

Tillämpad matematik - Linjära system
FMAF10

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

9 mars 2017

Kapitel 1: Svängningar och komplexa tal

- 1.1 a) Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ där ω är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 3 \sin(2t - 5) \Rightarrow \omega = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}$$

Svar: vinkelfrekvens: 2, period: π , frekvens: $\frac{1}{\pi}$

- b) Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ där ω är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 50 \sin(100\pi t + 1) \Rightarrow \omega = 100\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 50$$

Svar: vinkelfrekvens: 100π , period: $\frac{1}{50}$, frekvens: 50

- 1.2 a)

b)

c)

d)

e)

f)

- 1.3 Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ från formelbladet.

$$\begin{aligned} u(t) &= 6 \sin(3t + \frac{\pi}{4}) = 6(\sin(3t) \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(3t) \sin(\frac{\pi}{4})) = \\ &= 6 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(3t) + 6 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(3t) = 3\sqrt{2} \cos(3t) + 3\sqrt{2} \sin(3t) \end{aligned}$$

Svar: $a = b = 3\sqrt{2}, \omega = 3 \Rightarrow 3\sqrt{2} \cos(3t) + 3\sqrt{2} \sin(3t)$

- 1.4 a)** låt $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin \alpha \cos(\omega t) + A \cos \alpha \sin(\omega t) = \sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t)$ där A är amplituden och α är fasförskjutningen.

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \sin \alpha = \sqrt{3} \\ A \cos \alpha = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \alpha)^2 + (A \cos \alpha)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2} \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{4} \Rightarrow A\sqrt{1} = 2 \Leftrightarrow A = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0) \end{aligned}$$

eller:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(\omega t)\right) = \\ &= 2\left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos(\omega t) + \cos \frac{2\pi}{3} \sin(\omega t)\right) = \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Svar: Amplitud: 2 och fasförskjutning: $\frac{2\pi}{3}$

- 1.4 b)** låt $u(t) = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin \alpha \cos(\omega t) + A \cos \alpha \sin(\omega t) = -2 \cos(\omega t) - 4 \sin(\omega t)$ där A är amplituden och α är fasförskjutningen.

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \sin \alpha = -2 \\ A \cos \alpha = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \alpha)^2 + (A \cos \alpha)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2} \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{4 + 16} \Rightarrow A\sqrt{1} = \sqrt{20} \Leftrightarrow A = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \arctan \frac{1}{2} + \pi \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0) \end{aligned}$$

Svar: Amplitud: $2\sqrt{5}$ och fasförskjutning: $\arctan \frac{1}{2} + \pi$

- 1.5 a)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Svar: $|i| = 1$

- b)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

Svar: $|-i| = 1$

- c)** Eftersom $|e^{i\phi}| = 1$ oberoende av vad vinkeln ϕ är.

Svar: $|e^{5\pi i/7}| = 1$

- 1.6 a)** låt $e^{i\phi} = e^{5\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = \frac{5\pi}{7}$. Eftersom $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi \Rightarrow e^{5\pi i/7}$ ligger i andra kvadranten.

Svar: andra kvadranten

- b) Låt $e^{i\phi} = e^{-34\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = -\frac{34}{7}\pi = -\frac{35}{7}\pi + \frac{1}{7}\pi = -6\pi + \pi + \frac{1}{7}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{1}{7}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow e^{-34\pi i/7}$ ligger i tredje kvadranten.
Svar: tredje kvadranten

- c) Låt $e^{i\phi} = e^{2000\pi i/13} \Leftrightarrow \phi = \frac{2000}{13}\pi = \frac{1989}{13}\pi + \frac{11}{13}\pi = 152\pi + \pi + \frac{11}{13}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{11}{13}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\frac{3}{2}\pi < \phi < 2\pi \Rightarrow e^{2000\pi i/13}$ ligger i fjärde kvadranten.
Svar: fjärde kvadranten

- 1.7 a) Absolutbelopp:

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-2}{2}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- b) Absolutbelopp:

$$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- c) Absolutbelopp:

$$|1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{1}\right) + 2k\pi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- d) Absolutbelopp:

$$|-1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{-1}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- 1.8 a) Låt $z = -1 - i = re^{i\phi}$ där r är absolutbeloppet och ϕ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4 + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

Svar: $z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

b) Låt $z = i = re^{i\phi}$ där r är absolutbeloppet och ϕ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Eftersom $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z > 0$ är $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$z = e^{i(\pi/2+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = e^{i\pi/2}$$

Svar: $z = e^{i\pi/2}$

1.9 Utnyttja sambandet $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$5e^{2\pi i/3} = 5 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 5 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Svar: $-\frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2}$

1.10 a) Låt $z = re^{i\phi}$, $r \geq 0$

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\Leftrightarrow (re^{i\phi})^4 = -1 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\phi} = e^{\pi+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\phi = \pi + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ r^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ r = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$k = \{0, 1, 2, 3\}$ ger alla unika lösningar.

Svar: $e^{\pi i/4 + k\pi i/2} \quad k = \{0, 1, 2, 3\}$

Eller:

Använd $\sqrt{i} = (e^{\pi i/2})^{1/2} = e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ och $\sqrt{-i} = (e^{-\pi i/2})^{1/2} = e^{-\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{z^4} = \pm \sqrt{-1} \Leftrightarrow z^2 = \pm i \Leftrightarrow \sqrt{z^2} = \pm \sqrt{\pm i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i) \end{aligned}$$

b) Låt $z = re^{\phi i}$, $r \geq 0$

$$\begin{aligned} z^5 = 32 &\Leftrightarrow (re^{\phi i})^5 = 32 \Leftrightarrow r^5 e^{5\phi i} = 32e^{2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\phi = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ r^5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{2k\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \\ r = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ger alla unika lösningar.

Svar: $e^{2k\pi i/5} \quad k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1.11

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + i3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

$$\begin{aligned} \cos 3x = \operatorname{Re} e^{3ix} &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

Svar: $4 \cos^3 x - 3 \cos x$

1.12 a) Se formelblad.

$$C = b + ai \text{ där } a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$\sqrt{3} \cos \omega t - \sin \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow C = -1 + i\sqrt{3}$$

Svar: $C = -1 + i\sqrt{3}$

b) Se formelblad.

$$C = b + ai \text{ där } a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$-2 \cos \omega t - 4 \sin \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow C = -4 - 2i$$

Svar: $C = -4 - 2i$

1.13 Period: $2 \cdot 2 = 4$

Frekvens: $\frac{1}{4}$

Vinkelfrekvens: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Fas: $-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

1.14 a) Låt $z = 3.15 - 8.88i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{3.15^2 + (-8.88)^2} \approx 9.42$$

$$A \sin \phi = -8.88$$

$$A \cos \phi = 3.15$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \frac{-8.88}{3.15}$$

$$\phi = \arctan \frac{-8.88}{3.15} \approx -1.23$$

Svar: $9.42e^{-1.23i}$

b) Låt $z = -99 - 118i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{(-99)^2 + (-118)^2} \approx 154.03$$

$$A \sin \phi = -118$$

$$A \cos \phi = -99$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \frac{-118}{-99}$$

$$\phi = \arctan \frac{118}{99} + \pi \approx 4.01$$

Svar: $9.42e^{4.01i}$ eller $9.42e^{-2.27i}$ (pga period 2π)

1.15 a) Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} u(t) &= A \sin(\omega t + \delta) = A \sin \delta \cos \omega t + A \cos \delta \sin \omega t = \\ &= 22.4 \cos \omega t + 11.3 \sin \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} A \sin \delta = 22.4 \\ A \cos \delta = 11.3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \delta)^2 + (A \cos \delta)^2} = \sqrt{22.4^2 + 11.3^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2(\sin^2 \delta + \cos^2 \delta)} \approx 25.09 \Leftrightarrow A \approx 25.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{A \sin \delta}{A \cos \delta} = \frac{22.4}{11.3} \\ \delta &= \arctan \frac{22.4}{11.3} \approx 1.10 \end{aligned}$$

$$C = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = A \sin \delta \\ b = A \cos \delta \end{cases} \Leftrightarrow C = 11.3 + 22.4i$$

Svar: $u(t) = 25.09 \sin(\omega t + 1.10)$, $11.3 + 22.4i$

b) Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} u(t) &= A \sin(\omega t + \delta) = A \sin \delta \cos \omega t + A \cos \delta \sin \omega t = \\ &= 5.19 \sin \omega t - 3.14 \cos \omega t \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos \delta = 5.19 \\ A \sin \delta = -3.14 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(A \sin \delta)^2 + (A \cos \delta)^2} = \sqrt{5.19^2 + (-3.14)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{A^2(\sin^2 \delta + \cos^2 \delta)} \approx 6.07 \Leftrightarrow A \approx 6.07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{A \sin \delta}{A \cos \delta} = \frac{-3.14}{5.19} \\ \delta &= \arctan \frac{-3.14}{5.19} \approx -0.54 \end{aligned}$$

$$C = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = A \sin \delta \\ b = A \cos \delta \end{cases} \Leftrightarrow C = 5.19 - 3.14i$$

Svar: $u(t) = 6.07 \sin(\omega t - 0.54)$, $5.19 - 3.14i$

1.16 Låt y vara en funktion av t där s är en konstant.

$$y(t)' + 2y(t) = e^{st}$$

Integrerande faktor:

$$g(t) = 2 \Rightarrow G(t) = 2t \Rightarrow \text{i.f. } e^{2t}$$

Multiplitera med den integrerande faktorn:

$$\begin{aligned} e^{2t}y(t)' + 2e^{2t}y(t) &= e^{2t}e^{st} \Leftrightarrow (e^{2t}y)' = e^{2t}e^{st} \Leftrightarrow e^{2t}y = \int e^{(2+s)t} dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{e^{2t}} \int e^{(2+s)t} dt = \frac{1}{e^{2t}} \frac{1}{2+s} e^{(2+s)t} + C = \frac{1}{e^{2t}} e^{2t} \frac{1}{2+s} e^{st} + C = \\ &= \frac{1}{2+s} e^{st} + C, \quad s \neq -2 \end{aligned}$$

Partikulärlösning ($C = 0$): $\frac{1}{2+s} e^{st}$, $s \neq -2$

Svar: $y = \frac{1}{2+s} e^{st}$, $s \neq -2$

1.17 Låt $s = i\omega$ och då ger **1.16** $y = \frac{1}{2+i\omega}e^{i\omega t}$ och eftersom $\sin \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$:

$$y = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2+i\omega} e^{i\omega t} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{2-i\omega}{\omega^2+4} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right) = \frac{1}{\omega^2+4} (2 \sin \omega t + \omega \cos \omega t)$$

Svar: $y = \frac{1}{\omega^2+4} (2 \sin \omega t + \omega \cos \omega t)$

Kapitel 2: Steg och impulsfunktioner

2.1 a)

b)

c)

d)

e)

2.2

2.3 a)

$$\theta(t-1)\theta(3-t)$$

eller

$$\theta(t-1) - \theta(t-3)$$

b) Funktionen som syns är $-0.5t+1.5$, stegfunktioner som skärmar in $]1, 3[$ är (se **a**) $\theta(t-1)-\theta(t-3)$ vilket medför:

Svar: $(-0.5t + 1.5)(\theta(t-1) - \theta(t-3))$

2.4 a)

Funktionen i intervallet $]0, 1[$ är t . Stegfunktion: $\theta(t) - \theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1, 2[$ är 1 . Stegfunktion: $\theta(t-1) - \theta(t-2)$.

Funktionen i intervallet $]2, 3[$ är $3-t$. Stegfunktion: $\theta(t-2) - \theta(t-3)$ vilket ger:

Svar: $t(\theta(t) - \theta(t-1)) + \theta(t-1) - \theta(t-2) + (3-t)(\theta(t-2) - \theta(t-3))$

b)

Funktionen i intervallet $]0, 1[$ är t . Stegfunktion: $\theta(t) - \theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1, 2[$ är $t-1$. Stegfunktion: $\theta(t-1) - \theta(t-2)$ vilket ger:

Svar: $t(\theta(t) - \theta(t-1)) + (t-1)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$

2.5

$$p_b(t) = \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))$$

Om stegfunktioner finns som en faktor i en integral kan dessa ersätta integrationsgränserna eftersom de evaluerar till noll utanför intervallet.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta(t-a) - \theta(t-b))t \, dt = \int_a^b t \, dt$$

Lös med hjälp av ovanstående samband:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st} \, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))e^{-st} \, dt = \int_0^b \frac{1}{b}e^{-st} \, dt = \\ &= \left[-\frac{1}{sb}e^{-st} \right]_0^b = -\frac{e^{-sb}}{sb} - \left(-\frac{1}{sb} \right) = \frac{1 - e^{-sb}}{sb}, \quad s \neq 0 \end{aligned}$$

Om $s = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t) \cdot 1 \, dt = 1 \quad \text{enligt def., se boken}$$

Svar: $\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st} \, dt = \frac{1}{sb}(1 - e^{-sb}), \quad s \neq 0 \text{ och } 1, \quad s = 0$

2.6 Räknelag (se boken s. 21):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)f(t) \, dt = f(a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Eftersom e^{-st} är kontinuerlig för alla t använd räknelagen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)e^{-st} \, dt = e^{-sa}$$

Svar: e^{-sa}

2.7 Räknelag (se boken s. 21):

$$\frac{d}{dt}(\theta(t-a)) = \delta(t-a)$$

Använd räknelagen:

$$\frac{d}{dt}p_b = \frac{1}{b} \frac{d}{dt}(\theta(t) - \theta(t-b)) = \frac{1}{b} \left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \frac{d}{dt}\theta(t-b) \right) = \frac{1}{b} (\delta(t) - \delta(t-b))$$

Svar: $\frac{1}{b} (\delta(t) - \delta(t-b))$

2.8 a) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = 0$$

Låt $f(t) = t$, eftersom t är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t) = f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$

Svar: 0

b) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = t$, eftersom t är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t-1) = f(t)\delta(t-1) = f(1)\delta(t-1) = 1 \cdot \delta(t-1) = \delta(t-1)$$

Svar: $\delta(t-1)$

c) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = e^{-t}$, eftersom e^{-t} är kontinuerlig använd räknelagen:

$$e^{-t}\delta(t-2) = f(t)\delta(t-2) = f(2)\delta(t-2) = e^{-2}\delta(t-2)$$

Svar: $e^{-2}\delta(t-2)$

d) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = \sin t$, eftersom $\sin t$ är kontinuerlig använd räknelagen:

$$\sin t\delta(t-\pi) = f(t)\delta(t-\pi) = f(\pi)\delta(t-\pi) = 0 \cdot \delta(t-\pi) = 0$$

Svar: 0

2.9 Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är $(\frac{d}{dt}t^2 = 2t$ och $\frac{d}{dt}(2-t) = -1)$:

$$f'(t) = f'_p(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ och $t = 2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (-1) - 2 \cdot 1 = -3$$

$$t = 2 \Rightarrow 0 - (-1) = 1$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, 1, 2\}$, $t = 0$ saknar dock språng.

$$f''(t) = f''_p(t) + b_1\delta(t-a_1) + b_2\delta(t-a_2) \quad \text{där} \quad a_1 = 1, b_1 = -3, a_2 = 2, b_2 = 1$$

$\frac{d}{dt}2t = 2$ och $\frac{d}{dt}(-1) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2(\theta(t) - \theta(t-1)) + 0 \cdot (\theta(t-1) - \theta(t-2)) - 3\delta(t-1) + 1 \cdot \delta(t-2) = \\ &= 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

Svar:

$$f'(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

$$f''(t) = 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

2.10 a) Sinus med amplitud 2 och vinkelfrekvensen 2, samt från 0 till $\pi/2$:

$$f(t) = 2 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

b) Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = 2 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dt} 2 \sin 2t = 4 \cos 2t$):

$$f'(t) = f'_p(t) = 4 \cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 0$ och $t = \pi/2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 0 \Rightarrow 4 \cos(2 \cdot 0) - 0 = 4$$

$$t = \pi/2 \Rightarrow 0 - 4 \cos(2 \cdot \pi/2) = 4$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, \pi/2\}$.

$$f''(t) = f''_p(t) + b_1 \delta(t - a_1) + b_2 \delta(t - a_2) \quad \text{där} \quad a_1 = 0, b_1 = 4, a_2 = \pi/2, b_2 = 4$$

$$\frac{d}{dt} 4 \cos 2t = -8 \sin 2t:$$

$$f''(t) = -8 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

Svar:

$$f'(t) = 4 \cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

$$f''(t) = -8 \sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

2.11 Beskriv $|x|$ med hjälp av stegfunktioner:

$$f(x) = |x| = -x(1 - \theta(x)) + x\theta(x)$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dx} x = 1$):

$$f'(x) = f'_p(x) = -1 \cdot (1 - \theta(x)) + 1 \cdot \theta(x) = -1 + \theta(x) + \theta(x) = 2\theta(x) - 1$$

Eftersom $f'(x)$ har språng i $x = 0$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$x = 0 \Rightarrow (2 - 1) - (-1) = 2$$

$f'(x)$ är deriverbar i alla punkter utom $x = 0$.

$$f''(x) = f''_p(x) + b\delta(x - a) \quad \text{där} \quad a = 0, b = 2$$

$$\frac{d}{dx} 1 = 0:$$

$$f''(x) = -0 \cdot (1 - \theta(x)) + 0 \cdot \theta(x) + 2\delta(x - 0) = 2\delta(x)$$

Svar:

$$f'(t) = 2\theta(x) - 1$$

$$f''(t) = 2\delta(x)$$

2.12 Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^t \tau^a \theta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \int_0^t \tau^a d\tau, & t > 0 \end{cases} = \left(\int_0^t \tau^a d\tau \right) \theta(t) = \\ &= \left(\left[\frac{\tau^{a+1}}{a+1} \right]_0^t \right) \theta(t) = \left(\frac{t^{a+1}}{a+1} - \frac{0^{a+1}}{a+1} \right) \theta(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1} \theta(t), \quad a > -1 \end{aligned}$$

Svar: $v(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1} \theta(t), \quad a > -1$

2.13 a) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{-\tau} \theta(\tau) d\tau &= \left(\int_0^t e^{-\tau} d\tau \right) \theta(t) = \\ &= \left(\left[-e^{-\tau} \right]_0^t \right) \theta(t) = (-e^{-t} - (-e^{-0})) \theta(t) = (1 - e^{-t}) \theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $(1 - e^{-t}) \theta(t)$

b) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{-\tau} \theta(\tau - 1) d\tau &= \left(\int_{-1}^t e^{-\tau} d\tau \right) \theta(t - 1) = \\ &= \left(\left[-e^{-\tau} \right]_{-1}^t \right) \theta(t - 1) = (-e^{-t} - (-e^{-1})) \theta(t - 1) = (e^{-1} - e^{-t}) \theta(t - 1) \end{aligned}$$

Svar: $(e^{-1} - e^{-t}) \theta(t - 1)$

c) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{\tau} (1 - \theta(\tau)) d\tau &= \int_{-\infty}^t e^{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^t e^{\tau} \theta(\tau) d\tau = [e^{\tau}]_{-\infty}^t - \left(\int_0^t e^{\tau} d\tau \right) \theta(t) = \\ &= e^t - \overbrace{e^{-\infty}}^0 - \left([e^{\tau}]_0^t \right) \theta(t) = e^t - (e^t - e^0) \theta(t) = e^t - (e^t - 1) \theta(t) = \\ &= e^t - e^t \theta(t) + \theta(t) = e^t (1 - \theta(t)) + \theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $e^t (1 - \theta(t)) + \theta(t)$

d) Använd sambandet på s. 17:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{\tau} \theta(1 - \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^t e^{\tau} (1 - \theta(\tau - 1)) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^t e^{\tau} \theta(\tau - 1) d\tau = \\ &= [e^{\tau}]_{-\infty}^t - \left(\int_1^t e^{\tau} d\tau \right) \theta(t - 1) = e^t - \overbrace{e^{-\infty}}^0 - \left([e^{\tau}]_1^t \right) \theta(t - 1) = \\ &= e^t - (e^t - e^1) \theta(t - 1) = e^t - e^t \theta(t - 1) + e \theta(t - 1) = \\ &= e^t (1 - \theta(t - 1)) + e \theta(t - 1) = e^t \theta(1 - t) + e \theta(t - 1) \end{aligned}$$

Svar: $e^t \theta(1 - t) + e \theta(t - 1)$

2.14 a) Låt $f(t) = e^{2t} \theta(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int e^{2t} \theta(t) dt = \theta(t) \int_0^t e^{2t} dt + C = \theta(t) \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^t + C = \\ &= \frac{1}{2} (e^{2t} - e^{2 \cdot 0}) \theta(t) + C = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \theta(t) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \theta(t) + C$

b) Låt $f(t) = (t-1)\theta(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int (t-1)\theta(t) dt = \theta(t) \int_0^t t-1 dt + C = \theta(t) \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^t + C = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{0^2}{2} - 0 \right) \right) \theta(t) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \theta(t) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \theta(t) + C$

c) Låt $f(t) = (t-1)\theta(t-1)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int (t-1)\theta(t-1) dt = \theta(t-1) \int_1^t t-1 dt + C = \theta(t-1) \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^t + C = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right) \theta(t-1) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \right) \theta(t-1) + C = \\ &= \frac{t^2 - 2t + 1}{2} \theta(t-1) + C = \frac{(t-1)^2}{2} \theta(t-1) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \frac{(t-1)^2}{2} \theta(t-1) + C$

d) Låt $f(t) = t\theta(t-3)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int t\theta(t-3) dt = \theta(t-3) \int_3^t t dt + C = \theta(t-3) \left[\frac{t^2}{2} \right]_3^t + C = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3^2}{2} \right) \theta(t-3) + C = \frac{1}{2} (t^2 - 9) \theta(t-3) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = \frac{1}{2} (t^2 - 9) \theta(t-3) + C$

e) Låt $f(t) = \sin t\theta(t-\pi) + \delta(t-1)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \sin t\theta(t-\pi) + \delta(t-1) dt = \int \sin t\theta(t-\pi) dt + \int \delta(t-1) dt = \\ &= \theta(t-\pi) \int_\pi^t \sin t dt + \theta(t-1) + C = \theta(t-\pi) [-\cos t]_\pi^t + \theta(t-1) + C = \\ &= (-\cos t - (-\cos \pi)) \theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C = \\ &= -(\cos t + 1) \theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C \end{aligned}$$

Svar: $F(t) = -(\cos t + 1) \theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C$

2.15

$$f(t) = (-2t + 1)(1 - \theta(t - 1)) + (t - 2)\theta(t - 1)$$

Eftersom funktionen saknar språng är $(\frac{d}{dx}(-2t + 1) = -2$ och $\frac{d}{dx}(t - 2) = 1)$:

$$f'(x) = f'_p(x) = -2(1 - \theta(t - 1)) + 1 \cdot \theta(t - 1) = -2(1 - \theta(t - 1)) + \theta(t - 1) = 3\theta(t - 1) - 2$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (3 - 2) - (-2) = 3$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = 1$.

$$f''(t) = f''_p(t) + b\delta(t - a) \quad \text{där} \quad a = 1, b = 3$$

$\frac{d}{dt}k = 0$ där k är en konstant:

$$f''(t) = -0 \cdot (1 - \theta(t - 1)) + 0 \cdot \theta(t - 1) + 3\delta(t - 1) = 3\delta(t - 1)$$

Beräkna $g(t)$, använd $f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a)$:

$$\begin{aligned} g(t) &= (1 + t^2)f''(t) - tf'(t) + f(t) = \\ &= (1 + t^2)3\delta(t - 1) - t(3\theta(t - 1) - 2) + (-2t + 1)(1 - \theta(t - 1)) + (t - 2)\theta(t - 1) = \\ &= (1 + t^2)3\delta(t - 1) - 3t\theta(t - 1) + 2t - 2t + 2t\theta(t - 1) + 1 - \theta(t - 1) + t\theta(t - 1) - 2\theta(t - 1) = \\ &= (1 + t^2)3\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) = 3\delta(t - 1) + 3t^2\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) = \\ &= 3\delta(t - 1) + 3 \cdot 1^2\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) = 6\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1) \end{aligned}$$

Svar: $6\delta(t - 1) + 1 - 3\theta(t - 1)$

2.16

2.17

Kapitel 3: Laplacetransformationer

3.1 a) $f(t) = e^{-2t}\theta(t)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-2t} \theta(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+2)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{s+2} (1 - e^{-(s+2)T})\end{aligned}$$

Om $s > -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \rightarrow 0$ när $T \rightarrow \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s > -2$$

Om $s = -2$:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} 1 dt = [t]_0^{+\infty} \rightarrow \infty$$

Om $s < -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \rightarrow \infty$ när $T \rightarrow \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L}f(s) \rightarrow -\infty$$

Detta medför att $\mathcal{L}f(s)$ endast är konvergent när $s > -2$ och därmed är Lapacetransformen för $e^{-2t}\theta(t)$ endast definierad i det intervallet.

Låt nu s vara ett komplext tal, $s = a + bi$:

$$\left| e^{-(a+bi+2)t} \right| = \left| e^{-(a+2)t} \right| \underbrace{\left| e^{-ibt} \right|}_{=1} = e^{-(a+2)t}$$

Här ser vi att $e^{-(s+2)t} \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ om $a = \operatorname{Re} s > -2$ vilket utvidgar Lapacetransformen att inkludera hela planet $\operatorname{Re} s > -2$.

Svar: $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re} s > -2$

3.1 b) $f(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} (\theta(t) - \theta(t-1)) dt = \int_0^1 e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 = \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad s \neq 0\end{aligned}$$

Om $s = 0$ gäller att $e^{-st} = 1$ vilket medför:

$$\mathcal{L}f(0) = \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Svar: $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}), \quad s \neq 0$ och $\mathcal{L}f(0) = 1$

3.2

$$\begin{aligned}f(at) &\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(at) dt = \left[\begin{array}{l} x = at \\ dt = dx/a \\ t = -\infty \leftrightarrow x = -\infty \\ t = +\infty \leftrightarrow x = +\infty \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx/a} f(x) \frac{dx}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s/a)x} f(x) dx = \frac{1}{a} \mathcal{L}f\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{V.S.V.}\end{aligned}$$

3.3 a) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$, $\sigma > 0$ och $t^n \theta(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$, $\sigma > 0$.

$$f(t) = (2 + 3t^2)\theta(t) = 2\theta(t) + 3t^2\theta(t) \longleftrightarrow 2\frac{1}{s} + 3\frac{2}{s^3} = \frac{2s^2 + 6}{s^3}, \quad \sigma > 0$$

Svar: $(2 + 3t^2)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{2s^2 + 6}{s^3}, \quad \sigma > 0$

b) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $\sigma > \operatorname{Re} a$.

$$f(t) = e^{3t}\theta(t) = t^0 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{0!}{(s-3)^1} = \frac{1}{s-3}, \quad \sigma > 3$$

Svar: $e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-3}, \quad \sigma > 3$

c) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $\sigma > \operatorname{Re} a$.

$$f(t) = te^{3t}\theta(t) = t^1 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1!}{(s-3)^{1+1}} = \frac{1}{(s-3)^2}, \quad \sigma > 3$$

Svar: $te^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s-3)^2}, \quad \sigma > 3$

d) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $\sigma > \operatorname{Re} a$.

$$f(t) = t^2 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{2!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3}, \quad \sigma > 3$$

Svar: $t^2 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{2}{(s-3)^3}, \quad \sigma > 3$

e) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + b^2}$, $\sigma > 0$, b reellt och

$\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{b}{s^2 + b^2}$, $\sigma > 0$, b reellt.

$$\begin{aligned} f(t) &= (\cos 2t - \sin 2t)\theta(t) = \cos 2t\theta(t) - \sin 2t\theta(t) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + 2^2} - \frac{2}{s^2 + 2^2} = \frac{s-2}{s^2 + 4}, \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

Svar: $(\cos 2t - \sin 2t)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{s-2}{s^2 + 4}, \quad \sigma > 0$

3.4 a) Använd regeln $tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$ samt produktregeln och regeln för inre derivata:

$$F(s) = \frac{s}{s^4 + 1} \Leftrightarrow \frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{s^4 + 1} + s \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(s^4 + 1)^2} \cdot 4s^3 =$$

$$= \frac{s^4 + 1 - 4s^4}{(s^4 + 1)^2} = \frac{1 - 3s^4}{(s^4 + 1)^2}$$

$$tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{1 - 3s^4}{(s^4 + 1)^2} = \frac{3s^4 - 1}{(s^4 + 1)^2}$$

Svar: $tf(t) \longleftrightarrow \frac{3s^4 - 1}{(s^4 + 1)^2}$

b) Använd regeln $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s - a)$:

$$e^{-2t}f(t) \Rightarrow a = -2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4 + 1} \Leftrightarrow F(s + 2) = \frac{s + 2}{(s + 2)^4 + 1}$$

$$e^{-2t}f(t) \longleftrightarrow F(s + 2) = \frac{s + 2}{(s + 2)^4 + 1}$$

Svar: $e^{-2t}f(t) \longleftrightarrow \frac{s + 2}{(s + 2)^4 + 1}$

c) Använd regeln $f(t - a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s - a)$:

$$f(t - 2) \Rightarrow a = 2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4 + 1} \Leftrightarrow e^{-2s}F(s) = e^{-2s} \frac{s}{s^4 + 1} = \frac{se^{-2s}}{s^4 + 1}$$

$$f(t - 2) \longleftrightarrow e^{-2s}F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^4 + 1}$$

Svar: $f(t - 2) \longleftrightarrow \frac{se^{-2s}}{s^4 + 1}$

d) Använd regeln $f'(t) \longleftrightarrow sF(s)$:

$$F(s) = \frac{s}{s^4 + 1} \Leftrightarrow sF(s) = s \frac{s}{s^4 + 1} = \frac{s^2}{s^4 + 1}$$

$$f'(t) \longleftrightarrow sF(s) = \frac{s^2}{s^4 + 1}$$

Svar: $f'(t) \longleftrightarrow \frac{s^2}{s^4 + 1}$

e) Använd regeln $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$:

$$f(2t) \Rightarrow a = 2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4 + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{s/2}{(s/2)^4 + 1} = \frac{1}{2} \frac{\frac{s}{2}}{\frac{s^4}{16} + 1} = \frac{16s}{4(s^4 + 16)} = \frac{4s}{s^4 + 16}$$

$$f(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{4s}{s^4 + 16}$$

Svar: $f(2t) \longleftrightarrow \frac{4s}{s^4 + 16}$

3.5 Använd reglerna $\alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$ och $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$.

Låt $f_1(t) = \theta(t-1)$ och $f_2(t) = \theta(t-2)$.

$$\mathcal{L} f_1(s) = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L} f_2(s) = \frac{e^{-2s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\begin{aligned} u(t) = \theta(t) - 2\theta(t-1) + \theta(t-2) &\longleftrightarrow \mathcal{L} \theta(s) - 2\mathcal{L} f_1(s) + \mathcal{L} f_2(s) = \\ &= \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1}{s}((e^{-s})^2 - 2e^{-s} + 1^2) = \frac{1}{s}(e^{-s} - 1)^2 \end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L} u(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} - 1)^2$

3.6 Låt $f(t) = \cos(t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ vilket medför att $v(t) = t^2 \cos(t)\theta(t) = tg(t)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$ och $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + b^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, b reellt:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} g(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L} f(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) = -\left(\frac{1}{s^2 + 1} + s \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \cdot 2s \right) = \\ &= -\frac{s^2 + 1 - 2s^2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0 \end{aligned}$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} v(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L} g(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right) = -\frac{2s(s^2 + 1)^2 - (s^2 - 1)2(s^2 + 1)2s}{(s^2 + 1)^4} = \\ &= -\frac{2s(s^2 + 1)(s^2 + 1 - 2(s^2 - 1))}{(s^2 + 1)^4} = -\frac{2s(3 - s^2)}{(s^2 + 1)^3} = \frac{2s(s^2 - 3)}{(s^2 + 1)^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0 \end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L} v(s) = \frac{2s(s^2 - 3)}{(s^2 + 1)^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

3.7 Låt $f(t) = \cos(3t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ vilket medför att $v(t) = e^{-2t}t\cos(3t)\theta(t) = e^{-2t}g(t)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$, $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$

och $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+b^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, b reellt:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+9}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}f(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) = -\left(\frac{1}{s^2+9} + s \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(s^2+9)^2} \cdot 2s\right) = \\ &= -\frac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v(s) &= \mathcal{L}(e^{-2t}g)(s) = \mathcal{L}g(s-(-2)) = \frac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9)^2} = \frac{s^2+4s+4-9}{(s^2+4s+4+9)^2} = \\ &= \frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}v(s) = \frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

3.8 a) Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = tg(t) = t\sin(t-1)\theta(t-1)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{b}{s^2+b^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, b reellt:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}g(s) = e^{-s}\mathcal{L}f(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-s}}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s^2+1} = -\frac{(-1) \cdot e^{-s}(s^2+1) - e^{-s}2s}{(s^2+1)^2} = \\ &= e^{-s}\frac{s^2+2s+1}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

Svar: $t\sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\frac{s^2+2s+1}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

- b)** Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ och $h(t) = g(t-1) = (t-1)\sin(t-1)\theta(t-1)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{b}{s^2+b^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, b reellt:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\mathcal{L}g(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}f(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}h(s) = e^{-s}\mathcal{L}g(s) = e^{-s}\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{-2se^{-s}}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\textbf{Svar: } (t-1)\sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow \frac{-2se^{-s}}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

- c)** Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = e^t g(t) = e^t \sin(t-1)\theta(t-1)$.

Använd reglerna $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{b}{s^2+b^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, b reellt:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}g(s) = e^{-s}\mathcal{L}f(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-s}}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}h(s) = \mathcal{L}g(s-1) = \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\textbf{Svar: } e^t \sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

- d)** Låt $f(t) = \theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = tg(t) = t\theta(t-1)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}g(s) = e^{-s}\mathcal{L}f(s) = e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\mathcal{L}h(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s} = -\frac{(-1) \cdot e^{-s}s - e^{-s}}{s^2} = e^{-s}\frac{s+1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\textbf{Svar: } t\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\frac{s+1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

3.9 a) Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{s^5 + 2s^4}{(s^2 + 1)^3} \text{ och } f(0) = 1.$$

$$\mathcal{L}(\theta f') = s\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0) = s\frac{s^5 + 2s^4}{(s^2 + 1)^3} - 1 = \frac{s^6 + 2s^5}{(s^2 + 1)^3} - 1$$

$$\textbf{Svar: } \mathcal{L}(\theta f') = \frac{s^6 + 2s^5}{(s^2 + 1)^3} - 1$$

b) Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$$\mathcal{L}(\theta f')(s) = \frac{s^6 + 2s^5}{(s^2 + 1)^3} - 1 \text{ (se a)} \text{ och } f'(0) = 2.$$

$$\mathcal{L}(\theta f'') = s\mathcal{L}(f'\theta)(s) - f'(0) = s\left(\frac{s^6 + 2s^5}{(s^2 + 1)^3} - 1\right) - 2 = \frac{s^7 + 2s^6}{(s^2 + 1)^3} - s - 2$$

$$\textbf{Svar: } \mathcal{L}(\theta f'') = \frac{s^7 + 2s^6}{(s^2 + 1)^3} - s - 2$$

3.10 a) Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$, $h(t) = e^t g(t) = e^t f(t)\theta(t)$.

Använd regeln $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

$$\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

$$\mathcal{L}h(s) = \mathcal{L}g(s-1) = \frac{3(s-1)^4}{(s-1)^5 + 1}$$

$$\textbf{Svar: } e^t f(t)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{3(s-1)^4}{(s-1)^5 + 1}$$

b) Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$, $h(t) = g(t-1) = f(t-1)\theta(t-1)$.

Använd regeln $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

$$\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

$$\mathcal{L}h(s) = e^{-s}\mathcal{L}g(s) = e^{-s} \cdot \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

$$\textbf{Svar: } f(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s} \cdot \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

c) Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5 + 1} \text{ och } f(0) = 3.$$

$$\mathcal{L}(f'\theta) = s\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0) = s\frac{3s^4}{s^5 + 1} - 3 = \frac{3s^5 - 3(s^5 + 1)}{s^5 + 1} = -\frac{3}{s^5 + 1}$$

$$\textbf{Svar: } f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow -\frac{3}{s^5 + 1}$$

d) Använd regeln $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$.

Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$ och $h(t) = g(3t)$.

Eftersom $\theta(t) = \theta(3t)$ medför $h(t) = \theta(3t)f(3t) = f(3t)\theta(t)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

$$\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5 + 1}$$

$$\mathcal{L}h(s) = \frac{1}{3} \mathcal{L}g\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3(s/3)^4}{(s/3)^5 + 1} = \frac{\frac{s^4}{3^3}}{3 \cdot \frac{s^5 + 3^5}{3^5}} = \frac{3^4 s^4}{3^3(s^5 + 3^5)} = \frac{3s^4}{s^5 + 243}$$

Svar: $f(3t)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{3s^4}{s^5 + 243}$

3.11 Använd definitionen av Laplacetransformen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f\theta)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\theta(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}(f\theta)(0) &= \int_0^{\infty} e^{-0 \cdot t} f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(t) dt &= \mathcal{L}(f\theta)(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 2 \cdot 0 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Svar:

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3.12 Funktionen:

$$f(t) = t(\theta(t) - \theta(t-1)) + \theta(t-1) = t\theta(t) - t\theta(t-1) + \theta(t-1)$$

Använd reglerna $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$ och $tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$.

Låt $g(t) = \theta(t-1)$.

$$\mathcal{L}\theta(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}g(s) = e^{-s} \mathcal{L}\theta(s) = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$t\theta(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\theta(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$t\theta(t-1) = tg(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds} \mathcal{L}g(s) = -\frac{d}{ds} \frac{e^{-s}}{s} = -\frac{-e^{-s}s - e^{-s}}{s^2} = e^{-s} \frac{s+1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{s+1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s}(s+1) + se^{-s}) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Svar: $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0$

3.13 a)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Använd sambandet $t^n e^{at} \theta(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a:$

$$\begin{aligned} \cosh(at)\theta(t) &= \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \theta(t) = \frac{1}{2} (e^{at}\theta(t) + e^{-at}\theta(t)) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} = \frac{2s}{2(s^2-a^2)} = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a \end{aligned}$$

Svar: $\cosh(at)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

b)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Använd sambandet $t^n e^{at} \theta(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a:$

$$\begin{aligned} \sinh(at)\theta(t) &= \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \theta(t) = \frac{1}{2} (e^{at}\theta(t) - e^{-at}\theta(t)) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+a-(s-a)}{s^2-a^2} = \frac{2a}{2(s^2-a^2)} = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a \end{aligned}$$

Svar: $\sinh(at)\theta(t) \longleftrightarrow \frac{a}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

3.14

Eftersom f är periodisk med perioden T är $f(t) = f(t-T)$ vilket medför att

$$\begin{aligned} \theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t-T) &= \theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t) = (\theta(t) - \theta(t-T))f(t) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(\theta(t) - \theta(t-T))f(t) dt = \int_0^T e^{-st}f(t) dt \end{aligned}$$

Låt $g(t) = \theta(t)f(t) \longleftrightarrow \mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s)$ vilket medför att $\theta(t-T)f(t-T) = g(t-T) \longleftrightarrow e^{-Ts}\mathcal{L}g(s)$

$$\begin{aligned} \theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t-T) &= g(t) - g(t-T) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \mathcal{L}g(s) - e^{-Ts}\mathcal{L}g(s) = \int_0^T e^{-st}f(t) dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}g(s)(1 - e^{-Ts}) = \int_0^T e^{-st}f(t) dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t) dt}{1 - e^{-Ts}} \quad \text{V.S.V.} \end{aligned}$$

3.15 Använd sambandet som blev funnet i **3.14**

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ts}}$$

Perioden för det kausala pulståget är $T = 2$ och eftersom integralen endast täcker intervallet $[0, T]$ behövs funktionen endast konstrueras korrekt i det intervallet.

$$f(t) = 1 - 2\theta(t - 1), \quad \text{i intervallet } [0, 2]$$

Eftersom funktionen är kausal är $f(t) = \theta(t)f(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta f)(s) &= \frac{\int_0^2 e^{-st}(1 - 2\theta(t - 1)) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\int_0^2 e^{-st} dt - 2 \int_0^2 e^{-st} \theta(t - 1) dt \right) = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\int_0^2 e^{-st} dt - 2 \int_1^2 e^{-st} dt \right) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^2 - 2 \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{-e^{-2s} - (-e^0)}{s} - 2 \left(\frac{-e^{-2s} - (-e^{-s})}{s} \right) \right) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} \right) = \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - e^{-s})^2}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-s}}{1 + e^{-s}} \end{aligned}$$

3.16

$$f(t) = t^2(\theta(t) - \theta(t - 1)) + (2 - t)(\theta(t - 1) - \theta(t - 2))$$

Använd definitionen av Laplacetransformen.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} (t^2(\theta(t) - \theta(t - 1)) + (2 - t)(\theta(t - 1) - \theta(t - 2))) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} t^2(\theta(t) - \theta(t - 1)) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} (2 - t)(\theta(t - 1) - \theta(t - 2)) dt = \\ &= \int_0^1 e^{-st} t^2 dt + \int_1^2 e^{-st} (2 - t) dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} t^2 dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} t^2 \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s} t dt = -\frac{e^{-s}}{s} + 2 \left(\left[-\frac{e^{-st}}{s^2} t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right) = \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} + 2 \left(-\frac{e^{-s}}{s^2} + \left[-\frac{e^{-st}}{s^3} \right]_0^1 \right) = -\frac{s^2 e^{-s}}{s^3} - \frac{2s e^{-s}}{s^3} + 2 \left(-\frac{e^{-s}}{s^3} - \left(-\frac{1}{s^3} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{s^3} (2 - e^{-s}(s^2 + 2s + 2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{-st} (2 - t) dt &= 2 \int_1^2 e^{-st} dt - \int_1^2 e^{-st} t dt = 2 \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_1^2 - \left(\left[-\frac{e^{-st}}{s} t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s} dt \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{e^{-2s}}{s} - \left(-\frac{e^{-s}}{s} \right) \right) - \left(-\frac{2e^{-2s}}{s} - \left(-\frac{e^{-s}}{s} \right) + \left[-\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_1^2 \right) = \\ &= \frac{e^{-s}}{s} - \left(-\frac{e^{-2s}}{s^2} - \left(-\frac{e^{-s}}{s^2} \right) \right) = \frac{1}{s^2} (s e^{-s} + e^{-2s} - e^{-s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= \frac{1}{s^3} (2 - e^{-s}(s^2 + 2s + 2)) + \frac{1}{s^2} (s e^{-s} + e^{-2s} - e^{-s}) = \\ &= \frac{1}{s^3} (2 - s^2 e^{-s} - 2s e^{-s} - 2e^{-s} + s^2 e^{-s} + s e^{-2s} - s e^{-s}) = \frac{1}{s^3} (2 - 2e^{-s} - 3s e^{-s} + s e^{-2s}) \end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s^3} (2 - 2e^{-s} - 3s e^{-s} + s e^{-2s})$

Kapitel 4: Den inversa Laplacetransformen

4.1 multiplicera faktorerna.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)^2(s+1+2i)(s+1-2i)} = \frac{s^2-1}{(s^2+2s+4)((s+1)^2+4)} = \\ &= \frac{s^2-1}{(s^2+4s+4)(s^2+2s+5)} = \frac{s^2-1}{s^4+6s^3+17s^2+28s+20} \end{aligned}$$

4.2 a) Använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s} \longleftrightarrow \theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \theta(t)$

b) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^{2+1}} \longleftrightarrow \frac{1}{2} t^2 \theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2} t^2 \theta(t)$

c) Faktorisera och använd tabellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= \frac{s^4+6s^3-10s^2+1}{s^5} = \frac{1}{s} + 6\frac{1}{s^2} - 10\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5} = \frac{1}{s} + 6\frac{1}{s^2} - 5\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{4!}{s^5} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \theta(t) + 6t\theta(t) - 5t^2\theta(t) + \frac{1}{24}t^4\theta(t) = (1+6t-5t^2+\frac{1}{24}t^4)\theta(t) = f(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (1+6t-5t^2+\frac{1}{24}t^4)\theta(t)$

4.2 a) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{2}{s+3} = 2 \frac{0!}{(s-(-3))^{0+1}} \longleftrightarrow 2e^{-3t}\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = 2e^{-3t}\theta(t)$

b) Faktorisera och använd tabellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= \frac{1}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{1}{(s+3)^3} = \frac{1}{s+3} - 2\frac{1}{(s+3)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+3)^3} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow e^{-3t}\theta(t) - 2te^{-3t}\theta(t) + \frac{1}{2}t^2e^{-3t}\theta(t) = (1-2t+\frac{1}{2}t^2)e^{-3t}\theta(t) = f(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (1-2t+\frac{1}{2}t^2)e^{-3t}\theta(t)$

c) Faktorisera och använd tabellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= \frac{s+5}{(s+3)^2} = \frac{s+3+2}{(s+3)^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2} + \frac{2}{(s+3)^2} = \frac{1}{s+3} + 2\frac{1}{(s+3)^2} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow e^{-3t}\theta(t) + 2te^{-3t}\theta(t) = (1+2t)e^{-3t}\theta(t) = f(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (1+2t)e^{-3t}\theta(t)$

4.4 a) Faktorisera och använd tabellen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} f(s) &= \frac{s}{s^2 + 6s + 8} = \frac{s}{(s+4)(s+2)} = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2} = 2 \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow 2e^{-4t}\theta(t) - e^{-2t}\theta(t) = (2e^{-4t} - e^{-2t})\theta(t) = f(t)\end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (2e^{-4t} - e^{-2t})\theta(t)$

b) Kvadratkomplettera, faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 10} = \frac{s}{(s+3)^2 + 1} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 1} - 3 \frac{1}{(s+3)^2 + 1}$$

Använd dämpningsregeln:

$$\frac{s+3}{(s+3)^2 + 1} \longleftrightarrow e^{-3t} \cos(t)\theta(t)$$

$$\frac{1}{(s+3)^2 + 1} \longleftrightarrow e^{-3t} \sin(t)\theta(t)$$

$$f(t) = e^{-3t} \cos(t)\theta(t) - 3e^{-3t} \sin(t)\theta(t) = (\cos t - 3 \sin t)e^{-3t}\theta(t)$$

Svar: $f(t) = (\cos t - 3 \sin t)e^{-3t}\theta(t)$

4.5 a) Använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s^2 + 16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{s^2 + 4^2} \longleftrightarrow \frac{1}{4} \sin(4t)\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{4} \sin(4t)\theta(t)$

b) Använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s}{s^2 + 16} = \frac{s}{s^2 + 4^2} \longleftrightarrow \cos(4t)\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \cos(4t)\theta(t)$

c) Kvadratkomplettera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} f(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{(s+2)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+2)^2 + 2^2} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t)\theta(t) = f(t)\end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t)\theta(t)$

d) Kvadratkomplettera, faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} f(s) &= \frac{s}{s^2 + 4s + 8} = \frac{s}{(s+2)^2 + 2^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 2^2} - \frac{2}{(s+2)^2 + 2^2} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow e^{-2t} \cos(2t)\theta(t) - e^{-2t} \sin(2t)\theta(t) = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-2t}\theta(t) = f(t)\end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-2t}\theta(t)$

4.6 a) Hitta nollställena:

$$s^2 - s - 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \{2, -1\}$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s+3}{s^2-s-2} = \frac{s+3}{(s-2)(s+1)} = \frac{k_1}{s-2} + \frac{k_2}{s+1}$$

$$k_1(s+1) + k_2(s-2) = s+3 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_2 - 2k_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{2}{3} \\ k_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{L} f(s) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s+1} \longleftrightarrow -\frac{2}{3}e^{-2t}\theta(t) + \frac{5}{3}e^t\theta(t) = (5e^t - 2e^{-2t})\frac{1}{3}\theta(t)$$

Svar: $f(t) = (5e^t - 2e^{-2t})\frac{1}{3}\theta(t)$

b) Hitta nollställena:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \{-1, -2\}$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{3s+5}{s^3+3s^2+2s} = \frac{3s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$$

$$k_1(s+1)(s+2) + k_2s(s+2) + k_3s(s+1) = 3s+5 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 + k_3 = 3 \\ 2k_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{5}{2} \\ k_2 = -2 \\ k_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow \frac{5}{2}\theta(t) - 2e^{-t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}\theta(t) = \\ &= \frac{1}{2}(5 - 4e^{-t} - e^{-2t})\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2}(5 - 4e^{-t} - e^{-2t})\theta(t)$

c) Hitta nollställena:

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \Leftrightarrow s = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1 = \{-1, -3\}$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s^3 - 5s}{s^2 + 4s + 3} = s \frac{s^2 - 5}{(s+1)(s+3)} = s \left(\frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+3} + k_3 \right)$$

$$k_1(s+3) + k_2(s+1) + k_3(s+3)(s+1) = s^2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 + 4k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + 3k_3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = -2 \\ k_3 = 1 \end{cases}$$

Använd regeln $sF(s) \longleftrightarrow f'(t)$ och $\delta(t) = 1$ för att bestämma inversen till s .

$$s = s \cdot 1 \longleftrightarrow \delta'(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= -2 \frac{s}{s+1} - 2 \frac{s}{s+3} + s = -2 \frac{s+1}{s+1} + 2 \frac{1}{s+1} - 2 \frac{s+3}{s+3} + 6 \frac{1}{s+3} + s = \\ &= -4 + 2 \frac{1}{s+1} + 6 \frac{1}{s+3} + s \longleftrightarrow -4\delta(t) + 2e^{-t}\theta(t) + 6e^{-3t}\theta(t) + \delta'(t) = \\ &= \delta'(t) - 4\delta(t) + (2e^{-t} + 6e^{-3t})\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \delta'(t) - 4\delta(t) + (2e^{-t} + 6e^{-3t})\theta(t)$

4.7 En av polerna är $s = -1$ (se anvisningen).

$$\begin{aligned} s^3 + 5s^2 + 9s + 5 &= (s+1)(s^2 + As + B) = s^3 + (A+1)s^2 + (B+A)s + B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A+1=5 \\ B+A=9 \\ B=5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=5 \end{cases} \Leftrightarrow s^3 + 5s^2 + 9s + 5 = (s+1)(s^2 + 4s + 5) \end{aligned}$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5} &= \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2s + k_3}{s^2 + 4s + 5} \\ k_1(s^2 + 4s + 5) + (k_2s + k_3)(s+1) &= s \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 4k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ 5k_1 + k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{1}{2} \\ k_3 = \frac{5}{2} \end{cases} \\ \frac{s}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s+5}{s^2 + 4s + 5} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2+3}{(s+2)^2 + 1} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-t}\theta(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos(t)\theta(t) + \frac{3}{2}e^{-2t}\sin(t)\theta(t) = \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-t} + (\cos t + 3\sin t)e^{-2t})\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5}\right) = \frac{1}{2}(-e^{-t} + (\cos t + 3\sin t)e^{-2t})\theta(t)$

4.8 Faktorisera och använd tabellen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^3(s^2 + 1)} &= \frac{k_1s + k_2}{s^2 + 1} + \frac{k_3}{s} + \frac{k_4}{s^2} + \frac{k_5}{s^3} \\ s^3(k_1s + k_2) + k_3s^2(s^2 + 1) + k_4s(s^2 + 1) + k_5(s^2 + 1) &= 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_4 = 0 \\ k_3 + k_5 = 0 \\ k_4 = 0 \\ k_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = -1 \\ k_4 = 0 \\ k_5 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^3(s^2 + 1)} &= \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3} \longleftrightarrow \cos(t)\theta(t) - \theta(t) + \frac{1}{2}t^2\theta(t) = \\ &= \left(\cos(t) - 1 + \frac{1}{2}t^2\right)\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2 + 1)}\right) = (\cos(t) - 1 + \frac{1}{2}t^2)\theta(t)$

4.9 a) Låt $\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{s} \longleftrightarrow \theta(t)$ och använd reglerna för dämpning och förskjutning.

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{e^{-s}}{s+1} = e^{-s}\mathcal{L}g(s+1) \longleftrightarrow e^{-(t-1)}g(t-1) = e^{1-t}\theta(t-1)$$

Svar: $f(t) = e^{1-t}\theta(t-1)$

b) Se **4.6 b)** för uträkning av nollställena.

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{se^{-s}}{s^2 + 3s + 2} = e^{-s} \left(\frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} \right)$$

$$k_1(s+2) + k_2(s+1) = s \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

Använd reglerna för dämpning och förskjutning:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) = e^{-s} \left(-\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+2} \right) &\longleftrightarrow e^{-(t-1)}\theta(t-1) + 2e^{-2(t-1)}\theta(t-1) = \\ &= (-e^{1-t} + 2e^{2-2t})\theta(t-1) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (-e^{1-t} + 2e^{2-2t})\theta(t-1)$

c) Se **b)** för beräkning av den andra termen.

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1 + se^{-s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{se^{-s}}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + e^{-s} \left(-\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+2} \right)$$

$$k_1(s+2) + k_2(s+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

Använd regeln för dämpning (samt **b)**):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + e^{-s} \left(-\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+2} \right) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow e^{-t}\theta(t) - e^{-2t}\theta(t) + (-e^{1-t} + 2e^{2-2t})\theta(t-1) = \\ &= (e^{-t} - e^{-2t})\theta(t) + (-e^{1-t} + 2e^{2-2t})\theta(t-1) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\theta(t) + (-e^{1-t} + 2e^{2-2t})\theta(t-1)$