Endimensionell analys
FMAA05

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

7 juni 2017

Sammanfattning

Medan jag hösten 2015 läst kursen Endimensionell analys på LTH upptäckte jag att jag saknade lösningsexempel för uppgifterna i boken. Jag kunde sitta i tiotals minuter med en och samma uppgift eftersom jag använde fel metod, skrev av värden fel, gjorde ett räknefel osv. Detta är tid som är mycket mer väl spenderad på att lösa fler uppgifter så för att folk i framtiden ska kunna undvika detta tänker jag göra lösningsförslag till alla uppgifter i Boken *Övningar i Endimensionell analys* av Jonas Månsson & Patrik Nordbeck

Kapitel 1: Grundläggande begrepp och terminologi

Talsystem

1.1 a) De naturliga talen ($\mathbb{N}$) innefattar alla heltal som är noll eller större. $\frac{6}{2} = 3,\ \frac{3}{0.1} = 30,\ \frac{0}{5} = 0.$
Svar: $\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{0}{5}$

b) De hela talen ($\mathbb{Z}$) inkluderar de naturliga talen ($\mathbb{N}$) samt alla negativa heltal. $-\frac{0.3}{0.02} = -15.$
Svar: $\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5}$

c) Rationella tal ($\mathbb{Q}$) är tal som kan skrivas som bråk (inkluderar de hela talen ($\mathbb{Z}$)). $3 = \frac{3}{1}$ osv...
Svar: $\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3}\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5}$

d) Reella tal ($\mathbb{R}$) är alla "vanliga" tal (inte de komplexa talen ($\mathbb{C}$)).
Svar: $\frac{6}{2},\ 0,\ 3,\ -3,\ \frac{3}{0.1},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3},\ \sqrt{2},\ -\frac{0.3}{0.02},\ \frac{0}{5},\ \pi$

1.2 Alla tal med ändligt antal decimaler kan skrivas som rationella tal ($1.41421 = \frac{141421}{100000}$). Vi antar att ett irrationellt tal i plus ett rationellt tal r_1 blir det rationella talet r_2. $i + r_1 = r_2 \Leftrightarrow i = r_2 - r_1$. Eftersom alla bråk går att skriva ihop som ett bråk stämmer inte antagandet. Svaret måste alltså bli irrationellt.

Svar: Nej, båda blir irrationella.

Mängder och intervall

1.3 $M_1 = \{-1, 1\}$, eftersom $(-1)^2 = 1$ och $1^2 = 1$.

M_2 är alla tal större än eller lika med 0.

M_3 är alla tal större än eller lika med 1.

$M_4 = \mathbb{R}$, eftersom alla reella tal upphöjt i 2 är positivt.

Eftersom M_4 är alla tal ingår $M_1,\ M_2,\ M_3$ i mängden. M_3 är även en delmängd av M_2.

Svar: $M_1 \subseteq M_4,\ M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_4$

Implikationer och ekvivalens

1.4 Eftersom $x^2 < 16 = -4 < x < 4$ så betyder det att A och C är ekvivalenta och eftersom x alltid är större än -4 i C implicerar, både A och C, B.

Svar: $A \Leftrightarrow C,\ C \Rightarrow B,\ A \Rightarrow B$

1.5 a) Om A är sant är B sant men om B är sant behöver inte A vara sant. Detta eftersom $a = 1,\ b = -1$ är sant för B men inte för A. A implicerar alltså B. C går att förenkla till $a = b$ genom att dela på b det medför dock att $b \neq 0$. Eftersom en lösning är att $b = 0,\ a \in \mathbb{R}$ så är de inte ekvivalenta utan A implicerar C. C och B är skilda från varandra eftersom inget av de två ovan nämnda fallen passar in på båda utsagorna.

Svar: $A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C$

b) Eftersom specialfallen som nämns i **a)** båda kräver tal som är mindre än eller lika med 0 (och att det inte finns andra specialfall) är A, B och C ekvivalenta. Om man kvadrerar båda sidorna i D får man A vilket medför att även D är ekvivalent med alla andra utsagor.

Svar: Alla utsagor är ekvivalenta.

1.6 A ger sant för alla tal större än noll. B ger sant för alla tal utom noll. C ger sant för alla tal utom noll. D ger sant för alla tal större än noll.

A och D är alltså ekvivalenta, lika så B och C. $A \subseteq B$ medför då att A och D implicerar både B och C.

Svar: $A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C,\ D \Rightarrow B,\ D \Rightarrow C,\ A \Leftrightarrow D,\ B \Leftrightarrow C$

1.7

$$A:\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1$$

$$B:\ |x - 2| = 1 \rightarrow x = \pm 1 + 2 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

$$C:\ x \geq 1$$

$$D:\ lnx + ln(x^3) = 0 \rightarrow x = 1$$

D ingår i alla andra vilket medför att D implicerar alla andra. Eftersom svaren i både A och B är större än eller lika med 1 implicerar A och B C.

Svar: $D \Rightarrow A,\ D \Rightarrow B,\ D \Rightarrow C,\ A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C$

1.8

$$A:\ x \geq 0$$

$$B:\ \ln x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \geq 1$$

$$C:\ e^x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \mathbb{R}$$

$$D:\ |x - 2| < 1 \ \Leftrightarrow\ x - 2 < 1,\ x - 2 > -1 \ \Leftrightarrow\ 1 < x < 3$$

Alla implicerar C eftersom C är alla tal. D är en delmängd av B som i sin tur är en delmängd av A. D implicerar alltså A och B och B implicerar A.

Svar: $A \Rightarrow C,\ D \Rightarrow A,\ B \Rightarrow A,\ D \Rightarrow B,\ D \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C$

1.9

$$A:\ |x| > 0 \ \Leftrightarrow\ x \neq 0$$

$$B:\ e^x > 1 \ \Leftrightarrow\ x > 0$$

$$C:\ \cos x \leq 1 \ \Leftrightarrow\ x \in \mathbb{R}$$

$$D:\ \ln(1 + x^2) > 0 \ \Leftrightarrow\ 1 + x^{>} e^0 \Leftrightarrow x^2 > 1 - 1 \ \Leftrightarrow\ x \neq 0$$

$B \Rightarrow A$ är alltså sant ($x > 0 \subseteq x \neq 0$), A och B är alltså inte samma mängd. C implicerar inte D eftersom C innehåller 0 vilket D inte gör. A och D är däremot ekvivalenta och implicerar C.

Svar: $B \Rightarrow A,\ A \Rightarrow C,\ A \Leftrightarrow D$

1.10 Låt x representera antalet pojkar som finns i varje utsaga ($0 \leq x \leq 10$, $x \in \mathbb{N}$).

$$A:\ x = 5$$

$$B:\ x \leq 4$$

$$C:\ x \geq 3$$

$$D:\ x \geq 5$$

$$E:\ x \leq 8$$

A är alltså en delmängd av C, D och E. B är en delmängd av E och D är en delmängd av C.

Svar: $A \Rightarrow C,\ A \Rightarrow D,\ A \Rightarrow E,\ B \Rightarrow E,\ D \Rightarrow C$

1.11 Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av romber, en romb är ett specifikt fall av parallellogram och en parallellogram är ett specifikt fall av parallelltrapetser $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow C$.

Eftersom en kvadrat är ett specifikt fall av rektanglar och en rektangel är ett specifikt fall av parallellogram osv. $E \Rightarrow D$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$. (Se def. för figurerna).

Svar: $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$, $D \Rightarrow A$, $D \Rightarrow C$, $E \Rightarrow A$, $E \Rightarrow C$, $E \Rightarrow B$, $E \Rightarrow D$

Kapitel 2: Algebra

Räkneoperationer för reella tal

2.1 a) Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = \cancel{x^2}-9-(\cancel{x^2}+6x+9) = -6x-18$$

eller

$$(x+3)(x-3)-(x+3)^2 = (x+3)((\cancel{x}-3)-(\cancel{x}+3)) = -6(x+3) = -6x-18$$

Svar: $-6x-18$

b) Två alternativa lösningsmetoder:

$$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = \cancel{x^2}-9-(\cancel{x^2}-6x+9) = 6x-18$$

eller

$$(x+3)(x-3)-(x-3)^2 = (x-3)((\cancel{x}+3)-(\cancel{x}-3)) = 6(x-3) = 6x-18$$

Svar: $6x-18$

c) $(3x+5)^2-(3x-5)^2 = \cancel{9x^2}+30x+\cancel{25}-(\cancel{9x^2}-30x+\cancel{25}) = 60x$
Svar: $60x$

2.2 $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Svar: Varannan term är positiv och varannan negativ och antalet av varje term följer Pascals triangel.

2.3 Se konjugatregeln samt tipset till uppgiften.

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b}\\
(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
(a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
(a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16}) &= a^{32}-b^{32}\\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32}\\
a^{32}-b^{32} &= a^{32}-b^{32} \qquad \text{V.S.V.}
\end{aligned}$$

2.4 faktorisera och förenkla:

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{14} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{48}{168} = \frac{2 \cdot \cancel{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{24}{84} = \frac{2 \cdot \cancel{2 \cdot 2 \cdot 3}}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

multiplicera med 1000000 (flytta decimaltecknet 6 steg):

$$\frac{0.00002}{0.000007} = \frac{20}{7}$$

Svar: $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{48}{168}$, $\frac{24}{84}$

2.5 a)

$$\frac{1}{7} - \left(\frac{15}{14} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{14} - \left(\frac{15}{14} + \frac{7}{14}\right) = \frac{2}{14} - \frac{22}{14} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$$

Svar: $-\frac{10}{7}$

b)

$$\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{12} - \left(\frac{9}{12} + \frac{4}{12}\right) = \frac{10}{12} - \frac{13}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Svar: $-\frac{1}{4}$

2.6 a) Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\begin{aligned}\frac{1}{60} + \frac{1}{108} - \frac{1}{72} &= \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} - \frac{1}{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \\ &= \frac{1 \cdot 9 \cdot 6}{5 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 6}{9 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{6 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 5} \\ &= \frac{54}{3240} + \frac{30}{3240} - \frac{45}{3240} = \frac{39}{3240} = \frac{13}{1080}\end{aligned}$$

Svar: $\frac{13}{1080}$

b) Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{27}{36} - \frac{30}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{36}$$

Svar: $\frac{1}{36}$

c) Faktorisera, hitta minsta gemensamma nämnare och förläng stegvis.

$$\frac{1}{35} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} - \frac{1}{245} = \frac{6}{245} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} = \frac{89}{2205} - \frac{1}{25} = \frac{445}{11025} - \frac{441}{11025} = \frac{4}{11025}$$

Svar: $\frac{4}{11025}$

2.7 a) Utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}} = \frac{\cancel{a}\cdot 4}{2\cdot\cancel{a}} = \frac{4}{2} = 2$$

Svar: 2

b) Utnyttja reglerna för division.

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}} = \frac{a\cdot a}{2\cdot 4} = \frac{a^2}{8}$$

Svar: $\frac{a^2}{8}$

c) Utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}} = \frac{\cancelto{2}{14}a(6a+12)}{\cancel{7}(a+2)} = \frac{2a^2+24a}{a+2} = \frac{12a\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+2}} = 12a$$

Svar: $12a$

d) Utnyttja reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a} = \frac{a}{(a+3)(a^2+3a)} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}(a+3)(a+3)} = \frac{1}{(a+3)^2} = (a+3)^{-2}$$

Svar: $(a+3)^{-2}$ eller $\frac{1}{(a+3)^2}$

2.8 a) Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera.

$$\frac{\frac{3}{5x}-\frac{x}{15}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{45-5x^2}{75x}}{\frac{3-x}{3x}} = \frac{\cancel{3x}(45-5x^2)}{\cancelto{25}{75}\cancel{x}(3-x)} = \frac{45-5x^2}{75-25x} =$$

$$= \frac{\cancel{5}(9-x^2)}{\cancel{5}(15-5x)} = \frac{9-x^2}{15-5x} = \frac{(3+x)\cancel{(3-x)}}{5\cancel{(3-x)}} = \frac{3+x}{5}$$

Svar: $\frac{3+x}{5}$

b) Skriv först ihop $1+\frac{1}{x^2}$. Utnyttja sedan reglerna för division.

$$\frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{\cancel{(x^2+1)}x^2}{\cancel{(x^2+1)}} = x^2$$

Svar: x^2

c) Skriv först ihop de övre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och faktorisera ut -1.

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \frac{(y-x)(xy)^{\cancel{2}}}{\cancel{xy}(x^2-y^2)} = \frac{(y-x)(xy)}{(x-y)(x+y)} = \frac{\cancel{(y-x)}(xy)}{-\cancel{(y-x)}(x+y)} = -\frac{xy}{x+y}$$

Svar: $-\frac{xy}{x+y}$

2.9 a) Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och den andra kvadreringsregeln bakvänt.

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2} = \frac{\frac{x^2-y^2}{yx}}{\frac{x^2+y^2-2xy}{yx}} = \frac{\cancel{yx}(x+y)\cancel{(x-y)}}{\cancel{yx}(x-y)^{\cancel{2}}} = \frac{x+y}{x-y}$$

Svar: $\dfrac{x+y}{x-y}$

b) Skriv först ihop de övre och undre bråken. Utnyttja sedan reglerna för division och konjugatregeln bakvänt två gånger.

$$\frac{\frac{16x^4}{81}-y^4}{\frac{2x}{3}+y} = \frac{\frac{16x^4-81y^4}{81}}{\frac{2x+3y}{3}} = \frac{\cancel{3}(16x^4-81y^4)}{\cancelto{27}{81}(2x+3y)} = \frac{(4x^2+9y^2)(4x^2-9y^2)}{27(2x+3y)} =$$

$$= \frac{(4x^2+9y^2)\cancel{(2x+3y)}(2x-3y)}{27\cancel{(2x+3y)}} = \frac{8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3}{27} =$$

$$= \frac{1}{27}(8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3)$$

eller

$$\ldots\frac{(4x^2+9y^2)\cancel{(2x+3y)}(2x-3y)}{27\cancel{(2x+3y)}} = \frac{(4x^2+9y^2)(2x-3y)}{9\cdot 3} =$$

$$= \frac{4x^2+9y^2}{9}\cdot\frac{2x-3y}{3} = \left(\frac{4x^2}{9}+y^2\right)\left(\frac{2x}{3}-y\right)$$

Svar: $\dfrac{1}{27}(8x^3-12x^2y+18xy^2-27y^3)$ eller $\left(\dfrac{4x^2}{9}+y^2\right)\left(\dfrac{2x}{3}-y\right)$

c) Skriv ihop de övre och undre bråken.

$$\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{(x-\cancel{1}+x+\cancel{1})\cancel{(x+1)(x-1)}}{(\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1))\cancel{(x+1)(x-1)}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = x$$

Svar: x

2.10 a) Sätt in i formeln och förläng till minsta gemensamma nämnare.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{13}{12} \Leftrightarrow R = \frac{12}{13}\Omega$$

Svar: $\dfrac{12}{13}\Omega$

b) Använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5}+\frac{1}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{R+5}{5R} \Leftrightarrow 5x = 3R+15 \Leftrightarrow 2R = 15 \Leftrightarrow R = \frac{15}{2}\Omega$$

Svar: $\dfrac{12}{13}\Omega$

2.11 Sätt in i formel och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{600} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{600+a}{600a} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 60000+100a = 600a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 500a = 60000 \Leftrightarrow a = \frac{60000}{500} = 120 \text{ mm}$$

Svar: 120 mm

2.12 Utnyttja att $1 = 2/2 = 3/3$ osv. och använd räkneregler för division.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2+1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

Svar: $\frac{3}{5}$

2.13 Förläng med konjugatet för att bli av med roten i nämnaren.

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5}{4-5} = -(6-\sqrt{5}-5) = \sqrt{5}-1$$

Svar: $\sqrt{5}-1$

2.14 a) Förläng med konjugatet.

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4}{9-2} = \frac{\cancel{7}+\cancel{7}\sqrt{2}}{\cancel{7}} = 1+\sqrt{2}$$

Svar: $1+\sqrt{2}$

b) Förläng med konjugatet.

$$\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{13}-\sqrt{11})} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{13-11} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$$

Svar: $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$

c) Förläng med konjugatet.

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} =$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1)} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\cancel{2}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

Svar: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

2.15 a) Faktorisera ena roten för att få samma rot i båda termerna.

$$\sqrt{12}-\sqrt{3} = 2\sqrt{3}-\sqrt{3} = \sqrt{3}(2-1) = \sqrt{3}$$

Svar: $\sqrt{3}$

b) faktorisera täljaren.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{\sqrt{6}}\sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{6}}} = \sqrt{7}$$

eller utnyttja reglerna för division med rötter.

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{42}{6}} = \sqrt{7}$$

Svar: $\sqrt{7}$

c) Faktorisera.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = 3\cdot 2 = 6$$

eller utnyttja reglerna för multiplikation med rötter.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{3\cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

Svar: 6

d) Faktorisera termerna i täljaren och skriv ihop.

$$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{8}}{5} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{5} = \frac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{5}} = \sqrt{2}$$

Svar: $\sqrt{2}$

e) Addera termerna i roten.

$$\sqrt{3^2+4^2} - 4 - 3 = \sqrt{25} - 7 = 5 - 7 = -2$$

Svar: -2

f) Addera termerna i roten.

$$\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Svar: 13

2.16 a) Faktorisera rötterna så alla termerna får $\sqrt{2}$ gemensamt.

$$\frac{\sqrt{168}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}+\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}(9+7)}{\cancel{\sqrt{2}}(5+1)} = \frac{9+7}{5+1} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Svar: $\frac{8}{3}$

b) Kvadrera under "roten ur"-tecknet först (minustecknet försvinner).

$$\frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

Svar: 1

c) Skriv först ihop termerna utnyttja sedan reglerna för multiplikation av rötter.

$$\left(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{36}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

Eller så används den andra kvadreringsregeln.

$$\left(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 12 - 2\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = 12 - 2\cdot\sqrt{\frac{12}{3}} + \frac{1}{3} = 12 - 4 + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = \frac{24+1}{3} = \frac{25}{3}$$

Svar: $\frac{25}{3}$

d) Använd konjugatregeln och sen kvadreringsregeln.

$$((\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{x+y})((\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{x+y}) = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(x+y) = x+2\sqrt{xy}+y-x-y = 2\sqrt{xy}$$

Svar: $2\sqrt{xy}$

2.17

$$\frac{\sqrt{216}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9\cdot 2\cdot 4\cdot 3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{3}}{\cancel{3\sqrt{2}}} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{108}}{3} = \frac{\sqrt{9\cdot 4\cdot 3}}{3} = \frac{\cancel{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Svar: Möjligt att någon får poängavdrag på grund av att hen inte förenklat, alla är dock samma tal.

2.18 a) Använd räkneregler för potenser.

$$3^4\cdot 3^2 = 3^{(4+2)} = 3^6$$

Svar: 3^6

b) Använd räkneregler för potenser.

$$2^7\cdot 2^{-3} = 2^{7-3} = 2^4$$

Svar: 2^4

c) Använd räkneregler för potenser.

$$4^2\cdot 4^{-5}\cdot 4 = 4^{2-5+1} = 4^{-2}$$

Svar: 4^{-2}

d) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

Svar: 3^4

e) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{4^5}{4^9} = 4^{5-9} = 4^{-4}$$

Svar: 4^{-4}

f) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{2^{-7}}{2^5} = 2^{-7-5} = 2^{-12}$$

Svar: 2^{-12}

2.19 a) Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$3^5 \cdot 10^5 \cdot 3^{-3} \cdot 10^3 = 3^{5-3} \cdot 10^{5+3} = 3^2 \cdot 10^8 = 9 \cdot 10^8$$

Svar: $9 \cdot 10^8$

b) Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig.

$$\frac{2^8 \cdot 5^6}{2^6 \cdot 5^5} = 2^{8-6} \cdot 5^{6-5} = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$

Svar: 20

c) Använd räkneregler för potenser på varje bas var för sig och utnyttja sedan att $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\frac{2^4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5} = 2^{4-1} \cdot 10^{4-5} = 2^3 \cdot 10^{-1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Svar: $\frac{4}{5}$

2.20 a) Använd räkneregler för potenser.

$$b^{-0.2} \cdot b^{1.7} \cdot b^{-2.5} = b^{1.7-2.5-0.2} = b^{-1}$$

Svar: b^{-1}

b) Använd räkneregler för potenser.

$$(a^3)^{-0.5} \cdot (a^{-5})^{-0.3} = a^{3\cdot(-0.5)+(-5)\cdot(-0.3)} = a^{-1.5+1.5} = a^0 = 1$$

Svar: 1

c) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a}{a^{-3.7} \cdot a^{0.5}} = a^{1-(-3.7)-0.5} = a^{4.2}$$

Svar: $a^{4.2}$

d) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{x \cdot x^{-1.6} \cdot x^{0.2}}{x^{-1.4}} = \frac{x^{1-1.6+0.2}}{x^{-1.4}} = x^{1-1.6+0.2-(-1.4)} = x$$

Svar: x

2.21 a) Faktorisera 6 och använd räkneregler för potenser.

$$\frac{3^2 \cdot 2^4}{6^3} = \frac{3^2 \cdot 2^4}{3^3 \cdot 2^3} = 3^{2-3} \cdot 2^{4-3} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

b) Använd räkneregler för potenser och att potensen 1/2 motsvarar "roten ur".

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1^{-1/2}}{4^{-1/2}} = 1 \cdot \sqrt{4} = 2$$

Svar: 2

c) Använd räkneregler för potenser och att tredje roten ur 8 är 2.

$$(\sqrt{64})^{2/3} = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

Svar: 4

d) Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$$

Svar: 3

e) Tänk på parentesen.

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 256$$

Svar: 256

f) Tänk på parentesen.

$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

Svar: 64

2.22 a) Använd räkneregler för potenser.

$$(\sqrt{5})^{-4} = (5^{1/2})^{-4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Svar: $\frac{1}{25}$

b) Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

c) Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \frac{1}{(9^{1/2})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Svar: $\frac{1}{27}$

d) Använd räkneregler för potenser och att potensen 1/2 motsvarar “roten ur”.

$$16^{1/4} = (16^{1/2})^{1/2} = 4^{1/2} = 2$$

Svar: 2

e) Använd räkneregler för potenser.

$$(8^{1/2})^{2/3} = 8^{2/6} = 8^{1/3} = 2$$

Svar: 2

f) Använd räkneregler för potenser.

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{27^{1/3}}{8^{1/3}}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 3^{-4} \cdot \frac{1}{2^{-4}} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Svar: $\frac{16}{81}$

2.23 a) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a^{3.3} \cdot a^{-2.1}}{a^{0.8}} = a^{3.3-2.1-0.8} = a^{0.4}$$

Svar: $a^{0.4}$

b) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a \cdot a^{1/2}}{a^{2/3}} = a^{1+1/2-2/3} = a^{5/6}$$

Svar: $a^{5/6}$

c) Använd räkneregler för potenser.

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[6]{x^{-1}} \cdot (x^2)^{2/3} = x^{1/3 \cdot 1/2} \cdot x^{-1 \cdot 1/6} \cdot x^{2 \cdot 2/3} = x^{1/6} \cdot x^{-1/6} \cdot x^{8/6} = x^{4/3}$$

Svar: $x^{4/3}$

d) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{\frac{1}{a}}} = \frac{(a^3a^{1/2})^{1/4}}{(a^{-1})^{1/8}} = \frac{a^{7/8}}{a^{-1/8}} = a^{8/8} = a$$

Svar: a

e) Använd räkneregler för potenser.

$$\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}} = \frac{(x^2y^{5/2})^{1/4}}{x^{1/2}y^{1/2}} = \frac{\cancel{x^{1/2}}y^{5/8}}{\cancel{x^{1/2}}y^{1/2}} = y^{5/8-4/8} = y^{1/8}$$

Svar: $y^{1/8}$

f) Använd räkneregler för potenser.

$$\left(ab\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^2 = \left(ab\left(\frac{a^3}{(b^{3/2})^{1/2}}\right)^{1/4}\right)^2 = \left(ab\frac{a^{3/4}}{b^{3/16}}\right)^2 = a^2b^2\frac{a^{6/4}}{b^{6/16}} = a^{8/4+6/4}b^{32/16-6/16} = a^{7/2}b^{13/8}$$

Svar: $a^{7/2}b^{13/8}$

2.24 Använd räkneregler för potenser.

$$(4^x)^5 = \frac{(2^6 \cdot 5^5)^3}{(2^4 \cdot 5^2)^4} \cdot \frac{2^{18}}{5^7} = \frac{2^{18} \cdot 5^{15}}{2^{16} \cdot 5^8} \cdot \frac{2^{18}}{5^7} = 2^2 \cdot \cancel{5^7} \cdot \frac{2^{18}}{\cancel{5^7}} = 2^{20}$$

$$(4^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow ((2^2)^x)^5 = 2^{20} \Leftrightarrow 2^{10x} = 2^{20} \Leftrightarrow x = 2$$

Svar: $x = 2$

Polynom och rationella uttryck

2.25 a) Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

b) Första kvadreringsregeln.

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

c) Konjugatregeln.

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$$

d) Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

e) Faktorisera.

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2+1)$$

f) Andra kvadreringsregeln.

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

g) Konjugatregeln.

$$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a+b)(a-b)$$

h) Första kvadreringsregeln.

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = b(a^2 + 2ab + b^2) = b(a+b)^2$$

i) Andra kvadreringsregeln.

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 - 2ab + b^2) = ab(a-b)^2$$

2.26 a) Faktorisera.

$$x(x+2) - 4(x+2) = (x-4)(x+2)$$

b) Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$x^2(x^2-9) + x^2 - 9 = (x^2+1)(x^2-9) = (x^2+1)(x+3)(x-3)$$

c) Använd konjugatregeln två gånger.

$$x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$$

d) Faktorisera.

$$(a+b)(a-b) + a^2 - ab = (a+b)(a-b) + a(a-b) = (a+b+a)(a-b) = (2a+b)(a-b)$$

e) Skriv om 4 som 2^2 och använd konjugatregeln.

$$(a-b)^2 - 4 = (a-b)^2 - 2^2 = (a-b+2)(a-b-2)$$

f) Använd andra kvadreringsregeln följt av konjugatregeln.

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2-b^2)^2 = ((a+b)(a-b))^2 = (a+b)^2(a-b)^2$$

2.27 a) Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2 - 7x + xy - 7y = (x^2+xy) - (7x+7y) = x(x+y) - 7(x+y) = (x-7)(x+y)$$

b) Faktorisera två gånger på vartannat.

$$a^6 - a^4 + a^2 - 1 = a^4(a^2-1) + (a^2-1) = (a^4+1)(a^2-1) = (a^4+1)(a+1)(a-1)$$

c) Faktorisera två gånger på vartannat.

$$x^2y + 2x^2 - y - 2 = x^2(y+2) - (y+2) = (x^2-1)(y+2) = (x+1)(x-1)(y+2)$$

d) Faktorisera, använd andra kvadreringsregeln och sist konjugatregeln.

$$7x^5 + 7xy^4 - 14x^3y^2 = 7x(x^4+y^2-2x^2y^2) = 7x(x^2-y^2)^2 = 7x(x+y)^2(x-y)^2$$

e) Använd konjugatregeln.

$$a^2 - (b+c)^2 = (a+b+c)(a-b-c)$$

f) Använd först konjugatregeln och sen båda kvadreringsreglerna.

$$(x^2+y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy) = (x+y)^2(x-y)^2$$

g) Använd konjugatregeln följt av båda kvadreringsreglerna och sen konjugatregeln igen.

$$\begin{aligned}(x^2+y^2-z^2)^2 - 4x^2y^2 &= (x^2+y^2-z^2+2xy)(x^2+y^2-z^2-2xy) = \\ =&((x+y)^2-z^2)((x-y)^2-z^2) = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)\end{aligned}$$

2.28 a) Kvadratkomplettera.

$$x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 9 + 7 = (x+3)^2 - 2$$

b) Kvadratkomplettera.

$$x^2 - 7x + 13 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 13 = (x - \frac{7}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

c) Perfekt kvadrat.

$$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2 - 81 + 81 = (x+9)^2$$

d) Kvadratkomplettera.

$$x^2 + 5x = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

e) Eftersom uttrycket saknar x-term går det inte att kvadratkomplettera.

2.29 b följer av att det kommer vara 2 x-termer i högerledet och c av att de konstanta termerna ska ta ut varandra i högerledet.

$$x^2 + ax = (x+b)^2 + c$$
$$b = \frac{a}{2}$$
$$c = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}$$

Svar: $b = \frac{a}{2}$, $c = -\frac{a^2}{4}$

2.30 a) Faktorisera och använd konjugatregeln.

$$\frac{4x^2-4}{2x+2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}(x^2-1)}{\cancel{2}(x+1)} = \frac{2\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = 2x-2$$

Svar: $2x-2$

b) Använd konjugatregeln och andra kvadreringsregeln.

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Svar: $\frac{x+1}{x-1}$

c) Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x^2-y^2}{(xy)^2} = \frac{\cancel{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}}{(xy)^2} = \frac{0}{(xy)^2} = 0$$

Svar: 0

2.31 a) Använd konjugatregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{2}{3x+9} + \frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{2x-6} = \frac{2}{3(x+3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{2(x-3)} =$$
$$= \frac{4(x-3)+6x-3(x+3)}{6(x+3)(x-3)} = \frac{4x-12+6x-3x-9}{6(x+3)(x-3)} = \frac{7x-21}{6(x+3)(x-3)} =$$
$$= \frac{7\cancel{(x-3)}}{6(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{7}{6x+18}$$

Svar: $\frac{7}{6x+18}$

b) Skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{5}{x-1} + \frac{8}{x+1} - \frac{3x+7}{x^2-1} = \frac{5(x+1)+8(x-1)-(3x+7)}{x^2-1} =$$
$$= \frac{5x+5+8x-8-3x-7}{x^2-1} = \frac{10x-10}{(x+1)(x-1)} = \frac{10\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} =$$
$$= \frac{10}{x+1}$$

Svar: $\frac{10}{x+1}$

2.32 a) Använd andra kvadreringsregeln och skriv ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{3x-y}{x^2-2xy+y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{2y}{(x-y)^2}=\frac{3x-y-2(x-y)-2y}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{3x-y-2x+\cancel{2y-2y}}{(x-y)^2}=\frac{\cancel{x-y}}{(x-y)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x-y}$$

Svar: $\dfrac{1}{x-y}$

b) Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}=\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(a+2b)(a-2b)}=$$
$$=\frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2\cancel{-2ab+2ab}+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$$

Svar: $\dfrac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.33 Använd första kvadreringsregeln och konjugatregeln. Skriv sedan ihop termerna på samma bråkstreck (förläng).

$$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}=\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(a+2b)(a-2b)}=$$
$$=\frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2\cancel{-2ab+2ab}+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}=\frac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$$

Svar: $\dfrac{a^2+4b^2}{(a+2b)^2(a-2b)}$

2.34 a) Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:

Ekvation:

$$(x^5+3x^4-2x^3+2x-1):(x^3+x+1)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}&(x^5+3x^4-2x^3+2x-1)=(x^3+x+1)(x^2+Ax+B)+Cx^2+Dx+E=\\=&x^5+Ax^4+Bx^3+x^3+Ax^2+Bx+x^2+Ax+Cx^2+Dx+E=\\=&x^5+Ax^4+(B+1)x^3+(A+C+1)x^2+(A+B+D)x+(B+E)\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases}A&=3\\B+1&=-2\\A+C+1&=0\\A+B+D&=2\\B+E&=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=-3\\C=-4\\D=2\\E=2\end{cases}$$

Kvot: x^2+3x-3

Rest: $-4x^2+2x+2$

b) Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:
Ekvation:

$$(x^6 - 1) : (x - 1)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}
&(x^6 - 1) = (x-1)(x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + F = \\
=&x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex - x^5 - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - Dx - E + F = \\
=&x^6 + (A-1)x^5 + (B-A)x^4 + (C-B)x^3 + (D-C)x^2 + (E-D)x + (-E+F)
\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-1 &= 0 \\ B-A &= 0 \\ C-B &= 0 \\ D-C &= 0 \\ E-D &= 0 \\ F-E &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 1 \\ E = 1 \\ F = 0 \end{cases}$$

Kvot: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Rest: ingen

c) Lös genom polynomdivision eller genom ansättning som visas nedan:
Ekvation:

$$(x^4 + 2x^3 + 25) : (x^2 + 4x + 5)$$

Ansätter lösning:

$$\begin{aligned}
&(x^4 + 2x^3 + 25) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + Ax + B) + Cx + D = \\
=&x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 4x^3 + 4Ax^2 + 4Bx + 5x^2 + 5Ax + 5B + Cx + D = \\
=&x^4 + (A+4)x^3 + (B+4A+5)x^2 + (4B+5A+C)x + (5B+D)
\end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A+4 &= 2 \\ B-4A+5 &= 0 \\ 4B+5A+C &= 0 \\ 5B+D &= 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \\ C = -2 \\ D = 10 \end{cases}$$

Kvot: $x^2 + 3x - 3$

Rest: $-4x^2 + 2x + 2$

2.35 a) Konjugatregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x+2$ eller $x-2$).

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

b) Första kvadreringsregeln bakvänt. (Går också att lösa med polynomdivision om $g(x)$ ansätts som $x+1$).

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

c) Faktorisera och använd konjugatregeln bakvänt. (går att lösa med polynomdivision).

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$$

d) Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x+A) = x^2 + Ax - x - A$$

Identifierar variabeln:

$$A - 1 = -3 \Leftrightarrow A = -2$$

Sätt in:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Svar: $(x-1)(x-2)$

e) Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$2 - x - x^2 = (x-1)(-x+A) = -x^2 + Ax + x - A$$

Identifierar variabeln:

$$A + 1 = -1 \Leftrightarrow A = -2$$

Sätt in:

$$2 - x - x^2 = (x-1)(-x-2)$$

Svar: $(x-1)(-x-2)$

f) Faktorisera och använd andra kvadreringsregeln.

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$$

2.36 a) Konjugatregeln.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

b) Finns inga reella faktorer.

c) Hittar lösningen $x = 1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B = \\ &= x^3 + (A-1)x^2 + (B-A)x - B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Sätt in:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

Svar: $(x-1)(x^2 + x + 1)$

d) Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} &x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + x^2 + Ax + B = \\ =&x^3 + (A+1)x^2 + (B+A)x + B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ B + A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Sätt in:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Svar: $(x+1)(x^2 - x + 1)$

e) Hittar lösningen $x = -1$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} &x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = \\ =&x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C = \\ =&x^4 + (A-1)x^3 + (B-A)x^2 + (C-B)x - C \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Sätt in och faktorisera:

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x-1)(x^2(x+1) + x + 1) = (x-1)(x^2+1)(x+1)$$

Svar: $(x-1)(x^2+1)(x+1)$

f) Hittar lösningen $x = -3$ och $x = 0$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} &x^4 + 27x = x(x^3 + 27) = x(x+3)(x^2 + Ax + B) = \\ =&x(x^3 + Ax^2 + Bx + 3x^2 + 3Ax + 3B) = \\ =&x(x^3 + (A+3)x^2 + (B+3A)x + 3B) \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$A + 3 = 0, \quad B + 3A = 0, \quad 3B = 27 \Leftrightarrow A = -3, \quad B = 9$$

Sätt in:

$$x^4 + 27x = x(x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

Svar: $x(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

g) Skriv om x^6 till $(x^3)^2$ och använd konjugatregeln bakvänt. Faktorisera sedan faktorerna var för sig.

$$x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 + 8)(x^3 - 8)$$

Hittar lösningen $x = -2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} &x^3 + 8 = (x+2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx + 2x^2 + 2Ax + 2B = \\ =&x^3 + (A+2)x^2 + (B+2A)x + 2B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A + 2 = 0 \\ B + 2A = 0 \\ -2B = -8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$\begin{aligned} &x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + Ax + B) = x^3 + Ax^2 + Bx - 2x^2 - 2Ax - 2B = \\ =&x^3 + (A-2)x^2 + (B-2A)x - 2B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$A - 2 = 0, \quad B - 2A = 0, \quad -2B = -8 \rightarrow A = 2, \quad B = 4$$

Sätt in:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Slå samman:

$$x^6 - 64 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Svar: $(x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

2.37 Delar upp problemet i delproblem efter varje faktorisering.

Ekvation: $p(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$

$$p(1) = 1^5 - 10 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = \\ &= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx - x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = \\ &= x^5 + (A-1)x^4 + (B-A)x^3 + (C-B)x^2 + (D-C)x - D \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = -10 \\ D - C = 15 \\ -D = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -9 \\ D = 6 \end{cases}$$

$$p(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6)$$

Ekvation: $p_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6$

$$p_1(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 - 9 \cdot 1 + 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x-1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = \\ &= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx - x^3 - Ax^2 - Bx - C = \\ &= x^4 + (A-1)x^3 + (B-A)x^2 + (C-B)x - C \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 1 \\ B - A = 1 \\ C - B = -9 \\ D - C = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -6 \end{cases}$$

$$p_1(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 + 3x - 6)$$

Ekvation: $p_2(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 6$

$$p_2(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 0$$

Hittar lösningen $x = 1$, använder faktorsatsen och ansätter lösning:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x-1)(x^2 + Ax + B) = \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx - x^2 - Ax - B = \\ &= x^3 + (A-1)x^2 + (B-A)x - B \end{aligned}$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 1 = 2 \\ B - A = 3 \\ -B = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 6 \end{cases}$$

Ekvation: $p_3(x) = x^2 + 3x + 6$

$$p_2(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 6 = 10 \qquad (x = 1 \text{ är inte en lösning})$$

pq-formeln:

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 6} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x^2+3x+6) = (x-1)^3(x^2+3x+6)$$

Svar: $(x-1)^3(x^2+3x+6)$, multipliciteten för $x = 1$ är 3

2.38 Ekvationen: $p(x) = x^3 - 2x - 4$

Hittar lösningen $x = 2$ och använder faktorsatsen. Ansätter sedan en lösning (kan lösas med polynomdivision).

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2+Ax+B) = x^3 + (A-2)x^2 + (B-2A)x - 2B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A - 2 = 0 \\ B - 2A = -2 \\ -2B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$p(x) = (x-2)(x^2+2x+2)$$

$p_1(x) = x^2 + 2x + 2$
pq-formeln:

$$x = -1 \pm \sqrt{1-2} \Rightarrow \text{Finns ingen reell lösning}$$

Svar: $(x-2)(x^2+2x+2)$

Kapitel 3: Ekvationer och olikheter

Ekvationer

3.1 a) Utnyttja faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

b) $x(x^2 - 4) = 0$. Faktorisera först $x^2 - 4$ med konjugatregeln.

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Svar: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$

c)

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2 + 10x + 24 = 0$. $a = 4$ och $b = 6$.

$$(x+4)(x+6) = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 24} = -5 \pm 1$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x+5)^2 - 25 + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 5 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -5 \pm 1$$

Svar: $x_1 = -4$ och $x_2 = -6$

d)

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

Alternativ 1:

Faktorisera genom att gissa a och b så $(x+a)(x+b) = x^2 + 10x + 25 = 0$. $a = 5$ och $b = 5$.

$$(x+5)^2 = 0$$

Utnyttja sedan faktorsatsen (varje faktor är ett nollställe).

Alternativ 2:

Använd pq-formeln:

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 25} = -5 \pm \sqrt{0} = -5$$

Alternativ 3:

Använd kvadratkomplettering:

$$(x+5)^2 - 25 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Svar: $x_{1,2} = -5$

e)

$$x^3 + 10x^2 + 24x = 0$$

Faktorisera ut x ur vänsterledet.

$$x(x^2 + 10x + 24) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2 + 10x + 24$ (se **c)**). Nollproduktionsmetoden ger också lösningen $x = 0$.

Svar: $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ och $x_3 = 0$

f)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0$$

Faktorisera ut x^2 ur vänsterledet.

$$x^2(x^2 + 10x + 25) = 0$$

Hitta nollställena till $x^2 + 10x + 25$ (se **d)**). Nollproduktionsmetoden ger också dubbelroten $x = 0$.

Svar: $x_{1,2} = -5$ och $x_{3,4} = 0$

3.2 a)

$$x^2 + 4x + a = 0, \quad x = 2$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut a.

$$2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 + 8 + a = 0 \;\Leftrightarrow\; a = -12$$

Svar: $a = -12$

b)

$$x^2 + bx + 12 = 0, \quad x = 3$$

Sätt in värdet för x i ekvationen och lös ut b.

$$3^2 + 3b + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 9 + 3b + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3b = -21 \;\Leftrightarrow\; b = -7$$

Svar: $b = -7$

3.3 a)

$$p(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

b)

$$p(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \;\Rightarrow\; x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x-2)(x+\frac{1}{2})$

Svar: $p(x) = (x-2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

c)

$$p(x) = -x^2 + x + 12$$

$$-x^2 + x + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 12 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

Faktorsatsen ger: $p(x) = (x-4)(x+3)$

Svar: $p(x) = (x-4)(x+3)$

d)

$$p(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$x(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm 0 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1}{2}$$

Faktorsatsen ger: $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$

$$p(x) = x \cdot g(x) = x(x - \tfrac{1}{2})^2$$

Svar: $p(x) = x\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

e)

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 15x = 3x(x^2 - 2x + 5)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$x(x^2 - 2x + 5) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot g(x) = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering) på $g(x) = 0$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1-5} \;\Rightarrow\; \text{Saknar reell lösning}$$

Faktorsatsen ger då att $g(x)$ inte kan faktoriseras.

Svar: $p(x) = 3x(x^2 - 2x + 5)$

f)

$$p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$$

Använd variabelsubstitution så pq-formeln kan användas.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0, \quad t = x^2 \;\Rightarrow\; t^2 - 6t + 8 = 0$$

Använd pq-formeln (eller kvadratkomplettering).

$$t = 3 \pm \sqrt{9-8} \;\Leftrightarrow\; t = 3 \pm 1 \;\Rightarrow\; t_1 = 4, \quad t_2 = 2$$

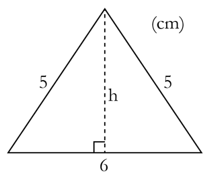
$$x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm 2$$

$$x^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

Faktorsatsen ger då $p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Svar: $p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

3.4



Satsen om likbent triangel ger att båda rätvinkliga trianglarna är kongruenta vilket medför att basen för båda är 3cm. Pyth. sats ger att $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow$ arean: $6 \cdot 4/2 = 12\text{cm}^2$ och omkretsen är 16cm.

Låt benen vara y och basen $h = \sqrt{y^2 - (x/2)^2}$

area: $\dfrac{x \cdot h}{2} = \dfrac{x\sqrt{y^2-(x/2)^2}}{2} = 12cm \;\Leftrightarrow\; x\sqrt{y^2-(x/2)^2} = 24\text{cm}$

omkrets: $2y + x = 16\text{cm} \;\Leftrightarrow\; x = 16 - 2y$

$$(16-2y)\sqrt{y^2-(8-y)^2} = 24 \;\Leftrightarrow\; 2(8-y)4\sqrt{y-4} = 24 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8-y)\sqrt{y-4} = 3 \;\Rightarrow\; (y^2 - 16y + 64)(y-4) = 9 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 4y^2 - 16y^2 + 64y + 64y - 256 = 9 \;\Leftrightarrow\; y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = 0$$

Ansätter lösning med $x - 5$ som faktor från ursprungsfiguren (kan lösas med polynomdivision också):

$$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (y-5)(y^2 + Ay + B) = y^3 + (A-5)y^2 + (B-5A)y - 5B$$

Identifierar variablerna:

$$\begin{cases} A - 5 = -20 \\ B - 5A = 128 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A = -15 \\ B = 53 \end{cases}$$

$$y^3 - 20y^2 + 128y - 265 = (y-5)(y^2 - 15y + 53)$$

$$y^2 - 15y + 53 = 0$$

pq-formeln:

$$y = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{15^2 - 212}{4}} = \frac{15 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$y_1 = \frac{15+\sqrt{13}}{2} \;\Rightarrow\; x = 16 - 15 - \sqrt{13} \;\Rightarrow\; x < 0 \;\Rightarrow\; \text{falsk rot}$$

$$y_2 = \frac{15-\sqrt{13}}{2} \;\Rightarrow\; x = 16 - 15 + \sqrt{13} = 1 + \sqrt{13}$$

Svar: $x = 1 + \sqrt{13}$ och $y = \dfrac{15-\sqrt{13}}{2}$

3.5 a)

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)+x^2-1+x(x-1)}{x(x^2-1)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$

Faktorsatsen ger då: $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Svar: $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

b)

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4} \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{\cancel{x}-4-\cancel{x}+3}{(x-3)(x-4)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x^2-7x+12} \Rightarrow \cancel{x^2}-3x+2=\cancel{x^2}-7x+12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Svar: $x=\frac{5}{2}$

c)

$$\frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2+3x}=0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}(x+3)+\cancel{x}(x-2)}{x^{\cancel{2}}(x-2)(x+3)}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+3+x-2=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Svar: $x=-\frac{1}{2}$

d)

$$\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2}{4-x^2} \Leftrightarrow \frac{x-2-(x+2)^2}{x^2-4}=\frac{x^2}{4-x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (4-x^2)(-x^2-3x-6)=x^2(x^2-4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\cancel{4x^2}-12x-24+\cancel{x^4}+3x^3+6x^2=\cancel{x^4}-\cancel{4x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3+2x^2-4x-8=0$$

Gissar en lösning till ekvationen och hittar $x=2$. Ansätter lösning med $x-2$ som faktor (kan lösas med polynomdivision också):

$$x^3+2x^2-4x-8=(x-2)(x^2+Ax+B)=x^3+(A-2)x^2+(B-2A)x-2B$$

Identifierar variabler:

$$\begin{cases} A-2=2 \\ B-2A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=4 \end{cases}$$

$$(x-2)(x^2+4x+4)=0$$

Kvadreringsregeln:

$$(x-2)(x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)^2=0$$

Faktorsatsen: $x_1=2$ och $x_{2,3}=-2$. Både 2 och -2 är dock falska rötter då de resulterar i nolldivision i ursprungsekvationen.

Svar: Ekvationen saknar lösning

3.6 Formeln för hastighet, sträcka och tid är $s = v \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$. Låt x vara båtens hastighet i stillastående vatten. Den totala tiden för resan är tiden dit (t_1) plus tiden tillbaka (t_1) $(t_1 + t_2 = t)$. Hastigheten båten har dit (v_1) kan beskrivas som $x - 2.4$ och hastigheten hem (v_2) som $x + 2.4$. $t = 2$ och $s = 6.4$.

$$t_1 + t_2 = t \Leftrightarrow \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = t$$

$$\frac{6.4}{x-2.4} + \frac{6.4}{x+2.4} = 2 \Leftrightarrow \frac{6.4(x+2.4)+6.4(x-2.4)}{(x-2.4)(x+2.4)} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6.4(2x + \cancel{2.4 - 2.4}) = 2(x^2 - 2.4^2) \Leftrightarrow \cancel{2} \cdot 6.4x = \cancel{2}(x^2 - 2.4^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6.4x - 5.76 = 0$$

pq-formeln:

$$x = 3.2 \pm \sqrt{10.24 + 5.76} = 3.2 \pm \sqrt{16} = 3.2 \pm 4$$

$x_1 = 7.2$ och $x_2 = -0.8$. Eftersom hastigheten i uppgiften inte kan vara negativ gäller endast x_1.

Svar: 7.2 km/h

3.7 a)

$$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).

Svar: $x = 2$

b)

$$\sqrt{x+2} = -x \Rightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 2$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).

$x_2 = -1$

Svar: $x = -1$

c)

$$x - \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x - 4 \Rightarrow x - 2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

pq-formeln:

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 6$

$x_2 = 3$ Falsk rot (sätt in i ursprungsekvationen).

Svar: $x = 6$

3.8 a)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \;\Rightarrow\; x+2 = 2x+1 \;\Leftrightarrow\; x = 1$$

Svar: $x = 1$

b)

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+1} \;\Rightarrow\; 3x+2 = 2x+1 \;\Leftrightarrow\; x = -1 \quad \text{Falsk rot.}$$

Svar: Ekvationen saknar lösning

c)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x+2 = x \;\Leftrightarrow\; 2 = 0 \quad \text{Ej ekvivalent.}$$

Svar: Ekvationen saknar lösning

d)

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x+3} = x \;\Rightarrow (x-2)(x+3) = x^2 \;\Leftrightarrow\; \cancel{x^2} + x - 6 = \cancel{x^2} \;\Leftrightarrow\; x = 6$$

Svar: $x = 6$

e)

$$(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) = 8\sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; 9 - x = 8\sqrt{x} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 64x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 82x + 81 = 0$$

pq-formeln:

$$x = 41 \pm \sqrt{41^2 - 81} = 41 \pm 40$$

$x_1 = 81$ falsk rot.

$x_2 = 1$

Svar: $x = 1$

f)

$$\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{3+x} \;\Leftrightarrow\; x = 3 + \sqrt{x(3+x)} \;\Leftrightarrow\; x - 3 = \sqrt{3x + x^2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 6x + 9 = 3x + \cancel{x^2} \;\Leftrightarrow\; 9x = 9 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \quad \text{Falsk rot.}$$

Svar: Lösning saknas

Ekvationer

3.9 $2 < 3 \Leftarrow$ är ”2 **mindre** än 3”? Ja

$2 \leq 3 \Leftarrow$ är ”2 **mindre** eller lika med 3”? Ja

$2 \leq 2 \Leftarrow$ är ”2 mindre eller **lika med** 2”? Ja

Svar: Alla tre

3.10 Nedan visar jag min tankeprocess för att lösa uppgiften.

$$\frac{2}{0.02} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{10^{-2}} = 1 \cdot 10^2 = 100$$
$$\frac{31}{0.2} = \frac{31}{2} \cdot \frac{1}{10^{-1}} = 15.5 \cdot 10 = 155$$
$$\frac{0.00009}{0.000006} = \frac{9}{6} \cdot \frac{10^{-5}}{10^{-6}} = 1.5 \cdot 10 = 15$$

Svar: $\dfrac{0.00009}{0.000006} < \dfrac{2}{0.02} < \dfrac{31}{0.2}$

3.11 a) $3x + 1 < 2 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$

Svar: $x < \frac{1}{3}$

b) $-3x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

Svar: $x \geq \frac{1}{3}$

c) $3x + 1 > 4x + 5 \Leftrightarrow x < -4$

Svar: $x < -4$

d) $(x-3)(x+3) \leq x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 9 \leq \cancel{x^2} \Leftrightarrow -9 \leq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

Svar: $x \in \mathbb{R}$

3.12 a) Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$\frac{x+4}{x-1} > 0$$

x		-4		1	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x > 1$ eller $x < -4$

b) Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger negativa värden.

$$\frac{x+4}{x-1} < 0$$

Svar: teckentabellen i **a)** ger: $-4 < x < 1$

c) Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{x+1}{x(x-1)} < 0$$

x		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\wr$	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x < -1$ eller $0 < x < 1$

d) Använd en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$(x+2)(2x-1) > 0$$

x		-2		$1/2$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(2x-1)$	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x < -2$ eller $x > 1/2$

3.13 Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{3x+1}{x+2} < 2 \Leftrightarrow \frac{3x+1-2(x+2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 0$$

x		-2		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x+2}$	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$

Svar: $-2 < x < 3$

3.14 a) Se sidorna 44-45 i läroboken för förklaring till varför det fungerar såhär.

$$\frac{x^2+1}{x} < x$$

om $x > 0$: $\frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \cancel{x^2}+1 < \cancel{x^2} \Leftrightarrow 1 < 0$

om $x < 0$: $\frac{x^2+1}{x} < x \Leftrightarrow \cancel{x^2}+1 > \cancel{x^2} \Leftrightarrow 1 > 0$

$1 < 0$ är alltid sant vilket innebär att skillnaden gäller för alla x mindre än noll.

Svar: $x < 0$

b) Skriv om olikheten så att högerledet blir noll och allt i vänsterledet hamnar på samma bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{2x^2}{x+2} < x-2 \Leftrightarrow \frac{2x^2-(x+2)(x-2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x^2-\cancel{x^2}+4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+2} < 0$$

x		-2	
x^2+4	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+4}{x+2}$	$-$	$\wr$	$+$

Svar: $x < -2$

c) Eftersom x^2 aldrig kan bli negativt behövs inget motsvarade det i uppgift **a)** göras.

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+2 > \cancel{x^2}+1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

Svar: Alla x

3.15 a) Skriv om olikheten så att allt är i vänsterledet och använd konjugatregeln baklänges. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2-4 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) < 0$$

x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Svar: $-2 < x < 2$

b) Utnyttja teckentabellen i förra uppgiften men ta intervallet som ger positiva värden.

Svar: teckentabellen i **a)** ger: $x < -2$ eller $x > 2$

c) Använd kvadreringsregeln och lös olikheten.

$$(x+1)^2 > (x+5)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 > \cancel{x^2} + 10x + 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -24 > 8x \Leftrightarrow x < -3$$

Svar: $x < -3$

3.16 Förenkla vänsterledet, flytta över ettan och skriv allt på ett gemensamt bråkstreck. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger negativa värden.

$$\frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{1-x^4-2x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{-x^4-2x^2} < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x^4-(-x^4-2x^2)}{-x^2(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)} < 0$$

x		0	
$2x^2+1$	$+$	$+$	$+$
$-x^2$	$-$	0	$-$
x^2+2	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{2x^2+1}{-x^2(x^2+2)}$	$-$	$\wr$	$-$

Svar: $x \neq 0$

3.17 a) Lös ekvationen genom att multiplicera termerna med x. Faktorisera sedan täljaren. Notera att grundekvationen inte är definierad för $x = 0$ därför implicerar endast den första ekvationen den andra.

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

Faktorsatsen ger: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

Svar: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

b) Skriv om olikheten så alla termer står på samma bråkstreck i vänsterledet. Använd sedan en teckentabell och hitta intervallet/n som ger positiva värden.

$$x + \frac{4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-1)}{x} > 0$$

x		0		1		4	
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(x-4)(x-1)}{x}$	$-$	$\wr$	$+$	0	$-$	0	$+$

Svar: $0 < x < 1$ eller $x > 4$