Sannolikhetsstatistik - Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar

Sannolikhetsteori och statistik I (Kungliga Tekniska Högskolan)

Introduktion:
Utfall = resultat av ett slumpmässigt försök
Händelse = samling av utfall

Definition 2.4: Om antalet utfall är ändligt eller uppräkneligt oändligt, så är Ω ett **diskret** utfallsrum, och om antalet är ändligt, så är Ω dessutom ett **ändligt** utfallsrum. Om antalet är oändligt eller uppäkneligt oändligt, så är Ω ett **kontinuerligt** utfallsrum.

Kolmogorovs axiomsystem:
$0 \leq P(A) \leq 1$
$P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_1) + \dots$

Definition Komplementära händelse till A = A*

Den betingade sannolikheten för B givet att A inträffat: ***P(B I A) = P(AnB)/P(A)***

2.3 Sannolikheter i allmänna utfallsrum

Sats 2.1 Komplementsatsen: P(A*) = 1 - P(A)
Bevis: A och A* är oförenliga och P(A) + P(A*) = P(A U A*) = P(Ω) = 1

Sats 2.2 Additionssatsen: P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A n B)
Bevis: A U B = A u (A* n B) ; B = (A n B) U (A* n)
P(A U B) = P(A) + P(A* n B) ; P(B) = P(A U B) + P(A) + P(A* n B)

Sats 2.3: Booles olikhet: P(A U B) $\leq$ P(A) + P(B)
Sanolikhetsrum: utgörs av utfallsrummet och händelserna samt sannolikheterna P(.)

2.4 Sannolikheter i diskreta fall = ändligt/uppräkneligt oändligt antal

Likformigt sannolikhetsmått: Om $P(w_i)$ = 1/m, för alla i = 1,...,m

Sannolikheten att B inträffar efter att A inträffats
P(B I A) = P(A n B) / P(A) ger sannolikheten att ett element tillhör både B och A ges av
P(A n B) = P(A)* P(B I A)
Alltså: P(A n B) = p(A) * sannolikheten att B inträffar efter att A inträffat

Exempel: Sannolikheten att man tar ut två felaktiga bland 50 enheter där 5 av dem är felaktiga?

Låt A vara utfallet att den första är felaktigt och B att den andra är felaktigt. Sannolikheten att B inträffar efter A inträffat är 4/49. Alltså: P(A I B) = P(A)* P(B I A) = 5/50 * 4/49 = 2/245
Sannolikheten att två första är felaktigt och den tredje rätt är: P(AIBIC) = 5/50 * 4/49 * 45/48

2.5 Likformigt sannolikhetsmått och kombinatorik

Multiplikationsprincip: om åtgärd 1 och 2 kan utföras på a_1 resp. a_2 sätt, så finns det a_1*a_2 sätt för att utföra båda, osv.

	Med Återläggning	Utan Återläggning
Med Ordningshänsyn	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Utan Ordningshänsyn	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Sats 2.7: Dragning utan återläggning av k element ur n kan ske på **(n;k) = n! / (k!(n-k)!** sätt.

Binomialteoremet $(x+y)^n$ = (n;k) $x^k y^{k-1}$ Bevis: *antal sätt att plocka k* stycken **x är (n;k)**

Multiplikationsprincip: Antalet olika utfall = A*B

2.6 Betingad sannolikhet

<u>**Den betingade sannolikheten**</u> för B givet att A inträffat: ***P(B I A) = P(AnB)/P(A)***
Följdsats: *P(B* I A) = 1 - P(B I A) då P(B I A) + P(B* I A) = P(Ω) = 1*

Alltså P(AnB) = P(A)*P(B I A)

<u>**Sats 2.9 Lagen om total sannolikhet**</u>
Om händelserna $H_1,...,H_n$ är parvis oförenliga och $H_1 U...H_n$ = Ω, dvs att ett försök inträffar precis en av dem gäller för varje händelse att sannolikhet för A är P(A) = $\sum_{i=1}^{n}$ P(H_i)P(A I H_i)

<u>**Sats 2.10 Bayes sats**</u> P(H_iIA) = P(A n H_i)/ P(A) = *P(H)*P(A I H_i) / $\sum_{i=1}^{n}$ P(H_i)P(A I H_i)*

2.7 Oberoende händelse
Om P(A n B) = P(A)P(B) så är A och B oberoende händelser.

Sats 2.11: Om händelserna är **oberoende** och P(A_i) = p_i, så är sannolikheten att minst en av dem inträffar lika med *1 - sannolikheten att inget av dem inträffar.*
1 - (1-p_i)*(1-p_2)(1-p_3)*...*(1-p_n)

Bevis: P(A*) = 1 - P(A) ty P(A*U A) = P(A) + P(A*) = 1 Alltså: P(A*) = 1 - P(A*)
Vi har vidare satsen att om A_1,A_2 är obeoende då har vi P(A_1 u A_2) = P(A_1)P(A_2) o.s.v.

Följdsats : sannolikhet att ett inträffar är **1 - $(1\text{-}p)^n$** om det för varje händelse så är sannolikheten lika med p

3.1 Endimensionella Stokastiska Variabler = slumpvariabel

$$P(X \in \{0, 1, 2, \dots\}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1.$$

$p(k) \geq 0$ för alla k

Flerdimensionell = när ett försök ger upphov till flera tal

Stokastisk variabel (s.v.)= en reelvärd funktion definierad på ett utfallsrum
Diskret s.v. = kan anta ändligt/uppräkneligt oändligt antal olika värde.

Sannolikhetsfunktionen för den s.v. X : **$p_x(x)$ = P(X = x)** , diskret
Täthetsfunktionen för den s.v. X: $f_x(x)$ = P(X=x), kontinuerlig
Fördelningsfunktion: $F_x(x)$ = P(X ≥ x), arean

Stokastiska variabler med sannolikhetsfunktioner $p_x(x)$

Tvåpunktsfördelad om	X antar endast två värde a och b
Bernoulli-fördelad om	X antar värdena 1 eller 0
Likformig fördelad om	m värde med sannolikhet $p_X(k)$ =1/m
X är första gången fördelad, X ∈ ffg(p) om - Antal ggr tills den första	$p_x(k) = (1-p)^{k-1}p$, där 0<p<1, k = 1,2,...
Geometriskt - X ∈ Ge(p) om	$p_x(k) = (1-p)^k p$, 0<p<1, k =0,**1**,2,...
Bionomialfördelning - Bin(n,p) = oberoende försök = Med återläggning, utan hänsyn till ordning.	**Definition 3.7** Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$ där n är ett positivt heltal och $0 < p < 1$ säges X vara *binomial-*
Hypergeometrisk - X ∈ Hyp(N,n,p) - utan återläggning - utan hänsyn till ordning	$p_X(k) = \binom{v}{k}\binom{s}{n-k} \Big/ \binom{v+s}{n}$ där k antar alla heltalsvärden sådana att $0 \leq k \leq v$, $0 \leq n-k \leq s$ säges X vara *hypergeometriskt fördelad.*
Poissonfördelning - X ∈ Po(u)	$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu > 0,$ säges X vara *Poisson-fördelad.*

3.5 Kontinuerlig stokastisk variabel

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad f(x) \geq 0 \text{ för alla } x \in \mathbb{R} \text{ och } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Täthetsfunktion $f_X(x)$ och kontinuerlig stokastisk variabel X

Definition 3.10 Om det finns en funktion $f_X(x)$ sådan att

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

för alla A, säges X vara en *kontinuerlig* s.v. Funktionen $f_X(x)$ kallas *täthetsfunktionen* för X.

Integralkalkylens huvudsats: $F_x'(x) = dF_x/dx = f_x(x)$

Integralkalkylens Medelvärdesatsen:

$$P(a < X < a + \Delta a) = \int_a^{a+\Delta a} f_X(t)\,dt \quad = \Delta a f_X(a + \theta\Delta a) \approx \Delta a f_X(a)$$

Likformigfördelad: om X har täthetsfunktionen

Den stokastiska variabeln X täthetsfunktionen:

Likformigt fördelad, $X \in U(a,b)$	$f_x(x) = 1/(b-a)$, $a < x < b$ annars 0
Exponential fördelad, $X \in$ Exp(a,b)	$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0, \end{cases}$ där $\lambda > 0$, säges X vara *exponentialfördelad.* *odbeteckning:* $X \in \text{Exp}(\lambda)$.
Normalfördelad, $X \in N(\mu, \sigma)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty,$ där μ och σ är givna tal ($\sigma > 0$), säges X vara *normalförde*
Weilbullfördelad - Livslängd - trötthet	$f_X(x) = \begin{cases} \lambda c(\lambda x)^{c-1} e^{-(\lambda x)^c} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0, \end{cases}$ där λ och c är positiva tal, säges X vara *Weibull-fördelad.*

Gammafördelad	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} \cdot x^{c-1}e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0, \end{cases}$ där $c > 0$ och $\lambda > 0$, säges X vara *gammafördelad.*

Gammafunktion

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1}e^{-x}\,dx \text{ där } c > 0.$$

Om c är heltal gäller $\Gamma(c) = (c-1)!$, som man finner genom upprepad partiell integration av integralen ovan.

Fördelningsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x)$, x är en reell variabel = Arean
Kontinuerlig ger integral
Diskret ger summa där $p_x(k) = F_x(k) - F_x(k-1)$ om k!= 0, annars $p_x(k) = F_X(0)$

Sats 3.2 För en fördelningsfunktion $F_X(x)$ gäller att

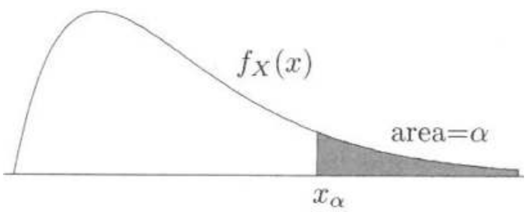
$$F_X(x) \to \begin{cases} 0 & \text{då } x \to -\infty, \\ 1 & \text{då } x \to +\infty \end{cases}$$

$F_X(x)$ är en icke-avtagande funktion av x

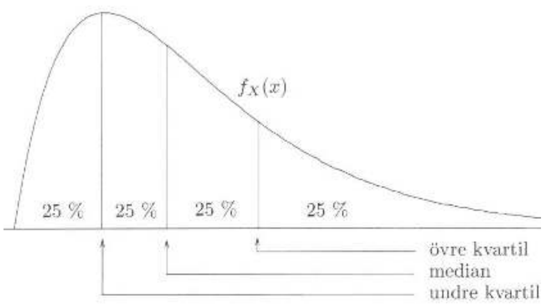
$F_X(x)$ är kontinuerlig till höger för varje x.

Sats 3.3 Om a < b så gäller: $P(a < x \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$

X_α , α - kvantilen för den stokastiska variabeln X är lösningen till $F_x(x) = 1 - \alpha$



Figur 3.15 *Kvantil.*



Flerdimensionella stokastiska variabler

Fördelningsfunktion för två-dimensionella stokastiska variabler (X,Y)
$F_{x,y}(x,y)=P(X \le x, Y \le y)$

(Simultana) sannolikhetsfunktionen -I I- : $p_{X,Y}(j,k) = P(X = j, Y = k)$

= > **$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{j\le x}\sum_{k\le y} p_{x,y}(j,k)$**

$p_X(j) = \sum_{0\le k} p_{x,y}(j,k)$

Multinormialfördelad Bin(n,p_j) : Låt x vara antal gånger A träffar vid n försök.
För två grupper som tävlar blir sannolikheten att den ena får $X_1 = k_1$
$X_2 = k_2$:

$p_{X1,.X2}(x_1 = k_1, x_2 = k_2) = n!/(k_1! * k!_2) * p_1^{k1} p_2^{k2}$ $n = k_1+k_2$

Exempel:

27% i oavgjort och 30% i bortaseger enligt matchstatistik. Låt X_1, X_2 och X_3 vara antalet hemmasegrar, oavgjorda respektive bortasegrar i en tipsomgång omfattande 13 matcher från denna serie. (X_1, X_2, X_3) är då multinomialfördelad med $n = 13$ och $p_1 = 0.43$, $p_2 = 0.27$ och $p_3 = 0.30$. Vi får

$$P(X_1 = 5, X_2 = 2, X_3 = 6) = \frac{13!}{5!\,2!\,6!} 0.43^5\, 0.27^2\, 0.30^6 = 0.0282.$$

Page

Kontinuerlig tvådimensionell s.v. X,Y

Täthetsfunktion: $P((X,Y) \subseteq A) = \iint_A F_{X,Y}(X,Y)\,dxdy$

$f_X(x) = \int_R f_{X,Y}(x,y)\,dy$
Marginella f;rdelningsfunktionen för X
$F_x(x) = \lim_{y\to\infty} f_{X,Y}(x,y)$

Definition 4.5 En tvådimensionell s.v. (X,Y) är likformigt fördelad på B, om för varje del A av området gäller: $P(X,Y) \subseteq A$ = areaA / areaB;

Definition 4.6 De s.v. X och Y kallas oberoende om
$P(x \subseteq C, Y \subseteq D) = P(X \subseteq C)P(Y \subseteq D)$

Sats 4.1 De s.v X och Y är oberoende om och endast om
$F_{x,Y}(x,y) = F_x(x)F_Y(y)$ för alla x och y eller

Sats 4.1 De s.v. X och Y är *oberoende* om och endast om

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y \tag{4.9}$$

eller

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(j,k) &= p_X(j)p_Y(k) \quad \text{för alla } j \text{ och } k \text{ (diskret s.v.)} \\ f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y \text{ (kontinuerlig s.v.).} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Fördelningsfunktion för största värde
$F_z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_x(z)F_Y(z)$
Om $Z = \max(X,Y)$ dvs $X \leq Z, Y \leq Z$

Fördelningsfunktion för Minsta värde: $Z = \min(Y,Z)$ ger : $Z \leq z$ om inte $X>z$ och $Y>z$!

$F_z(z) = P(Z \leq z) = 1- P(X > z \text{ och } Y>z) = 1- P(X > z)P(Y>z)\ 1 - (1 - F_x(z))(1-F_Y(z))$

Störst och minsta värde för fler än två
Om $X_1,...,X_n$ är n oberoene s.v. med **samma** fördelningsfunktion F(z). Så är fördelningsfunktionen för största värdet av $X_1,..,X_n$: $F_z(z) = (F(z))^n$; Och för minsta värdet: $F_z(z) =1 - (1- F(z))^n$

$F(z) = F_x(Z)$ är fördelningsfunktion.

Summan av stokastiska variabler

Faltningsformeln för oberoende diskreta s.v

$$p_Z(k) = P(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} p_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=0}^{k} p_{X,Y}(i,k-i). \tag{4.13}$$

Analogt blir

$$F_Z(z) = \sum_{i+j \leq z} p_{X,Y}(i,j).$$

Om variablerna är oberoende så är,

$$p_Z(k) = \sum_{i+j=k} p_X(i)p_Y(j) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i)p_Y(k-i)$$

Summa av kontinuerlig s.v.

$$F_Z(z) = P(X+Y \le z) = P((X,Y) \in A_z) = \iint_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Om X och Y är oberoende erhålls

$$F_Z(z) = \iint_{x+y\le z} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x)\,dx.$$

Vilket ger en täthetsfunktion(Faltningsformel för oberoende kontinuerliga s.v.):

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx.$$

Faltning av exponentiellfördelningar $f_x(x) = ke^{-kx}$ för $0 \le x$

Exempel 4.11 *Faltning av exponentialfördelningar*
De s.v. X och Y antas vara oberoende och $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Vi har alltså

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och analogt för Y.
Formel (4.15) ger, eftersom integranden är 0 om x eller $z - x$ är negativt,

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,dx = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z}\,dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z > 0. \quad (4.16)$$

Man kan generalisera ovanstående problem genom att lägga till flera s.v. med samma fördelning. Med induktion kan man då visa att summan $Z = X_1 + \cdots + X_n$ av n oberoende s.v. som alla är $\mathrm{Exp}(\lambda)$ har täthetsfunktionen

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z}, \quad z > 0,$$

dvs Z är gammafördelad med $c = n$ (jfr Definition 3.15 på sidan 64). □

4.8. Betingade fördelningar givet att Y = k

(X,Y) har en diskret fördelning given av $p_{X,Y}(j,k)$.

P(X = j I Y = k) = P(X=j, Y=k)/P(Y=k) eller
$p_{XIY=k}(j) = p_{X,Y}(j,k) / p_Y(k)$

Den betingade sannolikhetsfunktionen för X givet att Y =k definieras av
$p_{XIY=k}(j) = p_{X,Y}(j,k) / p_Y(k)$, där k är fix men j = 0,1,2…

Den betingade tätheten för X givet Y=y ges av $f_{XIY=y}(x) = f_{X,Y}(x,y) / f_Y(y)$, eller:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,y)\,dt}$$

$f_{X,Y}(x,y)$ är tätheten

5.1 Väntevärde

= ett lägesmått som är summan av utfall*sannolikheten och anger var massan är belägen i "genomsnitt"

Definition 5.1 *Väntevärdet* för den s.v. X definieras av

$$E(X) = \begin{cases} \sum_k k p_X(k) & \text{(diskret s.v.)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx & \text{(kontinuerlig s.v.).} \end{cases}$$

Sats 5.1 Om $Y = g(X)$ gäller att

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_k g(k) p_X(k) & \text{(diskret s.v.)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx & \text{(kontinuerlig s.v.).} \end{cases}$$

Sats 5.2 Om $Z = g(X, Y)$ gäller att

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_{j,k} g(j,k) p_{X,Y}(j,k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

Satser:

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$D(aX + b) = |a| * D(X)$
$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(X_1X_2...X_n) = E(X)E(X_1)...E(X_n)$ där X_1 ,..., X_n är **oberoende**
$E(a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b) = a_1E(X_1) + ... + a_nE(X_n) + b$
Alltså: om $X_1,..,X_n$ är oberoende och har samma väntevärde μ, så blir;
$E(X_1 + \dots + X_n) = n*\mu$

Om $X_1,..,X_n$ är oberoende och har samma standardavvikelse σ gäller även att
$V(X_1 + \dots + X_n) = n\sigma^2$ och
$D(X_1 + \dots + X_n) = sqrt(n\sigma^2) = \sigma\ sqrt(n)$

Den aritmetiska medelvärde blir då:
$X_{medel} = (X_1 + ... + X_n)/n$;
$E(X_{medel}) = \mu$
$V(\bar{X}) = \sigma^2/n$;
$D(X_{medel}) = \sigma/sqrt(n)$

Stora talens lag: Låt X_1,X_2 vara oberoende och lika fördelade s.v. md väntevärrde u och X_{medel} = sum(X_i/n) medelvärdet. Då gäller, för alla ε större än 0, att P(u-ε<$X_{n\text{-}medel}$<u+ε) => 1 när n går mot oändlighet.

Sats 5.13 **Markos olikhet:** För a>0 och Y ≥ 0 gäller P(Y≥ a) ≤ E(Y)/a

Bevis: E(Y) = int(0,Inf,y*f_Y(y)) = int(0,a,yf_Y(y)) + int(a,Inf,,yf_Y(y)) ≥ int(a,Inf,,yf_Y(y) ≥ a*int(a,Inf,f_Y(y) = aP(Y≥ a)

Sats 5.14 **Tjebysjons olikhet:** P(lX-ul ≥ k σ) ≤ 1/k^2

$V(a_1X_1+ \dots + a_nX_n + b) = a_1^2V(X_1) +...+ a_n^2V(X_n) + 2*a_1*...* a_2*C(X_1,X_2,..)$

bevis: $V(aX+b) = E((aX + b - (au +b))^2) = E(aX - au)^2 = a^2E(X-u) = a^2 V(X)$

V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X,Y)
$V(aX + bY + c) = a^{2}*V(X) + b^{2}*(Y) + 2*a*b*C(X,Y)$

Om X och Y är oberoende(icke korrelerade), dvs C(X,Y) = 0, så blir:
V(X+Y) = V(X) + V(Y)
$D(X+Y) = sqrt(D^2(X) + D^2(Y))$

Variansen : vänte värdet för $Y = (X - u)^2$ där u = E(X)
$V(X) = E[(X-u)^2]$

Om hela massan är koncentrerad i en enda punkt så blir V(X) = 0!!

Standardavvikelse: D(X) = sqrt(V(X))

Variationskooefficient: R(X) = D(X)/E(X)

Sats 5.6: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, där $E(X^2) = int(x^2*f(x), -inf, inf)$

$E(X^2) = E(X)^2 + V(X)$

Standardiserad stokatiska variabeln: Y = (X-u)/σ där σ är standardavvikelsen

Systemfel = bias, differensen mellan mätvärdets väntevärde och det korrekta värdet.
Slumpmässigt = differens mellan mätvärdet och dess väntevärde, en s.v. med väntevärdet noll

Kovariansen C(X,Y) mellan X och Y är C(X,Y) = E[(X-ux)(Y-uY)]p

Korrelationskoefficienten för X och Y: p(X,Y) = C(X,Y)/[D(X)D(Y)]

C(X,Y) = 0 så är X och Y okorrelerade.

Sats 5.9 Om X och Y är oberoende så är de också okorrelerade.

Kap. 6 Normalfördelning N(u,sigma), u = median

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Egenskap:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Egenskap i **standardiserad normalfördelning N(0,1)** : E(X) = 0, D(X) = 1;
Bevis : x är udda funktion! Vilket ger E(x) = int(x*φ,-inf,inf) = 0
D(X) = int(x^2 *φ,-inf,inf) = Partiell integration = 0 + int(φ, -inf, inf) = 1
Vilket ger V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1

Allmänna fall:

Sats 6.1 $X \in N(\mu, \sigma)$ om och endast om $Y = (X - \mu)/\sigma \in N(0,1)$. Dessutom gäller att

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) \quad \text{och} \quad F_X(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big).$$

där Y tillhör N(0,1)

Bevis: Om $X \in N(\mu, \sigma)$ så gäller

$$P(Y \le x) = P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\Big) = P(X \le \mu + \sigma x)$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\, dt.$$

Variabeltransformationen $u = (t - \mu)/\sigma$ ger

$$P(Y \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du = \Phi(x).$$

Vi har härmed visat att Y har fördelningsfunktionen $\Phi(x)$, dvs att $Y \in N(0,1)$. Om å andra sidan $Y = (X - \mu)/\sigma$ är $N(0,1)$ så gäller

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) \\ &= P\Big(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Om detta deriveras erhålls

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

som visar att X är $N(\mu, \sigma)$. □

Om X tillhör N(u,sigma), så gäller E(X) = u, V(X) = σ^2, D(X)= σ
Bevis: använd sats 6.1, där Y = N(0,1) ger oss E(x) = $\mu + \sigma E(Y) = \mu$
$V(X) = \sigma^2 V(Y) = \sigma^2$

Sats 6.3 Linjärkombinationer av oberoende normalfördelade s.v.
Om $X \in N(\mu,\sigma)$ så gäller $Y = aX + b \in N(a\mu + b, |a|*\sigma)$

Bvis: sats 6.1 ger $X = \mu + \sigma Z$ där Z = N(0,1).
$Y = a(\mu + \sigma Z) + b = (a\mu + b) + (a*\sigma)Z)$
Om a > 0: $Y = N(a\mu + b, a*\sigma)$
Om a < 0: $Y = (a\mu + b) + (-a*\sigma)-Z) = N(a\mu + b, -a*\sigma)$ ty Z symmetrisk

Sats 6.4 Om $X \in N(\mu_X,\sigma_X)$, $Y \in N(\mu_Y,\sigma_Y)$ är oberoende så gäller:
$X + Y \in N(\mu_X+\mu_Y, sqrt(\sigma_X{}^2+ \sigma_Y{}^2))$
$X - Y \in N(\mu_X - \mu_Y, sqrt(\sigma_X{}^2+ \sigma_Y{}^2))$

Sats 6.5 Om $X_1,..,X_n = N(\mu_1,\sigma_1)$, …, resp. $N(\mu_n,\sigma_n)$ är oberoende, så gäller

$$\sum_1^n a_i X_i + b \in N\left(\sum_1^n a_i\mu_i + b, \sqrt{\sum_1^n a_i^2\sigma_i^2}\right)$$

Följdsats 6.5.1 Om $X_1,..,X_n$ är oberoende $N(\mu,\sigma)$ och $X_m = \sum_1^n X_i/n$ är deras aritmetiska medelvärde så gäller: $X_m \in N(\mu_X, sqrt(\sigma_X{}^2/n))$

Följdsats 6.5.2 Om $X_1,..,X_n = N(\mu_1,\sigma_1)$ och $Y_1,..,Y_{n2} = N(\mu_2,\sigma_2)$ är oberoende så gäller:
$X_m-Y_m \in N(\mu_1-\mu_2, sqrt(\sigma_1{}^2/n_1 + \sigma_1{}^2/n_2))$

Definition 6.1 Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{f}{2}-1}e^{-x/2}}{\Gamma(f/2)2^{f/2}} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0, \end{cases}$$

säges X vara χ^2-*fördelad* med f frihetsgrader.

Kodbeteckning. $X \in \chi^2(f)$. (Uttal: tji-två eller ki-två.)

Gammafunktionen $\Gamma(\cdot)$ definierades på sidan 64. Några egenskaper hos $\Gamma(\cdot)$ är $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ och $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Sats 6.6. Om $X_1,..,X_f$ är oberoende och N(0,1) så är $\sum_1^f X_i^2$ x^2-fördelad med frihetsgrad f, och väntevärde $E(Y) = f*E(X^2{}_1) = f$