

Tillämpad matematik - Linjära system
FMAF10

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

22 februari 2017

Kapitel 1: Svängningar och komplexa tal

- 1.1 a) Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ där ω är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 3 \sin(2t - 5) \Rightarrow \omega = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}$$

Svar: vinkelfrekvens: 2, period: π , frekvens: $\frac{1}{\pi}$

- b) Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ där ω är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 50 \sin(100\pi t + 1) \Rightarrow \omega = 100\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 50$$

Svar: vinkelfrekvens: 100π , period: $\frac{1}{50}$, frekvens: 50

- 1.2 a)

b)

c)

d)

e)

f)

- 1.3 Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ från formelbladet.

$$\begin{aligned} u(t) &= 6 \sin(3t + \frac{\pi}{4}) = 6(\sin(3t) \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(3t) \sin(\frac{\pi}{4})) = \\ &= 6 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(3t) + 6 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(3t) = 3\sqrt{2} \cos(3t) + 3\sqrt{2} \sin(3t) \end{aligned}$$

Svar: $a = b = 3\sqrt{2}, \omega = 3 \Rightarrow 3\sqrt{2} \cos(3t) + 3\sqrt{2} \sin(3t)$

- 1.4 a)** låt $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin \alpha \cos(\omega t) + A \cos \alpha \sin(\omega t) = \sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t)$ där A är amplituden och α är fasförskjutningen.

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \sin \alpha = \sqrt{3} \\ A \cos \alpha = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \alpha)^2 + (A \cos \alpha)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2} \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{4} \Rightarrow A\sqrt{1} = 2 \Leftrightarrow A = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0) \end{aligned}$$

eller:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(\omega t)\right) = \\ &= 2\left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos(\omega t) + \cos \frac{2\pi}{3} \sin(\omega t)\right) = \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Svar: Amplitud: 2 och fasförskjutning: $\frac{2\pi}{3}$

- 1.4 b)** låt $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin \alpha \cos(\omega t) + A \cos \alpha \sin(\omega t) = -2 \cos(\omega t) - 4 \sin(\omega t)$ där A är amplituden och α är fasförskjutningen.

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \sin \alpha = -2 \\ A \cos \alpha = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \alpha)^2 + (A \cos \alpha)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2} \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{4 + 16} \Rightarrow A\sqrt{1} = \sqrt{20} \Leftrightarrow A = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \arctan \frac{1}{2} + \pi \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0) \end{aligned}$$

Svar: Amplitud: $2\sqrt{5}$ och fasförskjutning: $\arctan \frac{1}{2} + \pi$

- 1.5 a)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Svar: $|i| = 1$

- b)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

Svar: $|-i| = 1$

- c)** Eftersom $|e^{i\phi}| = 1$ oberoende av vad vinkeln ϕ är.

Svar: $|e^{5\pi i/7}| = 1$

- 1.6 a)** låt $e^{i\phi} = e^{5\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = \frac{5\pi}{7}$. Eftersom $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi \Rightarrow e^{5\pi i/7}$ ligger i andra kvadranten.

Svar: andra kvadranten

- b) Låt $e^{i\phi} = e^{-34\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = -\frac{34}{7}\pi = -\frac{35}{7}\pi + \frac{1}{7}\pi = -6\pi + \pi + \frac{1}{7}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{1}{7}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow e^{-34\pi i/7}$ ligger i tredje kvadranten.
Svar: tredje kvadranten

- c) Låt $e^{i\phi} = e^{2000\pi i/13} \Leftrightarrow \phi = \frac{2000}{13}\pi = \frac{1989}{13}\pi + \frac{11}{13}\pi = 152\pi + \pi + \frac{11}{13}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{11}{13}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\frac{3}{2}\pi < \phi < 2\pi \Rightarrow e^{2000\pi i/13}$ ligger i fjärde kvadranten.
Svar: fjärde kvadranten

- 1.7 a) Absolutbelopp:

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-2}{2}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- b) Absolutbelopp:

$$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- c) Absolutbelopp:

$$|1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{1}\right) + 2k\pi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- d) Absolutbelopp:

$$|-1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{-1}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 1.8 a) Låt $z = -1 - i = re^{i\phi}$ där r är absolutbeloppet och ϕ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4 + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

Svar: $z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

b) Låt $z = i = re^{i\phi}$ där r är absolutbeloppet och ϕ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Eftersom $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z > 0$ är $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$z = e^{i(\pi/2+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = e^{i\pi/2}$$

Svar: $z = e^{i\pi/2}$

1.9 Utnyttja sambandet $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$5e^{2\pi i/3} = 5 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 5 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Svar: $-\frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2}$

1.10 a) Låt $z = re^{i\phi}$, $r \geq 0$

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\Leftrightarrow (re^{i\phi})^4 = -1 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\phi} = e^{\pi+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\phi = \pi + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ r^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ r = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$k = \{0, 1, 2, 3\}$ ger alla unika lösningar.

Svar: $e^{\pi i/4 + k\pi i/2} \quad k = \{0, 1, 2, 3\}$

Eller:

Använd $\sqrt{i} = (e^{\pi i/2})^{1/2} = e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ och $\sqrt{-i} = (e^{-\pi i/2})^{1/2} = e^{-\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{z^4} = \pm \sqrt{-1} \Leftrightarrow z^2 = \pm i \Leftrightarrow \sqrt{z^2} = \pm \sqrt{\pm i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i) \end{aligned}$$

b) Låt $z = re^{\phi i}$, $r \geq 0$

$$\begin{aligned} z^5 = 32 &\Leftrightarrow (re^{\phi i})^5 = 32 \Leftrightarrow r^5 e^{5\phi i} = 32e^{2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\phi = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ r^5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{2k\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \\ r = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ger alla unika lösningar.

Svar: $e^{2k\pi i/5} \quad k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1.11

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + i3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

$$\begin{aligned} \cos 3x = \operatorname{Re} e^{3ix} &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

Svar: $4 \cos^3 x - 3 \cos x$

1.12 a) Se formelblad.

$$C = b + ai \text{ där } a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$\sqrt{3} \cos \omega t - \sin \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow C = -1 + i\sqrt{3}$$

Svar: $C = -1 + i\sqrt{3}$

b) Se formelblad.

$$C = b + ai \text{ där } a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$-2 \cos \omega t - 4 \sin \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow C = -4 - 2i$$

Svar: $C = -4 - 2i$

1.13 Period: $2 \cdot 2 = 4$

Frekvens: $\frac{1}{4}$

Vinkelfrekvens: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Fas: $-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

1.14 a) Låt $z = 3.15 - 8.88i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{3.15^2 + (-8.88)^2} \approx 9.42$$

$$A \sin \phi = -8.88$$

$$A \cos \phi = 3.15$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \frac{-8.88}{3.15}$$

$$\phi = \arctan \frac{-8.88}{3.15} \approx -1.23$$

Svar: $9.42e^{-1.23i}$

b) Låt $z = -99 - 118i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{(-99)^2 + (-118)^2} \approx 154.03$$

$$A \sin \phi = -118$$

$$A \cos \phi = -99$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \frac{-118}{-99}$$

$$\phi = \arctan \frac{118}{99} + \pi \approx 4.01$$

Svar: $9.42e^{4.01i}$ eller $9.42e^{-2.27i}$ (pga period 2π)

1.15 a) Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} u(t) &= A \sin(\omega t + \delta) = A \sin \delta \cos \omega t + A \cos \delta \sin \omega t = \\ &= 22.4 \cos \omega t + 11.3 \sin \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} A \sin \delta = 22.4 \\ A \cos \delta = 11.3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \delta)^2 + (A \cos \delta)^2} = \sqrt{22.4^2 + 11.3^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2(\sin^2 \delta + \cos^2 \delta)} \approx 25.09 \Leftrightarrow A \approx 25.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{A \sin \delta}{A \cos \delta} = \frac{22.4}{11.3} \\ \delta &= \arctan \frac{22.4}{11.3} \approx 1.10 \end{aligned}$$

$$C = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = A \sin \delta \\ b = A \cos \delta \end{cases} \Leftrightarrow C = 11.3 + 22.4i$$

Svar: $u(t) = 25.09 \sin(\omega t + 1.10)$, $11.3 + 22.4i$

b) Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} u(t) &= A \sin(\omega t + \delta) = A \sin \delta \cos \omega t + A \cos \delta \sin \omega t = \\ &= 5.19 \sin \omega t - 3.14 \cos \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos \delta = 5.19 \\ A \sin \delta = -3.14 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \delta)^2 + (A \cos \delta)^2} = \sqrt{5.19^2 + (-3.14)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2(\sin^2 \delta + \cos^2 \delta)} \approx 6.07 \Leftrightarrow A \approx 6.07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{A \sin \delta}{A \cos \delta} = \frac{-3.14}{5.19} \\ \delta &= \arctan \frac{-3.14}{5.19} \approx -0.54 \end{aligned}$$

$$C = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = A \sin \delta \\ b = A \cos \delta \end{cases} \Leftrightarrow C = 5.19 - 3.14i$$

Svar: $u(t) = 6.07 \sin(\omega t - 0.54)$, $5.19 - 3.14i$

1.16 Låt y vara en funktion av t där s är en konstant.

$$y(t)' + 2y(t) = e^{st}$$

Integrerande faktor:

$$g(t) = 2 \Rightarrow G(t) = 2t \Rightarrow \text{i.f. } e^{2t}$$

Multiplitera med den integrerande faktorn:

$$\begin{aligned} e^{2t}y(t)' + 2e^{2t}y(t) &= e^{2t}e^{st} \Leftrightarrow (e^{2t}y)' = e^{2t}e^{st} \Leftrightarrow e^{2t}y = \int e^{(2+s)t} dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{e^{2t}} \int e^{(2+s)t} dt = \frac{1}{e^{2t}} \frac{1}{2+s} e^{(2+s)t} + C = \frac{1}{e^{2t}} e^{2t} \frac{1}{2+s} e^{st} + C = \\ &= \frac{1}{2+s} e^{st} + C, \quad s \neq -2 \end{aligned}$$

Partikulärlösning ($C = 0$): $\frac{1}{2+s} e^{st}$, $s \neq -2$

Svar: $y = \frac{1}{2+s} e^{st}$, $s \neq -2$

1.17 Låt $s = i\omega$ och då ger **1.16** $y = \frac{1}{2+i\omega}e^{i\omega t}$ och eftersom $\sin \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$:

$$y = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2+i\omega} e^{i\omega t} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{2-i\omega}{\omega^2+4} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right) = \frac{1}{\omega^2+4} (2 \sin \omega t + \omega \cos \omega t)$$

Svar: $y = \frac{1}{\omega^2+4} (2 \sin \omega t + \omega \cos \omega t)$

Kapitel 2: Steg och impulsfunktioner

2.1 a)

b)

c)

d)

e)

2.2

2.3 a)

$$\theta(t-1)\theta(3-t)$$

eller

$$\theta(t-1) - \theta(t-3)$$

b) Funktionen som syns är $-0.5t+1.5$, stegfunktioner som skärmar in $]1, 3[$ är (se **a**) $\theta(t-1)-\theta(t-3)$ vilket medför:

Svar: $(-0.5t + 1.5)(\theta(t-1) - \theta(t-3))$

2.4 a)

Funktionen i intervallet $]0, 1[$ är t . Stegfunktion: $\theta(t) - \theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1, 2[$ är 1 . Stegfunktion: $\theta(t-1) - \theta(t-2)$.

Funktionen i intervallet $]2, 3[$ är $3-t$. Stegfunktion: $\theta(t-2) - \theta(t-3)$ vilket ger:

Svar: $t(\theta(t) - \theta(t-1)) + \theta(t-1) - \theta(t-2) + (3-t)(\theta(t-2) - \theta(t-3))$

b)

Funktionen i intervallet $]0, 1[$ är t . Stegfunktion: $\theta(t) - \theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1, 2[$ är $t-1$. Stegfunktion: $\theta(t-1) - \theta(t-2)$ vilket ger:

Svar: $t(\theta(t) - \theta(t-1)) + (t-1)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$

2.5

$$p_b(t) = \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))$$

Om stegfunktioner finns som en faktor i en integral kan dessa ersätta integrationsgränserna eftersom de evaluerar till noll utanför intervallet.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta(t-a) - \theta(t-b))t \, dt = \int_a^b t \, dt$$

Lös med hjälp av ovanstående samband:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st} \, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))e^{-st} \, dt = \int_0^b \frac{1}{b}e^{-st} \, dt = \\ &= \left[-\frac{1}{sb}e^{-st} \right]_0^b = -\frac{e^{-sb}}{sb} - \left(-\frac{1}{sb} \right) = \frac{1 - e^{-sb}}{sb}, \quad s \neq 0 \end{aligned}$$

Om $s = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t) \cdot 1 \, dt = 1 \quad \text{enligt def., se boken}$$

Svar: $\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st} \, dt = \frac{1}{sb}(1 - e^{-sb}), \quad s \neq 0 \text{ och } 1, \quad s = 0$

2.6 Räknelag (se boken s. 21):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)f(t) \, dt = f(a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Eftersom e^{-st} är kontinuerlig för alla t använd räknelagen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)e^{-st} \, dt = e^{-sa}$$

Svar: e^{-sa}

2.7 Räknelag (se boken s. 21):

$$\frac{d}{dt}(\theta(t-a)) = \delta(t-a)$$

Använd räknelagen:

$$\frac{d}{dt}p_b = \frac{1}{b} \frac{d}{dt}(\theta(t) - \theta(t-b)) = \frac{1}{b} \left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \frac{d}{dt}\theta(t-b) \right) = \frac{1}{b} (\delta(t) - \delta(t-b))$$

Svar: $\frac{1}{b} (\delta(t) - \delta(t-b))$

2.8 a) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = 0$$

Låt $f(t) = t$, eftersom t är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t) = f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$

Svar: 0

b) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = t$, eftersom t är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t-1) = f(t)\delta(t-1) = f(1)\delta(t-1) = 1 \cdot \delta(t-1) = \delta(t-1)$$

Svar: $\delta(t-1)$

c) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = e^{-t}$, eftersom e^{-t} är kontinuerlig använd räknelagen:

$$e^{-t}\delta(t-2) = f(t)\delta(t-2) = f(2)\delta(t-2) = e^{-2}\delta(t-2)$$

Svar: $e^{-2}\delta(t-2)$

d) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = \sin t$, eftersom $\sin t$ är kontinuerlig använd räknelagen:

$$\sin t\delta(t-\pi) = f(t)\delta(t-\pi) = f(\pi)\delta(t-\pi) = 0 \cdot \delta(t-\pi) = 0$$

Svar: 0

2.9 Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är $(\frac{d}{dt}t^2 = 2t$ och $\frac{d}{dt}(2-t) = -1)$:

$$f'(t) = f'_p(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ och $t = 2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (-1) - 2 \cdot 1 = -3$$

$$t = 2 \Rightarrow 0 - (-1) = 1$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, 1, 2\}$, $t = 0$ saknar dock språng.

$$f''(t) = f''_p(t) + b_1\delta(t-a_1) + b_2\delta(t-a_2) \quad \text{där} \quad a_1 = 1, b_1 = -3, a_2 = 2, b_2 = 1$$

$\frac{d}{dt}2t = 2$ och $\frac{d}{dt}(-1) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2(\theta(t) - \theta(t-1)) + 0 \cdot (\theta(t-1) - \theta(t-2)) - 3\delta(t-1) + 1 \cdot \delta(t-2) = \\ &= 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

Svar:

$$f'(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

$$f''(t) = 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

2.10 a) Sinus med amplitud 2 och vinkelfrekvensen 2, samt från 0 till $\pi/2$:

$$f(t) = 2 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

b) Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = 2 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dt} 2 \sin 2t = 4 \cos 2t$):

$$f'(t) = f'_p(t) = 4 \cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 0$ och $t = \pi/2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 0 \Rightarrow 4 \cos(2 \cdot 0) - 0 = 4$$

$$t = \pi/2 \Rightarrow 0 - 4 \cos(2 \cdot \pi/2) = 4$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, \pi/2\}$.

$$f''(t) = f''_p(t) + b_1 \delta(t - a_1) + b_2 \delta(t - a_2) \quad \text{där} \quad a_1 = 0, b_1 = 4, a_2 = \pi/2, b_2 = 4$$

$$\frac{d}{dt} 4 \cos 2t = -8 \sin 2t:$$

$$f''(t) = -8 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

Svar:

$$f'(t) = 4 \cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

$$f''(t) = -8 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

2.11 Beskriv $|x|$ med hjälp av stegfunktioner:

$$f(x) = |x| = -x(1 - \theta(x)) + x\theta(x)$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dx} x = 1$):

$$f'(x) = f'_p(x) = -1 \cdot (1 - \theta(x)) + 1 \cdot \theta(x) = -1 + \theta(x) + \theta(x) = 2\theta(x) - 1$$

Eftersom $f'(x)$ har språng i $x = 0$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$x = 0 \Rightarrow (2 - 1) - (-1) = 2$$

$f'(x)$ är deriverbar i alla punkter utom $x = 0$.

$$f''(x) = f''_p(x) + b\delta(x - a) \quad \text{där} \quad a = 0, b = 2$$

$$\frac{d}{dx} 1 = 0:$$

$$f''(x) = -0 \cdot (1 - \theta(x)) + 0 \cdot \theta(x) + 2\delta(x - 0) = 2\delta(x)$$

Svar:

$$f'(t) = 2\theta(x) - 1$$

$$f''(t) = 2\delta(x)$$

2.12 Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^t \tau^a \theta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \int_0^t \tau^a d\tau, & t > 0 \end{cases} = \left(\int_0^t \tau^a d\tau \right) \theta(t) = \\ &= \left(\left[\frac{\tau^{a+1}}{a+1} \right]_0^t \right) \theta(t) = \left(\frac{t^{a+1}}{a+1} - \frac{0^{a+1}}{a+1} \right) \theta(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1} \theta(t), \quad a > -1 \end{aligned}$$

Svar: $v(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1} \theta(t), \quad a > -1$

2.13 a) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{-\tau} \theta(\tau) d\tau &= \left(\int_0^t e^{-\tau} d\tau \right) \theta(t) = \\ &= \left(\left[-e^{-\tau} \right]_0^t \right) \theta(t) = (-e^{-t} - (-e^{-0})) \theta(t) = (1 - e^{-t}) \theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $(1 - e^{-t}) \theta(t)$

b) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{-\tau} \theta(\tau - 1) d\tau &= \left(\int_{-1}^t e^{-\tau} d\tau \right) \theta(t - 1) = \\ &= \left(\left[-e^{-\tau} \right]_{-1}^t \right) \theta(t - 1) = (-e^{-t} - (-e^{-1})) \theta(t - 1) = (e^{-1} - e^{-t}) \theta(t - 1) \end{aligned}$$

Svar: $(e^{-1} - e^{-t}) \theta(t - 1)$

c) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{\tau} (1 - \theta(\tau)) d\tau &= \int_{-\infty}^t e^{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^t e^{\tau} \theta(\tau) d\tau = [e^{\tau}]_{-\infty}^t - \left(\int_0^t e^{\tau} d\tau \right) \theta(t) = \\ &= e^t - \overbrace{e^{-\infty}}^0 - \left([e^{\tau}]_0^t \right) \theta(t) = e^t - (e^t - e^0) \theta(t) = e^t - (e^t - 1) \theta(t) = \\ &= e^t - e^t \theta(t) + \theta(t) = e^t (1 - \theta(t)) + \theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $e^t (1 - \theta(t)) + \theta(t)$

d) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{\tau} \theta(1 - \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^t e^{\tau} (1 - \theta(\tau - 1)) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^t e^{\tau} \theta(\tau - 1) d\tau = \\ &= [e^{\tau}]_{-\infty}^t - \left(\int_1^t e^{\tau} d\tau \right) \theta(t - 1) = e^t - \overbrace{e^{-\infty}}^0 - \left([e^{\tau}]_1^t \right) \theta(t - 1) = \\ &= e^t - (e^t - e^1) \theta(t - 1) = e^t - e^t \theta(t - 1) + e \theta(t - 1) = \\ &= e^t (1 - \theta(t - 1)) + e \theta(t - 1) = e^t \theta(1 - t) + e \theta(t - 1) \end{aligned}$$

Svar: $e^t \theta(1 - t) + e \theta(t - 1)$

2.14 a) Låt $f(t) = e^{2t} \theta(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int e^{2t} \theta(t) dt = \theta(t) \int_0^t e^{2t} dt + C = \theta(t) \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^t + C = \\ &= \frac{1}{2} (e^{2t} - e^{2 \cdot 0}) \theta(t) + C = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \theta(t) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \theta(t) + C$

b) Låt $f(t) = (t-1)\theta(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int (t-1)\theta(t) dt = \theta(t) \int_0^t t-1 dt + C = \theta(t) \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^t + C = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{0^2}{2} - 0 \right) \right) \theta(t) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \theta(t) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \theta(t) + C$

c) Låt $f(t) = (t-1)\theta(t-1)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int (t-1)\theta(t-1) dt = \theta(t-1) \int_1^t t-1 dt + C = \theta(t-1) \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^t + C = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right) \theta(t-1) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \right) \theta(t-1) + C = \\ &= \frac{t^2 - 2t + 1}{2} \theta(t-1) + C = \frac{(t-1)^2}{2} \theta(t-1) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \frac{(t-1)^2}{2} \theta(t-1) + C$

d) Låt $f(t) = t\theta(t-3)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int t\theta(t-3) dt = \theta(t-3) \int_3^t t dt + C = \theta(t-3) \left[\frac{t^2}{2} \right]_3^t + C = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3^2}{2} \right) \theta(t-3) + C = \frac{1}{2} (t^2 - 9) \theta(t-3) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \frac{1}{2} (t^2 - 9) \theta(t-3) + C$

e) Låt $f(t) = \sin t \theta(t-\pi) + \delta(t-1)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \sin t \theta(t-\pi) + \delta(t-1) dt = \int \sin t \theta(t-\pi) dt + \int \delta(t-1) dt = \\ &= \theta(t-\pi) \int_\pi^t \sin t dt + \theta(t-1) + C = \theta(t-\pi) [-\cos t]_\pi^t + \theta(t-1) + C = \\ &= (-\cos t - (-\cos \pi)) \theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C = \\ &= -(\cos t + 1) \theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = -(\cos t + 1) \theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C$

2.15

$$f(t) = (-2t + 1)(1 - \theta(t - 1)) + (t - 2)\theta(t - 1)$$

Eftersom funktionen saknar språng är $(\frac{d}{dx}(-2t + 1) = -2$ och $\frac{d}{dx}(t - 2) = 1)$:

$$f'(x) = f'_p(x) = -2(1 - \theta(t - 1)) + 1 \cdot \theta(t - 1) = -2(1 - \theta(t - 1)) + \theta(t - 1) = 3\theta(t - 1) - 2$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (3 - 2) - (-2) = 3$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = 1$.

$$f''(t) = f''_p(t) + b\delta(t - a) \quad \text{där} \quad a = 1, b = 3$$

$\frac{d}{dt}k = 0$ där k är en konstant:

$$f''(t) = -0 \cdot (1 - \theta(t - 1)) + 0 \cdot \theta(t - 1) + 3\delta(t - 1) = 3\delta(t - 1)$$

Beräkna $g(t)$, använd $f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a)$:

$$\begin{aligned} g(t) &= (1 + t^2)f''(t) - tf'(t) + f(t) = \\ &= (1 + t^2)3\delta(t - 1) - t(3\theta(t - 1) - 2) + (-2t + 1)(1 - \theta(t - 1)) + (t - 2)\theta(t - 1) = \\ &= (1 + t^2)3\delta(t - 1) - 3t\theta(t - 1) + 2t - 2t + 2t\theta(t - 1) + 1 - \theta(t - 1) + t\theta(t - 1) - 2\theta(t - 1) = \\ &= (1 + t^2)3\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) = 3\delta(t - 1) + 3t^2\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) = \\ &= 3\delta(t - 1) + 3 \cdot 1^2\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) = 6\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) \end{aligned}$$

Svar: $6\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1)$

2.16

2.17

Kapitel 3: Laplacetransformationer

3.1 a) $f(t) = e^{-2t}\theta(t)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-2t} \theta(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+2)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{s+2} (1 - e^{-(s+2)T})\end{aligned}$$

Om $s > -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \rightarrow 0$ när $T \rightarrow \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s > -2$$

Om $s = -2$:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} 1 dt = [t]_0^{+\infty} \rightarrow \infty$$

Om $s < -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \rightarrow \infty$ när $T \rightarrow \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L}f(s) \rightarrow -\infty$$

Detta medför att $\mathcal{L}f(s)$ endast är konvergent när $s > -2$ och därmed är Laplacetransformen för $e^{-2t}\theta(t)$ endast definierad i det intervallet.

Låt nu s vara ett komplext tal, $s = a + bi$:

$$\left| e^{-(a+bi+2)t} \right| = \left| e^{-(a+2)t} \right| \underbrace{\left| e^{-ibt} \right|}_{=1} = e^{-(a+2)t}$$

Här ser vi att $e^{-(s+2)t} \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ om $a = \operatorname{Re} s > -2$ vilket utvidgar Laplacetransformen att inkludera hela planet $\operatorname{Re} s > -2$.

Svar: $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re} s > -2$

3.1 b) $f(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} (\theta(t) - \theta(t-1)) dt = \int_0^1 e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 = \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad s \neq 0\end{aligned}$$

Om $s = 0$ gäller att $e^{-st} = 1$ vilket medför:

$$\mathcal{L}f(0) = \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Svar: $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}), \quad s \neq 0 \text{ och } \mathcal{L}f(0) = 1$