



國立中山大學機械與機電工程學系

碩士論文

Department of Mechanical & Electro-Mechanical Engineering

National Sun Yat-sen University

Master Thesis

具史都華平台之同軸兩輪車的設計與分析

Design and Analysis of Coaxial Two-Wheeled Vehicle

with A Stewart Platform

研究生：張格瑋

Ko-Wei Chang

指導教授：何應勤 博士

Dr. Innchyn Her

中華民國 一百零一 年 十一 月

November 2012

國立中山大學研究生學位論文審定書

本校機械與機電工程學系碩士班

研究生張格瑋（學號：M993020022）所提論文

具史都華平台之同軸兩輪車的設計與分析  
Design and Analysis of Coaxial Two-Wheeled Vehicle with A Stewart  
Platform

於中華民國 101 年 11 月 22 日經本委員會審查並舉行口試，符  
合碩士學位論文標準。

學位考試委員簽章：

召集人 蔡穎堅 蔡穎堅 委員 何應勤 何應勤

委員 邱源成 邱源成 委員 \_\_\_\_\_

委員 \_\_\_\_\_ 委員 \_\_\_\_\_

指導教授(何應勤) 何應勤 (簽名)

## 摘要

本文提出史都華平台的一個應用設計，就是將該平台當作一個用來調整重心的機構。此機構被附著在同軸兩輪車的底盤上，所以可移動重心相對於底盤前後平移以調控車子的速度。此外，該機構若移動重心相對於底盤左右平移，則可調整車輪和地面之間的接觸力。

為了驗證此種應用設計的可行性，本文採用動力模擬的方式來檢驗車子在縱切面和冠狀切面上的動態特性。因此，先以 Lagrange 力學推導系統的運動方程式。然後，為了在模擬過程中使車子保持平衡並以指定的車速和方向行駛，所以使用比例-積分-微分控制器來計算應施加於車輪的扭矩。同時也提出一個策略來計算重心沿車子左右方向的平移量，以使車輪和地面之間不會失去接觸力。在採用上述方法進行力動力模擬後，證實了前述應用設計的確可行，而且也求得了一些設計重心調整機構時應滿足的設計需求。

最後，根據前述設計需求來決定史都華平台的主要尺寸，再使用逆向運動分析法來確認它的工作空間。由於分析所得的工作空間包含了平台在此一應用中所需的活動空間，故史都華平台確實可滿足本文所提出的應用。

關鍵字：同軸兩輪車、史都華平台、重心調整機構、動力模擬、工作空間

## Abstract

This study proposes an application design for Stewart platform. The Stewart platform is selected to function as a mass center adjusting mechanism. The mechanism is attached to the chassis of a coaxial two-wheeled self-balancing car so that the mass center of the car can be shifted backward and forward to change the car speed. Besides, the mechanism can be applied to adjust the contacting forces between wheels and the ground if the mass center is shifted to the left and right of the car.

In order to verify the feasibility of the design, the dynamic behavior of the car and the designing requirements for the Stewart platform are examined by using dynamic simulations on both sagittal plane and coronal plane. Therefore, the equation of motion of the car is derived from Lagrange mechanics. The driving torques to the wheels for balancing control, velocity control, and direction control are all determined by PID controllers. An algorithm for determining the displacement, that the mass center should be shifted to prevent losing contact force between wheels and the ground, is also introduced. The results of dynamic simulation show that the proposed application is feasible. Designing requirements for synthesizing the dimensions of the adjusting mechanism are also determined from the simulations.

Finally, the dimensions of the desired Stewart platform are determined according to the designing requirements. The workspace of the Stewart platform is then investigated by inversed kinematic analysis method. Since the workspace includes the necessary space for the proposed application, which means the specified dimensions of the Stewart platform is valid.

**Keywords :** Coaxial Two-Wheeled Vehicle, Stewart Platform, Mass Center Adjusting Mechanism, Dynamic Simulation, Workspace

# 目錄

摘要.....	i
Abstract.....	ii
目錄.....	iii
圖目錄.....	v
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.2.1 研究發展歷程.....	2
1.2.2 坐姿駕駛之兩輪車研究.....	4
1.3 研究動機與目的.....	7
1.4 論文架構.....	9
第二章 可調整重心位置之兩輪車的運動方程式.....	10
2.1 兩輪車在縱切面上的運動.....	11
2.1.1 兩輪車在 $x_2$ - $z_2$ 平面中的數學模型.....	11
2.1.2 系統之勢能和動能.....	13
2.1.3 非保守力所作的功.....	15
2.1.4 系統之運動方程式.....	16
2.2 兩輪車在冠狀切面上的運動.....	18
第三章 具重心調整機構之兩輪車的控制與動力模擬.....	22
3.1 兩輪車之控制.....	22
3.1.1 平衡控制方法.....	22
3.1.2 速度控制方法.....	23
3.1.3 方向控制.....	25
3.1.4 避免車輪離地的控制方法.....	26

3.2 行駛於直線道路之兩輪車的動力模擬 .....	28
3.2.1 模擬程序與步驟 .....	28
3.2.2 行駛於直線道路的模擬結果與討論 .....	30
3.3 行駛於彎道之兩輪車的動力模擬 .....	35
第四章 重心調整機構之分析與選用 .....	41
4.1 重心調整機構之選用 .....	42
4.2 史都華平台之逆向運動分析 .....	45
4.3 重心調整機構之工作空間 .....	47
第五章 結論與討論 .....	53
5.1 結論 .....	53
5.2 討論 .....	53
參考文獻 .....	55



## 圖目錄

圖1-1 Segway型兩輪自平衡電動車 .....	2
圖1-2 兩輪自平衡車-Winglet .....	4
圖1-3 可變式動力輪椅-iBot .....	5
圖1-4 兩輪自平衡車-P.U.M.A. ....	5
圖1-5 兩輪自平衡車-EN-V .....	6
圖1-6 自平衡腳踏車i-bike概念圖 .....	6
圖1-7 以站姿駕駛兩輪車的轉彎情形 .....	7
圖1-8 EN-V之車廂滑動機構 .....	8
圖2-1 具重心調整機構之兩輪車的結構簡圖和幾何參數 .....	10
圖2-2 轉彎時座椅以相對速度 $\dot{s}$ 沿 $y_2$ 軸平移將產生 $-x_2$ 軸之科氏加速度 .....	11
圖2-3 兩輪車在 $x_2-z_2$ 平面上的運動 .....	12
圖2-4 作用於系統之驅動力和接觸力 .....	15
圖2-5 兩輪車之線速度和角速度與兩輪之轉速的關係 .....	19
圖2-6 兩輪車行駛於彎道時所承受之作用力 .....	21
圖3-1 驅動車輪之扭矩與 $\theta$ 和 $\dot{\theta}$ 之間的關係 .....	23
圖3-2 使彎道內側之輪子不失去接觸力的條件 .....	26
圖3-3 兩輪車之動力模擬程序 .....	28
圖3-4 動力模擬之目標速度曲線 .....	29
圖3-5 兩輪車在加速、等速和減速時之姿態 .....	31
圖3-6 兩輪車之輪軸的速度曲線 .....	32
圖3-7 兩輪車底盤之傾斜角和角速度變化曲線 .....	32
圖3-8 施加於車輪的驅動扭矩 .....	33
圖3-9 座椅相對於底盤位移 $c$ 和推動座椅之力 $F_c$ .....	34
圖3-10 座椅相對於底盤的位移 $c(m)$ 和相對速度 $dc/dt(m/s)$ .....	34
圖3-11 車輪馬達之功率曲線 .....	35

圖3-12 作用於轉彎中之兩輪車的重力和慣性力 .....	36
圖3-13 兩輪車的目標速度與實際速度 .....	37
圖3-14 兩輪車的角速度 $\omega_z$ 和座椅的偏移量 $c(h=0.5986m, w=0.45m)$ .....	38
圖3-15 地面對轉彎中之兩輪車的接觸力( $h=0.5986m, w=0.45m$ ).....	38
圖3-16 兩輪車的角速度 $\omega_z$ 和座椅的偏移量 $c(h=0.65m, w=0.45m)$ .....	39
圖3-17 地面對轉彎中之兩輪車的接觸力( $h=0.65m, w=0.45m$ ).....	39
圖3-18 兩輪車的角速度 $\omega_z$ 和座椅的偏移量 $c(h=0.5986m, w=0.55m)$ .....	40
圖3-19 地面對轉彎中之兩輪車的接觸力( $h=0.5986m, w=0.55m$ ).....	40
圖4-1 重心調整機構可使用的裝置空間 .....	41
圖4-2 Delta機器手臂之結構.....	42
圖4-3 史都華平台之結構 .....	43
圖4-4 自由度為四之類史都華平台之結構 .....	43
圖4-5 重心調整機構處於初始位置時的構形 .....	44
圖4-6 六支伸縮桿之接頭在活動平台上的位置 .....	45
圖4-7 六支伸縮桿之接頭在底盤上的位置 .....	45
圖4-8 史都華平台的逆向運動分析 .....	46
圖4-9 機構在 $y_b=0$ 之平面上的工作區 .....	48
圖4-10 機構在 $x_b=0$ 之平面上的工作區 .....	48
圖4-11 機構在 $z_b=320$ 之平面上的工作區 .....	49
圖4-12 機構在 $z_b=296$ 之平面上的工作區 .....	49
圖4-13 機構在 $z_b=275$ 之平面上的工作區 .....	50
圖4-14 機構在 $z_b=273$ 之平面上的工作區 .....	50
圖4-15 機構在 $z_b=271$ 之平面上的工作區 .....	51
圖4-16 機構在 $z_b=255$ 之平面上的工作區 .....	51
圖4-17 機構在 $z_b=240$ 之平面上的工作區 .....	52



# 第一章 緒論

## 1.1 前言

同軸兩輪車(Coaxial Two-Wheeled Car)為自平衡機器人的一種，機體構造上包含車體(Body)、底盤(Chassis, Base)、車輪(Wheels)三個部分。車體與底盤依照不同需求可裝載扶手、車廂式座椅、機械手臂和各式電子設備，車輪則由兩個獨立驅動器分別控制左輪和右輪，以達到車身平衡、進退與轉彎的功能。此類型之結構被歸類為移動式倒單擺(Mobile Inverted Pendulum)或輪式倒單擺(Wheeled Inverted Pendulum)，它與其他輪式機械相比較之下具有體積小、零迴轉半徑、機件少和結構簡單等優勢。在應用方面，同軸兩輪車可作為人類的交通工具、運動器材、貨物搬運輔助或服務型機器人等等，擁有廣泛的應用潛力。

根據交通部調查[1]，近年公共運輸的全部旅次之中，除了大都會區民眾的使用率達到 30%，其他地區的使用率皆低於 10%，而且使用公共運輸的主因又以「通學」佔居最高(46%)。這些資料顯示多數民眾仍以個人運具的使用為主，所以對於比較靈活、便利的個人代步工具擁有龐大的需要性。又由於環保意識日漸抬頭以及石油價格日益高漲等因素的影響，對於具有低噪音和零排放(Zero Emission)特點之電動車的需求也有逐年上升的趨勢。

在2001年，美國Segway公司研發出適合都會區短程交通使用的兩輪自平衡載人系統，如圖1-1所示，命名為Segway HT (Human Transporter)[2]。由於該產品替短程交通開創出一個全新的方案，此載人系統曾被譽為跨時代的發明。又因為其結構簡單很適合作為學習和研發控制技術的平台，故自該兩輪車推出以來已有許多相關的學術研究與應用研究。

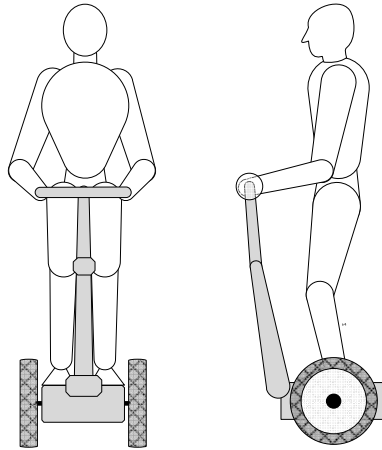


圖 1-1 Segway 型兩輪自平衡電動車

## 1.2 文獻回顧

以下將先介紹數篇關於自平衡車的重要發展，從早期的倒單擺系統研究，到目前業界正在銷售與展示的產品。同時也整理出坐式平衡車的類型，並在 1.2.2 小節加以介紹。

### 1.2.1 研究發展歷程

倒單擺系統的設計是為了量測重力加速度，也是可實現控制理論與控制方法的科學實驗儀器。1950 年代時，該系統之用途是以火箭與導彈的姿態控制為主，後來由直線倒單擺、平面倒單擺逐步發展到三維空間的輪式倒單擺等型式[3]。較早的文獻源自 1988 年，Yamafuji 與 Kawamura[4]實作出一台可平穩行進的兩輪倒單擺式機器人。其左右兩輪皆為同一馬達所驅動，只能提供一維的自由度，又因需要以纜線外接電腦控制，故該機器人無法自由移動。之後 Matsumoto[5]在 1991 年提出兩輪倒單擺的姿態預測控制，以適應性控制理論配合內置式的馬達編碼器和陀螺儀，使其可在有坡度之平面上平穩移動。

1994 年，Ha 和 Yuta[6]提出具有兩自由度的兩輪式倒單擺機器人-Yamabico

Kurara。他們藉由 Lagrange Motion Equation 求出系統的狀態方程式，再將那些由編碼器取得的車輪位置以及由陀螺儀測得的車身旋轉角速度代入該狀態方程式來達成平衡控制的目的。而實驗結果顯示，該方法可使車身依照指定的速度移動並且維持平衡。

Fierro 與 Lewis[7]在 1997 年以 Lyapunov Theory 為基礎提出了結合運動與扭矩的控制方法，該法解決了有關機器人導航的三個困難點：追尋參考軌跡、路徑跟蹤與維持期望的穩定姿態。該文獻採用類神經網路來設計自適應控制器，它的優點是神經元之間的參數權重的計算誤差極小，而且可適用於未建模的車輛。同年國內中央大學的研發團隊[8]採用模糊理論設計兩組控制器，分別對旋轉式倒單擺系統進行直立控制與定位控制，並使用內外迴路的方式將兩組控制器加以結合。隨後，該團隊陸續提出四代改良版兩輪車，分別採用 DSP 板和 Nios CPU 進行控制方法的研究。

在業界方面，2001 年美國的 Dean Kamen 與 DEKA 公司團隊推出同軸兩輪速克達(Segway Scooter)[9]。該車時速可達 20 公里，並使用了三個陀螺儀來掌控車身平衡，另外還加裝兩個陀螺儀作備用，而其龍頭(扶手)與底盤之間採用旋轉對相連接，它可讓駕駛者在進行過彎動作時能夠隨身體傾斜扶持。之後 TOYOTA 在 2008 年發表三種尺寸的站立式兩輪平衡車-Winglet[10]，最高時速為 6 公里，它擁有感應障礙物並避開的功能，實際產品如圖 1-2 所示。該結構與 Segway 型兩輪車之相異處在於，其龍頭與車體為固定連接，而且車輪採用平行四連桿與車體結合，駕駛者的置腳處為與車輪相連接的桿件而非車體本身。



圖 1-2 兩輪自平衡車-Winglet[11]

### 1.2.2 坐姿駕駛之兩輪車研究

兩輪自平衡載具的騎乘方式可區分成站姿與坐姿兩種，前者通常被設計成比較輕便或可攜帶的型式，也因此只用於比較短的路程；後者則因為比較節省體力故可供比較遠的路程使用，也可作為行動不便者的代步運具。不過，採用坐姿駕駛將比較不方便透過身體大幅度的前後擺動以驅使車子加速與減速，所以最好透過機構來移動重心。

Dean Kamen 和 Independence Technology 公司在 1999 年合作推出可變式動力輪椅-iBot[12]，該載具的左右輪設計成兩對可公轉的輪組，如圖 1-3 所示。在平地行駛等非特殊狀態下，它就如普通輪椅一般地使用四輪著地。若遇到需要拿取高物或與他人方便對談的情況時，則可以旋轉輪組來抬升車體，改由兩輪著地平衡。除此之外，藉由左右兩對輪組的旋轉，該輪椅還能夠跨越路障和攀爬樓梯。



圖 1-3 可變式動力輪椅-iBot[12]



圖 1-4 兩輪自平衡車-P.U.M.A.[13]

通用汽車公司和 Segway 公司在 2009 年合作推出 P.U.M.A.(Personal Urban Mobility & Accessibility)[13]，採用兼顧安全與擋風的車廂式設計，並藉由車廂相對底盤的前後滑動來控制平衡與行駛。該車設計可同時乘載兩人，重量約 140 公斤，最高時速可達 56 公里，單次充電的續航力約 56 公里。此外，車內還裝設通用汽車公司研發之車輛通知系統 V2V(Vehicle-to-Vehicle)，使車子具有自動化停車與駕駛的功能。

通用汽車在 P.U.M.A.發表後，次年又推出一系列概念車 EN-V (Electric Networked Vehicle)[14]，車體設計與前一款相似，使用包覆式車廂還有單一自由度的滑動平台，內部則加裝光學感應器、超音波感應器、和都卜勒雷達等裝置。此系列平衡車搭載車聯網技術(整合 GPS 導航技術、車對車交流技術、無線通訊及遠程感應技術)，聲稱 EN-V 能分析即時交通信息，對周遭障礙或行駛狀況的變化進行調整以達成自動駕駛功能。



圖 1-5 兩輪自平衡車-EN-V[14]

2011 年，謝[15]設計並研究可自動平衡的類獨輪腳踏車(名為 i-bike)，車體設計結構如圖 1-6 所示。駕駛方式與一般腳踏車相似，踏板控制同軸兩輪車的進退，龍頭決定左右轉向，而內置電源則供應控制系統處理車體平衡。車前另外有加設一輔助輪，目的是為了在低電力狀態下繼續騎乘，可將前輪降下轉為三輪車型式，增加該車的續航力。



圖 1-6 自平衡腳踏車 i-bike 概念圖[15]

### 1.3 研究動機與目的

以站立方式駕駛兩輪車時，除了足部以外的軀幹幾乎不受車體拘束。因此，在一定速度的狀態下過彎，人體可以朝彎道內側傾斜，抵抗可能造成車輛翻覆的離心力，如圖 1-7。若要採用坐姿以駕駛兩輪車，則車輛應具有可前後調整重心之功能，才能達到控制車速的目的。同時，若要使兩輪車在一定車速下可以平穩的轉彎，而不致因為離心力之作用而造成彎道內側之車輪離地的情況，則車體也應該具有左右移動的功能，以使轉彎時重心可往彎道之內側移動。此外，座椅若可上下移動，則可配合不同體型之騎士以調整座椅的高度。由以上討論可知，一個最理想的座椅調整機構或重心調整機構應有三個自由度，即可進行前後、左右和上下等三個相互垂直方向的調整。

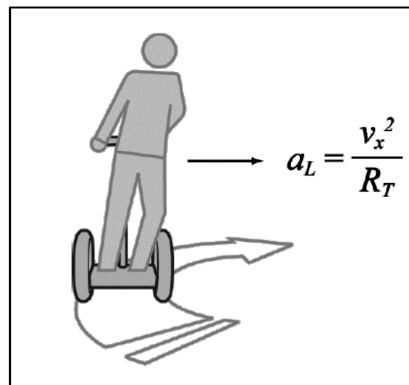


圖 1-7 以站姿駕駛兩輪車的轉彎情形[16]

經由文獻分析可知，目前之兩輪車大都採用立姿駕駛(例如 Segway 速克達)或採用固定座椅的型式駕駛，只有通用汽車與 Segway 公司所合作開發之 PUMA 和 EN-V 才具有可調整重心前後移動之功能(該機構如圖 1-8)。但由於該兩款車只能前後移動重心，而無法左右移動重心，所以駕駛該兩款車時必須以相當慢的速度轉彎才能避免離心力所造成之不適或避免翻覆的危險。

由以上的討論可知，現有之兩輪車在重心調整機構方面仍有不足之處，即不具有平衡離心力的功能。故本研究首先探討適用於兩輪車之重心調整機構的設計需求，再據以選擇最適用的機構，然後提出具重心調整機構之兩輪車的數學模型，並推導該兩輪車的運動方程式。隨後則採用動力模擬的方法，以驗證本文所提出之機構的可行性，而由動力模擬過程可求得機構中各致動器所需之功率，以供設計該型兩輪車之參考。

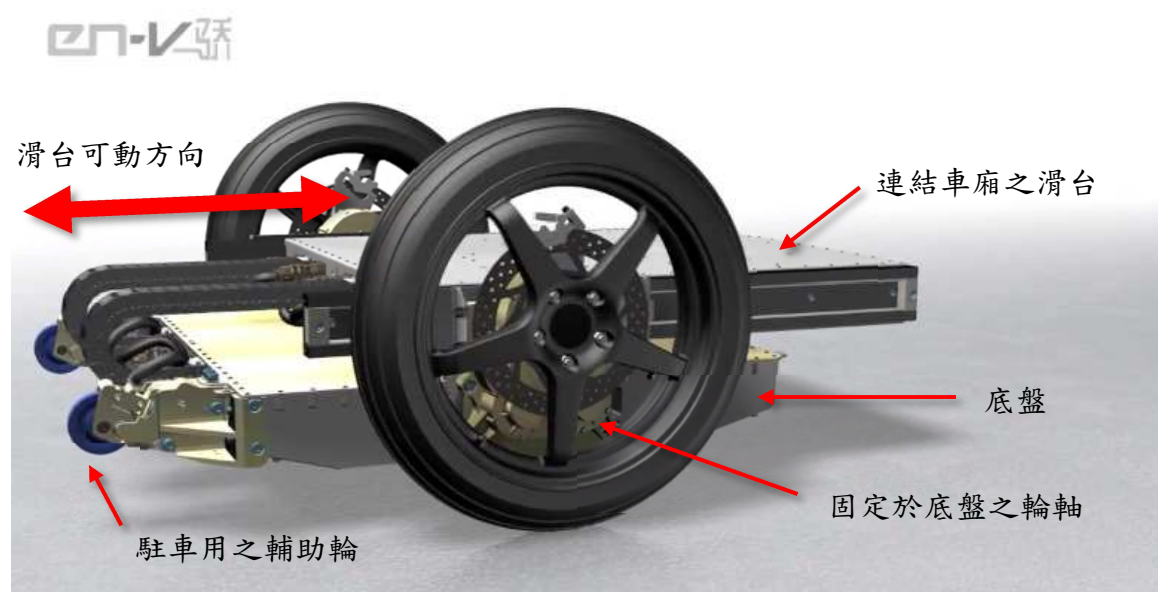


圖 1-8 EN-V 之車廂滑動機構[14]



## 1.4 論文架構

本研究共分為五章，各章內容摘要分述如下：

第一章：說明研究動機與目的，以及兩輪自平衡車的相關文獻回顧與探討。

第二章：各別分析兩輪車在縱切面和冠狀切面上的運動，並建立具重心調整機構之兩輪車的數學模型，接著應用 Lagrange 方程式推導求得動力分析所需之系統運動方程式。

第三章：提出平衡控制策略並應用第二章導出之運動方程式進行動力模擬，檢驗控制方法是否穩定，同時記錄座椅與致動器等資料，作為重心調整機構設計之參考。

第四章：經由動力模擬結果之特性挑選適用的重心調整機構，接著考慮限制條件設計機構尺寸，並以逆向運動學分析該設計之可行性。

第五章：對本研究作出結論，最後對未來發展方向提出建議。

## 第二章 可調整重心位置之兩輪車的運動方程式

圖2-1為具有重心調整機構之兩輪車的結構簡圖和相關的幾何參數，其中車輪為桿1，底盤為桿2，而騎士和座椅為桿3。桿1和桿2之間以迴轉對相連接，而桿2和桿3之間為一個具有三個自由度的空間機構，圖中以虛線表示該機構，也就是將它視為一支桿長可調整的桿件，它可用來推動桿3(座椅和騎士)相對桿2(底盤)進行上下、左右和前後等三個相互垂直方向的平移。由於上下方向之平移只用來調整座椅的高度以配合騎士的體型，而且此一調整動作應在行駛之前完成，即行駛中只須考慮左右和前後這兩個方向的平移運動。因此以下將分別探討兩輪車在縱切面(Sagittal Plane，將兩輪車分成左右兩半的平面)和冠狀切面(Coronal Plane，將兩輪車分成前後兩半的平面)上的運動。

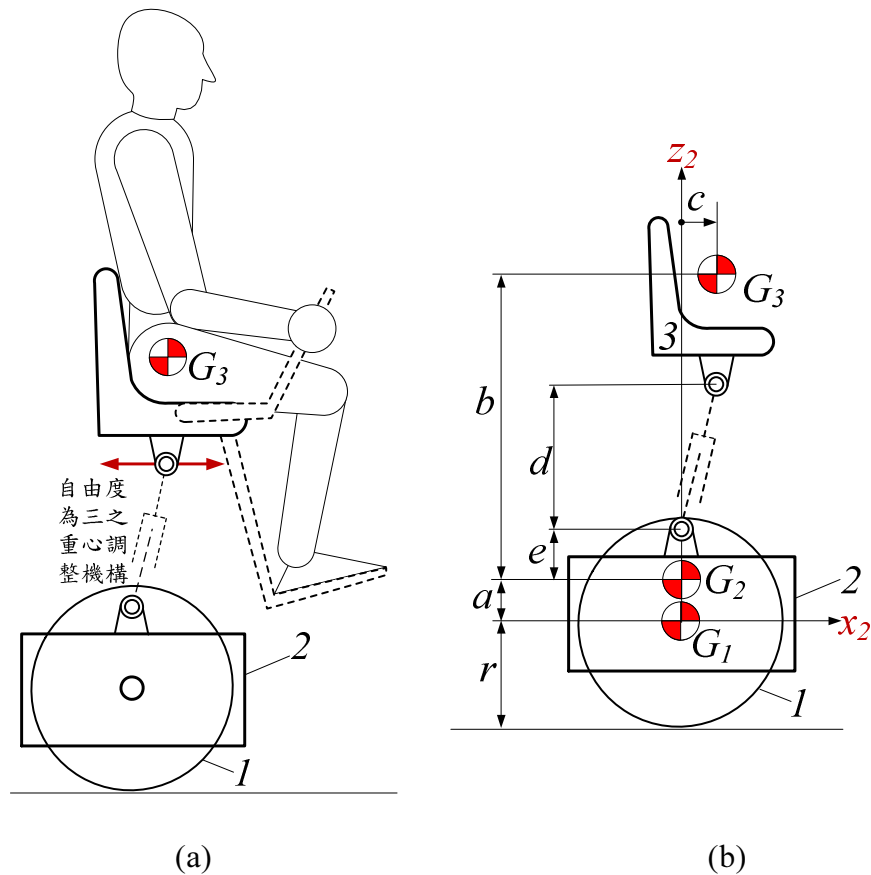


圖2-1 具重心調整機構之兩輪車的結構簡圖和幾何參數

## 2.1 兩輪車在縱切面上的運動

基本上，本文所探討之兩輪車的一般運動為空間運動，因為騎士在轉彎的過程中若透過重心調整機構推動座椅相對於旋轉中的底盤進行左右平移或前後平移，則將產生指向第三軸方向的科氏力，參見圖2-2。令座標系 $x_2$ - $y_2$ - $z_2$ 為固定附著於桿2(底盤)上的局部座標系(圖中未示出 $z_2$ 軸)，而 $x_2$ 軸指向兩輪車之前方。圖中顯示騎士在轉彎時若將身體往彎道內側以 $\dot{s}$ 的速度移動，則將出現指向其後方的科氏加速度 $a_{cor}$ ，也因此騎士將感受到指向前方的科氏力。不過，對於非特技表演之正常騎乘而言，轉彎時之角速度 $\omega_z$ 通常不大而且往彎道內側移動的速度 $\dot{s}$ 也很小，所以對應的科氏力遠小於其他作用力以致可略去不計，因此，本文將兩輪車在 $x_2$ - $z_2$ 平面(縱切面)中的運動視為平面運動進行分析。

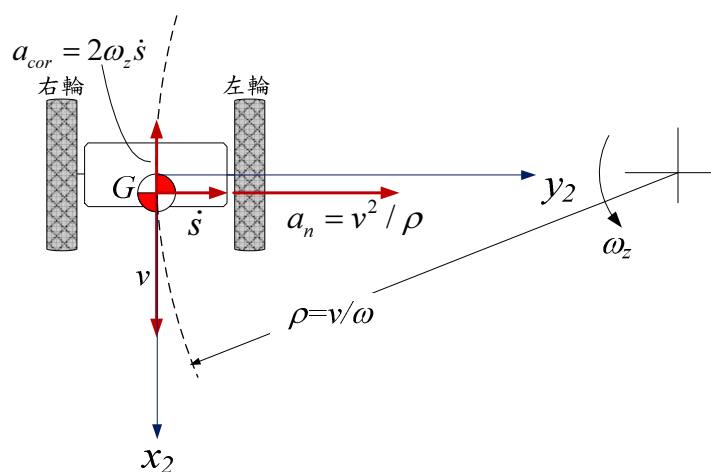


圖2-2 轉彎時座椅以相對速度 $\dot{s}$ 沿 $y_2$ 軸平移將產生 $-x_2$ 軸之科氏加速度

### 2.1.1 兩輪車在 $x_2$ - $z_2$ 平面中的數學模型

兩輪車在 $x_2$ - $z_2$ 平面上的運動可用圖2-3所示的數學模型進行分析，圖中所示之點 $G_1$ 、 $G_2$ 和 $G_3$ 分別為桿1、桿2和桿3的質心，而該三支桿件的質量和慣性

矩分別以 $m_i$ 和 $I_i(i=1,2,3)$ 表示。又由於自由度為3之重心調整機構的質量通常遠小於其他桿件，故進行動力分析時可將它視為一支無質量的伸縮桿，如圖中虛線部份所示。圖2-3(a)為兩輪車於初始位置時之狀態，即三個質心都在慣性座標系 $x$ - $y$ - $z$ 之 $z$ 軸上，而車輪上的小圓點和細線則用來標示車輪的初始角位置。圖2-3(b)為兩輪車行駛中之狀態，即車輪轉動了 $\phi$ 角，以致輪軸前進了距離 $x=r\phi$ ，同時令底盤之傾角為 $\theta$ ，而質心 $G_3$ 相對於底盤在 $x_2$ 軸方向之移動距離為 $c$ ，但因假設座椅之高度在行駛中保持不變，故參數 $b$ 為常數。

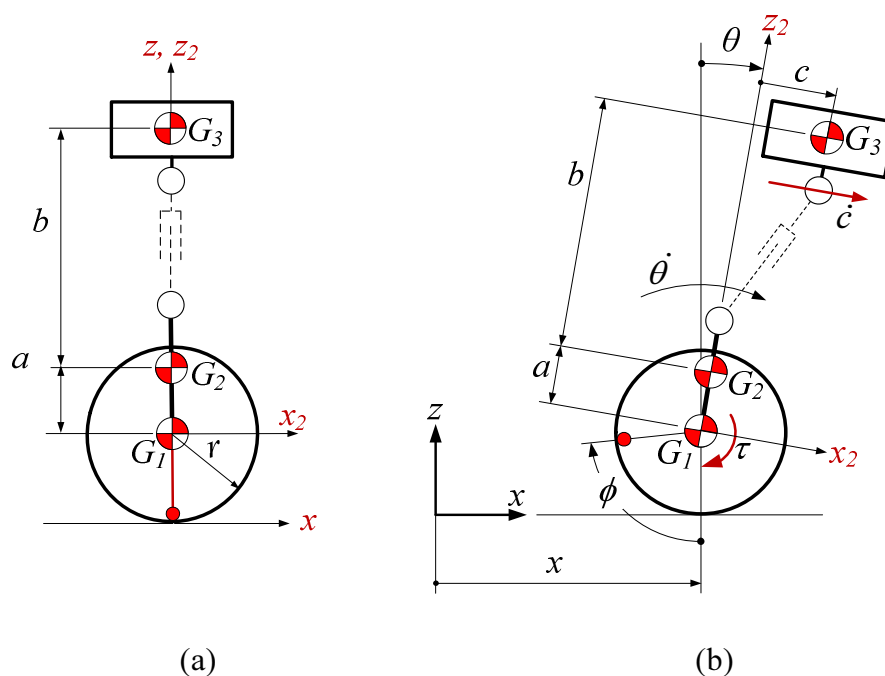


圖2-3 兩輪車在 $x_2$ - $z_2$ 平面上的運動

由圖2-3可知，兩輪車在 $x_2$ - $z_2$ 平面上的運動極不穩定(Unstable)，為了探討應施加多大的扭矩於車輪才能使兩輪車保持直立的平衡狀態，以及如何移動質心 $G_3$ 以調控車速，本文將在第三章提出可行的控制方法，而這些方法的正確性則可採用動力模擬的方式進行分析和檢驗。因此，以下各節將先推導兩輪車系統之勢能 $V$ 和動能 $T$ ，再以虛功原理求系統之廣義力，最後再應用

Lagrange方程式以求得系統之運動方程式，而運用這些運動方程式即可進行動力模擬。

### 2.1.2 系統之勢能和動能

參見圖2-3(b)，令圖中之 $\theta$ 角度以順時針方向為正，也就是以繞著 $y$ 軸(入紙面)逆時針旋轉的方向為正，則三個質心的位置向量 $\mathbf{r}_i (i=1, 2, 3)$ 可寫為：

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = x\mathbf{i} + r\mathbf{k} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \\ &= (x\mathbf{i} + r\mathbf{k}) + (a \sin \theta \mathbf{i} + a \cos \theta \mathbf{k}) \\ &= (x + a \sin \theta)\mathbf{i} + (r + a \cos \theta)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ a+b \end{bmatrix} \\ &= (x\mathbf{i} + r\mathbf{k}) + [c \cos \theta + (a+b) \sin \theta]\mathbf{i} + [-c \sin \theta + (a+b) \cos \theta]\mathbf{k} \\ &= [x + c \cos \theta + (a+b) \sin \theta]\mathbf{i} + [r - c \sin \theta + (a+b) \cos \theta]\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2-3)$$

由於假設車輪與地面之間為純滾動，故 $x=r\phi$ 。又由於行進中座椅之高度保持不變，即參數 $b$ 為常數，故可令系統之廣義座標(即可用來確定各質心之位置的長度或角度)如下所示：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ c \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

其次，將各質心之位置向量對時間微分一次即可求得各質心之速度如式(2-5)~(2-7)所示。

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{x}\mathbf{i} \quad (2-5)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = (\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{i} - (a\dot{\theta}\sin\theta)\mathbf{k} \quad (2-6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_3 = & \left\{ \dot{x} + \dot{\theta}[-c\sin\theta + (a+b)\cos\theta] + \dot{c}\cos\theta \right\} \mathbf{i} \\ & - \left\{ \dot{\theta}[c\cos\theta + (a+b)\sin\theta] + \dot{c}\sin\theta \right\} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2-7)$$

然後，由式(2-1)~(2-3)即可求得系統之勢能 $V$ 如下所示。

$$\begin{aligned} V = & \sum_i^3 m_i g z_i \\ = & m_1 g r + m_2 g (r + a\cos\theta) + m_3 g [r - c\sin\theta + (a+b)\cos\theta] \end{aligned} \quad (2-8)$$

至於兩輪車在 $x_2$ - $z_2$ 平面中運動的動能可寫為

$$T = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \right) \quad (2-9)$$

其中， $\omega_i$ 為桿件 $i$ 在 $y_2$ 軸方向的角速度，而由圖2-3可知

$$\omega_1 = \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{r} \quad (2-10)$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \dot{\theta} \quad (2-11)$$

然後，由上列之式(2-5)~(2-7)和式(2-9)~(2-11)即可求得系統之動能 $T$ 如下所示。

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \left[ \frac{I_1}{r^2} + m_1 + m_2 + m_3 \right] \dot{x}^2 \\ & + \left[ (m_2 + m_3) \dot{\theta} a \cos \theta - m_3 \dot{\theta} c \sin \theta + m_3 \dot{c} \cos \theta + m_3 \dot{\theta} b \cos \theta \right] \dot{x} \\ & + \frac{m_3}{2} \dot{\theta}^2 [a^2 + b^2 + c^2] + \frac{m_3}{2} \dot{c}^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{2} [m_2 a^2 + I_2 + I_3] + m_3 \dot{\theta} (b\dot{c} + a\dot{c} + ab\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (2-12)$$

### 2.1.3 非保守力所作的功

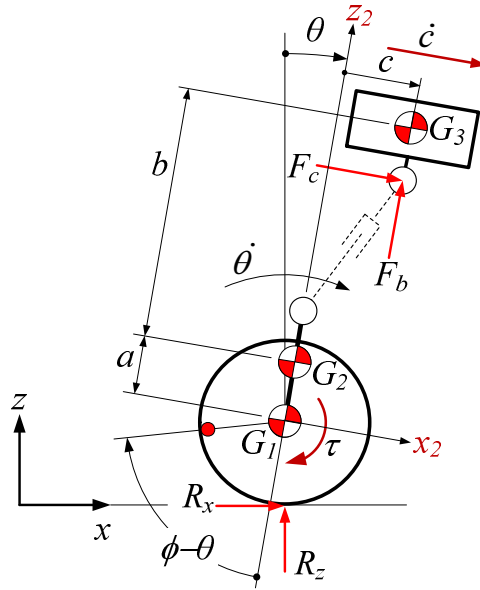


圖2-4 作用於系統之驅動力和接觸力

參見圖2-4，令 $\tau$ 為桿2透過馬達作用於車輪1的驅動扭矩， $F_b$ 和 $F_c$ 為桿2透過重心調整機構作用於桿3的推力，而 $R_x$ 和 $R_z$ 為地面對車輪的接觸反力，而這些非保守力(Non-Conservative Forces)對系統所作的虛功可用下式加以表示。

$$\delta W = \tau \delta(\phi - \theta) + F_b \delta b + F_c \delta c + R_x \delta x + R_z \delta z \quad (2-13)$$

上式中，由於參數 $b$ 為常數，故其所對應之虛位移 $\delta b=0$ ，又因為車輪與地面之間為純滾動，故兩者之接觸點的虛位移 $\delta x$ 和 $\delta z$ 也為零，也就是 $F_b$ 、 $R_x$ 和 $R_z$ 不作功，也因此非保守力所作的虛功可表示為：

$$\begin{aligned} \delta W &= \tau \delta(\phi - \theta) + F_c \delta c \\ &= \tau \delta\left(\frac{x}{r} - \theta\right) + F_c \delta c \\ &= \left(\frac{\tau}{r}\right) \delta x - \tau \delta \theta + F_c \delta c \\ &= \begin{bmatrix} \tau/r & -\tau & F_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \theta \\ \delta c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tau/r & -\tau & F_c \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2-14)$$

又因為虛功 $\delta W$ 也等於廣義力 $\mathbf{Q}$ 和廣義虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 的純量積，即 $\delta W = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}$ ，故非保守的廣義力 $\mathbf{Q}$ (Non-Conservative Generalized Forces)可寫為

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tau/r \\ -\tau \\ F_c \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

#### 2.1.4 系統之運動方程式

具有 $n$ 個獨立廣義座標 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 之系統的Lagrange運動方程式[17-19]可寫為



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2-16)$$

其中 $L=T-V$ ，而 $Q_i$ 為不含保守力(Conservative Forces)的廣義力。由於兩輪車系統共有三個獨立的廣義變數 $x$ 、 $\theta$ 和 $c$ ，而由式(2-15)可知這三個廣義變數所對應的廣義力分別為 $\tau/r$ 、 $-\tau$ 和 $F_c$ ，故由式(2-16)可得下列三條運動方程式：

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\tau}{r} \quad (2-17)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\tau \quad (2-18)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{c}} \right] - \frac{\partial L}{\partial c} = F_c \quad (2-19)$$

其次，將式(2-8)和(2-12)所示之勢能 $V$ 和動能 $T$ 代入式(2-17)~(2-19)，再加以整理後即可得系統之運動方程式，而運動方程式可用矩陣的形式表示為

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Q} \quad (2-20)$$

其中：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 + I_1 / r^2 & (m_2 + m_3)a \cos \theta - m_3 c \sin \theta + m_3 b \cos \theta & m_3 \cos \theta \\ & m_2 a^2 + m_3 \left[ (a+b)^2 + c^2 \right] + I_2 + I_3 & m_3 (a+b) \\ \text{對稱} & & m_3 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \left[ m_2 \dot{\theta} a \sin \theta + m_3 \dot{\theta} (a \sin \theta + b \sin \theta + c \cos \theta) + 2m_3 \dot{c} \sin \theta \right] \\ m_2 g a \sin \theta + m_3 g (a \sin \theta + b \sin \theta + c \cos \theta) - 2m_3 \dot{c} \dot{\theta} \\ m_3 (c \dot{\theta}^2 + g \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

式(2-20)中， $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 為慣性矩陣，它只與廣義座標 $\mathbf{q}$ 有關，行向量 $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 則包含了離心力、科氏力與重力，而行向量 $\mathbf{Q}$ 為前面所介紹的廣義力，由式(2-15)可知 $\mathbf{Q}$ 與致動器之驅動扭矩和驅動力有關。由於動力分析的目的在求解系統受力後的加速度，故進行動力分析時可先由控制方法求得廣義力 $\mathbf{Q}$ ，而慣性矩陣 $\mathbf{M}$ 和行向量 $\mathbf{H}$ 可根據廣義座標和廣義速度由式(2-21)和(2-22)求得，因此運動方程式(2-20)中只有廣義加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 為未知的行向量，而其值可由下列之式(2-23)求得

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{H} + \mathbf{Q}) \quad (2-23)$$

## 2.2 兩輪車在冠狀切面上的運動

為了分析行駛於彎道上之兩輪車的受力情形，必須先求得兩輪車之線速度 $v$ 和繞 $z$ 軸旋轉的角速度 $\omega_z$ 。參見圖2-5，令左輪和右輪之轉速分別為 $\dot{\phi}_L$ 和 $\dot{\phi}_R$ ，則兩輪之軸心處的線速度可寫為

$$v_L = r \dot{\phi}_L \quad (2-24)$$

$$v_R = r \dot{\phi}_R \quad (2-25)$$

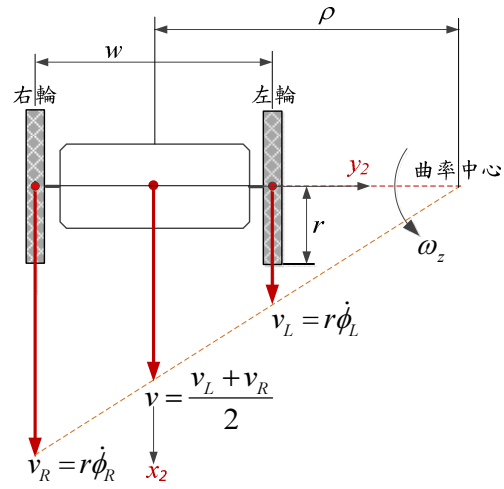


圖2-5 兩輪車之線速度和角速度與兩輪之轉速的關係

也因此兩輪車之線速度 $v$ 可由下列之式(2-26)求得

$$v = \frac{v_L + v_R}{2} = \frac{r(\dot{\phi}_L + \dot{\phi}_R)}{2} \quad (2-26)$$

然後由圖2-5也可得下列關係

$$w\omega_z = v_R - v_L = r(\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L) \quad (2-27)$$

故兩輪車在 $z$ 軸方向的角速度 $\omega_z$ 可由 $\dot{\phi}_L$ 和 $\dot{\phi}_R$ 決定，如下所示：

$$\omega_z = \frac{r}{w}(\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L) \quad (2-28)$$

因此，在以編碼器量得左、右輪的轉速 $\dot{\phi}_L$ 和 $\dot{\phi}_R$ 之後，即可由式(2-26)和(2-28)求得兩輪車之線速度 $v$ 和轉彎的角速度 $\omega_z$ ，而由 $v$ 和 $\omega_z$ 又可求得彎道之曲率半徑  $\rho = v/\omega_z$ 。

參見圖2-6，兩輪車在 $y_2$ - $z_2$ 平面上的運動基本上是穩定的，但當車輪與地面之間的接觸力 $R_R$ 或 $R_L$ 出現小於零的情況，則表示車輪已失去接觸力而且有翻覆的危險。以下為了分析兩車輪和地面之間的接觸力，令兩輪車之總質量 $m=m_1+m_2+m_3$ 集中於總質心 $G$ 處，再根據下列之式(2-29)求得質心的向心加速度 $a_n$ 。

$$\begin{aligned}
 a_n &= \rho \omega_z^2 = v \omega_z \\
 &= \left[ \frac{r(\dot{\phi}_L + \dot{\phi}_R)}{2} \right] \left[ \frac{r}{w}(\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L) \right] \\
 &= \frac{r^2}{2w}(\dot{\phi}_R^2 - \dot{\phi}_L^2)
 \end{aligned} \tag{2-29}$$

而由向心加速度 $a_n$ 即可得作用於質心處的離心力 $ma_n$ ，如圖2-6(b)所示。此外，在轉彎的過程中，質心 $G$ 若相對於底盤以相對速度 $\dot{c}$ 往正 $x$ 軸移動，則質心處將出現科氏加速度 $a_{cor}$ ，從而產生與離心力同方向之科氏力 $ma_{cor}$ 。一般而言，騎士通常不會在轉彎時改變座椅相對於底盤之位置，若稍有移動也是以相當慢的速度來調整座椅在 $x$ 方向的位置，故 $\dot{c}$ 通常很小，也因此若要簡化分析也可略去科氏力 $ma_{cor}$ 不計。

轉彎時，騎士若將重心放在左右兩輪之間的中心點，如圖2-6(b)所示，則作用於質心 $G$ 處之合力的延長線和地面的交點 $A$ 將偏離兩輪車之中心點一個距離。若該距離大於 $w/2$ ，則由各力對右輪之合力矩可知，左輪與地面之間的接觸力 $R_L$ 必須是負值才能保持平衡；換言之，左輪將失去接觸力而離開地面，並使兩輪車有繞 $x_2$ 軸翻覆的危險。因此，本文將在第三章提出避免車輪失去接觸力的方法。

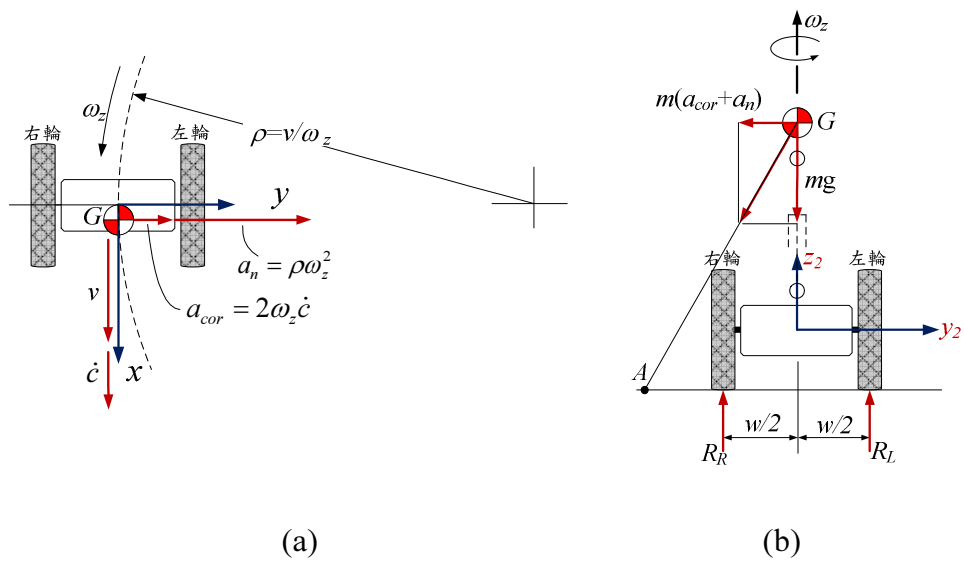


圖2-6 兩輪車行駛於彎道時所承受之作用力

### 第三章 具重心調整機構之兩輪車的控制與動力模擬

兩輪車是一個十分不穩定的系統，它必須仰賴控制系統持續施加適當的扭矩於車輪才能使它保持平衡而不傾倒。本章將介紹一些常用的控制方法以求得維持平衡所需的扭矩，然後再應用前面所推導得之運動方程式進行動力模擬。動力模擬之主要目的為：(a)檢驗平衡控制方法之正確性和適用性；(b)檢視兩輪車之運動特性；(c)求解致動器所需之最大功率和座椅之最大移動距離和速度等資料，這些資料將有助於選用合適的致動器和訂定兩輪車之相關之尺寸。以下將先提出簡易的平衡控制策略，然後訂正兩輪車之相關參數(含兩輪車之主要尺寸和控制參數值)，接著介紹本文所採用的動力模擬程序，再以自行撰寫的程式對行駛於直線道路和彎道的兩輪車進行動力模擬，最後對模擬結果進行討論。

#### 3.1 兩輪車之控制

同軸兩輪車的控制問題大致上可分成平衡控制、速度控制和方向控制等三個問題分別加以探討[3]，又由於本文所探討的兩輪車可藉由調整座椅左右平移以平衡離心力，故額外增加了一項避免車輪失去接觸力的控制。此外，為了論文的完整性，以下也對前三項控制方法稍加探討，並提出更簡化的控制方法。

##### 3.1.1 平衡控制方法

兩輪車的平衡控制就是在求得適當的扭矩 $\tau$ 來驅動車輪，以使車子保持直立狀態前進、後退或靜立於原地；換言之，此一控制的主要目的在使 $\theta$ 趨近於

零，參見圖3-1，而滿足這些要求的最簡單和有效的方法就是使用比例-微分控制法(PD Control)來求得車輪之驅動扭矩[20]，如下列之式(3-1)所示。

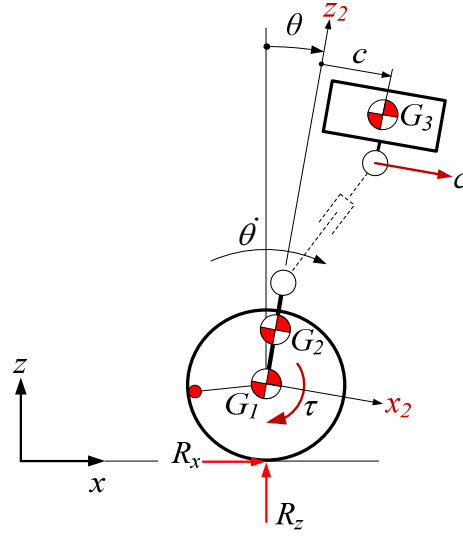


圖3-1 驅動車輪之扭矩與 $\theta$ 和 $\dot{\theta}$ 之間的關係

$$\tau_{bal} = K_{pb}\theta + K_{Db}\dot{\theta} \quad (3-1)$$

其中： $K_{pb}$ 和 $K_{Db}$ 為常數。式(3-1)表示，當車子出現順時針方向之 $\theta$ 或 $\dot{\theta}$ 時，參見圖3-1，控制系統就施加順時針方向的扭矩 $\tau$ 驅動車輪向右移動，試圖縮小 $\theta$ 角或降低 $\dot{\theta}$ 以使車子保持平衡。因此，騎士若要使車一直向前移動就將其重心移至輪軸的前方使底盤產生順時針方向的 $\theta$ 角；反之，若將其重心移至輪軸的後方則將使車子向後移動。

### 3.1.2 速度控制方法

採用立姿或固定座椅的兩輪自平衡車一般都是以人為的方式來調整車速，具體而言就是藉由騎士將其重心向前或向後移動以改變底盤的 $\theta$ 和 $\dot{\theta}$ ，參見圖

3-1。然後即可由式(3-1)取得驅動車輪之扭矩以使車輪前進或後退，所以此類兩輪車的車速是由騎士的姿態來調整，而不使用自動控制系統。

由於本文所探討的兩輪車可由致動器推動座椅來改變重心相對於輪軸的位置，故騎士不必調整姿態，他只要以搖桿或電位器之類的裝置輸入使座椅向前或向後平移的命令，即可移動重心以調整車速。因此，這種調整車速的方法也是「人為的」或「手動的」，採用手動方式的優點是，騎士在下指令之前已預知座椅的移動方向和移動量，所以當座椅移動時騎士不會感覺「突然」或「驚慌」，但在使用手動方式調速之前，騎士應接受一段時間的訓練，否則騎乘時將有不知應向前或向後調整座椅的情形。因此，文獻[21]提出一種基於計算轉矩法的車速控制方法，但因該方法必須有比較準確的車輛資料(如桿件之質量和慣性矩等)，故本文改用比例-積分-微分控制法(PID Control)以計算控制車速所需之轉矩。首先，令兩輪車的目標速度為 $v_d$ ，而由式(2-26)可知實際的車速可由左右兩輪之轉速求得，如下所示

$$v = \frac{r(\dot{\phi}_L + \dot{\phi}_R)}{2} \quad (3-2)$$

因此，兩輪車的目標速度 $v_d$ 與其實際速度 $v$ 之間的誤差為

$$e_v = v_d - \frac{r(\dot{\phi}_L + \dot{\phi}_R)}{2} \quad (3-3)$$

然後，可由PID控制來調控兩輪之轉速以縮小速度誤差 $e_v$ ，即令控制車速所需之轉矩為



$$\tau_{vel} = K_{Pv}e_v + K_{Iv} \int e_v dt + K_{Dv} \frac{de_v}{dt} \quad (3-4)$$

其中， $K_{Pv}$ 、 $K_{Iv}$ 和 $K_{Dv}$ 為指定的常數。此外，由式(2-20)所示的運動方程式可知，在動力模擬過程中除了應施加扭矩於車輪之外，還要施加廣義力 $F_c$ 來推動座椅進退以調控車速。由於 $F_c$ 和 $\tau_{vel}$ 都是用來調控車速，本文令推力 $F_c$ 和扭矩 $\tau_{vel}$ 之值成正比，但為了避免出現太大的座椅平移量 $c$ 和速度 $\dot{c}$ ，故採用下列之式(3-5)以求推動座椅所需之力 $F_c$ ，而式中之 $K_s$ 、 $K_{Pc}$ 和 $K_{Dc}$ 為指定的常數。

$$F_c = K_s \tau_{vel} - (K_{Pc}c + K_{Dc}\dot{c}) \quad (3-5)$$

### 3.1.3 方向控制

基本上，使兩輪車繞直立軸( $z$ 軸)依指定的角速度旋轉的控制方法與前述的速度控制法相似。令兩輪車的目標角速度為 $\omega_{zd}$ ，而由式(2-28)可得兩輪車的實際角速度為

$$\omega_z = \frac{r}{w} (\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L) \quad (3-6)$$

因此，兩輪車的目標角速度 $\omega_{zd}$ 與實際角速度 $\omega_z$ 之間的誤差為

$$e_t = \omega_{zd} - \frac{r(\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L)}{w} \quad (3-7)$$

故控制角速度所需的轉矩可由下列的式(3-8)求得。

$$\tau_{turn} = K_{Pt}e_t + K_{It}\int e_t dt + K_{Dt}\frac{de_t}{dt} \quad (3-8)$$

其中， $K_{Pt}$ 、 $K_{It}$ 和 $K_{Dt}$ 為常數。由於前面所介紹的轉矩 $\tau_{bal}$ 和 $\tau_{vel}$ 應同時施加於左輪和右輪，並使左輪和右輪同時向前轉或向後轉，但式(3-8)所示的轉矩 $\tau_{turn}$ 則應使一輪向前轉而另一輪向後轉，如此才能完成轉彎的動作。因此，為了進行平衡控制、速度控制和方向控制，可將應施加於左輪的合成轉矩 $\tau_L$ 和應施加於右輪的轉矩 $\tau_R$ 寫為：

$$\tau_R = \frac{1}{2}\tau_{bal} + \frac{1}{2}\tau_{vel} + \tau_{turn} \quad (3-9)$$

$$\tau_L = \frac{1}{2}\tau_{bal} + \frac{1}{2}\tau_{vel} - \tau_{turn} \quad (3-10)$$

### 3.1.4 避免車輪離地的控制方法

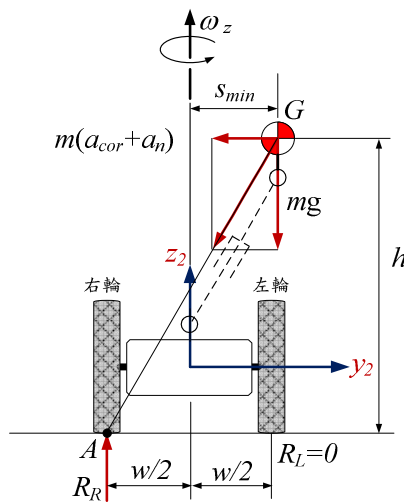


圖3-2 使彎道內側之輪子不失去接觸力的條件

參見圖3-2，當兩輪車快速轉彎時為了避免處於彎道內側之車輪離開地面，則兩輪車的總質心 $G$ 應往曲率中心方向(正 $y_2$ 軸方向)移動，以使作用於質心 $G$ 處之合力的延長線和地面的交點 $A$ 移至兩輪之間。圖3-2顯示左輪即將離地的臨界情況，即點 $A$ 在右輪的正下方，以致作用於左輪的接觸力為零，故質心 $G$ 之偏移量 $s_{min}$ 為避免左輪失去接觸力的最小偏移距離，而由圖中可得下列關係：

$$\frac{m(a_{cor} + a_n)}{mg} = \frac{\frac{w}{2} + s_{min}}{h} \quad (3-11)$$

式(3-11)中， $w$ 為輪幅之寬度，也就是左、右兩輪在 $y_2$ 軸方向的距離，而 $h$ 為總質心 $G$ 離地之距離。因此，為了避免處於彎道內側之車輪失去接觸力的最小偏移距離 $s_{min}$ 可由下列之式(3-12)求得。

$$s_{min} = \frac{(a_{cor} + a_n)h}{g} - \frac{w}{2} \quad (3-12)$$

因此，為了使兩輪車轉彎時不會因為離心力的作用而導致車輪離地，在行駛中的任一瞬時，可先根據式(3-12)求得避免車輪失去接觸力之最小偏移距離 $s_{min}$ ，再根據求得的數值來移動座椅以平衡離心力。

不過，在實際應用式(3-12)以決定座椅應平移的距離 $s_{min}$ 時，必須先得知總質心的高度 $h$ 、科氏加速度 $a_{cor}=2\omega_z \dot{c}$ 和向心加速度 $a_n=v\omega_z$ 等資訊。由於獲取上述計算資料的過程可能耗時過久以致不適合實際應用，所以進行動力模擬時，將假設總質心 $G$ 固定附著在座椅上，即 $h$ 為已知，同時根據兩個輪子之轉速以式(3-2)和(3-6)求 $v$ 和 $\omega_z$ 。以上假設與實際狀況必有差異，故在動力模擬的過程中，將檢驗式(3-12)的正確性，也就是計算靠近彎道內側之車輪與地面的接觸力是否大於等於零。

## 3.2 行駛於直線道路之兩輪車的動力模擬

### 3.2.1 模擬程序與步驟

以下簡述本文所採用之動力模擬程序，而對應之流程圖如圖3-3所示。

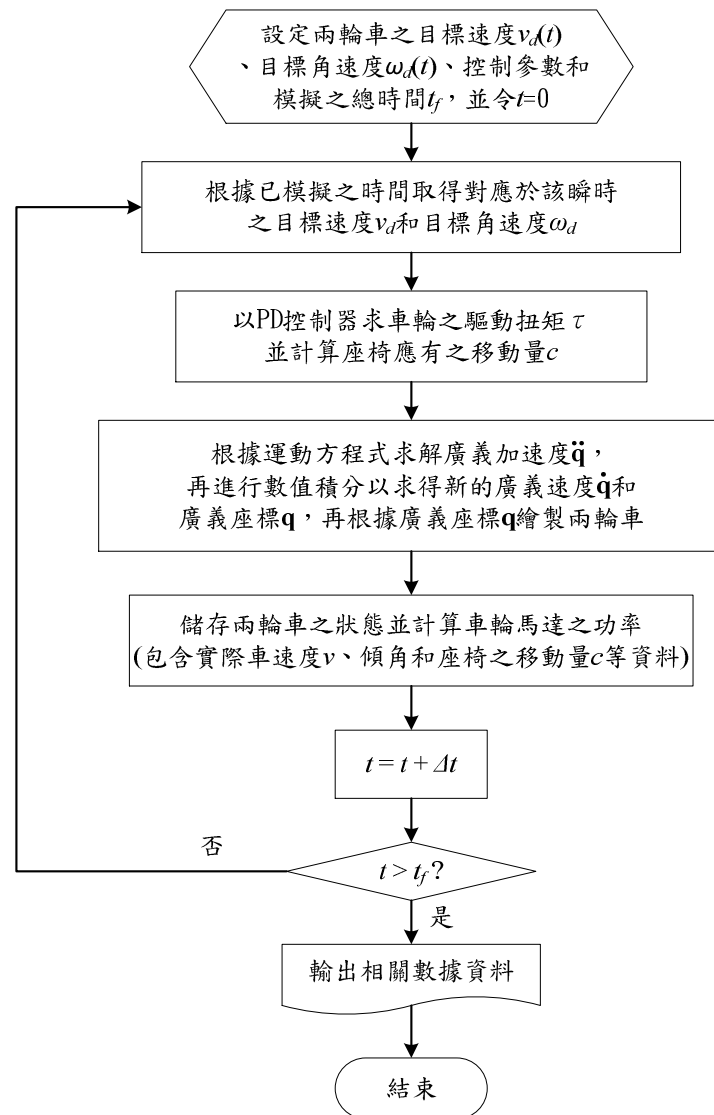


圖3-3 兩輪車之動力模擬程序

步驟1，設定兩輪車之目標速率 $v_d(t)$ 和目標角速度 $\omega_{zd}(t)$ 。由於兩輪車欲進行直線運動故令 $\omega_{zd}(t)$ 恒為零，而目標速率 $v_d(t)$ 如圖3-4所示，亦即

$$v_d(t) = \begin{cases} v_a \left( \frac{t}{t_a} \right) & \text{for } 0 \leq t \leq t_a \\ v_a & \text{for } t_a \leq t \leq t_b \\ v_a \left( \frac{t_f - t}{t_f - t_b} \right) & \text{for } t_b \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (3-13)$$

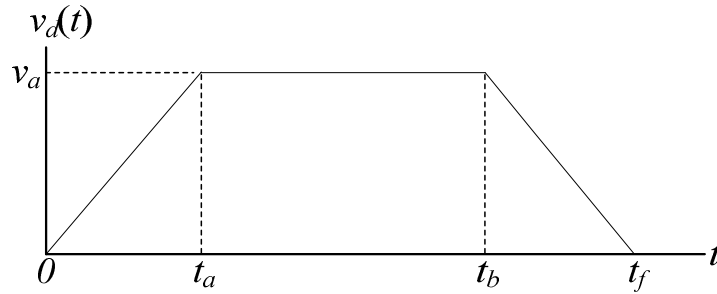


圖3-4 動力模擬之目標速度曲線

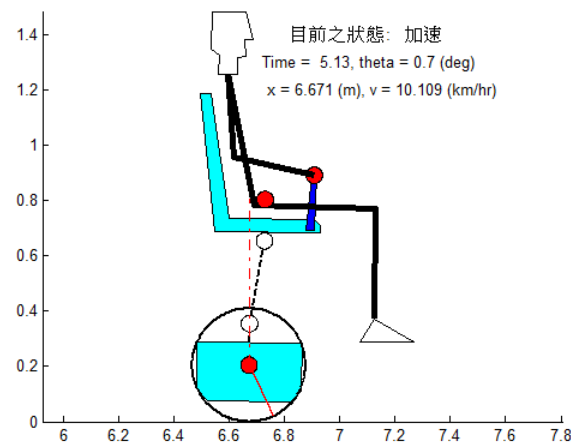
步驟2，對任一瞬時，先根據平衡控制策略求應施加於車輪之驅動扭矩 $\tau$ ，同時根據速度控制方法求座椅應有之移動量，然後再據以決定施加於座椅之推力 $F_c$ ，從而決定了廣義力 $\mathbf{Q}$ 。其次，根據運動方程式求解廣義加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ ，再進行數值積分以求得新的廣義速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 和廣義座標 $\mathbf{q}$ 。最後，根據廣義座標 $\mathbf{q}$ 繪製兩輪車，並貯存兩輪車之狀態，例如：實際之車速 $v$ 、底盤之傾角 $\theta$ 、座椅之移動量 $c$ 和移動速度 $\dot{c}$ 以及致動器之功率等資料。

步驟3，更新已模擬之時間，若模擬時間已達預設之時間則結束模擬，否則回步驟2繼續執行。

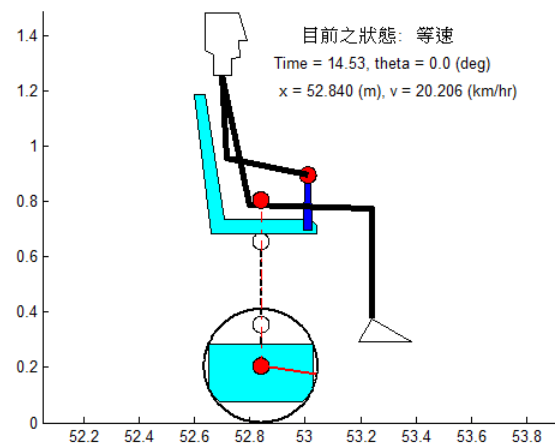
### 3.2.2 行駛於直線道路的模擬結果與討論

本文根據前面所推導得之運動方程式和控制方法，以MATLAB撰寫動力模擬程式來分析兩輪車的運動。令各桿件之性質如下： $m_1=31\text{ kg}$ ， $m_2=30\text{ kg}$ ， $m_3=100\text{ kg}$ ， $I_1=2.6\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ， $I_2=1.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ， $I_3=1.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ， $a=0\text{ m}$ ， $b=0.6\text{ m}$ 。而控制用之常數為 $K_{pb}=2750$ ， $K_{Db}=50$ ， $K_{pv}=50$ ， $K_{Iv}=0.15$ ， $K_{Dv}=-25$ ， $K_s=-6$ ， $K_{pc}=600$ ， $K_{Dc}=600$ 。其次，令兩輪車前10秒先以等加速度將時速提高至20km/h，然後保持等速行駛10秒，最後10秒則以等減速度將時速降低至零。

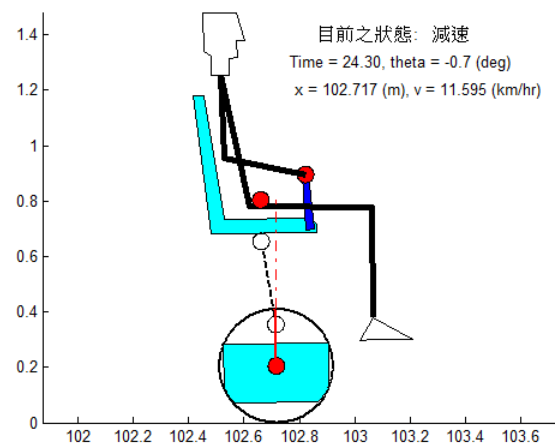
圖3-5顯示兩輪車在加速、等速和減速等三階段的姿態，圖中座椅上方的圓點為質心 $G_3$ ，故由圖中可知加速時質心 $G_3$ 會移至輪軸的前方，等速時移至輪軸的正上方，而減速時則移至輪軸的後方。



(a)



(b)



(c)

圖3-5 兩輪車在加速、等速和減速時之姿態

兩輪車之車軸的速度曲線如圖3-6所示，圖中之實線為指定的目標速度曲線而虛線為實際的速度曲線，由圖中可知兩曲線十分吻合，也就是本文所採用的速度控制法確實可行。而由圖3-7可知，模擬過程中底盤的最大傾斜角未超過 $1^\circ$ ，而底盤的最大角速度小於3度/秒，這表示平衡控制方法也確實發揮作用，才使得底盤在運動過程中保持十分平穩的狀態。

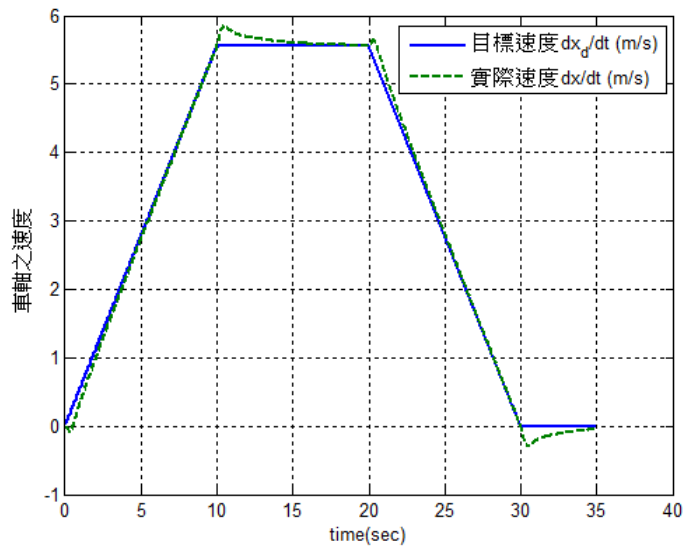


圖3-6 兩輪車之輪軸的速度曲線

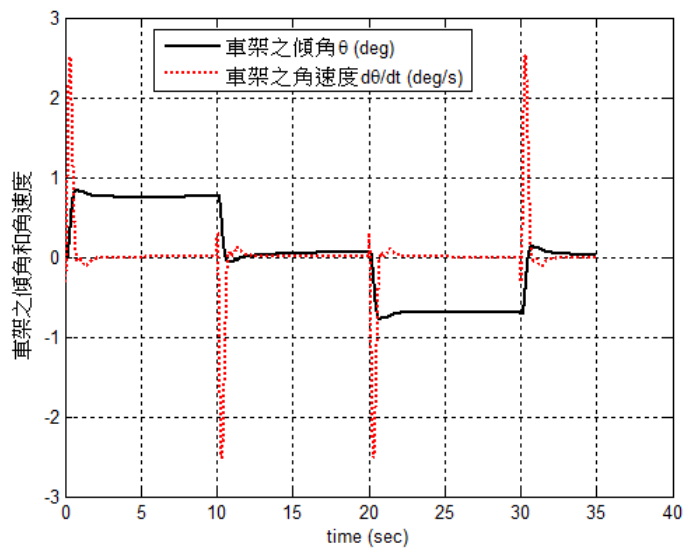


圖3-7 兩輪車底盤之傾斜角和角速度變化曲線

圖3-8顯示作用於車輪的驅動扭矩，其中包含負責平衡控制的扭矩  $\tau_{bal}$ 、速度控制的扭矩  $\tau_{vel}$  和總扭矩  $\tau_{bal} + \tau_{vel}$ ，由圖中可發現以虛線所示的  $\tau_{vel}$  的方向恒與  $\tau_{bal}$  相反，也就是當其中一個為正值時則另一個為負值。此一現象看來好像不合理，但對此事實稍加分析可提出以下的合理解釋：若要使兩輪車向前行駛，則先減少車輪向前轉之轉矩(即加上負值的  $\tau_{vel}$ )以破壞原來的直立平衡，而使車



身微微向前傾，但車身向前傾則引發平衡控制輸出正值的  $\tau_{bal}$  使車輪向前轉動試圖使車身回復直立狀態，因此速度控制和平衡控制所造成的合成效果就是使兩輪車以指定的速度向前移動。

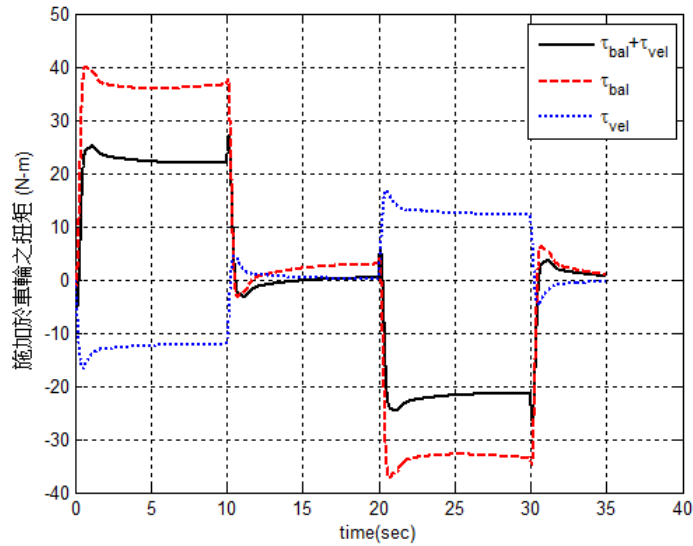


圖3-8 施加於車輪的驅動扭矩

對模擬之結果詳加分析也可發現另一個有趣的現象，參見圖3-9，即推動座椅之廣義力  $F_c$  在加速、等速和減速等三階段幾乎都相當接近水平線，也就是力量  $F_c$  在各階段的值幾乎不改變。而由圖中也可知座椅相對於底盤的位移  $c$  在加速、等速和減速等三階段中也呈現近乎水平線；換言之，若將座椅往前移動一個固定的距離，則車子將以等加速度前進，而將座椅往後移動一個固定的距離，則車子將呈現等減速度運動。而且由圖中可歸納得  $F_c$  和  $c$  之間大致上呈現線性關係，也就是可用數學式表示為  $c = K F_c$ ，其中  $K$  為常數。換言之，進行速度控制時，式(3-5)除了可用在動力模擬中以求得推動座椅的廣義力  $F_c$ ，也可將求得的  $F_c$  值乘以一個固定的比例常數  $K$  來求得座椅應有的位移  $c$ 。此外，由圖3-9也可知，若要使兩輪車的車速在10秒內由零加速至時速20公里，或在10秒內由時速20公里煞車至停止，則座椅向前和向後的最大平移量約為50mm。

而由圖3-10所示之座椅相對於底盤移動的速度曲線可知，最大移動速度 $\dot{c}$ 約為0.1m/s，這些數據將有助於設計適用的重心調整機構。

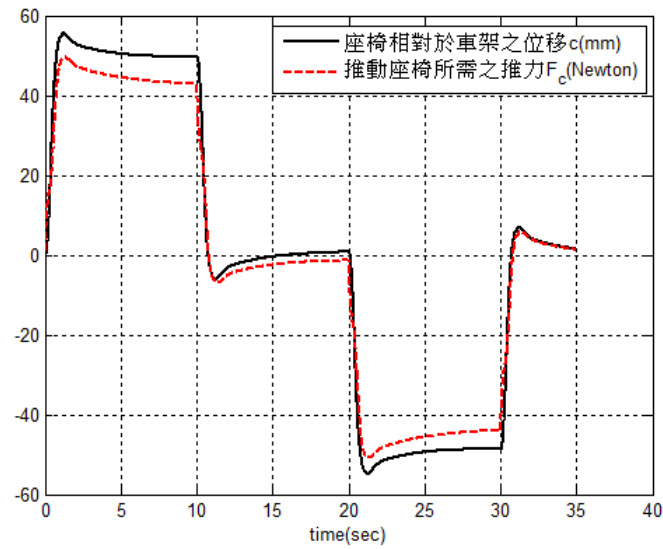


圖3-9 座椅相對於底盤位移 $c$ 和推動座椅之力 $F_c$

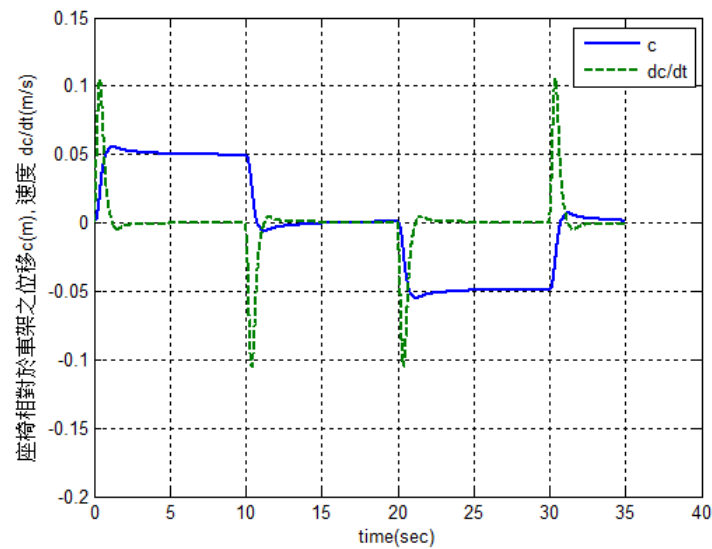


圖3-10 座椅相對於底盤的位移 $c$ (m)和相對速度 $dc/dt$ (m/s)

模擬結果也顯示模擬過程中應施加於兩個車輪之扭矩的最大值小於為30 N-m(參見圖3-8)，而其最大功率約800瓦特(圖3-11)，因此使用兩個500瓦左右的馬達就足以驅動車輪完成指定的運動。

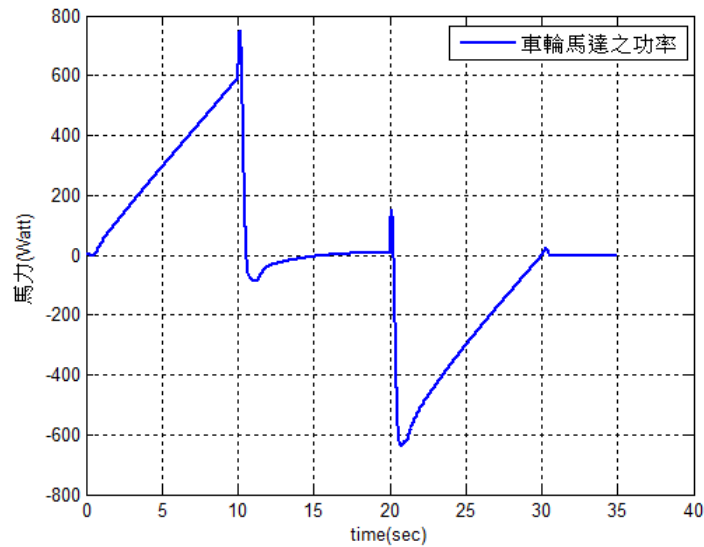


圖3-11 車輪馬達之功率曲線

### 3.3 行駛於彎道之兩輪車的動力模擬

行駛於彎道之兩輪車的動力模擬方法與前節相似，令兩車輪之間的距離  $w=0.45\text{m}$ ，並以  $h=0.5896\text{m}$ (參見圖3-2)來估計兩輪車之總質心的高度(注意，此  $h$ 值只用來計算  $s_{min}$ ，而非總質心的實際高度)，同時令兩輪車在模擬過程中的運動狀態如下所示：

- (1)  $t=0\sim 5$ 秒，在直線道路上由靜止開始以等加速度加速至時速10公里。
- (2)  $t=5\sim 15$ 秒，以時速10公里在曲率半徑  $\rho=2\text{m}$ 的彎道上等速行駛，故令  $\dot{c}=0$ ，

而此時之角速度  $\omega_z = v/\rho$ ，其中為  $v$ 當時之實際速率。

- (3)  $t=15\sim 20$ 秒，在直線道路上由時速10公里以等減速度降速至停止。

當兩輪車行駛於彎道時，先根據其實際速度 $v$ 求角速度 $\omega_z = v/\rho$ ，然後根據式(3-12)求座椅應該偏離中心點的距離 $s$ ，參見圖3-12，注意若求得之 $s$ 值小於零，則表示座椅不須偏移，故對於此種情況應令 $s=0$ 。此外，圖3-12顯示所有作用於兩輪車的重力、慣性力(含離心力)和地面對車輪的接觸力，而由動力平衡可得下列的式(3-14)，而由該式可求得惟一的未知力 $R_L$ 。

$$R_L w + r(m_1 + m_2)\rho\omega_z^2 + (r+b)m_3\rho\omega_z^2 - \frac{w}{2}(m_1 + m_2)g - \left(\frac{w}{2} + s\right)m_3g = 0 \quad (3-14)$$

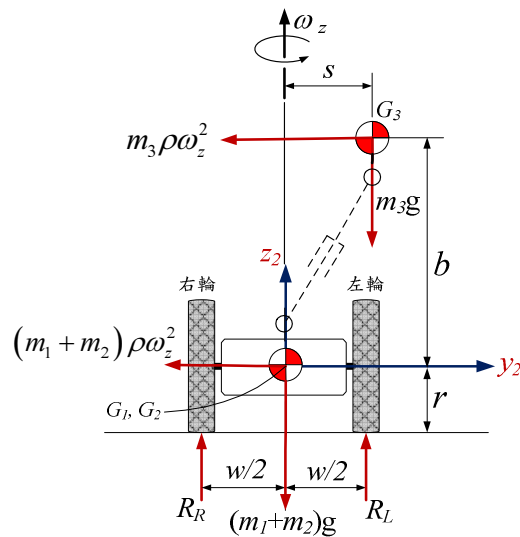


圖3-12 作用於轉彎中之兩輪車的重力和慣性力

動力模擬的結果如圖3-13~3-15所示。圖3-13顯示兩輪車的線速度 $v$ ，圖3-14顯示兩輪車的角速度 $\omega_z$ 和座椅的偏移量 $s$ ，由於動力模擬5秒之後的實際車速並未完全達到等速的要求(參見圖3-13)，故車子轉彎時的角速度 $\omega_z$ 在 $t=5\sim 15$ 秒時也非定值，而由圖中可得座椅的最大偏離量約為50mm。至於圖3-15所示之地面接觸力則由式(3-14)求得，當兩輪車直線行駛時，因為 $s=0$ 且總質量 $m_1+m_2+m_3=161\text{ kg}$ ，故左右兩輪之接觸力皆為765.2 N，而由此圖可知，轉彎

時車輪與地面之間的接觸力會出現負值，即車輪仍可能離地。若要避免出現負值，則可加大兩車輪之間的距離 $w$ 或提高總質心高度的估計值 $h$ 。例如若改令 $h=0.65m$ ，則兩輪車的角速度 $\omega_z$ 、座椅的偏移量 $s$ 和地面之反力 $R_L$ 將如圖3-16和3-17所示，而由圖3-17可知車輪已不會失去接觸力，但必須加大座椅的偏移量，所以提高 $h$ 值不是一個很好的方法。圖3-18和3-19顯示不改變 $h$ ，但將兩車輪之間的距離 $w$ 加大為 $0.55m$ 的情況，由圖3-18可知座椅在轉彎時幾乎不必偏移，而且輪子也不會失去接觸力(參見圖3-19)。

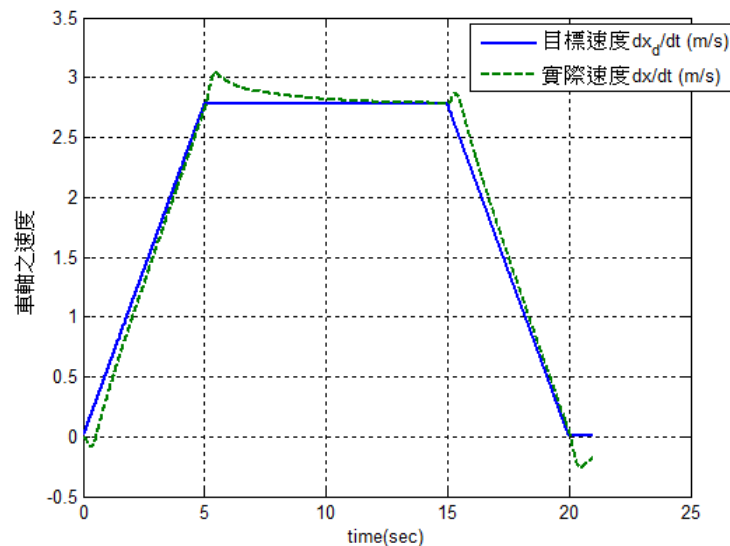


圖3-13 兩輪車的目標速度與實際速度

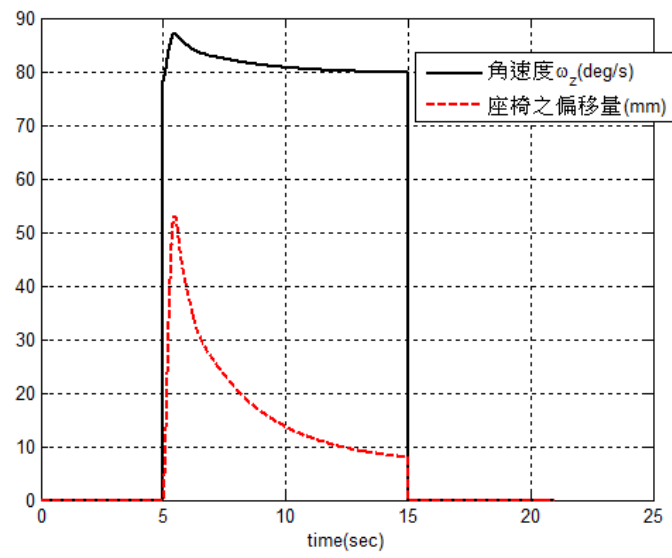


圖3-14 兩輪車的角速度  $\omega_z$  和座椅的偏移量  $c$  ( $h=0.5986\text{m}$ ,  $w=0.45\text{m}$ )

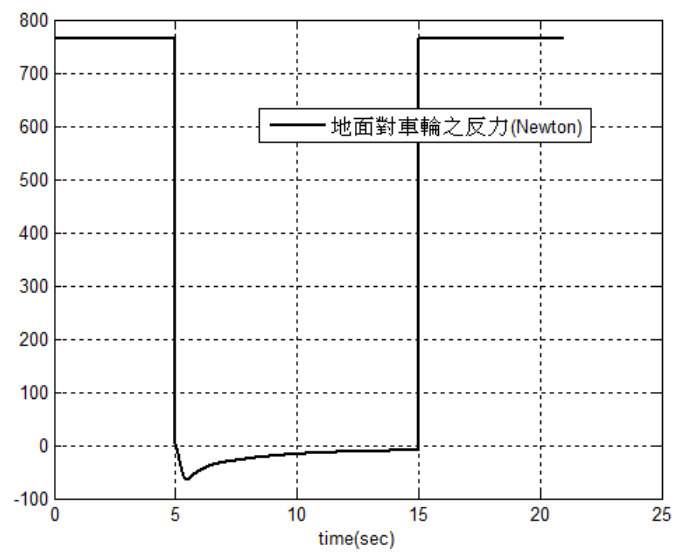


圖3-15 地面對轉彎中之兩輪車的接觸力 ( $h=0.5986\text{m}$ ,  $w=0.45\text{m}$ )

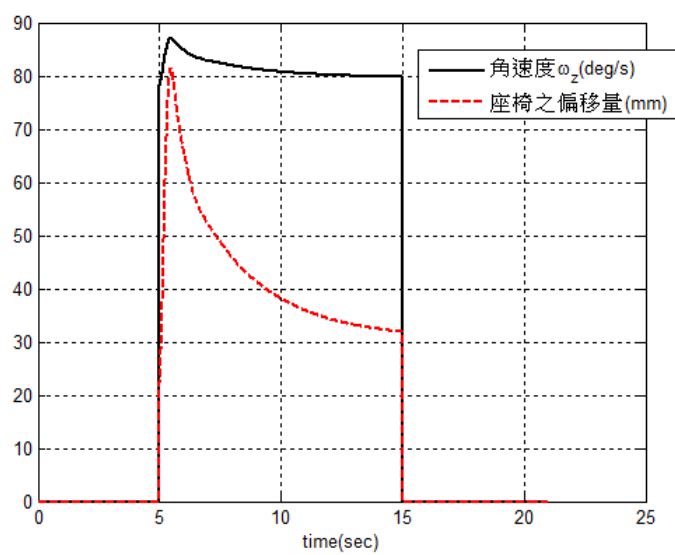


圖3-16 兩輪車的角速度  $\omega_z$  和座椅的偏移量  $c$  ( $h=0.65\text{m}$ ,  $w=0.45\text{m}$ )

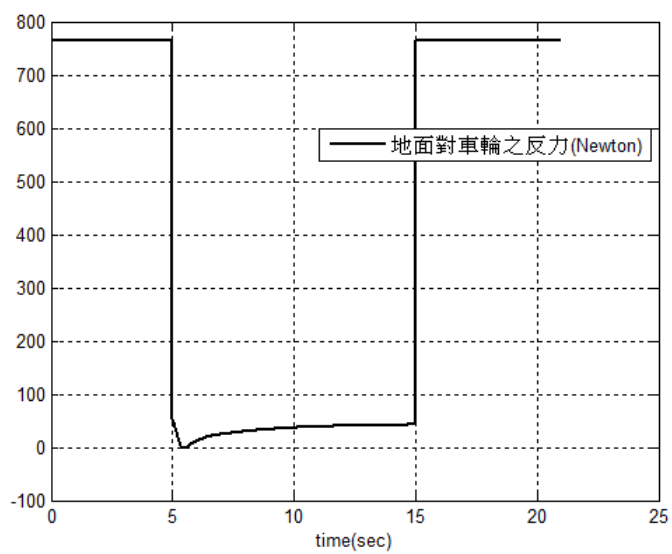


圖3-17 地面對轉彎中之兩輪車的接觸力 ( $h=0.65\text{m}$ ,  $w=0.45\text{m}$ )

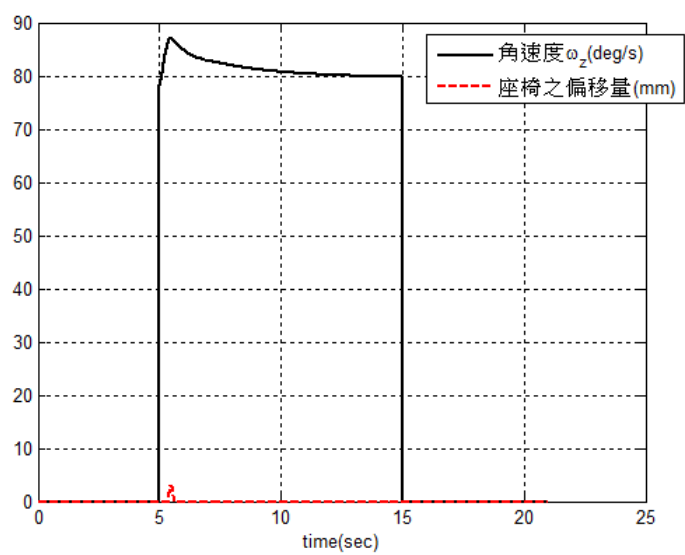


圖3-18 兩輪車的角速度 $\omega_z$ 和座椅的偏移量 $c$ ( $h=0.5986\text{m}$ ,  $w=0.55\text{m}$ )

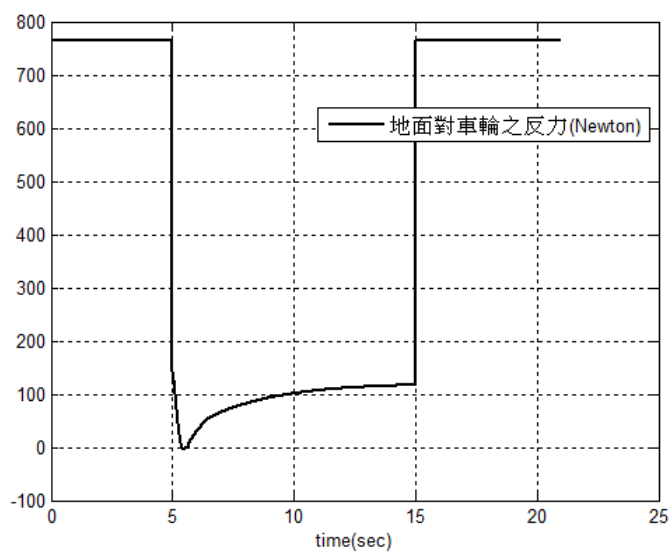


圖3-19 地面對轉彎中之兩輪車的接觸力( $h=0.5986\text{m}$ ,  $w=0.55\text{m}$ )



## 第四章 重心調整機構之分析與選用

由前章的動力模擬可知，重心調整機構應該滿足以下五個條件：(1)可使座椅相對底盤產生三個相互垂直方向的平移；(2)在水平面上可推動座椅相對底盤移動 $\pm 50\text{mm}$ 左右(參見圖4-1，包含 $x_2$ 軸方向和 $y_2$ 軸方向的平移)，在鉛直軸方向則只需 $50\text{mm}$ 左右的平移量；(3)在水平方向的推力只要 $60\text{N}$ 左右但在鉛直方向的推力至少要 $1000\text{N}$ 以上；(4)座椅和底盤之間的垂直距離應在 $450\text{mm}$ 左右(大約是一般椅子的高度)；(5)機構之底盤的長和寬應在 $400\text{mm} \times 500\text{mm}$ 以內，以避免超出輪子的直徑過多。本章將根據上述原則選取一個比較合適的重心調整機構，再提出其逆向運動分析法。

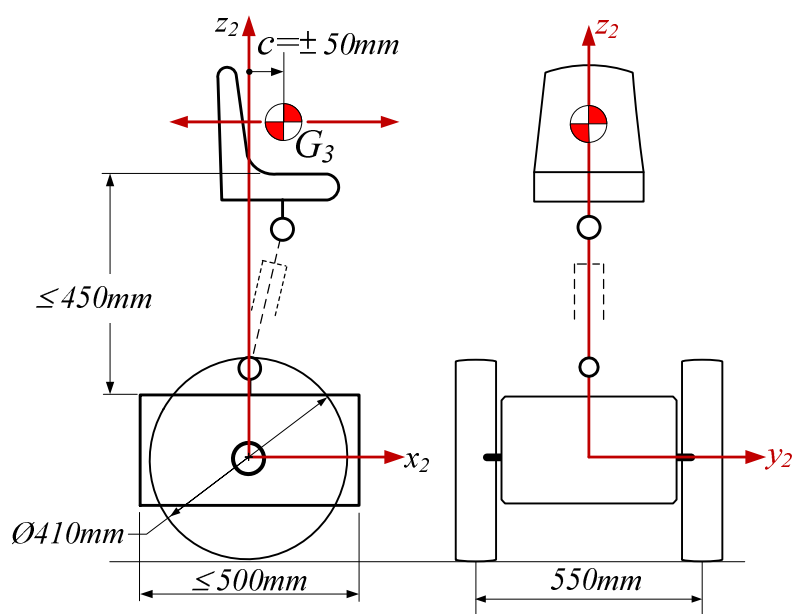


圖4-1 重心調整機構可使用的裝置空間

#### 4.1 重心調整機構之選用

根據前面之分析可知，適用之重心調整機構應具有兩個或三個自由度，若機構本身只能提供水平面上的平移則可採用手動的方式來調整座椅的高度。此外，若再考慮機構所承受之負載(乘客之體重和離心力)則以並聯機構(Parallel Mechanism)比較合適，因為它們具有比較多的桿件以承受負荷，故現有機構中以delta機器手臂(Delta Robot)(圖4-2)[22]、史都華平台(圖4-3)[23]和一些類似類史都華平台的機構(圖4-4)[24]比較適用，因為它們都屬於並聯型機構而且可提供三個座標軸方向的平移。

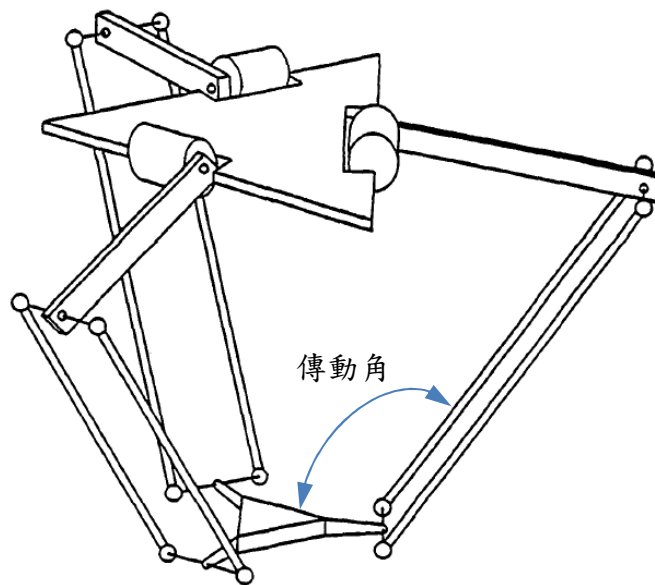


圖4-2 Delta機器手臂之結構[22]

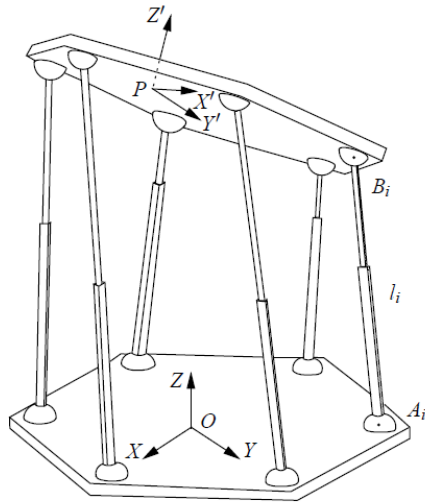


圖4-3 史都華平台之結構[23]

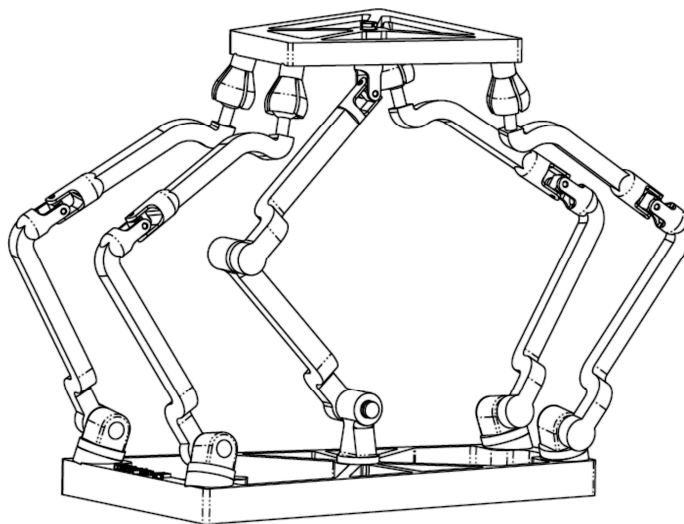


圖4-4 自由度為四之類史都華平台之結構[24]

不過，對本文之應用而言，史都華平台應該比較適合用來調整重心，因為史都華平台有六支線性致動器以支撐負荷，也就是每支致動器只須提供總功率的六分之一即可，而且線性致動器的體積通常比較小，故整體結構上會顯得比較緊湊。反之，delta機器手臂只有三個旋轉馬達以驅動整個機構，所以各馬達必須提供較大的功率，又因為旋轉馬達和減速機的體積通常會比較大，

所以要將它們安裝於狹小的底盤上可能會有一些困難，此外為了提高delta機器手臂之機械利益，應使圖4-2中之傳動角儘量接近90度，而此一要求將大幅縮小delta機手臂之活動平台的運動範圍，至於圖4-4所示的機構也有類似的情形。因此，分析後本文決定採用史都華平台為重心調整機構。

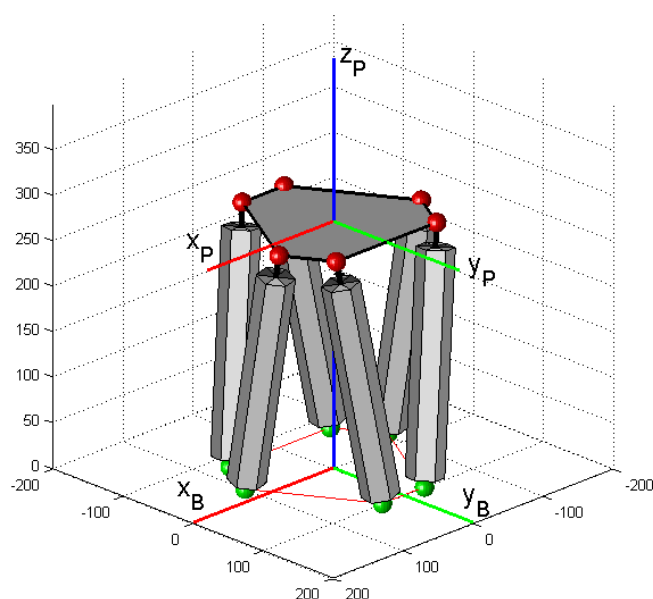


圖4-5 重心調整機構處於初始位置時的構形

參見圖4-5，為了使重心調整機構(史都華平台)可安裝於前節所討論之可用的裝置空間內，本文令各伸縮桿之長度可由275mm伸長至325mm，而六支伸縮桿之接頭在活動平台 $P$ 上的位置 $P_i(i=1, 2, \dots, 6)$ 如圖4-6所示，至於伸縮桿之接頭在底盤 $B$ 上的位置 $B_i$ 則如圖4-7所示。圖4-5顯示此一機構處於初始位置時的構形，此時各伸長桿的長度縮至最短，而上下兩個接頭之間的垂直距離為271mm。為了檢驗此一重心調整機構是否可推動座椅完成指定的動作，本章將分析它的工作空間是否包含了實際活動所需的空間。但在求其工作空間之前則先探討史都華平台的逆向運動分析方法，因為活動平台(座椅)必須根據平衡之需要而移動至特定位置以調控車速並平衡轉彎時之離心力。而為了使活動平台移

至指定位置必須控制伸縮桿的伸縮運動(即調整各伸縮桿的長度)，故下一節將探討史都華平台之逆向運動分析方法。

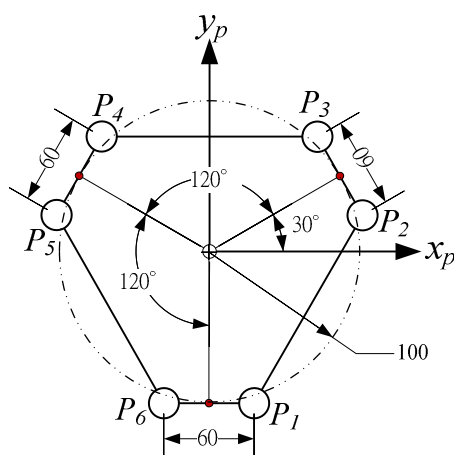


圖4-6 六支伸縮桿之接頭在活動平台上的位置

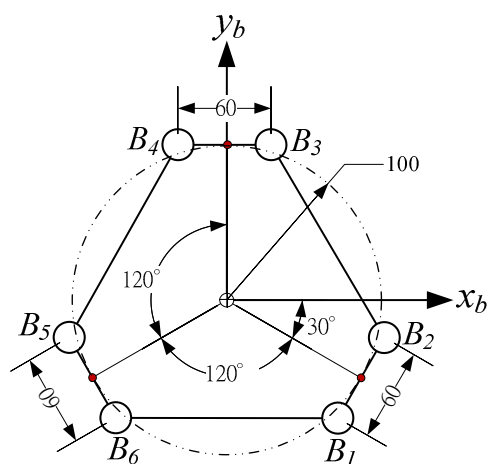


圖4-7 六支伸縮桿之接頭在底盤上的位置

## 4.2 史都華平台之逆向運動分析

在駕駛兩輪車的過程中，座椅應相對於底盤前後左右移動以調控車速並使兩輪保持貼地狀態，設若已透過動力分析求得座椅相對於底盤上參考點在前後方向和左右方向之位移，則史都華平台中之六支致動器之伸長量可由下列之逆向運動分析方法求得[25]。

參見圖4-8，首先令座標系 $O_P-x_Py_Pz_P$ 和座標系 $O_B-x_By_Bz_B$ 分別固定附著於活動平台 $P$ 和底盤 $B$ 上，而平台 $P$ 相對於底盤 $B$ 之方位矩陣 ${}^B\mathbf{A}_P$ 以三個連續旋轉矩陣加以表示為

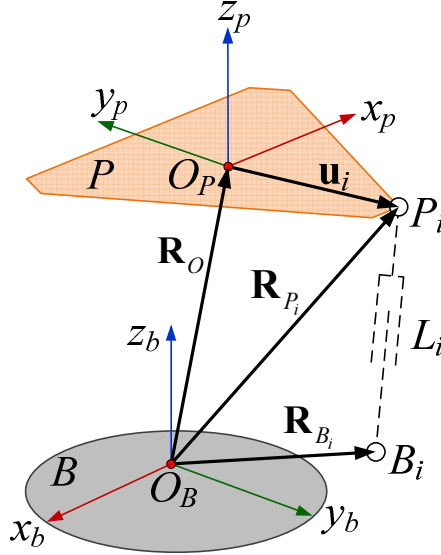


圖4-8 史都華平台的逆向運動分析

$$\begin{aligned}
 {}^B\mathbf{A}_P &= \mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_x(\alpha) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4-1)
 \end{aligned}$$

其中 $\alpha$ 、 $\beta$ 和 $\gamma$ 分別為繞局部 $X$ 軸、 $Y$ 軸和 $Z$ 軸之旋轉角。其次，令致動器 $i$ 上之接頭 $P_i$ 在平台座標系中之位置向量為 $\mathbf{u}_i$ ，而 $\mathbf{R}_O$ 為平台座標系之原點 $O_P$ 在底盤座標系中之位置向量，則接頭 $P_i$ 在底盤座標系中之位置向量 $\mathbf{R}_{P_i}$ 可寫為

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{P_i} &= \mathbf{R}_O + \mathbf{u}_i \\
 &= \mathbf{R}_O + {}^B\mathbf{A}_P \mathbf{u}_i' \quad (4-2)
 \end{aligned}$$

又因為致動器*i*之另一個接頭 $B_i$ 在底盤座標系中之位置向量 $\mathbf{R}_{B_i}$ 為已知之定向量，故可求得致動器*i*之兩個接頭之間的長度 $L_i$ 如下所示。

$$L_i = \|\mathbf{R}_{P_i} - \mathbf{R}_{B_i}\| \quad (4-3)$$

令伸縮桿縮上兩接頭之間的最小距離和最大距離分別為 $L_{min}$ 和 $L_{max}$ ，則由式(4-3)所求得之 $L_i$ 必須滿足下列桿長條件：

$$L_{min} \leq L_i \leq L_{max} \quad (4-4)$$

若各伸縮桿之桿長皆滿足(4-4)則表示平台可到達指定的位置，否則就表示活動平台無法移動到指定位置。

#### 4.3 重心調整機構之工作空間

重心調整機構之工作空間可採用全域搜尋的方式求得，也就是先指定一個長、寬和高皆大於實際活動範圍的矩形空間，然後逐一令該空間中各點為活動平台(座椅)之座標原點 $O_B$ 。再使用前節所介紹之逆向運動分析法來求得各伸縮桿的長度 $L_i$ ，若各伸縮桿的長度都滿足桿長條件(4-3)，則該點為機構工作空間中之點，而這些點所構成的點集合就是重心調整機構的工作空間。

令活動平台之座標原點 $O_B$ 的座標為 $(x_b, y_b, z_b)$ ，若在 $y_b=0$ 的平面上搜尋所有可滿足桿長條件的區域，則可得圖4-9所示之工作區，而在 $x_b=0$ 的平面上搜尋則得圖4-10所示的區域。由以上兩圖可發現，當 $x_b=y_b=0$ 時活動平台上之 $O_B$ 點可到達之最低高度為 $z_b=271$ ，所以平台和底盤之間的高度差必須大於271mm。不過，若檢視機構在 $z_b=271$ 之平面上的工作區(圖4-15)，則可知平台在該高度時

它的水平活動範圍只是一個點，故平台在該點附近只能向上平移，而無法向下平移或前後左右平移。

為了瞭解重心調整機構之平台在什麼高度時有比較大的水平活動區域，故在 $z_b=225\sim 321$ 等平面上逐一搜尋滿足桿長條件的工作區，圖4-12~4-17顯示其中幾個平面上的工作區。而對各平面之工作區加以分析後可知，機構的活動平台在 $z_b=275\sim 310$ 這些高度時，在前後方向和左右方向都至少有 $\pm 50\text{mm}$ 的平移量，參見圖4-9和4-10中以矩形所標示的區域，也因此4-1節所訂定的機構幾何尺寸的確可滿足控制上的要求。

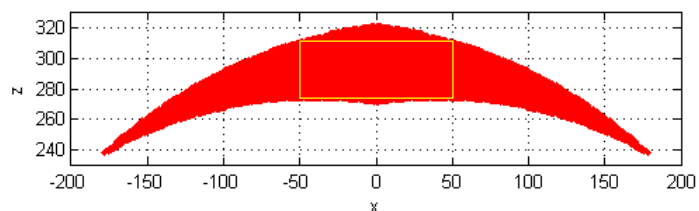


圖4-9 機構在 $y_b=0$ 之平面上的工作區(單位：mm)

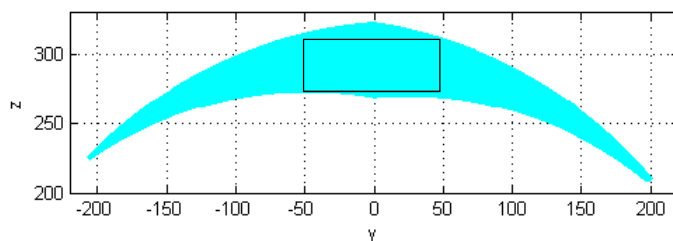


圖4-10 機構在 $x_b=0$ 之平面上的工作區(單位：mm)



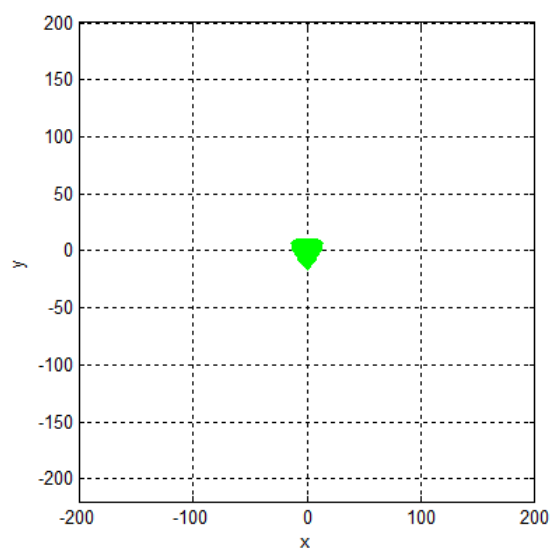


圖4-11 機構在 $z_b=320$ 之平面上的工作區(單位：mm)

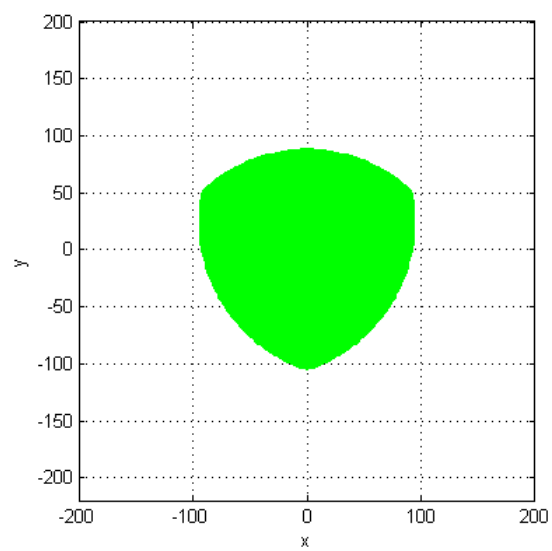


圖4-12 機構在 $z_b=296$ 之平面上的工作區(單位：mm)

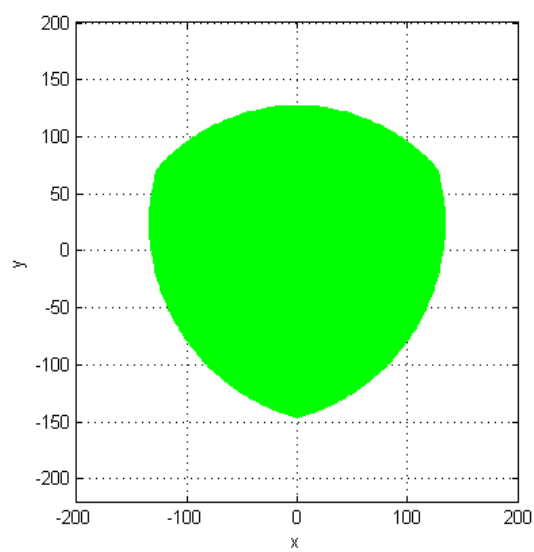


圖4-13 機構在 $z_b=275$ 之平面上的工作區(單位：mm)

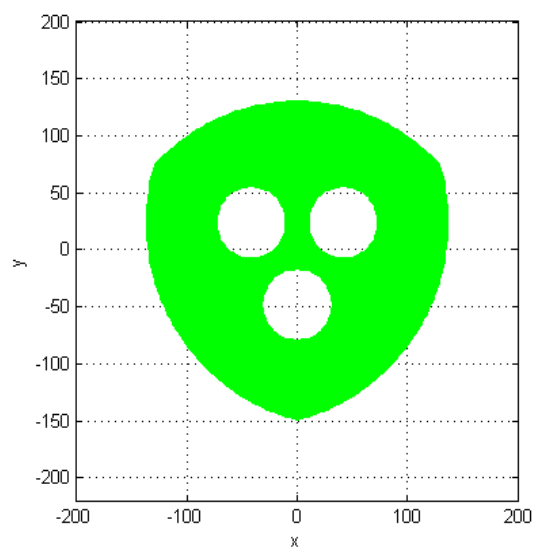


圖4-14 機構在 $z_b=273$ 之平面上的工作區(單位：mm)

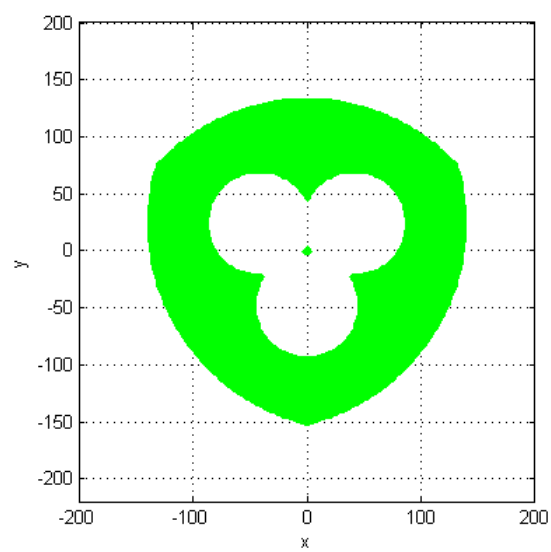


圖4-15 機構在 $z_b=271$ 之平面上的工作區(單位：mm)

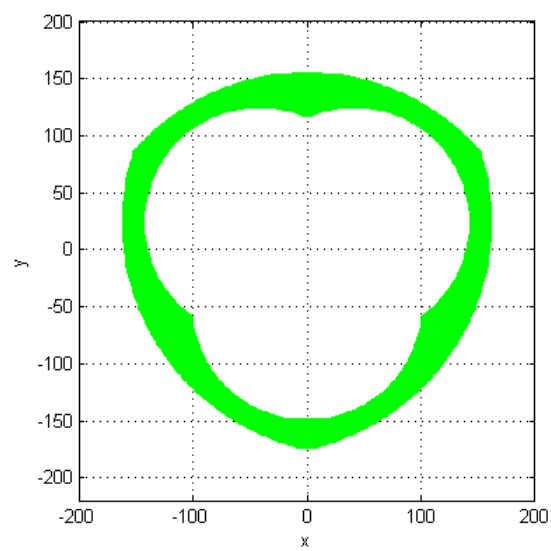


圖4-16 機構在 $z_b=255$ 之平面上的工作區(單位：mm)

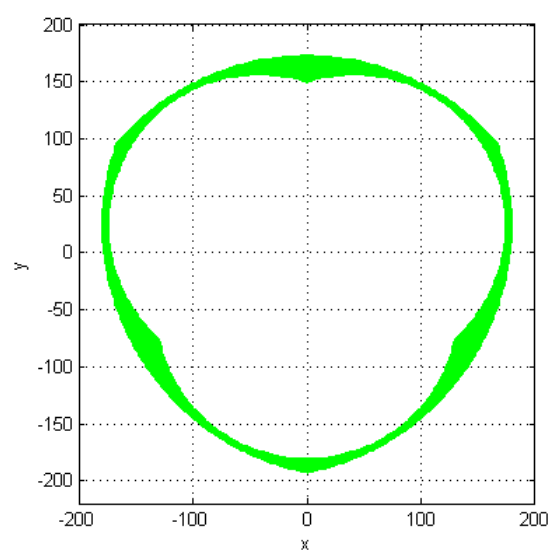


圖4-17 機構在 $z_b=240$ 之平面上的工作區(單位：mm)

## 第五章 結論與討論

### 5.1 結論

現有的同軸兩輪車大都採用立姿或固定座椅的方式騎乘，也就是必須以人為的方式調整身體的重心相對於輪軸前後移動來控制兩輪車前進、停止或後退。至於具有可動座椅的兩輪車，如美國通用汽車和Segway公司所合作發表的PUMA與EN-V，它們都只具有調整重心相對於輪軸前後移動的功能，而無法調整重心左右移動以平衡離心力。因此，本文提出具有可上下、左右和前後移動座椅之兩輪車的構想設計，即以固定在底盤上的史都華平台來調整座椅進行三個相互垂直方向的平移。

為了驗證此一構想設計的可行性，首先將兩輪車的運動分解為縱切面和冠狀切面分別進行動力分析。然後參考現有文獻提出簡單的平衡控制法、速度控制法和方向控制法，同時也提出避免車輪失去接觸力的策略，再進行動力模擬。由模擬結果驗證了前述控制方法的穩定性，並獲得了許多有助於設計此種新型兩輪車的數據，例如：為了達成指定車速所需的馬達功率、為了平衡離心力應將座椅往曲率中心移動的平移量等。

### 5.2 討論

在動力模擬過程中，重心調整機構除了必須提供鉛直方向的力以支撐乘客和座椅的重量以外，還須施加適當的水平推力於座椅才能使重心在水平面上平移。但是，本文使用的重心調整機構-史都華平台，其推力來源為六支桿長可伸縮的電動推桿，而六支推桿在空間中的角度皆不相同，故藉由指定力量來控制活動平台(座椅)並不容易。不過，本研究在動力模擬過程中發現推動座椅的水平推力 $F_c$ 與座椅的水平位移 $c$ 幾乎呈線性變化，因此在透過動力模擬或

實驗以確定 $F_c$ 和 $c$ 之間的比例關係以後，就可將力量控制問題轉換為位置控制。具體而言，就是先由式(3-5)求得水平推力 $F_c$ ，再根據比例關係求得活動平台應有的位移 $c$ ，然後就可由逆向運動學(參見式(4-2)和(4-3))求得六支推桿應有的伸長量，再進行桿長控制。

其次，由逆向運動分析的結果可見，史都華平台的工作空間趨近於扁平的傘形，所以在 $x$ - $y$ 切面上擁有比較寬廣且連續的活動區域，可使座椅有足夠的平移範圍以平衡兩輪車在加減速與過彎時所承受的慣性力和離心力，此一特性表示史都華平台相當適合於此種應用。此外，若將座椅高度改由手動的方式作調整，即捨棄利用史都華平台來調整 $z$ 軸方向的高度，則可直接使用最大的 $x$ - $y$ 切面作為座椅的平移面，並使該兩輪車具有最大的加減速與過彎能力。

在進行冠狀切面上的平衡分析時，本文分別調整總質心之高度的估計值 $h$ 和兩車輪之間的距離 $w$ ，再觀察這兩個參數對座椅偏移量 $c$ 與車輪接觸力的影響。由模擬結果發現，藉由提高總質心高度的估計值 $h$ 能夠使車輪接觸力不小於零，但相對的必需大幅增加座椅偏移量。在相同的運動狀態下，若只加寬兩車輪之間的距離 $w$ ，同樣也能夠使車輪接觸力不小於零，並且減少了座椅所需要的偏移量。因此，若以實作的角度來考量，則適當的增加車輛底盤寬度比較能夠提升兩輪車過彎時抵抗離心力的能力。

關於重心調整機構的選用方面，本文基於傳動角、結構緊湊、重量輕、活動範圍大、負重比高等因素加以考量，最後決定選用史都華平台。該平台機構雖然擁有上述所提的優點，而分析結果也證實了它對於兩輪車的適用性，不過它也有一些不利於實際應用之處。例如，史都華平台的構造比較複雜，而其組件包含了兩個平台、六支伸縮桿、六個驅動馬達與十二個萬向接頭，所以製作成本比較高。因此，未來可由設計和製造的角度探討降低其成本的方法，同時尋找其他成本更低且同樣適用於此種兩輪車的重心調整機構。

## 參考文獻

- [1] 交通部統計處：<http://www.motc.gov.tw/ch/home.jsp?id=54&parentpath=0,6>
- [2] 美國 Segway 公司：<http://www.segway.com/>
- [3] 阮曉鋼、蔡建義、李欣源、趙建傳合著，兩輪自平衡機器人的研究與設計，科學出版社，2012。
- [4] K. Yamafuji and T. Kawamura, "Postural control of a monoaxial bicycle," *JRSJ*, vol. 7, no. 4, pp. 74-79, 1988.
- [5] O. Matsumoto, S. Kajita and K. Tani, "Estimation and control of attitude of a dynamic mobile robot using internal sensors," *JRSJ*, vol. 8, no. 5, pp. 37-46, 1990.
- [6] Y. Ha and S. Yuta, "Trajectory tracking control for navigation of self-contained mobile inverse pendulum," *IEEE/RSJ/GI Int. Conf. on Advanced Robotic Systems and the Real World'*, vol. 3, pp. 12-16, Sep. 1994.
- [7] R. Fierro and L. Lewis, "Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics," *Journal of Robotic Systems*, vol.14, no. 3, pp.149-163, 1997.
- [8] 陳奕儒，旋轉式倒單擺之直立與定位控制，國立中央大學電機工程研究所，碩士論文，1997。
- [9] Wikipedia-Segway：[http://en.wikipedia.org/wiki/Segway\\_PT](http://en.wikipedia.org/wiki/Segway_PT)
- [10] S. Oikawa, Coaxial Two-Wheeled Vehicle and Its Control Method, US Patent 0 130 925, 2011.
- [11] TOYOTA Winglet：[http://www.toyota.co.jp/en/news/08/0801\\_1.html](http://www.toyota.co.jp/en/news/08/0801_1.html)
- [12] iBot：<http://www.ibotnow.com/>

- [13] P.U.M.A. : <http://www.segway.com/puma/>
- [14] EN-V : <http://www.segway.com/en-v/>
- [15] 謝慈馨，自動平衡同軸雙輪車之人機相互作用研究，國立清華大學動力機械工程學系，碩士論文，2011。
- [16] J.B. Morrell, "Design of a closed loop controller for a two wheeled balancing transporter," *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems San Diego, CA, USA*, pp. 4059-4064, 2007
- [17] M. R. M. Crespo da Silva, *Intermediate Dynamics: Complemented with Simulations and Animations*, McGraw-Hill, NewYork, 2004.
- [18] A. A. Shabana, *Computational Dynamics*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 2001
- [19] J. García de Jalón and E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems--The Real-Time Challenge*, Springer-Verlag, 1994.
- [20] D. L. Kamen, R. R. Ambrogio, R. J. Duggan, and R. K. Heinzmann, Personal Mobility Vehicles and Methods, US Patent 0 032 743, 2001.
- [21] 張志鋒、沈軒豪，具可動座艙之同軸兩輪車的開發，2012精密機械與製造科技研討會，屏東縣，論文編號J020，2012。
- [22] R. Clavel, "Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté," Ph.D. Thesis, EPFL, Lausanne, Switzerland, 1991.
- [23] O. Bohigas, L. Ros and M. Manubens, "A unified method for computing position and orientation workspaces of general Stewart platforms," *2011 ASME International Design Engineering Technical Conference*, Washington, DC, USA, pp. 959-968, 2011.



- [24] D. Zhang and C.M. Gosselin, "Kinetostatic modeling of parallel mechanisms with a passive constraining leg and revolute actuators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, pp. 599-617, 2002.
- [25] K. Harib and K. Srinivasan, "Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures," *Robotica*, vol. 21, pp. 541-554, 2003.