Tillämpad matematik - Linjära system
FMAF10

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

14 mars 2017

Kapitel 1: Svängningar och komplexa tal

1.1 a) Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ där ω är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 3\sin(2t-5) \;\Rightarrow\; \omega = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f = \frac{1}{T} \;\Rightarrow\; f = \frac{1}{\pi}$$

Svar: vinkelfrekvens: 2, period: π, frekvens: $\frac{1}{\pi}$

b) Allmänna funktionen för odämpad harmonisk svängning är $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ där ω är vinkelfrekvensen.

$$u(t) = 50\sin(100\pi t + 1) \;\Rightarrow\; \omega = 100\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$$

$$f = \frac{1}{T} \;\Rightarrow\; f = 50$$

Svar: vinkelfrekvens: 100π, period: $\frac{1}{50}$, frekvens: 50

1.2 a)

b)

c)

d)

e)

f)

1.3 Använd regeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ från formelbladet.

$$\begin{aligned} u(t) =& 6\sin(3t + \frac{\pi}{4}) = 6(\sin(3t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(3t)\sin(\frac{\pi}{4})) = \\ =& 6\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3t) + 6\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3t) = 3\sqrt{2}\cos(3t) + 3\sqrt{2}\sin(3t) \end{aligned}$$

Svar: $a = b = 3\sqrt{2}, \omega = 3 \;\Rightarrow\; 3\sqrt{2}\cos(3t) + 3\sqrt{2}\sin(3t)$

1.4 a) låt $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\alpha\cos(\omega t) + A\cos\alpha\sin(\omega t) = \sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t)$ där A är amplituden och α är fasförskjutningen.

$$\begin{cases} A\sin\alpha = \sqrt{3} \\ A\cos\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\alpha)^2 + (A\cos\alpha)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2}\sqrt{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = \sqrt{4} \Rightarrow A\sqrt{1} = 2 \Leftrightarrow A = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan(-\frac{\sqrt{3}}{1}) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0)$$

eller:

$$u(t) = \sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(\omega t)) =$$
$$= 2(\sin\frac{2\pi}{3}\cos(\omega t) + \cos\frac{2\pi}{3}\sin(\omega t)) = \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

Svar: Amplitud: 2 och fasförskjutning: $\frac{2\pi}{3}$

1.4 b) låt $u(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\alpha\cos(\omega t) + A\cos\alpha\sin(\omega t) = -2\cos(\omega t) - 4\sin(\omega t)$ där A är amplituden och α är fasförskjutningen.

$$\begin{cases} A\sin\alpha = -2 \\ A\cos\alpha = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\alpha)^2 + (A\cos\alpha)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2}\sqrt{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = \sqrt{4+16} \Rightarrow A\sqrt{1} = \sqrt{20} \Leftrightarrow A = 2\sqrt{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{1}{2} + \pi \quad (+\pi \text{ ty } -4 < 0)$$

Svar: Amplitud: $2\sqrt{5}$ och fasförskjutning: $\arctan\frac{1}{2} + \pi$

1.5 a) Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Svar: $|i| = 1$

b) Eftersom $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

Svar: $|-i| = 1$

c) Eftersom $\left|e^{i\phi}\right| = 1$ oberoende av vad vinkeln ϕ är.

Svar: $\left|e^{5\pi i/7}\right| = 1$

1.6 a) låt $e^{i\phi} = e^{5\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = \frac{5\pi}{7}$. Eftersom $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi \Rightarrow e^{5\pi i/7}$ ligger i andra kvadranten.

Svar: andra kvadranten

b) Låt $e^{i\phi} = e^{-34\pi i/7} \Leftrightarrow \phi = -\frac{34}{7}\pi = -\frac{35}{7}\pi + \frac{1}{7}\pi = -6\pi + \pi + \frac{1}{7}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{1}{7}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow e^{-34\pi i/7}$ ligger i tredje kvadranten.

Svar: tredje kvadranten

c) Låt $e^{i\phi} = e^{2000\pi i/13} \Leftrightarrow \phi = \frac{2000}{13}\pi = \frac{1989}{13}\pi + \frac{11}{13}\pi = 152\pi + \pi + \frac{11}{13}\pi \Rightarrow \phi = \pi + \frac{11}{13}\pi$. Eftersom perioden är $2\pi \Rightarrow e^{i\phi} = e^{i\phi}$ vilket innebär $\frac{3}{2}\pi < \phi < 2\pi \Rightarrow e^{2000\pi i/13}$ ligger i fjärde kvadranten.

Svar: fjärde kvadranten

1.7 a) Absolutbelopp:

$$|2-2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-2}{2}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Absolutbelopp:

$$\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

c) Absolutbelopp:

$$|1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{1}\right) + 2k\pi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d) Absolutbelopp:

$$|-1| = 1$$

Argument:

$$\arctan\left(\frac{0}{1}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.8 a) Låt $z = -1 - i = re^{i\phi}$ där r är absolutbeloppet och ϕ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4 + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

Svar: $z = \sqrt{2}e^{i3/4\pi}$

b) Låt $z = i = re^{i\phi}$ där r är absolutbeloppet och ϕ är argumentet.

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Eftersom $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z > 0$ är $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Partikulärlösning:

$$z = e^{i\pi/2}$$

Svar: $z = e^{i\pi/2}$

1.9 Utnyttja sambandet $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$5e^{2\pi i/3} = 5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Svar: $-\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$

1.10 a) Låt $z = re^{i\phi}, \quad r \geq 0$

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (re^{i\phi})^4 = -1 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\phi} = e^{\pi + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\phi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r = 1 \end{cases}$$

$k = \{0, 1, 2, 3\}$ ger alla unika lösningar.
Svar: $e^{\pi i/4 + k\pi i/2} \qquad k = \{0, 1, 2, 3\}$

Eller:

Använd $\sqrt{i} = (e^{\pi i/2})^{1/2} = e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och $\sqrt{-i} = (e^{-\pi i/2})^{1/2} = e^{-\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{z^4} = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow z^2 = \pm i \Leftrightarrow \sqrt{z^2} = \pm\sqrt{\pm i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$$

b) Låt $z = re^{\phi i}, \quad r \geq 0$

$$z^5 = 32 \Leftrightarrow (re^{\phi i})^5 = 32 \Leftrightarrow r^5 e^{5\phi i} = 32e^{2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\phi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r^5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r = 2 \end{cases}$$

$k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ger alla unika lösningar.
Svar: $e^{2k\pi i/5} \qquad k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1.11

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + i3\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \operatorname{Re} e^{3ix} = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

Svar: $4\cos^3 x - 3\cos x$

1.12 a) Se formelblad.

$C = b + ai$ där $a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$$\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; C = -1 + i\sqrt{3}$$

Svar: $C = -1 + i\sqrt{3}$

b) Se formelblad.

$C = b + ai$ där $a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$$-2\cos\omega t - 4\sin\omega t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; C = -4 - 2i$$

Svar: $C = -4 - 2i$

1.13 Period: $2 \cdot 2 = 4$

Frekvens: $\frac{1}{4}$

Vinkelfrekvens: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Fas: $-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

1.14 a) Låt $z = 3.15 - 8.88i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{3.15^2 + (-8.88)^2} \approx 9.42$$

$$A\sin\phi = -8.88$$

$$A\cos\phi = 3.15$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{-8.88}{3.15}$$

$$\phi = \arctan\frac{-8.88}{3.15} \approx -1.23$$

Svar: $9.42e^{-1.23i}$

b) Låt $z = -99 - 118i = re^{\phi i}$

$$r = |z| = \sqrt{(-99)^2 + (-118)^2} \approx 154.03$$

$$A\sin\phi = -118$$

$$A\cos\phi = -99$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{-118}{-99}$$

$$\phi = \arctan\frac{118}{99} + \pi \approx 4.01$$

Svar: $9.42e^{4.01i}$ eller $9.42e^{-2.27i}$ (pga period 2π)

1.15 a) Använd regeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$u(t) = A\sin(\omega t+\delta) = A\sin\delta\cos\omega t + A\cos\delta\sin\omega t =$$
$$= 22.4\cos\omega t + 11.3\sin\omega t \Leftrightarrow \begin{cases} A\sin\delta = 22.4 \\ A\cos\delta = 11.3 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\delta)^2 + (A\cos\delta)^2} = \sqrt{22.4^2 + 11.3^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2(\sin^2\delta + \cos^2\delta)} \approx 25.09 \Leftrightarrow A \approx 25.09$$

$$\tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{A\sin\delta}{A\cos\delta} = \frac{22.4}{11.3}$$
$$\delta = \arctan\frac{22.4}{11.3} \approx 1.10$$

$$C = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = A\sin\delta \\ b = A\cos\delta \end{cases} \Leftrightarrow C = 11.3 + 22.4i$$

Svar: $u(t) = 25.09\sin(\omega t + 1.10)$, $11.3 + 22.4i$

b) Använd regeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$u(t) = A\sin(\omega t+\delta) = A\sin\delta\cos\omega t + A\cos\delta\sin\omega t =$$
$$= 5.19\sin\omega t - 3.14\cos\omega t \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\delta = 5.19 \\ A\sin\delta = -3.14 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(A\sin\delta)^2 + (A\cos\delta)^2} = \sqrt{5.19^2 + (-3.14)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2(\sin^2\delta + \cos^2\delta)} \approx 6.07 \Leftrightarrow A \approx 6.07$$

$$\tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{A\sin\delta}{A\cos\delta} = \frac{-3.14}{5.19}$$
$$\delta = \arctan\frac{-3.14}{5.19} \approx -0.54$$

$$C = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = A\sin\delta \\ b = A\cos\delta \end{cases} \Leftrightarrow C = 5.19 - 3.14i$$

Svar: $u(t) = 6.07\sin(\omega t - 0.54)$, $5.19 - 3.14i$

1.16 Låt y vara en funktion av t där s är en konstant.

$$y(t)' + 2y(t) = e^{st}$$

Integrerande faktor:

$$g(t) = 2 \Rightarrow G(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad \text{i.f: } e^{2t}$$

Multiplicera med den integrerande faktorn:

$$e^{2t}y(t)' + 2e^{2t}y(t) = e^{2t}e^{st} \Leftrightarrow (e^{2t}y)' = e^{2t}e^{st} \Leftrightarrow e^{2t}y = \int e^{(2+s)t}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{e^{2t}}\int e^{(2+s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e^{2t}}\frac{1}{2+s}e^{(2+s)t} + C = \frac{1}{e^{2t}}e^{2t}\frac{1}{2+s}e^{st} + C =$$
$$= \frac{1}{2+s}e^{st} + C, \quad s \neq -2$$

Partikulärlösning ($C = 0$): $\frac{1}{2+s}e^{st}$, $\quad s \neq -2$

Svar: $y = \frac{1}{2+s}e^{st}$, $\quad s \neq -2$

1.17 Låt $s = i\omega$ och då ger **1.16** $y = \frac{1}{2+i\omega}e^{i\omega t}$ och eftersom $\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$:

$$y = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2+i\omega}e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2-i\omega}{\omega^2+4}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right) = \frac{1}{\omega^2+4}(2\sin\omega t + \omega\sin\omega t)$$

Svar: $y = \frac{1}{\omega^2+4}(2\sin\omega t + \omega\sin\omega t)$

Kapitel 2: Steg och impulsfunktioner

2.1 a)

b)

c)

d)

e)

2.2

2.3 a)

$$\theta(t-1)\theta(3-t)$$

eller

$$\theta(t-1)-\theta(t-3)$$

b) Funktionen som syns är $-0.5t+1.5$, stegfunktioner som skärmar in $]1,3[$ är (se **a)**) $\theta(t-1)-\theta(t-3)$ vilket medför:

Svar: $(-0.5t+1.5)(\theta(t-1)-\theta(t-3))$

2.4 a) Funktionen i intervallet $]0,1[$ är t. Stegfunktion: $\theta(t)-\theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1,2[$ är 1. Stegfunktion: $\theta(t-1)-\theta(t-2)$.

Funktionen i intervallet $]2,3[$ är $3-t$. Stegfunktion: $\theta(t-2)-\theta(t-3)$ vilket ger:

Svar: $t(\theta(t)-\theta(t-1))+\theta(t-1)-\theta(t-2)+(3-t)(\theta(t-2)-\theta(t-3))$

b) Funktionen i intervallet $]0,1[$ är t. Stegfunktion: $\theta(t)-\theta(t-1)$.

Funktionen i intervallet $]1,2[$ är $t-1$. Stegfunktion: $\theta(t-1)-\theta(t-2)$ vilket ger:

Svar: $t(\theta(t)-\theta(t-1))+(t-1)(\theta(t-1)-\theta(t-2))$

2.5

$$p_b(t) = \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))$$

Om stegfunktioner finns som en faktor i en integral kan dessa ersätta integrationsgränserna eftersom de evaluerar till noll utanför intervallet.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta(t-a) - \theta(t-b))t\,dt = \int_a^b t\,dt$$

Lös med hjälp av ovanstående samband:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b}(\theta(t) - \theta(t-b))e^{-st}\,dt = \int_0^b \frac{1}{b}e^{-st}\,dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{sb}e^{-st}\right]_0^b = -\frac{e^{-sb}}{sb} - \left(-\frac{1}{sb}\right) = \frac{1-e^{-sb}}{sb}, \quad s \neq 0$$

Om $s = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)\cdot 1\,dt = 1 \qquad \text{enligt def., se boken}$$

' **Svar:** $\int_{-\infty}^{+\infty} p_b(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{sb}(1-e^{-sb}), \quad s \neq 0$ och $1, \quad s = 0$

2.6 Räknelag (se boken s. 21):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt = f(a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Eftersom e^{-st} är kontinuerlig för alla t använd räknelagen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)e^{-st}\,dt = e^{-sa}$$

Svar: e^{-sa}

2.7 Räknelag (se boken s. 21):

$$\frac{d}{dt}(\theta(t-a)) = \delta(t-a)$$

Använd räknelagen:

$$\frac{d}{dt}p_b = \frac{1}{b}\frac{d}{dt}(\theta(t) - \theta(t-b)) = \frac{1}{b}\left(\frac{d}{dt}\theta(t) - \frac{d}{dt}\theta(t-b)\right) = \frac{1}{b}\left(\delta(t) - \delta(t-b)\right)$$

Svar: $\frac{1}{b}\left(\delta(t) - \delta(t-b)\right)$

2.8 a) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = 0$$

Låt $f(t) = t$, eftersom t är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t) = f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) = 0\cdot\delta(t) = 0$$

Svar: 0

b) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = t$, eftersom t är kontinuerlig använd räknelagen:

$$t\delta(t-1) = f(t)\delta(t-1) = f(1)\delta(t-1) = 1 \cdot \delta(t-1) = \delta(t-1)$$

Svar: $\delta(t-1)$

c) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = e^{-t}$, eftersom e^{-t} är kontinuerlig använd räknelagen:

$$e^{-t}\delta(t-2) = f(t)\delta(t-2) = f(2)\delta(t-2) = e^{-2}\delta(t-1)$$

Svar: $e^{-2}\delta(t-1)$

d) Räknelag (se boken s. 21):

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a), \quad \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } t = a$$

Låt $f(t) = \sin t$, eftersom $\sin t$ är kontinuerlig använd räknelagen:

$$\sin t\delta(t-\pi) = f(t)\delta(t-\pi) = f(\pi)\delta(t-\pi) = 0 \cdot \delta(t-\pi) = 0$$

Svar: 0

2.9 Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dt}t^2 = 2t$ och $\frac{d}{dt}(2-t) = -1$):

$$f'(t) = f_p'(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ och $t = 2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (-1) - 2 \cdot 1 = -3$$

$$t = 2 \Rightarrow 0 - (-1) = 1$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, 1, 2\}$, $t = 0$ saknar dock språng.

$$f''(t) = f_p''(t) + b_1\delta(t-a_1) + b_2\delta(t-a_2) \qquad \text{där} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = -3,\ a_2 = 2,\ b_2 = 1$$

$\frac{d}{dt}2t = 2$ och $\frac{d}{dt}(-1) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(t) =& 2(\theta(t) - \theta(t-1)) + 0 \cdot (\theta(t-1) - \theta(t-2)) - 3\delta(t-1) + 1 \cdot \delta(t-2) = \\ =& 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

Svar:

$$f'(t) = 2t(\theta(t) - \theta(t-1)) - (\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

$$f''(t) = 2(\theta(t) - \theta(t-1)) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

2.10 a) Sinus med amplitud 2 och vinkelfrekvensen 2, samt från 0 till $\pi/2$:

$$f(t) = 2\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

b) Använd sats 2.1 (s. 22):

$$f(t) = 2\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dt}2\sin 2t = 4\cos 2t$):

$$f'(t) = f_p'(t) = 4\cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 0$ och $t = \pi/2$ måste storleken på dessa beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 0 \;\Rightarrow\; 4\cos(2 \cdot 0) - 0 = 4$$

$$t = \pi/2 \;\Rightarrow\; 0 - 4\cos(2 \cdot \pi/2) = 4$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = \{0, \pi/2\}$.

$$f''(t) = f_p''(t) + b_1\delta(t - a_1) + b_2\delta(t - a_2) \qquad \text{där} \qquad a_1 = 0,\ b_1 = 4,\ a_2 = \pi/2,\ b_2 = 4$$

$\frac{d}{dt}4\cos 2t = -8\sin 2t$:

$$f''(t) = -\,8\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

Svar:

$$f'(t) = 4\cos 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2))$$

$$f''(t) = -8\sin 2t(\theta(t) - \theta(t - \pi/2)) + 4\delta(t) + 4\delta(t - \pi/2)$$

2.11 Beskriv $|x|$ med hjälp av stegfunktioner:

$$f(x) = |x| = -x(1 - \theta(x)) + x\theta(x)$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dx}x = 1$):

$$f'(x) = f_p'(x) = -1 \cdot (1 - \theta(x)) + 1 \cdot \theta(x) = -1 + \theta(x) + \theta(x) = 2\theta(x) - 1$$

Eftersom $f'(x)$ har språng i $x = 0$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$x = 0 \;\Rightarrow (2 - 1) - (-1) = 2$$

$f'(x)$ är deriverbar i alla punkter utom $x = 0$.

$$f''(x) = f_p''(x) + b\delta(x - a) \qquad \text{där} \qquad a = 0,\ b = 2$$

$\frac{d}{dt}1 = 0$:

$$f''(x) = -0 \cdot (1 - \theta(x)) + 0 \cdot \theta(x) + 2\delta(x - 0) = 2\delta(x)$$

Svar:

$$f'(t) = 2\theta(x) - 1$$

$$f''(t) = 2\delta(x)$$

2.12 Använd sambandet på s. 17:

$$v(t)=\int_{-\infty}^{t}\tau^a\theta(\tau)\,d\tau=\begin{cases}0, & t\le 0\\ \displaystyle\int_0^t \tau^a\,d\tau, & t>0\end{cases}=\left(\int_0^t \tau^a\,d\tau\right)\theta(t)=$$

$$=\left(\left[\frac{\tau^{a+1}}{a+1}\right]_0^t\right)\theta(t)=\left(\frac{t^{a+1}}{a+1}-\frac{0^{a+1}}{a+1}\right)\theta(t)=\frac{t^{a+1}}{a+1}\theta(t),\quad a>-1$$

Svar: $v(t)=\frac{t^{a+1}}{a+1}\theta(t),\quad a>-1$

2.13 a) Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}\theta(\tau)\,d\tau=\left(\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right)\theta(t)=$$

$$=\left(\left[-e^{-\tau}\right]_0^t\right)\theta(t)=\left(-e^{-t}-\left(-e^{-0}\right)\right)\theta(t)=\left(1-e^{-t}\right)\theta(t)$$

Svar: $\left(1-e^{-t}\right)\theta(t)$

b) Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}\theta(\tau-1)\,d\tau=\left(\int_{-1}^t e^{-\tau}\,d\tau\right)\theta(t-1)=$$

$$=\left(\left[-e^{-\tau}\right]_{-1}^t\right)\theta(t-1)=\left(-e^{-t}-\left(-e^{-1}\right)\right)\theta(t-1)=\left(e^{-1}-e^{-t}\right)\theta(t-1)$$

Svar: $\left(e^{-1}-e^{-t}\right)\theta(t-1)$

c) Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}(1-\theta(\tau))\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\,d\tau-\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\theta(\tau)\,d\tau=\left[e^{\tau}\right]_{-\infty}^t-\left(\int_0^t e^{\tau}\,d\tau\right)\theta(t)=$$

$$=e^t-\overbrace{e^{-\infty}}^{0}-\left(\left[e^{\tau}\right]_0^t\right)\theta(t)=e^t-\left(e^t-e^0\right)\theta(t)=e^t-\left(e^t-1\right)\theta(t)=$$

$$=e^t-e^t\theta(t)+\theta(t)=e^t(1-\theta(t))+\theta(t)$$

Svar: $e^t(1-\theta(t))+\theta(t)$

d) Använd sambandet på s. 17:

$$\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\theta(1-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}(1-\theta(\tau-1))\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\,d\tau-\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\theta(\tau-1)\,d\tau=$$

$$=\left[e^{\tau}\right]_{-\infty}^t-\left(\int_1^t e^{\tau}\,d\tau\right)\theta(t-1)=e^t-\overbrace{e^{-\infty}}^{0}-\left(\left[e^{\tau}\right]_1^t\right)\theta(t-1)=$$

$$=e^t-\left(e^t-e^1\right)\theta(t-1)=e^t-e^t\theta(t-1)+e\theta(t-1)=$$

$$=e^t(1-\theta(t-1))+e\theta(t-1)=e^t\theta(1-t)+e\theta(t-1)$$

Svar: $e^t\theta(1-t)+e\theta(t-1)$

2.14 a) Låt $f(t)=e^{2t}\theta(t)$:

$$F(t)=\int e^{2t}\theta(t)\,dt=\theta(t)\int_0^t e^{2t}\,dt+C=\theta(t)\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^t+C=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{2\cdot 0})\theta(t)+C=\frac{1}{2}(e^{2t}-1)\theta(t)+C$$

Svar: $F(t)=\frac{1}{2}(e^{2t}-1)\theta(t)+C$

b) Låt $f(t) = (t-1)\theta(t)$:

$$F(t) = \int (t-1)\theta(t)\,dt = \theta(t)\int_0^t t-1\,dt + C = \theta(t)\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^t + C =$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right)\right)\theta(t) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\theta(t) + C$$

Svar: $F(t) = (\frac{t^2}{2} - t)\theta(t) + C$

c) Låt $f(t) = (t-1)\theta(t-1)$:

$$F(t) = \int (t-1)\theta(t-1)\,dt = \theta(t-1)\int_1^t t-1\,dt + C = \theta(t-1)\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^t + C =$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} - t - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right)\theta(t-1) + C = \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right)\theta(t-1) + C =$$
$$= \frac{t^2 - 2t + 1}{2}\theta(t-1) + C = \frac{(t-1)^2}{2}\theta(t-1) + C$$

Svar: $F(t) = \frac{(t-1)^2}{2}\theta(t-1) + C$

d) Låt $f(t) = t\theta(t-3)$:

$$F(t) = \int t\theta(t-3)\,dt = \theta(t-3)\int_3^t t\,dt + C = \theta(t-3)\left[\frac{t^2}{2}\right]_3^t + C =$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3^2}{2}\right)\theta(t-3) + C = \frac{1}{2}\left(t^2 - 9\right)\theta(t-3) + C$$

Svar: $F(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 - 9\right)\theta(t-3) + C$

e) Låt $f(t) = \sin t\theta(t-\pi) + \delta(t-1)$:

$$F(t) = \int \sin t\theta(t-\pi) + \delta(t-1)\,dt = \int \sin t\theta(t-\pi)\,dt + \int \delta(t-1)\,dt =$$
$$= \theta(t-\pi)\int_\pi^t \sin t\,dt + \theta(t-1) + C = \theta(t-\pi)\left[-\cos t\right]_\pi^t + \theta(t-1) + C =$$
$$= \left(-\cos t - (-\cos\pi)\right)\theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C =$$
$$= -\left(\cos t + 1\right)\theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C$$

Svar: $F(t) = -\left(\cos t + 1\right)\theta(t-\pi) + \theta(t-1) + C$

2.15

$$f(t) = (-2t+1)(1-\theta(t-1)) + (t-2)\theta(t-1)$$

Eftersom funktionen saknar språng är ($\frac{d}{dx}(-2t+1) = -2$ och $\frac{d}{dx}(t-2) = 1$):

$$f'(x) = f'_p(x) = -2(1-\theta(t-1)) + 1\cdot\theta(t-1) = -2(1-\theta(t-1)) + \theta(t-1) = 3\theta(t-1) - 2$$

Eftersom $f'(t)$ har språng i $t = 1$ måste storleken på denna beräknas (högra funktionen minus den vänstra):

$$t = 1 \Rightarrow (3-2) - (-2) = 3$$

$f'(t)$ är deriverbar i alla punkter utom $t = 1$.

$$f''(t) = f''_p(t) + b\delta(t-a) \qquad \text{där} \qquad a = 1,\ b = 3$$

$\frac{d}{dt}k = 0$ där k är en konstant:

$$f''(t) = -0\cdot(1-\theta(t-1)) + 0\cdot\theta(t-1) + 3\delta(t-1) = 3\delta(t-1)$$

Beräkna $g(t)$, använd $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$:

$$\begin{aligned}
g(t) =&(1+t^2)f''(t) - tf'(t) + f(t) = \\
=&(1+t^2)3\delta(t-1) - t(3\theta(t-1)-2) + (-2t+1)(1-\theta(t-1)) + (t-2)\theta(t-1) = \\
=&(1+t^2)3\delta(t-1) - 3t\theta(t-1) + 2t - 2t + 2t\theta(t-1) + 1 - \theta(t-1) + t\theta(t-1) - 2\theta(t-1) = \\
=&(1+t^2)3\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1) = 3\delta(t-1) + 3t^2\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1) = \\
=&3\delta(t-1) + 3\cdot 1^2\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1) = 6\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1)
\end{aligned}$$

Svar: $6\delta(t-1) + 1 - 3\theta(t-1)$

2.16

2.17

Kapitel 3: Laplacetransformationer

3.1 a) $f(t) = e^{-2t}\theta(t)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\mathcal{L} f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-2t}\theta(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+2)t}\, dt = \left[-\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s+2}(1 - e^{-(s+2)T})$$

Om $s > -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \to 0$ när $T \to \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s > -2$$

Om $s = -2$:

$$\mathcal{L} f(s) = \int_0^{+\infty} 1\, dt = [t]_0^{+\infty} \to \infty$$

Om $s < -2$ gäller att $e^{-(s+2)T} \to \infty$ när $T \to \infty$ vilket medför:

$$\mathcal{L} f(s) \to -\infty$$

Detta medför att $\mathcal{L} f(s)$ endast är konvergent när $s > -2$ och därmed är Laplacetransformen för $e^{-2t}\theta(t)$ endast definierad i det intervallet.

Låt nu s vara ett komplext tal, $s = a + bi$:

$$\left|e^{-(a+bi+2)t}\right| = \left|e^{-(a+2)t}\right| \underbrace{\left|e^{-ibt}\right|}_{=1} = e^{-(a+2)t}$$

Här ser vi att $e^{-(s+2)t} \to 0$ då $t \to \infty$ om $a = \operatorname{Re} s > -2$ vilket utvidgar Laplacetransformen att inkludera hela planet $\operatorname{Re} s > -2$.

Svar: $\mathcal{L} f(s) = \dfrac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re} s > -2$

3.1 b) $f(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$

Se definitionen av Lapacetransformen i boken.

$$\mathcal{L} f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(\theta(t) - \theta(t-1))\, dt = \int_0^1 e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad s \neq 0$$

Om $s = 0$ gäller att $e^{-st} = 1$ vilket medför:

$$\mathcal{L} f(0) = \int_0^1 1\, dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Svar: $\mathcal{L} f(s) = \dfrac{1}{s}(1 - e^{-s}), \quad s \neq 0$ och $\mathcal{L} f(0) = 1$

3.2

$$f(at) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(at)\, dt = \begin{bmatrix} x = at \\ dt = dx/a \\ t = -\infty \leftrightarrow x = -\infty \\ t = +\infty \leftrightarrow x = +\infty \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx/a} f(x)\, \frac{dx}{a} =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s/a)x} f(x)\, dx = \frac{1}{a}\mathcal{L} f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{V.S.V.}$$

3.3 a) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s}, \quad \sigma > 0$ och $t^n\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad \sigma > 0.$

$$f(t) = (2+3t^2)\theta(t) = 2\theta(t) + 3t^2\theta(t) \longleftrightarrow 2\frac{1}{s} + 3\frac{2}{s^3} = \frac{2s^2+6}{s^3}, \quad \sigma > 0$$

Svar: $(2+3t^2)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{2s^2+6}{s^3}, \quad \sigma > 0$

b) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \sigma > \operatorname{Re} a.$

$$f(t) = e^{3t}\theta(t) = t^0 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{0!}{(s-3)^1} = \frac{1}{s-3}, \quad \sigma > 3$$

Svar: $e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s-3}, \quad \sigma > 3$

c) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \sigma > \operatorname{Re} a.$

$$f(t) = te^{3t}\theta(t) = t^1 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1!}{(s-3)^{1+1}} = \frac{1}{(s-3)^2}, \quad \sigma > 3$$

Svar: $te^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{(s-3)^2}, \quad \sigma > 3$

d) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \sigma > \operatorname{Re} a.$

$$f(t) = t^2 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \frac{2!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3}, \quad \sigma > 3$$

Svar: $t^2 e^{3t}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{2}{(s-3)^3}, \quad \sigma > 3$

e) Låt $s = \sigma + i\omega$.

Använd $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+b^2}, \quad \sigma > 0, \quad b$ reellt och

$\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}, \quad \sigma > 0, \quad b$ reellt.

$$\begin{aligned} f(t) =& (\cos 2t - \sin 2t)\theta(t) = \cos 2t\theta(t) - \sin 2t\theta(t) \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{s-2}{s^2+4}, \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

Svar: $(\cos 2t - \sin 2t)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s-2}{s^2+4}, \quad \sigma > 0$

3.4 a) Använd regeln $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$ samt produktregeln och regeln för inre derivata:

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{s^4+1} + s\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(s^4+1)^2}\cdot 4s^3 = $$

$$= \frac{s^4+1-4s^4}{(s^4+1)^2} = \frac{1-3s^4}{(s^4+1)^2}$$

$$tf(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{1-3s^4}{(s^4+1)^2} = \frac{3s^4-1}{(s^4+1)^2}$$

Svar: $tf(t) \longleftrightarrow \dfrac{3s^4-1}{(s^4+1)^2}$

b) Använd regeln $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$:

$$e^{-2t}f(t) \;\Rightarrow\; a=-2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \;\Leftrightarrow\; F(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^4+1}$$

$$e^{-2t}f(t) \longleftrightarrow F(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^4+1}$$

Svar: $e^{-2t}f(t) \longleftrightarrow \dfrac{s+2}{(s+2)^4+1}$

c) Använd regeln $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s-a)$:

$$f(t-2) \;\Rightarrow\; a=2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \;\Leftrightarrow\; e^{-2s}F(s) = e^{-2s}\frac{s}{s^4+1} = \frac{se^{-2s}}{s^4+1}$$

$$f(t-2) \longleftrightarrow e^{-2s}F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^4+1}$$

Svar: $f(t-2) \longleftrightarrow \dfrac{se^{-2s}}{s^4+1}$

d) Använd regeln $f'(t) \longleftrightarrow sF(s)$:

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \;\Leftrightarrow\; sF(s) = s\frac{s}{s^4+1} = \frac{s^2}{s^4+1}$$

$$f'(t) \longleftrightarrow sF(s) = \frac{s^2}{s^4+1}$$

Svar: $f'(t) \longleftrightarrow \dfrac{s^2}{s^4+1}$

e) Använd regeln $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$:

$$f(2t) \;\Rightarrow\; a=2$$

$$F(s) = \frac{s}{s^4+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{s/2}{(s/2)^4+1} = \frac{1}{2}\frac{\frac{s}{2}}{\frac{s^4+16}{16}} = \frac{16s}{4(s^4+16)} = \frac{4s}{s^4+16}$$

$$f(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{4s}{s^4+16}$$

Svar: $f(2t) \longleftrightarrow \dfrac{4s}{s^4+16}$

3.5 Använd reglerna $\alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-at}F(s)$ och $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$.
Låt $f_1(t) = \theta(t-1)$ och $f_2(t) = \theta(t-2)$.

$$\mathcal{L}\, f_1(s) = \frac{e^{-t}}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\mathcal{L}\, f_2(s) = \frac{e^{-2t}}{s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\begin{aligned} u(t) =& \theta(t) - 2\theta(t-1) + \theta(t-2) \longleftrightarrow \mathcal{L}\,\theta(s) - 2\,\mathcal{L}\, f_1(s) + \mathcal{L}\, f_2(s) = \\ =& \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-t}}{s} + \frac{e^{-2t}}{s} = \frac{1}{s}((e^{-t})^2 - 2e^{-t} + 1^2) = \frac{1}{s}(e^{-t} - 1)^2 \end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}\, u(s) = \dfrac{1}{s}(e^{-t} - 1)^2$

3.6 Låt $f(t) = \cos(t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ vilket medför att $v(t) = t^2\cos(t)\theta(t) = tg(t)$.
Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$ och $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+b^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$, $\quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

Använd produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, g(s) &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\, f(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\left(\frac{1}{s^2+1} + s\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(s^2+1)^2}\cdot 2s\right) = \\ &= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \end{aligned}$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, v(s) &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\, g(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right) = -\frac{2s(s^2+1)^2 - (s^2-1)2(s^2+1)2s}{(s^2+1)^4} = \\ &= -\frac{2s(s^2+1)(s^2+1-2(s^2-1))}{(s^2+1)^4} = -\frac{2s(3-s^2)}{(s^2+1)^3} = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}\, v(s) = \dfrac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0$

3.7 Låt $f(t) = \cos(3t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ vilket medför att $v(t) = e^{-2t}t\cos(3t)\theta(t) = e^{-2t}g(t)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$

och $\cos(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+b^2}$, $\quad \operatorname{Re} s > 0, \quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{s}{s^2+9}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd produktregeln för derivering:

$$\mathcal{L}\,g(s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,f(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) = -\left(\frac{1}{s^2+9} + s\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(s^2+9)^2}\cdot 2s\right) =$$
$$= -\frac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,v(s) = \mathcal{L}(e^{-2t}g)(s) = \mathcal{L}\,g(s-(-2)) = \frac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9)^2} = \frac{s^2+4s+4-9}{(s^2+4s+4+9)^2} =$$
$$= \frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Svar: $\mathcal{L}\,v(s) = \dfrac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

3.8 a) Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = tg(t) = t\sin(t-1)\theta(t-1)$.

Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$

och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}$, $\quad \operatorname{Re} s > 0, \quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,f(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-s}}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\mathcal{L}\,h(s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s^2+1} = -\frac{(-1)\cdot e^{-s}(s^2+1) - e^{-s}2s}{(s^2+1)^2} =$$
$$= e^{-s}\frac{s^2+2s+1}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Svar: $t\sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

b) Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = tf(t)$ och $h(t) = g(t-1) = (t-1)\sin(t-1)\theta(t-1)$.
Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$
och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}$, $\quad \operatorname{Re} s > 0$, $\quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\mathcal{L}\,g(s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,f(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,h(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,g(s) = e^{-s}\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{-2se^{-s}}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Svar: $(t-1)\sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow \dfrac{-2se^{-s}}{(s^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

c) Låt $f(t) = \sin(t)\theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = e^t g(t) = e^t \sin(t-1)\theta(t-1)$.
Använd reglerna $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$
och $\sin(bt)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{b}{s^2+b^2}$, $\quad \operatorname{Re} s > 0$, $\quad b$ reellt:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,f(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-s}}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,h(s) = \mathcal{L}\,g(s-1) = \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Svar: $e^t\sin(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow \dfrac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

d) Låt $f(t) = \theta(t)$, $g(t) = f(t-1)$ och $h(t) = tg(t) = t\theta(t-1)$.
Använd reglerna $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$, $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$
och $\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s}$, $\quad \operatorname{Re} s > 0$:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,f(s) = e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Använd kvotregeln för derivering:

$$\mathcal{L}\,h(s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s} = -\frac{(-1)\cdot e^{-s}s - e^{-s}}{s^2} = e^{-s}\frac{s+1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Svar: $t\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\frac{s+1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

3.9 a) Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \dfrac{s^5 + 2s^4}{(s^2+1)^3}$ och $f(0) = 1$.

$$\mathcal{L}(\theta f') = s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0) = s\frac{s^5 + 2s^4}{(s^2+1)^3} - 1 = \frac{s^6 + 2s^5}{(s^2+1)^3} - 1$$

Svar: $\mathcal{L}(\theta f') = \dfrac{s^6 + 2s^5}{(s^2+1)^3} - 1$

b) Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$\mathcal{L}(\theta f')(s) = \dfrac{s^6 + 2s^5}{(s^2+1)^3} - 1$ (se **a)**) och $f'(0) = 2$.

$$\mathcal{L}(\theta f'') = s\,\mathcal{L}(f'\theta)(s) - f'(0) = s\left(\frac{s^6 + 2s^5}{(s^2+1)^3} - 1\right) - 2 = \frac{s^7 + 2s^6}{(s^2+1)^3} - s - 2$$

Svar: $\mathcal{L}(\theta f'') = \dfrac{s^7 + 2s^6}{(s^2+1)^3} - s - 2$

3.10 a) Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$, $h(t) = e^t g(t) = e^t f(t)\theta(t)$.
Använd regeln $e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,h(s) = \mathcal{L}\,g(s-1) = \frac{3(s-1)^4}{(s-1)^5+1}$$

Svar: $e^t f(t)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{3(s-1)^4}{(s-1)^5+1}$

b) Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$, $h(t) = g(t-1) = f(t-1)\theta(t-1)$.
Använd regeln $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\,h(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,g(s) = e^{-s}\cdot\frac{3s^4}{s^5+1}$$

Svar: $f(t-1)\theta(t-1) \longleftrightarrow e^{-s}\cdot\dfrac{3s^4}{s^5+1}$

c) Använd regeln $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0)$.

$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \dfrac{3s^4}{s^5+1}$ och $f(0) = 3$.

$$\mathcal{L}(f'\theta) = s\,\mathcal{L}(f\theta)(s) - f(0) = s\frac{3s^4}{s^5+1} - 3 = \frac{3s^5 - 3(s^5+1)}{s^5+1} = -\frac{3}{s^5+1}$$

Svar: $f'(t)\theta(t) \longleftrightarrow -\dfrac{3}{s^5+1}$

d) Använd regeln $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$.
Låt $g(t) = \theta(t)f(t)$ och $h(t) = g(3t)$.
Eftersom $\theta(t) = \theta(3t)$ medför $h(t) = \theta(3t)f(3t) = f(3t)\theta(t)$.

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\, g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{3s^4}{s^5+1}$$

$$\mathcal{L}\, h(s) = \frac{1}{3}\,\mathcal{L}\, g\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3(s/3)^4}{(s/3)^5+1} = \frac{\frac{s^4}{3^3}}{3\cdot\frac{s^5+3^5}{3^5}} = \frac{3^4 s^4}{3^3(s^5+3^5)} = \frac{3s^4}{s^5+243}$$

Svar: $f(3t)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{3s^4}{s^5+243}$

3.11 Använd definitionen av Laplacetransformen:

$$\mathcal{L}(f\theta)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}f(t)\theta(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \mathcal{L}(f\theta)(0) = \int_0^\infty e^{-0\cdot t}f(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\,dt \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \int_0^\infty f(t)\,dt = \mathcal{L}(f\theta)(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2+2\cdot 0+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Svar:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3.12 Funktionen:

$$f(t) = t(\theta(t)-\theta(t-1)) + \theta(t-1) = t\theta(t) - t\theta(t-1) + \theta(t-1)$$

Använd reglerna $f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$ och $tf(t) \longleftrightarrow -\dfrac{d}{ds}F(s)$.
Låt $g(t) = \theta(t-1)$.

$$\mathcal{L}\,\theta(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\, g(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\,\theta(s) = \frac{e^{-s}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$t\theta(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\,\theta(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$t\theta(t-1) = tg(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\, g(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s} = -\frac{-e^{-s}s - e^{-s}}{s^2} = e^{-s}\frac{s+1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{s+1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}(s+1) + se^{-s}) = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Svar: $\mathcal{L}\, f(s) = \dfrac{1}{s^2}(1-e^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0$

3.13 a)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Använd sambandet $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$:

$$\cosh(at)\theta(t) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\theta(t) = \frac{1}{2}\left(e^{at}\theta(t) + e^{-at}\theta(t)\right) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} = \frac{2s}{2(s^2-a^2)} = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$$

Svar: $\cosh(at)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

b)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Använd sambandet $t^n e^{at}\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$:

$$\sinh(at)\theta(t) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\theta(t) = \frac{1}{2}\left(e^{at}\theta(t) - e^{-at}\theta(t)\right) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+a-(s-a)}{s^2-a^2} = \frac{2a}{2(s^2-a^2)} = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$$

Svar: $\sinh(at)\theta(t) \longleftrightarrow \dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

3.14 Eftersom f är periodisk med perioden T är $f(t) = f(t-T)$ vilket medför att

$$\theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t-T) = \theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t) = (\theta(t) - \theta(t-T))f(t) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(\theta(t) - \theta(t-T))f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

Låt $g(t) = \theta(t)f(t) \longleftrightarrow \mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s)$ vilket medför att
$\theta(t-T)f(t-T) = g(t-T) \longleftrightarrow e^{-Ts}\,\mathcal{L}\,g(s)$

$$\theta(t)f(t) - \theta(t-T)f(t-T) = g(t) - g(t-T) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \mathcal{L}\,g(s) - e^{-Ts}\,\mathcal{L}\,g(s) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\,g(s)(1 - e^{-Ts}) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1 - e^{-Ts}} \qquad \text{V.S.V.}$$

3.15 Använd sambandet som blev funnet i **3.14**

$$\mathcal{L}(\theta f)(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-Ts}}$$

Perioden för det kausala pulståget är $T = 2$ och eftersom integralen endast täcker intervallet $[0, T]$ behövs funktionen endast konstrueras korrekt i det intervallet.

$$f(t) = 1 - 2\theta(t-1), \quad \text{i intervallet } [0, 2]$$

Eftersom funktionen är kausal är $f(t) = \theta(t)f(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta f)(s) =& \frac{\int_0^2 e^{-st}(1 - 2\theta(t-1))\, dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\int_0^2 e^{-st}\, dt - 2\int_0^2 e^{-st}\theta(t-1)\, dt \right) = \\
=& \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\int_0^2 e^{-st}\, dt - 2\int_1^2 e^{-st}\, dt \right) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^2 - 2\left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_1^2 \right) = \\
=& \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{-e^{-2s} - (-e^0)}{s} - 2\left(\frac{-e^{-2s} - (-e^{-s})}{s} \right) \right) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} \right) = \\
=& \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - e^{-s})^2}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-s}}{1 + e^{-s}}
\end{aligned}$$

3.16

$$f(t) = t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))$$

Använd definitionen av Laplacetransformen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\, f(s) =& \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(t^2(\theta(t) - \theta(t-1)) + (2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2)))\, dt = \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}t^2(\theta(t) - \theta(t-1))\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}(2-t)(\theta(t-1) - \theta(t-2))\, dt = \\
=& \int_0^1 e^{-st}t^2\, dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-st}t^2\, dt =& \left[-\frac{e^{-st}}{s}t^2 \right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}t\, dt = -\frac{e^{-s}}{s} + 2\left(\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s^2}\, dt \right) = \\
=& -\frac{e^{-s}}{s} + 2\left(-\frac{e^{-s}}{s^2} + \left[-\frac{e^{-st}}{s^3} \right]_0^1 \right) = -\frac{s^2e^{-s}}{s^3} - \frac{2se^{-s}}{s^3} + 2\left(-\frac{e^{-s}}{s^3} - \left(\frac{1}{s^3} \right) \right) = \\
=& \frac{1}{s^3}\left(2 - e^{-s}(s^2 + 2s + 2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 e^{-st}(2-t)\, dt =& 2\int_1^2 e^{-st}\, dt - \int_1^2 e^{-st}t\, dt = 2\left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_1^2 - \left(\left[-\frac{e^{-st}}{s}t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s}\, dt \right) = \\
=& 2\left(-\frac{e^{-2s}}{s} - \left(-\frac{e^{-s}}{s} \right) \right) - \left(-\frac{2e^{-2s}}{s} - \left(-\frac{e^{-s}}{s} \right) + \left[-\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_1^2 \right) = \\
=& \frac{e^{-s}}{s} - \left(-\frac{e^{-2s}}{s^2} - \left(-\frac{e^{-s}}{s^2} \right) \right) = \frac{1}{s^2}\left(se^{-s} + e^{-2s} - e^{-s} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\, f(s) =& \frac{1}{s^3}\left(2 - e^{-s}(s^2 + 2s + 2) \right) + \frac{1}{s^2}\left(se^{-s} + e^{-2s} - e^{-s} \right) = \\
=& \frac{1}{s^3}\left(2 - s^2e^{-s} - 2se^{-s} - 2e^{-s} + s^2e^{-s} + se^{-2s} - se^{-s} \right) = \frac{1}{s^3}\left(2 - 2e^{-s} - 3se^{-s} + se^{-2s} \right)
\end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}\, f(s) = \dfrac{1}{s^3}\left(2 - 2e^{-s} - 3se^{-s} + se^{-2s} \right)$

Kapitel 4: Den inversa Laplacetransformen

4.1 multiplicera faktorerna.

$$F(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)^2(s+1+2i)(s+1-2i)} = \frac{s^2-1}{(s^2+2s+4)((s+1)^2+4)} =$$
$$= \frac{s^2-1}{(s^2+4s+4)(s^2+2s+5)} = \frac{s^2-1}{s^4+6s^3+17s^2+28s+20}$$

4.2 a) Använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s} \longleftrightarrow \theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \theta(t)$

b) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^{2+1}} \longleftrightarrow \frac{1}{2}t^2\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2}t^2\theta(t)$

c) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s^4+6s^3-10s^2+1}{s^5} = \frac{1}{s} + 6\frac{1}{s^2} - 10\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5} = \frac{1}{s} + 6\frac{1}{s^2} - 5\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{4!}{s^5} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \theta(t) + 6t\theta(t) - 5t^2\theta(t) + \frac{1}{24}t^4\theta(t) = (1+6t-5t^2+\frac{1}{24}t^4)\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = (1+6t-5t^2+\frac{1}{24}t^4)\theta(t)$

4.2 a) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{2}{s+3} = 2\frac{0!}{(s-(-3))^{0+1}} \longleftrightarrow 2e^{-3t}\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = 2e^{-3t}\theta(t)$

b) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{1}{(s+3)^3} = \frac{1}{s+3} - 2\frac{1}{(s+3)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+3)^3} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow e^{-3t}\theta(t) - 2te^{-3t}\theta(t) + \frac{1}{2}t^2e^{-3t}\theta(t) = (1-2t+\frac{1}{2}t^2)e^{-3t}\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = (1-2t+\frac{1}{2}t^2)e^{-3t}\theta(t)$

c) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s+5}{(s+3)^2} = \frac{s+3+2}{(s+3)^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2} + \frac{2}{(s+3)^2} = \frac{1}{s+3} + 2\frac{1}{(s+3)^2} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow e^{-3t}\theta(t) + 2te^{-3t}\theta(t) = (1+2t)e^{-3t}\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = (1+2t)e^{-3t}\theta(t)$

4.4 a) Faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+6s+8} = \frac{s}{(s+4)(s+2)} = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2} = 2\frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow 2e^{-4t}\theta(t) - e^{-2t}\theta(t) = (2e^{-4t} - e^{-2t})\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = (2e^{-4t} - e^{-2t})\theta(t)$

b) Kvadratkomplettera, faktorisera och använd tabellen:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+6s+10} = \frac{s}{(s+3)^2+1} = \frac{s+3}{(s+3)^2+1} - 3\frac{1}{(s+3)^2+1}$$

Använd dämpningsregeln:

$$\frac{s+3}{(s+3)^2+1} \longleftrightarrow e^{-3t}\cos(t)\theta(t)$$

$$\frac{1}{(s+3)^2+1} \longleftrightarrow e^{-3t}\sin(t)\theta(t)$$

$$f(t) = e^{-3t}\cos(t)\theta(t) - 3e^{-3t}\sin(t)\theta(t) = (\cos t - 3\sin t)e^{-3t}\theta(t)$$

Svar: $f(t) = (\cos t - 3\sin t)e^{-3t}\theta(t)$

4.5 a) Använd tabellen:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+16} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{s^2+4^4} \longleftrightarrow \frac{1}{4}\sin(4t)\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{4}\sin(4t)\theta(t)$

b) Använd tabellen:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+16} = \frac{s}{s^2+4^4} \longleftrightarrow \cos(4t)\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \cos(4t)\theta(t)$

c) Kvadratkomplettera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+4s+8} = \frac{1}{(s+2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+2)^2+2^2} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t)\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t)\theta(t)$

d) Kvadratkomplettera, faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+4s+8} = \frac{s}{(s+2)^2+2^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} - \frac{2}{(s+2)^2+2^2} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow e^{-2t}\cos(2t)\theta(t) - e^{-2t}\sin(2t)\theta(t) = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-2t}\theta(t) = f(t)$$

Svar: $f(t) = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-2t}\theta(t)$

4.6 a) Hitta nollställena:

$$s^2 - s - 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \{2, -1\}$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s+3}{s^2 - s - 2} = \frac{s+3}{(s-2)(s+1)} = \frac{k_1}{s-2} + \frac{k_2}{s+1}$$

$$k_1(s+1) + k_2(s-2) = s + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_2 - 2k_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{2}{3} \\ k_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{L} f(s) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s+1} \longleftrightarrow -\frac{2}{3} e^{-2t}\theta(t) + \frac{5}{3} e^{t}\theta(t) = (5e^{t} - 2e^{-2t})\frac{1}{3}\theta(t)$$

Svar: $f(t) = (5e^{t} - 2e^{-2t})\frac{1}{3}\theta(t)$

b) Hitta nollställena:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \{-1, -2\}$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{3s+5}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{3s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$$

$$k_1(s+1)(s+2) + k_2 s(s+2) + k_3 s(s+1) = 3s + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 + k_3 = 3 \\ 2k_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{5}{2} \\ k_2 = -2 \\ k_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) =& \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow \frac{5}{2}\theta(t) - 2e^{-t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}\theta(t) = \\ =& \frac{1}{2}(5 - 4e^{-t} - e^{-2t})\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2}(5 - 4e^{-t} - e^{-2t})\theta(t)$

c) Hitta nollställena:

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \Leftrightarrow s = -2 \pm \sqrt{4 - 3} = -2 \pm 1 = \{-1, -3\}$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\mathcal{L} f(s) = \frac{s^3 - 5s}{s^2 + 4s + 3} = s\frac{s^2 - 5}{(s+1)(s+3)} = s\left(\frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+3} + k_3\right)$$

$$k_1(s+3) + k_2(s+1) + k_3(s+3)(s+1) = s^2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 + 4k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + 3k_3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = -2 \\ k_3 = 1 \end{cases}$$

Använd regeln $sF(s) \longleftrightarrow f'(t)$ och $\delta(t) = 1$ för att bestämma inversen till s.

$$s = s \cdot 1 \longleftrightarrow \delta'(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(s) =& -2\frac{s}{s+1} - 2\frac{s}{s+3} + s = -2\frac{s+1}{s+1} + 2\frac{1}{s+1} - 2\frac{s+3}{s+3} + 6\frac{1}{s+3} + s = \\ =& -4 + 2\frac{1}{s+1} + 6\frac{1}{s+3} + s \longleftrightarrow -4\delta(t) + 2e^{-t}\theta(t) + 6e^{-3t}\theta(t) + \delta'(t) = \\ =& \delta'(t) - 4\delta(t) + (2e^{-t} + 6e^{-3t})\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \delta'(t) - 4\delta(t) + (2e^{-t} + 6e^{-3t})\theta(t)$

4.7 En av polerna är $s=-1$ (se anvisningen).

$$s^3+5s^2+9s+5=(s+1)(s^2+As+B)=s^3+(A+1)s^2+(B+A)s+B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+1=5 \\ B+A=9 \\ B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=5 \end{cases} \Leftrightarrow s^3+5s^2+9s+5=(s+1)(s^2+4s+5)$$

Faktorisera och använd dämpningsregeln och tabellen:

$$\frac{s}{s^3+5s^2+9s+5}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2s+k_3}{s^2+4s+5}$$

$$k_1(s^2+4s+5)+(k_2s+k_3)(s+1)=s \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_2=0 \\ 4k_1+k_2+k_3=1 \\ 5k_1+k_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=-\frac{1}{2} \\ k_2=\frac{1}{2} \\ k_3=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{s}{s^3+5s^2+9s+5} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s+5}{s^2+4s+5}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s+2+3}{(s+2)^2+1}= \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-t}\theta(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(t)\theta(t)+\frac{3}{2}e^{-2t}\sin(t)\theta(t)= \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-t}+(\cos t+3\sin t)e^{-2t})\theta(t)\end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^3+5s^2+9s+5}\right)=\dfrac{1}{2}(-e^{-t}+(\cos t+3\sin t)e^{-2t})\theta(t)$

4.8 Faktorisera och använd tabellen:

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)}=\frac{k_1s+k_2}{s^2+1}+\frac{k_3}{s}+\frac{k_4}{s^2}+\frac{k_5}{s^3}$$

$$s^3(k_1s+k_2)+k_3s^2(s^2+1)+k_4s(s^2+1)+k_5(s^2+1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_2+k_4=0 \\ k_3+k_5=0 \\ k_4=0 \\ k_5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=0 \\ k_3=-1 \\ k_4=0 \\ k_5=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^3(s^2+1)}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^3} &\longleftrightarrow \cos(t)\theta(t)-\theta(t)+\frac{1}{2}t^2\theta(t)= \\ &= \left(\cos(t)-1+\frac{1}{2}t^2\right)\theta(t)\end{aligned}$$

Svar: $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right)=\left(\cos(t)-1+\frac{1}{2}t^2\right)\theta(t)$

4.9 a) Låt $\mathcal{L}\,g(s)=\dfrac{1}{s}\longleftrightarrow\theta(t)$ och använd reglerna för dämpning och förskjutning.

$$\mathcal{L}\,f(s)=\frac{e^{-s}}{s+1}=e^{-s}\,\mathcal{L}\,g(s+1)\longleftrightarrow e^{-(t-1)}g(t-1)=e^{1-t}\theta(t-1)$$

Svar: $f(t)=e^{1-t}\theta(t-1)$

b) Se **4.6 b)** för uträkning av nollställena.

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{se^{-s}}{s^2+3s+2} = e^{-s}\left(\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}\right)$$

$$k_1(s+2)+k_2(s+1)=s \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_2=1 \\ 2k_1+k_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=-1 \\ k_2=2 \end{cases}$$

Använd reglerna för dämpning och förskjutning:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) = e^{-s}\left(-\frac{1}{s+1}+2\frac{1}{s+2}\right) \longleftrightarrow e^{-(t-1)}\theta(t-1)+2e^{-2(t-1)}\theta(t-1) = \\ =(-e^{1-t}+2e^{2-2t})\theta(t-1)\end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (-e^{1-t}+2e^{2-2t})\theta(t-1)$

c) Se **b)** för beräkning av den andra termen.

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1+se^{-s}}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}+\frac{se^{-s}}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+e^{-s}\left(-\frac{1}{s+1}+2\frac{1}{s+2}\right)$$

$$k_1(s+2)+k_2(s+1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_2=0 \\ 2k_1+k_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=-1 \end{cases}$$

Använd regeln för dämpning (samt **b)**):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) =&\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+e^{-s}\left(-\frac{1}{s+1}+2\frac{1}{s+2}\right) \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow\ & e^{-t}\theta(t)-e^{-2}\theta(t)+(-e^{1-t}+2e^{2-2t})\theta(t-1) = \\ =&(e^{-t}-e^{-2t})\theta(t)+(-e^{1-t}+2e^{2-2t})\theta(t-1)\end{aligned}$$

Svar: $f(t) = (e^{-t}-e^{-2t})\theta(t)+(-e^{1-t}+2e^{2-2t})\theta(t-1)$

4.10 a) Låt $\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{s} \longleftrightarrow \theta(t)$ och använd reglerna för dämpning och förskjutning.

$$\mathcal{L}f(s) = e^{-5s}\frac{1}{s+2} = e^{-5s}\mathcal{L}g(s+2) \longleftrightarrow e^{-2(t-5)}g(t-5) = e^{2(5-t)}\theta(t-5)$$

Svar: $f(t) = e^{2(5-t)}\theta(t-5)$

b) Faktorisera och använd regeln för förskjutning.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) =&(e^{-\pi s}+e^{-2\pi s})\frac{1}{s^2+1} = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow\ & \sin(t-\pi)\theta(t-\pi)+\sin(t-2\pi)\theta(t-2\pi)\end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \sin(t-\pi)\theta(t-\pi)+\sin(t-2\pi)\theta(t-2\pi)$

c) Faktorisera och använd reglerna för förskjutning och dämpning.

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{e^{2s}}{s^2+s} = e^{2s}\left(\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}\right)$$

$$k_1(s+1)+k_2 s=1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=-1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\,f(s) = e^{2s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = e^{2s}\frac{1}{s} - e^{2s}\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow \theta(t+2) - e^{-(t+2)}\theta(t+2) =$$
$$=(1-e^{-t-2})\theta(t+2)$$

Svar: $f(t) = (1-e^{-t-2})\theta(t+2)$

d) Faktorisera och använd reglerna för förskjutning och dämpning.

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{2-2e^{-s}-se^{-s}}{s^2-1} =$$
$$= \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}e^{-s}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}e^{-s}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}e^{-s}\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow e^{t}\theta(t) - e^{-t}\theta(t) - \frac{3}{2}e^{t-1}\theta(t-1) + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\theta(t-1) =$$
$$=(e^{t}-e^{-t})\theta(t) + \frac{1}{2}(e^{1-t} - 3e^{t-1})\theta(t-1)$$

Svar: $f(t) = (e^{t}-e^{-t})\theta(t) + \frac{1}{2}(e^{1-t} - 3e^{t-1})\theta(t-1)$

4.11 a) Bygynnelsevärdessatsen kan inte användas eftersom $F(s)$ inte uppfyller villkoret om att vara ett äkta bråk (både nämnaren och täljaren har graden 2).

b)

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{s\to+\infty}\frac{s^2}{(s+1)(s-2)} = \lim_{s\to+\infty}\frac{s^2}{s^2-s-2} = \lim_{s\to+\infty}\frac{\frac{s^2}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2} - \frac{s}{s^2} - \frac{2}{s^2}} =$$
$$= \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}} \to \frac{1}{1-0-0} = 1 = \lim_{t\to+0} f(t)$$

Svar: $\lim_{t\to+0} f(t) = 1$

c)

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{s\to+\infty}\frac{s}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s^2+3s+2} = \lim_{s\to+\infty}\frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2} + \frac{3s}{s^2} + \frac{2}{s^2}} =$$
$$= \lim_{s\to+\infty}\frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}} \to \frac{0}{1+0+0} = 0 = \lim_{t\to+0} f(t)$$

Svar: $\lim_{t\to+0} f(t) = 0$

d)

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{s\to+\infty}\frac{s(s^2+3s+2)}{(s+1)^3} = \lim_{s\to+\infty}\frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+3s+1} = \lim_{s\to+\infty}\frac{\frac{s^3}{s^3} + \frac{3s^2}{s^3} + \frac{2s}{s^3}}{\frac{s^3}{s^3} + \frac{3s^2}{s^3} + \frac{3s}{s^3} + \frac{1}{s^3}} =$$
$$= \lim_{s\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}}{1+\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s^3}} \to \frac{1+0+0}{1+0+0+0} = 1 = \lim_{t\to+0} f(t)$$

Svar: $\lim_{t\to+0} f(t) = 1$

e)

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{s}{s(s+1)(s^2+1)} = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s^3+s^2+s+1} = \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{1}{s^3}}{\frac{s^3}{s^3}+\frac{s^2}{s^3}+\frac{s}{s^3}+\frac{1}{s^3}} =$$

$$= \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{1}{s^3}}{1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}} \to \frac{0}{1+0+0+0} = 0 = \lim_{t\to+0} f(t)$$

Svar: $\lim_{t\to+0} f(t) = 0$

4.12 a) Faktorisera och förenkla:

$$sF(s) = s\frac{s^2+3s+2}{(s+1)(s+3)} = s\frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)} = s\frac{s+2}{s+3}$$

Polen till $sF(s)$ är negativ.

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{s+2}{s+3} \to 0\cdot\frac{0+2}{0+3} = 0 = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Svar: $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$

b) Faktorisera och förenkla:

$$sF(s) = s\frac{s}{(s+1)(s-2)}$$

Båda polerna till $sF(s)$ är inte negativa och därmed gäller inte slutvärdessatsen.

c) Faktorisera och förenkla:

$$sF(s) = s\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Båda polerna till $sF(s)$ är negativa.

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \to \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2} = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Svar: $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{1}{2}$

d) Faktorisera och förenkla:

$$sF(s) = s\frac{s^2+3s+2}{(s+1)^3} = s\frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)^3} = s\frac{(s+2)}{(s+1)^2}$$

Båda polerna till $sF(s)$ är negativa.

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s+2)}{(s+1)^2} \to 0\cdot\frac{(0+2)}{(0+1)^2} = 0 = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

Svar: $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$

e) Faktorisera och förenkla:

$$sF(s) = s\frac{1}{s(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{(s+1)(s+i)(s-i)}$$

Realdelen i de komplexa polerna är 0 vilket inte är negativt och därmed gäller inte slutvärdessatsen.

4.13 a) låt $\mathcal{L}\, f(s) = \dfrac{1}{(s+\alpha)(s^2+\omega^2)}, \quad \omega \neq 0.$

$$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2+\omega^2)} = \frac{k_1}{s+\alpha} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+\omega^2}$$

$$k_1(s^2+\omega^2) + (k_2 s + k_3)(s+\alpha) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_2\alpha + k_3 = 0 \\ k_1\omega^2 + k_3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2} \\ k_2 = -\frac{1}{\alpha^2+\omega^2} \\ k_3 = \frac{a}{\alpha^2+\omega^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, f(s) =& \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(\frac{1}{s+\alpha} + \frac{-s+\alpha}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(\frac{1}{s+\alpha} - \frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{\alpha}{s^2+\omega^2}\right) = \\ =& \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(\frac{1}{s+\alpha} - \frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{\alpha}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow\ & \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(e^{-\alpha t}\theta(t) - \cos(\omega t)\theta(t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\theta(t)\right) = \\ =& \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(e^{-\alpha t} - \cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right)\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(e^{-\alpha t} - \cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right)\theta(t)$

b) låt $\mathcal{L}\, f(s) = \dfrac{1}{(s+\alpha)s^2}, \quad \alpha \neq 0.$

$$\frac{1}{(s+\alpha)s^2} = \frac{k_1}{s+\alpha} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s^2}$$

$$k_1 s^2 + k_2 s(s+\alpha) + k_3(s+\alpha) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_2\alpha + k_3 = 0 \\ k_3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{\alpha^2} \\ k_2 = -\frac{1}{\alpha^2} \\ k_3 = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, f(s) = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{s^2} \longleftrightarrow & \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\theta(t) - \frac{1}{\alpha^2}\theta(t) + \frac{1}{\alpha}t\theta(t) = \\ =& \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} + t\right)\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} + t\right)\theta(t)$

4.14 låt $\mathcal{L}\, f(s) = \dfrac{s+5}{(s+1)^2(s+2)^2}.$

$$\frac{s+5}{(s+1)^2(s+2)^2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{(s+1)^2} + \frac{k_3}{s+2} + \frac{k_4}{(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} & k_1(s+1)(s+2)^2 + k_2(s+2)^2 + k_3(s+1)^2(s+2) + k_4(s+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & k_1(s^3+5s^2+8s+4) + k_2(s^2+4s+4) + k_3(s^3+4s^2+5s+2) + k_4(s^2+2s+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ 5k_1 + k_2 + 4k_3 + k_4 = 0 \\ 8k_1 + 4k_2 + 5k_3 + 2k_4 = 1 \\ 4k_1 + 4k_2 + 2k_3 + k_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -7 \\ k_2 = 4 \\ k_3 = 7 \\ k_4 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, f(s) =& -7\frac{1}{s+1} + 4\frac{1}{(s+1)^2} + 7\frac{1}{s+2} + 3\frac{1}{(s+2)^2} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow\ & -7e^{-t}\theta(t) + 4e^{-t}t\theta(t) + 7e^{-2t}\theta(t) + 3e^{-2t}t\theta(t) = \left(e^{-t}(-7+4t) + e^{-2t}(7+3t)\right)\theta(t) \end{aligned}$$

Svar: $f(t) = \left(e^{-t}(-7+4t) + e^{-2t}(7+3t)\right)\theta(t)$

4.15

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} f(s) =& \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)^2(s+1+2i)(s+1-2i)} = \frac{s^2}{(s+2)^2((s+1)^2+4)} = \\
=& \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{(s+2)^2} + \frac{k_3 s + k_4}{(s+1)^2+4} = \\
=& k_1 \frac{1}{s+2} + k_2 \frac{1}{(s+2)^2} + k_3 \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{k_4-1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+2^2} \longleftrightarrow \\
\longleftrightarrow\ & k_1 e^{-2t}\theta(t) + k_2 e^{-2t} t\theta(t) + k_3 e^{-t}\cos(2t)\theta(t) + \frac{k_4-1}{2} e^{-t}\sin(2t)\theta(t) = \\
=& \left(k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-2t} t + k_3 e^{-t}\cos(2t) + \frac{k_4-1}{2} e^{-t}\sin(2t) \right) \theta(t) = \\
=& \left((k_1 + k_2 t) e^{-2t} + (k_3\cos(2t) + \frac{k_4-1}{2}\sin(2t)) e^{-t} \right) \theta(t) = \\
=& \left((A + Bt) e^{-2t} + (C\cos(2t) + D\sin(2t)) e^{-t} \right) \theta(t)
\end{aligned}$$

4.16 a)

b)

4.17 a)

b)

4.18

Kapitel 5: Lösning av differentialekvationer genom Laplacetransformation

5.1 Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$ vilket medför att:

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s) - 1$$
$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s(sY(s) - 1) - 2 = s^2Y(s) - s - 2$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och hitta Laplacetransformparet:

$$y''(t)\theta(t)+2y'(t)\theta(t)+5y(t)\theta(t) = e^{-t}\theta(t) \longleftrightarrow s^2Y(s)-s-2+2(sY(s)-1)+5Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s) - s - 2 + 2(sY(s) - 1) + 5Y(s) = \frac{1}{s+1} \Leftrightarrow (s^2 + 2s + 5)Y(s) = \frac{1}{s+1} + s + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1 + s(s+1) + 4(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+5)} = \frac{s^2 + 5s + 5}{(s+1)((s+1)^2+4)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2s + k_3}{(s+1)^2+4}$$

Identifiera variablerna:

$$k_1((s+1)^2 + 4) + (k_2s + k_3)(s+1) = s^2 + 5s + 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k_1(s^2 + 2s + 5) + k_2(s^2 + s) + k_3(s+1) = s^2 + 5s + 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 5 \\ 5k_1 + k_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{4} \\ k_2 = \frac{3}{4} \\ k_3 = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{3s+15}{(s+1)^2+4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+1} + 3\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + 6\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \frac{1}{4}\left(e^{-t}\theta(t) + 3e^{-t}\cos(2t)\theta(t) + 6e^{-t}\sin(2t)\theta(t)\right) = \frac{e^{-t}}{4}\left(1 + 3\cos(2t) + 6\sin(2t)\right)\theta(t)$$

$$y(t)\theta(t) = \frac{e^{-t}}{4}\left(1 + 3\cos(2t) + 6\sin(2t)\right)\theta(t)$$
$$y(t) = \frac{e^{-t}}{4}\left(1 + 3\cos(2t) + 6\sin(2t)\right)$$

Eftersom $y(0) = \frac{e^0}{4}(1+3\cos(0)+6\sin(0)) = 1$ är funktionen, utöver $t > 0$, definierad för $t = 0$.

Svar: $y(t) = \frac{e^{-t}}{4}\left(1 + 3\cos(2t) + 6\sin(2t)\right), \quad t \geq 0$

5.2 Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$ vilket medför att:

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s)$$
$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$$

Multiplicera vänsterledet med $\theta(t)$ och hitta Laplacetransformparet:

$$y''(t)\theta(t) - 2y'(t)\theta(t) + 2y(t)\theta(t) \longleftrightarrow s^2Y(s) - s - 2 + 2(sY(s) - 1) + 5Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) + 2Y(s) = 0 \Leftrightarrow (s^2 - 2s + 2)Y(s) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{(s-1)^2+1} \longleftrightarrow e^t\sin(t)\theta(t)$$

$$y(t)\theta(t) = e^t\sin(t)\theta(t)$$
$$y(t) = e^t\sin(t)$$

Eftersom $y(0) = e^0\sin(0) = 0$ är funktionen, utöver $t > 0$, definierad för $t = 0$.

Svar: $y(t) = e^t\sin(t), \quad t \geq 0$

5.3 Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$ vilket medför att:

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och hitta Laplacetransformparet:

$$y''(t)\theta(t) + 2y'(t)\theta(t) + y(t)\theta(t) = e^{-2t}\theta(t) \longleftrightarrow s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s+2} &\Leftrightarrow (s^2+2s+1)Y(s) = \frac{1}{s+2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+1)} &= \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Identifiera variablerna:

$$\begin{aligned} &k_1(s+1)^2 + k_2(s+2)(s+1) + k_3(s+2) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &k_1(s^2+2s+1) + k_2(s^2+3s+2) + k_3(s+2) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \longleftrightarrow\ &e^{-2t}\theta(t) - e^{-t}\theta(t) + e^{-t}t\theta(t) = \\ =&(e^{-2t} + e^{-t}(t-1))\theta(t) \end{aligned}$$

$$y(t)\theta(t) = (e^{-2t} + e^{-t}(t-1))\theta(t)$$

$$y(t) = e^{-2t} + e^{-t}(t-1)$$

Eftersom $y(0) = e^0 + e^0(0-1) = 0$ är funktionen, utöver $t > 0$, definierad för $t = 0$.

Svar: $y(t) = e^{-2t} + e^{-t}(t-1), \quad t \geq 0$

5.4 Låt $Y_1(s) = \mathcal{L}(\theta y_1)(s)$ och $Y_2(s) = \mathcal{L}(\theta y_2)(s)$ vilket medför att:

$$\mathcal{L}(\theta y_1')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y_1)(s) - y_1(0) = sY_1(s) - 1$$

$$\mathcal{L}(\theta y_2')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y_2)(s) - y_2(0) = sY_2(s)$$

Multiplicera ekvationssystemet med $\theta(t)$:

$$\begin{cases} y_1\theta(t) - 2y_2'\theta = 2\theta \\ y_1'\theta(t) + 2y_2 = -2t\theta \end{cases}$$

Laplacetransformera båda ekvationerna:

$$\begin{cases} Y_1(s) - 2sY_2(s) = \frac{2}{s} \\ sY_1(s) - 1 + 2Y_2(s) = -\frac{2}{s^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1(s) - 2sY_2(s) = \frac{2}{s} \\ sY_1(s) + 2Y_2(s) = \frac{s^2-2}{s^2} \end{cases}$$

Använd Cramers regel:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} 1 & -2s \\ s & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-2s)s = 2(s^2+1)$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} \frac{2}{s} & -2s \\ \frac{s^2-2}{s^2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2(s^2+1)} \left(\frac{4}{s} - \frac{(-2s)(s^2-2)}{s^2} \right) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{s} \\ s & \frac{s^2-2}{s^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2(s^2+1)} \left(\frac{s^2-2}{s^2} - 2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{cases} Y_1(s) = \frac{s}{s^2+1} \\ Y_2(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} y_1\theta = \cos(t)\theta(t) \\ y_2\theta = \frac{1}{2}\sin(t)\theta(t) - t\theta(t) \end{cases}$$

Eftersom $\theta(t) = 1$ endast när $t > 0$ måste det läggas till som villkor:

$$\begin{cases} y_1 = \cos(t) \\ y_2 = \frac{1}{2}\sin(t) - t \end{cases}, \quad t > 0$$

Eftersom $y_1(0) = \cos(0) = 1$ och $y_2(0) = \frac{1}{2}\sin(0) - 0 = 0$ är de de också definierade för $t = 0$.

Svar: $\begin{cases} y_1 = \cos(t) \\ y_2 = \frac{1}{2}\sin(t) - t \end{cases}, \quad t \geq 0$

5.5 Eftersom differentialekvationens högerled är $\delta(t)$ låt $Y(s) = \mathcal{L}\,y(s)$ ($\delta(t)\theta(t)$ saknar betydelse)

$$sY(s) = \mathcal{L}\,y'(s), \qquad s^2Y(s) = \mathcal{L}\,y''(s)$$

Laplacetransformera ekvationen:

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = 1 \Leftrightarrow (s^2+2s+2)Y(s) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1} \longleftrightarrow e^{-t}\sin(t)\theta(t)$$

Eftersom $\theta(t)$ är en faktor är y kausal.

Svar: $y(t) = e^{-t}\sin(t)\theta(t)$

5.6 För att använda Laplacetransformation med begynnelsevärden måste $t > 0$. Så börja med att hitta lösningen för det intervallet och utvidga lösningen efter.

Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y^{(3)})(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y'')(s) - y''(0) = s^3 Y(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y^{(4)})(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y^{(3)})(s) - y^{(3)}(0) = s^4 Y(s) - 1$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och Laplacetransformera den:

$$s^4 Y(s) - 1 = Y(s) \Leftrightarrow (s^4 - 1)Y(s) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^4 - 1} = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s-1)} = \frac{k_1 s + k_2}{s^2+1} + \frac{k_3}{s+1} + \frac{k_4}{s-1}$$

Identifiera variablerna:

$$(k_1 s + k_2)(s+1)(s-1) + k_3(s^2+1)(s-1) + k_4(s^2+1)(s+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1(s^3 - s) + k_2(s^2 - 1) + k_3(s^3 - s^2 + s - 1) + k_4(s^3 + s^2 + s + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_2 - k_3 + k_4 = 0 \\ -k_1 + k_3 + k_4 = 0 \\ -k_2 - k_3 + k_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -\frac{1}{2} \\ k_3 = -\frac{1}{4} \\ k_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s^2+1}\right) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \frac{1}{4}(e^t\theta(t) - e^{-t}\theta(t) - \sin(t)\theta(t)) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t} - 2\sin(t))\theta(t)$$

$$y(t)\theta(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t} - 2\sin(t))\theta(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t} - 2\sin(t)), \quad t > 0$$

y deriveras 3 gånger och då visar det sig att $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 1$ vilket innebär att begynnelsevillkoren är uppfyllda.

Eftersom termerna är definierade för $t < 0$ och deriveras på samma sätt för negativa värden kan intervallet för t utvidgas till $t \in \mathbb{R}$.

Svar: $y(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t} - 2\sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}$

5.7 Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y''')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y'')(s) - y''(0) = s^3Y(s)$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och Laplacetransformera den:

$$s^3Y(s) + 3s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Leftrightarrow (s^3 + 3s^2 + 3s + 1)Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^3+3s^2+3s+1)} = \frac{1}{(s+1)^5} = \frac{1}{24}\cdot\frac{4!}{(s+1)^5} \longleftrightarrow \frac{1}{24}e^{-t}t^4\theta(t)$$

$$y(t)\theta(t) = \frac{1}{24}e^{-t}t^4\theta(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{24}e^{-t}t^4, \quad t > 0$$

y deriveras 2 gånger och då visar det sig att $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ vilket innebär att begynnelsevillkoren är uppfyllda, funktionen är alltså definierad även för $t = 0$.

Svar: $y(t) = \frac{1}{24}e^{-t}t^4, \quad t \geq 0$

5.8 Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ (notera $\theta(t-\alpha)\theta(t-\beta) = \theta(t-\alpha), \quad \alpha \geq \beta$):

$$y''\theta(t) + 3y'\theta(t) + 2y\theta(t) = \theta(t)\theta(t) - \theta(t-1)\theta(t) \Leftrightarrow y''\theta(t) + 3y'\theta(t) + 2y\theta(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$$

Laplacetransformera den:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s} \Leftrightarrow (s^2+3s+2)Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(s^2+3s+2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2} - e^{-s}\left(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}\right)$$

Identifiera variablerna:

$$k_1(s+1)(s+2) + k_2 s(s+2) + k_3 s(s+1) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k_1(s^2+3s+2) + k_2(s^2+2s) + k_3(s^2+s) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = -1 \\ k_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - e^{-s}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\theta(t) - \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right)\theta(t-1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\theta(t) - \frac{1}{2}(1 - 2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)})\theta(t-1)$$

Notera att $\frac{\theta(t-\alpha)}{\theta(t)} = \theta(t-\alpha), \quad t > 0$:

$$y(t)\theta(t) = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\theta(t) - \frac{1}{2}(1 - 2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)})\theta(t-1)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\theta(t) - \frac{1}{2}(1 - 2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)})\theta(t-1), \quad t > 0$$

y deriveras och då visar det sig att $y(0) = y'(0) = 0$ vilket innebär att begynnelsevillkoren är uppfyllda, funktionen är alltså definierad även för $t = 0$.

Svar: $y(t) = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\theta(t) - \frac{1}{2}(1 - 2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)})\theta(t-1), \quad t \geq 0$

5.9 Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s)$$
$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2Y(s)$$
$$\mathcal{L}(\theta y''')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y'')(s) - y''(0) = s^3Y(s) - 1$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och Laplacetransformera den:

$$s^3Y(s) - 1 - s^2Y(s) + sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow (s^3 - s^2 + s - 1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^3 - s^2 + s - 1)} = \frac{s^2+1}{s^2(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s^2} + \frac{k_3}{s-1}$$

Identifiera variablerna:

$$k_1 s(s-1) + k_2(s-1) + k_3 s^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k_1(s^2 - s) + k_2(s-1) + k_3 s^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 = 0 \\ -k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 1 \end{cases}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \longleftrightarrow -\theta(t) - t\theta(t) + e^t\theta(t) = (e^t - t - 1)\theta(t)$$
$$y(t)\theta(t) = (e^t - t - 1)\theta(t)$$
$$y(t) = e^t - t - 1, \quad t > 0$$

y deriveras 2 gånger och då visar det sig att $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ vilket innebär att begynnelsevillkoren är uppfyllda, funktionen är alltså definierad även för $t = 0$.

Svar: $y(t) = e^t - t - 1, \quad t \geq 0$

5.10 Eftersom differentialekvationens högerled är $\delta(t)$ låt $Y(s) = \mathcal{L}\,y(s)$ ($\delta(t)\theta(t)$ saknar betydelse)

$$sY(s) = \mathcal{L}\,y'(s), \qquad s^2Y(s) = \mathcal{L}\,y''(s), \qquad s^3Y(s) = \mathcal{L}\,y'''(s)$$

Laplacetransformera ekvationen:

$$s^3Y(s) + 3s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = 1 \Leftrightarrow (s^3 + 3s^2 + 3s + 1)Y(s) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^3} \longleftrightarrow \frac{1}{2}e^{-t}t^2\theta(t)$$

Eftersom $\theta(t)$ är en faktor är y kausal.

Svar: $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}t^2\theta(t), \quad -\infty < t < +\infty$

5.11 Eftersom differentialekvationens högerled innehåller $\delta(t)$ låt $Y(s) = \mathcal{L}\,y(s)$ ($\delta(t)\theta(t)$ saknar betydelse)

$$sY(s) = \mathcal{L}\,y'(s), \qquad s^2Y(s) = \mathcal{L}\,y''(s)$$

Laplacetransformera ekvationen:

$$s^2Y(s) + sY(s) = 1 - 2e^{-s} + \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s} \Leftrightarrow (s^2+s)Y(s) = \frac{s - 2se^{-s} + 1 - e^{-s}}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s - 2se^{-s} + 1 - e^{-s}}{s(s^2+s)} = \frac{1}{s(s+1)} - 2\frac{e^{-s}}{s(s+1)} + \frac{1}{s^2(s+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2(s+1)} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - 2e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} - e^{-s}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+1}\right) \longleftrightarrow t\theta(t) - (\theta(t-1) + (t-1)\theta(t-1) - e^{-(t-1)}\theta(t-1)) =$$

$$= t\theta(t) - (t - e^{-(t-1)})\theta(t-1)$$

Eftersom $\theta(t-\alpha)$, $\quad \alpha \geq 0$ är en faktor är y kausal.

För att enklare kunna rita den:

$$y(t) = t\theta(t) - (t - e^{-(t-1)})\theta(t-1) = t(\theta(t) - \theta(t-1)) + e^{-(t-1)}\theta(t-1)$$

Funktionen t i intervallet $0 < t < 1$, funktionen $e^{-(t-1)}$ i intervallet $1 < t < \infty$

Svar: $y(t) = t(\theta(t) - \theta(t-1)) + e^{-(t-1)}\theta(t-1)$

5.12 Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2Y(s)$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och Laplacetransformera den:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \Leftrightarrow (s^2+3s+2)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+3s+2)} = \frac{s}{(s^2+1)(s+1)(s+2)} = \frac{k_1s+k_2}{s^2+1} + \frac{k_3}{s+1} + \frac{k_4}{s+2}$$

Identifiera variablerna:

$$(k_1s+k_2)(s^2+3s+2) + k_3(s^2+1)(s+2) + k_4(s^2+1)(s+1) = s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1(s^3+3s^2+2s) + k_2(s^2+3s+2) + k_3(s^3+2s^2+s+2) + k_4(s^3+s^2+s+1) = s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 + k_4 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 + k_4 = 1 \\ 2k_2 + 2k_3 + k_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{10} \\ k_2 = \frac{3}{10} \\ k_3 = -\frac{1}{2} \\ k_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{10}\cdot\frac{s+3}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+2} = \frac{1}{10}\left(\frac{s}{s^2+1} + 3\frac{1}{s^2+1} - 5\frac{1}{s+1} + 4\frac{1}{s+2}\right) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \frac{1}{10}\left(\cos(t) + 3\sin(t) - 5e^{-t} + 4e^{-2t}\right)\theta(t)$$

$$y(t)\theta(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(t) + 3\sin(t) - 5e^{-t} + 4e^{-2t}\right)\theta(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(t) + 3\sin(t) - 5e^{-t} + 4e^{-2t}\right), \quad t > 0$$

y deriveras och då visar det sig att $y(0) = y'(0) = 0$ vilket innebär att begynnelsevillkoren är uppfyllda, funktionen är alltså definierad även för $t = 0$.

Svar: $y(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(t) + 3\sin(t) - 5e^{-t} + 4e^{-2t}\right), \quad t \geq 0$

5.13 a)

$$f(t) = t(\theta(t) - \theta(t-1)) - t(\theta(t-1) - \theta(t-2)) = t\theta(t) - 2t\theta(t-1) + t\theta(t-2)$$

Hitta fs Laplacetransformpar:

$$\mathcal{L}\, f(s) = \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$$

Utnyttja regeln $f'(t) \longleftrightarrow sF(s)$:

$$\mathcal{L}\, f'(s) = s\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s}$$

$$\mathcal{L}\, f''(s) = s\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s}$$

Hitta inversen:

$$f''(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

Svar: $f''(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$

b) Eftersom differentialekvationens högerled innehåller $\delta(t)$ låt $Y(s) = \mathcal{L}\, y(s)$ ($\delta(t)\theta(t)$ saknar betydelse)

$$sY(s) = \mathcal{L}\, y'(s), \qquad s^2Y(s) = \mathcal{L}\, y''(s)$$

Laplacetransformera ekvationen:

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s} \Leftrightarrow (s^2 + 2s + 2)Y(s) = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} - 2\frac{e^{-s}}{(s+1)^2 + 1} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2 + 1} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow e^{-t}\sin(t)\theta(t) - 2e^{-(t-1)}\sin(t-1)\theta(t-1) + e^{-(t-2)}\sin(t-2)\theta(t-2)$$

Eftersom $\theta(t - \alpha), \quad \alpha \geq 0$ är en faktor är y kausal.

Svar: $y(t) = e^{-t}\sin(t)\theta(t) - 2e^{-(t-1)}\sin(t-1)\theta(t-1) + e^{-(t-2)}\sin(t-2)\theta(t-2)$

5.14 Låt $X(s) = \mathcal{L}(\theta x)(s)$ och $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$ vilket medför att:

$$\mathcal{L}(\theta x')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta x)(s) - x(0) = sX(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta x'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta x')(s) - x'(0) = s^2 X(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s^2 Y(s) - s$$

Multiplicera ekvationssystemet med $\theta(t)$:

$$\begin{cases} x''(t)\theta(t) + 2x(t)\theta(t) + y'(t)\theta(t) = 0 \\ y''(t)\theta(t) + 2y(t)\theta(t) - x'(t)\theta(t) = 0 \end{cases}$$

Laplacetransformera båda ekvationerna:

$$\begin{cases} s^2X + 2X + sY - 1 = 0 \\ s^2Y - s + 2Y - sX = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s^2+2)X + & sY = 1 \\ -sX + & (s^2+2)Y = s \end{cases}$$

Använd Cramers regel:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s^2+2 & s \\ -s & s^2+2 \end{vmatrix} = (s^2+2)^2 + s^2 = (s^2+4)(s^2+1)$$

$$X(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} 1 & s \\ s & s^2+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}\left(s^2+2-s^2\right) = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} s^2+2 & 1 \\ -s & s \end{vmatrix} = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}\left(s^3+2s+s\right) = \frac{s^3+3s}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Hitta lösningar till X och Y var för sig:

$$X(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{3}(2\sin(t)\theta(t) - \sin(2t)\theta(t)) =$$
$$= \frac{1}{3}(2\sin(t) - \sin(2t))\theta(t)$$

$$Y(s) = \frac{s^3+3s}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{1}{3}\left(2\frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+4}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{3}\left(2\cos(t)\theta(t) + \cos(2t)\theta(t)\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(2\cos(t) + \cos(2t)\right)\theta(t)$$

$$\begin{cases} x\theta = \frac{1}{3}(2\sin(t) - \sin(2t))\theta(t) \\ y\theta = \frac{1}{3}(2\cos(t) + \cos(2t))\theta(t) \end{cases}$$

Eftersom $\theta(t) = 1$ endast när $t > 0$ måste det läggas till som villkor:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(2\sin(t) - \sin(2t)) \\ y = \frac{1}{3}(2\cos(t) + \cos(2t)) \end{cases}, \quad t > 0$$

y och x deriveras och då visar det sig att $x(0) = x'(0) = y'(0) = 0$, $y(0) = 1$ vilket innebär att begynnelsevillkoren är uppfyllda, funktionen är alltså definierad även för $t = 0$.

Svar: $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(2\sin(t) - \sin(2t)) \\ y = \frac{1}{3}(2\cos(t) + \cos(2t)) \end{cases}, \quad t \geq 0$

5.15 Låt $X(s) = \mathcal{L}(\theta x)(s)$ och $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$ vilket medför att:

$$\mathcal{L}(\theta x')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta x)(s) - x(0) = sX(s)$$

$$\mathcal{L}(\theta y')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

Multiplicera ekvationssystemet med $\theta(t)$:

$$\begin{cases} x'(t)\theta(t) + 2x(t)\theta(t) + y'(t)\theta(t) = 0 \\ 2x'(t)\theta(t) + 3x(t)\theta(t) + 2y'(t)\theta(t) + y(t)\theta(t) = 0 \end{cases}$$

Laplacetransformera båda ekvationerna:

$$\begin{cases} sX(s) + 2X(s) + sY(s) - 1 = 0 \\ 2sX(s) + 3X(s) + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+2)X + sY = 1 \\ (2s+3)X + (2s+1)Y = 2 \end{cases}$$

Använd Cramers regel:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s+2 & s \\ 2s+3 & 2s+1 \end{vmatrix} = (s+2)(2s+1) - s(2s+3) = 2(s+1)$$

$$X(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} 1 & s \\ 2 & 2s+1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2(s+1)}\,(2s+1-2s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ 2s+3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2(s+1)}\,(2(s+2) - (2s+3)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1}$$

Hitta lösningen till X och Y:

$$X(s) = Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} \longleftrightarrow \frac{1}{2}e^{-t}\theta(t)$$

Eftersom $\theta(t) = 1$ endast när $t > 0$ måste det läggas till som villkor:

$$x\theta = y\theta = \frac{1}{2}e^{-t}\theta(t) \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}e^{-t}, \quad t > 0$$

$x(0) = y(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$ vilket innebär att begynnelsevillkoren inte är uppfyllda, det saknas alltså en lösning till ekvationssystemet.

Svar: lösning saknas

5.16 Eftersom en av differentialekvationernas högerled är $\delta(t-1)$ låt $X(s) = \mathcal{L}\,x(s)$ och $Y(s) = \mathcal{L}\,y(s)$ ($\delta(t)\theta(t)$ saknar betydelse)

$$\mathcal{L}\,x'(s) = sX(s)$$

$$\mathcal{L}\,y'(s) = sY(s)$$

Laplacetransformera båda ekvationerna:

$$\begin{cases} sX(s) + Y(s) = e^{-s} \\ sY(s) - X(s) = \frac{1}{s} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} sX + Y = e^{-s} \\ -X + sY = \frac{1}{s} \end{cases}$$

Använd Cramers regel:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - (-1) = s^2 + 1$$

$$X(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} e^{-s} & 1 \\ \frac{1}{s} & s \end{vmatrix} = \frac{1}{s^2+1}\left(se^{-s} - \frac{1}{s}\right) = e^{-s}\frac{s}{s^2+1} - \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} s & e^{-s} \\ -1 & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s^2+1}\left(1 - (-e^{-s})\right) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

Hitta lösningar till x och y var för sig:

$$X(s) = e^{-s}\frac{s}{s^2+1} - \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) \longleftrightarrow \cos(t-1)\theta(t-1) - \theta(t) + \cos(t)\theta(t)$$

$$Y(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \longleftrightarrow \sin(t-1)\theta(t-1) + \sin(t)\theta(t)$$

$$\begin{cases} x = \cos(t-1)\theta(t-1) - \theta(t) + \cos(t)\theta(t) \\ y = \sin(t-1)\theta(t-1) + \sin(t)\theta(t) \end{cases} \quad , \quad t > 0$$

Eftersom $\theta(t-\alpha)$, $\alpha \geq 0$ är en faktor i alla termerna är y och x kausala.

Svar: $\begin{cases} x = \cos(t-1)\theta(t-1) - \theta(t) + \cos(t)\theta(t) \\ y = \sin(t-1)\theta(t-1) + \sin(t)\theta(t) \end{cases} \quad , \quad -\infty < t < +\infty$

5.17 Låt $X_1(s) = \mathcal{L}(\theta x_1)(s)$, $X_2(s) = \mathcal{L}(\theta x_2)(s)$ och $X_3(s) = \mathcal{L}(\theta x_3)(s)$ vilket medför att:

$$\mathcal{L}(\theta x_1')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta x_1)(s) - x_1(0) = sX_1(s)$$
$$\mathcal{L}(\theta x_2')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta x_2)(s) - x_2(0) = sX_2(s) - 1$$
$$\mathcal{L}(\theta x_3')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta x_3)(s) - x_3(0) = sX_3(s) - 2$$

Multiplicera ekvationssystemet med $\theta(t)$:

$$\begin{cases} x_1'(t)\theta(t) = x_2(t)\theta(t) \\ x_2'(t)\theta(t) = x_3(t)\theta(t) \\ x_3'(t)\theta(t) = -2x_1(t)\theta(t) + x_2(t)\theta(t) + 2x_3(t)\theta(t) \end{cases}$$

Laplacetransformera båda ekvationerna:

$$\begin{cases} sX_1(s) = X_2(s) \\ sX_2(s) - 1 = X_3(s) \\ sX_3(s) - 2 = -2X_1(s) + X_2(s) + 2X_3(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sX_1 - X_2 = 0 \\ sX_2 - X_3 = 1 \\ 2X_1 - X_2 + (s-2)X_3 = 2 \end{cases}$$

Använd Cramers regel:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & -1 & s-2 \end{vmatrix} = s^2(s-2) + 2 + 0 - 0 - s - 0 = (s-2)(s-1)(s+1)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & s & -1 \\ 2 & -1 & s-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s-2)(s-1)(s+1)}(2 - (-(s-2))) = \frac{s}{(s-2)(s-1)(s+1)}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & s-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s-2)(s-1)(s+1)}(s(s-2) - (-2s)) = \frac{s^2}{(s-2)(s-1)(s+1)}$$

$$X_3(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{(s-2)(s-1)(s+1)}\left(2s^2 - 2 - (-s)\right) = \frac{2s^2 + s - 2}{(s-2)(s-1)(s+1)}$$

Hitta lösningar till X_1, X_2 och X_3 var för sig:

$$X_1(s) = \frac{s}{(s-2)(s-1)(s+1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow \frac{2}{3}e^{2t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{t}\theta(t) - \frac{1}{6}e^{-t}\theta(t)$$

$$X_2(s) = \frac{s^2}{(s-2)(s-1)(s+1)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow \frac{4}{3}e^{2t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{t}\theta(t) + \frac{1}{6}e^{-t}\theta(t)$$

$$X_3(s) = \frac{2s^2 + s - 2}{(s-2)(s-1)(s+1)} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow \frac{8}{3}e^{2t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{t}\theta(t) - \frac{1}{6}e^{-t}\theta(t)$$

Eftersom $\theta(t) = 1$ endast när $t > 0$ måste det läggas till som villkor:

$$\begin{cases} x_1\theta = \frac{2}{3}e^{2t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{t}\theta(t) - \frac{1}{6}e^{-t}\theta(t) \\ x_2\theta = \frac{4}{3}e^{2t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{t}\theta(t) + \frac{1}{6}e^{-t}\theta(t) \\ x_3\theta = \frac{8}{3}e^{2t}\theta(t) - \frac{1}{2}e^{t}\theta(t) - \frac{1}{6}e^{-t}\theta(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t} \\ x_2 = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t} \\ x_3 = \frac{8}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t} \end{cases}, \quad t > 0$$

Om 0 sätts in i alla funktionerna finnes att $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ och $x_3(0) = 2$ vilket innebär att begynnelsevillkoren är uppfyllda, funktionen är alltså definierad även för $t = 0$.

Svar: $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t} \\ x_2 = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t} \\ x_3 = \frac{8}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t} \end{cases}, \quad t \geq 0$

5.18

Kapitel 6: Faltning

6.1 Använd definitionen av faltning:

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)}\theta(t-\tau)e^{-3\tau}\theta(\tau)\,d\tau = \left(\int_0^t e^{-(t-\tau)-3\tau}\,d\tau\right)\theta(t) =$$

$$= \left(\int_0^t e^{-t-2\tau}\,d\tau\right)\theta(t) = \left[-\frac{e^{-t-2\tau}}{2}\right]_0^t \theta(t) = \left(-\frac{e^{-3t}}{2} - \left(-\frac{e^{-t}}{2}\right)\right)\theta(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})\theta(t)$$

Svar: $f * g(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})\theta(t)$

6.2

$$\mathcal{L}\,f(s) = \mathcal{L}(e^{-t}\theta)(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}\,g(s) = \mathcal{L}(e^{-3t}\theta)(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})\theta)(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

6.3 Gör ett variabelbyte i integralen för att bevisa lagen.

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} x = t-\tau \\ \tau = t - x \\ d\tau = -dx \end{bmatrix} = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)g(t-x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)f(x)\,dx = g * f(t) \qquad \text{V.S.V.}$$

6.4 a)

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

6.4 b) Låt $f\theta$ och $g\theta$ vara två kausala funktioner, definitionen av faltning ger då:

$$(f\theta) * (g\theta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\theta(t-\tau)g(\tau)\theta(\tau)\,d\tau$$

Eftersom $\theta(t-\tau)\theta(\tau) \equiv 0, \quad t \leq 0$ och $\theta(t-\tau)\theta(\tau) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad t > 0$ är:

$$(f\theta) * (g\theta)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, & t \leq 0 \\ 0 & , \quad t > 0 \end{cases}$$

Vilket också kan beskrivas som:

$$(f\theta) * (g\theta)(t) = \left(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right)\theta(t)$$

6.4 c) Utnyttja definitionen av Laplacetransformen och faltning:

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}f(t-\tau)g(\tau)\,dt\right)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}g(\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(t-\tau)}f(t-\tau)\,dt\right)d\tau = \begin{bmatrix} u = t-\tau \\ du = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}g(\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-su}f(u)\,du\right)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}g(\tau)\,\mathcal{L}\,f(s)\,d\tau =$$

$$= \mathcal{L}\,f(s)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau = \mathcal{L}\,f(s)\cdot\mathcal{L}\,g(s) \qquad \text{V.S.V.}$$

6.5

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{2}{s^3}, \qquad \mathcal{L}\,g(s) = \frac{24}{s^5}$$

$$\mathcal{L}\,v(s) = \mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}\,f(s)\cdot\mathcal{L}\,g(s) = \frac{2}{s^3}\cdot\frac{24}{s^5} = \frac{48}{s^8} = \frac{1}{105}\cdot\frac{7!}{s^8} \longleftrightarrow \frac{t^7}{105}\theta(t) = v(t)$$

Svar: $v(t) = \dfrac{t^7}{105}\theta(t)$

6.6 Använd regeln $\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}\,f(s)\cdot\mathcal{L}\,g(s)$:

$$\mathcal{L}\,f(s) = \frac{1}{(s+3)^2}, \qquad \mathcal{L}\,g(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}\,f(s)\cdot\mathcal{L}\,g(s) = \frac{1}{(s+3)^2}\cdot\frac{1}{s+1} = \frac{k_1}{(s+3)^2} + \frac{k_2}{s+3} + \frac{k_3}{s+1}$$

Identifiera variablerna:

$$\begin{aligned}
&k_1(s+1) + k_2(s+3)(s+1) + k_3(s+3)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\;& k_1(s+1) + k_2(s^2+4s+3) + k_3(s^2+6s+9) = 1 \;\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\;& \begin{cases} k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 4k_2 + 6k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + 9k_3 = 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\; \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \\ k_2 = -\frac{1}{4} \\ k_3 = \frac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f*g)(s) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+3)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} \longleftrightarrow\; -\frac{1}{2}te^{-3t}\theta(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}\theta(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\theta(t) =\\
= \frac{1}{4}(e^{-t} - (2t+1)e^{-3t})\theta(t)
\end{aligned}$$

Svar: $f*g(t) = \frac{1}{4}(e^{-t} - (2t+1)e^{-3t})\theta(t)$

6.7

$$\mathcal{L}(u*u)(s) = \mathcal{L}\,u(s)\cdot\mathcal{L}\,u(s) = (\mathcal{L}\,u(s))^2 = \frac{6}{(s+1)^4} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \mathcal{L}\,u(s) = \pm\frac{\sqrt{6}}{(s+1)^2} = \pm\sqrt{6}\frac{1}{(s+1)^2} \longleftrightarrow \pm\sqrt{6}te^{-t}\theta(t)$$

Svar: $u(t) = \pm\sqrt{6}te^{-t}\theta(t)$

6.8 Låt $G(s) = \mathcal{L}\,g(s)$ och $Y(s) = \mathcal{L}\,y(s) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}\,y'(s) = sY(s)$.

$$2(y*g) = y - y' + g$$

Laplacetransformera ekvationen:

$$\begin{aligned}
&2Y(s)G(s) = Y(s) - sY(s) + G(s) \;\Leftrightarrow\; 2\frac{1}{s+1}Y(s) = (1-s)Y(s) + \frac{1}{s+1} \;\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\;& \left(\frac{2}{s+1} - 1 + s\right)Y(s) = \frac{1}{s+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{2-(s+1)+s(s+1)}{s+1}Y(s) = \frac{1}{s+1} \;\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\;& \frac{s^2+1}{s+1}Y(s) = \frac{1}{s+1} \;\Leftrightarrow\; Y(s) = \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Hitta inversen:

$$\mathcal{L}^{-1}\,Y(t) = y(t) = \sin(t)\theta(t)$$

Svar: $y(t) = \sin(t)\theta(t)$

6.9 a) Låt $Y(s) = \mathcal{L}(\theta y)(s)$.

$$\mathcal{L}(\theta y'')(s) = s\,\mathcal{L}(\theta y')(s) - y'(0) = s(s\,\mathcal{L}(\theta y)(s) - y(0)) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ och Laplacetransformera den:

$$s^2 Y(s) + Y(s) = F(s) \;\Leftrightarrow\; (s^2+1)Y(s) = F(s) \;\Leftrightarrow\; Y(s) = \frac{1}{s^2+1}F(s)$$

Svar: $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1}F(s)$

b)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}F(s)$$

Låt $H(s) = \mathcal{L}(h\theta)(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$.

$$h(t)\theta(t) = \sin(t)\theta(t) \;\Leftrightarrow\; h(t) = \sin(t), \quad t > 0$$

Hitta inversen till ekvationen:

$$y(t)\theta(t) = (h * f(t))\theta(t)$$

Använd definitionen av kausal faltning:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(t)\,d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau)f(t)\,d\tau, \quad t > 0$$

Svar: $y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)f(t)\,d\tau, \quad t > 0$

6.10 Låt $G(s) = \mathcal{L}(\cos\theta)(s)$ och $F(s) = \mathcal{L}(f\theta)(s)$.

$$G(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Använd definitionen av faltning baklänges:

$$\int_0^t \cos(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t-\tau)\theta(t-\tau) f(\tau)\theta(\tau)\, d\tau = \cos(t)\theta(t) * f(t)\theta(t)$$

Sätt in i ekvationen:

$$\cos(t)\theta(t) * f(t)\theta(t) = \sin(2t), \quad t > 0$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ (notera att $\theta(t) \cdot \theta(t) = \theta(t)$):

$$\cos(t)\theta(t) * f(t)\theta(t) = \sin(2t)\theta(t)$$

Hitta Laplacetransformen:

$$\begin{aligned} G(s)F(s) &= \frac{2}{s^2+4} \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+1} F(s) = \frac{2}{s^2+4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F(s) &= \frac{2s^2+2}{s(s^2+4)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+4} \end{aligned}$$

Identifiera variablerna:

$$k_1(s^2+4) + (k_2 s + k_3)s = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ k_3 = 0 \\ 4k_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{3}{2} \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + 3\frac{s}{s^2+4}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\theta(t) + 3\cos(2t)\theta(t)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 3\cos(2t)\right)\theta(t)$$

$$f(t)\theta(t) = \frac{1}{2}\left(1 + 3\cos(2t)\right)\theta(t) \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2}\left(1 + 3\cos(2t)\right), \quad t > 0$$

Svar: $f(t) = \frac{1}{2}\left(1 + 3\cos(2t)\right), \quad t > 0$

6.11 Genom att sätta $t = 0$ fås begynnelsevärdet:

$$y(0) + \int_0^0 e^{\tau} y(\tau)\, d\tau = 1 \;\Leftrightarrow\; y(0) = 1$$

Låt $f(t) = e^{-t}$ vilket medför:

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau) y(\tau)\, d\tau = f(t)\theta(t) * y(t)\theta(t)$$

Multiplicera ekvationen med $\theta(t)$ (notera att $\theta(t) \cdot \theta(t) = \theta(t)$):

$$y(t)\theta(t) + f(t)\theta(t) * y(t)\theta(t) = \theta(t)$$

Låt $Y(s) = \mathcal{L}(y\theta)(s)$ och $F(s) = \mathcal{L}(f\theta)(s) = \frac{1}{s+1}$ och Laplacetransformera ekvationen:

$$Y(s) + F(s) \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \;\Leftrightarrow\; (1 + F(s))Y(s) = \frac{1}{s} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(1+F(s))s} = \frac{1}{(1+\frac{1}{s+1})s} = \frac{1}{\frac{(s+2)s}{s+1}} = \frac{s+1}{(s+2)s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

Hitta den inversa Laplacetransformen:

$$y(t)\theta(t) = \frac{1}{2}(\theta(t) + e^{-2t}\theta(t)) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})\theta(t)$$

Vilket ger:

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}), \quad t > 0$$

Se om begynnelsevärdet matchar det som togs fram i början:

$$y(0) = \frac{1}{2}(1 + e^0) = \frac{2}{2} = 1$$

Det matchar och funktionen är alltså även definierad för $t = 0$.
Svar: $y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}), \quad t \geq 0$

6.12 Låt $Y(s) = \mathcal{L}\, y(s)$ och $F(s) = \mathcal{L}\, f(s)$ vilket medför att $\mathcal{L}\, y^{(4)}(s) = s^4 Y(s)$ och $\mathcal{L}\, f''(s) = s^2 F(s)$.
Laplacetransformera ekvationen:

$$s^4 Y(s) + 4Y(s) = s^2 F(s) \;\Leftrightarrow\; (s^4 + 4)Y(s) = s^2 F(s) \;\Leftrightarrow\; Y(s) = \frac{s^2}{s^4+4} F(s)$$