Linjär algebra
FMA420

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

2016–05–12

Kapitel 1: Linjära ekvationssystem

1.1 (s.)

Börja nerifrån och upp och lös en variabel i taget.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ - 3y + 5z = 1 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = \frac{1-5*2}{-3} = 3 \\ x = \frac{5+2-3*3}{2} = -1 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (-1, 3, 2)$

1.2 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 6y + 11z = 35 \\ -3x + 5y + z = 8 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ - 2y + 9z = 31 \\ - y + 4z = 14 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ - 2y + 9z = 31 \\ - \frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{31-9*3}{-2} = -2 \\ x = 2 + 2 * (-2) - 3 = -5 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (-5, -2, 3)$

1.3 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a) \\ 2x - 6y + 6z = 2 & (b) \\ -3x + 5y + z = 3 & (c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a') = (a) \\ - 2y + 4z = 0 & (b') = (b) - 2(a) \\ - y + 4z = 6 & (c') = (c) + 3(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a'') = (a') \\ - 2y + 4z = 0 & (b'') = (b') \\ 2z = 6 & (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{-4*3}{-2} = 6 \\ x = 1 + 2*6 - 3 = 10 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (10, 6, 3)$

1.4 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a) \\ 2x - 6y + 6z = 2 & (b) \\ -3x + 5y - z = 3 & (c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a') = (a) \\ - 2y + 4z = 0 & (b') = (b) - 2(a) \\ - y + 2z = 6 & (c') = (c) + 3(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a'') = (a') \\ - 2y + 4z = 0 & (b'') = (b') \\ 0z = 6 & (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{cases}$$

Saknar lösning eftersom $0 \neq 6$.

Svar: Lösning saknas

1.5 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} 2x - 6y + 11z = 35 & (a) \\ x - 2y + z = 2 & (b) \\ -3x + 5y + z = 8 & (c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 & (a') = (b) \\ 2x - 6y + 11z = 35 & (b') = (a) \\ -3x + 5y + z = 8 & (c') = (c) \end{cases}$$

Lös som i 1.2

Svar: $(x, y, z) = (-5, -2, 3)$

1.6 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & (a) \\ 2x - 4y + 7z = 3 & (b) \\ -3x + 5y - z = 2 & (c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & (a') = (a) \\ z = 1 & (b') = (b) - 2(a) \\ - y + 8z = 5 & (c') = (c) + 3(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & (a'') = (a') \\ - y + 8z = 5 & (b'') = (c') \\ z = 1 & (c'') = (b') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = -(5 - 8 * 1) = 3 \\ x = 1 + 2 * 3 - 3 * 1 = 4 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (4, 3, 1)$

1.7 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a) \\ -12w - 3x + 4y + 7z = 2 & (b) \\ -2w + 2x - 4y - 3z = -12 & (c) \\ -31w + 5x - y - 3z = -20 & (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a') = (a) \\ -6w + y + z = -1 & (b') = (b) + 3(a) \\ -6w - 2y + z = -10 & (c') = (c) - 2(a) \\ -41w + 4y + 7z = -15 & (d') = (d) - 5(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a'') = (a') \\ -6w + y + z = -1 & (b'') = (b') \\ -18w + 3z = -12 & (c'') = (c') + 2(b') \\ -17w + 3z = -11 & (d'') = (d') - 4(b') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 & (a''') = (a'') \\ -6w + y + z = -1 & (b''') = (b'') \\ -18w + 3z = -12 & (c''') = (c'') \\ w = 1 & (d''') = (d'') - (c'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w = 1 \\ z = \frac{-12+18*1}{3} = 2 \\ y = -1 - 2 + 6*1 = 3 \\ x = -1 + 3 + 2*2 - 2*1 = 4 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z, w) = (4, 3, 2, 1)$

1.8 (s.)

Eftersom det endast är två variabler krävs endast två ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot resterande ekvationer för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & (a) \\ 3x + 4y = 13 & (b) \\ -5x + 2y = -13 & (c) \\ 4x - 3y = 9 & (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 & (a') = (a) \\ 10y = 10 & (b') = (b) - 3(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 + 2*1 = 3 \end{cases}$$

Kolla (c) och (d):

$$-5*3 + 2*1 = -13$$

$$4 * 3 - 3 * 1 = 9$$

Svar: $(x, y) = (3, 1)$

1.9 (s.)

Eftersom det endast är två variabler krävs endast två ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot sista ekvationen för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{cases} x + \ \ y = -4 & (a) \\ x - 2y = 2 & (b) \\ 3x + 4y = 1 & (c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \ \ y = -4 & (a') = (a) \\ \quad - 3y = 6 & (b') = (b) - (a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Kolla (c):

$$3 * (-2) + 4 * (-2) = -14 \neq 1 \Rightarrow \text{ Saknar lösning}$$

Svar: Saknar lösning

1.10 (s.)

Eftersom det endast är tre variabler krävs endast tre ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot sista ekvationen för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 9 \\ 3x + 4y + 7z = -5 \\ 2x - 2y - z = 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -7y + z = 6 \\ -2y + 10z = -8 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 3(a) \\ (c') = (c) - 3(a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -7y + z = 6 \\ \frac{68}{7}z = -\frac{68}{7} \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{2}{7}(b') \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = -\frac{6+1}{7} = -1 \\ x = 1 - 2 * (-1) + (-1) = 2 \end{cases}$$

Kolla (d):

$$2 * 2 - 2 * (-1) - (-1) = 7$$

Svar: $(x, y, z) = (2, -1, -1)$

1.11 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 6y + 6z = 4 \\ -3x + 5y - z = -2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ - 2y + 4z = 2 \\ - y + 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ - 2y + 4z = 2 \\ 0z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{matrix}$$

Alla z löser (c'') så låt t vara ett godtyckligt tal och $z = t$.
(b'') ger:

$$y = \frac{2 - 4t}{-2} = 2t - 1$$

(a'') ger:

$$x = 1 + 2(2t - 1) - t = 3t - 1$$

Svar: $(x, y, z) = (3t - 1, 2t - 1, t)$

1.12 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - 4z = -2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -7 \\ 6y - 10z = -14 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) - 3(a) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -7 \\ 0z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - 2(b') \end{matrix}$$

Alla z löser (c'') så låt t vara ett godtyckligt tal och $z = 5 - 3t$.
(b'') ger:

$$y = \frac{-7 + 5(5 - 3t)}{3} = 6 - 5t$$

(a'') ger:

$$x = 4 + (6 - 5t) - 2(5 - 3t) = t$$

Svar: $(x, y, z) = (t, 6 - 5t, 5 - 3t)$

1.13 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ - 3y + 3z = 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - (a) \end{matrix}$$

Låt t vara ett godtyckligt tal och $z = t$.
(b') ger:

$$y = \frac{3 - 3t}{-3} = t - 1$$

(a') ger:

$$x = 3 - 2(t - 1) + t = 5 - t$$

Svar: $(x, y, z) = (5 - t, t - 1, t)$

1.14 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ - 9y - 6z = -9 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \end{matrix}$$

Låt t vara ett godtyckligt tal och $z = 3t$.
(b') ger:

$$y = \frac{-9 + 6 * 3t}{-9} = 1 - 2t$$

(a') ger:

$$x = \frac{5 - 3(1 - 2t) - 4 * 3t}{2} = 1 - 3t$$

Svar: $(x, y, z) = (1 - 3t, 1 - 2t, 3t)$

1.15 (s.)

Eftersom systemet redan är trappformat kan inte gausselimination användas för att förenkla det mer.

$$\begin{cases} 4w + x + 2y + 3z = 1 \\ -w + y - 3z = 5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix}$$

Låt t och s vara godtyckliga tal, $z = s$ och $w = t$.
(b) ger:

$$y = 5 + 3s + t$$

(a') ger:

$$x = 1 - 4t - 3s - 2(5 + 3s + t) = -9 - 9s - 6t$$

Svar: $(x, y, z) = (-9 - 9s - 6t, 5 + 3s + t, s, t)$

1.16 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 & (a) \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 & (b) \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 - 4x_5 = 0 & (c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 - \ \ 3x_5 = 0 & (a') = (a) \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 + \frac{13}{2}x_5 = 0 & (b') = (b) - \frac{3}{2}(a) \\ 5x_2 \qquad + 7x_4 - 10x_5 = 0 & (c') = (c) + 2(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ 3x_4 - \ \ 3x_5 = 0 & (a'') = (a') \\ \frac{1}{2}x_2 + \ \frac{5}{2}x_3 - \ \frac{5}{2}x_4 + \frac{13}{2}x_5 = 0 & (b'') = (b') \\ - 25x_3 + 32x_4 - 75x_5 = 0 & (c'') = (c') - 10(a) \end{cases}$$

Låt t_1 och t_2 vara godtyckliga tal, $x_4 = 25t_1$ och $x_5 = t_2$.
(c'') ger:

$$x_3 = \frac{-32 * 25t_1 + 75t_2}{-25} = 32t_1 - 3t_2$$

(b'') ger:

$$x_2 = 2(-\tfrac{5}{2}(32t_1 - 3t_2) + \frac{5}{2} * 25t_1 - \frac{13}{2}t_2) = 2t_2 - 35t_1$$

(a'') ger:

$$x_1 = \frac{1}{2}(-(2t_2 - 35t_1) + (32t_1 - 3t_2) - 3 * 25t_1 + 3 * t_2) = -4t_1 - t_2$$

Svar: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-4t_1 - t_2, 2t_2 - 35t_1, 32t_1 - 3t_2, 25t_1, t_2)$

1.17 (s.)

Då koefficienterna på diagonalen a^2, a och $a^2 - 1$ framför x, y och z alla är skilda från noll kan ekvationssystemet lösas entydigt. a måste alltså vara skilt från 0 och ± 1.

Ekvationssystemet är redan trappformat vilket innebär att gausselimination inte behöver användas.

$$\begin{cases} a^2x + 2y + \qquad 3z = \ \ -1 & (a) \\ ay + \ (a-1)z = a + 1 & (b) \\ (a^2 - 1)z = a + 1 & (c) \end{cases}$$

(c) ger:

$$z = \frac{a+1}{a^2 - 1} = \frac{1}{a-1}$$

(b) ger:

$$y = \frac{a + 1 - (a-1)\frac{1}{a-1}}{a} = \frac{a + 1 - 1}{a} = 1$$

(a) ger:

$$x = \frac{-1 - 2 * 1 - 3(\frac{1}{a-1})}{a^2} = \frac{-3(\frac{a-1+1}{a-1})}{a^2} = \frac{-3}{a(a-1)} = \frac{3}{a(1-a)}$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{a-1},1,\frac{3}{a(1-a)}\right),\quad a\neq 0, a\neq \pm 1$$

Om $a=1$ blir systemet:

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ \quad\; y+ \quad = \;\; 2 \\ \qquad\; 0z = \;\; 2 \end{cases}$$

Saknar lösning eftersom $0\neq 2$. Om $a=-1$ blir systemet:

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1 & (a') \\ -\;y-2z=\;\;0 & (b') \\ \qquad 0z=\;\;0 & (c') \end{cases}$$

Har oändligt många lösningar eftersom $0=0$. Låt t vara ett godtyckligt tal och $z=t$.
(b') ger:

$$y=-2t$$

(a') ger:

$$x=-1-2*(-2t)-3t=t-1$$

$$(x,y,z)=(t-1,-2t,t),\quad a=-1$$

Om $a=0$ blir systemet:

$$\begin{cases} 0x+2y+3z=-1 & (a'') \\ \qquad -\;z=\;\;1 & (b'') \\ \qquad -\;z=\;\;1 & (c'') \end{cases}$$

Har oändligt många lösningar eftersom värdet på x inte påverkar.
Låt t vara ett godtyckligt tal och $x=t$.
(b'') och (c'') ger:

$$z=-1$$

(a'') ger:

$$y=\frac{-1-3*(-1)}{2}=1$$

$$(x,y,z)=(t,1,-1),\quad a=0$$

Svar: Saknar lösning för $a=1$

$$\begin{aligned} (x,y,z)&=\left(\tfrac{1}{a-1},1,\tfrac{3}{a(1-a)}\right), && a\neq 0, a\neq\pm 1 \\ (x,y,z)&=(t-1,-2t,t), && a=-1 \\ (x,y,z)&=(t,1,-1), && a=0 \end{aligned}$$

1.18 (s.)

$$\begin{cases} ax+\ y+2z=4 & (a)\\ x+\ y+\ z=1 & (b)\\ x+ay+2z=0 & (c)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+\ y+\ 2z=\ 4 & (a')=(a)\\ (a-1)y+\ (a-2)z=a-4 & (b')=a(b)-(a)\\ (a^2-1)y+2(a-1)z=\ -4 & (c')=a(c)-(a)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+\ y+\ 2z=\ 4 & (a'')=(a')\\ (a-1)y+\ (a-2)z=\ a-4 & (b'')=(b')\\ (3a-a^2)z=3a-a^2 & (c'')=(c')-(a+1)(b')\end{cases}$$

(c'') ger:

$$z=\frac{3a-a^2}{3a-a^2}=1,\quad a\notin\{0,3\}$$

(b'') ger:

$$y=\frac{a-4-(a-2)}{a-1}=\frac{2}{1-a},\quad a\notin\{0,1,3\}$$

(a'') ger:

$$x=\frac{4-2-\frac{2}{1-a}}{a}=\frac{2}{a-1},\quad a\notin\{0,1,3\}$$

Systemet är entydigt när $a\notin\{0,1,3\}$.

$a=0$ ger systemet:

$$\begin{cases} x+y+\ z=1 & (a)\\ y+2z=4 & (b)\\ x+\ \ 2z=0 & (c)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\ z=\ 1 & (a')=(a)\\ y+2z=\ 4 & (b')=(b)\\ -y+\ z=-1 & (c')=(c)-(a)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\ z=1 & (a'')=(a')\\ y+2z=4 & (b'')=(b')\\ 3z=3 & (c'')=(c')+(a)\end{cases}$$

(c'') ger:

$$z=1$$

(b'') ger:

$$y=4-2*1=2$$

(a'') ger:

$$x=1-2-1=-2$$

Systemet är entydigt när $a=0$.

$a = 1$ ger systemet:

$$\begin{cases} x+y+2z = 4 & (a) \\ x+y+\ \ z = 1 & (b) \\ x+y+2z = 0 & (c) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z = \ \ 4 & (a') = (a) \\ \quad\ \ - z = \ \ 1 & (b') = (b) - (a) \\ \qquad 0z = -4 & (c') = (c) - (a) \end{cases}$$

Systemet saknar lösning när $a = 1$.

$a = 3$ ger systemet:

$$\begin{cases} 3x+\ \ y+2z = 4 & (a) \\ x+\ \ y+\ \ z = 1 & (b) \\ x+3y+2z = 0 & (c) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\ \ y+2z = \ \ 4 & (a') = (a) \\ \quad 2y+\ \ z = -1 & (b') = 3(b) - (a) \\ \quad 8y+4z = -4 & (c') = 3(c) - (a) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\ \ y+2z = \ \ 4 & (a'') = (a') \\ \quad 2y+\ \ z = -1 & (b'') = (b') \\ \qquad\quad 0z = \ \ 0 & (c'') = (c') - 4(b') \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$

Låt t vara ett godtyckligt tal och $z = -1 - 2t$. (b'') ger:

$$y = \frac{-1 - (-1 - 2t)}{2} = t$$

(a'') ger:

$$x = \frac{4 - t - 2(-1 - 2t)}{3} = \frac{6 - 3t}{3} = 3 - t$$

Systemet har oändligt många lösningar när $a = 3$.

Svar: $a = 3$, $(x, y, z) = (3 - t, t, -1 - t)$

1.19 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x+ay = \ \ 1 & (a) \\ x-\ \ y = -1 & (b) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+ \qquad ay = \ \ 1 & (a') = (a) \\ \quad -(a+1)y = -2 & (b') = (b) - (a) \end{cases}$$

(b') ger:

$$y = \frac{2}{a+1}, \quad a \neq -1$$

(a') ger:

$$x = 1 - a\frac{2}{a+1} = \frac{a + 1 - 2a}{a+1} = \frac{1 - a}{a+1}, \quad a \neq -1$$

$a = -1$ ger systemet:

$$\begin{cases} x - y = 1 & (a) \\ x - y = -1 & (b) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 & (a') = (a) \\ 0y = -2 & (b') = (b) - (a) \end{cases}$$

När $a = -1$ saknar ekvationssystemet lösning eftersom $0 \neq -2$.

Svar: $(x, y) = (\frac{1-a}{a+1}, \frac{2}{a+1}), \quad a \neq -1$, Saknar lösning när $a = -1$

1.20 (s.)

Kirchhoffs första lag ger att (notera att I_1, I_2, I_5 får negativa tecken för att pilarna är vända åt fel håll):

$$\begin{cases} I_3 = -I_1 - I_5 \\ I_4 = -I_2 - I_5 \end{cases}$$

Kirchhoffs andra lag ger (sätt sedan in de givna värdena):

$$\begin{cases} U_3 + U_4 + R_5 I_5 - R_4 I_4 - R_3 I_3 = 0 \\ U_3 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \\ U_4 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2 + 4I_5 - I_4 - I_3 = 0 \\ 3 + I_1 - I_3 = 0 \\ 2 + I_2 - I_4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -I_3 - I_4 + 4I_5 = -5 \\ I_1 - I_3 = -3 \\ I_2 - I_4 = -2 \end{cases}$$

Lägg nu ihop ekvationerna från första och andra lagen genom att substituera I_3 och I_4 mot $-I_1 - I_5$ respektive $-I_2 - I_5$.

$$\begin{cases} -(-I_1 - I_5) - (-I_2 - I_5) + 4I_5 = -5 \\ I_1 - (-I_1 - I_5) = -3 \\ I_2 - (-I_2 - I_5) = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 + 6I_5 = -5 & (a) \\ 2I_1 + I_5 = -3 & (b) \\ 2I_2 + I_5 = -2 & (c) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10I_5 = -5 & (a') = 2(a) - (b) - (c) \\ 2I_1 + I_5 = -3 & (b') = (b) \\ 2I_2 + I_5 = -2 & (c') = (c) \end{cases}$$

(a') ger:

$$I_5 = -\frac{1}{2}$$

(b') ger:

$$I_1 = -\frac{3 - \frac{1}{2}}{2} = -\frac{5}{4}$$

(c') ger:

$$I_2 = -\frac{2-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

Återgå sedan till ekvationerna för Kirchhoffs första lag för att bestämma I_3 och I_4.

$$I_3 = -(-\tfrac{5}{4}) - (-\tfrac{1}{2}) = \frac{7}{4}$$

$$I_4 = -(-\frac{3}{4}) - (-\tfrac{1}{2}) = \frac{5}{4}$$

Svar: $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = (-1.25A, -0.75A, 1.75A, 1.25A, -0.5A)$

1.21 a) (s.)

Se det som att det måste finnas lika många av varje atomtyp och laddning på var sida och skapa ett ekvationssystem utifrån det.

$$\begin{cases} 2x_1 = y_1 & (Cr) \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 & (O) \\ x_2 = y_2 & (N) \\ x_3 = y_3 & (C) \\ -x_2 - 2x_3 = -2y_1 - y_2 & (e) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = y_1 & (Cr') = (Cr) \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (O') = (O) - 4(Cr) - 2(N) - 2(C) \\ x_2 = y_2 & (N') = (N) \\ x_3 = y_3 & (C') = (C) \\ 4x_1 - 2x_3 = 0 & (e') = (e) + (N) + 2(Cr) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

Eftersom systemet är underbestämt kommer en variabel behövas användas för att lösa systemet. Låt därför t vara ett godtyckligt tal och $x_1 = t$.

(Cr') ger:

$$y_1 = 2t$$

(e') ger:

$$x_3 = \frac{4t}{2} = 2t$$

(C') ger:

$$y_3 = 2t$$

(O') ger:

$$x_2 = 5t - 2t = 3t$$

(N') ger:

$$y_2 = 3t$$

Lösningen är inte entydig.

Svar: $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (t, 3t, 2t, 2t, 3t, 2t)$

b) (s.)

Se det som att det måste finnas lika många av varje atomtyp och laddning på var sida och skapa ett ekvationssystem utifrån det.

$$\begin{cases} 6x_1 = 12y_1 & (C) \\ 5x_1 + x_3 + 2x_4 = 10y_1 + 3y_2 & (H) \\ x_1 = 2y_1 & (N) \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3y_2 & (O) \\ x_2 = y_2 & (Zn) \\ -x_3 = -3y_2 & (e) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 & (C') = \frac{1}{6}(C) \\ -2x_1 + x_4 = 0 & (H') = (H) - 5(N) - (O) \\ x_1 = 2y_1 & (N') = (N) \\ 2x_1 + x_4 = 2y_2 & (O') = (O) + (e) \\ x_2 = y_2 & (Zn') = (Zn) \\ -x_3 = -y_2 & (e') = (e) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

Eftersom är (C') och (N') är identiska är systemet underbestämt och en variabel kommer behövas användas för att lösa systemet. Låt därför t vara ett godtyckligt tal och $x_1 = 2t$.

(C') och (N') ger:

$$y_1 = t$$

(H') ger:

$$x_4 = 2 * 2t = 4t$$

(O') ger:

$$y_2 = \frac{2 * 2t + 4t}{2} = 4t$$

(Zn') ger:

$$x_2 = 4t$$

(e') ger:

$$x_3 = 4t$$

Svar: Allmän lösning $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) = (2t, 4t, 4t, 4t, t, 4t)$

1.22 (s.)

Svar:

1.23 (s.)

Svar:

1.24 (s.)

Svar:

1.25 (s.)

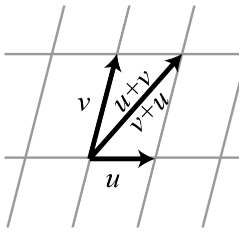
Svar:

1.26 (s.)

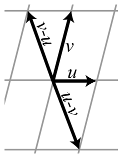
Svar:

Kapitel 2: Vektorer i planet och rummet

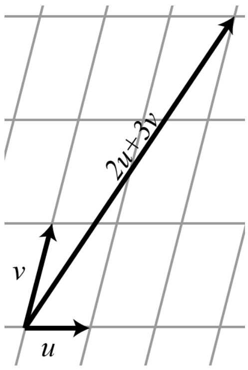
2.1 a) (s.)



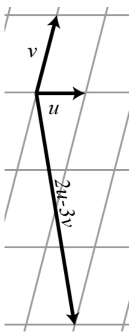
b) (s.)



c) (s.)



d) (s.)



2.2 (s.)

Svar: Nollvektor

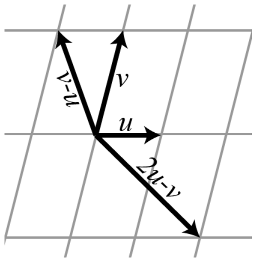
2.3 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} \hat{u} + \hat{v} = u & (a) \\ 2\hat{u} + 3\hat{v} = u & (b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{u} + \hat{v} = u & (a') = (a) \\ \hat{v} = v - u & (b') = (b) - 2(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{v} = v - u \\ \hat{u} = u - (v - u) = 2u - v \end{cases}$$



Svar: $\hat{v} = v - u$, $\hat{u} = 2u - v$

2.4 (s.)

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \quad \text{V.S.V}$$

2.5 (s.)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \quad \text{V.S.V}$$

2.6 (s. 26-27)

Enligt uppgiften:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$$

Vilket ger:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$$

Mittpunktsformeln:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Vilket ger:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} * \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Enligt figuren:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

Vilket ger:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \quad \text{V.S.V}$$

2.7 (s.)

Enligt uppgiften:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$$

Vilket ger:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$$

Tyngdpunktsformeln:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Vilket ger:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} * \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Enligt figuren:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$$

Vilket ger:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \quad \text{V.S.V}$$

2.8 (s.)

Låt O ligga i punkten M. tyngdpunktsformeln ger:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Eftersom $O = M$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = 0 \\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{MC} \end{cases}$$

Vilket ger:

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 * 0 = 0 \quad \text{V.S.V}$$

2.9 (s.)

Låt O vara en godtycklig punkt i rummet. Vilket ger:

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} \\ \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1} \\ \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1} \end{cases}$$

Tyngdpunktsformeln baklänges samt hur differens för vektorer fun-kar ger:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1} =$$
$$= 3 * \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}) - 3 * \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) =$$
$$= 3(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) = 3\overrightarrow{M_1M_2} \quad \text{V.S.V}$$

2.10 (s.)

Mittpunktsformeln ger:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA_m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{OB_m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ \overrightarrow{OC_m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \end{cases}$$

Vilket ger:

$$VL = \overrightarrow{OA_m} + \overrightarrow{OB_m} + \overrightarrow{OC_m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) =$$
$$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = HL \quad \text{V.S.V}$$

2.11 (s.)

Svar:

2.12 (s.)

Svar:

2.13 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

e) (s.)

Svar:

f) (s.)

Svar:

g) (s.)

Svar:

2.14 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

2.15 (s.)

Svar:

2.16 (s.)

Svar:

2.17 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

2.18 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

2.19 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

e) (s.)

Svar:

2.20 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

e) (s.)

Svar:

f) (s.)

Svar:

g) (s.)

Svar:

2.21 (s.)

Svar:

2.22 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

d) (s.)

Svar:

e) (s.)

Svar:

2.23 (s.)

Svar:

2.24 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

c) (s.)

Svar:

2.25 (s.)

Svar:

2.26 (s.)

Svar:

2.27 (s.)

Svar:

2.28 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

2.29 (s.)

Svar:

2.30 (s.)

Svar: