi tar C=0) $U(x,y) = x^2 + siny$.
Vi har

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(\text{ändpunkten}) - U(startpunkten) = U(1,\pi/2) - U(0,0) = 2 - 0 = 2$$

(mellan punkt $M(4,6)$ spällar ingen i det här fallet)

b) I det här fallet är γ en sluten kurva (cirkeln $x^2+y^2=4$) och därför är kurvintegralen lika med 0,

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Uppgift 4.

Beräkna $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs γ där $\vec{F} = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$ och γ är linjestyckena från (0,0,0) till (4,5,6) och från (4,5,6) till (1,1,1)

Svar:

Vi läser ekvationerna

$$U'_x = yze^{xyz} \qquad \text{ekv1}$$
$$U'_y = xze^{xyz} \qquad \text{ekv2}$$
$$U'_z = xye^{xyz} \qquad \text{ekv3}$$

och får potentialen $U = e^{xyz} + C$ (Kontrollera själv). Därefter räknar vi kurvintegralen med hjälp av en potentialfunktion

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\ddot{a}ndpunkten) - U(startpunkten) = U(1,1,1) - U(0,0,0) = e - 1$$

(mellanpunkten (4,5,6) spällar ingen i det här fallet) .

Uppgift 5.

Beräkna $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs γ där $\vec{F} = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 + 2z)$

längs γ som definieras av

$$\vec{r}(t) = (t\cos(t-1), \quad t^2\sin(t\frac{\pi}{2}), \quad t^3(\sin(t\frac{\pi}{2}) + \cos(t\frac{\pi}{2})) \text{ där } 0 \le t \le 1$$

Lösning: Fältet har potentialen $U = xy^2z^3 + z^2$ (kontrollera själv);

dessutom

t=0 svarar mot punkten (0,0,0)

t=1 ger punkten (1,1,1)

Vi har

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\ddot{a}ndpunkten) - U(startpunkten) = U(1,1,1) - U(0,0,0) = 2$$

Uppgift 6. Bestäm p, om möjligt så att fältet $\vec{F}$ blir konservativt (= potentialfält) i hela R^3 där

a) $\vec{F} = (y^2z^2, 2xyz^2, pxy^2z + 2z)$ b) $\vec{F} = (y^2z^2, 3xyz^2, pxy^2z + 2z)$

Tips: a) Första två, bland 3 nedanstående villkor, är uppenbart uppfyllda

1. Ω (hela $R^{3)}$ är ett enkelt sammanhängande område

2. P, Q, R har kontinuerliga partiella derivator

3. $Q'_x = P'_y$, $R'_x = P'_z$, $R'_y = Q'_z$

Vi bestämmer p så att tredje villkoret dvs

$Q'_x = P'_y$, $R'_x = P'_z$, $R'_y = Q'_z$

också blir uppfylld

Svar a) p=2 b) Saknas lösning eftersom $Q'_x = 3yz^2 \neq P'_y = 2yz^2$ (oberoende av p).