

Linjär algebra

FMA420

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

2016-05-12

Kapitel 1: Linjära ekvationssystem

1.1 (s.)

Börja nerifrån och upp och lös en variabel i taget.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -3y + 5z = 1 \\ 4z = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = \frac{1-5*2}{-3} = 3 \\ x = \frac{5+2-3*3}{2} = -1 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (-1, 3, 2)$

1.2 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 6y + 11z = 35 \\ -3x + 5y + z = 8 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -2y + 9z = 31 \\ -y + 4z = 14 \end{cases} \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -2y + 9z = 31 \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{cases} \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{matrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{31-9*3}{-2} = -2 \\ x = 2 + 2*(-2) - 3 = -5 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (-5, -2, 3)$

1.3 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 6y + 6z = 2 \\ -3x + 5y + z = 3 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ -y + 4z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ 2z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{-4 \cdot 3}{-2} = 6 \\ x = 1 + 2 \cdot 6 - 3 = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: $(x, y, z) = (10, 6, 3)$

1.4 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 6y + 6z = 2 \\ -3x + 5y - z = 3 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ -y + 2z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ 0z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{matrix} \end{aligned}$$

Saknar lösning eftersom $0 \neq 6$.

Svar: Lösning saknas

1.5 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 6y + 11z = 35 \\ x - 2y + z = 2 \\ -3x + 5y + z = 8 \end{cases} & \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 6y + 11z = 35 \\ -3x + 5y + z = 8 \end{cases} & \begin{matrix} (a') = (b) \\ (b') = (a) \\ (c') = (c) \end{matrix} \end{aligned}$$

Lös som i 1.2

Svar: $(x, y, z) = (-5, -2, 3)$

1.6 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 7z = 3 \\ -3x + 5y - z = 2 \end{cases} & \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ z = 1 \\ -y + 8z = 5 \end{cases} & \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -y + 8z = 5 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (c') \\ (c'') = (b') \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = 1 \\ y = -(5 - 8 * 1) = 3 \\ x = 1 + 2 * 3 - 3 * 1 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: $(x, y, z) = (4, 3, 1)$

1.7 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a) \\ -12w - 3x + 4y + 7z = 2 & (b) \\ -2w + 2x - 4y - 3z = -12 & (c) \\ -31w + 5x - y - 3z = -20 & (d) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a') = (a) \\ -6w + y + z = -1 & (b') = (b) + 3(a) \\ -6w - 2y + z = -10 & (c') = (c) - 2(a) \\ -41w + 4y + 7z = -15 & (d') = (d) - 5(a) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a'') = (a') \\ -6w + y + z = -1 & (b'') = (b') \\ -18w + 3z = -12 & (c'') = (c') + 2(b') \\ -17w + 3z = -11 & (d'') = (d') - 4(b') \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a''') = (a'') \\ -6w + y + z = -1 & (b''') = (b'') \\ -18w + 3z = -12 & (c''') = (c'') \\ w = 1 & (d''') = (d'') - (c'') \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} w = 1 \\ z = \frac{-12+18*1}{3} = 2 \\ y = -1 - 2 + 6*1 = 3 \\ x = -1 + 3 + 2*2 - 2*1 = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Svar: $(x, y, z, w) = (4, 3, 2, 1)$

1.8 (s.)

Eftersom det endast är två variabler krävs endast två ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot resterande ekvationer för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x - 2y = 1 & (a) \\ 3x + 4y = 13 & (b) \\ -5x + 2y = -13 & (c) \\ 4x - 3y = 9 & (d) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 & (a') = (a) \\ 10y = 10 & (b') = (b) - 3(a) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 + 2*1 = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kolla (c) och (d):

$$-5 * 3 + 2 * 1 = -13$$

$$4 * 3 - 3 * 1 = 9$$

Svar: $(x, y) = (3, 1)$

1.9 (s.)

Eftersom det endast är två variabler krävs endast två ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot sista ekvationen för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = -4 & (a) \\ x - 2y = 2 & (b) \\ 3x + 4y = 1 & (c) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = -4 & (a') = (a) \\ -3y = 6 & (b') = (b) - (a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kolla (c):

$$3 * (-2) + 4 * (-2) = -14 \neq 1 \Rightarrow \text{ Saknar lösning}$$

Svar: Saknar lösning

1.10 (s.)

Eftersom det endast är tre variabler krävs endast tre ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot sista ekvationen för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (a) \\ 3x - y - 2z = 9 & (b) \\ 3x + 4y + 7z = -5 & (c) \\ 2x - 2y - z = 7 & (d) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (a') = (a) \\ -7y + z = 6 & (b') = (b) - 3(a) \\ -2y + 10z = -8 & (c') = (c) - 3(a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (a'') = (a') \\ -7y + z = 6 & (b'') = (b') \\ \frac{68}{7}z = -\frac{68}{7} & (c'') = (c') - \frac{2}{7}(a') \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = -1 \\ y = -\frac{6+1}{7} = -1 \\ x = 1 - 2 * (-1) + (-1) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kolla (d):

$$2 * 2 - 2 * (-1) - (-1) = 7$$

Svar: $(x, y, z) = (2, -1, -1)$

1.11 (s.)

Svar:

1.12 (s.)

Svar:

1.13 (s.)

Svar:

1.14 (s.)

Svar:

1.15 (s.)

Svar:

1.16 (s.)

Svar:

1.17 (s.)

Svar:

1.18 (s.)

Svar:

1.19 (s.)

Svar:

1.20 (s.)

Svar:

1.21 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

1.22 (s.)

Svar:

1.23 (s.)

Svar:

1.24 (s.)

Svar:

1.25 (s.)

Svar:

1.26 (s.)

Svar: