

# Spring-mass-damper-system을 이용한 구조물의 안정화 시스템

21011890 노지민

## 1. 서론

### 연구의 목적 및 필요성

재료 기술이 발달함에 따라, 무게가 가벼우면서 강도는 센 신소재가 많이 증가하고 있다. 그에 따라 구조물의 구조물 설치 편의성은 비교적 용이 해졌지만, 구 소재 보다는 진동에 훨씬 민감한 영향을 받는다. 이러한 배경 속에서 신소재를 활용한 구조물의 안정화는 중요한 쟁점으로 떠오르고 있다. 본 연구에서는 구조체의 안정 상태를 유지하기 위한 직렬형 spring-damper 시스템을 이용해 잔류 진동을 상쇄하기 위한 시스템을 제안할 것이다. 본 연구의 목적은 구조체의 진동에 대한 안정을 최대한 빨리 효율적으로 끌어낼 수 있는 spring-mass-damper system 활용법 고안이다.

### Damper의 필요성

진동 제어 방식에는 구조물 강성 개선, 부가질량 부착, 지간의 축소 등 많은 방법이 존재하지만, 비용적 측면이 크기 때문에 보다 효율적인 수동적 제어를 위해 직접적으로 damper를 유도해 구조물의 진동 감쇠를 증진시키는 방식으로 진동제어를 기획했다. 또, 구조물에 damper가 없다면 구조물의 변형은 공진에 의해 무한하게 증가시켜 초과 변형에 의한 피해를 야기하므로 damper를 적용해 이를 방지하고자 한다.

## 2. 본론

### 행렬과 역행렬

행렬이란 1개 이상의 수나 식을 직사각형의 모양으로 괄호 안에 배열한 것을 말한다. 행렬에 들어가는 수 혹은 함수는 성분 혹은 원소라 한다. 행렬은 여러가지 형태가 존재하는데, 그 중 행과 열의 개수가 같은 행렬을 정방행렬이라고 한다. 또 한 개의 행이나 열로 구성된 행렬을 벡터라고 부른다. 모든 선형 변환은 행렬로 표현할 수 있으며, 반대로 행렬로 나타낸 것은 선형 변환으로 표현할 수 있어 선형연립방정식을 푸는 데 행렬이 많이 사용된다. 이런 특성을 바탕으로 행렬은 자료를 모으고 처리하는 많은 응용에 있어 매우 유용한 도구이다.

역행렬은 사각행렬  $A$ 의 곱셈에 대한 역원  $A^{-1}$ 을 말한다. 즉 아래의 식을 만족하는  $A^{-1}$ 을 말한다.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

이때 행렬  $A$ 가 역행렬  $A^{-1}$  를 가지면 이때  $A$ 를 정칙행렬이라 정의한다. 또한 정칙행렬의 역행렬은 유일하다는 유일성을 지닌다.  $n \times n$  행렬에서의  $A = [a_{jk}]$  역행렬 공식은 아래와 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [C_{jk}]^T = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

하지만 행렬의 역행렬이 항상 존재하는 것은 아니다. 행렬의 역행렬을 가질 필요충분조건은  $A$ 가 최대 가능한 계수인  $n$ 을 갖는 것(Rank)으로 증명한다. 이 증명에 의해  $A^{-1}$  이 존재할 때,  $Ax = b$  라는 선형연립방정식의 해는  $x = A^{-1}b$  임을 알 수 있다. 이로써 역행렬을 정의하게 된 동기를 볼 수 있다. 우선 Rank란 행렬  $A$ 에서 1차 독립인 행벡터의 최대수이며 이를  $A$ 의 계수라고 한다. Rank  $A$ 라고도 한다.  $A$ 가  $n \times n$  행렬일 때, 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건은  $\text{rank} = n$ 이다. 또  $\det A \neq 0$  이어야 한다. 그러므로  $\text{rank} = n$  일 때  $A$ 는 정칙행렬,  $\text{rank} A < n$  이면 특이 행렬이라고 정리할 수 있다.

## 역행렬과 eigenvalue, eigenvector의 관계

행렬의 고유 값 문제는 1)  $Ax = \lambda x$  와 같은 벡터 방정식을 생각했을 때, 이 식을 만족하는 모든 벡터  $x \neq 0$ 과 상수 값  $\lambda$ 를 찾는 문제를 말한다. 이 때  $Ax$ 는  $\lambda x$ 와 같은 방향을 갖는 관계를 가진다. 이 때  $A$ 는 주어진 정방행렬이고,  $x$ 는 미지의 벡터  $\lambda$ 는 미지의 스칼라이다. 고유값 문제를 통해 가능한 모든  $\lambda$ 와  $x$ 를 찾는 것이 목표이다. Eigenvalue란 식 1)이 0이 아닌 해  $x$ 를 갖게 하는  $\lambda$ 값을 의미하고, 이에 대한 1)의 해  $x \neq 0$  를  $\lambda$ 에 대응하는  $A$ 의 eigenvector 라고 한다.

이때 1)의 식을 정리해 행렬로 표기하면 2)의 식을 얻을 수 있다.

$$1) \quad Ax = \lambda x$$

$$2) \quad (A - \lambda I)x = 0 \quad (\lambda: \text{실수})$$

이 식이 제차 선형연립방정식이므로, 자명하지 않은 해  $x \neq 0$  를 가지기 위한 필요충분조건은 3)  $\det(A - \lambda I) = 0$ 이 되어야 한다. 그러므로  $\det(A - \lambda I)$ 는  $x = 0$  조건에 위배되므로 0이 될 수 없고, 따라서  $(A - \lambda I)$ 의 역행렬이 존재할 수 없다. 즉, eigenvalue와 eigenvector를 가지면,  $(A - \lambda I)$ 의 역행렬은 존재하지 않는다.

## Spring-mass-damper system 모델링

spring mass damper 시스템이란 질량추가 달려있는 스프링에서 damping force를 가하는 물체의 시스템을 의미한다.

Damper가 없는 시스템을 살펴보면 먼저 1) 후의 법칙에 적용해 아래의 공식을 세울 수 있다.

$$F_1 = -ky \quad (k: \text{용수철 상수}, y: \text{변화 거리})$$

2) 뉴턴의 두번째 법칙에 따르면, 아래의 식처럼 나타낼 수 있다.

$$F = ma = my'' \quad (\ddot{a} = d^2y/dt^2)$$

따라서 1)과 2)를 정리하면 아래의 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$F = -ky = my''$$

이번엔 Damper가 존재하는 시스템을 살펴보겠다. Damper force는 방해하는 힘의 방향으로 적용되며 힘의 크기는 물체의 운동 속도에 비례한다는 것을 알 수 있다. 이것을 공식으로 나타내면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$F_2 = -cv = -cy' \quad (\dot{v} = dy/dt) \quad (c: \text{damping constant})$$

이제 damped mass-spring system에 작용하는 모든 힘을 더해보면,

$$F = my'' = F_1 + F_2 = -ky - cy'$$

$$\therefore my'' + cy' + ky = 0$$

공식을 얻을 수 있다.

Spring-mass-damper system 모델링 예제 ( $M=1$ ,  $k=2$ ,  $c=3$  일 때)

위의 문제에 따라  $M=1$ ,  $k=2$ ,  $c=3$ 을 대입해 아래의 2차 상미분 방정식으로 모델링 식을 얻을 수 있다.

$$1) y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -2y_1 - 3y_2$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 \Rightarrow \text{eigenvalue}$$

$$Ax = \lambda x$$

$$i) \lambda = \lambda_1 = -2$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -2x_1$$

$$-2x_1 - 3x_2 = -2x_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ eigenvector}$$

$$ii) \lambda = \lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -x_1$$

$$-2x_1 - 3x_2 = -x_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eigenvector.}$$

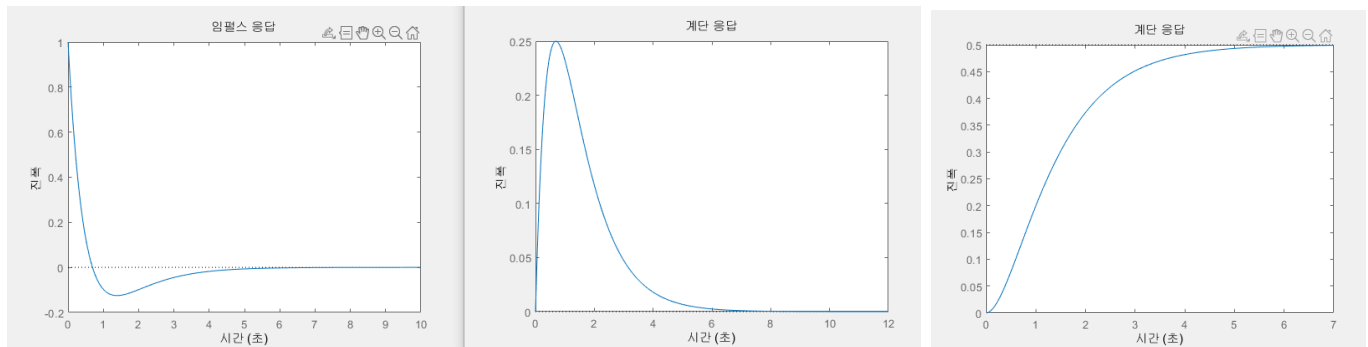
general solution)

$$y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$y = y_1 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$$

$$y' = y_2 = -2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t}$$

MATLAB을 활용한 모델링으로 산출된 impulse 값과 step 값



K와 c의 변화에 따른 시스템 변화 (k: 용수철 상수, c: damping constant)

위의 모델링 공식에 따라  $my''+cy'+ky=0$  공식을 유도할 수 있고, 이 식을 아래처럼 전개해 eigenvalue 구할 수 있다.

$$my'' + cy' + ky = 0.$$
$$y_1' = y_2 \quad y = y_1$$
$$y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$$
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

characteristic equation

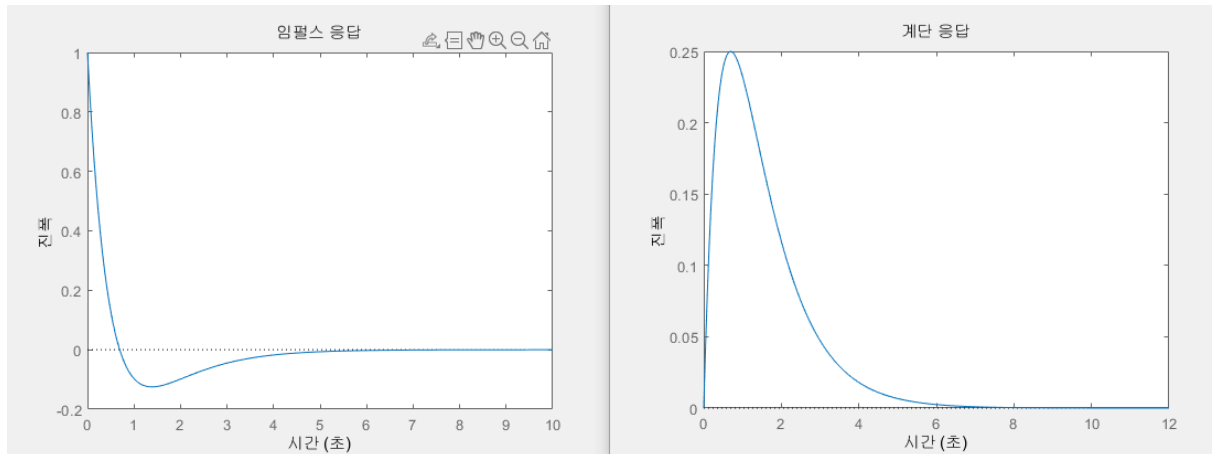
$$\lambda_1 = -\alpha + \beta \quad \alpha = \frac{c}{2m}$$
$$\lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \beta = \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk}$$

eigenvalue

$$\left( \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ \lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \end{array} \right)$$

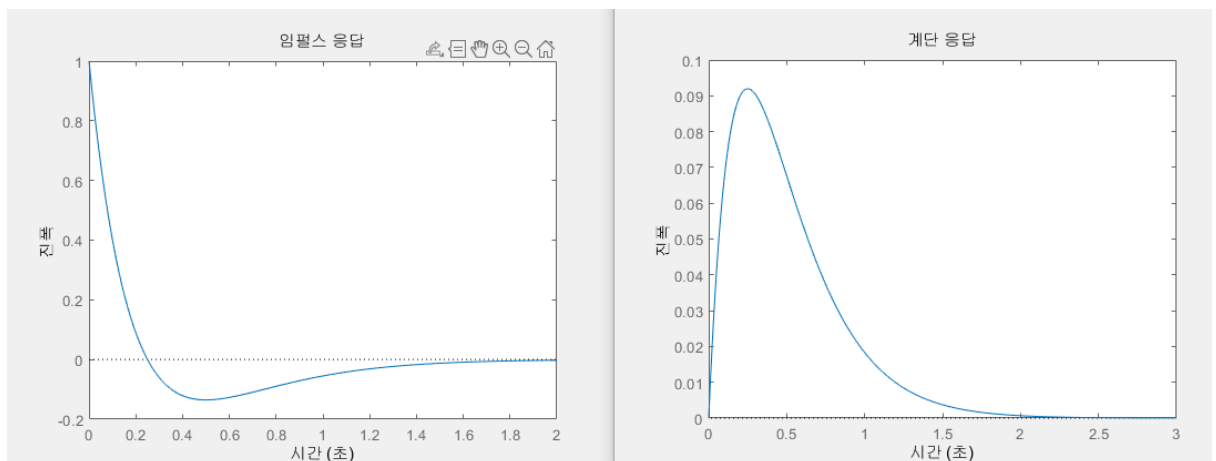
유도된 eigenvalue 를 살펴보면  $c$  와  $k$  의 변화에 따라  $c^2 - 4mk$  의 값이 변화하고, 그에 따라 eigenvalue가 하나를 가질 수도, 두 개의 실수를 가질 수도, 두 개의 허근을 가질 수 있다. 그리고  $c^2 - 4mk$  의 값에 따라 과감쇠, 임계감쇠, 저감쇠의 형태를 띄는 것을 확인할 수 있다. 좀 더 명확하게 차이를 살펴보고자  $M=1$  로 설정하고 MATLAB 을 사용하여 세 가지 상황을 야기하는 임의의  $c, k$  값을 대입하여 시스템을 구현하고 그래프를 그려 비교해 보았다.

1) 두 개의 실근을 가지는 ( $c^2 > 4mk$  경우)



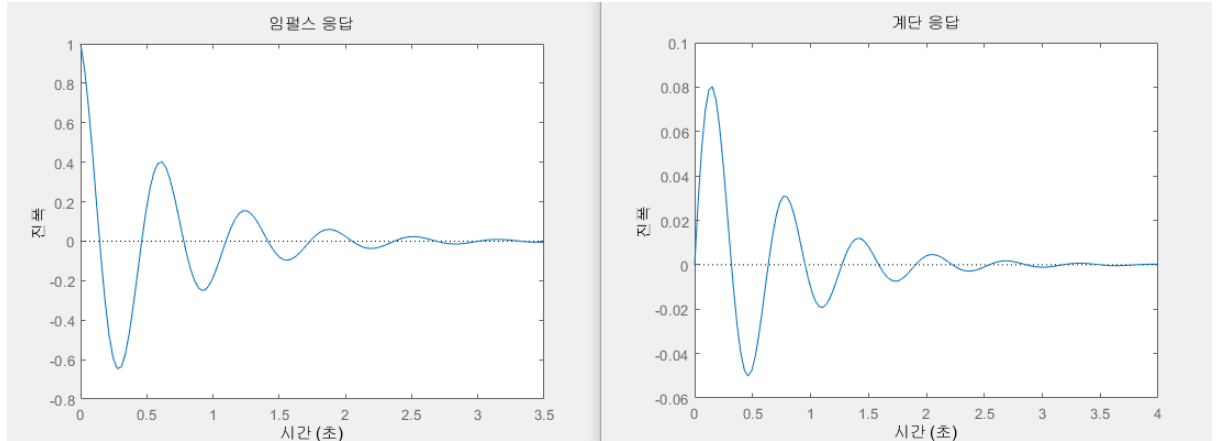
이 경우 general solution 에서의 exponential 의 지수가  $-(\alpha-\beta)t$  와  $-(\alpha+\beta)t$  모두 음수이므로 진폭  $y(t)$ 는 0 으로 수렴하는 형태인 시스템이 진동하지 않는 Overdamping system 발생한다.

2) 중근을 가지는 ( $c^2 = 4mk$  경우)



이 경우에는 시스템이 진동하지 않고 가장 빨리 평형 상태에 도달하는 critical damping system 이 발생한다.

3) 두 개의 허근을 가지는 ( $c^2 < 4mk$  경우)



이 경우에는 underdamped system 이 발생되는데 앞의 두 가지 케이스와 달리 유일하게 진동이 발생하는 경우이다 진동이 지속되며 시간이 지남에 따라 점점 잦아드는 양상을 띄는 것을 볼 수 있다.

### 3. 결론

#### 구조물의 안정화 시스템 구상 (본론을 전개하며 얻은 내용을 바탕으로 구상)

구조물의 구조와 진동경로는 아래의 그림으로 살펴볼 수 있다.

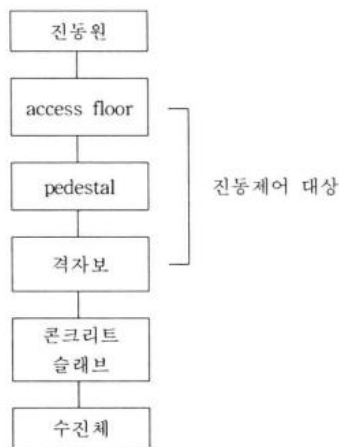


그림 1 진동전달경로 및 진동제어대상

이때 진동 제어 대상은 access floor, pedestal, 격자보로 규정할 수 있고, 구조물의 효과적인 안정화를 위해선 pedestal 과 격자보를 spring-mass-system 으로 연결해 적용하는 방식으로 시스템을 구상할 수 있다. 위의 spring-mass-damper system 의 모델링 과정을 통해  $k$  와  $c$  에 따른 시스템의 변화를 살펴볼 수 있었고 각 특징을 파악할 수 있었다. 그리고 진동을 제어하기 위한 가장 빠르고 효율적인 방법은  $c^2 = 4mk$  경우, 즉 임계감쇠가 발생하는 시스템이 되도록 하는 것이다. 임계감쇠 시스템에서는 비교적 과감쇠, 저감쇠 시스템보다 더욱 빨리 평형점으로

시스템이 수렴하게끔 할 수 있기 때문이다. 그러므로  $c$  에따라 스프링 상수  $k$  를 조작하는 방법으로 구조물 안정화 시스템을 개발할 수 있다.

## 정리 및 얻은 점

Spring-mass-damper-system에 대해 공부하며, 이 시스템을 활용해 구조물의 안정화 시스템을 구축할 수 있지 않을까 하는 호기심을 바탕으로 여러 논문을 참고하여 learning journal을 작성해 보았다. 공업수학 시간에 배웠던 개념을 바탕으로 matlab의 모델링 결과를 보고 공식을 직접 유도해보는 과정을 통해 spring-mass-damper-system과 좀 더 친해진 느낌이었다. 이번 journal을 작성하면서 과감쇠 임계감쇠 저감쇠의 현상이 어떤 원리를 통해 발생하는 지, 또 행렬이란 것은 무엇인지, 역행렬과 eigenvalue/eigenvector는 어떻게 구할 수 있는 지 얻을 수 있어서 너무 뜻깊은 시간이 되었다. 사후 과제로는 직접 구조물 안정화 시스템에 대한 실험을 직접적으로 해보고 싶은 마음이 들었다. 그리고 웨어러블 기기나 인공지능 로봇에 사용하는 구조물에 대해서도 이러한 spring-mass-damper-system이 적용될 수 있는지에 대해서도 더 알아보고 싶은 마음이 들었다. 또 행렬의 적용이 필수인 인공지능의 데이터 가공 법, 학습 법에 대해서도 공부해보고 싶다.

## 참고문헌

P.Edwards (2001) "Mass-Spring-Damper Systems: The Theory" Bournemouth University

변근주 김문겸 신승교(1997) "스프링-댐퍼 시스템에 의한 구조물의 진동제어" 대한토목학회 학술발표회 논문집, 1, 269-272

곽동기 배재성 황재혁 (2011) 김헌수 "An Experimental Study on the Vibration Absorber for Vibration Attenuation of Cantilever Beam Structure" 한국소음진동공학회논문집 제 21권 제 11호

Parasuram Harihara, Dara W. Childs "Solving Problems in Dynamics and Vibrations Using MATLAB" Dept of Mechanical Engineering Texas A & M University College Station.

강찬영 (2001) "LMS 프로그램 적용을 위한 인체의 mass-spring 모델에 관한 연구." 국내석사학위논문 弘益大學校 大學院, 2001. 서울