F4 KONTINUERLIGA STOKASTISKA VARIABLER

Kap. 3.10, 4.1–4.7

Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

- Funktioner av stokastiska variabler
- Flerdimensionella stokastiska variabler, sannolikhetsfunktioner och täthetsfunktioner
- Marginell sannolikhets- och täthetsfunktion
- Oberoende s.v. (stokastiska variabler)
- Maximum och minimum av s.v.
- Fördelning för summa av oberoende s.v.

KONTINUERLIGA STOKASTISKA VARIABLER

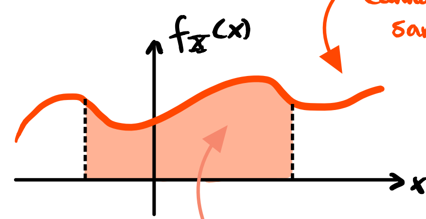
Nu har vi oändligt många utfall som ligger oändligt tätt

Dessutom går sannolikheten för varje utfall mot noll

Def Täthetsfunktionen $f_X(x)$

$$\int_a^b f_X(x)\,dx = P(a < x \leq b)$$

alltid positiv (annars negativa sannolikheter)



$P(a < x \leq b)$

Har att göra med def. av fördelningsfunktionen (men blir samma integral oavsett < eller ≤)

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1}$$

"sannolikheten att vi hamnar nånstans i universum blir 1"

Fördelningsfunktionen $F_X(x)$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < x \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \Rightarrow$$

#prickar på tärning när tärning är i luften

-"- -"- -"- landat — utfallet

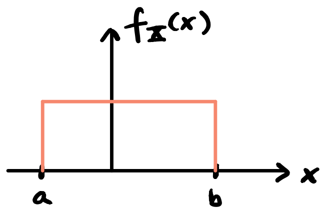
$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx \qquad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)}$$

- Kommer ofta på KS etc.
- Står ej i F.S.

KONTINUERLIGA FÖRDELNINGAR

★ Likformig fördelning

När vi har likformig fördelning så är täthetsfunktionen konstant på det intervall där X kan hamna.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Här: $\int_a^b f_X(x)\,dx = 1$

$$\int_a^b k \cdot dx = 1 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

d.v.s. om $X \in U[a, b] \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Uniform

Fördelningen kallas även rektangelfördelningen

Ex 3.8 Avrundningsfelet $= X$ (i mm)

$X \in U[-0.05, 0.05]$

Ex 3.9 En buss går var 10:e minut.
Vi går slumpmässigt till hållplatsen (tittar inte på klockan).

X = minuter vi får vänta

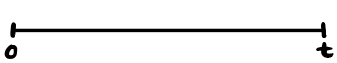
$X \in U[0, 10]$

★ Exponentialfördelningen

Låt oss börja med poissonfördelningen

Se §3 om $X \in Po(\mu)$ är $p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$

Anta att vi har ett intervall mellan 0 och t $[0, t]$



I varje (tid-)punkt på intervallet är det lika stor sannolikhet att en händelse inträffar ober. av om samma händelse inträffat tidigare eller ej och X är antalet händelser som inträffar på intervallet.

$\Rightarrow X \in Po$-fördelningen

Så att $X \in Po(\lambda t) \Rightarrow p_X(k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

λ: intensiteten = = antal händelser per tidsenhet

Om $X \in Po(\lambda t)$ om X är Poissonfördelade

och T är tiden tills nästa händelse inträffar
en till stokastisk variabel

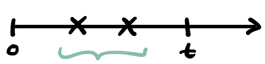
T: tiden mellan två händelser (alt. fr. tiden noll)

Då gäller att $T \in exp(\lambda)$

Bevis: Vi vill ha $f_T(t)$ när vi har $p_X(x)$

Ta först fram $F_T(t)$ och derivera sen.

$F_T(t) = P(T \le t) = P$(nästa händelse inträffar innan t) =

= [

kan t.ex. inträffa två händelser innan t] = [tänker istället komplement] =

= 1 − P(nästa händelse inträffar efter t) =

= 1 − P(noll händelser innan t) =

$$= 1 - p_X(0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{jmf §4: } X \in exp(\lambda)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Exponentialfördelningen saknar minne

Anta att en lampas brinntid är T $\quad T \in exp(\lambda)$
Anta att vi räknar tiden fr.o.m. första lampan slocknar. Då blir:

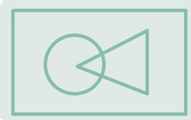
$$P(T > 100) = \int_{100}^{\infty} f_T(t)\,dt = \int_{100}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda \cdot 100}$$

Anta att vi inte vet när förra lampan slocknade utan börjar räkna tiden fr. o.m när vi kommer in i rummet. Då blir fortfarande:

$$P(T>100) = e^{-\lambda \cdot 100}$$

Bevis: Vi vill visa att $P(T>t) = P(T>t+x \mid T>x)$

$$P(T>t+x \mid T>x) \overset{*}{=} \frac{P(T>t+x \cap T>x)}{P(T>x)} =$$



$* \quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$= \underbrace{[T>t+x \Rightarrow T>x]}_{\text{"ena cirkeln ligger inuti den andra"}} = \frac{P(T>t+x)}{P(T>x)} =$$

$$= [\text{exp. fördeln.}] = \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda x}} = \frac{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t} = P(T>t)$$

V.S.V. "Och det är samma sak som minneslöshet"

Blandad fördelning

Ex 3.14 Vi har ett trafikljus som växlar mellan rött och grönt. Det är grönt a sekunder och rött a sekunder.

X = antal sekunder vi får vänta tills det blir grönt.

Vi söker fördelningsfunktionen $F_X(x)$.

Tänk lagen om total sannolikhet: *

$$* \; P(A) = P(A \cap H_i) + P(A \cap H_i^*) = P(A \mid H_i) \cdot P(H_i) + P(A \mid H_i^*) \cdot P(H_i^*)$$

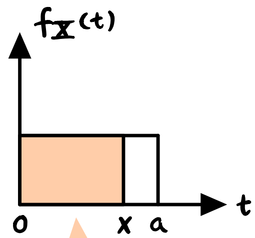
Två fall

$$F_X(x) = P(X \le x) = \underbrace{P(X \le x \mid \text{grönt})}_{1} \cdot \underbrace{P(\text{grönt})}_{\frac{1}{2}} + P(X \le x \mid \text{rött}) \cdot \underbrace{P(\text{rött})}_{\frac{1}{2}} =$$

"Om det är grönt så väntar vi ju inte"

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + P(X \le x \mid \text{rött}) \cdot \frac{1}{2}$$

X är ju likformigt fördelat mellan 0 och a om det är rött



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a-0} & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$P(X \le x \mid \text{rött}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{a}\,dt = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{2}$$

T.ex. sannolikheten att få vänta −5 sekunder

Sammanfattning:

När det är grönt

$$\underbrace{F_X(x)}_{= P(X \le x)} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2a} & 0 < x < a \end{cases}$$

Om $x = a \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1$

"Sannolikheten att vi väntar $\le a$ sekunder är 1"

Funktioner av stokastiska variabler

Diskret exempel: 3.16

j	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(j)$	0.02	0.08	0.15	0.50	0.15	0.08	0.02

$Y = X^2$ sökt $p_Y(k)$

Y kan anta värdena 0, 1, 4, 9

$p_Y(0) = p_X(0) = 0.50$

$p_Y(1) = p_X(1) + p_X(-1) = 0.15 + 0.15 = 0.30$

$p_Y(4) = p_X(2) + p_X(-2) = 0.08 + 0.08 = 0.16$

$p_Y(9) = p_X(3) + p_X(-3) = 0.02 + 0.02 = 0.04$

Kontinuerligt exempel: 3.19

Givet: $X \in U[0,1]$ funktionen X likformigt fördelad mellan 0 och 1

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X; \quad \lambda > 0$$

Ta fram täthetsfunktionen för Y: $f_Y(y)$

"Vi har täthetsf. för X.

Täthetsf. kan man inte bolla mellan varandra, men däremot fördelningsfunktioner för de är sannolikheter."

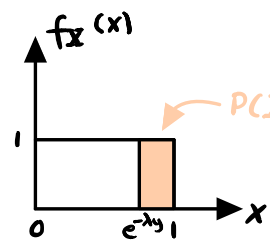
Ta först fram $F_Y(y)$ och derivera

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\tfrac{1}{\lambda}\ln X \leq y) = P(-\ln X \leq \lambda \cdot y) = P(\ln X \geq -\lambda \cdot y) =$$

$$= \underbrace{P(X > e^{-\lambda y})}_{\text{löst ut } X}$$

löst ut X :)

Rita figur:



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$P(X > e^{-\lambda y}) = \int_{e^{-\lambda y}}^{\infty} f_X(x)\,dx = [\text{bara def mellan 0 och 1}] = \int_{e^{-\lambda y}}^{1} 1 \cdot dx = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \underline{\underline{\lambda e^{-\lambda y}}}$$

X rektangelfördelad mellan 0 och 1
Y exponentialfördelad mellan 0 och λ

Det här är ett trick för att ta fram slumptal för exponentialfördelningen:

Kan lätt ta fram slumptal mellan 0 och 1 $\Rightarrow$ ta $-\frac{1}{\lambda}\ln(\text{slumptalet})$

$\Rightarrow$ motsv. slumptal för exponentialfördelningen