# ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLERLE
# DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Doç. Dr. Eyüp Sabri TÜRKER

Prof. Dr. Metin BAŞARIR

# İÇİNDEKİLER

## GİRİŞ

Fiziksel olaylarla ilgili problemlerin incelenmesinde problemin özelliklerini taşıyan matematiksel modelin kurulması gerekmektedir. Genellikle bu tür modellerde bilinmeyen fonksiyon yada fonksiyonlarla bağımsız değişkenleri ve bu fonksiyonların türevlerini içeren bir denklem ortaya çıkmaktadır. Bu tür problemlerin çözümünde amaç, denklemi sağlayan bilinmeyen fonksiyon yada fonksiyonların elde edilmesidir.

Benzer özellikteki olayların ortaya koyduğu denklem türleri aynı olduğundan, denklemlerin başlangıçta sınıflandırılıp, çözüm yöntemlerinin belirlenmesi yoluna gidilmektedir. Çoğunlukla uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan diferansiyel denklemler, bazı başlangıç veya sınır şartlarını da doğal olarak beraberlerinde taşırlar. Böyle durumlarda denklemin çözümü söz konusu şartlara bağlı olarak belirlenmektedir.

Öncelikle, çalışılan sistemin temel bileşenlerinin belirlenmesi istenir. Bir elektrik devresi için, örneğin bunlar direnç, indüktans, kapasite, akım, elektrik gücü ve devre şekilleridir. Sistemin davranışını gözlemleyerek bir veya daha fazla denklemlerle değişkenler arasında mantıklı bir ilişki kurmaya çalışılır. Genellikle bu denklemler türev içerir. Çünkü sistemin çalışmasını gözlemlediğimizde türevler değişim miktarını ölçer. Böyle denklemlere *diferansiyel denklemler* denir.

Diferansiyel denklemlerin elde edilişleri üç ana kısımda toplanabilir;

i) Problem cebirsel özelliklerle verilebilir,

ii) Geometrik özellikleriyle problemi tanımlayıp, bu özelliklere uyan eğrinin bulunması bir diferansiyel denklem ortaya çıkarır,

iii) Uygulamalı bilim dallarında ise problemin matematiksel modeli elde edilmelidir.

Sistem hakkındaki gerekli olan özel bilgilerle ilgili diğer denklemle birlikte diferansiyel denklemlere, sistemin *matematiksel modeli* 'ni oluşturuyor denir. Sistemin önemli bileşenlerinin neler olduğunu anlamak, nasıl davrandığını ve sistemin daha sonra nasıl davranacağını tahmin etmek için modelin denklemlerini çözmek gerekir.

# BÖLÜM 1

## ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

### 1.1. Giriş

Bir değişken ve bu değişkenin fonksiyonu ile bu fonksiyonun belirli türevleri arasındaki bir bağıntıya "Diferansiyel Denklem" adı verilir. x reel değişkeninin fonksiyonu y(x) olmak üzere n.mertebeden bir diferansiyel denklem:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$$

şeklinde gösterilebilir. Denklemin gerçekten n.mertebeden olması yani fonksiyonun n. türevin denklemde görünebilmesi için,

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$$

olmalıdır.Yukarıdaki F fonksiyonu $y, y', y'', \ldots$ ve $y^{(n)}$ cinsinden lineer bir fonksiyon ise diferansiyel denkleme lineer,aksi halde ise non-lineer diferansiyel denklem denir.

Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir.

Mesela, $y''' + P(x)y'' + Q(x)y' = R(x)$ denklemi en fazla üçüncü mertebeden türev bulundurduğu için üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

Bir diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeli türevin derecesine diferansiyel denklemin derecesi denir.

$x^2(y''')^2 + 3x(y')^3 = sinx$ denklemi ikinci derecedendir.

Bir diferansiyel denklemde $y$, $y'$ ,$y''$,.....,$y^{(n)}$,... yerine $y = f(x)$ fonksiyonu ve bunun $f'(x), f''(x), \ldots$ türevleri konduğunda denklem özdeş olarak gerçeklenirse y = f(x) fonksiyonuna diferansiyel denklemin özel çözümü denir.

Örneğin, $y' - x^2 = 0$ denkleminin genel çözümü:

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

şeklindeki fonksiyonlardır. C keyfi sabitine özel değerler verilerek diferansiyel denklemin özel çözümleri elde edilir. Bir özel çözümün gösterdiği eğriye diferansiyel denklemin **integral eğrisi** denir.

Bazı özel çözümler genel çözümden elde edilemeyebilir. Yani çözüm olduğu halde denklemin genel çözümünden elde edilemeyebilen çözümlerdir. Böyle çözümlere "Tekil Çözümler" denir.

y fonksiyonunun tek veya çok değişkenli olmasına göre, diferansiyel denklem adi veya kısmi türevler ihtiva eder. Adi türevler ihtiva eden bir diferansiyel denkleme "adi diferansiyel denklem", kısmi türevler ihtiva eden bir diferansiyel denkleme de "kısmi türevli diferansiyel denklem" denir.

**I.2. Fonksiyon Aileleri ve Bunların Diferansiyel denklemleri**

Bir aralıkta diferansiyele haiz fonksiyonların ailesi,

$$y = f(x, C)$$

şeklinde olsun. Burada C parametresi belirli bir aralıkta değişmektedir. Yukarıda verilen aile denkleminde türev alırsak:

$$y' = \frac{\partial}{\partial x} f(x, C)$$

bulunur. Bu iki denklemden C parametresi yok edilerek $x$, $y$ ve $y'$ arasında $\varphi(x, y, y') = 0$ şeklinde bir diferansiyel denklem bulunur.

Eğri ailelerinin sağladığı diferansiyel denklemlerin elde edilişini örnekler üzerinde verelim.

**ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER**

**1.** Genel ikinci derecede eğrilerin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Bu tip eğrilerin denklemi

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

şeklinde olduğundan, ard arda üç kez türev almak suretiyle,

$$y' = 2C_1 x + C_2 \Rightarrow y'' = 2C_1 \Rightarrow y''' = 0$$

elde edilir.

$$y''' = 0$$



denklemi keyfi sabit ihtiva etmediğinden aranan denklemdir.

**2.** Merkezi OX ekseni üzerinde bulunan R yarıçaplı dairelerin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen dairelerin denklemi $(x-c)^2 + y^2 - R^2 = 0$ olduğundan, bir kez türev almak suretiyle

$$2(x-c) + 2y.y' = 0 \Rightarrow x - c = -yy'$$

elde edilir. Bu iki denklem arasından c sabiti yok edilerek

$$(y.y')^2 + y^2 - R^2 = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

**3.** Bir m kütlesi bir doğru boyunca hareket etmektedir. Cisim iki kuvvetin etkisi altındadır. Birincisi, hareket doğrultusu üzerindeki sabit bir 0 noktasından kütlenin x uzaklığıyla orantılı olarak etkimektedir. İkincisi, cismin hızıyla orantılı bir direnç kuvvetidir. Toplam kuvveti bir diferansiyel denklem ile ifade ediniz.

**ÇÖZÜM:** Birinci kuvvet $f_1 = -k_1 x$, ikinci kuvvet $f_2 = k_2 \frac{dx}{dt}$

olarak yazılabilir. Newton kanununa göre,

$$-k_1 x - k_2 \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

yazılabilir. Bu denklem düzenlenirse:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k_2 \frac{dx}{dt} + k_1 x = 0$$

bulunur.

**4.** Herhangi bir noktasındaki normal altı uzunluğu bu noktanın apsisine eşit olan eğrilerin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Bir $K(x, y)$ noktasındaki normal altı uzunluğu $x = y.y'$ şeklinde olduğundan aranan diferansiyel denklem: $x = y.y'$ şeklinde olacaktır.

**5.** $y^2 = 2x$ parabolünün bütün teğetlerinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Parabol üzerindeki herhangi bir $K(a,b)$ noktasındaki teğetin eğimi

$$y' = \frac{1}{b}$$

olacağından, teğetin denklemi,

$$y - b = \frac{1}{b}(x-a)$$

olacaktır. Ayrıca $b^2 = 2a$ olduğundan

$$y - b = \frac{1}{b}(x - \frac{b^2}{2})$$

şeklinde olacaktır. Kısaltılırsa,

$$b.y = x + \frac{b^2}{2}$$

bulunur. Bu denklem ile

$$y' = \frac{1}{b}$$

arasında b sabiti yok edilirse

$$2x(y')^2 - 2yy' + 1 = 0$$

şeklinde aranan diferansiyel denklem bulunmuş olur.

**6.** Herhangi bir noktasındaki teğet altı uzunluğunun, bu noktanın koordinatları çarpımına eşit olan eğrilerin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Teğet altı uzunluğu

$$S_t = \frac{y}{y'}$$

şeklinde olduğundan aranan denklem $x.y = \dfrac{y}{y'}$ veya $y'x - 1 = 0$

şeklinde olacaktır.

**7.** $r = C_1(1-cos\theta)$ denklemi ile verilen kardiyoid ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.



**ÇÖZÜM:** Verilen denklem θ ya göre türetilirse, $\dfrac{dr}{d\theta} = C_1 sin\theta$ bulunur. Bu iki denklem arasından $C_1$ sabiti yok edilerek,

$$r = \frac{1}{sin\theta} \cdot \frac{dr}{d\theta}(1-cos\theta)$$

veya

$$rsin\theta . d\theta = (1-cos\theta)dr$$

bulunur.

**8.** Düzlemdeki tüm çemberlerin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Çember denklemi,

$$x^2 + y^2 - 2C_1x - 2C_2y + C_3 = 0$$

şeklinde olduğundan ard arda üç kez türev alınırsa,

$$2x + 2(y'y) - 2C_1 - 2C_2y' = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$2 + 2(y')^2 + 2yy' - 2C_2y'' = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$4y'y'' + 2(y')^2 + 2yy'' + C_2y''' = 0 \qquad \text{(III)}$$

bulunur. Son denklemden, $C_2$ sabiti yalnız bırakılıp (II) de yerine yazılırsa:

$$[1 + (y')^2] \cdot y''' - 3y'(y'')^2 = 0$$

şeklinde aranılan diferansiyel denklem bulunur.

**9.** $x = C_1 sin(y + C_2)$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem iki sabit ihtiva ettiğinden ard arda iki kez türev alınırsa,

$$1 = C_1y'cos(y + C_2)$$

$$0 = C_1y''cos(y + C_2) - C_1(y')^2 sin(y + C_2)$$

bulunur. Bu denklemlerden $C_1$ ve $C_2$ yok edilirse,

$$y'' - x(y')^2 = 0$$

bulunur.

**10.** $lny = C_1x^2 + C_2$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem x 'e göre iki kez türetilerek,

$$\frac{y'}{y}=2C_1x \quad \Rightarrow \quad \frac{y''\cdot y-(y')^2}{y^2}=2C_1$$

bulunur. Bu son iki denklem arasında $C_1$ yok edilirse,

$$xyy''-yy'-x(y')^2=0$$

bulunur.

**11.** $y=sinx+C\ e^{-sinx}$ ailesinin sağladığı diferansiyel denklemi bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem $x$'e göre bir kez türetilirse,

$$y'=cosx-C\ cosx.e^{-sinx}$$

elde edilir. Bu iki denklem arasında C sabiti yok edilirse,

$$y'=cosx(1-y+sinx)$$

veya

$$y'-(1-y+sinx)cosx=0$$

bulunur.

**12.** $y=C\ x^n$ şeklinde verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Eğri ailesi bir keyfi sabit ihtiva ettiğinden diferansiyel denklemi 1. mertebeden olacaktır. O halde verilen denklemin bir kez türevini alırsak:

$$y'=nC\ x^{n-1}$$

bulunur. Bu iki denklem arasında C sabiti yok edilirse, yani

$$C=\frac{y}{x^n}$$

ifadesi ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$y'x=ny \quad \text{veya} \quad y'x-ny=0$$

şeklinde bulunur.

**13.** $siny-C\ cosx=0$ şeklinde verilmiş olan eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.



**ÇÖZÜM:** Verilen ifade bir kere türetilirse,

$$y'cosy+C\ sinx=0 \quad \text{veya} \quad C=-y'\frac{cosy}{sinx}$$

bulunur. Bunu verilen denklemde yerine yazarsak,

$$siny-y'\frac{cosy}{sinx}\cdot cosx=0 \quad \text{veya} \quad \frac{siny}{cosy}-\frac{cosx}{sinx}y'=0$$

bulunur. Buradan da,

$$tgy-y'cotgx=0$$

şeklinde eğri ailesinin diferansiyel denklemi bulunur.

**14.** $y=C_1cosx+C_2sinx$ şeklinde verilmiş olan eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen ifade x 'e göre iki kez türetilirse,

$$y'=-C_1sinx+C_2cosx \quad \Rightarrow \quad y''=-C_1cosx-C_2sinx$$

bulunur. Buradan,

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix} y' & cosx \\ y'' & -sinx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -sinx & cosx \\ -cosx & -sinx \end{vmatrix}}=-y'sinx-y''cosx$$

$$C_2=\frac{\begin{vmatrix} -sinx & y' \\ -cosx & y'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -sinx & cosx \\ -cosx & -sinx \end{vmatrix}}=-y''sinx+y'cosx$$

bulunur. Bu değerleri verilen denklemde yerine yazarsak,

$$y=(-y'sinx-y''cosx)cosx+(-y''sinx+y'cosx)sinx$$

$$y=-y''cos^2x-y''sin^2x$$

veya

$$y''+y=0 \qquad \text{bulunur.}$$

**15.** $y=(lnx+C)x$ şeklinde verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem $x$'e göre bir kez türetilirse,

$$y' = 1 + lnx + C$$

bulunur. Buradan da

$$C = y' - 1 - lnx$$

yazılabilir. Bunu verilen denklemde yerine yazarsak,

$$y = y'x - x \quad \text{veya} \quad y'x - y = x$$

şeklinde aranan diferansiyel denklem bulunmuş olur.

**16.** $y = \dfrac{2x}{2C - x^2}$ şeklinde verilmiş olan eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen ifade

$$(2C - x^2)y - 2x = 0$$

şeklinde yazılıp $x$'e göre türetilirse,

$$-2xy + (2C - x^2)y' - 2 = 0$$

bulunur. Birinci denklemden,

$$C = \frac{x^2 y + 2x}{2y}$$

şeklinde bulunan C değerini yerine yazarsak,

$$-2xy + \left(\frac{x^2 y + 2x}{2y} - x^2\right)y' - 2 = 0$$

bulunur. Gerekli kısaltmalar yapılarak aranan diferansiyel denklem

$$y' = y^2 + \frac{y}{x}$$

şeklinde bulunmuş olur.

**17.** $y = C\,e^{y/x}$ şeklinde verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde x 'e göre bir kez türev alırsak,

$$y' = C\left(\frac{y'x - y}{x^2}\right)e^{y/x}$$



bulunur. Verilen denklemden

$$C = y.e^{-y/x}$$

şeklinde bulunan C 'yi yerine yazarsak,

$$y' = y.e^{-y/x}\left(\frac{y'x - y}{x^2}\right)e^{y/x}$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılarak

$$y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$$

bulunur.

## PROBLEMLER

**A.** Denklemleri aşağıdaki şekilde verilmiş olan eğri ailelerinin diferansiyel denklemlerini bulunuz.

1. $y + \dfrac{y^3}{3} = \dfrac{x^3}{3} + C$ **Cevap:** $y' = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$
2. $y = Cx^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ **Cevap:** $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ **Cevap:** $(y^2 - x^2) - 2xyy' = 0$
4. $y = Cx + C^3$ **Cevap:** $y = xy' + (y')^3$
5. $y = Ax + \dfrac{B}{x}$ **Cevap:** $x^2 y'' + xy' - y - lnx = 0$
6. $y = xlnCx$ **Cevap:** $y' - \dfrac{y}{x} - 1 = 0$
7. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$ **Cevap:** $y''' - y' - e^x = 0$
8. $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} - lnx$ **Cevap:** $x^2 y'' + xy' - y = lnx$
9. $xy^2 + x^3 = C.y$ **Cevap:** $(3x^2 y + y^3)dx + (xy^2 - x^3)dy = 0$
10. $y = C.x + \dfrac{3}{C}$ **Cevap:** $y = xy' + \dfrac{3}{y'}$

**11.** $\frac{1}{x}+ylnx=C$ **Cevap:** $x^2lnxy'+xy-1=0$

**12.** $y=tg(C-x+e^{-x})$ **Cevap:** $\frac{e^x}{1+e^x}dy+(1+y^2)dx=0$

**13.** $y=C_1sinwx+C_2coswx$ (w herhangi bir sayıdır.)

**14.** $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$

**15.** $x^2+y^2+2x-2y=C$

**B.** Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında gösterilen diferansiyel denklemlerin genel çözümleri olduklarını gösteriniz.

| | Fonksiyon | Diferansiyel Denklem |
|---|---|---|
| 1. | $y=Ce^x$ | $y'=y$ |
| 2. | $y=(x+C).e^{-x}$ | $y'+y=e^{-x}$ |
| 3. | $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ | $y''-y=0$ |
| 4. | $y=C(x-C)^2$ | $(y')^3-4xyy'+8y^2=0$ |
| 5. | $y=C_1sinx+C_2cosx$ | $y''+y=0$ |
| 6. | $y^2=Cx^2-C$ | $(x^2-1)y'-xy=0$ |
| 7. | $x^2+2xy-C=0$ | $(x+y)dx+xdy=0$ |
| 8. | $x^2y-x-Cy=0$ | $xy'+2xy^2-y=0$ |
| 9. | $y=xC+\frac{1}{C^2}$ | $y=y'x+\frac{1}{(y')^2}$ |
| 10. | $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$ | $y=y'x+\sqrt{1+y'^2}$ |



## I.3. Birinci Mertebeden ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler

$$F(x,y,y')=0$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemin çözümü,

$$f(x,y,C)=0$$

şeklindedir. Buna diferansiyel denklemin genel çözümü denir. C'nin her bir değeri için elde edilen çözüme ise özel çözüm denir. Genel olarak her özel çözüm genel çözümden elde edilemeyebilir. Çözüm olduğu halde genel çözümden elde edilemen böyle özel çözümlere Tekil (Singüler) Çözüm denir.

### I..3.1. Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$P(x)$ ve $Q(y)$ verilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$P(x)dx+Q(y)dy=0$$

şeklindeki bir diferansiyel denkleme değişkenlerine ayrılabilen tip diferansiyel denklem denir. Bu tip denklemlerde genel çözüm:

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C$$

şeklindedir. C keyfi bir sabiti göstermektedir. Bazı durumlarda diferansiyel denklem

$$P_1(x)\,Q_1(y)dx\;+\;P_2(x)\,Q_2(y)dy=0$$

şeklinde verilebilir. Bu kolayca

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0$$

şekline getirilebilir ( $P_2(x)\neq0$, $Q_1(y)\neq0$ için). Bu durumda genel çözüm,

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C$$

şeklinde olacaktır.

## ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

**1.** $x\cos y\, dx - e^x \sin y\, dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen diferansiyel denklem,

$$xe^{-x}dx - \frac{siny}{cosy}dy = 0$$

şekline dönüştürülüp integral alınırsa

$$\int xe^{-x}\, dx - \int tgy\, dy = C$$

bulunur. İntegraller, bilinen metodlarla hesaplanarak

$$-(x+1)e^{-x} + ln(cosy) = C$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**2.** $x(x-4)dy + ydx = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

Her iki tarafı $x(x-4)\cdot y$ ile çarp

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x(x-4)} = 0$$

şekline getirilip integral alınırsa,

$$lny + \frac{1}{4}ln(x-4) - \frac{1}{4}lnx = lnC \quad \Rightarrow \quad 4\ln y + ln\frac{x-4}{x} = 4\ln C$$

$C^4 = C_1$ düşünülerek

$$ln(y^4.\frac{x-4}{x}) = lnC_1 \quad \Rightarrow \quad y^4 = \frac{C_1 x}{x-4}$$

veya

$$y^4(x-4) - C_1 x = 0$$

şeklinde genel çözüm bulunur.



**3.** $(1+2x)ydy + (1+y^2)dx = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$\frac{y}{1+y^2}dy + \frac{dx}{1+2x} = 0$$

şekline getirilip her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\frac{1}{2}ln(1+y^2) + \frac{1}{2}ln(1+2x) = lnC \quad \Rightarrow \quad ln\sqrt{(1+y^2)(1+2x)} = lnC$$

$$(1+y^2)(1+2x) = \sqrt{C} = C_1$$

veya

$$y^2 = \frac{C_1}{1+2x} - 1$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**4.** $\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{1-y^2}dx = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

şeklinde yazılıp integre edilirse,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C \quad \Rightarrow \quad arcsiny + arcsinx = C$$

bulunur.

**5.** $y' - xy^2 + x = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$y' - x(y^2-1) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - x(y^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{x(y^2-1)dx}{dx} = 0$$

şeklinde düzenlenirse,

$$\frac{dy}{y^2-1} - xdx = 0$$

$$\Rightarrow dy - x(y^2-1)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2-1} - x\,dx = 0$$

ifadesinde integral alınarak

$$2\left(\frac{1}{2}ln(y-1)-\frac{1}{2}ln(y+1)-\frac{x^2}{2}=lnC\right)2$$

bulunur. Gerekli kısaltmalar yapılırsa, genel çözüm olarak

$ln(y-1)-ln(y+1)-x^2=2lnC$

$ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)=e^{x^2}=e^{2lnC}$

$$\frac{y-1}{y+1}=C.e^{x^2}$$

$\frac{y-1}{y+1}=e^{x^2}=C^2$

elde edilir.

6. $y'=\dfrac{sin^2x}{siny}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$siny\ dy-sin^2x\ dx=0$$

şeklinde yazılıp integre edilirse,

$$-cosy-\int\frac{1-cos2x}{2}dx=C \quad\Rightarrow\quad -cosy-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}sin2x)=C$$

veya

$$y=arccos(C_1-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sin2x)$$

bulunur.

7. $y'=\dfrac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$\frac{ydy}{1+y^2}-\frac{xdx}{1+x^2}=0$$

şeklinde yazılıp integre edilirse,

$$\frac{1}{2}ln(1+y^2)-\frac{1}{2}ln(1+x^2)=lnC$$

veya



$$\frac{1+y^2}{1+x^2}=C_1 \quad\Rightarrow\quad 1+y^2=C_1(1+x^2) \quad\Rightarrow\quad y^2=C_1(1+x^2)-1$$

bulunur.

8. $\sin xcos^2ydx+cos^2xdy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{sinx}{cos^2x}dx+\frac{dy}{cos^2y}=0$$

$\int\frac{sinx}{cos^2x}dx=secx+C$

şeklinde yazılıp integral alınırsa,

$$secx+tgy=C \quad\Rightarrow\quad tgy=C-secx$$

$$\Rightarrow\quad y=arctg(C-secx)$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

9. $(1+x^2)y'+xy=x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $(1+x^2)y'+x(y-1)=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{y-1}+\dfrac{x}{1+x^2}dx=0$

yazılabilir. Buradan da integral alırsak,

$$ln(y-1)+\frac{1}{2}ln(1+x^2)=lnC \quad\Rightarrow\quad ln\left[(y-1)\sqrt{1+x^2}\right]=lnC$$

veya

$$(y-1)=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \quad\Rightarrow\quad y=1+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

bulunur.

10. $(1+x^2)dy-(1-y^2)dx=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{dy}{(1-y^2)}-\dfrac{dx}{(1+x^2)}=0$ yazılır. Buradan da integrale geçersek,

$$\frac{1}{2}ln(1-y)-\frac{1}{2}ln(1+y)-arctgx=lnC \quad\Rightarrow$$

$$ln\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = (arctgx) + lnC$$

veya

$$\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = C_1.e^{arctgx}$$

bulunur.

**11.** $e^x y' + y - y^2 = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{dy}{y(1-y)} + e^{-x}.dx = 0$$

şeklinde yazılır. İntegrale geçersek,

$$lny + ln(1-y) - e^{-x} = lnC \quad \Rightarrow \quad ln\frac{y(1-y)}{C} = e^{-x}$$

veya

$$y(1-y) = C.e^{e^{-x}}$$

bulunur.

**12.** $y' = \dfrac{y(x+1)}{x(y-1)}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{y-1}{y}dy - \dfrac{x+1}{x}dx = 0$ dan integral alırsak,

$$y - lny - x - lnx = lnC \quad \Rightarrow \quad y - x = ln(Cxy)$$

veya

$$C.xy = e^{y-x}$$

şeklinde genel çözüm bulunur.



**13.** $y' + \dfrac{(1+y^3).x}{y^2(1+x^2)} = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$\frac{y^2}{1+y^3}dy + \frac{xdx}{(1+x^2)} = 0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$\frac{1}{3}ln(1+y^3) + \frac{1}{2}ln(1+x^2) = lnC$$

$$ln(\sqrt[3]{1+y^3}.\sqrt{1+x^2}) = lnC$$

veya

$$\sqrt[3]{1+y^3} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**14.** $xydy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. $1-x=t^2$

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy - \frac{dx}{x} = 0$$ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

şeklinde yazılır ve her iki tarafın integrali alınırsa,

$$-\sqrt{1-y^2} - lnx = lnC \quad \Rightarrow \quad lnCx = lne^{-\sqrt{1-y^2}} \quad \Rightarrow \quad Cx = e^{-\sqrt{1-y^2}}$$

veya

$$Cx.e^{\sqrt{1-y^2}} - 1 = 0$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**15.** $(x^2+1)(y^2-1)dx + xydy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$\frac{(x^2+1)}{x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$\frac{x^2}{2}+lnx+\frac{1}{2}ln(y^2-1)=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\left[x\sqrt{y^2-1}\right]=ln(C.e^{-x^2/2})$$

$$x\sqrt{y^2-1}=Ce^{-x^2/2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y^2-1}=\frac{C}{x}e^{-x^2/2} \quad \Rightarrow \quad y^2-1=\frac{C}{x^2}e^{-x^2}$$

veya

$$y^2=1+\frac{C}{x^2}e^{-x^2}$$

bulunur.

**16.** $y'+(1-y^2)tgx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{dy}{1-y^2}+tgx\,dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$\frac{1}{2}ln(1+y)-\frac{1}{2}ln(1-y)-ln(cosx)=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}=ln(C.cosx)$$

$$\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}=C.cosx \quad \Rightarrow \quad \frac{1+y}{1-y}=C^2cos^2x$$

bulunur. Buradan da gerekli kısaltmalar yapılarak,

$$y=\frac{C_1cos^2x-1}{C_1cos^2x+1} \quad (C_1=C^2 \text{ alınırsa})$$

elde edilir.

**17.** $\frac{e^x}{1+e^x}dy+(1+y^2)dx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.



**ÇÖZÜM:** Verilen diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{1+y^2}+(\frac{1+e^x}{e^x})dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$arctgy=C-x+e^{-x} \quad \text{veya} \quad y=tg(C-x+e^{-x})$$

bulunur.

**18.** $(1+x^2)y'+x(y-1)=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$\frac{dy}{y-1}+\frac{x}{1+x^2}dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$ln(y-1)+\frac{1}{2}ln(1+x^2)=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\left[(y-1)\sqrt{1+x^2}\right]=lnC$$

$$y-1=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{veya} \quad y=1+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

bulunur.

**19.** $tgy\,sin^2xdy+cotgx\,cos^2ydx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$tgy\frac{1}{cos^2y}dy+cotgx\frac{1}{sin^2x}dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$\frac{1}{2}tg^2y-\frac{1}{2}cotg^2x=C \quad \Rightarrow \quad tg^2y=2C+cotg^2x$$

veya

$$y=arctg(\sqrt{C_1+cotg^2x}) \quad (2C=C_1 \text{ alınarak})$$

bulunur.

**20.** $(e^x-1)dy+y.e^x dx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem

$$\frac{dy}{y}+\frac{e^x}{e^x-1}dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$lny+ln(e^x-1)=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\left[y(e^x-1)\right]=lnC \quad \text{veya} \quad y=\frac{C}{e^x-1}$$

bulunur.

**21.** $y'+\dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)}=0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{y^2}{1+y^3}dy+\frac{dx}{x(1+x^2)}=0$$

şeklinde yazılıp integral alınırsa,

$$\frac{1}{3}ln(1+y^3)+\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=lnC$$

olur.

$$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

integralini hesaplayalım:

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$1\equiv A+Ax^2+Bx^2+Cx$$

$$1\equiv(A+B)x^2+Cx+A$$

$$A=1,\ C=0,\ B=-A=-1$$

bulunur. O halde,



$$\frac{1}{x(1+x^2)}\equiv\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{x(1+x^2)}=lnx-\frac{1}{2}ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{dx}{x(1+x^2)}=ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

bulunur. O halde diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$\frac{1}{3}ln(1+y^3)+ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=lnC$$

veya

$$ln\left[\sqrt[3]{1+y^3}.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=lnC \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{1+y^3}-\frac{C}{x}\sqrt{1+x^2}=0$$

şeklinde bulunur.

**22.** $(x-1)cosydy=2xsinydx$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{cosy}{siny}dy-\frac{2x}{x-1}dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$ln(siny)-2x-2ln(x-1)=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\frac{siny}{(x-1)^2}=lnC.e^{2x}$$

$$siny=C.e^{2x}(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad y=arcsin[c.e^{2x}(x-1)^2]$$

bulunur.

**23.** $ydx-xdy=0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$lnx-lny=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\frac{x}{y}=lnC$$

veya

$$y=C_1x \qquad (1/C=C_1)$$

bulunur.

**24.** $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen diferansiyel denklem,

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$lnx+x+lny-y=lnC \quad \Rightarrow \quad ln(xy)=lnC+y-x$$

$$xy=C.e^{y-x} \quad \text{veya} \quad xy-Ce^{y-x}=0$$

bulunur.

**25.** $(x^2-yx^2)y'+y^2+xy^2=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen diferansiyel denklem,

$$x^2(1-y)dy+y^2(1+x)dx=0$$

veya

$$\frac{1-y}{y^2}dy+\frac{1+x}{x^2}dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$-\frac{1}{y}-lny-\frac{1}{x}+lnx=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\frac{x}{y}=lnC+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$



$$ln\frac{x}{y}=ln(C.e^{\frac{x+y}{xy}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}=(C.e^{\frac{x+y}{xy}})$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**26.** $\frac{tgy}{tgx}y'+\frac{cos^2y}{cos^2x}=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen diferansiyel denklem,

$$\frac{tgy}{cos^2y}dy+\frac{tgx}{cos^2x}dx=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$\frac{1}{2}tg^2y+\frac{1}{2}tg^2x=C \qquad (2C=C_1 \text{ alınırsa})$$

$$tg^2y=C_1-tg^2x \quad \Rightarrow \quad tgy=\sqrt{C_1-tg^2x}$$

veya

$$y=arctg(\sqrt{C_1-tg^2x})$$

bulunur.

**27.** $(y-a)dx+x^2dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y-a}=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$-\frac{1}{x}(y-a)=lnC.e^{1/x} \quad \text{veya} \quad y=a-1-x\ln C$$

bulunur.

**28.** $dr+rtg\theta d\theta=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$\frac{dr}{r}+tg\theta d\theta=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$lnr-ln(cos\theta)=lnC$$

$$ln\frac{r}{cos\theta}=lnC$$

veya

$$r=C.cos\theta$$

bulunur.

**PROBLEMLER**

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y'-y=0$
2. $\sqrt{1-x^2}dy-\sqrt{1-y^2}dx=0$
3. $(1+x^2)dt-\sqrt{t}dx=0$
4. $(x-y^2x)dx+(y-x^2y)dy=0$
5. $e^x tgydx+(1-e^x)sec^2ydy=0$
6. $y'-\frac{cos^2y}{sin^2x}=0$
7. $tgx\,y'-y-a=0$ (a = sabit)
8. $(1+x^2)y'+x(y-1)=0$
9. $y.e^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$
10. $y'e^x-y(1+y)=0$
11. $x.cosydx-e^x sinydy=0$
12. $y'-e^y=0$
13. $\sqrt{a^2-x^2}dy-y\sqrt{a^2-y^2}dx=0$
14. $e^{2x+y}dx-2e^{x-y}dy=0$
15. $a^{-x}dy+Cos^2ydx=0$
16. $(1+x^3)dy-x^2ydx=0$
17. $(a^2+y^2)dx-2x\sqrt{ax-a^2}dy=0$
18. $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0$
19. $yy'=-\sqrt{x-xy^4}$
20. $3x^2y^2dx+2x^3ydy=0$
21. $(x-1)^2ydx+x^2(y+1)dy=0$
22. $2(y+3)dx-xydy=0$
23. $e^x(y-1)dx+2(e^x+4)dy=0$
24. $(xy+x)dx=(x^2y^2+x^2+y^2+1)dy$



**I.3.2. Değişkenlerine Ayrılabilen Hale Dönüştürülebilen Diferansiyel Denklemler**

Bu tür denklemleri üç halde toplamak mümkündür:

**I. Hal:** $y'=\varphi(ax+b)$ şeklinde ise diferansiyel denklemde

• $ax+b=u$ denir
• $\frac{du}{dx}$ bulunarak yerine yazılır

$$u=ax+b$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=a\frac{dy}{du}$$

olacağından verilen denklem,

$$a\frac{dy}{du}=\varphi(u)$$

veya

$$dy=\frac{1}{a}\varphi(u)du$$

halini alır. Bu da integre edilirse,

$$y=\frac{1}{a}\int\varphi(u)du+C$$

veya

$$y=\frac{1}{a}\int\varphi(ax+b)d(ax+b)+C$$

olur.

**II. Hal:** $y'=\varphi(ay+b)$ şeklinde ise diferansiyel denklemde

• $ay+b=u$ denir
• $\frac{dy}{du}$ bulunarak yerine yazılır.

$$u=ay+b$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

formülünden

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}\frac{du}{dx}$$

bulunur. Bunu da verilen denklemde yerine yazarsak,

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx}=\varphi(u)$$

veya

$$\frac{du}{\varphi(u)}=adx$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int\frac{du}{\varphi(u)}=ax+C$$

elde edilir.

**III. Hal:** $y'=\varphi(ax+by+c)$ şeklindeki diferansiyel denklemlerde ise,

$$u=ax+by+c$$

• $ax+by+c=u$ deriz

dönüşümü uygulandığında,

$$\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$$

• $\frac{du}{dx}$ bulunur

• $\frac{dy}{dx}$ çekilerek denklemde yerine yazılır.

veya

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}(\frac{du}{dx}-a)$$

olacağından verilen denklem,

$$\frac{1}{b}(\frac{du}{dx}-a)=\varphi(u)$$

veya

$$\frac{du}{dx}=b\varphi(u)+a$$

ya da



$$\frac{du}{b\varphi(u)+a}=dx$$

şeklini alır. Her iki yanın integrali alınırsa,

$$\int\frac{du}{b\varphi(u)+a}=x+C$$

olarak genel çözüm elde edilir.

## ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

**1.** $y'=sin(2x+3)$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM** $u=2x+3$ dönüşümü uygulanırsa,

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2\frac{dy}{du}$$

olacağından verilen denklem,

$$2\frac{dy}{du}=sin(u) \quad \text{veya} \quad 2\,dy=sinu\;du$$

olur. İntegral alırsak,

$$2y=-cosu+C \quad \text{veya} \quad 2y+cosu-C=0$$

elde edilir. O halde genel çözüm,

$$2y+cos(2x+3)-C=0$$

olur.

**2.** $y'-tg(5x-2)=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u=5x-2$ dönüşümü uygulanırsa,

$$y'=5\frac{dy}{du}$$

olacağından verilen denklem,

$$5\frac{dy}{du}-tgu=0 \quad \text{veya} \quad 5dy-tgudu=0$$

olur. İki tarafın integralini alırsak,

$$5y + ln(cosu) = C$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$5y + lncos(5x-2) = C$$

olur.

3. $y' = cos^2(\lambda y + 3)$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u = \lambda y + 3$ dönüşümü yapılırsa,

$$y' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\lambda}\frac{du}{dx}$$

olacağından verilen denklem,

$$\frac{1}{\lambda}\frac{du}{dx} = cos^2 u \quad \text{veya} \quad \frac{du}{cos^2 u} = \lambda dx$$

halini alır. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$tgu - \lambda x = C$$

bulunur. O halde verilen denklemin genel çözümü,

$$tg(\lambda y + 3) - \lambda x = C$$

şeklindedir.

4. $y' = (ay+b)^n$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u = ay + b$ dönüşümü uygulanırsa,

$$y' = \frac{1}{a}\frac{du}{dx}$$

olacağından verilen denklem,

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dx} = u^n \quad \text{veya} \quad u^{-n}du = a\,dx$$

halini alır. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\frac{u^{-n+1}}{-n+1} = ax + C \quad \text{veya} \quad \frac{1}{(1-n).u^{n-1}} = ax + C$$

bulunur. O halde denklemin genel çözümü,



$$(1-n)(ax+C)(ay+b)^{n-1} - 1 = 0$$

bulunur.

5. $y' = cos(x - y + 5)$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u = x - y + 5$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{du}{dx} = 1 - y'$$

olacağından, verilen denklem,

$$1 - \frac{du}{dx} = cosu \quad \text{veya} \quad (1 - cosu)dx = du$$

olur. İntegrale geçersek,

$$\int \frac{du}{1 - cosu} = dx$$

elde edilir. İntegral hesaplanırsa,

$$x + C = -cotg\frac{u}{2}$$

bulunur. O halde verilen denklemin genel çözümü,

$$x + C = -cotg\frac{x - y + 5}{2}$$

bulunur. $(x - y + 5 \neq 2k\pi, k = \mp 1, \mp 2, ...)$

6. $y' = (3x + 3y + 8)^2$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde $u = 3x + 3y + 8$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{du}{dx} = 3 + 3y'$$

olacağından,

$$\frac{1}{3}(\frac{du}{dx}-3)=u^2 \quad \text{veya} \quad \frac{du}{dx}=3(u^2+1)$$

olur. İntegral alınırsa diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$arctg(3x+3y+8)-3x=C$$

olarak bulunur.

**7.** $(x+y)^2 y'=a^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u=x+y$, $u'=1+y'$ dönüşümü kullanılarak verilen denklem,

$$u^2(u'-1)=a^2 \quad \text{veya} \quad u'=\frac{a^2+u^2}{u^2}$$

şeklini alır. Değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{u^2}{a^2+u^2}du-dx=0$$

veya

$$\frac{u^2+a^2-a^2}{a^2+u^2}du-dx=0$$

$$(1-\frac{a^2}{a^2+u^2})du-dx=0$$

elde edilir. İntegral alınırsa,

$$u-a^2\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}-x=C \quad \text{veya} \quad u-a.arctg\frac{u}{a}-x-C=0$$

bulunur. $u=x+y$ yerine yazılırsa,

$$x+y-a.arctg\frac{x+y}{a}-x-C=0 \quad \text{veya} \quad y=C+a.arctg\frac{x+y}{a}$$

elde edilir.

**8.** $y'=x^{a-1}.y^{1-b}.(\frac{x^a}{a}+\frac{y^b}{b})^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,



$$u=\frac{x^a}{a}+\frac{y^b}{b}; \quad u'=x^{a-1}+y^{b-1}.y'$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{u'}{y^{b-1}}-\frac{x^{a-1}}{y^{b-1}}=x^{a-1}.y^{1-b}.u^2 \quad \text{veya} \quad u'-x^{a-1}=x^{a-1}.y^{1-b}.y^{b-1}.u^2$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$u'-x^{a-1}=x^{a-1}.u^2$$

$$u'=x^{a-1}(1+u^2)$$

olduğu görülür. Bu da değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{1+u^2}-x^{a-1}.dx=0$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$arctgu-\frac{1}{a}x^a=C \quad \text{veya} \quad u=tg(\frac{1}{a}x^a+C)$$

elde edilir. u nun değeri yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{a}x^a+\frac{1}{b}y^b-tg(\frac{1}{a}x^a+C)=0$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**9.** $xy'-y(ln|xy|-1)=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,

$$u=xy; \quad u'=y+xy'$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$x(\frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2})-\frac{u}{x}(lnu-1)=0 \quad \Rightarrow \quad u'-\frac{u}{x}-\frac{u}{x}lnu+\frac{u}{x}=0$$

veya

$$u'-\frac{u}{x}lnu=0$$

bulunur. Buradan, değişkenlerine ayrıldığı takdirde,

$$\frac{du}{ulnu}-\frac{dx}{x}=0$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$ln(lnu)-lnx=lnC \quad \text{veya} \quad lnu=Cx\,; \quad u=e^{Cx}$$

bulunur.

$$u=xy$$

yazılırsa,

$$y=\frac{1}{x}e^{Cx}$$

genel çözümü elde edilir.

**10.** $\frac{e^{cosx}}{cos^2y}y'-sinx\;tgy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u=tgy$ dönüşümü uygulanırsa ; $u'=\frac{y'}{cos^2y}$ ,

$$e^{cosx}.u'-u.sinx=0$$

elde edilir. Bu denklem de değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{u}-sinx\;e^{cosx}=0$$

elde edilir. İntegral alırsak,

$$lnu-e^{-cosx}=lnC \quad \Rightarrow \quad ln\frac{u}{C}=e^{-cosx} \quad \Rightarrow \quad u=C.e^{e^{-cosx}}$$

elde edilir.

$$u=tgy$$

konursa, $tgy=C.e^{e^{-cosx}}$ veya $y=arctg(C.e^{e^{-cosx}})$ bulunur.

**11.** $-yy'+cos^2(x^2-y^2)e^x+x=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u=x^2-y^2$ dönüşümü uygulanırsa; $u'=2x-2yy'$ $\Rightarrow -yy'=\frac{u'-2x}{2}$

$$\frac{u'-2x}{2}+e^xcos^2u+x=0 \quad \text{veya} \quad \frac{u'}{2}-x+e^xcos^2u+x=0$$



bulunur. İntegrale geçilerek

$$tgu+2e^x=C \quad \text{veya} \quad u=arctg(C-2e^x)$$

bulunur.

$$u=x^2-y^2$$

konursa,

$$y^2=x^2-arctg(C-2e^x)$$

elde edilir.

**12.** $y'=(y-4x)^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u=y-4x$; $u'=y'-4$ dönüşümü uygulanırsa, verilen denklem,

$$u'+4=u^2 \quad \text{veya} \quad u'+4-u^2=0$$

haline gelir. Bu da değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{du}{4-u^2}+dx=0$$

elde edilir. İntegrale geçilerek,

$$\frac{1}{4}ln(u+2)-\frac{1}{4}ln(u-2)+x=C_1 \quad \text{veya} \quad ln\frac{u+2}{u-2}=lnC-4x$$

elde edilir. Daha açık olarak,

$$\frac{u+2}{u-2}=C.e^{-4x}$$

bulunur.

$$u=y-4x$$

yazılırsa,

$$\frac{y-4x+2}{y-4x-2}=C.e^{-4x}$$

elde edilir.

**13.** $y'=tg^2(x+y)$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklemde $u = x + y$; $u' = 1 + y'$

dönüşümünün uygulanması sonucunda

$$u' - 1 = tg^2 u \quad \text{veya} \quad u' - (tg^2 u + 1) = 0$$

elde edilir. Bu da değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{1 + tg^2 u} - \frac{dx}{x} = 0 \quad \text{veya} \quad cos^2 u\ du - \frac{dx}{x} = 0$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}sin2u - \ln x = C$$

elde edilir.

$$u = x + y$$

konulursa

$$2(y - x) + sin[2(x + y)] - C_1 = 0$$

bulunur.

14. $x^2(xdx + ydy) + y(xdy - ydx) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$

dönüşüm formüllerini kullanalım.

$$dx = cos\theta\ dr - rsin\theta\ d\theta$$
$$dy = sin\theta\ dr + rcos\theta\ d\theta$$

konulursa

$$r^2cos^2\theta(rdr) + rsin\theta(r^2 d\theta) = 0 \quad \text{veya} \quad r^3cos^2\theta\ dr + r^3 sin\theta\ d\theta = 0$$

elde edilir. Bu denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$dr + \frac{sin\theta}{cos^2\theta}d\theta = 0$$

bulunur. İntegrale geçilirse,

$$r + \frac{1}{cos\theta} = C$$



elde edilir.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad cos\theta = \frac{x}{r}$$

konularak,

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = C \quad \text{veya} \quad (x^2 + y^2)(x + 1)^2 - C_1 x^2 = 0$$

bulunur.

15. $y' = -2(2x + 3y)^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u = 2x + 3y$ ve $u' = 2 + 3y'$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{u' - 2}{3} = -2u^2 \quad \text{veya} \quad u' + 6u^2 - 2 = 0$$

elde edilir. Bu son denklem değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{du}{3u^2 - 1} + 3dx = 0$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$\int \frac{du}{3u^2 - 1} + 3x = C$$

bulunur.

$$\frac{1}{3u^2 - 1} = \frac{A}{\sqrt{3}u + 1} + \frac{B}{\sqrt{3}u - 1}$$

yazılabildiğinden,

$$B = 1/2, A = -1/2$$

bulunur. O halde,

$$\int \frac{du}{3u^2 - 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{3}u + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{3}u - 1}$$

$$\int \frac{du}{3u^2 - 1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}ln(\sqrt{3}u + 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}u - 1)$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\frac{\sqrt{3}u-1}{\sqrt{3}u+1}+3x-C=0$$

şeklindedir.

$$u=2x+3y$$

yazılırsa,

$$ln\left[\frac{\sqrt{3}(2x+3y)-1}{\sqrt{3}(2x+3y)+1}\right]+6\sqrt{3}+C_1=0$$

bulunur.

**PROBLEMLER**

Aşağıdaki problemlere karşılarında gösterilen dönüşümleri uygulayarak genel çözümleri elde ediniz.

1. $(x-2siny+3)dx+(2x-4siny-3)cosy\ dy=0$ ($u=siny$ dönüşümü)
2. $(2+2x^2\sqrt{y})ydx+(x^2\sqrt{y}+2)xdy=0$ ($u=x^2\sqrt{y}$ dönüşümü)
3. $(1-xy+x^2y^2)dx+(x^3y-x^2)dy=0$ ($u=xy$ dönüşümü)
4. $(y-xy^2)dx-(x+x^2y)dy=0$ ($u=xy$ dönüşümü)
5. $(xdx+ydy)(x^2+y^2)=x^3dx$ ($u=x^2+y^2$ dönüşümü)
6. $(e^yy'+e^y-4sinx=0$ ($u=e^y$ dönüşümü)
7. $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$ ($z=xy$ dönüşümü)
8. $y(1-xy)dx-x(1+xy)dy=0$ ($z=xy$ dönüşümü)
9. $y(1-xy+x^2y^2)dx+x(x^2y^2-xy)dy=0$ ($u=xy$ dönüşümü)

**I.3.3. Homojen Diferansiyel Denklemler**

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları x ve y nin aynı dereceden homojen fonksiyonları olsun.



Bu takdirde homojenlik derecesi m ise,

$$P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m P(x,y) \quad , \quad Q(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m Q(x,y)$$

olur.

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ aynı dereceden homojen fonksiyonlar olmak üzere

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

şeklindeki bir diferansiyel denkleme homojen diferansiyel denklem denir. Homojen diferansiyel denklemler,

$$y'=f(\frac{x}{y})$$

şekline getirilebilirler. Bu tip denklemlerde $u=\frac{y}{x}$ veya $y=ux$ dönüşümü uygulanarak denklem değişkenlerine ayrılabilen tipe indirgenir. Genel çözüm için hesaplanan integralde $u=\frac{y}{x}$ koymak kâfidir.

**ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER**

1. $(x^3+y^3)dx-3x^2ydy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $P(x,y)=x^3+y^3$ ve $Q(x,y)=-3x^2y$ şeklindedir. $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları 3. dereceden homojendir. O halde denklemde

$$y=ux$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$dy=xdu+udx$$

olacağından verilen denklem,

$$(x^3+x^3u^3)dx-3x^3u(xdu+udx)=0 \quad \text{veya} \quad (u^3-3u^2+1)dx-3xudu=0$$

halini alır. Bu da

$$\frac{dx}{x}-\frac{3udu}{u^3-3u^2+1}=0$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi son denklem değişkenlerine ayrılabilen tip denklemdir. İntegral alınarak,

$$lnx-3\int\frac{udu}{u^3-3u^2+1}=C$$

şeklinde genel çözüme gidilir.

2. $(x^2+y^2)dy+2y^2dx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Dönüşümün kolay yapılabilmesi için verilen denklemi,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

şeklinde yazıp, $y=ux$ dönüşümünü uygularsak,

$$u'x+u=-\frac{2u^2}{1+u^2}$$

buluruz. Gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$u'x=-\frac{u(u+1)^2}{u^2+1}$$

yazılır. Bu da değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{u^2+1}{u(u+1)^2}du+\frac{dx}{x}=0$$

haline gelir. İntegral almak suretiyle,

$$\int\frac{u^2+1}{u(u+1)^2}du+Lnx=LnC$$

bulunur.

$$\int\frac{u^2+1}{u(u+1)^2}du$$

integralini hesaplayalım:

$$\frac{u^2+1}{u(u+1)^2}\equiv\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}+\frac{C}{(u+1)^2}$$

özdeşliğinden,

$$A=1,\ B=0,\ C=-2$$



bulunur. O halde,

$$\int\frac{u^2+1}{u(u+1)^2}du=\int\frac{du}{u}-2\int\frac{du}{(u+1)^2}$$

yazılabilir. İntegraller alınırsa,

$$\int\frac{u^2+1}{u(u+1)^2}du=lnu-\frac{2}{(u+1)}$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$lnu-\frac{2}{u+1}+lnx=lnC \quad\Rightarrow\quad ln\frac{ux}{C}=ln\,e^{\frac{2}{u+1}} \quad\Rightarrow\quad u=\frac{C}{x}e^{\frac{2}{u+1}}$$

şeklindedir. $u=y/x$ yazarsak,

$$\frac{y}{x}=\frac{C}{x}e^{\frac{2x}{y+x}} \quad \text{veya} \quad y=C.e^{\frac{2x}{y+x}}$$

bulunur.

3. $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan,

$$y=ux\,,\ y'=u'x+u$$

koyarsak,

$$x(u'x+u)-ux=\sqrt{x^2-u^2x^2} \quad\Rightarrow\quad u'x+u-u=\sqrt{1-u^2} \quad\Rightarrow\quad u'x=\sqrt{1-u^2}$$

bulunur. Bu denklem de değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{dx}{x}=0$$

bulunur. İntegral alırsak,

$$arcsinu-lnx=lnC \quad \text{veya} \quad arcsinu=ln(Cx)$$

ya da

$$Cx=e^{arcsinu}$$

bulunur. $u=\frac{y}{x}$ yazılarak genel çözüm

$$Cx=e^{\arcsin y/x}$$

şeklinde bulunur.

4. $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)y'=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)-x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan $u=y/x$ yazalım,

$$x\cos u(u'x+u)=ux\cos u-x$$
$$u'x\cos u+u\cos u=u\cos u-1$$
$$u'x\cos u+1=0$$

bulunur. Değişkenlerine ayrılırsa,

$$\cos u\ du+\frac{dx}{x}=0$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$\sin u+\ln x=\ln C \quad \text{veya} \quad \sin u=\ln(C/x)$$

olur.

$$u=y/x$$

yazılırsa,

$$y/x=\arcsin(\ln C/x)$$

bulunur.

5. $(x+y)y'=x-y$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan,

$$y=ux,$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$y'=u'x+u \quad \Rightarrow \quad (x+ux)(u'x+u)=x-ux$$
$$(1+u)(u'x+u)=1-u \quad \Rightarrow \quad u'x+u+u'ux+u^2=1-u$$
$$\Rightarrow \quad x(1+u)u'+2u+u^2-1=0$$



bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{1+u}{u^2+2u-1}du+\frac{dx}{x}=0$$

olur. İntegral alırsak,

$$\frac{1}{2}\int\frac{(2u+2)du}{u^2+2u-1}+\ln x=\ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(u^2+2u-1)+\ln x=\ln C$$

veya

$$\ln\left[x\sqrt{u^2+2u-1}\right]=\ln C \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{u^2+2u-1}=C$$

bulunur.

$$u=y/x$$

yazılarak,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)-1=\left(\frac{C}{x}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2+2xy-x^2=C^2=C_1$$

veya

$$y^2-x^2+2xy-C_1=0$$

bulunur.

6. $x^2ydx-(x^3-y^3)dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$y'=\frac{x^2y}{x^3-y^3}$$

şeklinde yazılır ve

$$y=ux \quad ; \quad y'=u'x+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u'x+u=\frac{u}{1-u^3} \quad \Rightarrow \quad u'x=\frac{u}{1-u^3}-u \quad \Rightarrow \quad u'x=\frac{u-u+u^4}{1-u^3}$$

bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{1-u^3}{u^4}du-\frac{dx}{x}=0$$

olur. İntegral alınarak,

$$-\frac{1}{3u^3}-lnu-lnx=lnC \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{3u^3}=ln(Cxu)$$

$$\Rightarrow\quad 3u^3ln(Cxu)+1=0$$

bulunur. $u=y/x$ yazılarak,

$$3\frac{y^3}{x^3}ln(Cx\frac{y}{x})+1=0 \quad \text{veya} \quad 3y^3ln(Cy)+x^3=0$$

elde edilir.

7. $y'=(xy-y^2)/x^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan,

$$y=ux\,;\, y'=u'x+u$$

koyarsak verilen denklem,

$$u'x+u=u-u^2 \quad\Rightarrow\quad u'x+u^2=0$$

halini alır. Bu denklem de değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{u^2}+\frac{dx}{x}=0$$

şeklinde yazılır ve integral alınırsa,

$$-\frac{1}{u}+lnx=lnC \quad \text{veya} \quad lnx=ln(Ce^{1/u})$$

ifadesinden

$$x=C.e^{1/u}$$

bulunur. $u=y/x$ konulursa,

$$x=C.e^{x/y}$$

elde edilir.



8. $y'=\dfrac{y}{x-\sqrt{xy}}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem homojen olduğundan,

$$y=ux\,;\; y'=u'x+u$$

yerleştirmesini yaparsak,

$$u'x+u=\frac{u}{1-\sqrt{u}} \quad\Rightarrow\quad u'x+u=\frac{u+u\sqrt{u}}{1-u}$$

veya

$$u'x=\frac{u(u+\sqrt{u})}{1-u}$$

bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{1-u}{u(u+\sqrt{u})}du-\frac{dx}{x}=0$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\frac{\sqrt{u}-u}{u^2}du-\frac{dx}{x}=0$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$-\frac{2}{\sqrt{u}}-lnu-lnx=lnC \quad \text{veya} \quad -\frac{2}{\sqrt{u}}=ln(uxC)$$

ya da

$$ln(uxC)+\frac{2}{\sqrt{u}}=0$$

bulunur. $u=y/x$ yazılırsa,

$$ln(Cy)+\frac{2}{\sqrt{\frac{y}{x}}}=0$$

elde edilir.

**9.** $x(\sqrt{xy}+y)dx - x^2dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan,

$$y = ux\,;\; y' = u'x + u$$

dönüşümü uygulanarak,

$$u'x + u = \sqrt{u} + u \quad \text{veya} \quad u'x - \sqrt{u} = 0$$

bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{dx}{x} = 0$$

bulunur.İntegral alınırsa,

$$2\sqrt{u} - lnx = lnC \quad \text{veya} \quad 2\sqrt{u} = ln(Cx)$$

bulunur.

$$u = y/x$$

koyarsak,

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} - ln(Cx) = 0$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**10.** $xy' = y + x.e^{y/x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan,

$$y = ux\,;\; y' = u'x + u$$

konursa, verilen denklem,

$$x(u'x+u) = ux + x.e^u \;\Rightarrow\; u'x + u = u + e^u$$

veya

$$u'x = e^u$$

şeklini alır.Bu denklem değişkenlerine ayrılır ve integre edilirse,



$$e^{-u}du - \frac{dx}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -e^{-u} - lnx = lnC\;;\; -e^{-u} = ln(Cx)$$

bulunur.

$$u = y/x$$

yazılırsa,

$$ln(Cx) + e^{-y/x} = 0$$

bulunur.

**11.** $y' = \dfrac{y^2 - x\sqrt{x^2-y^2}}{xy}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan,

$$y = ux\,;\; y' = u'x + u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u'x + u = \frac{u^2 - \sqrt{1-u^2}}{u} \quad \text{veya} \quad u'x = -\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

bulunur. Bu son denklem değişkenlerine ayrılırsa,

$$u'x + \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\sqrt{1-u^2} + lnx = lnC$$

bulunur. $u = y/x$ yazılarak,

$$-\frac{\sqrt{(x^2-y^2)}}{x} + lnx - lnC = 0$$

elde edilir.

**12.** $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$$

şeklinde yazılır ve

$$y=ux\,;\; y'=u'x+u$$

dönüşümü yapılırsa,

$$u'x+u=\frac{1-u+u^2}{u} \quad \text{veya} \quad u'x=\frac{1-u}{u}$$

olur. Değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{u}{1-u}du-\frac{dx}{x}=0$$

olur. İntegral alırsak,

$$-\int(1-\frac{1}{1-u})du-lnx=lnC \quad \Rightarrow \quad -u+ln(1-u)-lnx=lnC$$

$$\Rightarrow \quad ln(1-u)=ln(Cxe^u)$$

bulunur. $u=y/x$ yazarsak,

$$ln(\frac{x-y}{x})-ln(Cxe^{y/x})=0$$

bulunur. Gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$(x-y)e^{y/x}=C$$

elde edilir.

**13.** $(2x+y)^2dx-xydy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$y'=\frac{4x^2+4xy+y^2}{xy}$$

şeklinde yazılır ve

$$y=ux\,;\; y'=u'x+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u'x+u=\frac{4+4u+u^2}{u} \quad \Rightarrow \quad u'x=\frac{4+4u+u^2}{u}-u$$



$$\Rightarrow \quad u'x-\frac{4(u+1)}{u}=0$$

bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılır ve integre edilirse,

$$\frac{1}{4}u-\frac{1}{4}ln(u+1)-lnx=lnC$$

bulunur. $u=y/x$ konursa,

$$\frac{1}{4}\frac{y}{x}-\frac{1}{4}ln(\frac{y}{x}+1)-lnx-lnC=0$$

olur.

**14.** $(x+y)dx+xdy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem,

$$y'=-\frac{x+y}{x}$$

şeklinde yazılır ve

$$y=ux \;;\; y'=u'x+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u'x+u=-(1+u) \quad \text{veya} \quad u'x+2u+1=0$$

şeklini alır. Bu son denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{2u+1}+\frac{dx}{x}=0$$

elde edilir. İntegrale geçersek,

$$\frac{1}{2}ln(2u+1)+lnx=lnC \quad \text{veya} \quad ln\left[\sqrt{2u+1}x\right]=lnC$$

bulunur. Daha açık olarak,

$$x^2(2u+1)=C_1 \quad (C_1=lnC)$$

yazılabilir. $u=y/x$ konursa genel çözüm,

$$x^2(\frac{2y+x}{x})=C_1 \quad \text{veya} \quad x(2y+x)-C_1=0$$

şeklinde bulunur.

**15.** $(y^2-x^2)-2xyy'=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklemde

$$y=ux\,;\ y'=u'x+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$(u^2-1)-2u(u'x+u)=0 \ \Rightarrow\ u^2-1-2uu'x-2u^2=0$$

$$\Rightarrow\ -2uu'x-u^2-1=0$$

bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{2u}{1+u^2}du+\frac{dx}{x}=0$$

elde edilir. İntegral alarak,

$$ln(1+u^2)+lnx=lnC \quad \text{veya} \quad x(1+u^2)=C$$

elde edilir. $u=y/x$ konursa,

$$x^2+y^2-Cx=0$$

çember ailesi elde edilir.

**16.** $(t-y)dt+tdy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Burada $y=y(t)$ şeklindedir. Denklem homojen olduğundan,

$$y=ut\,;y'=u't+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{t-y}{t}$$

denkleminden

$$\frac{du}{dt}t+u=-(1-u) \quad \text{veya} \quad \frac{du}{dt}t+1=0$$

elde edilir. Bu son denklem değişkenlerine ayrılarak,



$$du+\frac{dt}{t}=0$$

bulunur. İntegral alınarak

$$u+lnt=lnC \quad \text{veya} \quad u=ln\frac{C}{t}$$

bulunur. $u=y/t$ konursa,

$$y=tln\frac{C}{t}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

**17.** $y^2+(t^2-ty)\frac{dy}{dt}=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem homojen olduğundan,

$$y=ut\,;\ \frac{dy}{dt}=\frac{du}{dt}t+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u^2t^2+(t^2-t^2u)(\frac{du}{dt}t+u)=0 \quad \text{veya} \quad u^2+(1-u)(\frac{du}{dt}t+u)=0$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılarak,

$$(1-u)t\frac{du}{dt}+u=0$$

elde edilir. Bu son denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{1-u}{u}du+\frac{dt}{t}=0$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$lnu-u+lnt-lnC=0 \quad \text{veya} \quad ln(utC)=lne^u$$

bulunur. Buradan da

$$utC=e^u$$

elde edilir. $u=y/t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$yC = e^{y/t} \quad \text{veya} \quad yC - e^{y/t} = 0$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**18.** $(x^2y + xy^2 - y^3)dx + (xy^2 - x^3)dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$y' = -\frac{x^2y + xy^2 - y^3}{xy^2 - x^3}$$

şeklinde yazılır ve

$$y = ux\,;\; y' = u'x + u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u'x + u = -\frac{u + u^2 - u^3}{u^2 - 1} \quad \text{veya} \quad u'x + u + \frac{u + u^2 - u^3}{u^2 - 1} = 0$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$u'x + \frac{u^2}{u^2 - 1} = 0$$

bulunur. Bulunan bu son denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{u^2 - 1}{u^2}du + \frac{dx}{x} = 0 \quad \text{veya} \quad (1 - \frac{1}{u^2})du + \frac{dx}{x} = 0$$

elde edilir. İntegral alınarak,

$$u + \frac{1}{u} + lnx - lnC = 0$$

bulunur. $u = y/x$ konulursa,

$$y/x + x/y + lnx - lnC = 0 \quad \text{veya} \quad y^2 + x^2 + xyln\frac{x}{C} = 0$$

elde edilir.

**19.** $y' = \dfrac{y + xe^{y/x} + y.e^{y/x}}{x + x.e^{y/x}}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.



**ÇÖZÜM:** $y = ux\,;\; y' = u'x + u$ dönüşümü uygulanırsa,

$$u'x + u = \frac{ux + xe^u + uxe^u}{x + xe^u} \quad \text{veya} \quad u'x + u = \frac{u + e^u + ue^u}{1 + e^u}$$

elde edilir. Kısaltma işlemleri yapılırsa,

$$u'x - \frac{e^u}{1 + e^u} = 0$$

bulunur. Bu denklem de değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{1 + e^u}{e^u}du - \frac{dx}{x} = 0$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$-e^{-u} + u - lnx - lnC = 0$$

bulunur. $u = y/x$ konularak,

$$-e^{-y/x} + y/x - ln\frac{x}{C} = 0$$

elde edilir.

**20.** $xy' = y - xcos^2(\frac{y}{x})$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde

$$y = ux\,;\; y' = u'x + u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u'x + u = u - cos^2u \quad \text{veya} \quad u'x + cos^2u = 0$$

bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{cos^2u} + \frac{dx}{x} = 0$$

elde edilir. İntegral alırsak,

$$tgu + lnx = lnC \quad \text{veya} \quad x = C.e^{-tgu}$$

bulunur. $u = y/x$ konarak,

$$x = C.e^{-tg\frac{y}{x}}$$

bulunur.

**21.** $(2xsh\frac{y}{x}+3ych\frac{y}{x})dx-3xch\frac{y}{x}dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem lineer olduğundan,

$$y=ux\,;\; y'=u'x+u$$

dönüşümü uygulanabilir.Gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$2xshu\;dx-3x^2chu\;du=0 \quad \text{veya} \quad 2shu\;dx-3xchu\;du=0$$

elde edilir. Bu son denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$2\frac{dx}{x}-3\frac{chu}{shu}du=0$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$2lnx-3ln(shu)=lnC \quad \text{veya} \quad x^2=(C.shu)^3 \quad \text{elde edilir.}$$

**22.** $y'=\frac{y}{x}(1+ln\frac{y}{x})$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,

$$y=ux\,;\; y'=u'x+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$u'+u=u(1+lnu) \quad \text{veya} \quad u'x=ulnu$$

elde edilir. Son bulunan denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{du}{ulnu}-\frac{dx}{x}=0$$

bulunur. İntegrale geçersek,

$$ln(lnu)-lnx=lnC \quad \text{veya} \quad lnu=Cx$$

$$\text{ya da} \quad u=e^{Cx}$$



bulunur. $u=y/x$ konursa,

$$y=x.e^{Cx}$$

elde edilir.

**23.** $ty\,dt-(t^2+3y^2)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{ty}{t^2+3y^2}$$

şeklinde yazılır ve

$$y=ut \quad ; \frac{dy}{dt}=\frac{du}{dt}t+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$t\frac{du}{dt}+u=\frac{u}{1+3u^2} \quad \Rightarrow \quad t\frac{du}{dt}=\frac{u-u-3u^3}{1+3u^2}$$

$$\Rightarrow \quad t\frac{du}{dt}+\frac{3u^3}{1+3u^2}=0$$

bulunur. Bu da değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{1+3u^2}{3u^3}du+\frac{dt}{t}=0$$

elde edilir. İntegral alarak,

$$-\frac{1}{6u^2}+lnu+lnt-lnC=0 \quad \text{veya} \quad ln\frac{ut}{C}=\frac{1}{6u^2}$$

bulunur. $u=y/t$ konursa,

$$ln\frac{y}{C}-\frac{1}{6}\frac{t^2}{y^2}=0$$

elde edilir.

## PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

1. $(x-2y)dy-(x+2y)dx=0$
2. $y'=\dfrac{3y-4x}{y+3x}$
3. $(2x+3y)dx+(y-x)dy=0$
4. $y'=\dfrac{y}{x}-sec^2\dfrac{y}{x}$
5. $xy'-(y+\sqrt{x^2+y^2})=0$
6. $(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3yx^2)dy=0$
7. $y'=\dfrac{2-y/x}{1-2y/x}$
8. $(3x^2y+y^3)dx+(xy^2-x^3)dy=0$
9. $(x^2-2xy+y^2)dx+2xydy=0$
10. $y^2+x(x-y)y'=0$
11. $(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$
12. $xdy-ydx-\sqrt{x^2-y^2}dx=0$
13. $5(x-yarctg\dfrac{y}{x})dx+xarctg\dfrac{y}{x}dy=0$
14. $(6x^2+4xy+y^2)dx+(2x^2+2xy-3y^2)dy=0$
15. $(r+\theta)d\theta+(\theta-r)dr=0$
16. $y'=\dfrac{y}{x}+sin\dfrac{y}{x}$
17. $(x^2-y^2.e^{x/y})dx+(x^2+xy).e^{y/x}.dy=0$
18. $xy'=y-\sqrt{x^2-y^2}$
19. $(3x^2+2xy)dx+(x^2+by^2)dy=0$
20. $(4x+2y)dy-(2x+y)dx=0$



### I.3.4. Homojen Hale Getirilebilen Diferansiyel Denklemler

$$(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0$$

şeklinde bir diferansiyel denklem homojen olmamasına rağmen basit bir değişken dönüşümü ile homojen hale getirilebilir.

$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ düzlemde iki doğruyu gösterirler.

$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0$ ise, bu iki doğru paralel, aksi halde ($\Delta\neq 0$ ise) bu iki doğru bir noktada kesişir.

$\Delta\neq 0$ HALİ: $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ doğrularının kesim noktası (α, β) olmak üzere,

$$x=\alpha+\xi\ ,\ y=\beta+\eta$$

değişken transformasyonu yapalım. $dx=d\xi$ $dy=d\eta$ olacağından diferansiyel denklem;

$$(a\xi+b\eta)d\xi+(a'\xi+b'\eta)d\eta=0$$

halini alır. Bu da görüldüğü gibi homojen bir diferansiyel denklemdir.

$\Delta=0$ HALİ: $\Delta=ab'-a'b=0$ olduğundan

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=k$$

yazılabilir. Bu takdirde diferansiyel denklem,

$$(ax+by+c)dx+[k(ax+by)+c']dy=0$$

şeklinde yazılabilir. Bu son denklemde, $u=ax+by$ dönüşümü uygulandığında, $du=adx+bdy$ olduğundan,

$$b(u+c)dx+(ku+c')(du-adx)=0$$

elde edilir. Bu denklem de görüldüğü gibi homojendir.

Yukarıda ele alınan homojen hale getirilebilen diferansiyel denklemler,

$$y'=\varphi(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'})$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin bir özel halidir.

## ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1. $(2x+4y+5)dx+(3x+6y-2)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}=2.6-4.3=0$ olduğundan verilen denklem,

$$[2(x+2y)+5]dx+[3(x+2y)-2]dy=0$$

şeklinde yazılır ve $u=x+2y$ dönüşümü uygulanırsa, $du=dx+2dy$ olacağından,

$$(2u+5)dx+(3u-2)(\frac{du-dx}{2})=0$$

elde edilir. Bu denklem kısaltılarak,

$$(u+12)dx+(3u-2)du=0$$

bulunur. Bu denklem görüldüğü gibi değişkenlerine ayrılabilen bir denklemdir. Yani,

$$dx+\frac{3u-2}{u+12}du=0$$

yazılır ve integral alınırsa,

$$\int(3-\frac{38}{u+12})du+x=C \quad \text{veya} \quad 3u-38\,ln(u+12)+x-C=0$$

bulunur. $u=x+2y$ konulursa,

$$3x+6y-38\,ln(x+2y+12)+x-C=0 \Rightarrow 4x+6y-38ln(x+2y+12)-C=0$$

elde edilir.

2. $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\Delta=0$ olduğundan verilen denklem,

$$(x+y)dx+[3(x+y)-4]dy=0$$

şeklinde yazılır ve $u=x+y$ dönüşümü uygulanırsa, $dy=du-dx$ olduğundan,

$$udx+(3u-4)(du-dx)=0$$

elde edilir. Kısaltma işlemleri yapılarak,

$$(4-2u)dx+(3u-4)du=0$$



denklemi elde edilir. Bu denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$2dx+\frac{3u-4}{2-u}du=0$$

bulunur. İntegrasyon yapılarak,

$$\int(-3+\frac{2}{2-u})du+2x=C \Rightarrow -3(x+y)-2ln(2-x-y)+2x=C$$

veya

$$-x-3y-2ln(2-x-y)=C \quad \Rightarrow \quad x+3y+2ln(2-x-y)=C_1$$

şeklinde genel çözüm elde edilmiş olur.

3. $(2y+x+1)y'-(2y+x-1)=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde $\Delta=0$ olduğundan,

$$u=2y+x \quad ; \quad u'=2y'+1$$

dönüşümü uygulanacaktır. Böylece,

$$(u+1)(\frac{u'-1}{2})-(2u-1)=0 \quad \text{veya} \quad (u+1)u'-(5u-1)=0$$

elde edilir. Bu denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{(u+1)}{5u-1}du-dx=0$$

elde edilir. İntegral alınırsa,

$$\frac{1}{5}\int du+\frac{6}{5}\int\frac{du}{5u-1}-x=C \quad \text{veya} \quad \frac{1}{5}u+\frac{6}{25}ln(5u-1)-x=C$$

elde edilir. Bu da kısaltılarak,

$$5u+6ln(5u-1)-25x=C_1$$

bulunur. $u=2y+x$ konulursa,

$$10y+5x+6ln(10y+5x-1)-25x=C_1 \quad \text{veya} \quad 10y-20x+6ln(10y+5x-1)=C_1$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**4.** $(x+2y+7)y'+(2x-y+4)=0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5$$

olduğundan $x+2y+7=0$ ve $2x-y+4=0$ doğruları bir noktada kesişirler. Kesim noktası ise (-3, -2) olduğundan, $x=-3+\xi$ ; $y=-2+\eta$ dönüşümü uygun olur. Bu durumda, $dx=d\xi$ ve $dy=d\eta$ olduğundan verilen denklemde, $\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$ konularak,

$$(\xi+2\eta)\frac{d\eta}{d\xi}+(2\xi-\eta)=0$$

elde edilir. Bu son denklem homojen olduğundan,

$$\eta=u.\xi\ ;\ \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{du}{d\xi}\xi+u$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$(\xi+2u\xi)(\xi\frac{du}{d\xi}+u)+(2\xi-u\xi)=0 \quad \text{veya} \quad (1+2u)(\xi\frac{du}{d\xi}+u)+(2-u)=0$$

elde edilir. Daha açık olarak,

$$\xi(1+2u)\frac{du}{d\xi}+2(1+u^2)=0$$

yazılabilir. Bu son denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{1+2u}{1+u^2}du+2\frac{d\xi}{\xi}=0$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse,

$$arctgu+ln(1+u^2)+2ln\xi=lnC$$

elde edilir. $u=\frac{\eta}{\xi}$ konursa,



$$arctg\frac{\eta}{\xi}+ln(1+\frac{\eta^2}{\xi^2})+2ln\xi=lnC \quad \text{veya} \quad arctg\frac{\eta}{\xi}+ln(\xi^2+\eta^2)=lnC$$

bulunur. $\xi=x+3$ ve $\eta=y+2$ ters dönüşümü ile,

$$arctg\left[\frac{y+2}{x+3}\right]+ln\left[(x+3)^2+(y+2)^2\right]=lnC$$

şeklinde genel çözüm bulunmuş olur.

**5.** $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$$

olduğundan, $x-y-1=0$ ve $x+4y-1=0$ doğrularının kesim noktası vardır. Bu denklemler ortak çözülürse, $\alpha=1$ ve $\beta=0$ bulunur. O halde dönüşüm, $x=1+\xi$ ve $y=0+\eta$ şeklinde olacaktır. $dx=d\xi$ ve $dy=d\eta$ olduğundan verilen denklem,

$$(\xi-\eta)d\xi+(4\eta+\xi)d\eta=0$$

şekline girer. Bu denklem dikkat edilirse homojen diferansiyel denklem tipindedir.

$$\eta=u\xi\ ,\ \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{du}{\xi}\xi+u$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\xi\frac{du}{d\xi}+u=\frac{u-1}{4u+1} \quad \text{veya} \quad \xi\frac{du}{d\xi}+\frac{1+4u^2}{4u+1}=0$$

elde edilir. Son bulunan denklem de değişkenlerine ayrılarak,

$$\frac{4u+1}{4u^2+1}du+\frac{d\xi}{\xi}=0$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$\int\frac{1}{2}\frac{8u}{4u^2+1}du+2\int\frac{du}{4u^2+1}du+ln\xi=C_1 \quad \text{veya} \quad \frac{1}{2}ln(4u^2+1)+\frac{1}{2}arctg2u+ln\xi=C_1$$

bulunur. Bu denklem kısaltılarak,

$$ln\left[\xi^2(4u^2+1)\right]+arctg\,2u=C$$

elde edilir. $u=\frac{\eta}{\xi}$ ters dönüşümü ile,

$$ln(4\eta^2+\xi^2)+arctg\,2\frac{\eta}{\xi}=C$$

bulunur. Son olarak $\xi=x-1$ ve $\eta=y$ ters dönüşümü ile,

$$ln\left[4y^2+(x-1)^2\right]+arctg\frac{2y}{x-1}=C$$

şeklinde genel çözüm bulunmuş olur.

**6.** $(3x-7y-3)dy+(7x-3y-7)dx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -7\\ 7 & -3\end{vmatrix}=-9+49=40\neq 0$ olduğundan,

$3x-7y-3=0$ ile $7x-3y-7=0$ doğruları kesişirler. Kesim noktası ise verilen doğru denklemlerinin ortak çözümü ile $\alpha=1$, $\beta=0$ bulunur. O halde dönüşüm,

$$x=1+\xi\,,\;y=0+\eta \quad \text{ve} \quad dx=d\xi \quad ,\;dy=d\eta$$

şeklinde olacaktır. Verilen denklem yukarıdaki dönüşümlerden sonra,

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{3\eta-7\xi}{3\xi-7\eta}$$

şeklindeki homojen denkleme indirgenmiş olur.

$$\eta=u\xi \quad ; \quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{du}{d\xi}\xi+u$$

dönüşümü ile son bulunan denklem,

$$u+\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{3u-7}{3-7u} \qquad \text{veya} \qquad \xi\frac{du}{d\xi}=\frac{7(u^2-1)}{3-7u}$$

halini alır. Bu ise değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olup,



$$\frac{3-7u}{7(u^2-1)}du-\frac{d\xi}{\xi}=0$$

şeklinde yazılır ve integral alınarak,

$$\frac{2}{7}ln(u-1)-\frac{5}{7}ln(u+1)-ln\xi=lnC \quad \text{veya} \quad (u-1)^2=(u+1)^5\xi^7C_1$$

elde edilir. $u$ yerine $\frac{\eta}{\xi}$ değeri yazılarak,

$$(\eta-\xi)^2=(\eta+\xi)^5.\xi^4C_1$$

bulunur. Buradan da $\xi=x-1$, $\eta=y$ ters dönüşümü ile,

$$(y-x+1)^2=(y+x-1)^5(x-1)^4.C_1$$

şeklinde genel çözüm bulunmuş olur.

**7.** $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\Delta\neq 0$ olduğundan, $2x-5y+3=0$ ile $2x+4y-6=0$ doğruları kesişirler. İki denklemin ortak çözümü ile $\alpha=1$ ve $\beta=1$ bulunur. O halde dönüşüm, $x=1+\xi$, $y=1+\eta$ ve $dx=d\xi$, $dy=d\eta$ şeklinde olacaktır. Bu dönüşümlerden sonra,

$$(2\xi-5\eta)d\xi-(2\xi+4\eta)d\eta=0$$

bulunur. Bu da homojen tip bir diferansiyel denklemdir.

**8.** $(3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\Delta=0$ olduğundan verilen denklemde, $u=3x+2y\,;du=3dx+2dy$ dönüşümü uygulanırsa,

$$(u+1)dx-(u-1)\left(\frac{du-3dx}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad (2u+2)dx-(u-1)du+(3u-3)dx=0$$

$$\Rightarrow (5u-1)dx-(u-1)du=0$$

bulunur. Son denklem değişkenlerine ayrılarak,

$$dx-\frac{u-1}{5u-1}du=0$$

bulunur. İntegrale geçilerek,

$$-\frac{1}{5}\int du+\frac{4}{5}\int\frac{du}{5u-1}+x=C \quad \text{veya} \quad -\frac{1}{5}u+\frac{4}{25}ln(5u-1)+x=C$$

bulunur. Bu da kısaltılarak,

$$-5u+4ln(5u-1)+25x=C_1$$

elde edilir. $u=3x+2y$ ters dönüşümü ile,

$$-5(3x+2y)+4ln(15+10y-1)+25x=C_1 \text{ veya } 10x-10y+4n(15x+10y-1)=C_1$$

elde edilir.

**PROBLEMLER**

Aşağıdaki homojen hale getirilebilen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $(2x+4y-3)dy-(x+2y+1)=0$
2. $(4x+2y-5)dy-(2x+y-1)dx=0$
3. $y'=\dfrac{x+y-3}{x-y-1}$
4. $(x-y-1)dy-(x+y-3)dx=0$
5. $(x+y-4)dx+(x+y+2)dy=0$
6. $y'=\dfrac{3y-x}{x+y+4}$
7. $(2x+9y-20)dx-(6x+2y-10)dy=0$
8. $y'=\dfrac{3x-y+1}{3y-x+5}$
9. $(2x+4y+3)dy+(x+2y+1)dx=0$
10. $(x+y)y'=x+y-2$
11. $(2x+3y+4)dx+(6x+9y+2)dy=0$
12. $(x-y+3)dx-(x+y-5)dy=0$



### I.3.5. Tam Diferansiyel Denklemler

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ şeklindeki bir diferansiyel denklemde,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

şartı gerçeklenirse, bu tip diferansiyel denkleme Tam Diferansiyel Denklem denir. Bu takdirde bir $\varphi(x,y)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y)\ , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)$$

olacak şekilde mevcuttur. Ve dolayısıyla,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

gerçeklenmiş olur. Bu takdirde diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=d\varphi=0$$

halini alır. O halde genel çözüm;

$$d\varphi=0 \Rightarrow \varphi(x,y)=C$$

dir (C keyfi sabittir). Çözüm için $\varphi(x,y)$ fonksiyonunu bulmak yeterli olmaktadır. Bu $\varphi(x,y)$ fonksiyonu, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y)$ denkleminden,

$$\varphi(x,y)=\int P(x,y)dx+f(y)=S(x,y)+f(y)$$

şeklinde elde edilecektir. $f(y)$ nin bulunması ise,

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial S}{\partial y}+f'(y)=Q(x,y)$$

eşitliği kullanılması ile mümkün olacaktır. Buradan elde edilen $f(y)$, $\varphi(x,y)=S(x,y)+f(y)$ de yerine yazılacak ve $\varphi(x,y)=C$ genel çözümü kolaylıkla elde edilecektir.

**İkinci bir çözüm yolu :** Koordinat eksenlerine paralel bir yol boyunca tam diferansiyel denklem integre edilerek,

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta = C$$

bulunur.

## ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

**1.** $(2xy^2 - ysinx + 2x - 1)dx + (2x^2y + cosx + \frac{1}{y})dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $P(x,y) = 2xy^2 - ysinx + 2x - 1$ , $Q(x,y) = 2x^2y + \cos x + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 4xy - sinx \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy - sinx$$

olduğundan verilen diferansiyel denklem Tam diferansiyel denklem tipindedir.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y) \text{ den,}$$

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y) \Rightarrow \varphi(x,y) = \int (2xy^2 - ysinx + 2x - 1)dx + f(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^2y^2 + ycosx + x^2 - x + f(y)$$

bulunur. $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ bağıntısından,

$$2x^2y + cosx + f'(y) = 2x^2y + cosx + 1/y \Rightarrow f'(y) = 1/y \quad \Rightarrow f(y) = Lny$$

elde edilir. O halde genel çözüm,

$$x^2y^2 + y.cosx + x^2 - x + lny = C$$

şeklindedir.

**2.** $y.e^x dx + e^x dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.



**ÇÖZÜM:** $P(x,y) = y.e^x$ , $Q(x,y) = e^x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x$$

olduğundan denklem tam diferansiyel denklem tipindedir.

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y) \Rightarrow \varphi(x,y) = \int y.e^x dx + f(y) = y.e^x + f(y)$$

bulunur. $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ bağıntısından da,

$$e^x + f'(y) = e^x \quad f'(y) = 0, \quad f(y) = C_1$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$y.e^x + C_1 = C \quad \text{veya} \quad y.e^x = C$$

şeklindedir.

**3.** $(y + 3x)dx + xdy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\int_{x_0}^{x} (y_0 + 3\xi)d\xi + \int_{y_0}^{y} xd\eta = C \Rightarrow y_0\xi + \frac{3}{2}\xi^2\Big|_{x_0}^{x} + x\eta\Big|_{y_0}^{y} = C$

$$\Rightarrow y_0x + \frac{3}{2}x^2 - y_0x_0 - \frac{3}{2}x_0^2 + xy - xy_0 = C$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + xy - (x_0y_0 + \frac{3}{2}x_0^2) = C$$

veya

$$C_1 = C + x_0y_0 + \frac{3}{2}x_0^2$$

konursa,

$$\frac{3}{2}x^2 + xy = C_1$$

bulunur.

4. $\dfrac{y+lnx}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$$

olduğundan, denklem tam diferansiyel denklem tipindedir.

$$\varphi(x,y)=\int(\frac{y}{x^2}+\frac{lnx}{x^2})dx+f(y) \quad\Rightarrow\quad \varphi(x,y)=\frac{-y}{x}-\frac{1}{x}(lnx+1)+f(y)$$

bulunur. $\int\frac{lnx}{x^2}dx$ integralinde

$$u=lnx\ ;\ du=\frac{dx}{x}\ ,\ dv=\frac{1}{x^2}dx\ ;\ v=-\frac{1}{x}$$

konarak, kısmi integrasyon formülü kullanılmıştır.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{x}+f'(y)=Q(x,y)=-\frac{1}{x}$$

denkleminden ise, $f'(y)=0$ veya $f(y)=C_1$ bulunur. O halde genel çözüm,

$$-\frac{y}{x}-\frac{1}{x}(lnx+1)+C_1=C \quad \text{veya} \quad -\frac{y}{x}-\frac{1}{x}(lnx+1)=C$$

bulunur.

5. $(ye^x+y)dx+(e^x+ax)dy=0$ denkleminin tam diferansiyel denklem olması için a ne olmalıdır? a'yı bulduktan sonra denklemin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $P=y.e^x+y\ ,\ Q=e^x+ax$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+1\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x+a$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

olması için $a=1$ olmalıdır. O halde denklem,



$$(ye^x+y)dx+(e^x+x)dy=0$$

şeklinde olacaktır. Genel çözüm,

$$\int_{x_0}^{x}(y_0e^{\xi}+y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}(e^x+x)d\eta=C$$

şeklinde bulunabilir. İntegraller alınırsa,

$$y_0e^x+y_0x-y_0e^{x_0}-y_0x_0+e^xy+xy-e^xy_0-xy_0=C \quad\Rightarrow\quad e^xy+xy-y_0e^{x_0}-y_0x_0=C_1$$

veya

$$e^xy+xy=C$$

olarak bulunur.

6. $(x^2+y^2+a)dy+(2xy+x^2+b)dx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $P(x,y)=2xy+x^2+b\ ,\ Q(x,y)=x^2+y^2+a$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2xy+x^2+b \quad\Rightarrow\quad \varphi(x,y)=\int(2xy+x^2+b)dx+f(y)$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(x,y)=x^2y+\frac{x^3}{3}+bx+f(y)$$

bulunur. $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$ dan

$$x^2+f'(y)=x^2+y^2+a \quad\Rightarrow\quad f'(y)=y^2+a \quad\Rightarrow\quad f(y)=\frac{y^3}{3}+ay$$

elde edilir. O halde genel çözüm,

$$x^2y+\frac{x^3}{3}+bx+\frac{y^3}{3}+ay=C \quad \text{şeklindedir.}$$

**7.** $(e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^y + e^x$

olduğundan,

$$\varphi(x,y) = \int (e^y + ye^x)dx + f(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y) = xe^y + ye^x + f(y)$$

yazılabilir.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xe^y + e^x + f'(y) = Q = xe^y + e^x \;\Rightarrow\; f'(y) = 0 \;\Rightarrow\; f(y) = C_1$$

bulunur. Genel çözüm,

$$xe^y + ye^x = C$$

şeklindedir.

**8.** $(2xy - cosx)dx + (x^2 - a^2y)dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir.

$$\varphi(x,y) = \int (2xy - cosx)dx + f(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \int (2xy - cosx)dx + f(y)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + f'(y) = Q = x^2 - a^2y \;\Rightarrow\; f'(y) = -a^2y \;\Rightarrow\; f(y) = -\frac{a^2y^2}{2}$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$x^2y - sinx - \frac{a^2y^2}{2} = C$$

şeklindedir.

**9.** $y'cosx - ysinx - cos^2x = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.



**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$cosx\; dy + (-ysinx - cos^2x)dx = 0$$

şeklinde yazılırsa,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -sinx$$

olduğu görülür. O halde genel çözüm;

$$\int_{x_0}^{x} (-y_0 sin\xi - cos^2\xi)d\xi + \int_{y_0}^{y} cosx\; d\eta = C$$

şeklinde olacaktır. İntegraller alınırsa

$$ycosx - x/2 - \frac{1}{2}sinxcosx = C_1$$

elde edilir.

**10.** $y^2(3x + 2y)dx + 3y(x + y)^2dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6xy + 6y^2$

olduğundan,

$$\varphi(x,y) = \int (3y^2x + 2y^3)dx + f(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy^3 + f(y)$$

bulunur.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3x^2y + 6xy^2 + f'(y) = 3y(x+y)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 3y^3 \quad \Rightarrow \quad f(y) = \frac{3}{4}y^4$$

olur. O halde genel çözüm,

$$6x^2y^2 + 8xy^3 + 3y^4 = C$$

şeklindedir.

**11.** $(x^2 + y)dx + f(x)dy = 0$ denkleminin bir tam diferansiyel denklem olabilmesi için $f(x)$ nasıl seçilmelidir? $f(x)$ i bulduktan sonra denklemi integralleyiniz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şartının sağlanması için,

$$f'(x)=1 \qquad \text{veya} \qquad f(x)=x+\Psi(y)$$

şeklinde olacaktır. O halde denklem,

$$(x^2+y)dx+(x+\psi)dy=0$$

şeklinde yazılabilir.

$$\varphi(x,y)=\int(x^2+y)dx+f(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy+f(y)$$

bulunur. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$ şartından da,

$$x+f'(y)=x+\psi(y) \quad \text{veya} \quad f'(y)=\psi(y)$$

bulunur. O halde

$$f(y)=\int\psi(y)dy$$

bulunur. Genel çözüm,

$$\frac{x^3}{3}+xy+\int\psi(y)dy=0$$

şeklinde bulunur.

**12.** $(cosy+ycosx)dx+(sinx+axsiny)dy=0$ denkleminin bir tam diferansiyel denklem olabilmesi için a ne olmalıdır? a'yı bulduktan sonra genel çözümü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-siny+cosx \quad , \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=cosx+asiny$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

olması için $a=-1$ olmalıdır. Öyleyse verilen denklem,

$$(cosy+ycosx)dx+(sinx-xsiny)dy=0$$

şekline girer.



$$\varphi(x,y)=\int(cosy+ycosx)dx+f(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y)=xcosy+ysinx+f(y)$$

bulunur. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$ dan,

$$-xsiny+sinx+f'(y)=sinx-xsiny$$

veya

$$f'(y)=0 \quad \Rightarrow f(y)=C_1$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$xcosy+ysinx=C$$

şeklindedir.

**13.** $(a^2x^2+ycosx)dx+(sinx+y^3)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $P(x,y)=a^2x^2+ycosx \quad , \quad Q(x,y)=sinx+y^3$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=cosx$$

olduğundan,

$$\varphi(x,y)=\int(a^2x^2+y\,cosx)dx+f(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y)=a^2\frac{x^3}{3}+y\,sinx+f(y)$$

elde edilir. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$ dan

$$sinx+f'(y)=sinx+y^3 \quad \Rightarrow \quad f'(y)=\frac{y^4}{4}$$

bulunur. O halde genel çözüm

$$a^2\frac{x^3}{3}+ysinx+\frac{1}{4}y^4=C$$

şeklindedir.

14. $(1+e^{2\theta})dr+2re^{2\theta}d\theta=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $\dfrac{\partial P}{\partial\theta}=\dfrac{\partial Q}{\partial r}=2e^{2\theta}$ olduğundan

$$\varphi(\theta,r)=\int(1+e^{2\theta})dr+f(\theta) \quad\Rightarrow\quad \varphi(\theta,r)=r+re^{2\theta}+f(\theta)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=2re^{2\theta}+\frac{df}{d\theta}=2re^{2\theta} \quad\Rightarrow\quad \frac{df}{d\theta}=0 \quad\Rightarrow\quad f(\theta)=C_1$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$r+re^{2\theta}=C$$

şeklindedir.

PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin bir tam diferansiyel denklem olup olmadıklarını araştırınız ve bu denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $(x^2-1)dy+(2xy-cosx)dx=0$
2. $(2x^2y-x)dy+(2xy^2-y)dx=0$
3. $(\dfrac{6y}{x}+\dfrac{1}{y})dy-(\dfrac{3y^2}{2}-x)dx=0$
4. $e^x(2xy+x^2y+\dfrac{1}{3}y^3)dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$
5. $(ye^{xy}+cos3x)dx+xe^{xy}dy=0$
6. $(y+2y^3)dx+(4xy^2-2)dy=0$ (önce $y=z^2$ dönüşümü uygulayınız).
7. $(4x^3y^3-2xy)dx+(3x^4y^2-x^2)dy=0$
8. $(3e^{3x}y-2x)dx+e^{3x}dy=0$
9. $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$



10. $(2x^3+3y+a^2)dx+(3x+y-b)dy=0$
11. $\dfrac{2x}{y^3}dx-\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$
12. $(6xy^2+4x^3)dx+(6x^2y+3y^2)dy=0$
13. $(2x-1/y)dx+\dfrac{x}{y^2}dy=0$
14. $(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2ydy=0$
15. $(2xe^y+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{1}{y^3})dx+(x^2e^y-\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{3x}{y^4})dy=0$
16. $(\dfrac{1}{x}+\dfrac{y^4}{x^5})dx-\dfrac{y^3}{x^4}dy=0$
17. $(\dfrac{x^2y^2+2}{3x^3y^2})dx+(\dfrac{2-2x^2y^2}{3x^2y^3})dy=0$
18. $(\dfrac{1}{x^2y^3}-\dfrac{3}{y})dy+\dfrac{dx}{x^3y^2}=0$
19. $(x\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+(y\sqrt{x^2+y^2}-x)dy=0$
20. $arcSin\dfrac{x}{y}dx+\dfrac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}dy=0$
21. $(y+\dfrac{1}{x})dx+xdy=0$

**I.3.6. İntegrasyon Çarpanı**

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemde,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

şartı gerçeklenmiyorsa bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. Ancak öyle bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu bulunabilir ki bu fonksiyonla denklem çarpılınca tam diferansiyel denklem haline dönüşebilir. Bu şekilde bulunan $\mu(x,y)$ fonksiyonuna integrasyon çarpanı denir.

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)\,Q(x,y)dy=0$$

diferansiyel denkleminde,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

bağıntısı sağlanacağından

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P+\frac{\partial P}{\partial y}\mu=\frac{\partial \mu}{\partial x}Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\mu \quad \text{veya} \quad P\frac{\partial \mu}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$$

olacaktır. Son bulunan denklem birinci mertebeden kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Çözümünü bulmak güç olduğundan bazı özel halleri göz önüne alınacaktır. $v=v(x,y)$ olmak üzere $\mu=\mu(v)$ olsun.

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{\partial \mu}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

olduğundan yukarıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem,

$$P\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\mu(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}) \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \mu}{\partial v}(P\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial v}{\partial x})=\mu(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$(P\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial v}{\partial x})\mu'(v)=\mu(v)(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$$

veya



$$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial v}{\partial x}}$$

bulunur.

**I.3.6.1. İntegrasyon Çarpanının Sadece x' in Bir Fonksiyonu Olması Hali**

Bu halde $v=x$ olacağından $\frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0$ şeklindedir. Bu durumda integrasyon çarpanını veren denklem,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{Q_x-P_y}{-Q} \quad \text{veya} \quad ln\mu(x)=-\int\frac{Q_x-P_y}{Q}dx$$

denkleminden,

$$\mu(x)=\exp(-\int\frac{Q_x-P_y}{Q}dx)$$

şeklinde elde edilir.

**I.3.6.2. İntegrasyon Çarpanının Sadece y' nin Bir Fonksiyonu Olması Hali**

$\frac{\partial v}{\partial x}=0$ , $\frac{\partial v}{\partial y}=1$ olacağından integrasyon çarpanını veren denklem,

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{Q_x-P_y}{P} \quad \text{veya} \quad ln\mu(y)=\int\frac{Q_x-P_y}{P}dy$$

denkleminden

$$\mu(y)=\exp(\int\frac{Q_x-P_y}{P}dy)$$

şeklinde elde edilir.

**I.3.6.3. İntegrasyon Çarpanının (x.y)' nin Fonksiyonu Olması Hali**

Bu durumda $v=x.y$ olacağından,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=x$$

şeklindedir. İntegrasyon çarpanını veren denklem,

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=\frac{Q_x-P_y}{Px-Qy} \quad \text{veya} \quad ln\mu(xy)=\int\frac{Q_x-P_y}{Px-Qy}d(xy)$$

denkleminden

$$\mu(xy)=\exp(\int\frac{Q_x-P_y}{Px-Qy}d(xy))$$

şeklinde elde edilir.

**I.3.6.4. İntegrasyon Çarpanının (x+y) nin Bir Fonksiyonu Olması Hali**

Bu durumda $v=x+y$ olduğundan, $\frac{\partial v}{\partial x}=1$ ve $\frac{\partial v}{\partial y}=1$ şeklindedir.O halde

integrasyon çarpanını veren denklem,

$$\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)}=\frac{Q_x-P_y}{P-Q} \quad \text{veya} \quad ln\mu(x+y)=\int\frac{Q_x-P_y}{P-Q}d(x+y)$$

denkleminden

$$\mu(x+y)=\exp(\int\frac{Q_x-P_y}{P-Q}d(x+y))$$

şeklinde olacaktır.

**I.3.6.5. İntegrasyon Çarpanının $(x^2+y^2)$ nin Bir Fonksiyonu Olması Hali**

Bu halde $v=x^2+y^2$ olduğundan, $\frac{\partial v}{\partial x}=2x$ ve $\frac{\partial v}{\partial y}=2y$ olacağından,

$$\frac{\mu'(x^2+y^2)}{\mu(x^2+y^2)}=\frac{Q_x-P_y}{2yP-2xQ} \quad \text{veya} \quad ln\mu(x^2+y^2)=\int\frac{Q_x-P_y}{2Py-2Qx}d(x^2+y^2)$$

$$\mu(x^2+y^2)=\exp(\int\frac{Q_x-P_y}{2Py-2Qx}d(x^2+y^2))$$

şeklinde olacaktır.



**I.3.6.6. İntegrasyon Çarpanının $(x^2-y^2)$ nin Bir Fonksiyonu Olması Hali**

Bu halde $v=x^2-y^2$ ve $v_x=2x$ , $v_y=-2y$ olacağından,

$$\frac{\mu'(x^2-y^2)}{\mu(x^2-y^2)}=\frac{Q_x-P_y}{-2Py-2Qx} \quad \text{veya} \quad \mu(x^2-y^2)=\exp(\int\frac{P_y-Q_x}{2yP+2xQ}d(x^2-y^2))$$

şeklinde olacaktır.

## ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1. $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$ diferansiyel denkleminin y ye bağlı integrasyon çarpanı olup olmadığını araştırınız. Denklemi tam diferansiyel denklem tipine dönüştürerek genel çözümü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\frac{\partial P}{\partial y}=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1$ , $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3$

olduğundan denklem tam diferansiyel tipinde değildir. $\mu=\mu(y)$ çarpanını araştıralım,

$$ln\mu(y)=\int\frac{Q_x-P_y}{P}dy=-4\int-\frac{dy}{y}=-4lny \quad \text{veya} \quad \mu(y)=\frac{1}{y^4}$$

bulunur. Bununla verilen denklem çarpılırsa,

$$(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3})dx+(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4})dy=0$$

elde edilir. Bu denklemde $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan,

$$\varphi(x,y)=\int(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3})dx+f(y) \quad \text{veya} \quad \varphi(x,y)=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+f(y)$$

bulunur. $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$ dan,

$$x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}+f'(y)=x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4} \quad \Rightarrow \quad f'(y)=0 \quad \Rightarrow \quad f(y)=C_1$$

elde edilir. O halde genel çözüm,

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}-\frac{x}{y^3}=C$$

şeklindedir.

2. $(y-3x^2y^2)dx+xdy=0$ diferansiyel denklemini $(x.y)$' ye bağlı bir integrasyon çarpanı yardımıyla tam diferansiyel hale getiriniz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1-6x^2y \quad , \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$

olduğundan denklem tam diferansiyel tipinde değildir. $v=x.y$ olacağından,

$$\frac{\mu'(x.y)}{\mu(x.y)}=\frac{Q_x-P_y}{xP-yQ}=\frac{6x^2y}{xy-3x^3y^2-yx} \quad \text{veya} \quad \frac{\mu'(x.y)}{\mu(x.y)}=-\frac{2}{xy}$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$ln\mu(x.y)=-2ln(xy)=ln\frac{1}{x^2y^2} \quad \Rightarrow \quad \mu(x.y)=\frac{1}{x^2y^2}$$

elde edilir. Bununla verilen denklem çarpılarak,

$$(\frac{1}{x^2y}-3)dx+\frac{1}{xy^2}dy=0$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{x^2y^2}$$

olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir.

3. $(x-2x^2y)dy-ydx=0$ diferansiyel denkleminin x'e bağlı bir integrasyon çarpanını bularak genel çözümünü yazınız.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1 \ , \ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=1-4xy$



şeklindedir. $v=x$ olacağından

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{-Q}=\frac{1-4xy+1}{-(x-2x^2y)}$$

veya

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{2(1-2xy)}{-x(1-2xy)}=-2/x$$

elde edilir. İntegral alınarak,

$$ln\mu(x)=-2lnx=ln\frac{1}{x^2}$$

elde edilir. Verilen denklemi $\frac{1}{x^2}$ ile çarparak,

$$(\frac{1}{x}-2y)dy-\frac{y}{x^2}dx=0$$

buluruz. Bunun genel çözümü,

$$\int_{x_0}^{x}-\frac{y_0}{\xi^2}d\xi+\int_{y_0}^{y}(\frac{1}{x}-2\eta)d\eta=C \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}-y^2=C$$

bulunur.

4. $(2x-a)ydx+(y^2-x^2+ax)dy=0$ diferansiyel denkleminin $\mu=\mu(y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanını bularak genel çözümü yazınız.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-a \quad , \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=a-2x$

şeklindedir. $v=y$ ; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=1$ olacağından,

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=-\frac{2}{y}$$

olur. İntegral alarak $\mu=\frac{1}{y^2}$ elde edilir. Verilen denklem bununla çarpılırsa,

$$\frac{2x-a}{y}dx+(1-\frac{x^2}{y^2}+\frac{ax}{y^2})dy=0$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{a-2x}{y^2}$$

dir. Öyleyse,

$$\varphi(x,y)=\int\frac{2x-a}{y}dx+f(y) \quad\Rightarrow\quad \varphi(x,y)=\frac{1}{y}(x^2-ax)+f(y)$$

bulunur. $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$ dan da

$$\frac{ax-x^2}{y^2}+f'(y)=1-\frac{x^2}{y^2}+\frac{ax}{y^2} \quad\Rightarrow\quad f'(y)=1 \quad\Rightarrow\quad f(y)=y$$

bulunur. Genel çözüm,

$$\frac{1}{y}(x^2-ax)+y=C$$

şeklindedir.

5. $(xy+y^2+1)dx+(x^2+xy+1)dy=0$ denkleminin $\mu=\mu(x.y)$ şeklindeki bir integrasyon çarpanını bularak tam diferansiyel denkleme dönüştürünüz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y \;,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x+y$$

olduğundan,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x+y-x-2y=x-y$$

dir.

$$v=x.y \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=x \;,\; \frac{\partial v}{\partial x}=y$$



olduğundan,

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=\frac{Q_x-P_y}{xP-yQ}=\frac{x-y}{x^2y+xy^2+x-x^2y-xy^2-y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=\frac{x-y}{x-y}=1$$

veya

$$ln\mu(xy)=xy \quad\Rightarrow\quad \mu(xy)=e^{xy}$$

elde edilir. O halde verilen denklem $e^{xy}$ ile çarpılarak,

$$e^{xy}(xy+y^2+1)dx+e^{xy}(x^2+xy+1)dy=0$$

bulunur. Burada

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}+2ye^{xy}+xy^2e^{xy}$$

olduğu görülür

6. $(x-x^2y)dy+(y+xy^2)dx=0$ denkleminin $(xy)$' ye bağlı bir integrasyon çarpanını bularak denklemi tam diferansiyel denklem haline getiriniz.

**ÇÖZÜM:** $P(x,y)=y+xy^2$ , $Q(x,y)=x-x^2y$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+2xy \;,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1-2xy$$

şeklindedir. $v=x.y$ olduğundan,

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{xP-yQ}=\frac{1-2xy-1-2xy}{xy+x^2y^2-xy+x^2y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}-\frac{4xy}{x^2y^2}=-\frac{4}{xy}$$

veya

$$ln\mu(xy)=-4ln(xy)=ln\frac{1}{x^4y^4} \quad\Rightarrow\quad \mu(xy)=\frac{1}{x^4y^4}$$

şeklinde integrasyon çarpanı bulunur. Bununla denklem çarpılarak,

$$(\frac{1}{x^3y^4}-\frac{1}{x^2y^3})dy+(\frac{1}{x^4y^3}+\frac{1}{y^2x^3})dx=0$$

elde edilir. Burada dikkat edilirse,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

olduğu görülür.

7. $(y^3+x^2y+2x)dx-(x^3+xy^2+2y)dy=0$ diferansiyel denkleminde $\mu=\mu(x^2-y^2)$ şeklinde bir integrasyon çarpanını araştırınız.

ÇÖZÜM: $\frac{\partial P}{\partial y}=3y^2+x^2$ , $\frac{\partial Q}{\partial x}=-3x^2-y^2$ olduğundan

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-4x^2-4y^2$$

dir. $v=x^2-y^2$ şeklinde bir integrasyon çarpanını araştıralım. $v_x=2x$ , $v_y=-2y$ ve

$$\frac{\mu'(x^2-y^2)}{\mu(x^2-y^2)}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-2yP-2xQ}=\frac{-4x^2-4y^2}{2x^4-2y^4}$$

veya

$$\frac{\mu'(x^2-y^2)}{\mu(x^2-y^2)}=\frac{-4(x^2+y^2)}{2(x^4-y^4)}=\frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu'}{\mu}=-\frac{2}{x^2-y^2}$$

veya

$$ln\mu(x^2-y^2)=-2ln(x^2-y^2)=ln\frac{1}{(x^2-y^2)^2}$$

şeklinde bulunur.

8. $(x^3y^2+x)dy+(x^2y^3-y)dx=0$ denkleminde $\mu=\mu(xy)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.

ÇÖZÜM: $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2y^2-1$ , $\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2y^2+1$

$$Q_x-P_y=3y^2x^2+1-3x^2y^2+1=2$$



$v=xy$ olacağından,

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=\frac{Q_x-P_y}{xP-yQ}=\frac{2}{x^3y^3-xy-x^3y^3-xy}=\frac{-2}{2xy} \quad\Rightarrow\quad \mu(xy)=\frac{1}{xy}$$

elde edilir. O halde denklem,

$$\frac{x^2y^2+1}{y}dy+\frac{x^2y^2-1}{x}dx=0$$

halini alır.

9. $(x^2+2xy+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=0$ denkleminde $\mu=\mu(x+y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız. Genel çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM: $\frac{\partial P}{\partial y}=2x+2y$ , $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2x-2y=-2y$$

$v=x+y$ ; $v_x=1$, $v_y=1$ olduğundan

$$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)}=\frac{Q_x-P_y}{P-Q}=\frac{-2y}{x^2+2xy+y^2-x^2+y^2}$$

veya

$$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)}=\frac{-2y}{2xy+2y^2}=\frac{-2y}{2y(x+y)}=-\frac{1}{x+y}$$

bulunur. O halde,

$$ln\mu(x+y)=-ln(x+y)=ln\frac{1}{x+y}$$

bulunur. Denklemi bununla çarparak

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}dx+\frac{x^2-y^2}{x+y}dy=0 \quad \text{veya} \quad (x+y)dx+(x-y)dy=0$$

olur. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$ olduğundan

$$\varphi(x,y)=\int(x+y)dx+f(y)=\frac{x^2}{2}+xy+f(y) \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=x+f'(y)=Q=x-y$$

$$\Rightarrow\quad f'(y)=-y \quad\Rightarrow\quad f(y)=-\frac{y^2}{2}$$

elde edilir. O halde genel çözüm,

$$\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=C_1 \qquad \text{veya} \qquad x^2+2xy-y^2=C$$

olur.

**10.** $(2y+3xy^2)dx+(x+2x^2y)dy=0$ denkleminin $x$'e bağlı bir integrasyon çarpanını araştırarak genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde,

$$v=x\ ;\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=1 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=2+6xy\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1+4xy$$

olduğundan

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1-2xy$$

elde edilir.Buradan da

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{-1-2xy}{-x-2x^2y}=\frac{1+2xy}{x(1+2xy)}=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \mu(x)=x$$

elde edilir. O halde denklem,

$$(2xy+3x^2y^2)dx+(x^2+2x^3y)dy=0$$

halini alır. Bunun çözümü bilinen metodla,

$$x^2y+x^3y^2=C \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

**11.** $(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$ diferansiyel denkleminin $\mu=\mu(x)$ şeklinde bir integrasyon çarpanını araştırınız. Varsa denklemin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\frac{\partial P}{\partial y}=4y^3\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-y^3 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-5y^3$



olduğundan ,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=-\frac{5y^3}{xy^3}=-\frac{5}{x} \quad\Rightarrow\quad ln\mu(x)=ln\frac{1}{x^5} \quad\Rightarrow\quad \mu(x)=\frac{1}{x^5}$$

bulunur. O halde denklem,

$$(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5})dx-\frac{y^3}{x^4}dy=0$$

halini alır. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^3}{x^5}$ olduğundan

$$\varphi(x,y)=\int(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5})dx+f(y) \quad\Rightarrow\quad \varphi(x,y)=lnx-\frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4}+f(y)$$

bulunur. $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$ dan

$$-\frac{y^3}{x^4}+f'(y)=-\frac{y^3}{x^4} \quad\Rightarrow\quad f'(y)=0 \quad\Rightarrow\quad f(y)=C_1$$

elde edilir. Genel çözüm,

$$lnx-\frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4}=C$$

şeklinde bulunur.

**12.** $(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)dx+(2y^3+2x^2y+2x)dy=0$ diferansiyel denkleminin $\mu=\mu(x)$ şeklinde bir integrasyon çarpanını bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\frac{\partial P}{\partial y}=4x^3y+4x^2+4xy+4xy^3+2\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=4xy+2$

olduğundan ,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{Q_x-P_y}{-Q}=\frac{-4x^3y-4x^2-4xy^3}{-2y^3-2x^2y-2x}=2x \quad\Rightarrow\quad \mu(x)=e^{x^2}$$

şeklinde integrasyon çarpanı bulunur.

## PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri karşılarında belirtilen şekilde bir integrasyon çarpanı araştırarak integre ediniz.

1. $(x^2y^3+2y)dx+(2x-2x^3y^2)dy=0 \quad ; \quad \mu=\mu(x.y)$
2. $xy'+2xy^2-y=0 \quad ; \quad \mu=\mu(y)$
3. $xdx+ydy+4y^3(x^2+y^2)dy=0 \quad ; \quad \mu=\mu(x^2+y^2)$
4. $xdy-ydx-(1-x^2)dx=0 \quad ; \quad \mu=\mu(x)$
5. $(x+x^4+2x^2y^2+y^4)dx+ydy=0 \quad ; \quad \mu=\mu(x^2+y^2)$
6. $(x^2y^3+2y)dx+(2x-2x^3y^2)dy=0 \quad ; \quad \mu=\mu(x.y)$
7. $(2xy^2+y)dx+(x+2x^2y-x^4y^3)dy=0 \quad ; \quad \mu=\mu(x.y)$
8. $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0 \quad ; \quad \mu=\mu(x)$



### I.3.7. Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

$$f(x)y'+g(x)y=h(x)$$

şeklindeki bir diferansiyel denkleme lineer denir. Bu denklem f(x) ile bölünerek,

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

şeklinde lineer diferansiyel denklemlerin genel formu elde edilir. Bu tip denklemlerin çözümünde üç ayrı yol izlenecektir.

a) $y=uv$ dönüşümü ile çözüm:

Burada $u=u(x)$ ve $v=v(x)$ şeklindedir. $y'=u'v+v'u$ olduğundan,

$$u'v+v'u+P(x)uv-Q(x)=0 \quad \text{veya} \quad [u'+P(x)u]v+v'u-Q(x)=0$$

elde edilir. $u$ fonksiyonunu $u'+P(x)u=0$ olacak şekilde seçersek,

$$\frac{du}{u}+P(x)dx=0 \quad \Rightarrow \quad lnu=-\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad u=e^{-\int Pdx}$$

elde edilir. Bu değeri,

$$v(\overbrace{u'+pu}^{0})+uv'-Q=0$$

da yerine yazarsak,

$$v'e^{-\int Pdx}-Q=0 \quad \Rightarrow \quad v'=Qe^{\int Pdx}$$

bulunur. Buradan da integrasyonla

$$v=\int\left[Qe^{\int Pdx}\right]dx+C$$

elde edilir. $u$, $v$ nin değerleri $y=u.v$ de yerine yazılarak genel çözüm

$$y=e^{-\int Pdx}\left[\int Q.e^{\int Pdx}dx+C\right]$$

şeklinde bulunur.

b) Denklemin $\mu=\mu(x)$ şeklinde $x$' e bağlı bir integrasyon çarpanını araştırarak genel çözümün bulunması:

$$y' + P(x)y = Q$$

denklemi

$$y' + P(x)y - Q(x) = 0 \quad \text{veya} \quad dy + [P(x)y - Q(x)]dx = 0$$

şeklinde yazılırsa,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{0 - P(x)}{-1} = P(x) \quad \Rightarrow \quad ln\mu(x) = \int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \exp(\int P(x)dx)$$

şeklinde integrasyon çarpanı bulunarak,

$$e^{\int Pdx}dy + (Py - Q)e^{\int Pdx} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$

$e^{\int P(x)dx}$ çarp

$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)dx}\right) = Q(x)e^{\int P...}$

tam diferansiyel denkleminden

$$y.e^{\int Pdx} - \int Q.e^{\int Pdx}dx = C$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**UYARI 1:** $y' + Py = Q$ denkleminin $y_1$ gibi bir özel çözümü biliniyorsa,

$$y_1' + Py_1 = Q$$

olacağından bu iki denklem arasında Q yok edilerek,

$$(y' - y_1') + P(y - y_1) = 0$$

değişkenlerine ayrılan denklem elde edilir. Zira $u = y - y_1$, $u' = y' - y_1'$ koyarsak,

$$u' + Pu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} + Pdx = 0 \quad \Rightarrow \quad u = C.e^{-\int Pdx}$$

bulunur. O halde $u = y - y_1$ koyarak,

$$y = u + y_1 = C.e^{-\int Pdx} + y_1$$

şeklinde genel çözüm,

$$y = C_1.a(x) + b(x)$$

tipinde elde edilir. Burada $C.e^{-\int Pdx}$ sağ tarafsızın genel çözümüdür.



**UYARI 2:** $y_1$, $y' + P(x)y = Q$ denkleminin bir özel çözümü ise,

$$y - y_1 = C.e^{-\int Pdx}$$

yazılabiliyordu. $y_2$ gibi ikinci bir özel çözüm biliniyorsa,

$$y_2 - y_1 = C_1.e^{-\int Pdx}$$

olacaktır. O halde bu iki denklem birlikte,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{C}{C_1} = sabit$$

verilen lineer denklemin genel çözümüdür.

**c)** Denklemin "sabitin değişimi metodu" ile çözümü:

Önce $y' + Py = Q$ denkleminde sağ tarafsız denklemin çözümü bulunur. Yani,

$$y' + Py = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + Pdx = 0$$

$$\Rightarrow \quad lny + \int Pdx = lnC \quad \Rightarrow \quad y = C.e^{-\int Pdx}$$

elde edilir. Şimdi, C sabiti yerine C(x) fonksiyonu alınacaktır. (Sabitin değiştirilmesi).Yani,

$$y = C(x).e^{-\int Pdx}$$

alınır. Bununla denkleme girilerek

$$C'(x) = Q.e^{\int Pdx}$$

bulunur ve integrasyonla,

$$C(x) = \int (Q.e^{\int Pdx})dx + C$$

elde edilir. C(x) in bu son değeri yerine yazılarak,

$$y = \left[\int Q.e^{\int Pdx}dx + C\right]e^{-\int Pdx}$$

genel çözümü bulunmuş olur.

## ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1. $y' + (tgx)y = -cotg^2x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü $y = u.v$ dönüşümü ile bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $y = u.v$ , $y' = u'v + v'u$

$$u'v + v'u + (tgx)\,uv + cotg^2x = 0 \quad \Rightarrow \quad (u' + utgx)v + v'u + cotg^2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad u' + utgx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} + tgxdx = 0$$

$$\Rightarrow \quad lnu = ln(cosx) \quad \Rightarrow \quad u = cosx$$

bulunur. Bu değer yerine konulursa,

$$v'cosx + cotg^2x = 0 \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{cosx}{sin^2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad dv + cotgx\,.\,\mathrm{cosec}x\,dx = 0$$

elde edilir. İntegral alınarak,

$$v - \mathrm{cosec}x = C \quad \Rightarrow \quad v = C + \mathrm{cosec}x$$

bulunur. O halde genel çözüm,

$$y = u.v = (C + \mathrm{cosecx})cosx \quad \Rightarrow \quad y = C.cosx + cotgx$$

şeklinde elde edilir.

2. $(x^2+1)y' + 2xy = x^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü $\mu = \mu(x)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırarak yazınız.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem,

$$(x^2+1)dy + (2xy - x^2)dx = 0$$

şeklinde yazılırsa, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ olduğundan bu aynı zamanda tam diferansiyel bir denklemdir. Genel çözüm,

$$y = C.e^{-\int Pdx} + e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx}Qdx\right]$$

formülünden ,



$$y = C.e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx} + e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx}\int e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

veya

$$y = C.e^{-ln(x^2+1)} + e^{-ln(x^2+1)}\int e^{ln(x^2+1)}.\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

olur. Gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$y = \frac{C}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\int x^2dx = \frac{C}{x^2+1} + \frac{x^3}{3(x^2+1)}$$

bulunur.

3. $y' + 2xy = -e^{-x^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü sabitin değişimi metodunu kullanarak bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Önce sağ tarafsız denklemin genel çözümünü bulalım.

$$y' + 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + 2xdx = 0$$

$$\Rightarrow \quad lny + x^2 = lnC \quad \Rightarrow \quad y = C.e^{-x^2}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra da C sabiti $C(x)$ şeklinde seçilerek,

$$y = C(x).e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = C'(x)\,e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2}$$

ile denkleme girilerek,

$$C'(x)\,e^{-x^2} - 2xC(x).e^{-x^2} + 2xC(x)\,e^{-x^2} = -e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x).e^{-x^2} = -e^{-x^2}.$$

veya

$$C'(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = -x + C_1$$

elde edilir. Bu değer yerine yazılarak,

$$y = (-x + C_1)\,e^{-x^2}$$

şeklinde lineer denklemin genel çözümü bulunmuş olur.

4. $y' + ycosx = cosx$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem birinci mertebeden lineerdir. Çözüm için sabitin değişimi metodu kullanılacaktır. Önce sağ tarafsızın çözümü,

$$y' + ycosx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + cosx\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad lny + sinx = lnC \quad \Rightarrow \quad y = C.e^{-sinx}$$

şeklinde bulunur. $y = C(x).e^{-sinx}$ farzedilerek,

$$y' = C'(x).e^{-sinx} - cosx\; C(x)\; e^{-sinx}$$

ile denkleme girilerek,

$$C'(x)e^{-sinx} - C(x)cosx\; e^{-sinx} + C(x)\; cosx\; e^{-sinx} = cosx$$

veya

$$C'(x)\; e^{-sinx} = cosx \quad \Rightarrow \quad C'(x) = cosx\; e^{sinx}$$

elde edilir. İntegral alınarak

$$C(x) = -e^{sinx} + C_1$$

elde edilir. Bu değer yerine yazılırsa,

$$y = (-e^{sinx} + C_1)\; e^{-sinx}$$

şeklinde genel çözüm bulunmuş olur.

5. $xy' + y = x^2 sinx$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem birinci mertebeden lineerdir. Sağ tarafsızın çözümü,

$$xy' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

veya

$$lny + lnx = lnC \quad \Rightarrow \quad y = C/x$$

yazılabilir. Sağ taraflının bir özel çözümünü bulmak için, $y = \dfrac{C(x)}{x}$ farzedilerek,



$$y' = \frac{C'(x) - C(x)}{x^2}$$

ile denkleme girilirse,

$$x\frac{C'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x^2 \sin x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x^2 \sin x$$

bulunur. İntegrasyonla,

$$C(x) = (2 - x^2)cosx + 2xsinx + C_1$$

elde edilir. Bu ise yerine yazılarak,

$$y = \frac{(2 - x^2)cosx + 2xsinx + C_1}{x}$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

6. $y' - \dfrac{1}{x^2+1}y = -\dfrac{1}{x^2+1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem lineer olduğundan sabitin değişimi metodu ile genel çözüm bulunacaktır. Önce sağ tarafsız denklemin genel çözümü,

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad lny - arctgx = lnC \quad \Rightarrow \quad y = C.e^{arctgx}$$

şeklinde elde edilir. Sağ taraflının bir özel çözümü için, $y = C(x).e^{arctgx}$ farzedilerek,

$$y' = C'(x).e^{arctgx} + \frac{1}{1+x^2}C(x).e^{arctgx}$$

ile denkleme girilerek,

$$C'(x).e^{arctgx} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{veya} \quad C'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.e^{-arctgx}$$

elde edilir. İntegral alınarak,

$$C(x) = e^{-arctgx} + C_1$$

bulunur. Bu değer yerine yazılarak,

$$y = (C_1 + e^{-arctgx})\; e^{arctgx} \quad \text{veya} \quad y = C_1.e^{arctgx} + 1 \quad \text{şeklinde genel çözüm elde edilir.}$$

**7.** $y' = y + cosx - sinx$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem birinci mertebeden lineer olduğundan önce sağ tarafsızın özel çözümü ile,

$$y' - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} - dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad lny - x = lnC \quad \Rightarrow \quad y = C.e^x$$

bulunur. $y = C(x).e^x$ farzedilerek,

$$y' = C'(x).e^x + C(x).e^x$$

denkleme girilirse,

$$C'(x).e^x + C(x).e^x - C(x).e^x = cosx - sinx$$

veya

$$C'(x) = (cosx - sinx)\, e^{-x}$$

elde edilir. $C(x)$ ' in hesabı için kısmi integrasyon kullanılacaktır.

$$C(x) = \int (cosx - sinx)\, e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int (cosx\; e^{-x} dx) - \int (sinx\; e^{-x} dx)$$

İkinci integrale kısmi integrasyon metodu tatbik edilirse,

$$u = sinx \;;\; du = cosxdx \quad , \quad dv = e^{-x} dx \;;\; v = -e^{-x}$$

$$\int sinx\; e^{-x} dx = -sinx\; e^{-x} + \int e^{-x}.cosxdx + C_1$$

elde edilir. Bu değer $C(x)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$C(x) = C_1 + \int cosx.e^{-x} dx + sinx\; e^{-x} - \int cosx\; e^{-x} dx$$

veya

$$C(x) = e^{-x} sinx + C_1$$

bulunur. Bu değer yerine yazılarak,

$$y = (e^{-x} sinx + C_1)\, e^x \quad \Rightarrow \quad y = sinx + C_1 e^x$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.



**8.** $y' + yx = x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklemde bu kez $y = u.v$ dönüşümü uygulayalım. $y' = u'v + v'u$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$u'v + v'u + uvx - x = 0 \quad \text{veya} \quad v(u' + ux) + v'u - x = 0$$

bulunur. $u' + ux = 0$ dan,

$$\frac{du}{u} + xdx = 0 \quad \Rightarrow \quad lnu = -\frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u = e^{-x^2/2}$$

bulunur. Bu değer yerine yazılırsa,

$$v'.e^{-x^2/2} - x = 0 \quad \text{veya} \quad v' - xe^{x^2/2} = 0$$

elde edilir. İntegral alınarak,

$$v = e^{x^2/2} + C$$

bulunur. Bulunan u ve v değerleri $y = u.v$ de yerine yazılarak

$$y = (e^{x^2/2} + C)\, e^{-x^2/2} = 1 + C.e^{-x^2/2}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

**9.** $(x+1)y' - y = e^x (x+1)^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem lineer olduğundan üç ayrı metodla genel çözüme gidilebilir. Sabitin değişimi metodu kullanılırsa, $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x+1} = 0$ dan integral alınarak

$$lny - ln(x+1) = lnC \quad \text{veya} \quad y = C(x+1)$$

bulunur. Sağ taraflı denklemin bir özel çözümü için, $y = C(x)\,(x+1)$ farzedilerek,

$$y' = C'(x)(x+1) + C(x)$$

ile denkleme girilerek,

$$C'(x)(x+1)^2 + C(x)(x+1) - C(x)(x+1) = e^x (x+1)^2 \quad \text{veya} \quad C'(x) = e^x$$

bulunur. Buradan integral alınarak,

$$C(x) = e^x + C_1$$

elde edilir. Bu değer yerine yazılarak,

$$y=(e^x+C_1)(x+1)$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

**10.** $y'-3y=e^{3x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Önce sağ tarafsız denklemin çözümü ;

$$\frac{dy}{y}-3dx=0 \quad \Rightarrow \quad lny-3x=lnC \quad \Rightarrow \quad y=C.e^{3x}$$

şeklinde bulunur. C sabiti C(x) farzedilerek,

$$y'=C'(x)\,e^{3x}+3C(x)\,e^{3x}$$

ile denkleme girilirse,

$$C'(x)\,e^{3x}+3C(x)\,e^{3x}-3C(x)\,e^{3x}=e^{3x} \quad \text{veya} \quad C'(x)=1$$

bulunur. İntegral alınırsa ,

$$C(x)=x+C_1$$

bulunur, yerine yazılarak,

$$y=(x+C_1)\,e^{3x}=xe^{3x}+C_1e^{3x}$$

elde edilir.

## PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini üç ayrı metodla bulunuz. Sonuçları karşılaştırınız.

1. $x^2lnx\,y'+xy=1$
2. $y'-\frac{2}{x}y=x^2+\frac{2}{x^2}$
3. $u'-ucosx=cosx$
4. $u'x-u=x$
5. $y'+ycotgx=cosx$
6. $y'+\frac{2}{x}y=6x^2$
7. $y+xy'=2$
8. $y'tgx+y=secx$
9. $y'+ycosx=\frac{1}{2}sin2x$
10. $y'+y=e^{-x}$



11. $\frac{dx}{dt}cos\,t+xsin\,t=1$
12. $y'-\frac{2}{(x+1)}y=(x+1)^3$
13. $y'-a\frac{y}{x}=1+\frac{1}{x}$
14. $y'+\frac{n}{x}y=a.x^{-n}$
15. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$
16. $L\frac{dI}{dt}+RI=U$
17. $y'+ay=C.e^{bx}$ (a,b,c sabitlerdir.)
18. $xy'+ay+bx^n=0$ (n,a,b sabitlerdir.)
19. $xy'-y-\frac{x}{ln|x|}=0$
20. $z'+z.e^x=e^x$
21. $y'-2y=1-2x$
22. $(x^2+1)y'+yx-x^2=0$
23. $x^2(x-1)y'+2x^2y=x+1$
24. $y'+\frac{3y}{2x-3}=\frac{x}{\sqrt{2x-3}}$

## KARIŞIK PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tipini belirleyerek genel çözümlerini elde ediniz.

1. $y'-ax(y^2+1)=0$ $(a=sabit)$
2. $y'=(sin(lnx)+cos(lnx)+a)\,y$
3. $y'+ay=k.e^{bx}$ (a,b,k birer sabittir.)
4. $y'=\frac{x+7y+2}{3x+5y+6}$
5. $y'+f'(x)y=f'(x)$ (Burada $f(x)$ x'in bilinen bir fonksiyonudur.)
6. $xy'+by=a.x^{n+1}$ (a,b,n birer sabittir.)
7. $y'-e^{x-y}+e^x=0$ (Önce $z=e^y$ dönüşümü uygulayınız.)
8. $x^2(xdx+ydy)+y(xdy-ydx)=0$ $(x=rcos\theta\,,\,y=rsin\theta$ dönüşümü uygulayınız.)
9. $x(1-x^2)y'+(2x^2-1)y-ax^3=0$ $(a=sabit)$
10. $xy'-y=x^3+3x^2-2x$
11. $y'cosx+xsinx\,y=1$

12. $y' + ysinx = x.e^{cosx}$

13. $y' - ay = cosbx$ (a,b birer sabittir.)

14. $xy' + y = -lnx$

15. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{e^x}{x^2}$

16. $xy' + y = e^{2x} - sinx$

17. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$ (Önce $\mu = \mu(y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

18. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

19. $(e^y + \frac{1}{cos^2x})dx + (x.e^y + tgy)dy = 0$

20. $y' = \frac{x + y - 3}{x - y + 4}$

21. $(5x^2y + y^3)dx + (xy^2 - x^3)dy = 0$

22. $y' = \frac{xy^2 + y}{x}$ (Önce $\mu = \mu(y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

23. $(x^2 + y)dx + (x + e^y)dy = 0$

24. $(x^2y^3 + y)dx + (y^2x^3 - x)dy = 0$ (Önce $\mu = \mu(y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

25. $(2x + y + 7)dx + (x - 3y)dy = 0$

26. $x(x^2 + 3y^2)dx + y(y^2 + 3x^2)dy = 0$

27. $ln(1 + y^2)dx + \frac{2y(x-1)}{1+y^2}dy = 0$

28. $xdy - [y + 3x^2(x^2 + y^2)]dx = 0$ (Önce $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ şeklinde bir integrayon çarpanı araştırınız)



29. $(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2)dx + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)dy = 0$ (Önce $\mu = \mu(x.y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

30. $(2xy^2 - ysinx + 2x - 1)dx + (2x^2y + cosx + \frac{1}{y})dy = 0$

31. $(y - 3x^2y^2)dx + xdy = 0$ (Önce $\mu = \mu(x.y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

32. $y(1 - xy^2)dx + xdy = 0$ (Önce $\mu = \mu(x.y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

33. $(e^v + 1)cosudu + e^v(sinu + 1)dv = 0$

34. $(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x})dx + (\frac{e^x}{xy} + \frac{1}{y})dy = 0$ (Önce $\mu = \mu(x.y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

35. $e^{xy}(1 + \frac{y}{x})dx + e^{xy}(1 + \frac{x}{y})dy = 0$ (Önce $\mu = \mu(x + y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız.)

36. $(x^2y^2 + 2y^2)dx + (x^3 + y^3)(ydx - xdy) = 0$

37. $y^2 + x^2y' = xyy'$

38. $xydy = (y + 1)(1 - x)dx$

39. $x(y - 3)dy = 4ydx$

40. $(tgx)y' - 2y = 2a$

41. $y' + (cosx)y = \frac{8sin2x}{2}$

42. $\frac{dI}{dt} - 6I = 10sin2t$

43. $xy' - y = (x - 1)e^x$

44. $y' + \frac{1}{xlnx}y = \frac{1}{x^2lnx}$

45. $x(x + 1)y' + y = arctgx$

46. $u' - \frac{u}{x} = -lnx$

47. $(a^2 - x^2)y' + 2ay = (a^2 - x^2)^2$

48. $y'cosx + ysinx = 1$

49. $y' - y = (3x^2 + 4x - 3)e^x$

50. $xy' = y(1 - xtgx) + x^2cosx$

51. $y = C_1 sinx + C_2 x$ çözümünün $(1 - cotgx)y'' - xy' + y = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

52. Her noktasının koordinatları toplamı bir noktasının eğimine eşit olan eğrinin diferansiyel denklemini bulunuz.

53. Teğet uzunluğu sabit bir a değerine eşit olan eğrilerin difreansiyel denklemini bulunuz.

54. Bir eğrinin teğetlerinin ox ve oy eksenlerinden ayırdığı parçaların toplamı 2 ye eşittir. Bu eğrinin diferansiyel denklemini bulunuz.

55. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^x$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

56. Bir M kütlesi, O noktasından yukarı doğru $v_0$ başlangıç hızı ile fırlatılmıştır. Hava direncinin hız ile orantılı olduğunu kabul ederek erişilebilecek maksimum yüksekliği bulunuz.

57. Bir eğrinin herhangi bir P(x,y) noktasındaki teğetinin $\overline{oy}$ eksenini kestiği noktanın başlangıca olan mesafesi $2xy^2$ ye eşittir. Bu eğrinin diferansiyel denklemini bulunuz.



**I.3.8. Bazı Uygun Dönüşümler Yardımı İle Lineer Denklemlere İndirgenebilen Diferansiyel Denklemler**

$$f'(y)y' + f(y)\,P(x) = Q(x)$$

şeklindeki bir denklemin çözümü,

$$u = f(y) \quad ; \quad u' = f'(y)y'$$

dönüşümü ile,

$$u' + uP(x) = Q(x)$$

denklem tipine indirgenir.

**ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER**

1. $e^y y' + e^y = 4e^{-x} sinx$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklemde, $u = e^y$ ; $u' = e^y y'$ dönüşümü uygulanırsa,

$$u' + u = 4e^{-x} sinx$$

elde edilir. Bu ise lineer tiptedir.

$$u' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} + dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad lnu + x = lnC \quad \Rightarrow u = C.e^{-x}$$

şeklinde sağ tarafsız denklemin genel çözümü bulunur. $u = C(x).e^{-x}$ farzedilirse,

$$u' = C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x}$$

ile denkleme girilerek,

$$C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x} + C(x).e^{-x} = 4.e^{-x} sinx \quad \text{veya} \quad C'(x) = 4sinx$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$C(x) = -4cosx + C_1$$

elde edilir. Yerine yazılırsa,

$$u = (-4cosx + C_1)e^{-x} = -4e^{-x}cosx + C_1 e^{-x}$$

bulunur. $u = e^y$ konulursa,

$$e^y = -4e^{-y}\cos x + C_1 e^{-x}$$

elde edilir.

2. $\dfrac{\sin y}{\cos^2 y} y' - \dfrac{1}{\cos y} = -xe^x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u = \dfrac{1}{\cos y}$ ; $u' = \dfrac{\sin y}{\cos^2 y} y'$

koyarsak verilen denklem,

$$u' - u = -x.e^x$$

şeklinde lineer hale dönüşür. Bunun da genel çözümü,

$$\frac{du}{u} - dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln u - x = \ln C \quad \Rightarrow \quad u = C.e^x$$

şeklinde önce sağ tarafsızın çözümü bulunur ve

$$u = C(x).e^x \quad \Rightarrow \quad u' = C'(x).e^x + C(x).e^x$$

farzedilerek,

$$C'(x).e^x + C(x).e^x - C(x).e^x = -x.e^x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -x$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

bulunur. Bu değer yerine yazılarak,

$$u = (-\frac{x^2}{2} + C_1).e^x$$

bulunur. $u = \dfrac{1}{\cos y}$ yazılırsa,

$$\frac{1}{\cos y} = (-\frac{x^2}{2} + C_1).e^x \quad \text{veya} \quad \cos y = \frac{2}{(C - x^2)e^x}$$

bulunur.



3. $x^2 \cos y\, y' - 2x \sin y = -1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u = \sin y$ ; $u' = \cos y\, y'$ dönüşümü uygulanırsa,

$$x^2 u' - 2xu = -1 \quad \text{veya} \quad u' - \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x^2}$$

elde edilir. Bu son denklem görüldüğü gibi lineerdir. Genel çözümü,

$$u = \frac{1}{3x} + Cx^2$$

şeklindedir. $u = \sin y$ konursa,

$$y = \arcsin(\frac{1}{3x} + Cx^2)$$

bulunur.

4. $\sin y\, y' + \cos x \cos y = \cos x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u = \cos y$ ; $u' = -\sin y\, y'$ dönüşümü uygulanırsa,

$$-u' + \cos x\, u = \cos x$$

şeklinde lineer denklem elde edilir. Bunun genel çözümü,

$$-\frac{du}{u} + \cos x\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad -\ln u + \sin x = \ln C \quad \Rightarrow \quad u = C_1.e^{\sin x}$$

şeklinde sağ tarafsız denklemin genel çözümü bulunur.

$$u = C_1(x).e^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad u' = C_1'(x).e^{\sin x} + \cos x\, C_1(x).e^{\sin x}$$

konursa,

$$-C_1'(x).e^{\sin x} - C_1(x)\cos x\, e^{\sin x} + C_1(x)\cos x\, e^{\sin x} = \cos x$$

veya

$$-C_1'(x) = \cos x\, e^{-\sin x} \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = -\cos x\, e^{-\sin x}$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$C_1(x) = e^{-\sin x} + C_1$$

bulunur. Bu değer yerine yazılırsa,

$$u=(e^{-sinx}+C_1)e^{sinx}=C_1e^{sinx}+1$$

bulunur. $u=cosy$ yazılırsa,

$$y=arccos(1+C_1e^{sinx})$$

elde edilir.

**5.** $(1+e^y)y'+y+e^y=e^{-x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u=y+e^y$ ; $u'=(1+e^y)y'$ konursa,

$$u'+u=e^{-x}$$

elde edilir. Bu denklem lineerdir.

$$\frac{du}{u}+dx=0 \quad \Rightarrow \quad lnu+x=lnC \quad \Rightarrow \quad u=C.e^{-x}$$

bulunur.

$$u=C(x)e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u'=C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}$$

ile denkleme girilerek,

$$C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}=e^{-x} \quad \Rightarrow \quad C'(x)=1$$

$$\Rightarrow \quad C(x)=x+C_1 \quad \Rightarrow \quad u=(x+C_1)e^{-x}$$

bulunur. $u=y+e^y$ konursa,

$$y+e^y=(x+C_1)e^x$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

**6.** $\frac{1}{cos^2y}y'-\frac{1}{x}tgy=x^n$ $(n\neq 0)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $u=tgy$ ; $u'=\frac{1}{cos^2y}y'$ konularak,

$$u'-\frac{1}{x}u=x^n$$

lineer denklemi elde edilir. Genel çözümü,



$$\frac{du}{u}-\frac{dx}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad lnu-lnx=lnC \quad \Rightarrow \quad u=C.x$$

olarak bulunur.

$$u=C(x)x \quad \Rightarrow \quad u'=C'(x)+C(x)$$

ile denkleme girilerek,

$$C'(x)x+C(x)-\frac{1}{x}C(x)x=x^n \quad \Rightarrow \quad C'(x)=x^{n-1}$$

ve integral alınırsa,

$$C(x)=\frac{x^n}{n}+C_1$$

bulunur. Yerine yazılırsa,

$$u=(\frac{x^n}{n}+C_1)x=\frac{1}{n}x^{n+1}+C_1x$$

bulunur. $u=tgy$ koyarsak,

$$y=arc\,tg(\frac{1}{n}x^{n+1}+C_1x)$$

bulunur.

## PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri uygun dönüşümlerden sonra lineer hale indirgeyip, genel çözümlerini elde ediniz.

**1.** $2ye^{y^2}y'-2e^{y^2}=e^x$

**2.** $\frac{1}{y}y'-alny=cosx$

**3.** $cosy\ (cosx)y'+sinysinx=1$

**4.** $a^ylna\ y'-\frac{n}{x}a^y=e^xx^n$

**5.** $e^yy'+(1+e^y)cotgx=5e^{cosx}$

## I.3.9. Bernoulli Diferansiyel Denklemi

$P(x)$ ve $Q(x)$ $x$'in fonksiyonları olmak üzere,

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,\ n\neq 1)$$

şeklindeki bir diferansiyel denkleme, Bernoulli diferansiyel denklemi denir. Verilen denklemin her iki tarafı $y^n$ ile bölünerek,

$$\frac{1}{y^n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemde,

$$u=y^{1-n}, \qquad u'=(1-n)y^{-n}y'$$

dönüşümü yapılırsa,

$$u'+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

şeklindeki lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem bilinen metodlardan herhangi biri ile çözülüp, çözümde $u=y^{1-n}$ konularak, Bernoulli diferansiyel denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

Görüldüğü gibi, Bernoulli diferansiyel denklemi I.3.8. de anlatılan dönüşümler yardımıyla lineer denklemlere indirgenebilen diferansiyel denklemlerin özel bir halidir.

### ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1. $y'+y=xy^3$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemin her iki tarafı $y^3$ ile bölünerek,

$$\frac{y'}{y^3}+\frac{1}{y^2}=x$$

elde edilir. $u=\frac{1}{y^2}$ ; $u'=-\frac{2y'}{y^3}$ konularak verilen denklem,

$$-\frac{u'}{2}+u=x$$



şeklindeki lineer bir denkleme indirgenir. Bu denklemin genel çözümü ise,

$$-\frac{du}{u}+2dx=0 \quad\Rightarrow\quad -lnu+2x=lnC \quad\Rightarrow\quad u=C.e^{2x}$$

olarak bulunur.

$$u=C(x).e^{2x} \quad\Rightarrow\quad u'=C'(x)e^{2x}+2C(x).e^{2x}$$

farzedilerek,

$$C'(x).e^{2x}=2x \quad \text{veya} \quad C'(x)=2xe^{-2x}$$

elde edilir. Kısmi integrasyonla,

$$C(x)=2x.e^{-2x}dx$$

$$u=x\ ;\ du=dx \ \text{ ve } \ dv=e^{-2x}dx\ ;\ v=-\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$C(x)=2\left[-\frac{x}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right]+C_1$$

bulunur. Bu değer yerine yazılarak,

$$u=(-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C_1)e^{2x}$$

genel çözümü bulunur. Bu çözümde, $u=\frac{1}{y^2}$ konularak,

$$\frac{1}{y^2}=(-x.e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C_1).e^{2x} \quad \text{veya} \quad \frac{1}{y^2}=-x-\frac{1}{2}+C_1.e^{2x}$$

şeklinde Bernoulli diferansiyel denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

2. $y'-\frac{1}{3x}y=y^4lnx$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem $y^4$ ile bölünerek,

$$\frac{y'}{y^4}-\frac{1}{3xy^3}=lnx$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemde, $u=\frac{1}{y^3}$ ; $u'=-\frac{3}{y^4}y'$ konularak,

$$-\frac{u'}{3}-\frac{u}{3x}=lnx \quad \text{veya} \quad u'+\frac{1}{x}u=-3lnx$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu da bilinen metodlardan herhangi birisiyle çözülerek,

$$u=\frac{1}{x}(-\frac{3}{2}x^2lnx+\frac{3}{4}x^2+C_1) \quad \text{veya} \quad u=-\frac{3}{2}x\,lnx+\frac{3}{4}x+\frac{C_1}{x}$$

bulunur. $u=1/y^3$ konursa,

$$\frac{1}{y^3}=-\frac{3}{2}xlnx+\frac{3}{4}x+\frac{C_1}{x}$$

elde edilir.

**3.** $y'-3xy=xy^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem önce $y^2$ ile bölünür ve daha sonra, $u=1/y$ dönüşümü uygulanırsa ;

$$u'=-\frac{1}{y^2}y',$$

$$u'+3xu=-x$$

lineer denklemi elde edilir. Bu da bilinen metotlarla çözülerek,

$$u=(\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}+C_1)e^{-\frac{3x^2}{2}} \quad \text{veya} \quad u=C_1.e^{-\frac{3x^2}{2}}+\frac{1}{3}$$

elde edilir. $u=1/y$ konularak,

$$y=\frac{3}{3C_1e^{-\frac{3x^2}{2}}+1}$$

genel çözümü bulunur.



**4.** $(4-x^2)y'+4y=(2+x)y^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem $y^2$ ile bölünür ve sonra, $u=\frac{1}{y}$ ; $u'=-\frac{y'}{y^2}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$-(4-x^2)u'+4u=(2+x)$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem bilinen metodlarla çözülerek,

$$u=(2x-\frac{x^2}{2}+C_1)(\frac{x+2}{x-2})$$

bulunur. $u=\frac{1}{y}$ dönüşümü ile de,

$$y=\frac{x-2}{(x+2)(2x-\frac{x^2}{2}+C_1)}$$

genel çözümü elde edilmiş olur.

**5.** $y'cosy-siny=cosx.e^{-x}sin^2y$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklem, $u=siny$ ; $u'=cosy\,y'$ dönüşümü ile,

$$u'-u=cosx\,e^{-x}u^2$$

şeklindeki Bernoulli diferansiyel denklemine dönüşür. Her iki tarafı $u^2$ ile böler ve

$$z=\frac{1}{u} \; ; \; z'=-\frac{u'}{u^2}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$-z'-z=cosx\,e^{-x}$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem bilinen metodlardan herhangi biri ile çözülerek,

$$z=(C_1-sinx)e^{-x}$$

çözümü ve $z=\frac{1}{u}$ dönüşümü ile,

$$\frac{1}{u} = (C_1 - sinx)e^{-x} \quad \text{veya} \quad u = \frac{e^x}{C_1 - sinx}$$

çözümü elde edilir. Son olarak da $u = siny$ dönüşümü ile,

$$siny = \frac{e^x}{C_1 - sinx} \quad \text{veya} \quad y = arc\ sin\left(\frac{e^x}{C_1 - sinx}\right)$$

genel çözümü bulunmuş olur.

6. $y^3y' + \frac{1}{x}y^4 = \frac{sinx}{x^4}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem,

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{sinx}{x^4}y^{-3}$$

şeklinde yazılırsa Bernoulli tipinde olduğu kolayca görülebilir.

$$u = y^4 \quad ; \quad u' = 4y^3y'$$

dönüşümü uygulanarak,

$$\frac{u'}{4} + \frac{1}{x}u = \frac{sinx}{x^4}$$

lineer denklemi elde edilir. Bu denklem çözülerek,

$$u = \frac{-4cosx + C_1}{x^4}$$

bulunur. $u = y^4$ konularak Bernoulli denkleminin genel çözümü,

$$y^4 = \frac{C_1 - 4cosx}{x^4}$$

şeklinde bulunur.



## PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $2(1-x)y' - 4y = xy^2$
2. $y'cosx - ysinx = y^4$
3. $y' - \frac{x}{2(x^2-1)}y = \frac{x}{2}y^{-1}$
4. $y' + x^2y = x^5y^2$
5. $y' + y = xy^2$
6. $x^2y - x^3y' = y^4cosx$
7. $y' - y = xy^5$
8. $y' + ytgx = secx\, y^3$
9. $xy^2(xy' + y) = a^2 \quad (a = sabit)$
10. $(ylnx - 2)ydx = xdy$
11. $y' - xy = x^3y^3$
12. $(ylnx - 2)ydx = xdy$
13. $x^2y' - 2xy = y^2$
14. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}$
15. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$
16. $x^2(x-1)y' - x(x-2)y = y^2$
17. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$
18. $y - cosx\, y' = y^2cosx(1 - sinx)$
19. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{lnx}{x}y^2$
20. $y' + y = y^2e^x$
21. $xdy + ydx = x^3y^6$
22. $(1-x^2)y' - xy = axy^2$ (a sabit)
23. $2x^3y' - 3x^2y = y^3$
24. $y' + y = (cosx - sinx)y^2$
25. $3y'cosx + ysinx = \frac{1}{y^2}$
26. $nxy' + 2y = xy^{n+1}$

### I.3.10. Riccati Diferansiyel Denklemi

Riccati diferansiyel denkleminin normal şekli,

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

şeklindedir. Burada $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ x'in fonksiyonları olup, $P \neq 0$ dır. $y_1$ denklemin bir özel çözümü ise, bu takdirde,

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad ; \quad y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

dönüşümü ile

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x)(y_1 + \frac{1}{u})^2 + Q(x)(y_1 + \frac{1}{u}) + R(x)$$

bulunur. Oysa $y_1$ özel çözüm olduğundan verilen denklemi gerçekleyecektir. Yani,

$$y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$$

yazılabilir. Bu değer yerine yazılarak,

$$u' + [2P(x)y_1 + Q(x)]u + R(x) = 0$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

**Bazı Özel Haller**

a) Riccati diferansiyel denkleminin $y_1$ ve $y_2$ gibi iki özel çözümü biliniyorsa genel çözüm kolaylıkla elde edilebilir. Şöyle ki; $y_1$ özel çözüm olduğundan,

$$y_1 = Py^2 + Qy + R$$

denklemini gerçekler. Yani

$$y_1' = Py_1^2 + Qy_1 + R$$

olur. O halde,

$$y' - y_1' = P(y^2 - y_1^2) + Q(y - y_1)$$

bulunur. O halde,

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} = P(y + y_1) + Q$$

dır. Aynı şekilde $y_2$ özel bir çözüm olduğundan

$$y' - y_2' = P(y^2 - y_2^2) + Q(y - y_2) \quad \text{veya} \quad \frac{y' - y_2'}{y - y_2} = P(y + y_2) + Q$$

olacaktır. Bu iki bağıntıyı daha değişik şekilde yazalım;



$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} = P(y + y_1) + Q \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[ln(y - y_1)] = P(y + y_1) + Q \qquad (\alpha)$$

yazılabilir. Aynı şekilde,

$$\frac{y' - y_2'}{y - y_2} = P(y + y_2) + Q \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[ln(y - y_2)] = P(y + y_2) + Q \qquad (\beta)$$

yazılabilir. $(\alpha)$ ve $(\beta)$ taraf tarafa çıkartılarak,

$$\frac{d}{dx}\left[ln\frac{y - y_1}{y - y_2}\right] = P(y_1 - y_2)$$

bulunur. İntegral alınarak,

$$ln\frac{y - y_1}{y - y_2} - lnC = \int P(y_1 - y_2)dx$$

ve buradan da,

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C.e^{\int P(y_1 - y_2)dx}$$

genel çözümü bulunur.

**ÖRNEK:** $y' + \dfrac{y^2}{x(x - x^2)} + y\dfrac{x - 2}{x(1 - x)} = 0$ Riccati diferansiyel denkleminin iki özel çözümü, $y_1 = x$ ve $y_2 = x^2$ ise genel çözümü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklem düzenlenirse,

$$y' = -\frac{1}{x(x - x^2)}y^2 - \frac{x - 2}{x(1 - x)}y$$

halini alır. Burada görüldüğü gibi,

$$P(x) = -\frac{1}{x(x - x^2)}$$

dir. O halde genel çözüm,

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C\exp(\int P(y_1 - y_2)dx) \quad \Rightarrow \quad \frac{y - x}{y - x^2} = C\exp\left[-\int\frac{1}{x(x - x^2)}.(x - x^2)dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-x}{y-x^2}=C.e^{-lnx}=\frac{C}{x}$$

bulunur. Bu düzenlenirse,

$$y=\frac{x^2-Cx^2}{x-C}$$

genel çözümü elde edilir.

**b)** Riccati diferansiyel denkleminin $y_1, y_2$ ve $y_3$ gibi üç özel çözümü biliniyorsa, (a) daki sonuç $y_3$ için de doğru olacağından,

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=C\exp(\int P(y_1-y_2)dx)$$

yazılabilir. (a) sonucu ile birlikte oran kurularak,

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=C_1\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

genel çözümü bulunur.

**c)** Riccati diferansiyel denkleminin $y_1, y_2, y_3$ ve $y_4$ gibi dört özel çözümü biliniyorsa bu takdirde,

$$\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=C.\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C$$

elde edilir. O halde bir Riccati diferansiyel denkleminin dört özel çözümünün çifte oranı sabittir.

**ÖRNEK:** $xy'=(y-x)^2+2y-x$ diferansiyel denkleminin üç özel çözümü;

$$y_1=x \ , \qquad y_2=x-2 \ , \quad y_3=\frac{x^3-2x^2-x}{x^2-1}$$

bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Üç özel çözümü bilinen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümü;

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=C.\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

ile bulunabileceğinden,



$$\frac{y-x}{y-x+2}=C\frac{\dfrac{x^3-2x^2-x}{x^2-1}-x}{\dfrac{x^3-2x^2-x}{x^2-1}-(x-2)}$$

şeklindedir. Bu da kısaltılarak

$$\frac{y-x}{y-x+2}=C.x^2 \quad \text{veya} \quad y=\frac{2Cx^2-Cx^3+x}{1-Cx^2}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

**d)** $y_1, y_2$ ve $y_3$ gibi herhangi üç çözümü bilinen bir Riccati diferansiyel denkleminin teşkili;

Genel Riccati diferansiyel denklemi ,

$$y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

şeklindeydi. $y_1, y_2, y_3$ özel çözüm olduklarından,

$$y_1'=P(x)y_1^2+Q(x)y_1+R(x)$$

$$y_2'=P(x)y_2^2+Q(x)y_2+R(x)$$

$$y_3'=P(x)y_3^2+Q(x)y_3+R(x)$$

yazılabilir. Bu dört denklem arasında $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ yok edilerek, Riccati diferansiyel denklemi teşkil edilmiş olur. Determinant kullanılarak bu işlem,

$$\begin{vmatrix} y' & y^2 & y & 1 \\ y_1' & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2' & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3' & y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

şeklinde de kolaylıkla elde edilebilir.

**ÖRNEK:** $y_1=\dfrac{1}{x}$ , $y_2=lnx$ ve $y_3=2x$ özel çözümleri bilinen Riccati diferansiyel denklemini teşkil edip genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{vmatrix} y' & y^2 & y & 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 1 \\ \dfrac{1}{x} & (lnx)^2 & lnx & 1 \\ 2 & 4x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

şeklinde denklem kurulur. Genel çözüm ,

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = C\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-\dfrac{1}{x}}{y-lnx} = C.\frac{2x-\dfrac{1}{x}}{2x-lnx}$$

şeklinde elde edilir.

## ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1. $y'-y^2-ysin2x+2sin^2x-1=0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=tgx$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde, $y=tgx+\dfrac{1}{u}$ ; $y'=1+tg^2x-\dfrac{u'}{u^2}$ konularak,

$$1+tg^2x-\frac{u'}{u^2}-(tgx+\frac{1}{u})^2 \Rightarrow -(tgx+\frac{1}{u})2sinxcosx+2sin^2x-1=0$$

$$1+tg^2x-\frac{u'}{u^2}-tg^2x-2\frac{tgx}{u}-\frac{1}{u^2} \Rightarrow -2sin^2x-\frac{2sinxcosx}{u}+2sin^2x-1=0$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2}-\frac{2tgx}{u}-\frac{1}{u^2}-\frac{sin2x}{u}=0$$

bulunur. Bu da kısaltılarak,

$$u'+(2tgx+sin2x)u=-1$$

lineer denklemi elde edilir. Bu denklem çözülerek genel çözüm bulunur.

$$\frac{du}{u}+(2tgx+sin2x)dx=0 \quad \Rightarrow \quad lnu-2ln(cosx)-\frac{1}{2}cos2x=lnC$$



$$ln\frac{u}{cos^2x}=ln(C.e^{\frac{1}{2}cos2x}) \quad \Rightarrow \quad u=C.cos^2x.e^{\frac{1}{2}cos2x}$$

şeklinde önce sağ tarafsız denklem çözülür. Sağ taraflının bir özel çözümü ise,

$$u=C(x).cos^2x.e^{\frac{cos2x}{2}}$$

farzedilerek bulunur. Daha sonra genel çözüm de,

$$u=\frac{1}{y-tgx}$$

ters dönüşümü ile Riccati diferansiyel denklemi çözülmüş olur.

2. $y'+y^2+\dfrac{1}{x}y-\dfrac{4}{x^2}=0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=\dfrac{2}{x}$ biliniyorsa genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Denklemde $y=y_1+\dfrac{1}{u}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{u}$ ve $y'=-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{u'}{u^2}$ dönüşümü uygulanarak,

$$-\frac{2}{x^2}-\frac{u'}{u^2}+(\frac{2}{x}+\frac{1}{u})^2+\frac{1}{x}(\frac{2}{x}+\frac{1}{u})-\frac{4}{x^2}=0 \quad \text{veya} \quad u'-\frac{5}{x}u+1=0$$

lineer denklemi elde edilir.

$$\frac{du}{u}-\frac{5dx}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad lnu-lnx^5=lnC$$

$$lnu=lnC.x^5 \quad \Rightarrow \quad u=C.x^5$$

şeklinde önce sağ tarafsızın çözümü bulunur.

$$u=C(x)x^5 \quad \Rightarrow \quad u'=C'(x)x^5+5C(x).x^4$$

farzedilerek,

$$C'(x)=-x^{-5} \quad \Rightarrow \quad C(x)=-\frac{x^{-4}}{-4}+C_1=\frac{1}{4x^4}+C_1$$

bulunur. Bu değer yerine yazılarak,

$$u=(\frac{1}{4x^4}+C_1)x^5=C_1x^5+\frac{x}{4} \quad \text{elde edilir.}$$

$$y=\frac{2}{x}+\frac{1}{u} \quad\Rightarrow\quad y-\frac{2}{x}=\frac{1}{u} \quad\Rightarrow\quad u=\frac{x}{xy-2}$$

yazılarak,

$$\frac{x}{xy-2}=C_1x^5+\frac{x}{4}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

**3.** $y'(1-x^3)+2xy^2-x^2y-1=0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=x$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $y=y_1+\frac{1}{u}=x+\frac{1}{u}$ ; $y'=1-\frac{u'}{u^2}$ konularak ,

$$(1-\frac{u'}{u^2})(1-x^3)+2x(x+\frac{1}{u})^2-x^2(x+\frac{1}{u})-1=0 \quad\Rightarrow\quad u'-\frac{3x^2}{1-x^3}u-\frac{2x}{1-x^3}=0$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem bilinen metodlardan herhangi birisiyle çözülerek,

$$u=\frac{x^2+C}{1-x^3}$$

elde edilir. $u=\frac{1}{y-x}$ konularak,

$$\frac{1}{y-x}=\frac{x^2+C}{1-x^3} \quad\Rightarrow\quad y-x=\frac{1-x^3}{x^2+C} \quad\Rightarrow\quad y=x+\frac{1-x^3}{x^2+C}$$

bulunur.

**4.** $y'=x^2y^2+(x-1)y-x^2-x+1$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1=1$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $y=1+\frac{1}{u}$, $y'=-\frac{u'}{u^2}$ konularak,

$$-\frac{u'}{u^2}=\frac{2x^2}{u}+\frac{x^2}{u^2}+\frac{x}{u}-\frac{1}{u} \quad\Rightarrow\quad -u'=2ux^2+xu-u-x^2$$



$$\Rightarrow\quad u'+(2x^2+x-1)u+x^2=0$$

şeklindeki lineer denklem elde edilir. Bu denklemde önce sağ tarafsızın çözümü,

$$\frac{du}{u}+(2x^2+x-1)dx=0 \quad\Rightarrow\quad lnu+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x=lnC$$

$$\Rightarrow\quad u=C.e^{x-\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra,

$$u=C(x).e^{x-\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}}$$

farzedilerek sağ taraflının özel çözümü elde edilir. Sonuçta bulunan lineer denklemin genel çözümünde,

$$u=\frac{1}{y-1}$$

konularak Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

**5.** Özel çözümleri $y_1=x$, $y_2=2x$ ve $y_3=0$ olan Riccati diferansiyel denklemini bulunuz. Genel çözümünü yazınız.

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{vmatrix} y' & y^2 & y & 1 \\ 1 & x^2 & x & 1 \\ 2 & 4x^2 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

denkleminden Riccati diferansiyel denklemi bulunur. Genel çözümü ise,

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=C.\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{y-x}{y-2x}=C.\frac{0-x}{0-2x}$$

$$\Rightarrow\quad C_1(y-2x)=(y-x)$$

olarak bulunur.

**6.** $y' + y^2 - y\sin x - \cos x = 0$ Riccati diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \sin x$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $y = \sin x + \frac{1}{u}$ ; $y' = \cos x - \frac{u'}{u^2}$ konularak,

$$\cos x - \frac{u'}{u^2} + \sin^2 x + \frac{2\sin x}{u} + \frac{1}{u^2} - \sin^2 x - \frac{\sin x}{u} - \cos x = 0$$

veya

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{\sin x}{u} + \frac{1}{u^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u' - u\sin x = 1$$

lineer denklemi elde edilir. Bunun genel çözümü,

$$\frac{du}{u} - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln u + \cos x = \ln C$$

$$\Rightarrow \quad u = C.e^{-\cos x} \quad \Rightarrow \quad u = C(x).e^{-\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad u' = C'(x).e^{-\cos x} + C(x)\sin x e^{-\cos x}$$

yerine konularak,

$$C'(x).e^{-\cos x} = 1 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int e^{\cos x}dx + C_1$$

elde edilir. Yerine yazılarak,

$$u = \left[\int e^{\cos x}dx + C_1\right] e^{-\cos x}$$

bulunur. $u = \frac{1}{y - \sin x}$ konularak,

$$\frac{1}{y - \sin x} = \left[\int e^{\cos x}dx + C_1\right] e^{-\cos x}$$

Riccati denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

**7.** $y_1 = x$, $y_2 = 1$, $y_3 = -x$ özel çözümleri bilinen Riccati diferansiyel denklemini kurunuz. Genel çözümünü yazınız.



**ÇÖZÜM:**

$$\begin{vmatrix} y' & y^2 & y & 1 \\ 1 & x^2 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x^2 & -x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{dan,}$$

$$(2x^3 - 2x)y' = 2y^2 + (2x^2 - 2)y - 2x^2$$

bulunur. Genel çözüm ise,

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C.\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y - x}{y - 1} = C.\frac{-x - x}{-x - 1}$$

$$\Rightarrow \quad (y - x)(-x - 1) = -2x(y - 1)C$$

olarak bulunur.

**PROBLEMLER**

Aşağıdaki verilen Riccati diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

1. $y' = xy^2 + (1 - 2x)y + x - 1$ $\quad y_1 = 1$
2. $y' = y^2 + \frac{1}{x}y$ $\quad y_1 = 0$
3. $y' = -y^2 + 2x^2y + 2x - x^4$ $\quad y_1 = x^2$
4. $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$ $\quad y_1 = x$
5. $y' = \frac{1}{x}y^2 + 2(\frac{1}{x} - 1)y + x - 1$ $\quad y_1 = x$
6. $y' = -y^2 + \frac{1}{x}y + x^2$ $\quad y_1 = x$
7. Üç özel çözümü $y_1 = x^2$, $y_2 = x$, $y_3 = 2$ olarak verilen Riccati diferansiyel denklemini kurunuz. Genel çözümünü bulunuz.
8. $y' + \frac{y^2}{x^2 - x^3} + y\frac{x - 2}{x - x^2} = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = 0$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.
9. $(x^2 + 1)y' + 2x^3y + (1 - x^2)y^2 - (x^2 + 1)^2 = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

10. $y'(1-\frac{1}{2}sin2x)+y^2cosx-y+sinx=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=cosx$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

11. $(1-x^2)y'-y^2+x^2y+2x=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=-x^2$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

12. $y'=\frac{2cos^2x-sin^2x+y^2}{2cosx}$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=sinx$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

13. $y'=\frac{lnx}{x}y^2-\frac{1}{x}y$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=0$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

14. $y'-x^2(1-xy)+y^2=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=\frac{1}{x}$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

15. $y'-sinx(1-xy)+y^2=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=\frac{1}{x}$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

16. $y'-e^x(1-xy)+y^2=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=\frac{1}{x}$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

## KARIŞIK PROBLEMLER

1. $\rho=a(1+cos\theta)$ eğrilerinin dik yörüngelerini araştırınız.
2. $xy'-y-x.e^{y/x}=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
3. $chx\,dy+(y\,shx+e^x)dx=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
4. $2y'-y-e^{x/2}=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
5. $y'+\frac{2}{x}y-\frac{2(x^2+1)}{x}\sqrt{y^3}=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
6. $(y-x+xycotgx)dx+xdy=0$ denklemini çözünüz.
7. $2x^2y'-2xy+y^2-x^2=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=x$ bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.
8. $(1+x^3)y'+x^2y+2xy^2+1=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=-x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz



9. $\left[y^2cos(xy^2)+a\right]dx+\left[2xcos(xy^2)+3y\right]ydy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
10. $[2xycosx^2-2xy+1]dx+[sinx^2-x^2]dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
11. $(y-xy^3)dx+xdy=0$ denkleminin $\mu=\mu(xy)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırarak genel çözümünü bulunuz.
12. $ny'+\frac{2}{x}y=y^{n+1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
13. $(x^2cosy)y'-2xsiny+1=0$ denklemini $z=siny$ dönüşümü yaparak çözünüz.
14. $(1+x^2)y'-(x^2+x^4)e^{-y}-2x=0$ denklemini $y=lnz$ dönüşümünü kullanarak çözünüz.
15. $xy'-(1+y^2)arctgy-x^2e^x(1+y^2)=0$ denklemini $y=tgu$ dönüşümünü kullanarak çözünüz.

# BÖLÜM II

## YÜKSEK DERECELİ BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

### II.1. Tekil Çözümler

Birinci mertebeden $F(x,y,y')=0$ diferansiyel denklemi ve $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$ denklemi arasında $y'$ yok edilerek meydana gelen $\varphi(x,y)=0$ denkleminin gösterdiği eğriye "Diskriminant Eğrisi" denir. Bu eğri veya onun bir kolu, diferansiyel denklemin bir çözümü olabilir. Eğer böyle bir kol varsa bu eğriye "Tekil Çözüm" veyahut "Tekil İntegral" denir.

**ÖRNEK:1.** Merkezi $ox$ ekseni üzerinde bulunan a yarıçaplı dairelerin diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem,

$$(x-C)^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad 2(x-C)+2yy'=0$$

olduğundan

$$y^2y'^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad y^2(1+y'^2)=a^2 \quad \Rightarrow \quad y^2=\frac{a^2}{1+y'^2}$$

şeklindedir. Bu diferansiyel denklemin tekil çözümünün bulunması için,

$$F(x,y,y')=y^2(1+y'^2)-a^2=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'}=2y^2y'=0$$

ifadesi teşkil edilirse, $y=0$ ve $y'=0$ elde edilir. $y=0$ tekil çözüm olamaz. Zira diferansiyel denklemi sağlamaz. ($a\neq 0$ olduğundan). Ancak $y'=0$ için $y^2-a^2=0$ bulunur ki bu tekil çözümdür.

**ÖRNEK:2.** $y=xy'+4y'^2$ diferansiyel denkleminin tekil çözümünü araştırınız.

$$F(x,y,y')=y-xy'-4y'^2$$

denkleminde ,

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = -x - 8y' = 0$$

denkleminden , $y' = -\frac{x}{8}$ bulunur. Verilen denklemde bu yerine yazılırsa,

$$y + x\frac{x}{8} + 4\frac{x^2}{64} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x^2}{16}$$

şeklinde tekil çözüm bulunur.

## II.2. Clairaut Diferansiyel Denklemi

Clairaut diferansiyel denkleminin genel şekli $f$ , $y'$ nün bilinen fonksiyonu olmak üzere,

$$y = xy' + f(y')$$

şeklindedir. Denklemde $y' = p$ konulursa,

$$y = xp + f(p)$$

elde edilir. Bu denklem x'e göre türetilirse,

$$y' = p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

elde edilir. Son denklemden,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{ve} \quad x + f'(p) = 0$$

bulunur. Oysa, $\frac{dp}{dx} = 0$ dan $p = C$ yani $y' = C$ bulunur. İntegral alınarak,

$$y = Cx + C_1$$

elde edilir. Bu verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$Cx + C_1 = Cx + f(C) \quad \Rightarrow \quad C_1 = f(C)$$

bulunur. O halde



$$y = Cx + f(C)$$

Clairaut diferansiyel denkleminin genel çözümüdür. Bu ise bir doğru ailesidir.

$$x + f'(p) = 0$$

ise genel çözümün gösterdiği doğru ailesinin zarfıdır. Yani,

$$x = -f'(p) \quad \text{ve} \quad y = -pf'(p) + f(p)$$

parametrik denklemi ailenin zarf denklemidir. p yok edilerek zarfın kartezyen koordinatlardaki denklemi bulunur. Bu genel çözümden elde edilemeyen bir çözüm olduğundan Tekil Çözüm' dür.

### ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

**1.** $y = xy' + \frac{1}{y'}$ diferansiyel denkleminin genel ve varsa, tekil çözümünü bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Verilen denklemde $y' = p$ yazılırsa,

$$y = xp + \frac{1}{p}$$

elde edilir. Denklem $x$'e göre türetilerek,

$$y' = p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{dp}{dx}(x - \frac{1}{p^2}) = 0$$

elde edilir. Buradan , $\frac{dp}{dx} = 0$ bulunur. Yani genel çözüm,

$$y = xC + \frac{1}{C}$$

şeklindedir. $x - \frac{1}{p^2} = 0$ dan, $x = \frac{1}{p^2}$ elde edilir. Verilen denklemde yerine yazılarak,

$$y = \frac{p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

bulunur. O halde , $x = \frac{1}{p^2}$ ve $y = \frac{2}{p}$ tekil çözümün parametrik denklemidir. Bu iki denklem