Endimensionell analys
FMAA05

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

6 juni 2017

Kapitel 1: Grundläggande begrepp och terminologi

Talsystem

1.1 a) De naturliga talen ($\mathbb{N}$) innefattar alla heltal som är noll eller större. $\frac{6}{2} = 3, \ \frac{3}{0.1} = 30, \ \frac{0}{5} = 0.$
Svar: $\frac{6}{2}, \ 0, \ 3, \ \frac{3}{0.1}, \ \frac{0}{5}$

b) De hela talen ($\mathbb{Z}$) inkluderar de naturliga talen ($\mathbb{N}$) samt alla negativa heltal. $-\frac{0.3}{0.02} = -15.$
Svar: $\frac{6}{2}, \ 0, \ 3, \ -3, \ \frac{3}{0.1}, \ -\frac{0.3}{0.02}, \ \frac{0}{5}$

c) Rationella tal ($\mathbb{Q}$) är tal som kan skrivas som bråk (inkluderar de hela talen ($\mathbb{Z}$)). $3 = \frac{3}{1}$ osv...
Svar: $\frac{6}{2}, \ 0, \ 3, \ -3, \ \frac{3}{0.1}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{5}{3} \ -\frac{0.3}{0.02}, \ \frac{0}{5}$

d) Reella tal ($\mathbb{R}$) är alla "vanliga" tal (inte de komplexa talen ($\mathbb{C}$)).
Svar: $\frac{6}{2}, \ 0, \ 3, \ -3, \ \frac{3}{0.1}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{5}{3}, \ \sqrt{2}, \ -\frac{0.3}{0.02}, \ \frac{0}{5}, \ \pi$

1.2 Alla tal med ändligt antal decimaler kan skrivas som rationella tal ($1.41421 = \frac{141421}{100000}$). Vi antar att ett irrationellt tal i plus ett rationellt tal r_1 blir det rationella talet r_2. $i + r_1 = r_2 \Leftrightarrow i = r_2 - r_1$. Eftersom alla bråk går att skriva ihop som ett bråk stämmer inte antagandet. Svaret måste alltså bli irrationellt.

Svar: Nej, båda blir irrationella.

Mängder och intervall

1.3 $M_1 = \{-1, 1\}$, eftersom $(-1)^2 = 1$ och $1^2 = 1$.

M_2 är alla tal större än eller lika med 0.

M_3 är alla tal större än eller lika med 1.

$M_4 = \mathbb{R}$, eftersom alla reella tal upphöjt i 2 är positivt.

Eftersom M_4 är alla tal ingår $M_1, \ M_2, \ M_3$ i mängden. M_3 är även en delmängd av M_2.

Svar: $M_1 \subseteq M_4, \ M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_4$

Implikationer och ekvivalens

1.4 Eftersom $x^2 < 16 = -4 < x < 4$ så betyder det att A och C är ekvivalenta och eftersom x alltid är större än -4 i C implicerar, både A och C, B.

Svar: $A \Leftrightarrow C, \ C \Rightarrow B, \ A \Rightarrow B$

1.5 a) Om A är sant är B sant men om B är sant behöver inte A vara sant. Detta eftersom $a = 1, \ b = -1$ är sant för B men inte för A. A implicerar alltså B. C går att förenkla till $a = b$ genom att dela på b det medför dock att $b \neq 0$. Eftersom en lösning är att $b = 0, \ a \in \mathbb{R}$ så är de inte ekvivalenta utan A implicerar C. C och B är skilda från varandra eftersom inget av de två ovan nämnda fallen passar in på båda utsagorna.

Svar: $A \Rightarrow B, \ A \Rightarrow C$

b) Eftersom specialfallen som nämns i **a)** båda kräver tal som är mindre än eller lika med 0 (och att det inte finns andra specialfall) är A, B och C ekvivalenta. Om man kvadrerar båda sidorna i D får man A vilket medför att även D är ekvivalent med alla andra utsagor.

Svar: Alla utsagor är ekvivalenta.

1.6 A ger sant för alla tal större än noll. B ger sant för alla tal utom noll. C ger sant för alla tal utom noll. D ger sant för alla tal större än noll.

A och D är alltså ekvivalenta, lika så B och C. $A \subseteq B$ medför då att A och D implicerar både B och C.

Svar: $A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C,\ D \Rightarrow B,\ D \Rightarrow C,\ A \Leftrightarrow D,\ B \Leftrightarrow C$

1.7

$$A:\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1$$

$$B:\ |x-2| = 1 \rightarrow x = \pm 1 + 2 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

$$C:\ x \geq 1$$

$$D:\ lnx + ln(x^3) = 0 \rightarrow x = 1$$

D ingår i alla andra vilket medför att D implicerar alla andra. Eftersom svaren i både A och B är större än eller lika med 1 implicerar A och B C.

Svar: $D \Rightarrow A,\ D \Rightarrow B,\ D \Rightarrow C,\ A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C$

1.8

$$A:\ x \geq 0$$

$$B:\ \ln x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \geq 1$$

$$C:\ e^x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \mathbb{R}$$

$$D:\ |x-2| < 1 \ \Leftrightarrow\ x - 2 < 1,\ x - 2 > -1 \ \Leftrightarrow\ 1 < x < 3$$

Alla implicerar C eftersom C är alla tal. D är en delmängd av B som i sin tur är en delmängd av A. D implicerar alltså A och B och B implicerar A.

Svar: $A \Rightarrow C,\ D \Rightarrow A,\ B \Rightarrow A,\ D \Rightarrow B,\ D \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C$

1.9

$$A:\ |x| > 0 \ \Leftrightarrow\ x \neq 0$$

$$B:\ e^x > 1 \ \Leftrightarrow\ x > 0$$

$$C:\ \cos x \leq 1 \ \Leftrightarrow\ x \in \mathbb{R}$$

$$D:\ \ln(1 + x^2) > 0 \ \Leftrightarrow\ 1 + x^{>} e^0 \Leftrightarrow x^2 > 1 - 1 \ \Leftrightarrow\ x \neq 0$$

$B \Rightarrow A$ är alltså sant ($x > 0 \subseteq x \neq 0$), A och B är alltså inte samma mängd. C implicerar inte D eftersom C innehåller 0 vilket D inte gör. A och D är däremot ekvivalenta och implicerar C.

Svar: $B \Rightarrow A,\ A \Rightarrow C,\ A \Leftrightarrow D$

1.10 Låt x representera antalet pojkar som finns i varje utsaga ($0 \leq x \leq 10,\ x \in \mathbb{N}$).

$$A:\ x = 5$$

$$B:\ x \leq 4$$

$$C:\ x \geq 3$$

$$D:\ x \geq 5$$

$$E:\ x \leq 8$$

A är alltså en delmängd av C, D och E. B är en delmängd av E och D är en delmängd av C.

Svar: $A \Rightarrow C,\ A \Rightarrow D,\ A \Rightarrow E,\ B \Rightarrow E,\ D \Rightarrow C$

1.11 Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av romber, en romb är ett specifikt fall av parallellogram och en parallellogram är ett specifikt fall av parallelltrapetser $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow C$.

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av rektanglar och en rektangel är ett specifikt fall av parallellogram osv. $E \Rightarrow D$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$. (Se def. för figurerna).

Svar: $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow D$

Kapitel 2: Algebra

Räkneoperationer för reella tal

2.1 a) Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = \cancel{x^2}-9-(\cancel{x^2}+6x+9) = -6x-18$$

eller

$$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = (x+3)((\cancel{x}-3)-(\cancel{x}+3)) = -6(x+3) = -6x-18$$

Svar: $-6x-18$

b) Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = \cancel{x^2}-9-(\cancel{x^2}-6x+9) = 6x-18$$

eller

$$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = (x-3)((\cancel{x}+3)-(\cancel{x}-3)) = 6(x-3) = 6x-18$$

Svar: $6x-18$

c) $(3x+5)^2-(3x-5)^2 = \cancel{9x^2}+30x+\cancel{25}-(\cancel{9x^2}-30x+\cancel{25}) = 60x$

Svar: $60x$

2.2 $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Svar: Varannan term är positiv och varannan negativ och antalet av varje term följer Pascals triangel.

2.3 Se konjugatregeln samt tipset till uppgiften.

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b} \\
(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32} \\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \qquad \text{V.S.V.}
\end{aligned}$$

2.4 faktorisera och förenkla:

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{2*2}{3*3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{14} = \frac{\cancel{2}*2}{\cancel{2}*7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{48}{168} = \frac{2*\cancel{2*2*2*3}}{\cancel{2*2*2*3}*7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{24}{84} = \frac{2*\cancel{2*2*3}}{\cancel{2*2*3}*7} = \frac{2}{7}$$

multiplicera med 1000000 (flytta decimaltecknet 6 steg):

$$\frac{0.00002}{0.000007} = \frac{20}{7}$$

Svar: $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{48}{168}$, $\frac{24}{84}$

2.5 a)

$$\frac{1}{7} - \left(\frac{15}{14} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{14} - \left(\frac{15}{14} + \frac{7}{14}\right) = \frac{2}{14} - \frac{22}{14} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$$

Svar: $-\frac{10}{7}$

b)

$$\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{12} - \left(\frac{9}{12} + \frac{4}{12}\right) = \frac{10}{12} - \frac{13}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Svar: $-\frac{1}{4}$

2.6 a) Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\begin{aligned}\frac{1}{60} + \frac{1}{108} - \frac{1}{72} &= \frac{1}{5*3*2*2} + \frac{1}{9*3*2*2} - \frac{1}{6*3*2*2} = \\ &= \frac{1*9*6}{5*12*9*6} + \frac{1*5*6}{9*12*5*6} - \frac{1*9*5}{6*12*9*5} \\ &= \frac{54}{3240} + \frac{30}{3240} - \frac{45}{3240} = \frac{39}{3240} = \frac{13}{1080}\end{aligned}$$

Svar: $\frac{13}{1080}$

b) Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{27}{36} - \frac{30}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{36}$$

Svar: $\frac{1}{36}$

c) Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng stegvis.

$$\frac{1}{35} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} - \frac{1}{245} = \frac{6}{245} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} = \frac{89}{2205} - \frac{1}{25} = \frac{445}{11025} - \frac{441}{11025} = \frac{4}{11025}$$

Svar: $\frac{4}{11025}$

2.7 a) Utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}} = \frac{\cancel{a} * 4}{2 * \cancel{a}} = \frac{4}{2} = 2$$

Svar: 2

b) Utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}} = \frac{a * a}{2 * 4} = \frac{a^2}{8}$$

Svar: $\frac{a^2}{8}$

c) Utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}a(6a+12)}{\cancel{7}(a+2)} = \frac{2a^2+24a}{a+2} = \frac{12a\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+2}} = 12a$$

Svar: $12a$

d) Utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a} = \frac{a}{(a+3)(a^2+3a)} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}(a+3)(a+3)} = \frac{1}{(a+3)^2} = (a+3)^{-2}$$

Svar: $(a+3)^{-2}$ eller $\frac{1}{(a+3)^2}$