NIVÅKURVOR

Vi betraktar en yta vars ekvation är $z = f(x,y)$.

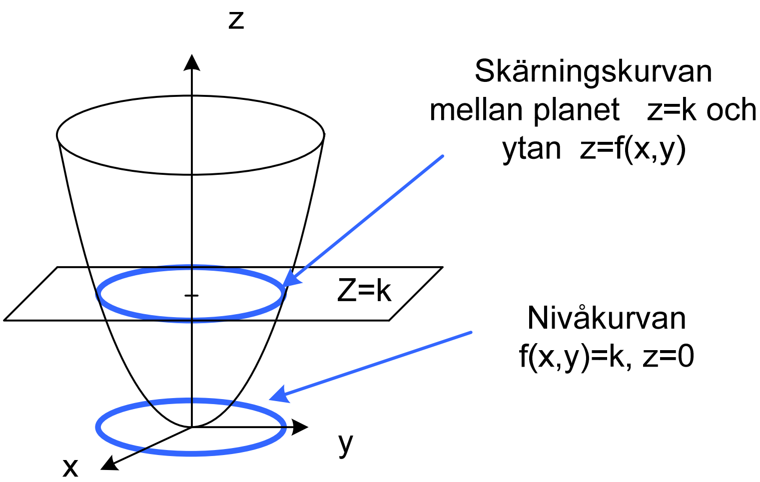
Ekvationer $z = f(x,y)$, $z = k$

kan definiera en skärningskurvan mellan ytan $z = f(x,y)$ och planet $z = k$

(**Anmärkning**. Det kan hända att ingen eller endast en punkt satisfierar ekvationen $f(x,y) = k$.

Motsvarande **nivåkurva** definieras som den ortogonala projektionen av skärningskurvan på xy-planet (z=0). Med andra ord, en nivåkurva består av de punkter som satisfierar

$f(x, y) = k, \quad z = \mathbf{0}$



På liknande sätt definierar vi nivåkurvor för implicit definierade ytor F(x,y,z)=0.

Uppgift 1.

Vi betraktar ytan $z = x^2 + 4y^2$.

a) Bestäm ekvationer för (eventuella) skärningskurvor mellan ytan och planet

$z = k, \quad där\ k = -1, \quad 0, \ 1, \ 2\ och\ 4$.

b) Bestäm och rita i xy-planet några nivåkurvor.

c) Bestäm (eventuella) skärningspunkter mellan ytan och xz-planet.

d) Bestäm (eventuella) skärningspunkter mellan ytan och yz-planet.

e) Skissera (rita) ytan $z = x^2 + 4y^2$ med hjälp av resultat i a,b,c och d.

Lösning.

a)

$\boldsymbol{z=-1}$ dvs $\Rightarrow$ $x^2+4y^2=-1$ (ingen punkt satisfierar den här ekvation)

Ingen skärningspunkt mellan planet $z=-1$ och ytan.

$\boldsymbol{z=0}$ dvs $\Rightarrow$ $x^2+4y^2=0$ (**Endast x=0, y=0** satisfierar den här ekvation)

Endast **en** skärningspunkt (0,0,0) i detta fall.

$\boldsymbol{z=1}$ dvs $\Rightarrow$ $x^2+4y^2=1$ (eller $x^2+\frac{y^2}{(1/4)}=1$)

Ellipsen med halvaxlar $a=1$ och b= *1/2* i planet $\boldsymbol{z=1}$)

$\boldsymbol{z=2}$ dvs $\Rightarrow$ $x^2+4y^2=2$ (eller $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{(1/2)}=1$)

Ellipsen med halvaxlar $a=\sqrt{2}$ och $b=\sqrt{1/2}$ i planet $\boldsymbol{z=2}$)

$\boldsymbol{z=4}$ dvs $\Rightarrow$ $x^2+4y^2=4$ (eller $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$)

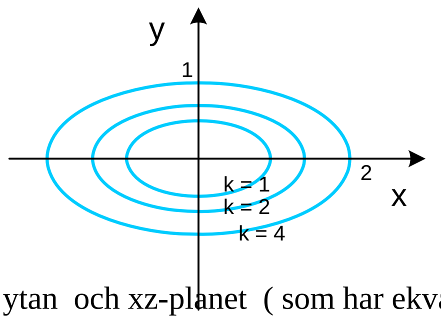
Ellipsen med halvaxlar $a=2$ och $b=1$ planet $\boldsymbol{z=4}$)

----

b) Nivåkurvor (projektioner av skärningskurvor i xy planet) finns om $k\geq 0$ **,** som vi ser från a) delen:

$Punkten$ (0,0) om k=0,

$x^2+4y^2=k$ om k>0



c) (Eventuella) skärningspunkter mellan ytan och xz-planet (som har ekvationen y=0)

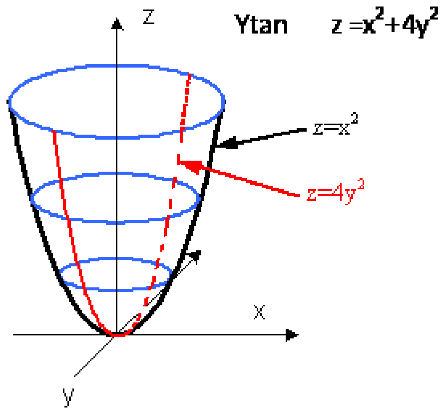
får vi från

$z=x^2+4y^2$, $y=0$ $\Rightarrow$ $z=x^2$ $(en\ parabel\ i\ xz\ planet)$

d) (Eventuella) skärningspunkter mellan ytan och yz-planet (som har ekvationen $x=0$)

får vi från

$z=x^2+4y^2$, $x=0$ $\Rightarrow$ $z=4y^2$ $(en\ parabel\ i\ yz\ planet)$



Anmärkning: Ovanstående yta kallas en **elliptisk paraboloid**.

Uppgift 2. Skissera ytan $(z-3)^2 = x^2 + y^2$.

Lösning:

i) Först undersöker vi skärningskurvor:

$$z = k \text{ och } (z-3)^2 = x^2 + y^2 \text{ medför } \quad (k-3)^2 = x^2 + y^2$$

Skärningskurvor är cirklar med radien $k-3$ om $k \neq 3$ som ligger i planet $z = k$.

Om $k = 3$ har vi endast en skärningspunkt x=0,y=0,z=3 dvs P(0,0,3) .

(**Anmärkning:** Skärningskurvor med $z = k$ är **cirklar** implicerar att $z = f(x, y)$ är en **rotationsyta**)

ii) Skärningspunkter mellan ytan och yz-planet (planet x=0) satisfierar

$$(z-3)^2 = 0^2 + y^2$$

eller

$$z - 3 = \pm y$$

dvs skärningspunkter ligger på två räta linje

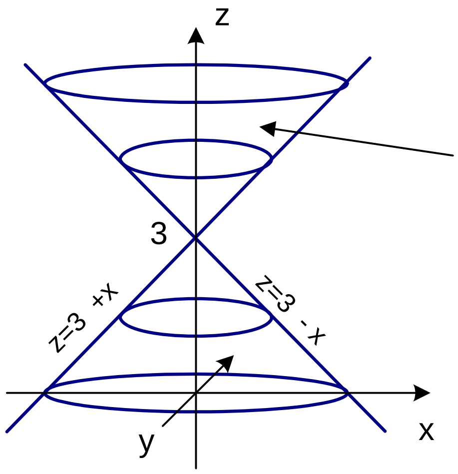
$z = 3 + y$ och $z = 3 - y$

iii) Skärningspunkter mellan ytan och xz-planet (planet y=0) ligger på två räta linje

$z = 3 + x$ och $z = 3 - x$

Vi kan betrakta att ytan $(z-3)^2 = x^2 + y^2$ ”uppstår” genom att $z = 3 \pm x$ roterar kring z-axeln.

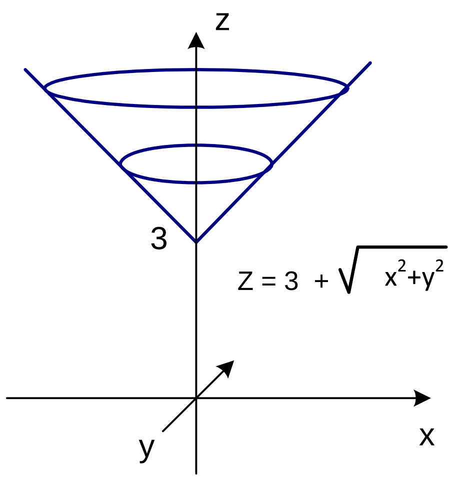
(eller, ekvivalent, att $z = 3 \pm y$ roterar kring z-axeln) .

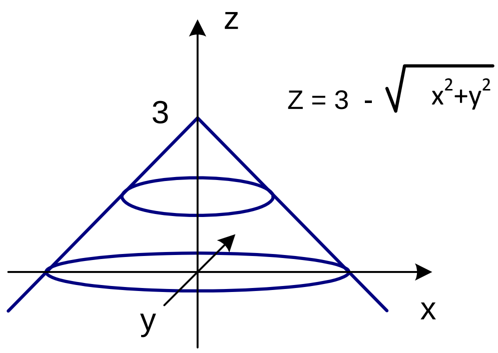


Ytan $(z-3)^2 = x^2 + y^2$

Anmärkning: Ovanstående **koniska yta** består av två **funktionsytor** ($z = f(x,y)$) vars ekvationer får vi genom att lösa ut z ur $(z-3)^2 = x^2 + y^2$:

$$(z-3)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = 3 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$





Uppgift 3. Skissera ytan z= $x^2 - y^2$.

Lösning :

i) För $z= k$ får vi hyperbler $k = x^2 - y^2$.

ii) Om $y=0$ har vi parabeln $z = x^2$

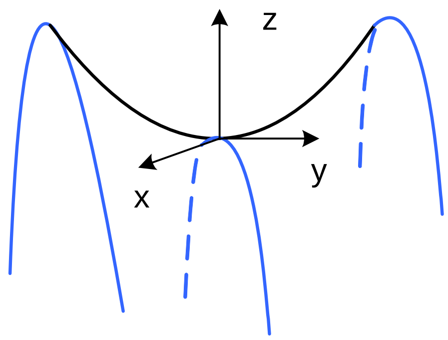
iii) Om x$= k$ får vi parabler $z = k^2 - y^2$

Vi ritar följande parabler i nedanstående graf,

$x = 1$, z $= 1 - y^2$

$x = 0$, z$= -y^2$

$x = -1$, z $= 1 - y^2$



och

$y=0$, z $= x^2$.

Ytan kallas **hyperbolisk paraboloid**