FS FLERDIMENSIONELLA STOKASTISKA VARIABLER, DEFINITIONER, VÄNTEVÄRDE OCH VARIANS

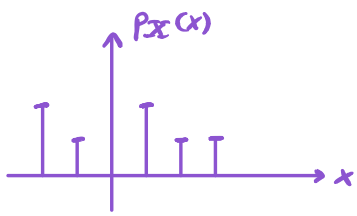
Kap. 4, 5.1-5.3

Linnéa Gustafsson
linneag2@kth.se

- Flerdimensionella s.v. (kap. 4)
- Definitioner
- Väntevärde
- Varians dvs läges- och spridningsmått

FLERDIMENSIONELLA STOKASTISKA VARIABLER

En dimension (diskret)

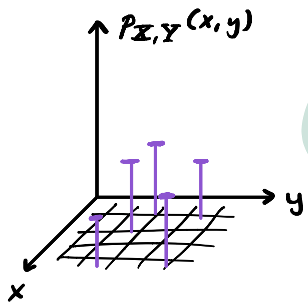


Ska man ha sannolikheten för en viss händelse lägger man ihop de stolpars höjder som är gynnsamma

$$\sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x}} \underbrace{p_X(x)}_{\text{Den marginella sannolikhetsfunktionen}} = 1$$

Två dimensioner (diskret)

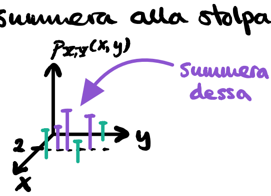
Förut: slumpat fram ett tal, "kastat en tärning"
Nu: slumpar fram två tal på en gång, "kastar två tärningar"



$$\sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x,y}} \underbrace{p_{X,Y}(x,y)}_{\text{Den simultana sannolikhetsfunktionen}} = 1$$

Har man den simultana sannolikhetsfunktionen kan man alltid få den marginella:

♥ $p_X(x) = \{\text{summera alla stolpar där } x=2 \text{ (och } y \text{ varierar)}\} =$

$= \Bigg\{$  $\Bigg\} = \sum_{\substack{\text{alla}\\y}} p_{X,Y}(x,y)$, P.S.S. :

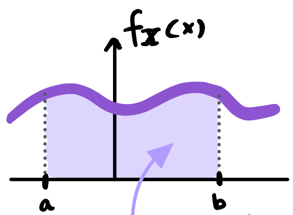
♥ $p_Y(y) = \sum_{\substack{\text{alla}\\x}} p_{X,Y}(x,y)$

Däremot om x och y är oberoende, då kan man få ur de simultana ur de marginella:

I många fall så är det så

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \cap Y = y) = \{\text{om ober.}\} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

En dimension (kontinuerligt)



$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

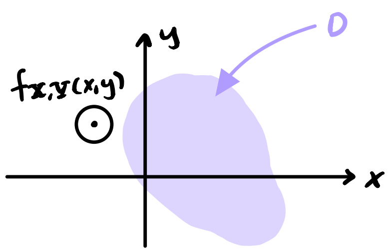
Sannolikheten att vi hamnar i intervallet mellan a och b är att man integrerar över täthetsfunktionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X}_{\text{Den marginella täthetsfunktionen}}(x)\,dx = 1$$

Två dimensioner (kontinuerligt)

Täthetsfunktionen

- Istället för kurva: veckad yta
- Totala volymen under ytan = 1



Kan fusktänka (kolla på 2d, diskret) men då måste man också veta att man fusktänker (p.g.a.)

Repetera flervarre!

$$P(X,Y \in D) = \overbrace{\iint_{X,Y \in D} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{ej sannolikhet: sannolikhetsdensitet}}\,dx\,dy}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Den simultana täthetsfunktionen}}\,dx\,dy = 1$$

$$f_X(x) = \left\{\begin{array}{l}\text{samma grej här: summerar ett x-värde och sen summerar} \\ \text{vi över alla y, men motsv. till att summera: } \underbrace{\text{integrera}}_{\text{en form av summation}}\end{array}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy, \qquad \text{P.S.S.}:$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Allmänt om täthetsfunktionen (diskret och kontinuerlig):

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \cap Y \le y)$$

Om oberoende:

$$f_{X,Y}(x,y) = \{\text{om ober.}\} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Max- och min-problem

Har med tillförlitlighet att göra

"Ganska centralt"

Gäller varesig diskret eller kontinuerlig:

Vi antar att vi har $\underbrace{F_X(x)}_{\text{Fördeln.funkt. för } X}$ och $\underbrace{F_Y(y)}_{\text{-"- för } Y}$ och att X och Y är oberoende.

Då är också täthetsfunktionerna givna

$Z_1 = \underbrace{\max(X, Y)}_{\text{maximum för } X \text{ och } Y}$ (största av X, Y)

Då ska vi ta fram fördelningsfunktionen för Z_1:

$$F_{Z_1}(z) = P(Z_1 \le z) = P(\max(X,Y) \le z) = P(\underbrace{\text{största värdet}}_{\text{av } X, Y} \le z) =$$

$= \Bigg\{$

Båda < z

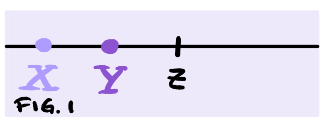


FIG. 1

Bara här största värdet är mindre än z

En < z, en > z

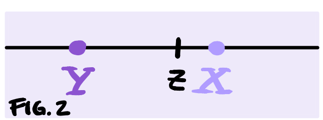


FIG. 2

Största > z

Båda > z

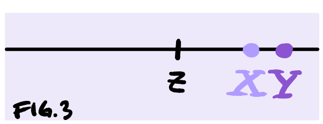


FIG. 3

Största > z

$\Bigg\} =$

$$= P(\text{alla värden} \le z) = P(X \le z \cap Y \le z) = \{\text{ober.}\} = P(X \le z) \cdot P(Y \le z) =$$

$$= \underbrace{F_X(z)}_{\text{Fördelningsfunktionen för } X} \cdot \underbrace{F_Y(z)}_{\text{-"- -"- för } Y}$$

Gör om saker till ord och rita figurer!

Då ser man vad som måste hända.

$Z = \min(X, Y)$

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min(X,Y) \leq z) = P(\text{minsta värdet} \leq z) =$

$= \{$ enl. fig. 1-3 ovan: minsta värdet $< z$ i fig. 1 och fig. 2 $\} =$

$= \{$ enda fallet när minsta värdet $\nleq z$ är när alla värden $> z$ $\} =$

$= 1 - P(\text{alla värden} > z) = 1 - P(X > z \cap Y > z) = \{\text{ober.}\} = 1 - P(X>z) \cdot P(Y>z) =$

$= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]$

"Något väldigt diskret"

Summa: $X + Y = z$

Anta att vi har $p_X(x)$ och $p_Y(y)$ och att $Z = X + Y$ och vi söker $p_Z(z)$

Ex $z = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

x	y
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

} 6 fall

Uttryckt mer strikt:

Kallas faltning

$$p_Z(z) = \sum_{\substack{\text{alla} \\ x,y \\ \text{så att} \\ x+y=z}} p_X(x,y) = \sum_{j=0}^{z} p_{X,Y}(j, z-j)$$

Ex Anta att $X \in Po(\mu_1)$, $Y \in Po(\mu_2)$ och X och Y är ober.

F.S. §3 $\Rightarrow$ $p_X(j) = \frac{\mu_1^j}{j!}e^{-\mu_1}$, $\quad p_Y(j) = \frac{\mu_2^j}{j!}e^{-\mu_2}$

Bilda $Z = X + Y$ och ta fram $p_Z(k)$

$$p_Z(k) = P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} p_{XY}(j, k-j) = \{\text{ober.}\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} p_X(j) \cdot p_Y(k-j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu_1^j}{j!}e^{-\mu_1} \cdot \frac{\mu_2^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu_2} =$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{j}}_{\frac{k!}{n!(k-n)!}} \mu_1^j \mu_2^{k-j}}_{\text{Pascals triangel}} e^{-(\mu_1+\mu_2)} = \frac{1}{k!}(\mu_1+\mu_2)^k e^{-(\mu_1+\mu_2)} =$$

T.ex. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots \binom{n}{n}b^n$$

$$= \{\mu_1 + \mu_2 = \mu\} = \frac{\mu^k}{k}e^{-\mu}$$

D.v.s. $Z \in Po(\mu_1 + \mu_2)$ — ej i F.S.

"Och då har jag härlett en sats som är viktig!"

VIKTIG SATS

Anta $X \in Po(\mu_1)$ och $Y \in Po(\mu_2)$ och att X och Y är oberoende

$\Rightarrow X + Y \in Po(\mu_1 + \mu_2)$

Logiskt om man tänker på vad Poissonfördelning är: "I varje tidp. lika stor sannol. att en lampa slocknar. # lampor som slocknar under tidsper. är Poissonfördelat m. visst väntevärde som genomsn." Som att slå ihop två rums # lampor.

Fördelningsfunktion (kontinuerliga fallet)

Vi antar att $Z = X + Y$ och att vi har $F_X(x)$ och $F_Y(y)$ och söker $F_Z(z)$.

$$F_Z(z) = P(X+Y \le z) = \iint_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \{\text{ober.}\} = \iint_{x+y\le z} f_X(x)\cdot f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_X(x)\cdot f_Y(y)\,dy\,dx$$

Klar med kap. 4 → Nu kap. 5!

Väntevärde

E: Expected value (dvs "väntevärde" på engelska)

Väntevärdet av X kallas för $E(X)$ och är vad X blir i genomsnitt om man gör oändligt många försök.

Skilj på väntevärde och medelvärde!

- Väntevärde: Teoretiska värdet (att du kan göra oändligt många försök)
- Medelvärde: Praktiska värdet (gör t.ex. 4 försök,

DE STORA TALENS LAG: Ju fler försök desto mer närmar sig medelvärdet väntevärdet

Ex. 5.1 (sid. 107-108)

Vi kastar en tärning:

1	⇒	1 kr i vinst
2, 3	⇒	2 —"—
4, 5, 6	⇒	4 —"—

Vi kastar tärningen 6000 ggr.

Då borde vi vinna $1\cdot 1000 + 2\cdot 2000 + 4\cdot 3000 = 17\,000$ totalt

P(vinner 1 kr) P(vinner 2 kr) P(vinner 4 kr)

och i genomsnitt $\dfrac{1\cdot 1000 + 2\cdot 2000 + 4\cdot 3000}{6000} = \dfrac{17}{6} = 1\cdot\dfrac{1}{6} + 2\cdot\dfrac{2}{6} + 4\cdot\dfrac{3}{6} =$

$$= 1\cdot p_X(1) + 2\cdot p_X(2) + 4\cdot p_X(4) = \sum_{\substack{\text{alla}\\ \text{utfall}\\ x}} x\cdot p_X(x) = E(X)$$

Definition

viktar hur mycket varje utfall är värt

$$E(X) = \sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x}} x \cdot p_X(x) = \{\text{i kontinuerliga fallet}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$E[g(X)] = \sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x}} g(x) \cdot p_X(x) = \{\text{i kontinuerliga fallet}\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx$$

Vad blir $E[X^2]$ i exemplet?

$$E(X^2) = \sum_{\substack{\text{alla}\\x}} x^2 p_X(x) = 1^2 \cdot p_X(1) + 2^2 \cdot p_X(2) \cdot 4^2 \cdot p_X(4) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{19}{2}$$

VARNING! $E(X^2) \neq E^2(X)$ i allmänhet

Ex $P_X(-1) = \frac{1}{2}$, $P_X = \frac{1}{2}$

$$E[X] = \sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x}} x \cdot p_X(x) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E[X^2] = \sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x}} x^2 \cdot p_X(x) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Väntevärdet – ett lägesmått: "Var hamnar vi i genomsnitt?"

Standardbeteckning för väntevärdet $= \mu$

Det μ som används i sannolikhetsfunktionen för Poissonfördelningen

Varians

"Det är också ett väntevärde"

Spridningsmått

Variansen för X = $V(X)$

Definition

$$V(X) = E[\underbrace{\underbrace{(\underbrace{X-\mu}_{1.})^2}_{2.}}_{3.}]$$

"1. Först räknar vi ut var väntevärdet ligger.

2. Sen tar man alla avstånd som man får mellan X och μ

3. Sen ser man vad det blir i genomsnitt."

Exemplet ovan:

$$V(X) = E[\underbrace{(X-\mu)^2}_{g(X)}] = \sum_{\substack{\text{alla}\\ \text{utfall}\\ x}} (X-\mu)^2 \cdot p_X(x) =$$

$$= (1-\tfrac{17}{6})^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 2(1-\tfrac{17}{6})^2 \cdot \tfrac{2}{6} + 4(1-\tfrac{17}{6})^2 \cdot \tfrac{3}{6} = \underline{\underline{\tfrac{53}{36}}}$$

Rent praktiskt använder vi väldigt sällan det här sättet för att räkna ut varians.

Istället formel i F.S. §2:

$$E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] =$$

$$= E[X^2] - \underbrace{2\mu}_{\text{konstant}} \underbrace{E(X)}_{\mu} + \underbrace{\mu^2}_{\text{konstant}} = E[X^2] - \mu^2 =$$

Bara bryta ut

Väntevärdet av en konstant är konstanten själv

$$= E[X^2] - E^2[X]$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E^2(X)}$$

Exemplet ovan:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{19}{2} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{53}{36}}}$$

VIKTIG SAK! Varians har en nackdel, "fel dimension på något sätt" (i kvadrat)

$\Rightarrow$ Infört ett till mått på spridning: standardavvikelse

Standardavvikelse

D: Deviation

Sigma

Standardavvikelse för X = $D(X) = \sigma$

Fusktänk (okej att tänka såhär bara man vet att det är fel)

Såhär kan man tänka:
Standardavvikelsen är så långt i genomsnitt ifrån väntevärdet som man brukar hamna
(Nu är det ju inte det - skulle isåfall vara beloppet istället för $\sqrt{E[(X-\mu)^2]}$)

Definition

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

Variationskoefficient

Variationskoefficienten för X = $R(X)$

Definition

$$R(X) = \frac{D(X)}{E(X)}$$

Median

Medianen för X = $\tilde{x}$

Definition

$$F_X(\tilde{x}) = 0.5$$

Räkneregler

TRE VIKTIGA

(Små bokstäver = konstanter)

1. $E[aX+bY+c] = aE(X)+bE(Y)+c$

$$V(aX) = E[(aX^2)] - E^2[(aX)] = E[a^2X^2] - E(aX)E(aX) =$$
$$= a^2E[X^2] - a^2E^2(X) = a^2[E(X^2) - E^2(X)] = a^2V(X)$$

$$V[aX+b] = \underbrace{V(aX)}$$

parallellförflyttar bara => samma varians som utan b

2. $V[aX+b] = a^2V(X)$

Om X, Y ober. gäller att:

3. $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

Kanske härleder nästa föreläsning pga behöver kovariansen vid beroende

VARNING! $V(X-Y) \neq V(X)-V(Y)$

Då skulle man kunna få negativa varianser
(det kan man aldrig få pga kvadrat)

$V(X) > 0$

$D(X) > 0$

Variansen > 0 (om 0: ingen slump, ingen stokastisk variabel om det hamnar på samma punkt varje gång)

$$V(X-Y) = \{\text{ober.}\} = V(X)+V(-Y) = V(X)+(-1)^2V(Y) =$$
$$= V(X)+V(Y)$$

På något sätt självklart: Varians = mått på osäkerhet på spridning
Om vi lägger till fler osäkerheter (fler s.v.), då kan ju inte en osäkerhet kompensera en annan så att vi helt plötsligt inte har någon osäkerhet alls.
Osäkerheten ökar för varje s.v. vi inför.