F14 HYPOTESPRÖVNING (FORTS.)

Kap. 13.4, 13.7–13.8, 14.1–14.4

Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

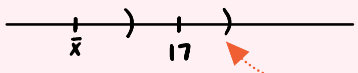
- Fortsättning på hypotesprövning
- Styrkefunktion
- Test baserade på normalapproximation
- Enkel linjär regression: punkt- och intervallskattning av parametrar
- Modellvalidering m.h.a. residualanalys
- Något om multipel linjär regression

Hypotesprövning: Ensidiga test

X_i:na antas ober. och $N(\mu, \sigma)$
Vi har 60 observationer
Vi har fått $\bar{x} = 16.51$, $\frac{s}{\sqrt{n}} = 0.159$

$H_0: \mu = 17$
$H_1: \mu < 17$

Bildar ensidigt uppåt konfidensintervall:
$\bar{x}$ långt från 17 (17 utanför intervallet) $\Rightarrow$ Förkastar



— " —
$\bar{x}$ nära 17 $\Rightarrow$ Inte förkasta

För att vi ska kunna förkasta H_0 till förmån för H_1 så måste μ^*_{obs} vara tillräckligt mycket mindre än 17

$\Rightarrow$ Vi bildar ett ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för μ.

Det tvåsidiga konfidensintervallet fås m.h.a. § 12.2 till $I_\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$

$\Rightarrow$ Vårt konf-int blir då $I_\mu = (-\infty,\ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1))$

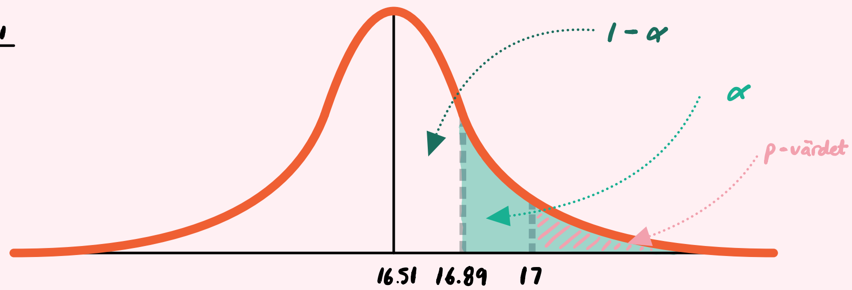
$\underline{\alpha = 0.01}$ $\Rightarrow$ $I_\mu = (-\infty,\ 16.51 + 0.159 \cdot \underbrace{2.39}_{t_{0.01}(59),\ \text{se tab. 3}}) = (-\infty,\ 16.51 + 0.38)$

$17 \notin I_\mu \Rightarrow$ Vi förkastar H_0 på risknivån 1%.

$\underline{\alpha = 0.001}$ $\Rightarrow$ $I_\mu = (-\infty,\ 16.51 + 0.159 \cdot 3.23) = (-\infty,\ 16.51 + 0.51)$
$t_{0.001}(59)$, se tab. 3

$17 \in I_\mu \Rightarrow$ Vi förkastar ej H_0 på risknivån 0.1%.

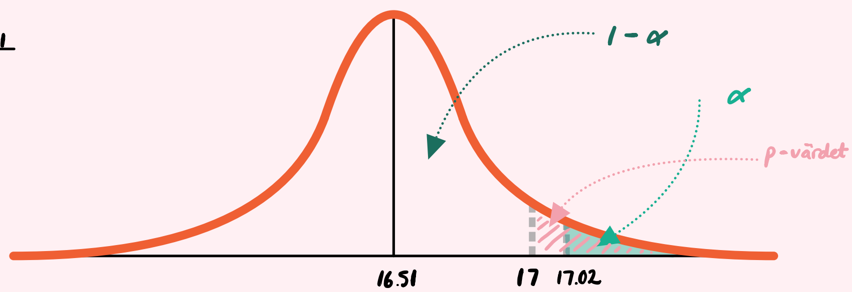
$\alpha = 0.01$



α = arean till höger om 16.89
p-värdet = arean till höger om 17

p-värdet < α
$\Rightarrow$ Förkasta H_0 på risknivån $\alpha = 0.01$

$\alpha = 0.001$



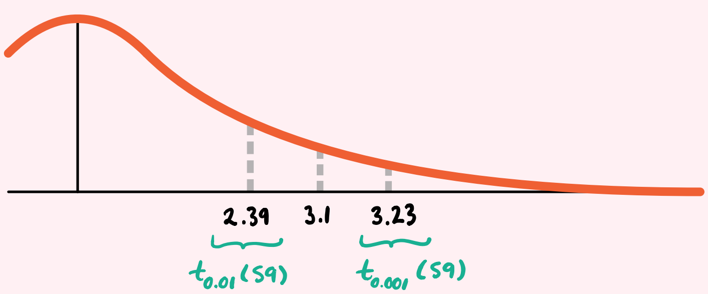
α = arean till höger om 17.02
p-värdet = arean till höger om 17

p-värdet > α
$\Rightarrow$ Vi kan ej förkasta H_0 på risknivån $\alpha = 0.001$

Samma uppgift med testvariabelmetoden

Se § 11.1 d) : $Y = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1)$, testvariabeln $t_{obs} = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{16.51 - 17}{0.159}\right| = 3.1$

Jämförs med $t_\alpha(n-1)$



$P(Y > 2.39) = 0.01$
$P(Y > 3.23) = 0.001$
$P(Y > 3.1)$ = p-värdet = $\underbrace{0.0015}_{\text{Fås på dator}}$

$3.1 = t_{obs} < t_{0.001}(59) = 3.23 \Rightarrow$ Vi kan ej förkasta H_0 på 0.1%-nivån.
$3.1 = t_{obs} > t_{0.01}(59) = 2.39 \Rightarrow$ Vi kan förkasta H_0 på risknivån 1 %.

Styrkefunktionen / Styrka

Hur beräknas styrkan m.h.a. konfidensmetoden?

Def se § 14.1 : Styrkefunktionen $h(\theta) = [P(\text{förkasta } H_0) \text{ om } \theta \text{ är rätt värde}]$

[Styrkan hos testet för $H_1: \theta = \theta_1$] = [P(förkasta $H_0: \theta = \theta_0$) om $H_1: \theta = \theta_1$ är sann]

Övningsuppgift 13.21 a)

X_i:na är ober. och $N(\mu_x, \sigma_x)$ $\quad \sigma_x = 0.3, \quad \sigma_y = 0.4$
Y_i:na är ober. och $N(\mu_y, \sigma_y)$ $\quad n_x = n_y = 10$

$H_0: \mu_x = \mu_y \Leftrightarrow \mu_x - \mu_y = 0$ $\quad \alpha = 0.01$
$H_1: \mu_x - \mu_y = 0.6$

Vi bildar konf-int för $\mu_x - \mu_y$ när σ_x och σ_y är kända m.h.a. § 12.1 och § 11.3

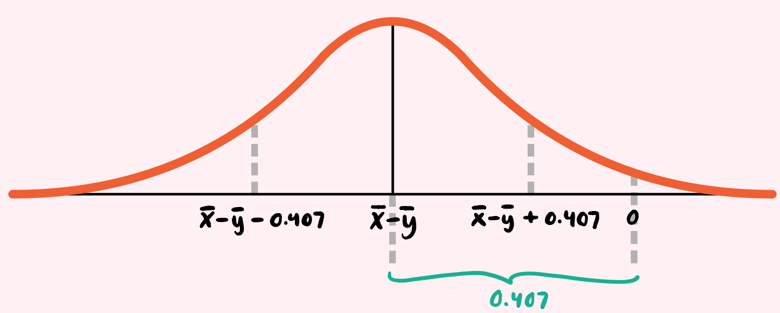
$$\Rightarrow I_{\mu_x - \mu_y} = \bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \cdot \lambda_{\alpha/2} = \sqrt{\frac{0.3^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}} \cdot 2.5758 = \bar{x} - \bar{y} \pm 0.407$$

$\mu_x - \mu_y = \Delta$

$H_0: \Delta = 0$
$H_1: \Delta = 0.6$

[Styrkan hos testet för $H_1: \Delta = 0.6$] = [P(förkasta $H_0: \Delta = 0$) om $H_1: \Delta = 0.6$ är sann] =

= [



] =

$$= \left[P(|\bar{X}-\bar{Y}-0| > 0.407) \text{ om } \Delta = 0.6 \right] = \left[1 - P(|\bar{X}-\bar{Y}| < 0.407) \text{ om } \Delta = 0.6 \right] =$$

$$= \left[1 - P(-0.407 < \bar{X}-\bar{Y} < 0.407) \text{ om } \Delta = 0.6 \right] = \left[\text{Gör om till } N(0,1), \text{ se § 11.3} \right] =$$

$$= \left[1 - P\left(\frac{-0.407-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} < \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} < \frac{0.407+(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \right) \text{ om } \mu_x-\mu_y = 0.6 \right] =$$

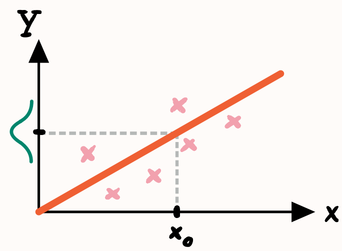
$$= 1 - P\left(\frac{-0.407-0.6}{\sqrt{\frac{0.3^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} < Z < \frac{0.407-0.6}{\sqrt{\frac{0.3^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} \right) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{0.407-0.6}{\sqrt{\frac{0.3^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} \right) - \Phi\left(\frac{-0.407-0.6}{\sqrt{\frac{0.3^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} \right) \right] =$$

$$= 0.886 = h(0.6)$$

$$\text{Styrkefunktionen} = h(\Delta) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{0.407-\Delta}{\sqrt{\frac{0.3^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} \right) - \Phi\left(\frac{-0.407-\Delta}{\sqrt{\frac{0.3^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} \right) \right]$$

Linjär regression

Se § 13



$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon, \quad \varepsilon \in N(0, \sigma)$

$Y_i \in N(\alpha + \beta x_i, \sigma)$

$[y_i - (\alpha + \beta x_i)]$ = residualerna

Skillnaden mellan praktiskt och teoretiskt värde

α^*_{obs} och β^*_{obs} fås från MK-metoden

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\alpha + \beta x_i)]^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0 \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha^*_{obs} = \bar{y} - \beta^*_{obs} \bar{x} \\ \beta^*_{obs} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \end{array}$$

(se § 13.1)

Om man nu vill testa om Y beror av x gör man följande hypotesprövning:

$H_0: \beta = 0$
$H_1: \beta \neq 0$

Om vi inte kan förkasta att $\beta = 0$ så antar vi att Y inte beror av x.
Om vi kan förkasta att $\beta = 0$ så antar vi att Y beror av x.

Hur kollar man detta? Jo, se § 13.2

Här är $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum [Y_i - (\alpha^*_{obs} + \beta^*_{obs} x_i)]^2$
(blanda ej ihop med vanliga stickprovsvariansen)

$$I_\beta = \beta^*_{obs} \pm t_{p/2}(n-2) \cdot \frac{s}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

konfidensintervallet är av grad $1-p$

Multipel linjär regression

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots$$

Övningsuppgift 14.7

Y = nikotin, x_1 = kol, x_2 = klor $\qquad Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$

	Koefficient	Standardfel	p-värde	Nedre 95%	Övre 95%
Intercept	−0.471	0.626	0.459	−1.769	0.826
Kol	1.423	0.247	$8.3 \cdot 10^{-6}$	0.912	1.935
Klor	−0.176	0.112	0.132	−0.409	0.057

a)

$H_{\beta_1}: \beta_1 = 0 \qquad 0 \notin I_\mu \Rightarrow$ Vi förkastar att $\beta_1 = 0$ på signifikansnivån 5%
$\Rightarrow$ kol antas ha betydelse för nikotinhalten

<u>**ALT:**</u> p-värdet $= 8.3 \cdot 10^{-6} < \alpha = 0.05 \Rightarrow H_{\beta_1}$ förkastas

"When p is low: let H_0 go"

$H_{\beta_2}: \beta_2 = 0 \qquad 0 \in I_\mu \Rightarrow$ Vi kan ej förkasta att $\beta_2 = 0 \Rightarrow x_2$ kan kastas på nivån 5%
$\Rightarrow$ klor antas ej ha betydelse för nikotinhalten

<u>**ALT:**</u> p-värdet $= 13.2\% > \alpha = 5\% \Rightarrow$ Vi kan förkasta H_{β_2}

b) $\Delta y = \alpha + \beta_1(x_1+1) + \beta_2(x_2+1) - [\alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2] = \beta_1 + \beta_2$

$\Delta y^*_{obs} = \beta^*_{1obs} + \beta^*_{2obs} = [\text{Koefficient från tabell}] = 1.423 - 0.176 = 1.247$

c) $D^*_{obs}(\beta_1^* - \beta_2^*)$ söks

$V^*_{obs}[\beta_1^* - \beta_2^*] = \left(V[\beta_1^*] + V[\beta_2^*] + 2C[\beta_1^*, \beta_2^*]\right)^*_{obs} = [\text{Standardfel från tabell}] =$

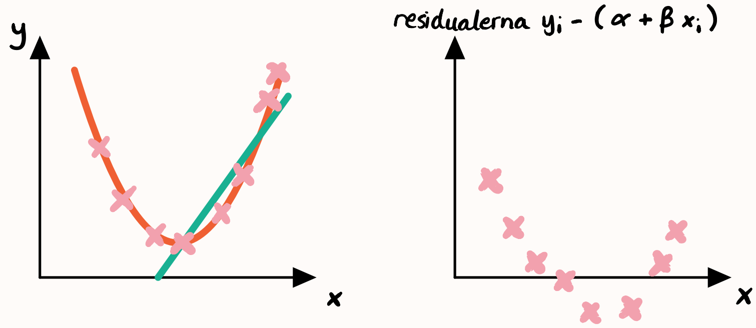
$= 0.247^2 + 0.112^2 - 2 \cdot 0.00248 = 0.0785$

$\Rightarrow$ **Medelfelet** $= \sqrt{0.0785} = 0.28$

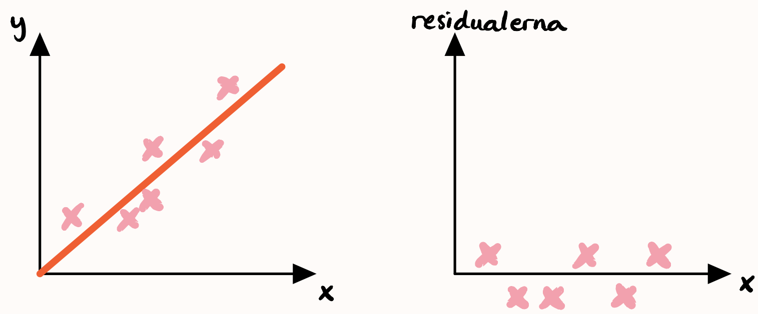
Residualanalys

Används för att avgöra om vi verkligen kan anpassa en rät linje till våra punkter

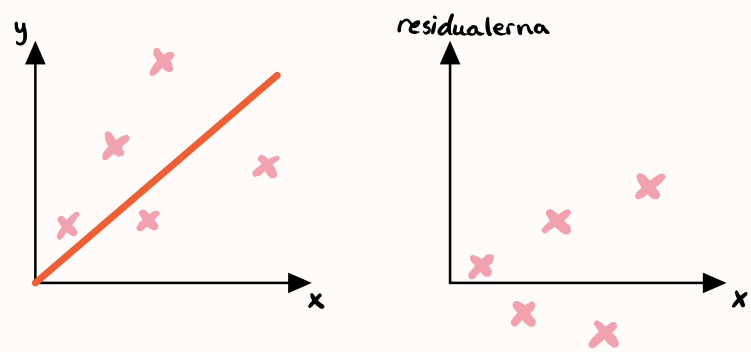
om det är rimligt att göra det



Residualerna följer en tendens $\Rightarrow$ ej rät linje



Ingen tendens $\Rightarrow$ kan vara rät linje



Ej samma varians $\Rightarrow$ antagligen inte rät linje