

Student Information

Full Name : Muhammet Emin Cihangeri
Id Number : 2448215

Q. 1

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow p)$	\equiv	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg\neg q \vee p)$	conditional equivalence
	\equiv	$(\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)) \wedge ((q \vee p) \rightarrow \neg(p \wedge q))$	double negation law, biconditional equivalence
	\equiv	$(\neg\neg(p \wedge q) \vee (q \vee p)) \wedge (\neg(q \vee p) \vee \neg(p \wedge q))$	conditional equivalence
	\equiv	$((p \wedge q) \vee (q \vee p)) \wedge ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee \neg q))$	double negation law, De Morgan's Law
	\equiv	$((p \wedge q) \vee q) \vee p \wedge ((\neg q \wedge \neg p) \vee \neg p) \vee \neg q$	associative law
	\equiv	$(q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	absorption law
	\equiv	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	commutative law

Q.2

- a) $\forall a \forall b \forall x \forall y (I(a, x) \wedge I(b, y) \wedge (a \neq b) \wedge (x = y) \wedge \forall k \forall l (E(a, k) \wedge E(b, l) \rightarrow (k \neq l))$
b) $\exists x \forall y (I(x, y) \wedge \forall z (S(x, z) \rightarrow (x = z)))$

Q.3

a)

$$p \vee \neg q, p \vee r \vdash (r \rightarrow q) \rightarrow p.$$

1. $p \vee \neg q$	premise
2. $p \vee r$	premise
3. $r \rightarrow q$	assumption
4. $\neg q$	assumption
5. r	assumption
6. q	$\rightarrow e$ 3, 5
7. \perp	$\neg e$ 4, 6
8. p	$\perp e$ 7
9. p	assumption
10. p	copy 9
11. p	$\vee e$ 2, 5–8, 9–10
12. p	assumption
13. p	copy
14. p	$\vee e$ 1, 4–11, 12–13
15. $(r \rightarrow p) \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 3–14

b)

$$\vdash ((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q.$$

1.	$(q \rightarrow p) \rightarrow q$	assumption
2.	$q \vee \neg q$	LEM
3.	q	assumption
4.	q	copy
5.	$\neg q$	assumption
6.	q	assumption
7.	\perp	$\neg e$ 5, 6
8.	p	$\perp e$ 7
9.	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 6–8
10.	q	$\rightarrow e$ 1,9
11.	q	$\vee e$ 2, 3–4, 5–10
12.	$((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 1–11

Q.4

a)

$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

1. $\neg\forall(P(x) \rightarrow Q(x))$	premise
2. $\neg\exists x\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$	assumption
3. a	
4. $\neg(P(a) \rightarrow Q(a))$	assumption
5. $\exists\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$	$\exists xi$ 4
6. \perp	$\neg e$ 2,5
7. $P(a) \rightarrow Q(a)$	$\neg i$ 4-6
8. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	$\forall xi$ 3,7
9. \perp	$\neg e$ 1, 8
10. $\neg\neg\exists x\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$	$\neg i$ 2-9
11. $\exists x\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$	$\neg\neg e$ 10
12. $\neg(P(a) \rightarrow Q(a))$	assumption
13. $\neg(P(a) \wedge Q(a))$	assumption
14. $\neg(\neg P(a) \vee Q(a))$	assumption
15. $\neg P(a)$	assumption
16. $\neg P(a) \vee Q(a)$	$\vee i$ 15
17. \perp	$\neg e$ 14, 16
18. $\neg\neg P(a)$	$\neg i$ 15-17
19. $P(a)$	$\neg\neg e$ 18
20. $Q(a)$	assumption
21. $\neg P(a) \vee Q(a)$	$\vee i$ 20
22. \perp	$\neg e$ 14, 21
23. $\neg Q(a)$	$\neg i$ 20-22
24. $P(a) \wedge \neg Q(a)$	$\wedge i$ 19,23
25. \perp	$\neg e$ 14, 24
26. $\neg\neg(\neg P(a) \vee Q(a))$	$\neg i$ 14, 25
27. $\neg P(a) \vee Q(a)$	$\neg\neg e$ 26
28. $P(a)$	assumption
29. $\neg P(a)$	assumption
30. \perp	$\neg e$ 28, 29
31. $Q(a)$	$\perp e$ 30
32. $Q(a)$	assumption
33. $Q(a)$	copy 32
34. $Q(a)$	$\vee e$ 27, 29-31, 32-33
35. $P(a) \rightarrow Q(a)$	$\rightarrow i$ 28-34
36. \perp	$\neg e$ 12, 35
37. $\neg\neg(P(a) \wedge \neg Q(a))$	$\neg i$ 13-36
38. $P(a) \wedge \neg Q(a)$	$\neg\neg e$ 37
39. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$	$\exists xi$ 38
40. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$	$\exists xe$ 11, 12-39