

Linjär algebra

FMA420

Emil Wihlander
dat15ewi@student.lu.se

2016-05-12

Kapitel 1: Linjära ekvationssystem

1.1 (s.)

Börja nerifrån och upp och lös en variabel i taget.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -3y + 5z = 1 \\ 4z = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = \frac{1-5*2}{-3} = 3 \\ x = \frac{5+2-3*3}{2} = -1 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (-1, 3, 2)$

1.2 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 & (a) \\ 2x - 6y + 11z = 35 & (b) \\ -3x + 5y + z = 8 & (c) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 & (a') = (a) \\ -2y + 9z = 31 & (b') = (b) - 2(a) \\ -y + 4z = 14 & (c') = (c) + 3(a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 & (a'') = (a') \\ -2y + 9z = 31 & (b'') = (b') \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} & (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{31-9*3}{-2} = -2 \\ x = 2 + 2*(-2) - 3 = -5 \end{cases}$$

Svar: $(x, y, z) = (-5, -2, 3)$

1.3 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 6y + 6z = 2 \\ -3x + 5y + z = 3 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ -y + 4z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ 2z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{-4 \cdot 3}{-2} = 6 \\ x = 1 + 2 \cdot 6 - 3 = 10 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Svar: $(x, y, z) = (10, 6, 3)$

1.4 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 6y + 6z = 2 \\ -3x + 5y - z = 3 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ -y + 2z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ 0z = 6 \end{cases} \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Saknar lösning eftersom $0 \neq 6$.

Svar: Lösning saknas

1.5 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 6y + 11z = 35 \\ x - 2y + z = 2 \\ -3x + 5y + z = 8 \end{cases} & \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 6y + 11z = 35 \\ -3x + 5y + z = 8 \end{cases} & \begin{matrix} (a') = (b) \\ (b') = (a) \\ (c') = (c) \end{matrix} \end{aligned}$$

Lös som i 1.2

Svar: $(x, y, z) = (-5, -2, 3)$

1.6 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 7z = 3 \\ -3x + 5y - z = 2 \end{cases} & \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ z = 1 \\ -y + 8z = 5 \end{cases} & \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 2(a) \\ (c') = (c) + 3(a) \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -y + 8z = 5 \\ z = 1 \end{cases} & \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (c') \\ (c'') = (b') \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = 1 \\ y = -(5 - 8 * 1) = 3 \\ x = 1 + 2 * 3 - 3 * 1 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: $(x, y, z) = (4, 3, 1)$

1.7 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 \\ -12w - 3x + 4y + 7z = 2 \\ -2w + 2x - 4y - 3z = -12 \\ -31w + 5x - y - 3z = -20 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 \\ -6w + y + z = -1 \\ -6w - 2y + z = -10 \\ -41w + 4y + 7z = -15 \end{cases} \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) + 3(a) \\ (c') = (c) - 2(a) \\ (d') = (d) - 5(a) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 \\ -6w + y + z = -1 \\ -18w + 3z = -12 \\ -17w + 3z = -11 \end{cases} \begin{matrix} (a'') = (a') \\ (b'') = (b') \\ (c'') = (c') + 2(b') \\ (d'') = (d') - 4(b') \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2w + x - y - 2z = -1 \\ -6w + y + z = -1 \\ -18w + 3z = -12 \\ w = 1 \end{cases} \begin{matrix} (a''') = (a'') \\ (b''') = (b'') \\ (c''') = (c'') \\ (d''') = (d'') - (c'') \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} w = 1 \\ z = \frac{-12+18*1}{3} = 2 \\ y = -1 - 2 + 6*1 = 3 \\ x = -1 + 3 + 2*2 - 2*1 = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Svar: $(x, y, z, w) = (4, 3, 2, 1)$

1.8 (s.)

Eftersom det endast är två variabler krävs endast två ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot resterande ekvationer för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \\ -5x + 2y = -13 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 10y = 10 \end{cases} \begin{matrix} (a') = (a) \\ (b') = (b) - 3(a) \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 + 2*1 = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kolla (c) och (d):

$$-5 * 3 + 2 * 1 = -13$$

$$4 * 3 - 3 * 1 = 9$$

Svar: $(x, y) = (3, 1)$

1.9 (s.)

Eftersom det endast är två variabler krävs endast två ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot sista ekvationen för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = -4 & (a) \\ x - 2y = 2 & (b) \\ 3x + 4y = 1 & (c) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = -4 & (a') = (a) \\ -3y = 6 & (b') = (b) - (a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kolla (c):

$$3 * (-2) + 4 * (-2) = -14 \neq 1 \Rightarrow \text{ Saknar lösning}$$

Svar: Saknar lösning

1.10 (s.)

Eftersom det endast är tre variabler krävs endast tre ekvationer för att lösa systemet. Testa sedan mot sista ekvationen för att se om systemet har en lösning.

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (a) \\ 3x - y - 2z = 9 & (b) \\ 3x + 4y + 7z = -5 & (c) \\ 2x - 2y - z = 7 & (d) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (a') = (a) \\ -7y + z = 6 & (b') = (b) - 3(a) \\ -2y + 10z = -8 & (c') = (c) - 3(a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (a'') = (a') \\ -7y + z = 6 & (b'') = (b') \\ \frac{68}{7}z = -\frac{68}{7} & (c'') = (c') - \frac{2}{7}(b') \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = -1 \\ y = -\frac{6+1}{7} = -1 \\ x = 1 - 2 * (-1) + (-1) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kolla (d):

$$2 * 2 - 2 * (-1) - (-1) = 7$$

Svar: $(x, y, z) = (2, -1, -1)$

1.11 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a) \\ 2x - 6y + 6z = 4 & (b) \\ -3x + 5y - z = -2 & (c) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a') = (a) \\ -2y + 4z = 2 & (b') = (b) - 2(a) \\ -y + 2z = 1 & (c') = (c) + 3(a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (a'') = (a') \\ -2y + 4z = 2 & (b'') = (b') \\ 0z = 0 & (c'') = (c') - \frac{1}{2}(b') \end{cases} \end{aligned}$$

Alla z löser (c'') så låt t vara ett godtyckligt tal och $z = t$.
 (b'') ger:

$$y = \frac{2 - 4t}{-2} = 2t - 1$$

(a'') ger:

$$x = 1 + 2(2t - 1) - t = 3t - 1$$

Svar: $(x, y, z) = (3t - 1, 2t - 1, t)$

1.12 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y + 2z = 4 & (a) \\ 2x + y - z = 1 & (b) \\ 3x + 3y - 4z = -2 & (c) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + 2z = 4 & (a') = (a) \\ 3y - 5z = -7 & (b') = (b) - 2(a) \\ 6y - 10z = -14 & (c') = (c) - 3(a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + 2z = 4 & (a'') = (a') \\ 3y - 5z = -7 & (b'') = (b') \\ 0z = 0 & (c'') = (c') - 2(b') \end{cases} \end{aligned}$$

Alla z löser (c'') så låt t vara ett godtyckligt tal och $z = 5 - 3t$.
 (b'') ger:

$$y = \frac{-7 + 5(5 - 3t)}{3} = 6 - 5t$$

(a'') ger:

$$x = 4 + (6 - 5t) - 2(5 - 3t) = t$$

Svar: $(x, y, z) = (t, 6 - 5t, 5 - 3t)$

1.13 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + 2y - z = 3 & (a) \\ x - y + 2z = 6 & (b) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + 2y - z = 3 & (a') = (a) \\ -3y + 3z = 3 & (b') = (b) - (a) \end{cases} \end{aligned}$$

Låt t vara ett godtyckligt tal och $z = t$.

(b') ger:

$$y = \frac{3 - 3t}{-3} = t - 1$$

(a') ger:

$$x = 3 - 2(t - 1) + t = 5 - t$$

Svar: $(x, y, z) = (5 - t, t - 1, t)$

1.14 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 & (a) \\ 4x - 3y + 2z = 1 & (b) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 & (a') = (a) \\ -9y - 6z = -9 & (b') = (b) - 2(a) \end{cases} \end{aligned}$$

Låt t vara ett godtyckligt tal och $z = 3t$.

(b') ger:

$$y = \frac{-9 + 6 * 3t}{-9} = 1 - 2t$$

(a') ger:

$$x = \frac{5 - 3(1 - 2t) - 4 * 3t}{2} = 1 - 3t$$

Svar: $(x, y, z) = (1 - 3t, 1 - 2t, 3t)$

1.15 (s.)

Eftersom systemet redan är trappformat kan inte gausselimination användas för att förenkla det mer.

$$\begin{cases} 4w + x + 2y + 3z = 1 & (a) \\ -w + y - 3z = 5 & (b) \end{cases}$$

Låt t och s vara godtyckliga tal, $z = s$ och $w = t$.

(b) ger:

$$y = 5 + 3s + t$$

(a') ger:

$$x = 1 - 4t - 3s - 2(5 + 3s + t) = -9 - 9s - 6t$$

Svar: $(x, y, z) = (-9 - 9s - 6t, 5 + 3s + t, s, t)$

1.16 (s.)

Gausselimination:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 & (a) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 & (b) \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 & (c) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 & (a') = (a) \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 + \frac{13}{2}x_5 = 0 & (b') = (b) - \frac{3}{2}(a) \\ 5x_2 + 7x_4 - 10x_5 = 0 & (c') = (c) + 2(a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 & (a'') = (a') \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 + \frac{13}{2}x_5 = 0 & (b'') = (b') \\ -25x_3 + 32x_4 - 75x_5 = 0 & (c'') = (c') - 10(a) \end{cases} \end{aligned}$$

Låt t_1 och t_2 vara godtyckliga tal, $x_4 = 25t_1$ och $x_5 = t_2$.

(c'') ger:

$$x_3 = \frac{-32 * 25t_1 + 75t_2}{-25} = 32t_1 - 3t_2$$

(b'') ger:

$$x_2 = 2(-\frac{5}{2}(32t_1 - 3t_2) + \frac{5}{2} * 25t_1 - \frac{13}{2}t_2) = 2t_2 - 35t_1$$

(a'') ger:

$$x_1 = \frac{1}{2}(-(2t_2 - 35t_1) + (32t_1 - 3t_2) - 3 * 25t_1 + 3 * t_2) = -4t_1 - t_2$$

Svar: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-4t_1 - t_2, 2t_2 - 35t_1, 32t_1 - 3t_2, 25t_1, t_2)$

1.17 (s.)

Svar:

1.18 (s.)

Svar:

1.19 (s.)

Svar:

1.20 (s.)

Svar:

1.21 a) (s.)

Svar:

b) (s.)

Svar:

1.22 (s.)

Svar:

1.23 (s.)

Svar:

1.24 (s.)

Svar:

1.25 (s.)

Svar:

1.26 (s.)

Svar: