



Cc-sannstat - Sammanfattning SF1915 Sannolikhetsteori och statistik

SF1915 Sannolikhetsteori och statistik (Kungliga Tekniska Högskolan)

Crash Course i Sannolikhetsteori och statistik SF1924

Måndag 21:a och Tisdag 22:a maj 2019

Ledd av Fredrik Lundkvist

Häfte skrivet av Johanna Simfors
Redigerad av Fredirk Lundkvist



www.kollin.io

Innehållsförteckning

Teorigenomgångar.....	1
1. Kombinatorik.....	1
2. Oberoende händelse.....	2
3. Betungad sannolikhet.....	3
4. Binomial- & multinomialfördelning.....	4
5. Hypergeometrisk fördelning.....	7
6. Poissonfördelning.....	9
7. Exponentialfördelning.....	10
8. Normalfördelning.....	11
9. Standardiserade normalfördelningen.....	11
10. Täthetsfunktion.....	13
11. Sannolikhetsfunktion.....	13
12. Fördelningsfunktion	14
13. Väntevärde.....	15
14. Varians och standardavvikelse.....	15
15. Kvantil	18
16. Centrala gränsvärdessatsen.....	20
17. Väntevärdesriktighet.....	21
18. Effektivitet av skattning.....	22
19. P-värde.....	24
20. Konfidensintervall – ett stickprov.....	25
21. Konfidensintervall – två stickprov.....	31
22. Konfidensintervall – ett stickprov.....	32
23. Minsta-kvadrat-metoden (MK-metoden)	34
24. Maximum-likelihood-metoden (ML-metoden)	36
25. Hypotesprövning.....	38
26. Styrka.....	42
27. χ^2 -test.....	43
 Formelsamling i matematisk statistik.....	 46
Tabeller	54
Miniräknartips.....	65

1. Kombinatorik

Definition:

Ur en mängd med n stycken element dras k stycken element. För att beräkna på hur många olika sätt detta kan göras gäller olika formler för olika fall.

	Med återläggning	Utan återläggning
Med hänsyn till ordning	n^k	$n(n - 1) \dots (n - k + 1)$
Utan hänsyn till ordning	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Där

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Beräkning av $\binom{n}{k}$ görs smidigt på din räknare. Klicka på fliken "miniräknare" för att lära dig hur.

2. Oberoende händelser

Definition: Två händelser A och B är oberoende om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Anmärkning: Intuitivt sagt är två händelser A och B oberoende när utfallet av den ena händelsen inte påverkar utfallet av den andra, vilket leder till att

$$P(B | A) = P(B)$$

Om A och B är oberoende så är även A^* och B det.

3. Betingad sannolikhet

Definition: Sannolikheten att B inträffar, givet att A redan gjort det, är definierad enligt

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Populära omskrivningar:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A) = P(B) P(A | B)$$

$$P(B^* | A) = 1 - P(B | A)$$

Exempel: 500 studenter ska skriva nästa tenta i Sannolikhetsteori och statistik och pluggar för fullt. Sannolikheten att en student använder *tntor.se* i sina studier är 0,8. Sannolikheten att en student både använder *tntor.se* och klarar tentan är 0,72.

Vad är sannolikheten att en student som använt *tntor.se* klarar tentan?

Lösning: Vi introducerar

A : händelsen att använda *tntor.se*

B : händelsen att klara tentan

Då gäller

$$P(A) = 0,8$$

$$P(A \cap B) = 0,72$$

Sannolikheten att klara tentan givet att studenten använt *tntor.se* är därför

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,72}{0,8} = 0,9$$

Svar: 0,9

Anmärkning: Ingen större statistisk undersökning ligger till grund för de här siffrorna. Siffrorna kanske till och med är tagna helt ur luften. Men du verkar vara på riktigt god väg mot ett strålande tentaresultat som tagit dig hela vägen hit. Kämpa på!

4. Binomial- & multinomialfördelning

$$X \in Bin(n, p)$$

Binomialfördelningen används när

- Vi vet hur många försök vi ska göra, antal försök betecknas n .
- Försöken är oberoende av varandra. Utfallet av ett försök påverkar alltså inte utfallet av nästa.
- Det finns endast två möjliga utfall. De har sannolikheten p och $1 - p$.

Sannolikhetsfunktionen ges av

$$p_x(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Där n är antalet försök, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ och $0 \leq p \leq 1$

Väntevärde

$$E(X) = np$$

Varians

$$V(X) = np(1-p)$$

Multinomialfördelningen är lik binomialfördelningen, men här kan det finnas mer än två utfall för varje försök. Multinomialfördelningen är alltså en generalisering av binomialfördelningen, och binomialfördelningen är ett specialfall av multinomialfördelningen.

Sannolikhetsfunktionen för multinomialfördelningen ges av

$$p_{x_1, \dots, x_r}(k_1, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

Tänk dig att vi genomför ett experiment som består av n stycken oberoende försök. Varje försök kan resultera i r stycken möjliga utfall $A_1, A_2 \dots, A_r$. Varje utfall förekommer med sannolikhet p_1, p_2, \dots, p_r . Sannolikheten att A_j förekommer k_j gånger är p . (Saknas ett j ????) Summan av sannolikheterna för alla de möjliga utfallen är såklart 1.

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1$$

Och då k representerar antalet utfall för en specifik händelse, blir ju summan av samtliga utfall n . Då n står för det totala antalet utförda försök.

$$\sum_{i=1}^r k_i = n$$

Exempel

En välgjord tärning kastas sju gånger.

- a) Vad är sannolikheten att få två treor?
- b) Vad är sannolikheten att få en etta, en två och en trea?

Lösning:

- a) Låt X representera antalet treor. Det finns endast två möjliga utfall, händelsen att få en trea eller händelsen att *inte* få en trea. X är alltså binomialfördelat med följande värden

$$p = \frac{1}{6}$$

$$n = 5$$

$$k = 2$$

Sannolikheten fås enligt

$$p_x(k=2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = 0,161$$

Svar: 0,161

b) Nu finns det fler än två möjliga utfall. Vi låter X_1 representera antalet ettor, X_2 antalet tvåor, X_3 antalet treor och X_4 antalet fyror, femmor eller sexor. Denna gången har vi alltså en multinomialfördelning enligt följande värden

$$n = 7$$

$$p_1 = \frac{1}{6}$$

$$p_2 = \frac{1}{6}$$

$$p_3 = \frac{1}{6}$$

$$p_4 = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Vi söker sannolikheten för följande utfall

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 1$$

$$k_3 = 1$$

$$k_4 = 4$$

Vilket ges av

$$p_{X_1, X_2, X_3, X_4}(k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 4) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

$$= \frac{7!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 4!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 0,192$$

Svar: 0,192

5. Hypergeometrisk fördelning $Hyp(N, n, p)$

Hypergeometrisk fördelning är en diskret fördelning som används när

- vi vet den totala andelen element,
- vi vet hur stor andel av dessa som klassas som lyckade försök,
- vi vet hur många försök vi ska göra, och
- försöken sker utan återläggning.

Sannolikhetsfunktionen ges av

$$p_X(k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

där $0 \leq k \leq Np$ och $0 \leq n - k \leq N(1 - p)$.

Här är det många variabler att hålla koll på:

N : totala antalet element i den givna mängden

n : antalet element som tas ur den totala mängden

p : andelen element i den totala mängden som klassas som lyckade

k : antal upptagna element som klassas som lyckade

Väntevärde: $E(X) = np$

Varians: $V(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$

Exempel: I en urna ligger 20 vita, 12 röda och 13 blåa kulor. Vi plockar slumpmässigt utan återläggning upp 5 kulor. Vad är sannolikheten att exakt två av dessa kulor är röda?

Lösning: Vi börjar med att undersöka vilken fördelning vi har. Hade försöket skett med återläggning hade vi haft en binomialfördelning, då binomialfördelningen bygger på att sannolikheten för de olika utfallen är konstant för alla försök. I detta fall ändras sannolikheten för de olika försöken allt eftersom vi plockar upp fler kulor. Vi har alltså en hypergeometrisk fördelning med

$N = 45$, eftersom det finns totalt 45 kulor

$n = 5$, eftersom vi plockar upp 5 kulor

$p = 12/45$, som är sannolikheten att få en röd kula
 $k = 2$, eftersom 2 av dessa ska vara röda.

Den sökta sannolikheten ges då av

$$p_X(k=2) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{12}{2} \binom{45\left(1-\frac{12}{45}\right)}{5-2}}{\binom{45}{5}} = 0,2947\dots \approx 0,295$$

Svar: 0,295

6. Poissonfördelning $Po(\mu)$

Poissonfördelningen är en diskret fördelning som ofta används när man undersöker något som utspelar sig över en tidsperiod, till exempel antalet personer som anländer till en plats eller sönderfallet av ett radioaktivt ämne. Poissonfördelningen passar bra när n är stort och p är litet. Den stora skillnaden på Poisson- och till exempel binomialfördelningen är att Poissonfördelningen inte har ett bestämt antal försök.

Sannolikhetsfunktionen för en stokastisk variabel $X \in Po(\mu)$ ges av

$$p_x(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

där $k = 0, 1, 2, \dots$ och $\mu > 0$.

Väntevärde: $E(X) = \mu$

Varians: $V(X) = \mu$

Exempel: Du har räknat ut att du på din telefon i genomsnitt får 9 notifikationer i timmen. Vad är sannolikheten att du under en timmes tid endast får en notifikation?

Lösning: Låt X representera antalet notifikationer under en timme. X är då Poissonfördelat enligt

$$X \in Po(9)$$

Den sökta sannolikheten ges av

$$p_X(k=1) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \frac{3^1}{1!} e^{-3} \approx 0,149$$

Svar: 0,149

7. Exponentialfördelning $Exp(\lambda)$

Exponentialfördelningen är en kontinuerlig fördelning som ofta används när man beskriver tid mellan händelser, till exempel livslängden hos en komponent.

Det finns en intressant koppling mellan exponentialfördelningen och Poissonfördelningen. Låt säga att vi undersöker antalet barn som föds i en viss stad. Poissonfördelningen representerar antalet födslar under en given tidsperiod. Exponentialfördelningen representerar tiden mellan varje födsel.

Täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

där λ representerar hur utbredd sannolikhetsmassan är.

Fördelningsfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

Väntevärde: $E(X) = 1/\lambda$

Varians: $V(X) = 1/\lambda^2$

8. Normalfördelning $N(\mu, \sigma)$

Normalfördelningen är en av de absolut viktigaste fördelningarna inom sannolikhetsteori och statistik. Den förekommer ofta i naturen och i samhället, till exempel i experiment där man mäter människors längd eller mängden nederbörd under en viss tidsperiod. Normalfördelningen bygger på att dess variabler ofta antar värden som ligger nära medelvärdet och sällan värden som har en stor avvikelse från detta medelvärde. Detta resulterar i en symmetrisk kurva likt en kulle.

För alla normalfördelningar, oavsett värde på σ och μ , gäller 68-95-99.7-regeln. Det innebär att 68% av alla observationer ligger inom avståndet av en standardavvikelse från medelvärdet, 95% ligger inom två standardavvikeler och 99.7% ligger inom tre standardavvikeler från medelvärdet.

Normalfördelningens viktiga roll inom sannolikhetslära märks inte minst i den centrala gränsvärdessatsen. Mer information om denna finns i teorin till uppgifterna om just centrala gränsvärdessatsen. (Med korta drag säger satsen att summan av ett stort antal oberoende likafördelade stokastiska variabler kommer vara approximativt normalfördelad, oavsett vilken fördelning variablerna hade från början.)

Täthetsfunktionen för $X \in N(\mu, \sigma)$ är

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

och motsvarande fördelningsfunktionen är

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

9. Standardiserade normalfördelningen

$$N(0, 1)$$

När man löser problem för normalfördelningen använder man oftast den standardiserade normalfördelningen. Då är X normalfördelat med

väntevärde $\mu = 0$ och standardavvikelse $\sigma = 1$. Fördelnings- och täthetsfunktion betecknas då som $\varphi(x)$ och $\Phi(x)$.

Täthetsfunktion:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Fördelningsfunktion:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ofta har den stokastiska variabeln man undersöker andra värden än $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. För att standardisera en normalfördelning subtraherar man medelvärdet från alla observationer och dividerar resultatet med standardavvikelse. För

$$X \in N(\mu, \sigma)$$

gäller alltså

$$\begin{aligned} P(X < b) &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ P(X > a) &= 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\ P(a < X < b) &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

För att få fram svaret kikar man i tabellen för den standardiserade normalfördelningen. Där motsvarar x i tabellen värdet man fick i parentesen. Har man fått ett negativt x kan man utnyttja att

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

10. Täthetsfunktion $f_X(x)$

Täthetsfunktionen för en stokastisk variabel visar hur sannolika olika värden är i förhållande till varandra. Om X är en kontinuerligt s.v. gäller

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Här beräknar vi sannolikheten att få ett värde inom intervallet $(a, b]$, vilket är något som även representeras av arean under kurvan $f_X(x)$ mellan a och b .

Allmänt gäller

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= 1 \\ 0 \leq f_X(x) &\leq 1 \end{aligned}$$

eftersom den totala sannolikheten alltid är 1.

För kontinuerliga s.v. variabler gäller även att

$$\begin{aligned} f(a) &\neq P(X = a) \\ P(a \leq X \leq b) &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

11. Sannolikhetsfunktion $p_X(k)$

Motsvarande täthetsfunktion för en diskret s.v. kallas sannolikhetsfunktion. Sannolikhetsfunktionen visar sannolikheten att en diskret s.v. X antar ett visst värde. Då gäller

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b p_X(k)$$

där $p_X(k) \geq 0$ för alla k och $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$.

12. Fordelningsfunktion $F_X(x)$

Fordelningsfunktionen för en kontinuerlig stokastisk variabel ges av

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Fordelningsfunktionen beskriver sannolikheten att den s.v. X antar ett värde mindre än eller lika med x , med andra ord arean under $f_X(x)$ fram till x . Beräkning av en viss sannolikhet ges av

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

För fördelningsfunktionen gäller följande egenskaper:

- $F_X(x)$ är icke-avtagande
- $F_X(x) \rightarrow 1$ då $x \rightarrow \infty$
- $F_X(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow -\infty$
- $F_X(x)$ är högerkontinuerlig

Med **integralkalkylens huvudsats** (från envariabelanalys) kan vi visa att

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Detta samband gäller i varje punkt x där $f_X(x)$ är kontinuerlig.

13. Väntevärde

Väntevärdet är ett lägesmått för en stokastisk variabel. Vi har en s.v. X som representerar ett slumpförsök. Vi utför N stycken oberoende försök under oförändrade förhållanden. Vi betecknar resultaten med x_1, x_2, \dots

Väntevärdet för X , betecknat $E(X)$ eller även $E(X) = \mu$, är vad man förväntar sig att medelvärdet av X ska bli. Ju större N vi har desto närmre $E(X)$ hamnar vi. Väntevärdet kan även ses på som tyngdpunkten för massfördelningen längs x -axeln.

Definition: För en diskret s.v. X definieras $E(X)$ enligt

$$E(X) = \sum_k k \cdot p_x(k)$$

För en kontinuerlig s.v. X gäller

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx$$

14. Varians och standardavvikelse

Väntevärdet är sällan tillräckligt för att beskriva en stokastisk variabel. Två s.v. med samma väntevärde kan mycket väl ha olika spridningar. Vi inför därför ett mått på hur mycket den s.v. X avviker från sitt väntevärde $E(X) = \mu$, vilket kallas varians.

Definition 1: Variansen av en s.v. X betecknas $V(X)$, alternativt $\text{Var}(X)$, och definieras enligt

$$V(X) = E((X - \mu)^2)$$

Anmärkning: Ett viktigt samband mellan $V(X)$ och $E(X)$ som brukar användas i räkneuppgifter är

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Definition 2: Standardavvikelsen σ av en s.v. X är kvadratrotten ur variansen:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Anmärkning: I praktiken betecknas variansen av X även med σ^2 , dvs.

$$V(X) = \sigma^2$$

Kovarians

Definition: Kovariansen C är ett mått på hur två stokastiska variabler beror av varandra.

$$C(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Om $C(X, Y) = 0$ är X och Y okorrelerade.

Om X och Y är oberoende är de även okorrelerade.

Korrelationskoefficienten ges av

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)}$$

Räkneregler:

$$C(X, Y) = C(Y, X)$$

$$C(aX, bY) = abC(X, Y)$$

$$C(X + a, Y + b) = C(X, Y)$$

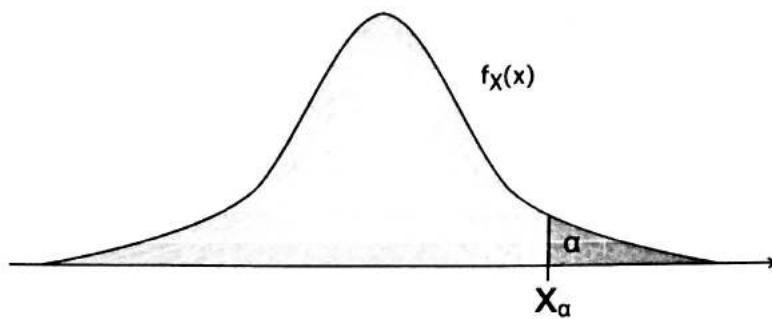
$$C(X, X) = V(X)$$

15. Kvantil

Definition:

En kvantil x_α är ett värde på x-axeln, placerad så att arean till höger om x_α under grafen för täthetsfunktionen är α . Där $0 \leq \alpha \leq 1$.

Något som kanske enklast visas i en figur



Allmänt gäller att

$$F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$$

där x_α kallas α -kvantlien för den s.v. X .

Värdet på α skrivs ofta i procentform. Till exempel 5%-kvantilen. Då söker man alltså det värde på x_α som uppfyller $F_X(x_\alpha) = 1 - 0,05 = 0,95$.

Kvantil på den standardiserade normalfördelningen

Ofta används räkning med kvantiler på den standardiserade normalfördelningen. Det vill säga normalfördelningen med $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. $X \in N(0,1)$. Då kallas det sökta värdet för λ_α .

Exempel:

Vi söker λ_α för $\alpha = 0,05$.

$$\alpha = 0,05$$

$$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$$

$$\text{Sökt: } \lambda_{0,05}$$

Vi tittar i vår tabellsamling för normalfördelningens kvantiler och finner att $\alpha = 0,05$ ger $\lambda_{0,05} = 1,6449$.

16. Centrala gränsvärdessatsen

Definition: Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler från godtycklig fördelning. Låt Y vara summan av dessa, dvs.

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Då gäller att Y_n är approximativt normalfördelat enligt

$$Y_n \in N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

för tillräckligt stora n , oavsett vilken fördelning X kommer ifrån.

Anmärkning 1: Satsen skrivs ofta på formeln för den standardiserade normalfördelningen:

$$P\left(a < \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

Anmärkning 2: Det är tyvärr svårt att ge några exakta siffror på hur stort n måste vara. Kraven på n beror på hur normalliknande de ursprungliga s.v. X är. En bra tumregel är att om X är nägorlunda symmetriska räcker det med ganska små n , något tiotal. Om X däremot har en asymmetrisk fördelning kan n behöva vara en eller flera hundratals.

Exempel: En välgjord tärning kastas en gång. Den s.v. X står för antal prickar som visas. Vi har en likformig fördelning där $P(X = k) = \frac{1}{6}$ för $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Samma tärning kastas fler och fler gånger, totalt n gånger. Vi låter Y_n representera summan av alla n kast. Vi ser hur Y allt mer liknar en normalfördelning för större och större n .

Fördelningen för 1, 3 respektive 20 kast.

17. Väntevärdesriktighet

Definition: En punktskattning θ_{obs}^* sägs vara väntevärdesriktig om

$$E(\theta^*) = \theta$$

för alla $\theta \in \Omega_\theta$.

Anmärkning: En väntevärdesriktig punktskattning är önskvärd. Om skattningen inte är väntevärdesriktig innebär det att vårt stickprov kan vara långt ifrån det faktiska väntevärdet. Detta innebär i sin tur att vår skattning kan ha ett systematiskt fel.

18. Effektivitet av skattning

Effektivitet av skattning är ett sätt att mäta hur bra en skattning är.
Framförallt används det för att jämföra olika skattningar med varandra.
Man tar då fram variansen för sin punktskattning

$$V(\theta^*)$$

där θ^* är en punktskattning av parametern θ .

Effektiva skattningar har en låg varians. Eftersom en låg varians innebär att risken att skattningen ligger långt ifrån det sanna värdet är låg.

Exempel: Du och din kompis har ett favoritställe ni båda gärna sitter och pluggar på. Problemet är att lamporna i taket ofta slutar fungera. Som de stora statistikfantaster ni är bestämmer ni er för att punktskatta livslängden på dessa lampor. Ni vet att livslängden hos lamporna kommer från en exponentialfördelning

$$X \in Exp(\lambda)$$

där $\lambda > 0$. Ni gör ett stickprov och kommer fram till olika punktskattningar för parametern λ enligt följande:

$$\lambda_1^* = \frac{3x}{2} \quad \lambda_2^* = 2x + 2$$

Ni båda är envisa och menar på att er egen skattning är den bästa. Men vilken skattning är egentligen den mest effektiva?

Lösning: Vi vill nu ta fram variansen för de olika punktskattningarna så vi kan se vilken som är effektivast.

För exponentialfördelning gäller:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Om vi minns räknelagarna

$$E(aX + b) = a E(X) + b \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

får vi lätt varianserna

$$V(\lambda_1^*) = V\left(\frac{3X}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 V(X) = \frac{9}{4} \frac{1}{\lambda^2}$$

$$V(\lambda_2^*) = V(2X + 2) = 2^2 V(X) = 4 \frac{1}{\lambda^2}$$

Vi ser att $V(\lambda_1^*) < V(\lambda_2^*)$ då $\lambda > 0$ för alla punkter. Alltså är λ_1^* är den effektivaste skattningen.

19. p-värde

Definition: . p -värdet är sannolikheten att få vårt observerade värde eller något extremare *givet* att H_0 är sann.

Vad som anses vara extremare beror på vad mothypotesen säger. Om vi har nollhypotesen $H_0: \mu = \mu_0$ fås p -värdet enligt

$$\begin{aligned}H_1: \mu &< \mu_0 \\p &= P(X \leq -x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_1: \mu &> \mu_0 \\p &= P(X \geq x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_1: \mu &\neq \mu_0 \\p &= 2 \cdot P(X \geq |x|)\end{aligned}$$

Där x är vårt observerade värde från den s.v. X .

Exempel: I en urna ligger ett okänt antal röda och blåa kolor. Ett experiment genomförs där 14 kolor plockas upp med återläggning. Försöken anses oberoende av varandra. X står för antalet uppluckade röda kolor. Resultatet av experimentet blev 9 röda och 5 blåa kolor. Du vill undersöka om det är troligt att hälften av kulorna i urnan är röda. Pröva $H_0: p = 1/2$ mot $H_1: p > 1/2$. Beräkna p -värdet

Lösning: Då försöket sker med återläggning gäller $X \in Bin(n, p)$ p -värdet är sannolikheten att få vårt observerade värde eller något extremare *givet* att H_0 är sann,

$$p\text{-värde} = P(X \geq 9) \text{ givet att } p = 1/2$$

Beräknas med hjälp av tabell, grafräknare eller formel för binomialfördelning.

$$p\text{-värde} = P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0,788 = 0,212$$

Svar: p -värdet är 0,212

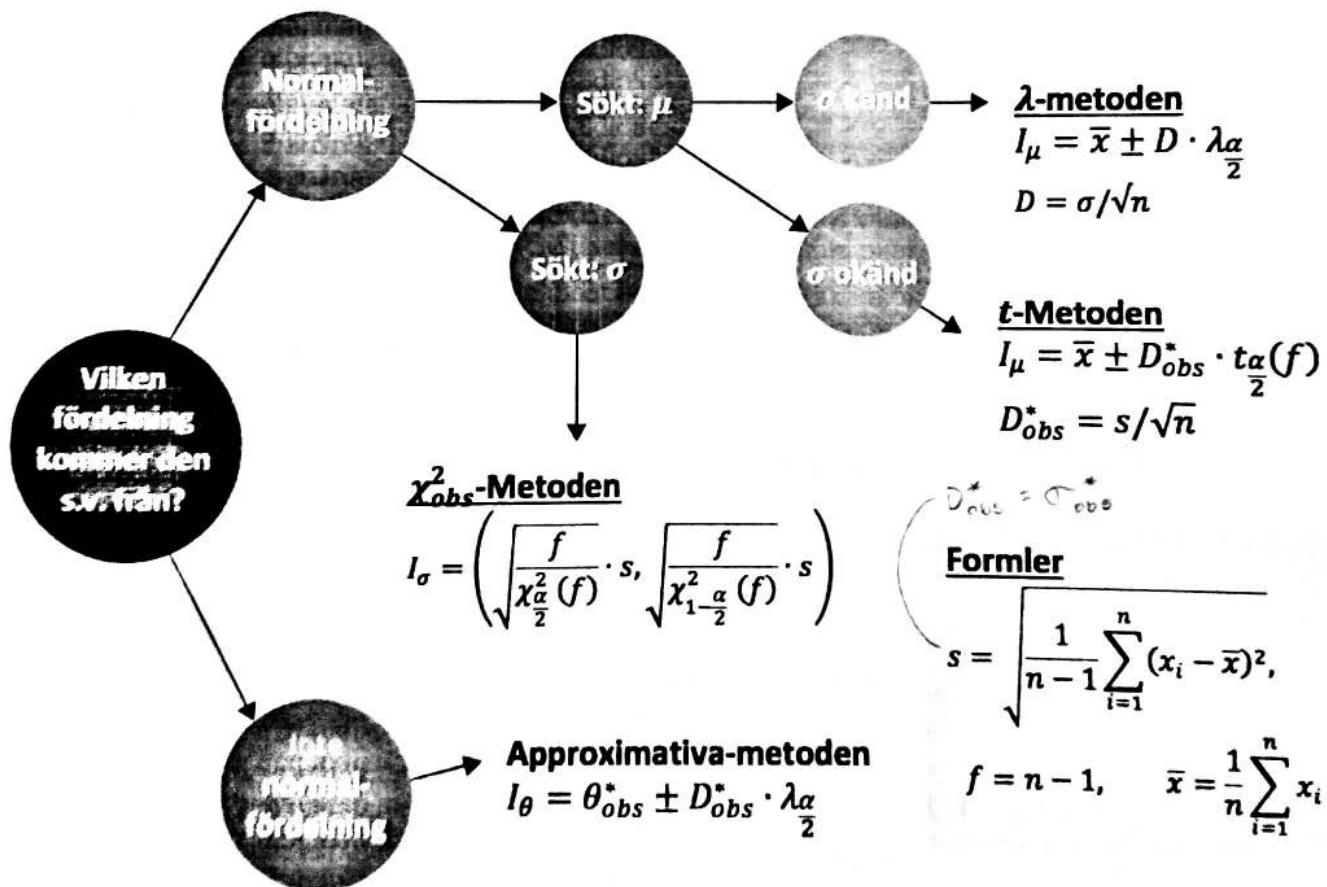
20. Konfidensintervall (ett stickprov)

Definition:

Ibland är inte en punkskattning tillräcklig för att korrekt skatta ett värde. Därför introducerar vi konfidensintervall. Konfidensgraden $1 - \alpha$ anger sannolikheten att vårt framtagna konfidensintervall I_θ täcker in det sanna värdet på θ .

Konfidensintervall kan verka knepigt till en början. Men de bygger egentligen mest på att veta när man ska använda vilken metod. Sökt värde för metoden får ur de olika tabeller i din tabellsamling. Krångliga formler, till exempel den för s , kan räknas ut med hjälp av inbyggda funktioner i miniräknaren. Gå in på fliken "Miniräknare" här uppe för att se hur du gör.

Här är en figur för att snabbt få en överblick på vad som gäller när. Alla metoder går igenom närmre på nästa sida.



Figur 1. Karta över när man ska använda vilken metod.

λ -metoden

Då vi söker μ, σ är känt och $X_i \in N(\mu, \sigma)$.

Låt x_1, \dots, x_n vara ett stickprov från $X_i \in N(\mu, \sigma)$. Vi vill skatta väntevärdet μ .

- En bra första skattning av väntevärdet är det aritmetiska medelvärdet \bar{X} .

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{där } \bar{X} \in N(\mu, D) \text{ och } D = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Vi standardisering den s.v. \bar{X} ,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{D} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Eftersom $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(1,0)$ kan vi ta fram de sökta gränserna med hjälp av kvantilen $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$

$$-\lambda_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

- Vilket ofta skrivs om till

$$I_\mu = \bar{x} \pm D \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

där $D = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ och värdet för $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$ fås ur tabell.

Vi har tagit fram ett tvåsidigt konfidensintervall I_μ som med $100(1 - \alpha)\%$ säkerhet innehåller μ .

Vill vi istället ta fram ett ensidigt intervall ändrar vi från $\frac{\alpha}{2}$ till α ,

intervallen blir då:

Övre konfidensintervall

$$-\infty < I_\mu \leq \bar{x} + D \cdot \lambda_\alpha$$

Undre konfidensintervall

$$\bar{x} - D \cdot \lambda_\alpha < I_\mu \leq \infty$$

Även de ensidiga konfidensintervallen innehåller μ med $100(1 - \alpha)\%$ säkerhet.

t-metoden

Då vi söker μ, σ är okänt och $X_i \in N(\mu, \sigma)$.

Låt x_1, \dots, x_n vara ett stickprov från $X_i \in N(\mu, \sigma)$. Vi vill skatta väntevärdet μ .

- En bra första skattning av väntevärdet är det aritmetiska medelvärdet \bar{X} .

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{där } \bar{X} \in N(\mu, D)$$

- Men nu måste vi även skatta D , alltså ta fram D_{obs}^*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad D_{obs}^* = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Tips: Missa inte fliken "Miniräknare" för att lära dig hur du snabbt räknar ut både s och \bar{X} på miniräknaren. Att försöka räkna ut allt för hand leder oftast till många onödiga slarvfel.

- Vi standardiseringar den s.v. \bar{X} ,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{D_{obs}^*} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- Eftersom standardavvikelsen är en skattad parameter använder vi i detta fall t -fördelningen. För konfidensgraden $1-\alpha$ gäller

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(f) < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(f)$$

Där f =frihetsgrad och fås av $f = n - 1$.

- Vilket ofta skrivs om till

$$I_\mu = \bar{x} \pm D_{obs}^* \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(f)$$

Där värdet för $t_{\frac{\alpha}{2}}(f)$ fås ur tabell.

Vi har tagit fram ett tvåsidigt konfidensintervall I_μ som med $100(1 - \alpha)\%$ säkerhet innehåller μ .

Vill vi istället ta fram ett ensidigt intervall ändrar vi från $\frac{\alpha}{2}$ till α , intervallet blir då:

Övre konfidensintervall

$$-\infty < I_\mu \leq \bar{x} + D_{obs}^* \cdot t_\alpha(f)$$

Undre konfidensintervall

$$\bar{x} - D_{obs}^* \cdot t_\alpha(f) < I_\mu \leq \infty$$

Även de ensidiga konfidensintervallen innehåller μ med en säkerhet på $100(1 - \alpha)\%$.

χ^2 -metoden

Då vi söker σ , μ är antingen känt eller okänt, och $X_i \in N(\mu, \sigma)$.

Låt x_1, \dots, x_n vara ett stickprov från $X_i \in N(\mu, \sigma)$. Vi vill skatta standardavvikelsen σ .

$$\sigma_{obs}^* = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Då fås ett konfidensintervall med konfidensgraden $1 - \alpha$ enligt

Tvåsidigt

$$I_\sigma = \left(\sqrt{\frac{f}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(f)}} \cdot s, \sqrt{\frac{f}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(f)}} \cdot s \right)$$

Ensidigt

Övre konfidensintervall

$$-\infty < I_\sigma \leq \sqrt{\frac{f}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(f)}} \cdot s$$

Undre konfidensintervall

$$\sqrt{\frac{f}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(f)}} \cdot s \leq I_\sigma < \infty$$

Där f =frihetsgrad och fås av $f = n - 1$

Värdet för $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(f)$ och $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(f)$ fås ur tabell.

Vi har tagit fram konfidensintervall I_σ som med $100(1 - \alpha)\%$ säkerhet innehåller σ .

Anmärkning. I ena änden av intervallet skrivs $\frac{\alpha}{2}$ och i andra $1 - \frac{\alpha}{2}$. Till skillnad från t -fördelningen och normalfördelningen är χ^2 -fördelningen inte symmetrisk. Vi kan därför *inte* skriva $\pm \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$.

Approximativa-metoden

När vi inte har en normalfördelning.

Alla tidigare nämnda fall bygger att vi har en normalfördelning. Men hur gör vi när vi inte har en sådan? Svaret är att vi måste normalapproximera.

Vi har den okända parametern θ som vi punkskattar med θ^* . Denna skattning är approximativt normalfördelad enligt $\theta^* \in N(\mu, D)$. Då gäller

$$I_\theta = \theta_{obs}^* \pm D_{obs}^* \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Där D_{obs}^* är en lämplig punktskattning av standardavvikelsen D .

Vi har tagit fram ett tvåsidigt konfidensintervall I_θ som med $100(1 - \alpha)\%$ säkerhet innehåller θ .

Vill vi istället ta fram ett ensidigt intervall ändrar vi från $\frac{\alpha}{2}$ till α , intervallet blir då:

Övre konfidensintervall

$$-\infty < I_\theta \leq \theta_{obs}^* + D_{obs}^* \cdot \lambda_\alpha$$

Undre konfidensintervall

$$\theta_{obs}^* - D_{obs}^* \cdot \lambda_\alpha < I_\theta \leq \infty$$

Även de ensidiga konfidensintervallen innehåller θ_{obs}^* med en säkerhet på $100(1 - \alpha)\%$.

21. Konfidensintervall (två stickprov)

Definition: Vi har två slumpmässiga stickprov x_1, \dots, x_n från $X \in (\mu_1, \sigma_1)$ och y_1, \dots, y_n från $Y \in (\mu_2, \sigma_2)$. Vi vill nu intervallskatta differensen mellan väntevärdena μ_1 och μ_2 . Formeln för detta ser olika ut beroende på om σ_1 och σ_2 är kända eller inte.

Om σ_1 och σ_2 är kända gäller

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm D \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \quad D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$I_{\mu_1-\mu_2}$ är ett tvåsidigt konfidensintervall som med sannolikheten $1 - \alpha$ innehåller $\mu_1 - \mu_2$.

Om σ_1 och σ_2 är okända men $\sigma_1 = \sigma_2$ gäller

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm D_{obs}^* \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(f) \quad D_{obs}^* = s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$f = (n_1 - 1) + (n_2 - 2) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}$$

$I_{\mu_1-\mu_2}$ är ett tvåsidigt konfidensintervall som med sannolikheten $1 - \alpha$ innehåller $\mu_1 - \mu_2$.

Två stickprov eller stickprov i par?

Stickprov i par fås då man för varje individ har två tillhörande mätvärden. Man vill undersöka om det finns en systematisk skillnad mellan dessa två värden.

Två stickprov fås då vi gör två oberoende stickprov bland olika populationer och vill jämföra skillnaden mellan dessa.

22. Konfidensintervall (stickprov i par)

Definition:

Stickprov i par fås då vi har två olika stickprov där mätvärdena hör ihop parvis.

Vi har gjort två separata mätningar på samma population och kommit fram till stickproven x_1, \dots, x_n från $X \in N(\mu_x, \sigma_x)$ och y_1, \dots, y_n från $Y \in N(\mu_y, \sigma_y)$.

Mätvärdena är parvisa enligt (x_k, y_k) , och paren är oberoende av varandra.

Man vill nu undersöka om det finns någon systematisk skillnad mellan μ_x och μ_y . Vi introducerar variabeln z som representerar skillnaden mellan x och y .

$$z_1 = y_1 - x_1, \dots, z_n = y_n - x_n$$

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$$

Vi vill nu intervallskatta parametern μ_z . μ_z anger den systematiska skillnaden mellan μ_x och μ_y och skriv ibland Δ .

$$I_{\mu_z} = \bar{z} \pm D_{obs}^* \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(f)$$

$$D_{obs}^* = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad f = n - 1$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

I_{μ_z} är ett tvåsidigt konfidensintervall som med sannolikheten $1 - \alpha$ innehåller μ_z .

Två stickprov eller stickprov i par?

Stickprov i par fås då man för varje individ har två tillhörande mätvärden. Man vill undersöka om det finns en systematisk skillnad mellan dessa två värden.

Två stickprov fås då vi gör två oberoende stickprov bland olika populationer och vill jämföra skillnaden mellan dessa stickprov.

23. Minsta-kvadrat-metoden (MK-metoden)

Definition: Låt x_1, x_2, \dots, x_n vara utfall av de s.v. X_1, X_2, \dots, X_n .

Fördelningen för de s.v. beror av en okänd parameter θ som kan anta alla värden i sitt utfallsrum Ω_θ .

Antag att väntevärdet μ är känt. MK-metoden går ut på att ta differensen mellan det uppmätta värdet x_i och väntevärdet, och sedan kvadrera denna differens. Detta görs för alla mätvärden och summeras:

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n [x_i - \mu_i(\theta)]^2$$

Vi vill nu finna den skattning av θ som gör vår mätdata så trolig som möjligt. Med andra ord vill vi hitta det värde θ_{obs}^* som gör att $Q(\theta)$ antar minsta möjliga värde. (Alltså tvärt om jämfört med ML-skattning där vi söker största värde.)

θ_{obs}^* betecknar vad som kallas MK-skattningen av θ .

Anmärkning: ML-skattningen ger ofta en bättre skattning än MK-skattningen, men MK-skattningen är oftast enklare att räkna ut.

Exempel: Varje morgon på väg till skolan lyssnar du på musik ur en spellista. Problemet är att du tröttnat på de flesta låtar i listan. Istället för att ta bort dem ur listan så skippar du förbi låt efter låt tills du hittat någon du gillar. Det totala antalet låtar du måste skippa förbi innan du hittar en duglig ges av fördelningen

$$P_X(k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}$$

där $0 < \theta < 1$.

Som den stora statistikfantast du är bestämmer du dig för att punktskatta parametern θ : Under fyra dagars tid räknar du hur många låtar du skippar förbi och kommer fram till följande: måndag: 10 låtar, tisdag: 7 låtar, onsdag: 14 låtar och torsdag: 13 låtar.

Punktskatta θ med hjälp av MK-metoden.

Lösning: MK-metoden innebär att vi ska minimera

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n [x_i - \mu_i(\theta)]^2$$

där $n = 4$ (dagar).

Vi behöver alltså först beräkna väntevärdet. Det framgår från både texten och formeln för $P_X(k)$ att vi har en första gången-fördelning.

Väntevärdet ges alltså av

$$E(X) = \frac{1}{\theta}$$

X antar följande värden: $x_1 = 10$, $x_2 = 7$, $x_3 = 14$, $x_4 = 13$. Då gäller

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= \sum_{i=1}^4 \left(x_i - \frac{1}{\theta} \right)^2 \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{\theta} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{\theta} \right)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{\theta} \right)^2 + \left(x_4 - \frac{1}{\theta} \right)^2 \\ &= \left(10 - \frac{1}{\theta} \right)^2 + \left(7 - \frac{1}{\theta} \right)^2 + \left(14 - \frac{1}{\theta} \right)^2 + \left(13 - \frac{1}{\theta} \right)^2 \\ &= 514 - \frac{88}{\theta} + \frac{4}{\theta^2} \end{aligned}$$

Det θ som minimerar Q fås med hjälp derivatametoden från envariabelanalys:

$$Q'(\theta) = \frac{88}{\theta^2} - \frac{8}{\theta^3} = 0 \Rightarrow \frac{88\theta - 8}{\theta^3} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{8}{88} = \frac{1}{11}$$

Svar: $\theta_{obs}^* = 1/11$

24. Maximum-likelihood-metoden (ML-metoden)

Definition: Låt x_1, x_2, \dots, x_n vara utfall av de s.v. X_1, X_2, \dots, X_n .

Fördelningen för de s.v. beror av en okänd parameter θ som kan anta alla värden i sitt utfallsrum Ω_θ .

Vi bildar en funktion så kallad likelihood-funktionen enligt

$$\text{diskret s.v.} \quad L(\theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i; \theta)$$

$$\text{kontinuerlig s.v.} \quad L(\theta) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Vi vill nu finna den skattning av θ som gör vår mätdata så trolig som möjligt. Med andra ord vill vi hitta det värde θ_{obs}^* som gör att $L(\theta)$ antar största möjliga värde.

θ_{obs}^* är vad som kallas ML-skattningen av θ .

Populärt knep: Då det ibland är väldigt svårt att maximera $L(\theta)$ är ett populärt knep att istället maximera $\ln L(\theta)$. Eftersom logaritmen är en strängt växande funktion så kommer $L(\theta)$ och $\ln L(\theta)$ att anta sina största värden i samma punkt.

Maximeringen sker genom att sätta derivatan av funktionen till 0 (som i envariabelanalys). Då $L(\theta)$ ofta är en produkt, ger logaritmeringen en summa, vilken ofta är lättare att derivera.

Exempel: Varje morgon på väg till skolan lyssnar du på musik ur en spellista. Problemet är att du tröttnat på de flesta låtar i listan. Istället för att ta bort dem ur listan så skippar du förbi låt efter låt tills du hittat någon du gillar. Det totala antalet låtar du måste skippa förbi innan du hittar en duglig ges av fördelningen

$$P_X(k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}$$

där $0 < \theta < 1$.

Som den stora statistikfantast du är bestämmer du dig för att punktskatta parametern θ . Under fyra dagars tid räknar du hur många låtar du skippar förbi och kommer fram till följande: måndag: 10 låtar, tisdag: 7 låtar, onsdag: 14 låtar och torsdag: 13 låtar.

Punktskatta θ med hjälp av ML-metoden.

Lösning: Likelihood-funktionen för detta diskreta fall blir

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n; \theta) \\ &= \theta^{x_1-1} \cdot \theta^{x_2-1} \cdot \theta^{x_3-1} \cdot \theta^{x_4-1} \\ &= \theta^4 (1-\theta)^{\sum_{i=1}^4 (x_i-1)} \end{aligned}$$

där $x_1 = 10$, $x_2 = 7$, $x_3 = 14$ och $x_4 = 13$.

Vi tar logaritmen av $L(\theta)$ för att förenkla deriveringens:

$$\ln(L(\theta)) = \ln\left(\theta^4 (1-\theta)^{\sum_{i=1}^4 (x_i-1)}\right) = 4 \ln(\theta) + \sum_{i=1}^4 (x_i - 1) \ln(1-\theta)$$

Vi deriverar vårt nya uttryck:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \ln(L(\theta)) &= \frac{4}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - 1)}{(1-\theta)} \frac{d}{d\theta} (1-\theta) \\ &= \frac{4}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - 1)}{(1-\theta)} \\ &= \frac{4}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^4 x_i - 4}{(1-\theta)} \\ &= \frac{4}{\theta} + \frac{4}{1-\theta} - \frac{1}{(1-\theta)} \sum_{i=1}^4 x_i \end{aligned}$$

där summan är

$$\sum_{i=1}^4 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 + 7 + 14 + 13 = 44$$

Vi sätter derivatan till 0 och löser ut θ för att få fram vårt maximum:

$$\frac{4}{\theta} + \frac{4}{1-\theta} - \frac{44}{(1-\theta)} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \theta = \frac{1}{11}$$

Svar: $\theta_{obs}^* = 1/11$

25. Hypotesprövning

Definition: Hypotesprövning används för att kunna göra uttalanden om en parameter på en viss signifikansnivå. Hypotesprövning bygger på att vi först konstruerar en noll-hypotes som vi vill motbevisa

$$H_0: \theta = \theta_0$$

Där θ_0 är en konstant och vårt påstådda "noll-värde". Vi konstruerar sedan en alternativ hypotes för det vi vill påvisa

$$H_1: \theta \neq \theta_0 \text{ för tvåsidigt}$$

$$H_1: \theta > \theta_0 \text{ eller } H_1: \theta < \theta_0 \text{ för ensidigt.}$$

Slutligen testar vi om vi kan förkasta H_0 på given signifikansnivå α .

Hur man förkastar H_0

Det finns två olika sätt att förkasta sin nollhypotes. Antingen genom intervallmetoden eller p -metoden. Hur formeln ser ut beror på om σ är känd eller inte.

Om σ är känd

Antag att vi på signifikansnivån α vill testa hypotesen

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Vi börjar med att anta att H_0 är sann. Vi drar ett stickprov X_1, \dots, X_n från $N(\mu, \sigma)$. Vi tar fram statistikan Z .

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Vi beräknar därefter en skattning Z_{obs}^* av Z .

Intervallmetoden (för känd σ)

Intervallmetoden bygger på att vi tar fram ett interval för given signifikansnivå. Är H_0 sann så är Z normalfördelad. Hamnar Z_{obs}^* utanför detta interval kan vi förkasta H_0 .

Tvåsidigt test

För tvåsidigt test tar vi fram värdena för $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$ och $-\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$.

Vi förkastar H_0 om $Z_{obs}^* < -\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$ eller om $Z_{obs}^* > \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$

Ensidigt

$H_1: \mu < \mu_0$

Vi förkastar H_0 om $Z_{obs}^* < -\lambda_\alpha$

$H_1: \mu > \mu_0$

Vi förkastar H_0 om $Z_{obs}^* > \lambda_\alpha$

p-metoden (för känd σ)

Istället för att ta fram ett interval för vår statistik kan vi använda p -värdet.
 p -värdet är sannolikheten att få vår observation Z_{obs}^* eller ett extremare
värde *givet* att H_0 är sann.

Tvåsidigt test

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$$p = 2 \cdot P(Z \geq |Z_{obs}^*|)$$

Ensidigt text

$H_1: \mu < \mu_0$

$$p = P(Z \leq -Z_{obs}^*)$$

$H_1: \mu > \mu_0$

$$p = P(Z \geq Z_{obs}^*)$$

Om $p \leq \alpha$ förkastar vi H_0 .

Om σ är okänd

Antag att vi på signifikansnivån α vill testa hypotesen

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Vi börjar med att anta att H_0 är sann. Vi tar fram statistikan t ,

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (x_l - \bar{x})^2}$$

Vi beräknar därefter en skattning t_{obs}^* av t .

Intervallmetoden (för okänd σ)

Intervallmetoden bygger på att vi tar fram ett intervall för given signifikansnivå. Är H_0 sann så är Z normalfördelad. Hamnar Z_{obs}^* utanför detta intervall kan vi förkasta H_0 .

Tvåsidigt test

För tvåsidigt test tar vi fram värdena för $t_{\frac{\alpha}{2}}$ och $-t_{\frac{\alpha}{2}}$.

Vi förkastar H_0 om $t_{obs}^* < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ eller om $t_{obs}^* > t_{\frac{\alpha}{2}}$

Ensidigt

$H_1: \mu < \mu_0$

Vi förkastar H_0 om $t_{obs}^* < -\lambda_\alpha$

$H_1: \mu > \mu_0$

Vi förkastar H_0 om $t_{obs}^* > \lambda_\alpha$

p-metoden (för okänd σ)

Istället för att ta fram ett intervall för vår statistika kan vi använda p -värdet. p -värdet är sannolikheten att få vår observation t_{obs}^* eller ett extremare värde givet att H_0 är sann.

Tvåsidigt test

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$$p = 2 \cdot P(t \geq |t_{obs}^*|)$$

Ensidigt test

$H_1: \mu < \mu_0$

$$p = P(t \leq -t_{obs}^*)$$

$H_1: \mu > \mu_0$

$$p = P(t \geq t_{obs}^*)$$

Om $p \leq \alpha$ förkastar vi H_0 .

26. Styrka

Definition: Vi hypotesprövning kan två olika typer av fel uppkomma,

	H_0 är sann	H_0 är falsk
H_0 förkastas inte	Korrekt	Typ II-fel
H_0 förkastas	Typ I-fel	Korrekt

α : sannolikheten att göra Typ I-fel.

β : sannolikheten att göra Typ II-fel.

Sannolikheten att förkasta en falsk nollhypotes är alltså $1 - \beta$ och är vad som kallas testets styrka.

Testets styrkefunktion ges av

$$h(\theta) = P(H_0 \text{ förkastas} \mid \text{parametervärdet är } \theta).$$

27. χ^2 - test

Test av given fördelning

Definition: Test av given fördelning används när vi vill testa om ett stickprov kommer från en påstådd fördelning.

Vi utför n stycken försök där var och ett kan utfalla på r olika sätt, A_1, A_2, \dots, A_r med sannolikheterna $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_r)$. Vi vill testa nollhypotesen som säger att stickprovet kommer från given fördelning.

$$H_0: P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_r) = p_r$$

$$\sum_{j=1}^r P(A_j) = 1 \quad \sum_{j=1}^r p_j = 1 \quad \sum_{j=1}^r x_j = n$$

Där x_1, x_2, \dots, x_r är de absoluta frekvenserna för de olika utfallen i vårat försök.

Mothypotesen är att nollhypotesen inte stämmer, alltså att man inte kan säga att stickprovet kommer från den givna fördelningen.

Ett krav för att kunna använda detta test är att följande är uppfyllt för alla j $np_i \geq 5$

Vi beräknar vår testvariabel Q

$$Q = \sum_{i=1}^r \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i}$$

Värdet på χ^2 fås ur tabell

$$\chi_\alpha^2(r - 1)$$

H_0 förkastas om $Q > \chi_\alpha^2(r - 1)$

Homogenitetstest

Definition: Homogenitetstest används när man utfört s stycken försöksserier och vill undersöka om de kan anses homogena.

Serie	Antal observationer av					Antal försök
	A_1	A_2	A_3	...	A_r	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1r}	n_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2r}	n_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
s	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	...	x_{sr}	n_s
Kolonnsumma	m_1	m_2	m_3	...	m_r	N

Krav för Homogenitetstest är att

$$\frac{n_i m_j}{N} \geq 5 \text{ för alla } i = 1, 2, \dots, s \text{ och } j = 1, 2, \dots, r.$$

H_0 säger att försöksserierna är homogena.

Vi beräknar vår testvariabel Q

$$Q = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \frac{\left(x_{ij} - \frac{n_i m_j}{N} \right)^2}{\frac{n_i m_j}{N}}$$

Värdet på χ^2 fås ur tabell

$$\chi_{\alpha}^2((r-1)(s-1))$$

H_0 förkastas om $Q > \chi_{\alpha}^2((r-1)(s-1))$

Oberoendetest

Definition: Det tredje χ^2 -testen används när man vill undersöka om värdemängderna från två olika s.v. kan anses vara oberoende. Säg att den s.v. X kan utfalla på r olika sätt, A_1, A_2, \dots, A_r och den s.v. Y kan utfalla på s olika sätt, B_1, B_2, \dots, B_s .

Antal observationer	A_1	A_2	A_3	...	A_r	Radsumma
B_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1r}	n_1
B_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2r}	n_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
B_s	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	...	x_{sr}	n_s
Kolonsumma	m_1	m_2	m_3	...	m_r	N

H_0 säger att de s.v. är oberoende.

Vi beräknar vår testvariabel Q

$$Q = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \frac{\left(x_{ij} - \frac{n_i m_j}{N}\right)^2}{\frac{n_i m_j}{N}}$$

Värdet på χ^2 fås ur tabell

$$\chi_{\alpha}^2((r-1)(s-1))$$

H_0 förkastas om $Q > \chi_{\alpha}^2((r-1)(s-1))$