# Tillämpad matematik - Linjära system
# FMAF10

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

28 januari 2017

# Kapitel 1: Svängningar och komplexa tal

**1.1 a)** Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ där $\omega$ är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 3\sin(2t - 5) \Rightarrow \omega = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}$$

**Svar:** vinkelfrekvens: 2, period: $\pi$, frekvens: $\frac{1}{\pi}$

**b)** Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ där $\omega$ är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 50\sin(100\pi t + 1) \Rightarrow \omega = 100\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 50$$

**Svar:** vinkelfrekvens: $100\pi$, period: $\frac{1}{50}$, frekvens: 50

**1.2 a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**e)**

**f)**

**1.3** Använd regeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ från formelbladet.

$$\begin{aligned} u(t) =& 6\sin(3t + \frac{\pi}{4}) = 6(\sin(3t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(3t)\sin(\frac{\pi}{4})) = \\ =& 6\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3t) + 6\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3t) = 3\sqrt{2}\cos(3t) + 3\sqrt{2}\sin(3t) \end{aligned}$$

**Svar:** $a = b = 3\sqrt{2}, \omega = 3 \Rightarrow 3\sqrt{2}\cos(3t) + 3\sqrt{2}\sin(3t)$

**1.4 a)** låt $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\alpha\cos(\omega t) + A\cos\alpha\sin(\omega t) = \sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t)$ där $A$ är amplituden och $\alpha$ är fasförskjutningen.

$$\begin{cases} A\sin\alpha = \sqrt{3} \\ A\cos\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\alpha)^2 + (A\cos\alpha)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2}\sqrt{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = \sqrt{4} \Rightarrow A\sqrt{1} = 2 \Leftrightarrow A = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan(-\frac{\sqrt{3}}{1}) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0)$$

eller:

$$u(t) = \sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(\omega t)) =$$
$$= 2(\sin\frac{2\pi}{3}\cos(\omega t) + \cos\frac{2\pi}{3}\sin(\omega t)) = \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

**Svar:** Amplitud: 2 och fasförskjutning: $\frac{2\pi}{3}$

**1.4 b)** låt $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\alpha\cos(\omega t) + A\cos\alpha\sin(\omega t) = -2\cos(\omega t) - 4\sin(\omega t)$ där $A$ är amplituden och $\alpha$ är fasförskjutningen.

$$\begin{cases} A\sin\alpha = -2 \\ A\cos\alpha = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\alpha)^2 + (A\cos\alpha)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2}\sqrt{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = \sqrt{4 + 16} \Rightarrow A\sqrt{1} = \sqrt{20} \Leftrightarrow A = 2\sqrt{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{1}{2} + \pi \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0)$$

**Svar:** Amplitud: $2\sqrt{5}$ och fasförskjutning: $\arctan\frac{1}{2} + \pi$

**1.5 a)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

**Svar:** $|i| = 1$

**b)** Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

**Svar:** $|-i| = 1$

**c)** Eftersom $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ oberoende av vad vinkeln $\theta$ är.

**Svar:** $\left|e^{5\pi i/7}\right| = 1$

**1.6 a)** låt $e^{i\theta} = e^{5\pi i/7} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{7}$. Eftersom $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow e^{5\pi i/7}$ ligger i andra kvadranten.

**Svar:** andra kvadranten

**b)** Låt $e^{i\theta} = e^{-34\pi i/7} \Leftrightarrow \theta = -\frac{34}{7}\pi = -\frac{35}{7}\pi + \frac{1}{7}\pi = -6\pi + \pi + \frac{1}{7}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{1}{7}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\theta} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow e^{-34\pi i/7}$ ligger i tredje kvadranten.

**Svar:** tredje kvadranten

**c)** Låt $e^{i\theta} = e^{2000\pi i/13} \Leftrightarrow \theta = \frac{2000}{13}\pi = \frac{1989}{13}\pi + \frac{11}{13}\pi = 152\pi + \pi + \frac{11}{13}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{11}{13}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\theta} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\frac{3}{2}\pi < \phi < 2\pi \Rightarrow e^{2000\pi i/13}$ ligger i fjärde kvadranten.

**Svar:** fjärde kvadranten