# F2 SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER (FORTS.)

Kap. 2.5–2.9

Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

- Kombinatorik
- Betingade sannolikheter
- Oberoende händelser

## REPETITION: KOMBINATORIK

1) Dragning med återläggning med hänsyn till ordningen

Ex Antal sätt att dra 4 siffror från 10 = $10^4$

Allm Antal sätt att dra k element från $n = n^k$

2) Dragning utan återläggning med hänsyn till ordningen

Ex Antal sätt att dra 3 st personer från 8 = $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{8!}{(8-3)!}$

Allm Antal sätt att dra k element från $n = \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{\text{På miniräknaren: } nPk}$

3) Dragning utan återläggning utan hänsyn till ordningen

Ex Antal sätt att dra 5 kort från $52 = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!}$

Allm Antal sätt att dra k element från $n = \underbrace{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\text{På miniräknaren: } nCk}$

$0! = 1$
$1! = 1$

## SANNOLIKHETER

När alla utfall har samma sannolikhet blir

$$P(A) = \frac{\text{antal gynnsamma utfall}}{\text{antal möjliga utfall}} = \frac{g}{m}$$

Ex Vi har en urna med 10 svarta och 20 vita kulor.
Vi drar 8 kulor utan återläggning och utan hänsyn till ordning.
Vad är P(vi drar 3 svarta)?

Oberoende av varandra

$$P(\text{vi drar 3 svarta}) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{5}}{\binom{30}{8}}$$

① ② ③ ... ㉚

Vilka svarta vi tar påverkas inte av vilka vita vi tar och tvärtom

**Allm** Vi har s svarta och v vita kulor i urnan. Vi drar n kulor.

$$P(\text{vi drar k svarta}) = \frac{\binom{s}{k}\binom{v}{n-k}}{\binom{s+v}{n}}$$

**Ex** Anta att vi har 10 st röda, 20 st blåa och 30 st gula kulor i urnan.

Vi drar 8 kulor från urnan.

$$P(2 \text{ röda} \cap 3 \text{ blåa} \cap 3 \text{ gula}) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}\binom{30}{3}}{\binom{60}{8}}$$

## BETINGNING

**Def** $P(A \mid B)$ läses sannolikheten för A betingat B

**Ex 2.6**

| | Rökare | Icke-rökare | Rökare + icke-rökare |
|---|---|---|---|
| Män | 20 | 80 | 100 |
| Kvinnor | 50 | 100 | 150 |
| Personer | 70 | 180 | 250 |

A : Man , B : Rökare

$P(A) = \frac{100}{250} = 0.4$ , $P(B) = \frac{70}{250} = 0.28$

$P(A \cap B) = \frac{20}{250} = 0.08$

$P(B|A) = \{ P(\text{att det är en rökare om vi vet att det är en man}) \} =$

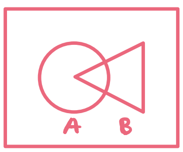
$$= \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \quad P(B|A) = \frac{20}{100} = \frac{\frac{20}{250}}{\frac{100}{250}} = \underline{\underline{\frac{P(B \cap A)}{P(A)}}}$$

Detta är betingningsformeln:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}}$$

Men det smartaste sättet är att rita ett venndiagram:




$$P(A|B) = \frac{\text{"g"}}{m} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

**OBS! SKILJ PÅ SNITT OCH BETINGNING!**

- **Snitt:** Innan vi fått reda på nånting
- **Betingning:** Vi har fått reda på nånting (t.ex. "Det är vinter")

**Ex 2.17** I en fabrik tillverkas:
25 % vid maskin 1
35 % vid maskin 2
40 % vid maskin 3

Maskin 1 har 5 % defekta av sin produktion.
—"— 2 har 4 % —— " ——
—"— 3 har 2 % —— " ——

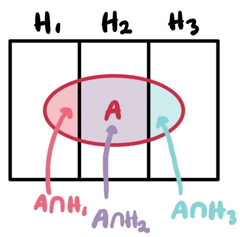
Alla enheter blandas. Vad är sannolikheten att en dragen enhet är defekt?

$H_i$ - enheten tillverkats vid maskin $i$.
$A$ - enheten är defekt

$P(H_1) = 0.25$, $P(H_2) = 0.35$, $P(H_3) = 0.40$

$P(A \mid H_1) = 0.05$, $P(A \mid H_2) = 0.04$, $P(A \mid H_3) = 0.02$

Sökt: $P(A)$




$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + P(A \cap H_3) =$$

$$= \left[ P(A \mid H_1) = \frac{P(A \cap H_1)}{P(H_1)} \right] =$$

$$= P(A \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2) + P(A \mid H_3) \cdot P(H_3) =$$

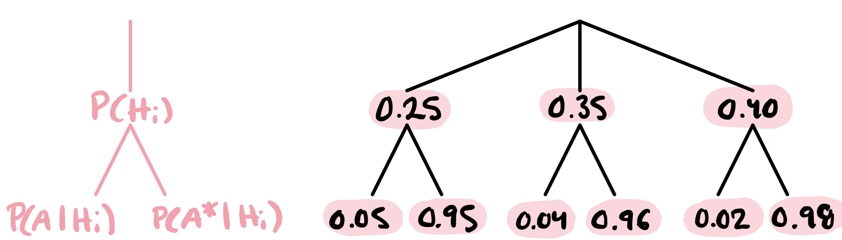
$$= 0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.40 = 0.0345$$

Rimligt, mellan 2%-5% (ska vara "tyngdpunkten" av de enskilda sannolikheterna)

$$\boxed{P(A) = P(A \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2) + P(A \mid H_3) \cdot P(H_3)}$$

Detta är lagen om total sannolikhet

Alt.: se som trädstruktur




$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)$$

**Ex 2.19** Vi drar en enhet från lagret på måfå och ser att den är defekt. Vad är sannolikheten att den kommer från maskin 1?

**Sökt:** $P(H_1 | A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \left[\begin{array}{l}\text{Jämför med} \\ \text{ex } 2.17\end{array}\right] =$

$$= \underbrace{\frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + P(A|H_3)\cdot P(H_3)}}_{\text{Detta är Bayes sats}} = \frac{0.05\cdot 0.25}{0.05\cdot 0.25 + 0.04\cdot 0.35 + 0.02\cdot 0.40} = 0.36$$

Rimligt: högre än 25% p.g.a. sämre maskin

TÄNK PÅ: Betingningade sannolikheter finns inte i venndiagram, utan de är kvoten mellan två ytor i venndiagram

**Ex 2.20**

**Exempel 2.20** *Diagnostiskt test*
Ett diagnostiskt test för en viss sjukdom är sådant att om personen har sjukdomen ger testet ett positivt utslag med sannolikheten 0.9999 (kallas sensitiviteten hos testet). Om personen inte har sjukdomen ger testet ett negativt utslag med sannolikheten 0.995 (kallas specificiteten). Vi vill veta sannolikheten att personen har sjukdomen om testet gett ett positivt utslag.

Formuleringen av problemet är ofullständig ty man måste veta hur vanlig sjukdomen är. Låt sannolikheten för sjukdomen vara $p$ (kallas prevalensen av sjukdomen). Vi undrar nu över vad sannolikheten (uttryckt i $p$) är att en person vars test ger positivt utslag verkligen har sjukdomen. Vi låter $H_1$ = "personen har sjukdomen" och $H_2 = H_1^*$ = "personen har inte sjukdomen". Vi ser att $P(H_1) = p$ och $P(H_2) = 1 - p$. Låt $A$ = "testet ger positivt utslag". Vi har $P(A | H_1) = 0.9999$ och $P(A^* | H_2) = 0.995$. Vad vi söker är $P(H_1 | A)$. Bayes sats ger resultatet

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2)} = \frac{p \cdot 0.9999}{p \cdot 0.9999 + (1-p)\cdot 0.005}.$$

Om $p = 0.2$ blir $P(H_1 \mid A) \approx 0.98$ men om $p = 0.001$ blir $P(H_1 \mid A) \approx 0.17$. Resultatet har en viss relevans för frågan om man skall masstesta. I fallet $p = 0.2$ (högrisk-grupp) är nästan alla med positivt utslag sjuka, men om $p = 0.001$ (lågrisk-grupp) är huvuddelen av de med positivt utslag egentligen friska. □

$H_1$ – personen har sjukdomen
$H_1^*$ – personen har inte sjukdomen

$A$ – personen testar positivt

$P(H_1) = p$

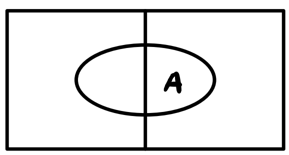
<u>Söker $P(H_1 | A)$</u>

<u>Givet</u>
$P(A | H_1) = 0.9999$
$P(A^* | H_1) = 0.0001$

$P(A^* | H_1^*) = 0.995$
$P(A | H_1^*) = 0.005$

$P(H_1) = p$
$P(H_1^*) = 1 - p$

Venndiagram:




$H_1$ $H_1^*$

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \left[\text{Bayes sats}\right] =$$

$$= \frac{P(A | H_1) \cdot P(H_1)}{P(A | H_1) \cdot P(H_1) + P(A | H_1^*) \cdot P(H_1^*)} =$$

$$= \frac{0.9999 \cdot p}{0.9999 \cdot p + 0.005 \cdot (1-p)}, \quad \text{beror av } p$$

$p = 0.2 \Rightarrow P(H_1 | A) = 0.98$ Om vanlig sjukdom väger $P(H_1)$ över

$p = 0.001 \Rightarrow P(H_1 | A) = 0.17$ Om ovanlig sjukdom väger $P(H_1^*)$ över

## OBEROENDE

Antag $A$ och $B$ oberoende $\Rightarrow$ $P(A | B) = P(A)$

d.v.s. $P(A) \underset{\text{ober.}}{=} P(A | B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\Rightarrow$ d.v.s. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\boxed{\text{Def} \quad A \text{ och } B \text{ är oberoende} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

OBS! Skilj på oberoende och disjunkt ($P(A \cap B) = 0$)

T.ex. om A inträffat så kan inte B ha inträffat

Kan inte vara ober. och disj. samtidigt (disjunkt är ett slags beroende)

**Ex 2.23** En person utsätter sig 1000 ggr för en olycksrisk på 0.001. Risken att råka ut för en olycka blir då...?

$H_i$ = vi råkar ut för olyckan i försök i

P(minst en gång råka ut för olyckan) = 1 − P(noll olyckor) =

$= 1 - P(H_1^* \cap H_2^* \ldots \cap H_{1000}^*) = [\text{ober.}] = 1 - P(H_1^*) \cdot P(H_2^*) \ldots \cdot P(H_{1000}^*) =$

$= 1 - (0.999)^{1000} \approx 0.63$