F1 SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER

Kap. 2.1–2.5

Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

- Grundläggande terminologi
- Mängdlära
- Kolmogorovs axiom
- Konstruktion av sannolikhetsmått
- Kombinatorik

SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

Ex. på tillämpningar

1) Opinionsundersökningar ← Konfigensintervall, hypotesprövning, felmarginal
2) Homogenitetstest ← Vanligt i medicinska sammanhang, typ testa läkemedel
3) Försäkringar ← Ex. X = antal orkaner av klass III som drabbar Florida
   $X \in$ Poissonfördelningen
4) Kvalitetskontroll ← Antal defekta vi hittar är binomialfördelat
5) Bestämma priser på finansmarknaden ← Normalfördelningen
6) Konfigensintervall, Hypotesprövning ← Ex. Metangasutsläpp i Sibirien

$$\left.\begin{array}{l} 2012: \; x_1, \; x_2, \ldots, \; x_{10} \\ 2017: \; y_1, \; y_2, \ldots, \; y_{10} \end{array}\right\} I_{\mu_x - \mu_y} = \bar{x} - \bar{y} + \Delta$$

7) Linjär regression ← Ex. Bostadspriser beror på massa faktorer

y = bostadspriset
x = lgh yta
z = antal rum
w = m till tunnelbanestation

$$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 z + \beta_3 w$$

KAP. 2

★ Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett **utfall** ω_i
En händelse kan statifieras av flera utfall (t.ex. utfall 5, 6, 7 kan ge $x = 3$)

★ Mängden av alla utfall kallas **utfallsrummet** Ω.
$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$

★ En **händelse** betecknas oftast $A, B, C \ldots$ eller $A_1, A_2, A_3 \ldots$
En händelse är en samling av utfall och är alltså en delmängd av utfallsrummet

Sannolikheten att A inträffar skrivs P(A), Probability of A

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\Omega) = 1$$

★ Diskret utfallsrum

Om antalet utfall är ändligt eller uppräkneligt oändligt så har vi ett diskret utfallsrum

Ex Antal kast på en tärning som måste göras t.o.m. man har fått samma resultat 2 ggr.

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ Detta är ett ändligt utfallsrum

Ex Antal kast man måste göra för att få samma resultat 2 ggr i rad.

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Detta är ett exempel på ett oändligt utfallsrum

★ Kontinuerligt utfallsrum

- Om antalet utfall varken är ändligt eller uppräkneligt oändligt så har vi ett kontinuerligt utfallsrum.
- Här går sannolikheten för varje utfall mot noll
- Utfallen ligger oändligt tätt.

Ex Tiden vi väntar tills klockan slår hel timme.

$X(\text{min}) = [0, 60)$

$\Omega : \{0 \leq x < 60\}$

★ Snitt, union, komplement

- Snitt ← "och"

  $A_1 \cap A_2$ läses A_1 snitt A_2 — Både A_1 och A_2 inträffar

  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ — Alla händelser A_i inträffar

- Union ← "och/eller"

  $A_1 \cup A_2$ läses A_1 union A_2 — Minst en av A_1 och A_2 inträffar

  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ — Minst en av händelserna A_i inträffar

- Komplement

  A_1^* läses A_1 komplement $\Leftrightarrow$ icke-A

$P(A_1) + P(A_1^*) = 1$ Ex. på disjunkta händelser

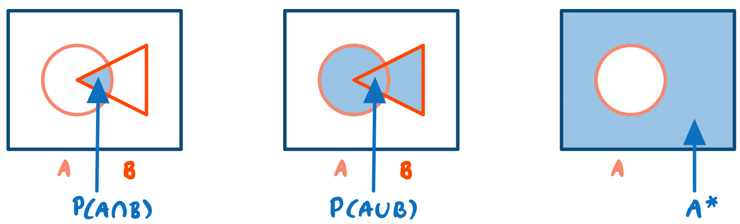
Disjunkta händelser

Händelser som ej kan inträffa samtidigt kallas disjunkta

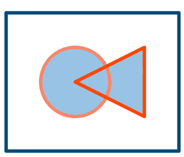
$P(A_1 \cap A_2) = 0 \iff A_1$ och A_2 disjunkta

Venndiagram

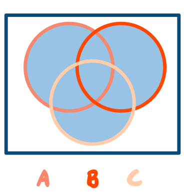
Vi har ett utfallsrum där vi tänker oss att arean $= P(\Omega) = 1$
Areor är proportionella mot sannolikheten.



Unionsformeln



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum P(A_i) - \sum P(2\text{-snitt}) + \sum P(3\text{-snitt}) - \sum P(4\text{-snitt})$ osv...

Men om man är smart: tänk motsatsen (ofta till hjälp):

$P(A \cup B \cup C) = P(\text{minst en av händelserna inträffar}) =$
$= 1 - P(\text{ingen av händelserna inträffar}) = 1 - P(A^* \cap B^* \cap C^*) =$

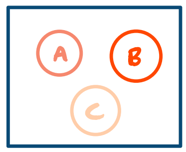
$\Rightarrow (A \cup B \cup C)^* = A^* \cap B^* \cap C^*$

Man ser även att:

$(A \cap B \cap C)^* = A^* \cup B^* \cup C^*$ D.v.s. motsatsen till att alla händelser inträffar är att minst en inte inträffar

★ Kolmogorovs axiomsystem

1) $0 \le P(A) \le 1$
2) $P(\Omega) = 1$
3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ om alla A_i:na är disjunkta



A, B, C disjunkta

★ KOMBINATORIK

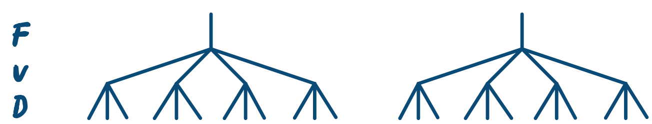
Anta att alla utfall är lika sannolika. Då gäller den klassiska sannolikhetsdefinitionen.

$$P(H) = \frac{\text{antal gynnsamma utfall}}{\text{antal möjliga utfall}} = \frac{g}{m}$$

Istället för att räkna med sannolikheter räknar man med antal

★ Multiplikationsprincipen

Ex På menyn finns 2 förrätter, 4 varmrätter och 2 desserter.
Hur många måltider kan vi få?

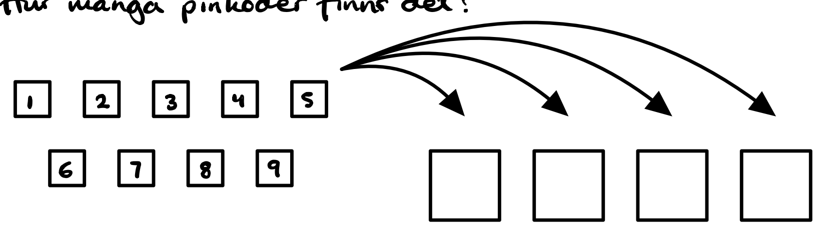


Jo, $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ st

★ Dragning med återläggning med hänsyn till ordning

Antal sätt att dra k element från n

Ex Hur många pinkoder finns det?



Den första siffran kan dras på 10 sätt.
Den andra ——— " ———
Den tredje ——— " ———
Den fjärde ——— " ———

$\Rightarrow$ Antal pinkoder är $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$
Dvs. antal sätt att dra 4 siffror från $10 = 10^4$

Allm: Antal sätt att dra k element från $n = n^k$

★ Dragning utan återläggning med hänsyn till ordning

Ex Anta att vi har 8 medlemmar i en förening och ska utse ordförande, sekreterare och kassör.

Ordföranden kan väljas på 8 sätt
Sekreteraren —"— 7 —"—
Kassören —"— 6 —"—

} Dvs $8 \cdot 7 \cdot 6$ sätt

$$(8-0)\cdot(8-1)\cdot(8-2) = (8-0)\cdot(8-1)\cdot(8-3+1)$$

Antal sätt att dra 3 st från 8 är $(8-0)\cdot(8-1)\cdot(8-3+1)$

Allm: Antal sätt att dra k element från n är $(n-0)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

Alt.: $\frac{8!}{5!} = \frac{8!}{(8-3)!} =$ [på räknaren] $= 8P3$

D.v.s. allmänt har vi $\frac{n!}{(n-k)!} = nPk$

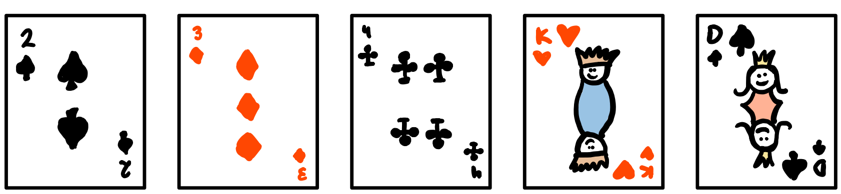
★ Dragning utan återläggning utan hänsyn till ordning

Ex Hur många pokerhänder finns det?
D.v.s. på hur många sätt kan vi dra 5 kort från 52?

Om vi tar hänsyn till ordningen till att börja med finns det

$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$ sätt

Tänk baklänges! Anta att vi ser följande kort:



Dessa 5 kort kan ordnas på $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ sätt

För varje utfall utan hänsyn till ordningen finns 5! utfall med hänsyn till ordningen

Antal utfall utan hänsyn till ordningen ggr 5!
= Antal utfall med hänsyn till ordningen

$\Rightarrow$ Antal utfall utan hänsyn till ordningen =

Binomialkoefficienten

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{5!\,47!} = \frac{52!}{5!\,47!} = \binom{52}{5} = \left[\begin{matrix}\text{på}\\ \text{räknaren}\end{matrix}\right] = 52C5$$

Antal sätt att dra 5 från 52 $= \binom{52}{5}$

__Allm:__ Antal sätt att dra k element från n $= \binom{n}{k} = nCk$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0! = 1$
$1! = 1$