F6 VÄNTEVÄRDEN (FL. DIM.), KOVARIANS, LINJÄRITET M.M.

Kap. 5.4-5.6

Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

- Väntevärden av funktion av flerdimensionell s.v.
- Kovarians och korrelation
- Linjäritet och bilinjäritet hos väntevärde resp. kovarians.
- Stora talens lag

REPETITION

Vad man får i genomsnitt om man gör oändligt många försök

Tyngdpunkten

★ Väntevärdet för X = $E(X) = \mu$

- Def. (diskreta fallet): $E(X) = \sum_{\substack{\text{alla} \\ \text{utfall} \\ x}} x \cdot p_X(x)$

sannolikhetsfunktionen

- Def. (kontinuerliga fallet): $= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$

motsv. till sannolikhets-funkt.: täthetsfunktionen (mult. m. dx)

$E[g(x)]$

- Def. (diskreta fallet): $E[g(x)] = \sum_{\substack{\text{alla} \\ \text{utfall} \\ x}} g(x) \cdot p_X(x)$
- Def. (kontinuerliga fallet): $= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx$

★ Variansen för X = $V(X) = \sigma^2$

- Def.: $V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - E^2[X]$

$V(X) > 0$

★ Standardavvikelsen för X = $D(X)$

- Def.: $D(X) = \sqrt{V(X)}$

$D(X) > 0$

Varför två spridningsmått ($V(X)$ och $D(X)$)?

- För $V(X)$: finns en massa enkla och praktiska räkneregler
- Ofta $D(X)$ man vill ha, men då börjar man alltid med att räkna ut variansen m.h.a. räkneregler $\rightarrow \sqrt{}$

TVÅ DIMENSIONER

$$E[g(X,Y)] = \sum_{\substack{\text{alla} \\ \text{utfall} \\ x,y}} g(x,y) \cdot p_{X,Y}(x,y) \qquad \text{(diskret)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(kont.)}$$

SAMBANDET MELLAN X OCH Y

Kan beskrivas med kovariansen och korrelationskoefficienten (se F.S. § 2)

Kovariansen mellan X och Y = $C[X,Y]$

Def.: $C[X,Y] = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = \ldots$

$\ldots = E[XY] - E(X) \cdot E(Y)$

$$C[X,Y] = \sum_{\substack{\text{alla} \\ \text{utfall} \\ x,y}} (x-\mu_x)(y-\mu_y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Speciellt

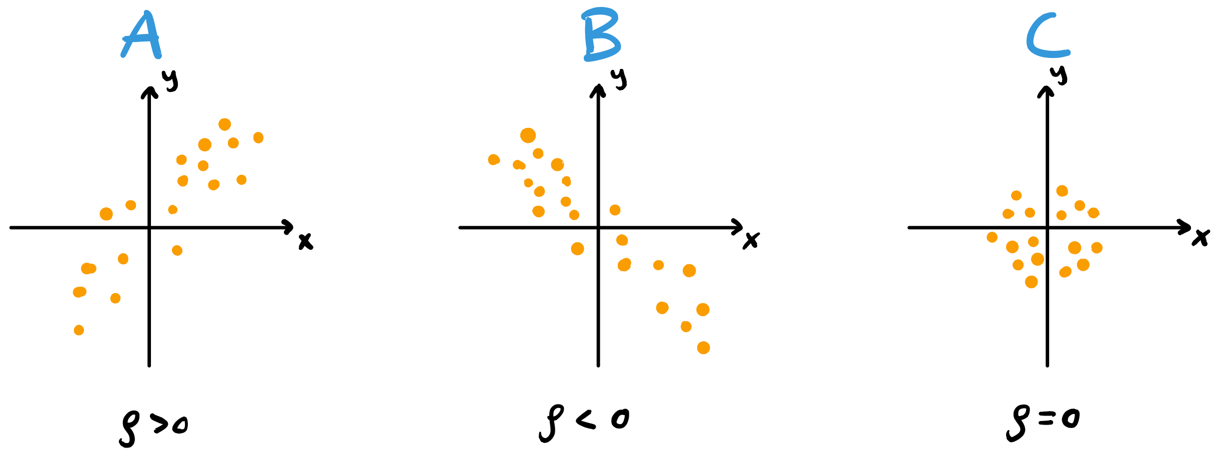
$$C[X,X] = \{\text{se F.S. § 2}\} = E[X \cdot X] - E(X) \cdot E(X) =$$

$$= E(X^2) - E^2(X) = V(X)$$

Korrelationskoefficienten mellan X och Y = $\rho(X,Y)$

Def.: $\rho(X,Y) = \dfrac{C[X,Y]}{D(X) \cdot D(Y)}$

$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$



A. Starkare samband $\Rightarrow$ $\rho \to 1$

B. ——— " ——— $\Rightarrow$ $\rho \to -1$

C. X och Y okorrelerade

Slumpade utfall

Speciellt

$$\rho(X, X) = \frac{C[X \cdot X]}{D(X) \cdot D(X)} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

Om X och Y är oberoende gäller att:

$$E[X \cdot Y] = \sum_{\substack{\text{alla} \\ x}} \sum_{\substack{\text{alla} \\ y}} x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x, y) = \{\text{ober.}\} = \sum_{\substack{\text{alla} \\ x}} \sum_{\substack{\text{alla} \\ y}} x \cdot y \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y) =$$

$$= \sum_{\substack{\text{alla} \\ x}} x \cdot p_X(x) \cdot \sum_{\substack{\text{alla} \\ y}} y \cdot p_Y(y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\Rightarrow C[X, Y] = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0$$

$$\Rightarrow \rho(X, Y) = 0 \Rightarrow \text{okorrelerade}$$

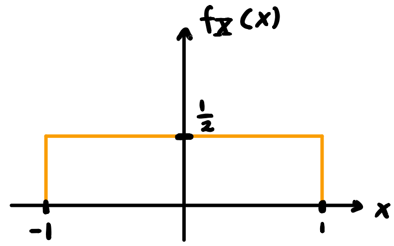
Om X och Y ober. $\Rightarrow$ X och Y okorrelerade

OBS! Omvändningen behöver ej vara sann

Ex 5.13

Givet: $X \in U[-1,1]$

$Y = X^2$



$$C[X,Y] = C[X,X^2] = E(X^3) - E(X)\cdot E[X^2]$$

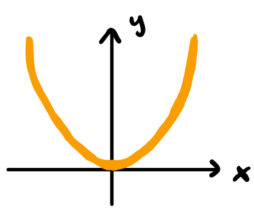
$$E[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot f_X(x)\,dx = \quad f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-(-1)} & \text{för } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\Rightarrow C[X,Y] = C[X,X^2] = 0 - 0\cdot E(X^2) = 0$$

D.v.s. X och Y är okorrelerade men ej oberoende



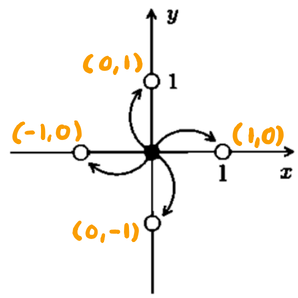
"Lika vanligt för små x att ha stora y som det är för stora x att ha stora y"

$\Leftrightarrow$

Om y är stort är det lika vanligt med litet som stort x.

Övningsuppgift 5.18

5.18 En atom rör sig slumpmässigt i ett plant gitter. Förloppet kan beskrivas som att atomen rör sig över heltalspunkterna i planet. I varje steg hoppar den med lika stor sannolikhet till någon av de fyra närbelägna punkterna, se figur.



Atomen startar i origo. Låt (X, Y) beteckna den (x, y)-koordinat atomen kommer att få efter ett hopp.
a) Beräkna $\rho(X, Y)$.
b) Undersök om X och Y är oberoende stokastiska variabler.

$$p_{X,Y}(1,0) = p_{X,Y}(0,1) = p_{X,Y}(-1,0) = p_{X,Y}(0,-1) = \frac{1}{4}$$

a) <u>Sökt</u> $\rho(X,Y) = \dfrac{C[X,Y]}{D(X)\cdot D(Y)}$

$$C[X,Y] = E[X\cdot Y] - E(X)\cdot E(Y)$$

$$E[X\cdot Y] = \sum_{\substack{\text{alla}\\x,y}} x\cdot y\cdot p_{X,Y}(x,y) =$$

$$= 1\cdot 0\cdot p_{X,Y}(1,0) + 0\cdot 1\cdot p_{X,Y}(0,1) + (-1)\cdot 0\cdot p_{X,Y}(-1,0) + 0\cdot(-1)\cdot p_{X,Y}(0,-1) =$$

$$= 1\cdot 0\cdot \frac{1}{4} + 0\cdot 1\cdot \frac{1}{4} + (-1)\cdot 0\cdot \frac{1}{4} + 0\cdot(-1)\cdot \frac{1}{4} = \underline{0}$$

$$E(X) = \sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x,y}} x\cdot p_{X,Y}(x,y) =$$

$$= 1\cdot p_{X,Y}(1,0) + 0\cdot p_{X,Y}(0,1) + (-1)\cdot p_{X,Y}(-1,0) + 0\cdot p_{X,Y}(0,-1) =$$

$$= 1\cdot \frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} - 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow C[X,Y] = 0 - 0\cdot E(Y) = \underline{0} \quad \Rightarrow \rho[X,Y] = \underline{\underline{0}} \quad X, Y \text{ okorr.}$$

b) Är X och Y oberoende?

X och Y ober. $\Leftrightarrow$ $\underbrace{P(X = x \cap Y = y)}_{p_{X,Y}(x,y)} = \underbrace{P(X = x)}_{p_X(x)} \cdot \underbrace{P(Y = y)}_{p_Y(y)} \quad \forall X, Y$

$x = 1,\ y = 0$

$p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{4}$

$x = 1$

$p_X(1) = p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{4}$

$y = 0$

$p_Y(0) = p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(-1,0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad p_X(1) \cdot p_Y(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{4}$

D.v.s. X och Y är ej ober.

Man kan se detta: T.ex. om vi vet att $x=1$ så kan inte y vara vad som helst, utan då har vi ju låst y till att vara 0

$\Leftrightarrow$

"i högsta grad beroende"

RÄKNEREGLER FÖR KOVARIANSER

Vi minns att $V(aX+b) = V(aX)$

Motsvarigheten här är att $C[X, Y+b] = C[X, Y]$

Allmänt $C[aX+bY,\ cZ+dW] =$

$$= a \cdot c \cdot C[X,Z] + a \cdot d \cdot C[X,W] + b \cdot c \cdot C[Y,Z] + b \cdot d \cdot C[Y,W]$$

Speciellt $\underbrace{V[X+Y] = C[X+Y,\ X+Y]}_{C[X,X] = V[X]} =$

$$= C[X,X] + C[X,Y] + C[Y,X] + C[Y,Y] =$$

$$= V(X) + V(Y) + 2 \cdot \underbrace{C[X,Y]}_{0 \text{ om ober.}}$$

SAMMANFATTNING AV RÄKNEREGLER

- $E[aX + bY + c] = aE(X) + bE(Y) + c$
- $V[aX+b] = a^2 V(X)$
- $V[X+Y] = V(X) + V(Y) + 2C[X,Y]$

  X, Y ober. $\Rightarrow V[X+Y] = V(X) + V(Y)$

MEDELVÄRDE

Anta att $X_1, X_2, \dots, X_n$ är oberoende och har $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

X_{medel} av n st X

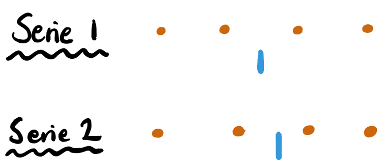
I genomsnitt blir medelvärdena $= \mu$

- $E(\bar{X}_n) = E\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n} E[X_1 + \dots + X_n] = \frac{1}{n} n\, E(X_i) = \mu$
- $V[\bar{X}_n] = V\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2} V[X_1 + \dots + X_n] = \{\text{ober.}\} = \frac{1}{n^2} n\, V(X_i) =$

$$= \frac{V(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

- $D(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{n}$

Varför är det intressant?
Spridningen mellan medelvärdena i olika mätserier är mindre än spridningen mellan mätvärdena i samma serie



Observationer
Medelvärden

Medelvärdena kommer ligga närmre varandra än observationerna

STORA TALENS LAG

För alla $\varepsilon > 0$ gäller att:

$$P(\mu - \varepsilon < \bar{X}_n < \mu + \varepsilon) \to 1 \quad \text{då } n \to \infty$$

$\Leftrightarrow$

"Gör jag tillräckligt många mätningar så kan jag komma hur nära det rätta väntevärdet (μ) som helst i genomsnitt"

$\Leftrightarrow$

$$D(\bar{X}_n) \to 0$$