# Tillämpad matematik - Linjära system
# FMAF10

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

8 mars 2017

# Kapitel 1: Svängningar och komplexa tal

**1.1 a)** Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ där $\omega$ är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 3\sin(2t - 5) \Rightarrow \omega = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}$$

**Svar:** vinkelfrekvens: 2, period: $\pi$, frekvens: $\frac{1}{\pi}$

**b)** Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ där $\omega$ är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 50\sin(100\pi t + 1) \Rightarrow \omega = 100\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 50$$

**Svar:** vinkelfrekvens: $100\pi$, period: $\frac{1}{50}$, frekvens: 50

**1.2 a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**e)**

**f)**

**1.3** Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ från formelbladet.

$$\begin{aligned} u(t) =& 6\sin(3t + \frac{\pi}{4}) = 6(\sin(3t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(3t)\sin(\frac{\pi}{4})) = \\ =& 6\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3t) + 6\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3t) = 3\sqrt{2}\cos(3t) + 3\sqrt{2}\sin(3t) \end{aligned}$$

**Svar:** $a = b = 3\sqrt{2}, \omega = 3 \Rightarrow 3\sqrt{2}\cos(3t) + 3\sqrt{2}\sin(3t)$

**1.4 a)** låt $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\alpha\cos(\omega t) + A\cos\alpha\sin(\omega t) = \sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t)$ där $A$ är amplituden och $\alpha$ är fasförskjutningen.

$$\begin{cases} A\sin\alpha = \sqrt{3} \\ A\cos\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\alpha)^2 + (A\cos\alpha)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2}\sqrt{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = \sqrt{4} \Rightarrow A\sqrt{1} = 2 \Leftrightarrow A = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan(-\frac{\sqrt{3}}{1}) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0)$$

eller:

$$u(t) = \sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(\omega t)) =$$

$$= 2(\sin\frac{2\pi}{3}\cos(\omega t) + \cos\frac{2\pi}{3}\sin(\omega t)) = \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

**Svar:** Amplitud: 2 och fasförskjutning: $\frac{2\pi}{3}$

**1.4 b)** låt $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\alpha\cos(\omega t) + A\cos\alpha\sin(\omega t) = -2\cos(\omega t) - 4\sin(\omega t)$ där $A$ är amplituden och $\alpha$ är fasförskjutningen.

$$\begin{cases} A\sin\alpha = -2 \\ A\cos\alpha = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\alpha)^2 + (A\cos\alpha)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2}\sqrt{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = \sqrt{4+16} \Rightarrow A\sqrt{1} = \sqrt{20} \Leftrightarrow A = 2\sqrt{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{1}{2} + \pi \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0)$$

**Svar:** Amplitud: $2\sqrt{5}$ och fasförskjutning: $\arctan\frac{1}{2} + \pi$

**1.5 a)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

**Svar:** $|i| = 1$

**b)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

**Svar:** $|-i| = 1$

**c)** Eftersom $\left|e^{i\phi}\right| = 1$ oberoende av vad vinkeln $\phi$ är.

**Svar:** $\left|e^{5\pi i/7}\right| = 1$

**1.6 a)** låt $e^{i\phi} = e^{5\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = \frac{5\pi}{7}$. Eftersom $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi \Rightarrow e^{5\pi i/7}$ ligger i andra kvadranten.

**Svar:** andra kvadranten

**b)** Låt $e^{i\phi} = e^{-34\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = -\frac{34}{7}\pi = -\frac{35}{7}\pi + \frac{1}{7}\pi = -6\pi + \pi + \frac{1}{7}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{1}{7}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow e^{-34\pi i/7}$ ligger i tredje kvadranten.

**Svar:** tredje kvadranten

**c)** Låt $e^{i\phi} = e^{2000\pi i/13} \Leftrightarrow \phi = \frac{2000}{13}\pi = \frac{1989}{13}\pi + \frac{11}{13}\pi = 152\pi + \pi + \frac{11}{13}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{11}{13}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\frac{3}{2}\pi < \phi < 2\pi \Rightarrow e^{2000\pi i/13}$ ligger i fjärde kvadranten.

**Svar:** fjärde kvadranten

**1.7 a)** Absolutbelopp:

$$|2-2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-2}{2}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**b)** Absolutbelopp:

$$\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**c)** Absolutbelopp:

$$|1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{1}\right) + 2k\pi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**d)** Absolutbelopp:

$$|-1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{1}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**1.8 a)** Låt $z = -1 - i = re^{i\phi}$ där $r$ är absolutbeloppet och $\phi$ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4 + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

**Svar:** $z = \sqrt{2}e^{i3/4\pi}$

**b)** Låt $z = i = re^{i\phi}$ där $r$ är absolutbeloppet och $\phi$ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Eftersom $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z > 0$ är $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z = e^{i(\pi/2+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = e^{i\pi/2}$$

**Svar:** $z = e^{i\pi/2}$

**1.9** Utnyttja sambandet $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$5e^{2\pi i/3} = 5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

**Svar:** $-\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$

**1.10 a)** Låt $z = re^{i\phi}, \quad r \geq 0$

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (re^{i\phi})^4 = -1 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\phi} = e^{\pi+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\phi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r = 1 \end{cases}$$

$k = \{0, 1, 2, 3\}$ ger alla unika lösningar.
**Svar:** $e^{\pi i/4 + k\pi i/2} \qquad k = \{0, 1, 2, 3\}$

Eller:

Använd $\sqrt{i} = (e^{\pi i/2})^{1/2} = e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och $\sqrt{-i} = (e^{-\pi i/2})^{1/2} = e^{-\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{z^4} = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow z^2 = \pm i \Leftrightarrow \sqrt{z^2} = \pm\sqrt{\pm i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$$

**b)** Låt $z = re^{\phi i}, \quad r \geq 0$

$$z^5 = 32 \Leftrightarrow (re^{\phi i})^5 = 32 \Leftrightarrow r^5 e^{5\phi i} = 32e^{2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\phi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r^5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r = 2 \end{cases}$$

$k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ger alla unika lösningar.
**Svar:** $e^{2k\pi i/5} \qquad k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

**1.11**

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + i3\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x$$

$$\begin{aligned}\cos 3x = \operatorname{Re} e^{3ix} &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

**Svar:** $4\cos^3 x - 3\cos x$

**1.12 a)** Se formelblad.

$C = b + ai$ där $a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$$\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow C = -1 + i\sqrt{3}$$

**Svar:** $C = -1 + i\sqrt{3}$

**b)** Se formelblad.

$C = b + ai$ där $a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$$-2\cos\omega t - 4\sin\omega t \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow C = -4 - 2i$$

**Svar:** $C = -4 - 2i$

**1.13** Period: $2 \cdot 2 = 4$

Frekvens: $\frac{1}{4}$

Vinkelfrekvens: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Fas: $-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

**1.14 a)** Låt $z = 3.15 - 8.88i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{3.15^2 + (-8.88)^2} \approx 9.42$$

$$A\sin\phi = -8.88$$

$$A\cos\phi = 3.15$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{-8.88}{3.15}$$

$$\phi = \arctan\frac{-8.88}{3.15} \approx -1.23$$

**Svar:** $9.42e^{-1.23i}$

**b)** Låt $z = -99 - 118i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{(-99)^2 + (-118)^2} \approx 154.03$$

$$A\sin\phi = -118$$

$$A\cos\phi = -99$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{-118}{-99}$$

$$\phi = \arctan\frac{118}{99} + \pi \approx 4.01$$

**Svar:** $9.42e^{4.01i}$ eller $9.42e^{-2.27i}$ (pga period $2\pi$)

**1.15 a)** Använd regeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$u(t) = A\sin(\omega t + \delta) = A\sin\delta\cos\omega t + A\cos\delta\sin\omega t =$$
$$= 22.4\cos\omega t + 11.3\sin\omega t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A\sin\delta = 22.4 \\ A\cos\delta = 11.3 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \sqrt{(A\sin\delta)^2 + (A\cos\delta)^2} = \sqrt{22.4^2 + 11.3^2} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \sqrt{A^2(\sin^2\delta + \cos^2\delta)} \approx 25.09 \;\Leftrightarrow\; A \approx 25.09$$

$$\tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{A\sin\delta}{A\cos\delta} = \frac{22.4}{11.3}$$
$$\delta = \arctan\frac{22.4}{11.3} \approx 1.10$$
$$C = b + ai \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a = A\sin\delta \\ b = A\cos\delta \end{cases} \;\Leftrightarrow\; C = 11.3 + 22.4i$$

**Svar:** $u(t) = 25.09\sin(\omega t + 1.10)$, $11.3 + 22.4i$

**b)** Använd regeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$u(t) = A\sin(\omega t + \delta) = A\sin\delta\cos\omega t + A\cos\delta\sin\omega t =$$
$$= 5.19\sin\omega t - 3.14\cos\omega t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A\cos\delta = 5.19 \\ A\sin\delta = -3.14 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \sqrt{(A\sin\delta)^2 + (A\cos\delta)^2} = \sqrt{5.19^2 + (-3.14)^2} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \sqrt{A^2(\sin^2\delta + \cos^2\delta)} \approx 6.07 \;\Leftrightarrow\; A \approx 6.07$$

$$\tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{A\sin\delta}{A\cos\delta} = \frac{-3.14}{5.19}$$
$$\delta = \arctan\frac{-3.14}{5.19} \approx -0.54$$
$$C = b + ai \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a = A\sin\delta \\ b = A\cos\delta \end{cases} \;\Leftrightarrow\; C = 5.19 - 3.14i$$

**Svar:** $u(t) = 6.07\sin(\omega t - 0.54)$, $5.19 - 3.14i$

**1.16** Låt $y$ vara en funktion av $t$ där $s$ är en konstant.

$$y(t)' + 2y(t) = e^{st}$$

Integrerande faktor:

$$g(t) = 2 \;\Rightarrow\; G(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad \text{i.f: } e^{2t}$$

Multiplicera med den integrerande faktorn:

$$e^{2t}y(t)' + 2e^{2t}y(t) = e^{2t}e^{st} \;\Leftrightarrow\; (e^{2t}y)' = e^{2t}e^{st} \;\Leftrightarrow\; e^{2t}y = \int e^{(2+s)t}\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{e^{2t}}\int e^{(2+s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e^{2t}}\frac{1}{2+s}e^{(2+s)t} + C = \frac{1}{e^{2t}}e^{2t}\frac{1}{2+s}e^{st} + C =$$
$$= \frac{1}{2+s}e^{st} + C, \quad s \neq -2$$

Partikulärlösning ($C = 0$): $\frac{1}{2+s}e^{st}, \quad s \neq -2$

**Svar:** $y = \frac{1}{2+s}e^{st}, \quad s \neq -2$

**1.17** Låt $s = i\omega$ och då ger **1.16** $y = \frac{1}{2+i\omega}e^{i\omega t}$ och eftersom $\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$:

$$y = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2+i\omega}e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2-i\omega}{\omega^2+4}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right) = \frac{1}{\omega^2+4}(2\sin\omega t + \omega\sin\omega t)$$

**Svar:** $y = \frac{1}{\omega^2+4}(2\sin\omega t + \omega\sin\omega t)$

# Kapitel 2: Steg och impulsfunktioner

**2.1 a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**e)**

**2.2**

**2.3 a)**

$$\theta(t-1)\theta(3-t)$$

eller

$$\theta(t-1) - \theta(t-3)$$

**b)** Funktionen som syns är $-0.5t+1.5$, stegfunktioner som skärmar in $]1,3[$ är (se **a)**) $\theta(t-1)-\theta(t-3)$ vilket medför:

**Svar:** $(-0.5t+1.5)(\theta(t-1) - \theta(t-3))$

**2.4 a)** Funktionen i intervallet $]0,1[$ är $t$. Stegfunktion: $\theta(t) - \theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1,2[$ är 1. Stegfunktion: $\theta(t-1) - \theta(t-2)$.

Funktionen i intervallet $]2,3[$ är $3-t$. Stegfunktion: $\theta(t-2) - \theta(t-3)$ vilket ger:

**Svar:** $t(\theta(t) - \theta(t-1)) + \theta(t-1) - \theta(t-2) + (3-t)(\theta(t-2) - \theta(t-3))$

**b)** Funktionen i intervallet $]0,1[$ är $t$. Stegfunktion: $\theta(t) - \theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1,2[$ är $t-1$. Stegfunktion: $\theta(t-1) - \theta(t-2)$ vilket ger:

**Svar:** $t(\theta(t) - \theta(t-1)) + (t-1)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$

**2.5**

$$p_b(t) = \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))$$

Om stegfunktioner finns som en faktor i en integral kan dessa ersätta integrationsgränserna eftersom de evaluerar till noll utanför intervallet.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta(t-a) - \theta(t-b))t\,dt = \int_a^b t\,dt$$

Lös med hjälp av ovanstående samband:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))e^{-st}\,dt = \int_0^b \frac{1}{b}e^{-st}\,dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{sb}e^{-st}\right]_0^b = -\frac{e^{-sb}}{sb} - \left(-\frac{1}{sb}\right) = \frac{1-e^{-sb}}{sb}, \quad s \neq 0$$

Om $s = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t) \cdot 1\,dt = 1 \qquad \text{enligt def., se boken}$$

' **Svar:** $\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{sb}(1-e^{-sb}), \quad s \neq 0$ och $1, \quad s = 0$

**2.6** Räknelag (se boken s. 21):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt = f(a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Eftersom $e^{-st}$ är kontinuerlig för alla $t$ använd räknelagen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)e^{-st}\,dt = e^{-sa}$$

**Svar:** $e^{-sa}$

**2.7** Räknelag (se boken s. 21):

$$\frac{d}{dt}(\theta(t-a)) = \delta(t-a)$$

Använd räknelagen:

$$\frac{d}{dt}p_b = \frac{1}{b}\frac{d}{dt}(\theta(t) - \theta(t-b)) = \frac{1}{b}\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \frac{d}{dt}\theta(t-b)\right) = \frac{1}{b}\left(\delta(t) - \delta(t-b)\right)$$

**Svar:** $\frac{1}{b}\left(\delta(t) - \delta(t-b)\right)$

**2.8 a)** Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = 0$$

Låt $f(t) = t$, eftersom $t$ är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t) = f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$

**Svar:** 0

**b)** Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = t$, eftersom $t$ är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t-1) = f(t)\delta(t-1) = f(1)\delta(t-1) = 1 \cdot \delta(t-1) = \delta(t-1)$$

**Svar:** $\delta(t-1)$

**c)** Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = e^{-t}$, eftersom $e^{-t}$ är kontinuerlig använd räknelagen:

$$e^{-t}\delta(t-2) = f(t)\delta(t-2) = f(2)\delta(t-2) = e^{-2}\delta(t-1)$$

**Svar:** $e^{-2}\delta(t-1)$

**d)** Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = \sin t$, eftersom $\sin t$ är kontinuerlig använd räknelagen:

$$\sin t\delta(t-\pi) = f(t)\delta(t-\pi) = f(\pi)\delta(t-\pi) = 0 \cdot \delta(t-\pi) = 0$$

**Svar:** 0

**2.9** Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dt}t^2 = 2t$ och $\frac{d}{dt}(2-t) = -1$):

$$f'(t) = f_p'(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ och $t = 2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (-1) - 2 \cdot 1 = -3$$

$$t = 2 \Rightarrow 0 - (-1) = 1$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, 1, 2\}$, $t = 0$ saknar dock språng.

$$f''(t) = f_p''(t) + b_1\delta(t-a_1) + b_2\delta(t-a_2) \qquad \text{där} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = -3,\ a_2 = 2,\ b_2 = 1$$

$\frac{d}{dt}2t = 2$ och $\frac{d}{dt}(-1) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(t) =& 2(\theta(t) - \theta(t-1)) + 0 \cdot (\theta(t-1) - \theta(t-2)) - 3\delta(t-1) + 1 \cdot \delta(t-2) = \\ =& 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

**Svar:**

$$f'(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

$$f''(t) = 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

**2.10 a)** Sinus med amplitud 2 och vinkelfrekvensen 2, samt från 0 till $\pi/2$:

$$f(t) = 2\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

**b)** Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = 2\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dt}2\sin 2t = 4\cos 2t$):

$$f'(t) = f_p'(t) = 4\cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 0$ och $t = \pi/2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 0 \;\Rightarrow\; 4\cos(2\cdot 0) - 0 = 4$$

$$t = \pi/2 \;\Rightarrow\; 0 - 4\cos(2\cdot\pi/2) = 4$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, \pi/2\}$.

$$f''(t) = f_p''(t) + b_1\delta(t - a_1) + b_2\delta(t - a_2) \qquad \text{där} \qquad a_1 = 0,\; b_1 = 4,\; a_2 = \pi/2,\; b_2 = 4$$

$\frac{d}{dt}4\cos 2t = -8\sin 2t$:

$$f''(t) = -8\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

**Svar:**

$$f'(t) = 4\cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

$$f''(t) = -8\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

**2.11** Beskriv $|x|$ med hjälp av stegfunktioner:

$$f(x) = |x| = -x(1 - \theta(x)) + x\theta(x)$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dx}x = 1$):

$$f'(x) = f_p'(x) = -1\cdot(1 - \theta(x)) + 1\cdot\theta(x) = -1 + \theta(x) + \theta(x) = 2\theta(x) - 1$$

Eftersom $f'(x)$ har språng i $x = 0$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$x = 0 \;\Rightarrow (2 - 1) - (-1) = 2$$

$f'(x)$ är deriverbar i alla punkter utom $x = 0$.

$$f''(x) = f_p''(x) + b\delta(x - a) \qquad \text{där} \qquad a = 0,\; b = 2$$

$\frac{d}{dt}1 = 0$:

$$f''(x) = -0\cdot(1 - \theta(x)) + 0\cdot\theta(x) + 2\delta(x - 0) = 2\delta(x)$$

**Svar:**

$$f'(t) = 2\theta(x) - 1$$

$$f''(t) = 2\delta(x)$$

**2.12** Använd sambandet på s. 17:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} \tau^a \theta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^t \tau^a \, d\tau, & t > 0 \end{cases} = \left( \int_0^t \tau^a \, d\tau \right) \theta(t) =$$

$$= \left( \left[ \frac{\tau^{a+1}}{a+1} \right]_0^t \right) \theta(t) = \left( \frac{t^{a+1}}{a+1} - \frac{0^{a+1}}{a+1} \right) \theta(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1} \theta(t), \quad a > -1$$

**Svar:** $v(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1}\theta(t), \quad a > -1$

**2.13 a)** Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau} \theta(\tau)\, d\tau = \left( \int_0^t e^{-\tau} \, d\tau \right) \theta(t) =$$

$$= \left( \left[ -e^{-\tau} \right]_0^t \right) \theta(t) = \left( -e^{-t} - \left( -e^{-0} \right) \right) \theta(t) = \left( 1 - e^{-t} \right) \theta(t)$$

**Svar:** $\left(1 - e^{-t}\right) \theta(t)$

**b)** Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau} \theta(\tau - 1)\, d\tau = \left( \int_{-1}^t e^{-\tau} \, d\tau \right) \theta(t-1) =$$

$$= \left( \left[ -e^{-\tau} \right]_{-1}^t \right) \theta(t-1) = \left( -e^{-t} - \left( -e^{-1} \right) \right) \theta(t-1) = \left( e^{-1} - e^{-t} \right) \theta(t-1)$$

**Svar:** $\left(e^{-1} - e^{-t}\right) \theta(t-1)$

**c)** Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} (1 - \theta(\tau))\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \, d\tau - \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \theta(\tau)\, d\tau = \left[ e^{\tau} \right]_{-\infty}^t - \left( \int_0^t e^{\tau} \, d\tau \right) \theta(t) =$$

$$= e^t - \overbrace{e^{-\infty}}^{0} - \left( \left[ e^{\tau} \right]_0^t \right) \theta(t) = e^t - \left( e^t - e^0 \right) \theta(t) = e^t - \left( e^t - 1 \right) \theta(t) =$$

$$= e^t - e^t \theta(t) + \theta(t) = e^t (1 - \theta(t)) + \theta(t)$$

**Svar:** $e^t(1 - \theta(t)) + \theta(t)$

**d)** Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \theta(1 - \tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} (1 - \theta(\tau - 1))\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \, d\tau - \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \theta(\tau - 1)\, d\tau =$$

$$= \left[ e^{\tau} \right]_{-\infty}^t - \left( \int_1^t e^{\tau} \, d\tau \right) \theta(t-1) = e^t - \overbrace{e^{-\infty}}^{0} - \left( \left[ e^{\tau} \right]_1^t \right) \theta(t-1) =$$

$$= e^t - \left( e^t - e^1 \right) \theta(t-1) = e^t - e^t \theta(t-1) + e\theta(t-1) =$$

$$= e^t (1 - \theta(t-1)) + e\theta(t-1) = e^t \theta(1-t) + e\theta(t-1)$$

**Svar:** $e^t \theta(1-t) + e\theta(t-1)$

**2.14 a)** Låt $f(t) = e^{2t}\theta(t)$:

$$F(t) = \int e^{2t} \theta(t)\, dt = \theta(t) \int_0^t e^{2t} \, dt + C = \theta(t) \left[ \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^t + C =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{2 \cdot 0})\theta(t) + C = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)\theta(t) + C$$

**Svar:** $F(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)\theta(t) + C$

**b)** Låt $f(t) = (t-1)\theta(t)$:

$$F(t) = \int (t-1)\theta(t)\,dt = \theta(t)\int_0^t t-1\,dt + C = \theta(t)\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^t + C =$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right)\right)\theta(t) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\theta(t) + C$$

**Svar:** $F(t) = (\frac{t^2}{2} - t)\theta(t) + C$

**c)** Låt $f(t) = (t-1)\theta(t-1)$:

$$F(t) = \int (t-1)\theta(t-1)\,dt = \theta(t-1)\int_1^t t-1\,dt + C = \theta(t-1)\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^t + C =$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right)\theta(t-1) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right)\theta(t-1) + C =$$
$$= \frac{t^2 - 2t + 1}{2}\theta(t-1) + C = \frac{(t-1)^2}{2}\theta(t-1) + C$$

**Svar:** $F(t) = \frac{(t-1)^2}{2}\theta(t-1) + C$

**d)** Låt $f(t) = t\theta(t-3)$:

$$F(t) = \int t\theta(t-3)\,dt = \theta(t-3)\int_3^t t\,dt + C = \theta(t-3)\left[\frac{t^2}{2}\right]_3^t + C =$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3^2}{2}\right)\theta(t-3) + C = \frac{1}{2}\left(t^2 - 9\right)\theta(t-3) + C$$

**Svar:** $F(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 - 9\right)\theta(t-3) + C$

**e)** Låt $f(t) = \sin t\theta(t-\pi) + \delta(t-1)$:

$$F(t) = \int \sin t\theta(t-\pi) + \delta(t-1)\,dt = \int \sin t\theta(t-\pi)\,dt + \int \delta(t-1)\,dt =$$
$$= \theta(t-\pi)\int_\pi^t \sin t\,dt + \theta(t-1) + C = \theta(t-\pi)\left[-\cos t\right]_\pi^t + \theta(t-1) + C =$$
$$= \left(-\cos t - (-\cos\pi)\right)\theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C =$$
$$= -\left(\cos t + 1\right)\theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C$$

**Svar:** $F(t) = -\left(\cos t + 1\right)\theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C$

**2.15**

$$f(t) = (-2t+1)(1-\theta(t-1)) + (t-2)\theta(t-1)$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dx}(-2t+1) = -2$ och $\frac{d}{dx}(t-2) = 1$):

$$f'(x) = f_p'(x) = -2(1-\theta(t-1)) + 1\cdot\theta(t-1) = -2(1-\theta(t-1)) + \theta(t-1) = 3\theta(t-1) - 2$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (3-2) - (-2) = 3$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = 1$.

$$f''(t) = f_p''(t) + b\delta(t-a) \qquad \text{där} \qquad a = 1,\ b = 3$$

$\frac{d}{dt}k = 0$ där $k$ är en konstant:

$$f''(t) = -0\cdot(1-\theta(t-1)) + 0\cdot\theta(t-1) + 3\delta(t-1) = 3\delta(t-1)$$

Beräkna $g(t)$, använd $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$:

$$\begin{aligned} g(t) =&(1+t^2)f''(t) - tf'(t) + f(t) = \\ =&(1+t^2)3\delta(t-1) - t(3\theta(t-1)-2) + (-2t+1)(1-\theta(t-1)) + (t-2)\theta(t-1) = \\ =&(1+t^2)3\delta(t-1) - 3t\theta(t-1) + 2t - 2t + 2t\theta(t-1) + 1 - \theta(t-1) + t\theta(t-1) - 2\theta(t-1) = \\ =&(1+t^2)3\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1) = 3\delta(t-1) + 3t^2\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1) = \\ =&3\delta(t-1) + 3\cdot 1^2\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1) = 6\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1) \end{aligned}$$

**Svar:** $6\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1)$

**2.16**

**2.17**

# Kapitel 3: Laplacetransformationer

**3.1 a)** $f(t) = e^{-2t}\theta(t)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\mathcal{L}\,f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}e^{-2t}\theta(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+2)t}\,dt = \left[-\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s+2}(1-e^{-(s+2)T})$$

Om $s > -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \to 0$ när $T \to \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s > -2$$

Om $s = -2$:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \int_0^{+\infty} 1\,dt = [t]_0^{+\infty} \to \infty$$

Om $s < -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \to \infty$ när $T \to \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L}\,f(s) \to -\infty$$

Detta medför att $\mathcal{L}\,f(s)$ endast är konvergent när $s > -2$ och därmed är Laplacetransformen för $e^{-2t}\theta(t)$ endast definierad i det intervallet.

Låt nu $s$ vara ett komplext tal, $s = a + bi$:

$$\left|e^{-(a+bi+2)t}\right| = \left|e^{-(a+2)t}\right| \underbrace{\left|e^{-ibt}\right|}_{=1} = e^{-(a+2)t}$$

Här ser vi att $e^{-(s+2)t} \to 0$ då $t \to \infty$ om $a = \operatorname{Re} s > -2$ vilket utvidgar Laplacetransformen att inkludera hela planet $\operatorname{Re} s > -2$.

**Svar:** $\mathcal{L}\,f(s) = \dfrac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re} s > -2$

**3.1 b)** $f(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\mathcal{L}\,f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(\theta(t) - \theta(t-1))\,dt = \int_0^1 e^{-st}\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s}, \quad s \neq 0$$

Om $s = 0$ gäller att $e^{-st} = 1$ vilket medför:

$$\mathcal{L}\,f(0) = \int_0^1 1\,dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

**Svar:** $\mathcal{L}\,f(s) = \dfrac{1}{s}(1-e^{-s}), \quad s \neq 0$ och $\mathcal{L}\,f(0) = 1$

**3.2**

$$f(at) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(at)\,dt = \begin{bmatrix} x = at \\ dt = dx/a \\ t = -\infty \leftrightarrow x = -\infty \\ t = +\infty \leftrightarrow x = +\infty \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx/a} f(x)\,\frac{dx}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s/a)x} f(x)\,dx = \frac{1}{a}\,\mathcal{L}\,f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{V.S.V.}$$

**3.3 a)** Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s}, \quad \sigma > 0$ och $t^n\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad \sigma > 0.$

$$f(t) = (2+3t^2)\theta(t) = 2\theta(t) + 3t^2\theta(t) \longleftrightarrow 2\frac{1}{s} + 3\frac{2}{s^3} = \frac{2s^2+6}{s^3}, \quad \sigma > 0$$

**Svar:** $(2+3t^2)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{2s^2+6}{s^3}, \quad \sigma > 0$

**b)** Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \sigma > \operatorname{Re} a.$

$$f(t) = e^{3t}\theta(t) = t^0 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{0!}{(s-3)^1} = \frac{1}{s-3}, \quad \sigma > 3$$

**Svar:** $e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s-3}, \quad \sigma > 3$

**c)** Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \sigma > \operatorname{Re} a.$

$$f(t) = te^{3t}\theta(t) = t^1 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1!}{(s-3)^{1+1}} = \frac{1}{(s-3)^2}, \quad \sigma > 3$$

**Svar:** $te^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{(s-3)^2}, \quad \sigma > 3$

**d)** Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \sigma > \operatorname{Re} a.$

$$f(t) = t^2 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{2!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3}, \quad \sigma > 3$$

**Svar:** $t^2 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{2}{(s-3)^3}, \quad \sigma > 3$

**e)** Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+b^2}, \quad \sigma > 0, \quad b$ reellt och

$\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}, \quad \sigma > 0, \quad b$ reellt.

$$\begin{aligned} f(t) =& (\cos 2t - \sin 2t)\theta(t) = \cos 2t\theta(t) - \sin 2t\theta(t) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{s-2}{s^2+4}, \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

**Svar:** $(\cos 2t - \sin 2t)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s-2}{s^2+4}, \quad \sigma > 0$

**3.4 a)** Använd regeln $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$ samt produktregeln och regeln för inre derivata:

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{s^4+1} + s\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(s^4+1)^2}\cdot 4s^3 = $$

$$= \frac{s^4+1-4s^4}{(s^4+1)^2} = \frac{1-3s^4}{(s^4+1)^2}$$

$$tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{1-3s^4}{(s^4+1)^2} = \frac{3s^4-1}{(s^4+1)^2}$$

**Svar:** $tf(t) \longleftrightarrow \dfrac{3s^4-1}{(s^4+1)^2}$

**b)** Använd regeln $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$:

$$e^{-2t}f(t) \Rightarrow a = -2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \quad \Leftrightarrow \quad F(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^4+1}$$

$$e^{-2t}f(t) \longleftrightarrow F(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^4+1}$$

**Svar:** $e^{-2t}f(t) \longleftrightarrow \dfrac{s+2}{(s+2)^4+1}$

**c)** Använd regeln $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s-a)$:

$$f(t-2) \Rightarrow a = 2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2s}F(s) = e^{-2s}\frac{s}{s^4+1} = \frac{se^{-2s}}{s^4+1}$$

$$f(t-2) \longleftrightarrow e^{-2s}F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^4+1}$$

**Svar:** $f(t-2) \longleftrightarrow \dfrac{se^{-2s}}{s^4+1}$

**d)** Använd regeln $f'(t) \longleftrightarrow sF(s)$:

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \quad \Leftrightarrow \quad sF(s) = s\frac{s}{s^4+1} = \frac{s^2}{s^4+1}$$

$$f'(t) \longleftrightarrow sF(s) = \frac{s^2}{s^4+1}$$

**Svar:** $f'(t) \longleftrightarrow \dfrac{s^2}{s^4+1}$

**e)** Använd regeln $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$:

$$f(2t) \Rightarrow a = 2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{s/2}{(s/2)^4+1} = \frac{1}{2}\frac{\frac{s}{2}}{\frac{s^4+16}{16}} = \frac{16s}{4(s^4+16)} = \frac{4s}{s^4+16}$$

$$f(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{4s}{s^4+16}$$

**Svar:** $f(2t) \longleftrightarrow \dfrac{4s}{s^4+16}$

**3.5** Använd reglerna $\alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-at}F(s)$ och $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$.
Låt $f_1(t) = \theta(t-1)$ och $f_2(t) = \theta(t-2)$.

$$\mathcal{L}\, f_1(s) = \frac{e^{-t}}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\mathcal{L}\, f_2(s) = \frac{e^{-2t}}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\begin{aligned} u(t) =& \theta(t) - 2\theta(t-1) + \theta(t-2) \longleftrightarrow \mathcal{L}\,\theta(s) - 2\,\mathcal{L}\, f_1(s) + \mathcal{L}\, f_2(s) = \\ =& \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-t}}{s} + \frac{e^{-2t}}{s} = \frac{1}{s}((e^{-t})^2 - 2e^{-t} + 1^2) = \frac{1}{s}(e^{-t} - 1)^2 \end{aligned}$$

**Svar:** $\mathcal{L}\, u(s) = \dfrac{1}{s}(e^{-t} - 1)^2$

**3.6** Låt $f(t) = \cos(t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ vilket medför att $v(t) = t^2\cos(t)\theta(t) = tg(t)$.
Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$ och $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+b^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$, $\quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

Använd produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, g(s) &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\, f(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\left(\frac{1}{s^2+1} + s\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(s^2+1)^2}\cdot 2s\right) = \\ &= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \end{aligned}$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, v(s) &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\, g(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right) = -\frac{2s(s^2+1)^2 - (s^2-1)2(s^2+1)2s}{(s^2+1)^4} = \\ &= -\frac{2s(s^2+1)(s^2+1-2(s^2-1))}{(s^2+1)^4} = -\frac{2s(3-s^2)}{(s^2+1)^3} = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \end{aligned}$$

**Svar:** $\mathcal{L}\, v(s) = \dfrac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$

**3.7** Låt $f(t) = \cos(3t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ vilket medför att $v(t) = e^{-2t}t\cos(3t)\theta(t) = e^{-2t}g(t)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$
och $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+b^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, $b$ reellt:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{s}{s^2+9}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\, g(s) &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\, f(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) = -\left(\frac{1}{s^2+9} + s\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(s^2+9)^2}\cdot 2s\right) = \\ &= -\frac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\, v(s) &= \mathcal{L}(e^{-2t}g)(s) = \mathcal{L}\, g(s-(-2)) = \frac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9)^2} = \frac{s^2+4s+4-9}{(s^2+4s+4+9)^2} = \\ &= \frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

**Svar:** $\mathcal{L}\, v(s) = \dfrac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

**3.8 a)** Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = tg(t) = t\sin(t-1)\theta(t-1)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$
och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, $b$ reellt:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\, g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\, f(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-s}}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\, h(s) &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\, g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s^2+1} = -\frac{(-1)\cdot e^{-s}(s^2+1) - e^{-s}2s}{(s^2+1)^2} = \\ &= e^{-s}\frac{s^2+2s+1}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

**Svar:** $t\sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

**b)** Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ och $h(t) = g(t-1) = (t-1)\sin(t-1)\theta(t-1)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$, $\quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\mathcal{L}\, g(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\, f(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\mathcal{L}\, h(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\, g(s) = e^{-s}\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{-2se^{-s}}{(s^2+1)^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

**Svar:** $(t-1)\sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow \dfrac{-2se^{-s}}{(s^2+1)^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$

**c)** Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = e^t g(t) = e^t \sin(t-1)\theta(t-1)$.

Använd reglerna $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$, $\quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\mathcal{L}\, g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\, f(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-s}}{s^2+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\mathcal{L}\, h(s) = \mathcal{L}\, g(s-1) = \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

**Svar:** $e^t \sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow \dfrac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+1}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$

**d)** Låt $f(t) = \theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = tg(t) = t\theta(t-1)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\mathcal{L}\, g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\, f(s) = e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\mathcal{L}\, h(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\, g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s} = -\frac{(-1)\cdot e^{-s}s - e^{-s}}{s^2} = e^{-s}\frac{s+1}{s^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

**Svar:** $t\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\frac{s+1}{s^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$

**3.9 a)** Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \dfrac{s^5+2s^4}{(s^2+1)^3}$ och $f(0) = 1$.

$$\mathcal{L}(\theta f') = s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0) = s\frac{s^5+2s^4}{(s^2+1)^3} - 1 = \frac{s^6+2s^5}{(s^2+1)^3} - 1$$

**Svar:** $\mathcal{L}(\theta f') = \dfrac{s^6+2s^5}{(s^2+1)^3} - 1$

**b)** Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$\mathcal{L}(\theta f')(s) = \dfrac{s^6+2s^5}{(s^2+1)^3} - 1$ (se **a)**) och $f'(0) = 2$.

$$\mathcal{L}(\theta f'') = s\,\mathcal{L}(f'\theta)(s) - f'(0) = s\left(\frac{s^6+2s^5}{(s^2+1)^3} - 1\right) - 2 = \frac{s^7+2s^6}{(s^2+1)^3} - s - 2$$

**Svar:** $\mathcal{L}(\theta f'') = \dfrac{s^7+2s^6}{(s^2+1)^3} - s - 2$

**3.10 a)** Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$, $h(t) = e^t g(t) = e^t f(t)\theta(t)$.
Använd regeln $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,h(s) = \mathcal{L}\,g(s-1) = \frac{3(s-1)^4}{(s-1)^5+1}$$

**Svar:** $e^t f(t)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{3(s-1)^4}{(s-1)^5+1}$

**b)** Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$, $h(t) = g(t-1) = f(t-1)\theta(t-1)$.
Använd regeln $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,h(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,g(s) = e^{-s}\cdot\frac{3s^4}{s^5+1}$$

**Svar:** $f(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\cdot\dfrac{3s^4}{s^5+1}$

**c)** Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \dfrac{3s^4}{s^5+1}$ och $f(0) = 3$.

$$\mathcal{L}(f'\theta) = s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0) = s\frac{3s^4}{s^5+1} - 3 = \frac{3s^5 - 3(s^5+1)}{s^5+1} = -\frac{3}{s^5+1}$$

**Svar:** $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow -\dfrac{3}{s^5+1}$

**d)** Använd regeln $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$.
Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$ och $h(t) = g(3t)$.
Eftersom $\theta(t) = \theta(3t)$ medför $h(t) = \theta(3t)f(3t) = f(3t)\theta(t)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,h(s) = \frac{1}{3}\,\mathcal{L}\,g\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3(s/3)^4}{(s/3)^5+1} = \frac{\frac{s^4}{3^3}}{3\cdot\frac{s^5+3^5}{3^5}} = \frac{3^4 s^4}{3^3(s^5+3^5)} = \frac{3s^4}{s^5+243}$$

**Svar:** $f(3t)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{3s^4}{s^5+243}$

**3.11** Använd definitionen av Laplacetransformen:

$$\mathcal{L}(f\theta)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\theta(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \mathcal{L}(f\theta)(0) = \int_0^{\infty} e^{-0\cdot t} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} f(t)\,dt \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \int_0^{\infty} f(t)\,dt = \mathcal{L}(f\theta)(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2+2\cdot 0+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Svar:**

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**3.12** Funktionen:

$$f(t) = t(\theta(t)-\theta(t-1)) + \theta(t-1) = t\theta(t) - t\theta(t-1) + \theta(t-1)$$

Använd reglerna $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$ och $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$.
Låt $g(t) = \theta(t-1)$.

$$\mathcal{L}\,\theta(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,\theta(s) = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$t\theta(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,\theta(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$t\theta(t-1) = tg(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s} = -\frac{-e^{-s}s - e^{-s}}{s^2} = e^{-s}\frac{s+1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{s+1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}(s+1) + se^{-s}) = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0$$

**Svar:** $\mathcal{L}\,f(s) = \dfrac{1}{s^2}(1-e^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0$

**3.13 a)**

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Använd sambandet $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$:

$$\cosh(at)\theta(t) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\theta(t) = \frac{1}{2}\left(e^{at}\theta(t) + e^{-at}\theta(t)\right) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} = \frac{2s}{2(s^2-a^2)} = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$$

**Svar:** $\cosh(at)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

**b)**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Använd sambandet $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$:

$$\sinh(at)\theta(t) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\theta(t) = \frac{1}{2}\left(e^{at}\theta(t) - e^{-at}\theta(t)\right) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+a-(s-a)}{s^2-a^2} = \frac{2a}{2(s^2-a^2)} = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$$

**Svar:** $\sinh(at)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

**3.14** Eftersom $f$ är periodisk med perioden $T$ är $f(t) = f(t-T)$ vilket medför att

$$\theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t-T) = \theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t) = (\theta(t) - \theta(t-T))f(t) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(\theta(t) - \theta(t-T))f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

Låt $g(t) = \theta(t)f(t) \longleftrightarrow \mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s)$ vilket medför att
$\theta(t-T)f(t-T) = g(t-T) \longleftrightarrow e^{-Ts}\,\mathcal{L}\,g(s)$

$$\theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t-T) = g(t) - g(t-T) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \mathcal{L}\,g(s) - e^{-Ts}\,\mathcal{L}\,g(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\,g(s)(1 - e^{-Ts}) = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1 - e^{-Ts}} \qquad \text{V.S.V.}$$

**3.15** Använd sambandet som blev funnet i **3.14**

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-Ts}}$$

Perioden för det kausala pulståget är $T = 2$ och eftersom integralen endast täcker intervallet $[0, T]$ behövs funktionen endast konstrueras korrekt i det intervallet.

$$f(t) = 1 - 2\theta(t-1), \quad \text{i intervallet } [0,2]$$

Eftersom funktionen är kausal är $f(t) = \theta(t)f(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta f)(s) =& \frac{\int_0^2 e^{-st}(1 - 2\theta(t-1))\, dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left( \int_0^2 e^{-st}\, dt - 2\int_0^2 e^{-st}\theta(t-1)\, dt \right) = \\
=& \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left( \int_0^2 e^{-st}\, dt - 2\int_1^2 e^{-st}\, dt \right) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left( \left[ \frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^2 - 2\left[ \frac{-e^{-st}}{s} \right]_1^2 \right) = \\
=& \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left( \frac{-e^{-2s} - (-e^0)}{s} - 2\left( \frac{-e^{-2s} - (-e^{-s})}{s} \right) \right) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left( \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} \right) = \\
=& \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - e^{-s})^2}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-s}}{1 + e^{-s}}
\end{aligned}$$

**3.16**

$$f(t) = t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Använd definitionen av Laplacetransformen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} f(s) =& \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2)))\, dt = \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}t^2(\theta(t) - \theta(t-1))\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))\, dt = \\
=& \int_0^1 e^{-st}t^2\, dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-st}t^2\, dt =& \left[ -\frac{e^{-st}}{s}t^2 \right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{e^{-st}}{s} t\, dt = -\frac{e^{-s}}{s} + 2\left( \left[ -\frac{e^{-st}}{s^2}t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s^2}\, dt \right) = \\
=& -\frac{e^{-s}}{s} + 2\left( -\frac{e^{-s}}{s^2} + \left[ -\frac{e^{-st}}{s^3} \right]_0^1 \right) = -\frac{s^2 e^{-s}}{s^3} - \frac{2se^{-s}}{s^3} + 2\left( -\frac{e^{-s}}{s^3} - \left( \frac{1}{s^3} \right) \right) = \\
=& \frac{1}{s^3}\left( 2 - e^{-s}(s^2 + 2s + 2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 e^{-st}(2-t)\, dt =& 2\int_1^2 e^{-st}\, dt - \int_1^2 e^{-st}t\, dt = 2\left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_1^2 - \left( \left[ -\frac{e^{-st}}{s}t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s}\, dt \right) = \\
=& 2\left( -\frac{e^{-2s}}{s} - \left( -\frac{e^{-s}}{s} \right) \right) - \left( -\frac{2e^{-2s}}{s} - \left( -\frac{e^{-s}}{s} \right) + \left[ -\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_1^2 \right) = \\
=& \frac{e^{-s}}{s} - \left( -\frac{e^{-2s}}{s^2} - \left( -\frac{e^{-s}}{s^2} \right) \right) = \frac{1}{s^2}\left( se^{-s} + e^{-2s} - e^{-s} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} f(s) =& \frac{1}{s^3}\left( 2 - e^{-s}(s^2 + 2s + 2) \right) + \frac{1}{s^2}\left( se^{-s} + e^{-2s} - e^{-s} \right) = \\
=& \frac{1}{s^3}\left( 2 - s^2 e^{-s} - 2se^{-s} - 2e^{-s} + s^2 e^{-s} + se^{-2s} - se^{-s} \right) = \frac{1}{s^3}\left( 2 - 2e^{-s} - 3se^{-s} + se^{-2s} \right)
\end{aligned}$$

**Svar:** $\mathcal{L} f(s) = \dfrac{1}{s^3}\left( 2 - 2e^{-s} - 3se^{-s} + se^{-2s} \right)$