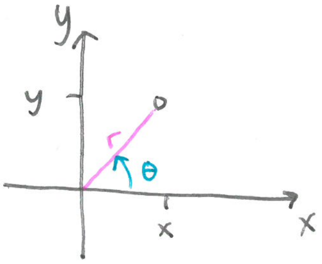
2-dimensionell geometri: polära koordinater (r, θ)

radie $r \geq 0$ — θ: theta



Viktiga samband

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Populärt samband

$$x^2 + y^2 = \underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{\text{trig. ettan}} = r^2$$

Dubbelintegraler i polära koordinater

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

D ← område i xy-planet

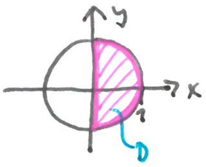
areaelementet $dA = dx\,dy$

$$= \underbrace{r}_{\text{skalfaktor}}\,dr\,d\theta$$

2014-10-30 #5 Beräkna $\iint_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$

där området D ges av $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$ ← cirkelskiva med centrum i origo och radie 1

Steg 0 Skissa D



Steg 1 Övergå till polära koordinater (då D är en del av en cirkelskiva)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ med gränserna $0 \leq r \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

Steg 2 Insättning ger

$$\iint_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

notera: $1-(x^2+y^2)$
$= 1 - r^2$

$$= \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta}_{\text{KLASSIKER \#2}} \cdot \underbrace{\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr}_{\text{SF1625 variabelbyte}}$$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{15}$

$$= \boxed{\frac{\pi}{15}}$$

Steg 3 Beräkna delintegraler

tex $u = 1-r^2$

Typisk omskrivning

"multiplikationslagen"

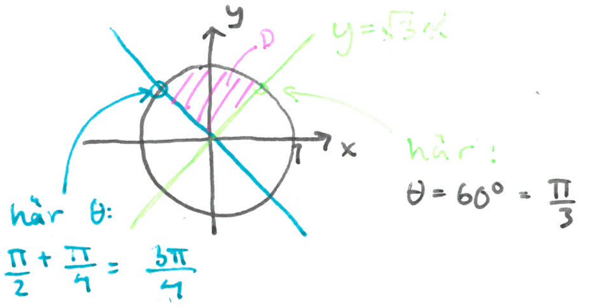
$$\int_c^d\int_a^b \underbrace{g(x)\,h(y)}_{f(x,y)}\,dx\,dy = \int_c^d h(y)\,dy \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

4 konstanta gränser

Snabb kommentar 2016 08 18 #1

D: området ovanför x-axeln som begränsas av kurvorna

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-x \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$$

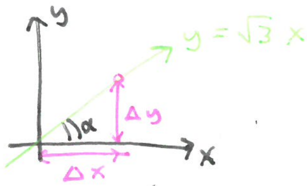


Bestäm gränserna för r och θ

Gränserna: $0\leq r\leq 1$

$\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$

Motivering:



k-värde: $k=\sqrt{3}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$=\tan\alpha$

$\tan\alpha=\sqrt{3}$ ~~dvs~~ $\alpha=60°$

Minnesregler

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	odef

Minns att

$\sin 0° = 0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$

$\sin 90° = 1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$

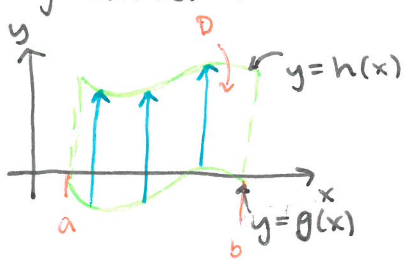
$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ om $\cos\alpha\neq 0$

Dubbelintegraler i (nästan) godtyckliga områden (i $\mathbb{R}^2$)

Sats

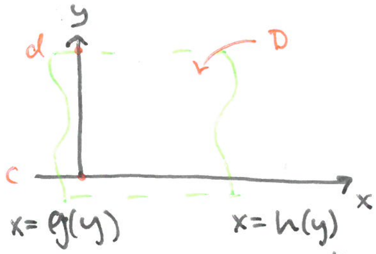
Scenario ①

y-enkelt område

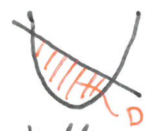


Scenario ②

x-enkelt område



Ex



y-enkelt

Vill: Skriva om $\iint_D f(x,y)\,dA$ med gränser!

① $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

② $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

Varning

! De yttersta gränserna får inte bero av integrationsvariablerna

2013·03·12 #6 Sök $\iint_D x\,y\,dx\,dy$

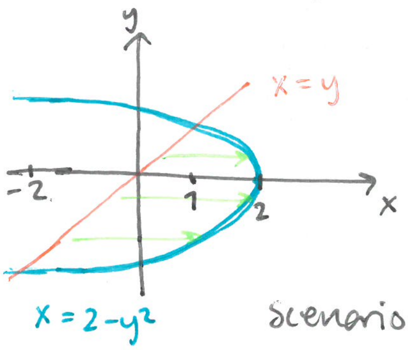
D begränsas av kurvorna

$x = 2 - y^2$

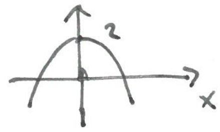
och

$x = y$

Steg 0 Figur



GyMa $y = 2 - x^2$



Scenario 2: x-enkelt D

Steg 1 Ställ upp/skriv om

$$I = \int_{-2}^{1} \int_{y}^{2-y^2} xy \; dx\,dy$$

Gränserna för y fås genom

$2 - y^2 = y \quad (= x)$

$\Downarrow$

$y^2 + y - 2 = 0$ pq-formeln

$\Downarrow$

$y_1 = -2 \qquad y_2 = 1$

Steg 2

$$I = \int_{-2}^{1} \left(\int_{y}^{2-y^2} x\,y \right) dx\,dy =$$

se på y som en konstant

$$= \int_{-2}^{1} \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{y}^{2-y^2} dy$$

gränser för x

GyMa ... $\rightarrow$ $9/8$ svar

2017-10-26 #3 D begränsas av

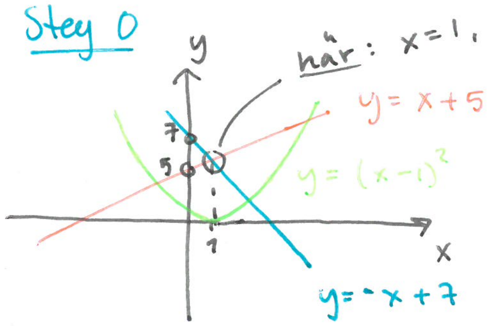
$y = x + 5$

$y = -x + 7$

$y = (x-1)^2$ parabel

Steg 0

när: $x = 1$, ty $1 + 5 = -1 + 7$



D är varken x-enkelt eller y-enkelt. Vi delar upp D!

Söker: $\iint_D x \; dx\,dy$

Steg 1

Betrakta D_1

y-enkelt område

$$\iint_{D_1} x \, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_{(x-1)^2}^{x+5} x \, dy\, dx = \ldots = 2$$

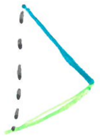
där röd skär grön:

$\Downarrow$ $x+5 = (x-1)^2$

$x = -1$ (och $x = 4$) irrelevant ty $x < 0$

Steg 2

Betrakta D_2



y-enkelt område

LÄXA

$$\iint_{D_2} x \, dx\, dy \overset{!}{=} \int_{1}^{3} \int_{(x-1)^2}^{-x+7} x \, dy\, dx = \ldots = \frac{38}{3}$$

Svar:

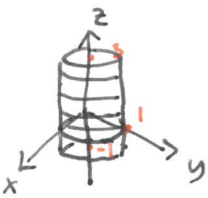
$$\iint_{D} x \, dx\, dy = 2 + \frac{38}{3} = \frac{44}{3}$$

3-dimensionell geometri

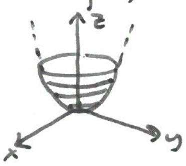
4 typiska ytor & motsv. kroppar

Ex (1) sfär: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ radie $\sqrt{4} = 2$

(2) cylinder: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \leq z \leq 3 \end{cases}$ (cirkel med höjd)

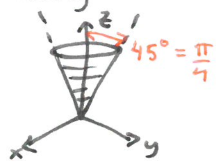


(3) paraboloid: $z = x^2 + y^2$



oändligt lång

(4) kon: $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$



Anmärkning

$z \geq \sqrt{x^2+y^2}$

konformad kropp

Påminnelse

Cylinderkoordinater

(r, θ, z)

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ } som polära koodinater
$z = z$

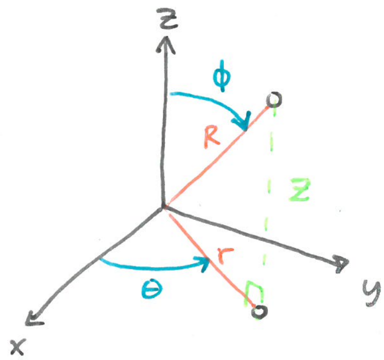
$dV = dx\, dy\, dz$
$= r\, dr\, d\theta\, dz$] Sats för volymelementet

Sfäriska koordinater

(R, ϕ, θ)

$x = R \sin\phi \cos\theta$
$y = R \sin\phi \sin\theta$
$z = R\cos\phi$

$dV = dx\, dy\, dz =$
$= R^2 \sin\phi \, dR\, d\phi\, d\theta$



Populära samband

① $x^2+y^2+z^2 = R^2$

② $x^2+y^2 = R^2\sin^2\phi\underbrace{\cos^2\theta + R^2\sin^2\phi\sin^2\theta}_{\text{trig. ettan}} = R^2\sin^2\phi$

2019-03-12 #4 Kroppen K begränsas av

kon $z = \sqrt{3x^2+3y^2} \overset{\text{vi tolkar}}{\Longleftrightarrow} z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$

sfär $x^2+y^2+z^2 = 4$ radie $\sqrt{4}=2$

Anm: Annat sätt att beskriva kropp K

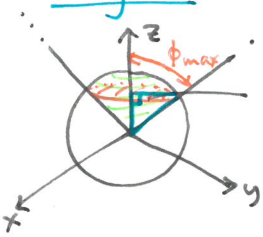
$z \geq \sqrt{3x^2+3y^2}$

$x^2+y^2+z^2 \leq 4$

b) Beskriv K i sfäriska koordinater

Svar
$$\begin{cases} 0 \leq R \leq 2 & \text{lätt} \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi & \text{lätt} \end{cases}$$

Steg 0



kropp K
klotsegment / klotsektor

Steg 1 lätt: R och θ

För ϕ: Betrakta ϕ_{max} mha

$z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$ (sätt in!)

$\Downarrow$

$R\cos\phi = \sqrt{3}\sqrt{R^2\sin^2\phi} = \sqrt{3}R\sin\phi$

$\Downarrow$ $\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6} = \phi_{max}$

a) Beskriv K i cylindriska koordinater

Svar
$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi & \text{samma} \\ \sqrt{3}r \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

Tips!

Steg 1 Börja med z

$$\underbrace{\begin{cases} z \geq \sqrt{3x^2+3y^2} \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \end{cases}}_{\text{Lösa ut } z \text{ GyMa}} \Rightarrow \begin{cases} z \geq \sqrt{3}\overset{\text{byta ut}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z^2 \leq 4-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z \geq \sqrt{3}\,r \\ z \leq \sqrt{4-r^2} \end{matrix}$$

här ser redan att $z \geq 0$ ty $r \geq 0$

Anm: $x^2+y^2=r^2$

$\sqrt{x^2+y^2}=r$

GyMa $z^2 \leq 4$

$-2 \leq z \leq 2$

varför inte?

$\underbrace{-\sqrt{4-r^2}}_{\text{förkastas}} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$

$\sqrt{3}r \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$

Steg 2 Hantera r

Projicera först K på xy-planet. Då fås en cirkelskiva med samma radie som , som är skärningsområdet mellan och (dvs "locket" till konen) (forts.) $z = \sqrt{3}\, r$ $z = \sqrt{4 - r^2}$ samma z-värde vid

gränsfall

$\Downarrow \quad \sqrt{3}\, r = \sqrt{4 - r^2}$

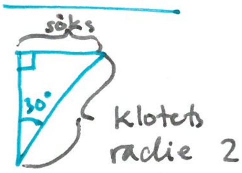
$\Downarrow \quad 3r^2 = 4 - r^2$

$\Downarrow \quad 4r^2 = 4$

$\underline{r = 1}$ dvs har radie 1

dvs $0 \leq r \leq 1$

Alternativ



Gy Ma

d) Beräkna $I = \iiint_K z \, dx\, dy\, dz$

Sätt 1 Sfäriska koordinater. $I = \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{2}}_{\text{från b)}} R \cos\phi \, \overbrace{R^2 \sin\phi}^{\text{skalfaktorn}} \, dR \, d\phi \, d\theta$

separera! $\longrightarrow \; = \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/6} \sin\phi \cos\phi \, d\phi}_{\text{Klassiker \#1: } \frac{1}{8}} \cdot \underbrace{\int_0^{2} R^3 \, dR}_{\text{Gy Ma: } 4}$

$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 = \underline{\underline{\pi}}$ svar

Sätt 2 Cylinderkoordinater

obs!! inte $dr\,d\theta\,dz$

$I = \int \int \int z \, r \, dz \, dr \, d\theta = \ldots = \{\text{samma svar}\}$

$\boxed{\text{Liknande uppgifter } 2018 \cdot 08 \cdot 16 \; \#4}$

Tillämpning $\iiint$ntegraler & volymberäkning

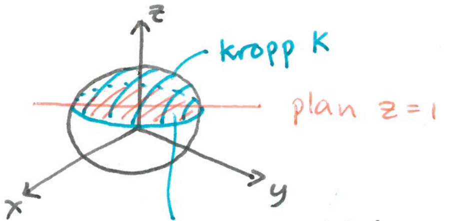
$\text{vol}(K) = \iiint_K 1\,dV$

2010·03·19 #2 Söker vol (K) där K ges av

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 2 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

klot, radie $\sqrt{2}$

K ligger ovanför planet $z=1$



namn: klotsegment/ sfärisk kalott

sök: $\text{vol}(K) = \iiint_K 1\,dV$

TIPS! Använd gärna cylinderkoordinater om uttryck för z ("z är ensamt") är givna.

Anm: Om $z=0$ fås ett halvklot
$\Downarrow$ bättre med sfäriska koordinater

Steg 1 Bestäm z-gränserna

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 2 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

lös ut z

$$\Downarrow \begin{cases} z \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ z \geq 1 \end{cases}$$

minns att $x^2+y^2=r^2$ i cylinderkoordinater

$$\Downarrow \begin{cases} z \leq \sqrt{2-r^2} \\ z \leq 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad 1 \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$$

Steg 2 Bestäm gränserna för r och θ

Kolla på där planet möter klotet

gränsfall $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+1=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

cirkel med radie 1
centrum i origo

Alltså $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

Steg 3

$$\text{Vol}(K) = \iiint_K 1\,dV = \int_1^{\sqrt{2-r^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\,dr\,d\theta\,dz$$ FEL!!

Rätt: $$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{\sqrt{2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \{\text{läxa}\} = \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi \text{ (v.e)}$$

Svar

Volym beräkning 2016.06.04 #5

Sök Vol(K), där K ges av

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y \leq 0 \\ 1 \leq z \leq x+y+11 \quad (*) \end{cases}$$

dvs sök $\iiint_K 1\, dV$

Steg 1. Klart med z-gränserna (*)

Steg 2 Men x och y då?

Knep kvadratkomplettering

$$x^2 \pm ax = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \underbrace{y^2-2y}_{\text{K.K}} \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + (y-1)^2 - 1 \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

cirkelskiva, radie 1, centrum i (0,1)

Påminnelse

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq p^2$

cirkelskiva med radie p och centrum i (a,b)

Steg 3 Övergå till $\underbrace{\text{cyl. koordinater}}_{\text{modifierade}}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y-1 = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta + 1 \\ z = z \end{cases}$$

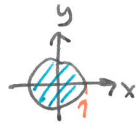
med gränser

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq z \leq \underbrace{x+y}_{\text{byt ut}} + 11 \end{cases}$$

ger $1 \leq z \leq 12 + r\cos\theta + r\sin\theta$

och $dV = dx\,dy\,dz$
$= r\,dr\,d\theta\,dz$

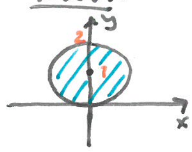
Anm:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$0 \leq r \leq 1$

men:



om vi tar

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

svårt att bestämma r

Steg 4 $\text{vol}(K) = \iiint_K 1\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_1^{12 + r\cos\theta + r\sin\theta} r\, dz\, dr\, d\theta = \{\text{LÄXA}\} = \underline{\underline{11\pi}}$

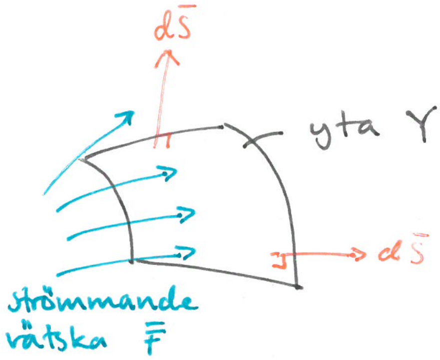
Svar

Flödesintegraler

$$\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

yta Y i $\mathbb{R}^3$ → Y

↑ skalärprodukt



där $d\bar{S}$ är en viss vektor vinkelrät mot Y, i varje punkt på Y

Hur bestäms $d\bar{S}$?

Sats 1 Om Y ges av $z = f(x,y)$

ex. $z = x^2+y^2$ paraboloid

$$d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) dx\,dy$$

teeknet väljs enligt lydelsen

Sats 2 Om Y ges av en parametrisering $\bar{r}(s,t)$

$$d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) ds\,dt$$

2018.10.25 # 5

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right) \quad \text{i } \mathbb{R}^3$$

Yta Y: $\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$ konisk yta

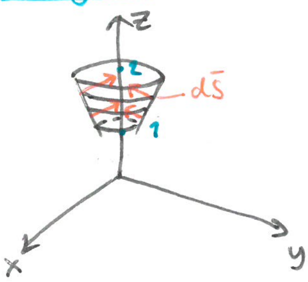
Sök flödet av $\bar{F}$ genom Y, i den riktning in mot z-axeln.

dvs uppåt

z-komponenten i $d\bar{S}$ är positiv

dvs vi söker $\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S}$

Steg 0



Steg 1 Ta fram $d\bar{S}$ med SATS 1, ty Y ges av $z = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$

$$d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) = \ldots =$$

$$= \pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dx\,dy$$

välj −

$$d\bar{S} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) dx\,dy$$

Steg 2 Ta $\bar{F}\cdot d\bar{S}$

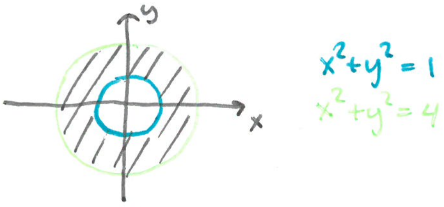
$$\iint_Y \bar{F}\cdot d\bar{S} = \{\text{linjär algebra}\} = \iint_Y \left(-\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + z\right) dx\,dy =$$

minns att $z=\sqrt{x^2+y^2}$ på ytan Y

$$= \{\text{förenkla vidare}\} = \iint_Y \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy \quad (*)$$

Steg 3 Sök gränserna för x och y

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \le z \le 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4$$



annulus

Steg 4 Övergång till polära koordinater

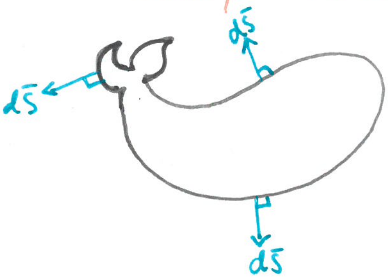
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \text{där} \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \quad \text{och} \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

samt $x^2+y^2=r^2$

$$(*) = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-\frac{1}{r}+r\right) r\,dr\,d\theta = \{\text{läxa}\} = \frac{8}{3}\pi \quad \text{svar}$$

Gauß divergenssats

Låt K vara en kompakt kropp i $\mathbb{R}^3$ med sluten randyta Y



$$\oint\!\!\oint_Y \bar{F}\cdot \underbrace{d\bar{S}}_{\text{rikta utåt}} = \iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\,dV$$

sluten

! $\bar{F}$ måste vara (kontinuerligt) deriverbart i alla punkter i kroppen K

Anm: $\oint\!\!\oint_Y \bar{F}\cdot \underbrace{d\bar{S}}_{\text{inåt}} = -\iiint_K \operatorname{div}\bar{F}$

2011·05·28 #6

$\bar{F}(x,y,z) = (3x, 2y, z)$

kropp K $\begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Bestäm flödet av $\bar{F}$ ut genom randen av kroppen K

alt. begränsningsyta

Y

Steg 1 Då Y är sluten och flödet går utåt (dvs. $d\bar{S}$ riktar utåt), ger Gauß sats

$$\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div} \bar{F} \, dV =$$

$$\bar{F}(x,y,z) = (P, Q, R) \Rightarrow \operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= \iiint_K (3+2+1)\, dV = 6 \underbrace{\iiint_K 1 \, dV}_{\text{volymen av } K}$$

volymen av K
men svår att få fram

Steg 2 Bestäm gränserna

{LÄXA} $\begin{cases} 1 \leq R \leq 2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow 6 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 R^2 \sin\phi \, dR \, d\phi \, d\theta = \ldots = \underline{14\pi(2-\sqrt{2})}$$ svar

2015.03.16 #7 $\bar{F}(x,y,z) = (ax^2 + xy,\ xy + y^2,\ byz + b)$,
där a, b är konstanter

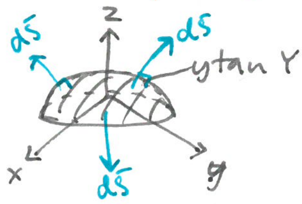
a) Bestäm a och b s.a. $\bar{F}$ blir källfritt
= divergensfritt

$\operatorname{div} \bar{F} = (2ax + y) + (x + 2y) + (by) =$ gruppera x och y knep
$= (2a+1)x + (3+b)y$

vill ha $= 0$ för alla x och y

kräver då: $\begin{cases} 2a + 1 = 0 \\ 3 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -3 \end{cases}$ svar

b) Bestäm flödet av $\bar{F}$ genom den del av
$x^2 + y^2 + 2z^2 = 3$ där $z \geq 0$ ytan Y
ellipsoid



Steg 0 Kan inte tillämpa Gauß sats direkt, ty
Y inte är sluten.

Åtgärd Inför ett lock L till Y, där $z = 0$
$x^2 + y^2 + 2z^2 = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3$
sätt $z = 0$

Locket L ges av $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ z = 0 \end{cases}$ radie $\sqrt{3}$

Steg 1 Betrakta flödet ut genom hela ytan
$\underbrace{Y \cup L}_{\text{sluten}}$ eget val

$$\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S} + \iint_L \bar{F} \cdot d\bar{S} = \overbrace{\oiint_{Y \cup L} \bar{F} \cdot d\bar{S}}^{\text{Gauß}} = \iiint_K \overbrace{\operatorname{div} \bar{F}}^{=0}\, dV = \iiint_K 0\, dV = 0$$

söks
$$\iint_Y \bar{F} \cdot d\bar{S} = 0 - \underbrace{\iint_L \bar{F} \cdot d\bar{S}}_{\text{hur?}}$$

Steg 2 Bestäm $\iint_{L} \bar{F}\cdot d\bar{S}$

Påminnelse

SATS 1 Om Y ges av $z=f(x,y)$:

$$d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) dx\,dy$$

Här:

L ges av $\underbrace{z=0}_{f(x,y)}$

$$d\bar{S} = \pm\left(\frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial 0}{\partial y}, -1\right) = \pm(0,0,-1)\,dx\,dy$$

välj +

ty $d\bar{S}$ för locket L skall rikta neråt, dvs $d\bar{S} = (0,0,-1)\,dx\,dy$

Då fås

$$\iint_{L} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_{L} (\ldots, \ldots, 3yz-3)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{L} (3y\underset{=}{z} + 3)\,dx\,dy = \iint_{L} 3\,dx\,dy = 3\iint_{L} 1\,dx\,dy = 3\cdot \text{arean av } L$$

$z=0$ där L ligger

bryt ut konstant

$$= 3\cdot\pi\cdot\sqrt{3}^2 = 9\pi$$

Svar:

$0 - 9\pi = -9\pi$ upp genom ytan Y

Populära genvägar

1. $\iint_{D} 1\,dx\,dy$ = arean av D

   D område i xy-planet

2. En yta som ligger i eller parallellt med xy-planet har $d\bar{S} = (0,0,1)\,dx\,dy$

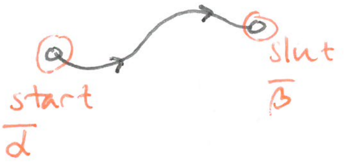
   eller $d\bar{S} = (0,0,-1)\,dx\,dy$

The league of extraordinary integrals

rummets dimension / integrationsområdets dimension	1	2	3
1	$\int_a^b f(x)dx$	$\boxed{\text{Kurvintegraler}}$	
yta 2	—	$\iint_D f(x,y)\,dxdy$	$\iint_Y \bar{F}(x,y,z)\cdot d\bar{S}$
kropp 3	—	—	$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Kurvintegraler av vektorfält

$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$



<u>Tolkning</u> Det mekaniska arbete som krävs för att med en kraft $\bar{F}$ förflytta en partikel från $\bar{\alpha}$ till $\bar{\beta}$ <u>längs C</u>

2013 · 03 · 12 # 3

$\bar{F}(x,y,z) = (yz,\ xz,\ xy)$

$\left(\ \bar{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t) \quad \text{där } t: 0 \to \frac{\pi}{4}\ \right)$ är en parametrisering av kurvan C

a) Beräkna $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ m.h.a. parametriseringen

<u>Definition</u> Låt $\bar{r}(t)$, med $t: a \to b$ vara en parametrisering för en <u>riktad</u> kurva C. Då gäller

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt$$

Anm:
Alternativ notation
$d\bar{r} = (dx, dy)$ i $\mathbb{R}^2$
$d\bar{r} = (dx, dy, dz)$ i $\mathbb{R}^3$

Lösning Steg 1 Ta fram $\frac{d\bar{r}}{dt}$

$$\bar{r}(t) = (\underset{x(t)}{\cos t},\ \underset{y(t)}{\sin t},\ \underset{z(t)}{t})$$

$$\bar{r}'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 1)$$

Steg 2 Ta fram $\bar{F}$ med parametriseringen insatt

$$\bar{F}(x,y,z) = (yz,\ xz,\ xy)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (t\sin t,\ t\cos t,\ \sin t\cos t)$$

Steg 3 skalärprodukt

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^{\pi/4} \bar{F}(\bar{r}(t))\,\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt = \int_0^{\pi/4}(-t\sin^2 t + t\cos^2 t + \sin t\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(t(\cos^2 t - \sin^2 t) + \frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t\right)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\Big(\underbrace{t\cos 2t}_{\text{partiell integration}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin(2t)}_{\text{KLASSIKER \#1}}\Big)\,dt = \frac{\pi}{8}$$ Svar

GyMa
$\sin(2v) = 2\sin v\cos v$
$\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v$

b) Visa att $\bar{F}$ är konservativt och beräkna $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ m.h.a denna vetskap

Påminnelse

Def (kort version)
$\bar{F}$ är konservativt om det finns en s.k. potential Φ s.a. $\operatorname{grad}\Phi = \bar{F}$

Sats

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \underset{\text{slut}}{\Phi(\bar{\beta})} - \underset{\text{start}}{\Phi(\bar{\alpha})}$$

konservativt

Steg 1 Sök en Φ s.a. $\underbrace{\text{grad}\,\Phi}_{=\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x},\, \frac{\partial \Phi}{\partial y},\, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)} = \bar{F}(x,y,z)$

$\Phi = \Phi(x,y,z)$

Kräver

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = yz \quad \Rightarrow \Phi = xyz + h_1(y,z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz \quad \Rightarrow \Phi = xyz + h_2(x,z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy \quad \Rightarrow \Phi = xyz + h_3(x,y)$$

välj $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ så får vi en potential $\Phi(x,y,z) = xyz$

Steg 2 Beräkna

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} \overset{\text{SATS}}{=} \Phi\underbrace{\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\pi}{4}\right)}_{\text{slut}} - \Phi\underbrace{(1,0,0)}_{\text{start}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 1\cdot 0\cdot 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}} \text{ svar}$$

start: $(\cos 0, \sin 0, 0) = (1,0,0)$

slut: $\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

Specialfall

$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$$

sluten kurva — konservativt

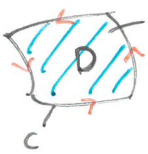
Greens formel i planet

Betrakta $\bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$d\bar{r} = (dx, dy)$

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

Sats (kort formulering)



område D som omsluts av en sluten kurva C som går moturs

Då gäller

$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

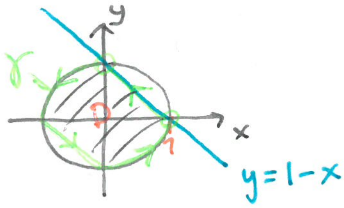
Anm: Om C går medurs

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

2007.06.07 # 8 Sök $I = \oint_\gamma \underbrace{x(x^2+y^2)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(2x+x^2y+y^3)}_{Q(x,y)} dy$

gamma

$= x^3 + xy^2$

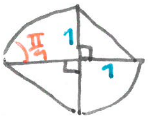


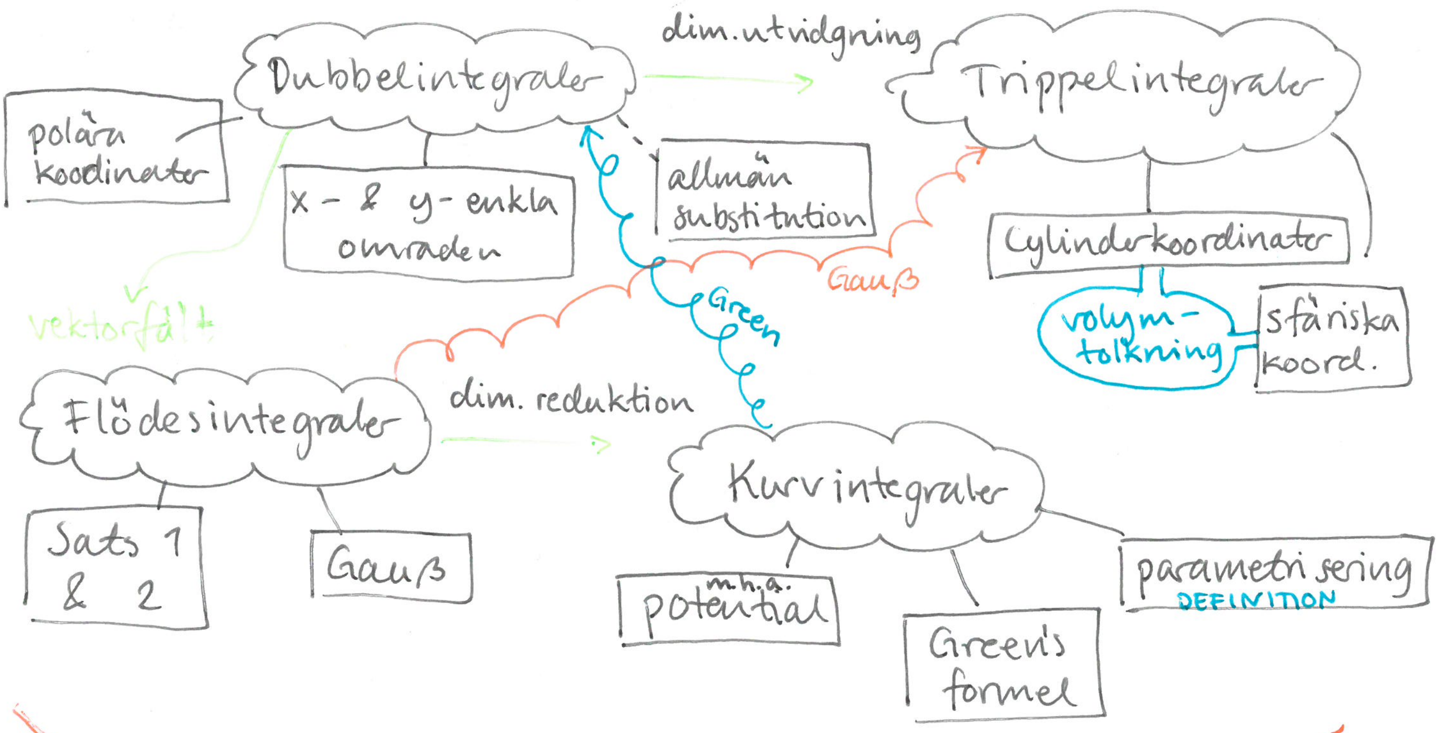
Lösning: γ : sluten, moturs

Green's formel ger:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D \left((2+2xy) - 2xy\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D 2\,dx\,dy = 2 \underbrace{\iint_D 1\,dx\,dy}_{\text{arean av } D} = \ldots = \underline{\underline{\pi + 2}}$$ svar





geometri — kroppar

kurvor ytor

SOLFERINO

Klassiska integraler

SOLFERINO

I morgon:

Allmän sub.

Optimering

Stokes sats

Green forts.

Gradient och tangent

C-del