F11 KONFIDENSINTERVALL

Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

- Konfidensintervall för normalfördelade data:
  - differens mellan väntevärden ("två stickprov")
  - även situationen "stickprov i par"

KAP 12 KONFIDENSINTERVALL

REPETITION

Vi hade X_i:n som var ober. och $N(\mu, \sigma)$

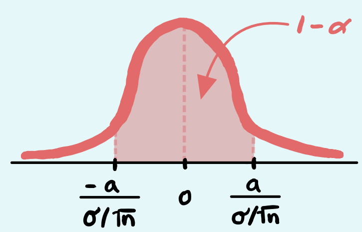
Vi hade observationer $x_1, x_2, \dots, x_n$

Vi vill bilda ett konf-int för μ med konfidensgrad $1-\alpha$

Detta togs fram genom att hitta a så att:

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq a) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\Big(-\frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} < \underbrace{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Y \in N(0,1)} < \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) = 1 - \alpha$$



$$\text{Tab. 2} \Rightarrow \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} = \lambda_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad I_\mu = \Big[\bar{x} - \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\lambda_{\alpha/2}, \ \bar{x} + \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\lambda_{\alpha/2}\Big]$$

Detta intervall fås fram från § 12.1 som används när vi vill ha konf-int för μ när σ känd:

$$\text{§ 12.1} \quad I_\theta = \theta^*_{obs} \pm D \cdot \lambda_{\alpha/2}$$

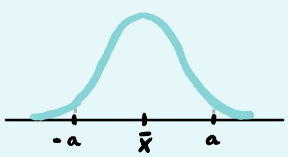
Identifiering:

$$\theta = \mu$$
$$\theta^*_{obs} = \mu^*_{obs} = \bar{x}$$
$$D = [\text{§ 12.1}] = D(\theta^*) = D(\bar{X}) = [\text{§ 11.1 a}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow I_\mu = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_{\alpha/2}$$

FORTSÄTTNING

Anta nu att vi har exakt samma situation förutom att σ nu är okänd



Nu skattar vi σ med $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2} = \sigma^*_{obs}$

Nu har vi $P\left(-\frac{a}{S/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{a}{S/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

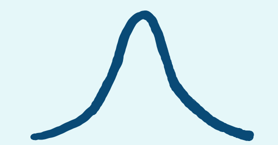
Precis som $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$

så gäller att $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1)$ se F.S. § 11.1 d

$$\Rightarrow \quad I_\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$$

antal frihetsgrader

Tab. 3 visar: $P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$, där $X \in t(f)$



t-fördelningen lik N-fördelningen men lite spetsigare

Jfr tab. 2: $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$

$\boxed{\text{Ex}}$ Låt $1-\alpha$ vara 0.95 och vi har 15 mätdata.

$$\Rightarrow t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = [\text{tab. } 3] = 2.14$$

Om σ varit känd hade vi haft $\lambda_{\alpha/2} = 1.96$

$t_{\alpha/2}(\infty - 1) = t_{0.025}(\infty) = 1.96$

Oändligt många mätdata samma sak som att säga att standardavvikelsen är känd

Vi kan ta fram konfidensintervallet för μ när σ är okänd m.h.a. § 12.2

$$I_\theta = \theta^*_{obs} \pm \underbrace{D^*_{obs}}_{\text{medelfelet av skattningen för } \theta,\ \theta^*} \cdot t_{\alpha/2}(f)$$

$\theta = \mu$

$\theta^*_{obs} = \mu^*_{obs} = \bar{x}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Jfr } \S\, 12.2 & \dfrac{\theta^* - \theta}{D^*} \in t(f) \\ \text{med } \S\, 11.1\, d & \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow f = n-1,\ D^* = \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow D^*_{obs} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow I_\mu = \bar{x} \pm \underbrace{\frac{s}{\sqrt{n}}}_{\text{medelfelet av skattningen för } \mu,\ \mu^*} t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$D = D(\theta^*) = D(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

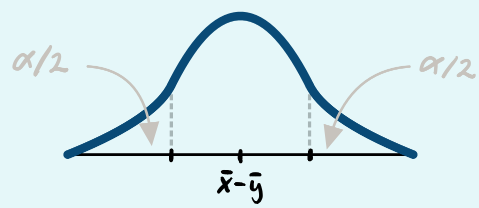
$$D^*_{obs} = \underbrace{D^*(\theta^*)_{obs}}_{\text{medelfelet}} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^*_{obs} \ \frac{\sigma^*_{obs}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

SKILLNAD MELLAN TVÅ STICKPROV

Vi antar nu att vi har X_i:n som är ober. och $N(\mu_x, \sigma_x)$ och Y_j:n som är ober. och $N(\mu_y, \sigma_y)$

Vi vill ta fram $I_{\mu_x - \mu_y}$

Vi har tre olika fall:



1. σ_x och σ_y är kända

P.s.s. som förut fås $P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\underbrace{D(\bar{X} - \bar{Y})}_{}} < \lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

Kap. 5 & § 11.3 : $\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}$

$$\Rightarrow I_{\mu_x - \mu_y} = \bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_x}} \cdot \lambda_{\alpha/2} \qquad (\text{-☼-})$$

Jfr § 12.1 : $I_\theta = \theta^*_{obs} \pm D \cdot \lambda_{\alpha/2}$

$\theta = \mu_x - \mu_y$

$\theta^*_{obs} = \bar{x} - \bar{y}$

$D = D(\theta^*) = [\ \S\, 11.3\ ] = \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}$

$\Rightarrow I_{\mu_x - \mu_y} =$ (-☼-)

2 σ_x och σ_y är okända

$\Rightarrow$ § 12.3 : $I_\theta = \theta^*_{obs} \pm D^*_{obs} \cdot \lambda_{\alpha/2}$

$$I_{\mu_x-\mu_y} = \bar{x}-\bar{y} \pm \sqrt{\frac{s_x^2}{\sqrt{n_x}} + \frac{s_y^2}{\sqrt{n_y}}} \cdot \lambda_{\alpha/2}$$

Detta är ett konfidensintervall med approximativa konfidensgraden $1-\alpha$

3 $\sigma_x = \sigma_y$ är okänd d.v.s. σ_x och σ_y är okända men lika

Som förut har vi från början

$$P\left(-t_{\alpha/2}(f) < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\underbrace{\sqrt{\frac{s^2}{n_x} \quad \frac{s^2}{n_y}}}_{D^*(\bar{X}-\bar{Y}) = D^*(\theta^*_{obs})}} < t_{\alpha/2}(f)\right) = 1-\alpha$$

Hur ska vi skatta σ när vi har två stickprov?

Jo, vi viktar ihop s_x^2 och s_y^2 enl. § 11.2 b $\Rightarrow$ $s^2 = \frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}$

Vi tar fram $I_{\mu_x-\mu_y}$ m.h.a. § 12.2

$$I_\theta = \theta^*_{obs} \cdot t_{\alpha/2}(f)$$

$$\theta = \mu_x - \mu_y$$

$$\theta^*_{obs} = \bar{x}-\bar{y}$$

Jfr § 12.2 : $\frac{\theta^*-\theta}{D^*} \in t(f)$

med § 11.2d: $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{S\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}} \in t_{\alpha/2}(n_x+n_y-2)$

$\Rightarrow I_{\mu_x-\mu_y} = \bar{x}-\bar{y} \pm s\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}} \cdot t_{\alpha/2}(n_x+n_y-2)$, där $s^2 = \frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}$

STICKPROV I PAR

Anta att vi har parvisa observationer där $X_i \in N(\mu_x, \sigma_x)$ och $Y_i \in N(\mu_x + \Delta, \sigma_y)$. Vi vill ha I_Δ.

Vi har $x_1, x_2, \dots, x_n$
$y_1, y_2, \dots, y_n$

Vi gör om till ett stickprov genom att bilda $z_i = y_i - x_i$

Då har vi att $Z_i \in N(\mu_z, \sigma_z) = N(\Delta, \sigma_z)$

$\Rightarrow$ använd § 12.2 om σ_z okänd

$$I_\mu = \bar{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$$

Ex: Tentan 2019-06-05 uppg. 15

Vid en undersökning av om hållfastheten hos en viss typ av cement verkar bero av härdningstiden bestämdes hållfastheten hos 14 olika provkroppar, som hade härdats under 2 respektive 7 dagar. Man fick följande resultat (i kp/m^2)

Härdningstid	Hållfasthet						
2 dagar	21.8	21.7	20.0	22.5	22.0	22.1	21.9
7 dagar	32.4	31.8	34.5	33.9	34.4	34.2	34.9

Hållfastheten vid de båda härdningstiderna kan antas vara normalfördelad med samma standardavvikelse σ, och vi kan anta oberoende mellan samtliga observationer. Testa om det verkar spela någon roll för hållfastheten hos denna typ av cement om vi härdar den 2 dagar eller 7 dagar. Använd signifikansnivån 10%. Ange tydligt vilka de uppställda hypoteserna är. Din slutsats skall tydligt motiveras. (10 p)

Här har vi skillnad mellan två stickprov när standardavvikelserna antas vara lika men okända.

Se § 12.2 : $I_\theta = \theta^*_{obs} \pm D^*_{obs} \cdot t_{\alpha/2}(f)$

X_i:na kommer från härdning 7 dagar, $X_i \in N(\mu_x, \sigma)$
Y_i:na kommer från härdning 2 dagar, $Y_i \in N(\mu_y, \sigma)$ Alla stok. var. ober.

$\theta = \mu_x - \mu_y$
$\theta^*_{obs} = \mu^*_{x_{obs}} - \mu^*_{y_{obs}} = \bar{x} - \bar{y}$

Jfr § 12.2 med § 11.2 d $\Rightarrow$ $D^*_{obs} = s\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}$ där $s^2 = \sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}}$

$t_{\alpha/2}(f) = [\alpha = 0.10] = t_{0.05}(7+7-2) = t_{0.05}(12)$

$I_{\mu_x - \mu_y} = \bar{y} - \bar{x} \pm s\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}} \cdot t_{0.05}(12)$

Räkningar $\Rightarrow$ $\bar{x} = 33.73$
$\bar{y} = 21.71$
$s_x = 1.17$
$s_y = 0.80$

$t_{0.05}(12) = [\text{tab. } 3] = 1.78$

$\Rightarrow I_{\mu_x - \mu_y} = 12.10 \pm 0.95$

Ex: Tentan 2019-08-12 uppg. 15

För att undersöka om en förpackningsmaskin är rätt inställd görs följande försök. Fem enheter tas ut. Dessa väges först med innehåll och sedan utan innehåll. Följande resultat erhölls:

Enhet nr	1	2	3	4	5
(i)	114	124	115	117	123
(ii)	18	23	19	20	24

där (i) står för uppmätt vikt för förpackning *med* innehåll och (ii) står för uppmätt vikt för förpackning *utan* innehåll.
Vi antar följande statistiska modell. Vägningarna av de tomma förpackningarna betraktas som utfall av oberoende stokastiska variabler $X_1, \ldots, X_5$, där $X_k \in N(\mu_k, \sigma_1)$. Konstanterna $\mu_1, \ldots, \mu_5$ är således förpackningarnas "sanna" vikter. Vägningarna av de fyllda förpackningarna betraktas som utfall av oberoende stokastiska variabler $Y_1, \ldots, Y_5$ där $Y_k \in N(\mu_k + \Delta, \sigma_2)$. Konstanten Δ svarar således mot den vikt som förpackningsmaskinen är inställd på att fylla i. Både σ_1, som svarar mot spridningen hos vågens mätfel och σ_2, som svarar mot spridningen hos summan av förpackningsmaskinens och vågens mätfel är okända.

a) Bestäm ett 95% konfidensintervall för Δ. (7 p)

b) Testa hypotesen $\Delta = 100$ mot alternativet $\Delta \neq 100$ på signifikansnivån 5%. Det ska klart framgå om hypotesen förkastas eller ej. (3 p)

X_k är vikt hos tom förpackning
Y_k —— " —— full —— " ——

$X_k \in N(\mu_k, \sigma_1)$
$Y_k \in N(\mu_k + \Delta, \sigma_2)$

Här har vi stickprov i par. Vi bildar $Z_k = y_k - x_k$ och antar att, $Z_k \in N(\Delta, \sigma_z)$

Nu har vi ett stickprov

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
96	101	96	97	99

Vi bildar konf-int för väntevärde när σ är okänd och får m.h.a. §12.2 $\underbrace{I_{\mu_z}}_{I_\Delta} = \bar{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{t_{\alpha/2}(n-1)}_{t_{0.025}(4)}$

$\Rightarrow I_\Delta = I_{\mu_z} = 97.8 \pm \frac{\sqrt{4.7}}{\sqrt{5}} \cdot 2.78 = 97.8 \pm 2.7$