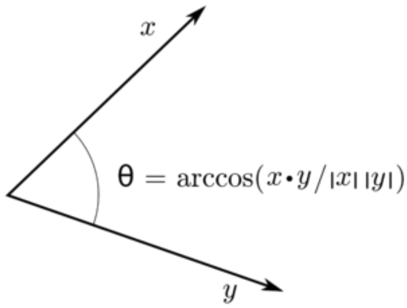
Espacio interior del producto

En matemáticas , un **espacio de producto interno** (o, raramente, un espacio **pre-Hilbert de Hausdorff** [1] [2]) es un espacio vectorial real o un espacio vectorial complejo con una operación llamada **producto interno.** El producto interno de dos vectores en el espacio es un escalar , a menudo indicado con paréntesis angulares como en$\langle a, b\rangle$. Los productos internos permiten definiciones formales de nociones geométricas intuitivas, como longitudes, ángulos y ortogonalidad (producto interno cero) de vectores. Los espacios de productos internos generalizan los espacios vectoriales euclidianos , en los que el producto interno es el producto punto o producto *escalar* de coordenadas cartesianas . Los espacios de productos internos de dimensión infinita se utilizan ampliamente en el análisis funcional . Los espacios de productos internos sobre el campo de números complejos a veces se denominan **espacios unitarios** . El primer uso del concepto de un espacio vectorial con un producto interior se debe aGiuseppe Peano , en 1898. [3]



Interpretación geométrica del ángulo entre dos vectores definidos mediante un producto interior

Los espacios de productos escalares, sobre cualquier campo, tienen "productos escalares" que son simétricos y lineales en el primer argumento. Los espacios de productos hermitianos están restringidos al campo de los números complejos y tienen "productos hermitianos" que son simétricos conjugados y lineales en el primer argumento. Los espacios de productos internos se pueden definir sobre cualquier campo, teniendo "productos internos" que son lineales en el primer argumento, conjugados-simétricos y positivos-definidos. A diferencia de los productos internos, los productos escalares y los productos hermitianos no necesitan ser definidos positivos.

Un producto interno induce naturalmente una norma asociada (denotada$|x|$y$|y|$en la imagen); por tanto, todo espacio producto interior es un espacio vectorial normado . Si este espacio normado también es completo (es decir, un espacio de Banach), entonces el espacio de producto interior es un espacio de Hilbert . [1] Si un espacio de producto interno H no es un espacio de Hilbert, se puede *extender* completando a un espacio de Hilbert$\overline{H}$.Esto significa que$H$es un subespacio lineal de$\overline{H}$,el producto interno de$H$es la restricción de la de$\overline{H}$,yHes denso en$\overline{H}$para la topología definida por la norma. [1] [4]

Definición

En este artículo, F denota un campo que son los números reales $\mathbb{R}$,o los números complejos $\mathbb{C}$.Un escalar es por lo tanto un elemento de F . Una barra sobre una expresión que representa un escalar denota el complejo conjugado de este escalar. Un vector cero se denota $\mathbf{0}$para distinguirlo del escalar 0 .

Un espacio de *producto interno* es un espacio vectorial V sobre el campo F junto con un *producto interno* , que es un mapa

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to F$$

que satisface las siguientes tres propiedades para todos los vectores $x, y, z \in V$y todos los escalares $a, b \in F$. [5] [6]

- *Simetría conjugada* :
$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$$
Como $a = \overline{a}$si y solo si a es real, la simetría conjugada implica que $\langle x, x\rangle$es siempre un número real. si f es $\mathbb{R}$, la simetría conjugada es solo simetría.
- Linealidad en el primer argumento: [Nota 1]
$$\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle.$$
- Definición positiva : si x no es cero, entonces
$$\langle x, x\rangle > 0$$
(la simetría conjugada implica que $\langle x, x\rangle$es real).

Si la condición de definición positiva se reemplaza simplemente requiriendo que $\langle x, x\rangle \geq 0$para todo x , entonces se obtiene la definición de *forma hermitiana semidefinida positiva* . Una forma hermitiana semidefinida positiva $\langle \cdot, \cdot\rangle$es un producto interior si y solo si para todo *x* , si $\langle x, x\rangle = 0$entonces *x* = *0* . [7]

Propiedades básicas

En las siguientes propiedades, que resultan casi inmediatamente de la definición de un producto interno, x , y y z son vectores arbitrarios, y a y b son escalares arbitrarios.

- $\langle \mathbf{0}, x\rangle = \langle x, \mathbf{0}\rangle = 0.$
- $\langle x, x\rangle$es real y no negativo.
- $\langle x, x\rangle = 0$si y solo si $x = \mathbf{0}.$
- $\langle x, ay + bz\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle + \overline{b}\langle x, z\rangle.$
Esto implica que un producto interno es una forma sesquilineal .
- $\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle,$donde Re denota la parte real de su argumento.

Sobre $\mathbb{R}$, la simetría conjugada se reduce a simetría y la sesquilinealidad se reduce a bilinealidad. Por lo tanto, un producto interno en un espacio vectorial real es una forma *bilineal simétrica definida positiva* . La expansión binomial de un cuadrado se convierte en

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

variante convencional

Algunos autores, especialmente en física y álgebra de matrices , prefieren definir productos internos y formas sesquilineales con linealidad en el segundo argumento en lugar del primero. Entonces el primer argumento se vuelve lineal conjugado, en lugar del segundo.

Notación

Varias notaciones se utilizan para productos internos, incluyendo $\langle \cdot, \cdot\rangle$, $(\cdot, \cdot)$, $\langle \cdot|\cdot\rangle$y $(\cdot|\cdot)$, así como el producto escalar habitual.

Algunos ejemplos

números reales y complejos

Entre los ejemplos más simples de espacios de productos internos están $\mathbb{R}$y $\mathbb{C}.$los numeros reales $\mathbb{R}$son un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$que se convierte en un espacio de producto interno con multiplicación aritmética como su producto interno:

$$\langle x, y\rangle := xy \quad \text{ for } x, y \in \mathbb{R}.$$

los numeros complejos $\mathbb{C}$son un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$que se convierte en un espacio de producto interior con el producto interior

$$\langle x, y\rangle := x\overline{y} \quad \text{ for } x, y \in \mathbb{C}.$$

A diferencia de los números reales, la asignación $(x, y) \mapsto xy$no define *un* producto interno complejo en $\mathbb{C}.$

Espacio vectorial euclidiano

De manera más general, el verdadero n-espacio $\mathbb{R}^n$con el producto punto es un espacio de producto interno, un ejemplo de un espacio vectorial euclidiano .

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = x^\mathsf{T} y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

donde x^{T}es la transposición de x.

Una función $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$es un producto interno en $\mathbb{R}^n$si y solo si existe una matriz definida positiva simétrica $\mathbf{M}$tal que $\langle x, y\rangle = x^{\mathrm{T}}\mathbf{M}y$para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.Si $\mathbf{M}$es la matriz identidad entonces $\langle x, y\rangle = x^{\mathrm{T}}\mathbf{M}y$es el producto punto. Para otro ejemplo, si $n = 2$y $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ es positivo-definido (lo que sucede si y solo si $\det \mathbf{M} = ad - b^2 > 0$y uno/ambos elementos diagonales son positivos) entonces para cualquier $x := [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}, y := [y_1, y_2]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle x, y\rangle := x^{\mathrm{T}}\mathbf{M}y = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + b x_2 y_1 + d x_2 y_2.$$

Como se mencionó anteriormente, cada producto interno en $\mathbb{R}^2$es de esta forma (donde $b \in \mathbb{R}, a > 0$y $d > 0$satisfacer $ad > b^2$).

Espacio de coordenadas complejo

La forma general de un producto interior en $\mathbb{C}^n$se conoce como la forma hermitiana y viene dada por

$$\langle x, y\rangle = y^\dagger \mathbf{M} x = \overline{x^\dagger \mathbf{M} y},$$

donde Mes cualquier matriz definida positiva hermitiana y $y^\dagger$es la transpuesta conjugada de y.Para el caso real, esto corresponde al producto escalar de los resultados del escalado direccionalmente diferente de los dos vectores, con factores de escala positivos y direcciones de escalado ortogonales. Es una versión de suma ponderada del producto punto con pesos positivos, hasta una transformación ortogonal.

Espacio de Hilbert

El artículo sobre espacios de Hilbert tiene varios ejemplos de espacios de productos internos, en los que la métrica inducida por el producto interno produce un espacio métrico completo . Un ejemplo de un espacio de producto interno que induce una métrica incompleta es el espacio $C([a, b])$de funciones valuadas complejas continuas fy $g$en el intervalo $[a, b]$.El producto interior es

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Este espacio no está completo; considere, por ejemplo, para el intervalo $[-1, 1]$ la secuencia de funciones continuas de "paso", $\{f_k\}_k$,definido por:

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-1, 0] \\ 1 & t \in \left[\frac{1}{k}, 1\right] \\ kt & t \in \left(0, \frac{1}{k}\right) \end{cases}$$

Esta secuencia es una secuencia de Cauchy para la norma inducida por el producto interno anterior, que no converge a una función *continua* .

Variables aleatorias

Para variables aleatorias reales Xy Y,el valor esperado de su producto

$$\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$$

es un producto interior. [8] [9] [10] En este caso, $\langle X, X\rangle = 0$si y solo si $\mathbb{P}[X = 0] = 1$(es decir, $X = 0$ casi seguro), donde $\mathbb{P}$denota la probabilidad del evento. Esta definición de expectativa como producto interno también se puede extender a vectores aleatorios .

Matrices complejas

El producto interno para matrices cuadradas complejas del mismo tamaño es el producto interno de Frobenius $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}\left(AB^{\mathsf{H}}\right)$. Dado que la traza y la transposición son lineales y la conjugación está en la segunda matriz, es un operador sesquilineal. Obtenemos además la simetría hermitiana por,

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(AB^{\mathsf{H}}\right) = \overline{\operatorname{tr}\left(BA^{\mathsf{H}}\right)} = \overline{\langle B, A\rangle}$$

Finalmente, dado que para Adistinto de cero, $\langle A, A\rangle = \sum_{ij} |A_{ij}|^2 > 0$, obtenemos que el producto interno de Frobenius también es definido positivo, y también lo es un producto interno.

Espacios vectoriales con formas

En un espacio de producto interno, o más generalmente un espacio vectorial con una forma no degenerada (por lo tanto, un isomorfismo $V \to V^*$), los vectores se pueden enviar a covectores (en coordenadas, a través de la transposición), de modo que uno puede tomar el producto interno y el producto externo de dos vectores, no simplemente de un vector y un covector.

Resultados básicos, terminología y definiciones

Propiedades de norma

Cada producto interior del espacio induce una norma , llamada su*norma canónica* , que se define por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Con esta norma, todo espacio producto interior se convierte en un espacio vectorial normado .

Entonces, cada propiedad general de los espacios vectoriales normados se aplica a los espacios de productos internos. En particular, uno tiene las siguientes propiedades:

Homogeneidad absoluta

$$\|ax\| = |a|\,\|x\|$$

para cada $x \in V$ y $a \in F$ (esto resulta de $\langle ax, ax\rangle = a\overline{a}\langle x, x\rangle$).

Desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

por $x, y \in V.$ Estas dos propiedades muestran que uno tiene de hecho una norma.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

para cada $x, y \in V,$ con igualdad si y solo si x y y son linealmente dependientes .

ley del paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

para cada $x, y \in V.$ La ley del paralelogramo es una condición necesaria y suficiente para que una norma esté definida por un producto interior.

Identidad de polarización

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle$$

para cada $x, y \in V.$ El producto interno se puede recuperar de la norma por la identidad de polarización, ya que su parte imaginaria es la parte real de $\langle x, iy\rangle.$

La desigualdad de Ptolomeo

$$\|x - y\|\,\|z\| \ + \ \|y - z\|\,\|x\| \ \geq \ \|x - z\|\,\|y\|$$

para cada $x, y, z \in V.$ La desigualdad de Ptolomeo es una condición necesaria y suficiente para que una seminorma sea la norma definida por un producto interno. [11]

ortogonalidad

ortogonalidad

Dos vectores x y y se dice que son *ortogonal* , a menudo escrito $x \perp y,$ si su producto interior es cero, es decir, si $\langle x, y\rangle = 0.$
Esto sucede si y solo si $\|x\| \leq \|x + sy\|$ para todos los escalares $s,$ [12] y si y solo si la función de valor real $f(s) := \|x + sy\|^2 - \|x\|^2$ es no negativo. (Esto es consecuencia del hecho de que, si $y \neq 0$ entonces el escalar $s_0 = -\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\|y\|^2}$ minimiza f con valor $f(s_0) = -\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2},$ que siempre es no positivo). Para un espacio de producto interno complejo, pero *no* real $H,$ un operador lineal $T : V \to V$ es idénticamente 0 si y solo si $x \perp Tx$ para cada $x \in V.$ [12]

complemento ortogonal

El *complemento ortogonal* de un subconjunto $C \subseteq V$ es el conjunto $C^{\perp}$ de los vectores que son ortogonales a todos los elementos de C ; es decir,

$$C^{\perp} := \{\, y \in V : \langle y, c\rangle = 0 \text{ for all } c \in C \,\}.$$

Este conjunto $C^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial cerrado de V y si el cierre $\operatorname{cl}_V C$ de C en V es un subespacio vectorial entonces $\operatorname{cl}_V C = \left(C^{\perp}\right)^{\perp}.$

Teorema de pitágoras

Si x y y son ortogonales, entonces

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

Esto se puede probar expresando las normas al cuadrado en términos de los productos internos, usando la aditividad para expandir el lado derecho de la ecuación.
El nombre *teorema de Pitágoras* surge de la interpretación geométrica en la geometría euclidiana .

La identidad de Parseval

Una inducción sobre el teorema de Pitágoras produce: si $x_1, \ldots, x_n$ son ortogonales por pares, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|^2.$$

Ángulo

Cuándo $\langle x,y\rangle$es un número real, entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\in[-1,1]$,y así que

$$\angle(x,y)=\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|},$$

es un número real. Esto permite definir el *ángulo* (no orientado) de dos vectores en las definiciones modernas de geometría euclidiana en términos de álgebra lineal . Esto también se usa en el análisis de datos , bajo el nombre de " similitud de coseno ", para comparar dos vectores de datos.

Partes reales y complejas de productos internos.

Suponer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$es un producto interno en V(por lo que es antilineal en su segundo argumento). La identidad de polarización muestra que la parte real del producto interno es

$$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).$$

Si Ves un espacio vectorial real entonces

$$\langle x,y\rangle=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

y la parte imaginaria (también llamada *parte compleja*) de $\langle\cdot,\cdot\rangle$es siempre $0.$

Suponga para el resto de esta sección que Ves un espacio vectorial complejo. La identidad de polarización para espacios vectoriales complejos muestra que

$$\begin{aligned}\langle x,\ y\rangle&=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right)\\&=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+i\operatorname{Re}\langle x,iy\rangle.\end{aligned}$$

El mapa definido por $\langle x\mid y\rangle=\langle y,x\rangle$para todos $x,y\in V$satisface los axiomas del producto interno, excepto que es antilineal en su *primer* argumento, en lugar de en el segundo. La parte real de ambos $\langle x\mid y\rangle$y $\langle x,y\rangle$son iguales a $\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$pero los productos internos difieren en su parte compleja:

$$\begin{aligned}\langle x\mid y\rangle&=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2-i\|x+iy\|^2+i\|x-iy\|^2\right)\\&=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle-i\operatorname{Re}\langle x,iy\rangle.\end{aligned}$$

La última igualdad es similar a la fórmula que expresa un funcional lineal en términos de su parte real.

Estas fórmulas muestran que todo producto interno complejo está completamente determinado por su parte real. Además, esta parte real define un producto interior en $V,$considerado como un espacio vectorial real. Por lo tanto, existe una correspondencia biunívoca entre productos internos complejos en un espacio vectorial complejo $V,$y productos internos reales en $V.$

Por ejemplo, supongamos que $V=\mathbb{C}^n$por algún entero $n>0.$Cuándo Vse considera como un espacio vectorial real en la forma habitual (es decir, se identifica con el $2n-$espacio vectorial real dimensional $\mathbb{R}^{2n}$,con cada $(a_1+ib_1,\ldots,a_n+ib_n)\in\mathbb{C}^n$identificado con $(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)\in\mathbb{R}^{2n}$), entonces el producto escalar $x\,\cdot\,y=(x_1,\ldots,x_{2n})\,\cdot\,(y_1,\ldots,y_{2n}):=x_1y_1+\cdots+x_{2n}y_{2n}$define un producto interno real en este espacio. El producto interno complejo único $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$en $V=\mathbb{C}^n$inducido por el producto escalar es el mapa que envía $c=(c_1,\ldots,c_n)\,,d=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathbb{C}^n$ a $\langle c,d\rangle:=c_1\overline{d_1}+\cdots+c_n\overline{d_n}$(porque la parte real de este mapa $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$es igual al producto escalar).

Productos internos reales vs. complejos

Dejar $V_{\mathbb{R}}$denotar Vconsiderado como un espacio vectorial sobre los números reales en lugar de números complejos. La parte real del producto interno complejo. $\langle x,y\rangle$es el mapa $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle\;:\;V_{\mathbb{R}}\times V_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R},$que necesariamente forma un producto interno real en el espacio vectorial real $V_{\mathbb{R}}.$Todo producto interno en un espacio vectorial real es un mapa bilineal y simétrico .

Por ejemplo, si $V=\mathbb{C}$con producto interior $\langle x,y\rangle=x\overline{y},$donde Ves un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C},$después $V_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^2$es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$y $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$es el producto punto $x\cdot y,$donde $x=a+ib\in V=\mathbb{C}$se identifica con el punto $(a,b)\in V_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^2$(y lo mismo para y); por lo tanto, el producto interno estándar $\langle x,y\rangle=x\overline{y},$en $\mathbb{C}$es una "extensión" del producto escalar. Tambien tiene $\langle x,y\rangle$en cambio, se ha definido como el **mapa simétrico** $\langle x,y\rangle=xy$**(en lugar del mapa simétrico conjugado** habitual $\langle x,y\rangle=x\overline{y}$) entonces su parte real $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$*no* sería el producto escalar; además, sin el complejo conjugado, si $x\in\mathbb{C}$pero $x\notin\mathbb{R}$después $\langle x,x\rangle=xx=x^2\notin[0,\infty)$entonces la tarea $x\mapsto\sqrt{\langle x,x\rangle}$no definiría una norma.

Los siguientes ejemplos muestran que aunque los productos internos reales y complejos tienen muchas propiedades y resultados en común, no son del todo intercambiables. Por ejemplo, si $\langle x, y\rangle = 0$después $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = 0,$pero el siguiente ejemplo muestra que lo contrario en general *no es* cierto. Dado cualquier $x \in V,$el vector ix(que es el vector $x$girado 90°) pertenece a Vy por lo tanto también pertenece a $V_{\mathbb{R}}$ (aunque la multiplicación escalar de $x$por $i = \sqrt{-1}$no está definido en $V_{\mathbb{R}},$el vector en Vdenotado por ixsin embargo sigue siendo también un elemento de $V_{\mathbb{R}}$). Para el producto interno complejo, $\langle x, ix\rangle = -i\|x\|^2,$mientras que para el producto interior real el valor es siempre $\langle x, ix\rangle_{\mathbb{R}} = 0.$

Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$es un producto interno complejo y $A : V \to V$es un operador lineal continuo que satisface $\langle x, Ax\rangle = 0$para todos $x \in V,$después $A = 0.$Esta afirmación ya no es cierta si $\langle\cdot,\cdot\rangle$es en cambio un producto interno real, como muestra el siguiente ejemplo. Suponer que $V = \mathbb{C}$tiene el producto interno $\langle x, y\rangle := x\overline{y}$mencionado anteriormente. Entonces el mapa $A : V \to V$definido por $Ax = ix$es un mapa lineal (lineal para ambos Vy $V_{\mathbb{R}}$) que denota rotación por 90°en el avión. Porque xy Axvectores perpendiculares y $\langle x, Ax\rangle_{\mathbb{R}}$es solo el producto escalar, $\langle x, Ax\rangle_{\mathbb{R}} = 0$para todos los vectores $x;$sin embargo, este mapa de rotación Aciertamente no es idéntico $0.$Por el contrario, usar el producto interno complejo da $\langle x, Ax\rangle = -i\|x\|^2,$que (como se esperaba) no es idénticamente cero.

Secuencias ortonormales

Dejar Vser un producto interior de dimensión finita espacio de dimensión $n.$Recuerde que toda base de Vconsiste exactamente $n$vectores linealmente independientes. Usando el proceso de Gram-Schmidt, podemos comenzar con una base arbitraria y transformarla en una base ortonormal. Es decir, en una base en la que todos los elementos son ortogonales y tienen norma unitaria. En símbolos, una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es ortonormal si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$para cada $i \neq j$y $\langle e_i, e_i\rangle = \|e_a\|^2 = 1$para cada índice $i.$

Esta definición de base ortonormal se generaliza al caso de espacios de productos internos de dimensión infinita de la siguiente manera. Dejar Vser cualquier espacio de producto interior. Luego una colección

$$E = \{e_a\}_{a \in A}$$

es una *base* para Vsi el subespacio de Vgenerado por combinaciones lineales finitas de elementos de Ees denso en V(en la norma inducida por el producto interior). Dilo Ees una *base ortonormal* para Vsi es una base y

$$\langle e_a, e_b\rangle = 0$$

si $a \neq b$y $\langle e_a, e_a\rangle = \|e_a\|^2 = 1$para todos $a, b \in A.$

Usando un análogo de dimensión infinita del proceso de Gram-Schmidt, se puede mostrar:

Teorema. Cualquier espacio de producto interno separable tiene una base ortonormal.

Utilizando el principio maximal de Hausdorff y el hecho de que en un espacio de producto interno completo la proyección ortogonal sobre subespacios lineales está bien definida, también se puede demostrar que

Teorema. Cualquier espacio de producto interior completo tiene una base ortonormal.

Los dos teoremas anteriores plantean la cuestión de si todos los espacios de productos internos tienen una base ortonormal. La respuesta, resulta que es negativa. Este es un resultado no trivial, y se demuestra a continuación. La siguiente prueba está tomada de *A Hilbert Space Problem Book* de Halmos (ver las referencias).

Prueba
Recuerde que la dimensión de un espacio de producto interno es la cardinalidad de un sistema ortonormal máximo que contiene (según el lema de Zorn , contiene al menos uno y dos tienen la misma cardinalidad). Una base ortonormal es ciertamente un sistema ortonormal maximal, pero lo contrario no tiene por qué ser cierto en general. Si Ges un subespacio denso de un espacio producto interior V,entonces cualquier base ortonormal para Ges automáticamente una base ortonormal para V.Por lo tanto, basta con construir un espacio de producto interno Vcon un subespacio denso Gcuya dimensión es estrictamente menor que la de V.

Dejar Ksea un espacio de Hilbert de dimensión $\aleph_0$.(por ejemplo, $K=\ell^2(\mathbb{N})$). Dejar Esea una base ortonormal de K,asi que $|E|=\aleph_0$. Extender Ea una base de Hamel $E\cup F$por K,donde $E\cap F=\varnothing$.Como se sabe que la dimensión Hamel de Kes c,la cardinalidad del continuo, debe ser que $|F|=c$.

Dejar Lsea un espacio de Hilbert de dimensión c(por ejemplo, $L=\ell^2(\mathbb{R})$). Dejar Bser una base ortonormal para Ly deja $\varphi: F\to B$sea una biyección. Entonces hay una transformación lineal $T: K\to L$tal que $Tf=\varphi(f)$por $f\in F$,y $Te=0$por $e\in E$.

Dejar $V=K\oplus L$y deja $G=\{(k,Tk): k\in K\}$Sea la gráfica de T.Dejar $\overline{G}$ser el cierre de Gen V; nosotros mostraremos $\overline{G}=V$.Ya que para cualquier $e\in E$tenemos $(e,0)\in G$,resulta que $K\oplus 0\subseteq\overline{G}$.

A continuación, si $b\in B$,después $b=Tf$para algunos $f\in F\subseteq K$,asi que $(f,b)\in G\subseteq\overline{G}$; ya que $(f,0)\in\overline{G}$así, también tenemos $(0,b)\in\overline{G}$.Resulta que $0\oplus L\subseteq\overline{G}$,asi que $\overline{G}=V$,y Ges denso en V.

Finalmente, $\{(e,0): e\in E\}$es un conjunto ortonormal máximo en G; si

$$0=\langle(e,0),(k,Tk)\rangle=\langle e,k\rangle+\langle 0,Tk\rangle=\langle e,k\rangle$$

para todos $e\in E$después $k=0$,asi que $(k,Tk)=(0,0)$es el vector cero en G.De ahí la dimensión de Ges $|E|=\aleph_0$,Considerando que está claro que la dimensión de Ves c.Esto completa la prueba.

La identidad de Parseval conduce inmediatamente al siguiente teorema:

Teorema. Dejar Vser un espacio de producto interno separable y $\{e_k\}_k$una base ortonormal de V.Entonces el mapa

$$x\mapsto\{\langle e_k,x\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$$

es un mapa lineal isométrico $V\mapsto\ell^2$con una imagen densa.

Este teorema puede considerarse como una forma abstracta de la serie de Fourier , en la que una base ortonormal arbitraria desempeña el papel de la secuencia de polinomios trigonométricos . Tenga en cuenta que el conjunto de índices subyacente puede tomarse como cualquier conjunto contable (y, de hecho, cualquier conjunto, siempre que ℓ^2se define adecuadamente, como se explica en el artículo Espacio de Hilbert). En particular, obtenemos el siguiente resultado en la teoría de las series de Fourier:

Teorema. Dejar Vser el espacio interior del producto $C[-\pi,\pi]$.Entonces la secuencia (indexada en el conjunto de todos los enteros) de funciones continuas

$$e_k(t)=\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$$

es una base ortonormal del espacio $C[-\pi,\pi]$con el L^2producto Interno. el mapeo

$$f\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

es un mapa lineal isométrico con imagen densa.

Ortogonalidad de la sucesión $\{e_k\}_k$se sigue inmediatamente del hecho de que si $k\neq j$,después

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(j-k)t}\,\mathrm{d}t=0.$$

La normalidad de la sucesión es por diseño, es decir, los coeficientes se eligen de modo que la norma resulte en 1. Finalmente, el hecho de que la sucesión tenga un intervalo algebraico denso, en la *norma del producto interno* , se sigue del hecho de que la sucesión tiene un lapso algebraico denso, esta vez en el espacio de funciones periódicas continuas en $[-\pi,\pi]$con la norma uniforme. Este es el contenido del teorema de Weierstrass sobre la densidad uniforme de polinomios trigonométricos.

Operadores en espacios de productos internos

Varios tipos de mapas lineales $A: V\to W$entre espacios de productos internos Vy Wson de relevancia:

- *Mapas lineales continuos* : $A: V\to W$es lineal y continua con respecto a la métrica definida anteriormente, o de manera equivalente, Aes lineal y el conjunto de reales no negativos $\{\|Ax\|: \|x\|\leq 1\}$,donde $x$oscila sobre la bola unitaria cerrada de V,está ligado.
- *Operadores lineales simétricos* : $A: V\to W$es lineal y $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$para todos $x,y\in V$.
- *Isometrías* : $A: V\to W$satisface $\|Ax\|=\|x\|$para todos $x\in V$.Una *isometría lineal* (resp. una *isometría antilineal*) es una isometría que también es un mapa lineal (resp. un mapa antilineal). Para espacios de productos internos, la identidad de polarización se puede usar

para mostrar que Aes una isometría si y sólo si $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$para todos $x, y \in V.$Todas las isometrías son inyectivas . El teorema de Mazur-Ulam establece que toda isometría sobreyectiva entre dos espacios *reales* normados es una transformación afín . En consecuencia, una isometría Aentre espacios de productos internos reales es un mapa lineal si y solo si $A(0) = 0.$Las isometrías son morfismos entre espacios de productos internos, y los morfismos de espacios de productos internos reales son transformaciones ortogonales (compárese con matriz ortogonal).

- *Isomorfismos isométricos* : $A : V \to W$es una isometría que es sobreyectiva (y por lo tanto biyectiva). Los isomorfismos isométricos también se conocen como operadores unitarios (compárese con matriz unitaria).

Desde el punto de vista de la teoría del espacio del producto interior, no hay necesidad de distinguir entre dos espacios que son isométricamente isomorfos. El teorema espectral proporciona una forma canónica para operadores simétricos, unitarios y más generalmente normales en espacios de productos internos de dimensión finita. Una generalización del teorema espectral es válida para operadores normales continuos en espacios de Hilbert. [13]

generalizaciones

Cualquiera de los axiomas de un producto interno puede debilitarse, dando lugar a nociones generalizadas. Las generalizaciones más cercanas a los productos internos ocurren donde se conservan la bilinealidad y la simetría conjugada, pero se debilita la definición positiva.

Productos internos degenerados

Si Ves un espacio vectorial y $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$una forma sesquilineal semidefinida, entonces la función:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

tiene sentido y satisface todas las propiedades de la norma excepto que $\|x\| = 0$No implica $x = 0$(tal funcional se llama entonces semi-norma). Podemos producir un espacio de producto interior considerando el cociente $W = V/\{x : \|x\| = 0\}.$La forma sesquilineal $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ factores a través de $W.$

Esta construcción se utiliza en numerosos contextos. La construcción Gelfand-Naimark-Segal es un ejemplo particularmente importante del uso de esta técnica. Otro ejemplo es la representación de núcleos semidefinidos en conjuntos arbitrarios.

Formas simétricas conjugadas no degeneradas

Alternativamente, se puede requerir que el emparejamiento sea una forma no degenerada , lo que significa que para todos los valores distintos de cero $x \neq 0$existe algo $y$tal que $\langle x, y\rangle \neq 0,$aunque $y$no necesita ser igual x; en otras palabras, el mapa inducido al espacio dual $V \to V^*$ es inyectable. Esta generalización es importante en geometría diferencial : una variedad cuyos espacios tangentes tienen un producto interno es una variedad de Riemann , mientras que si está relacionada con una forma simétrica conjugada no degenerada, la variedad es una variedad pseudo-riemanniana . Por la ley de inercia de Sylvester , así como todo producto interno es similar al producto punto con pesos positivos en un conjunto de vectores, cada forma simétrica conjugada no degenerada es similar al producto punto con pesos *distintos* de cero en un conjunto de vectores, y el número de los pesos positivos y negativos se denominan respectivamente índice positivo e índice negativo. Producto de vectores en el espacio de Minkowskies un ejemplo de producto interior indefinido, aunque, técnicamente hablando, no es un producto interior según la definición estándar anterior. El espacio de Minkowski tiene cuatro dimensiones e índices 3 y 1 (la asignación de "+" y "-" a ellos difiere según las convenciones).

Las declaraciones puramente algebraicas (las que no usan la positividad) generalmente solo se basan en la no degeneración (el homomorfismo inyectivo $V \to V^*$) y, por lo tanto, se mantienen de manera más general.

Productos relacionados

El término "producto interior" se opone al producto exterior , que es un opuesto un poco más general. Simplemente, en coordenadas, el producto interior es el producto de un $1 \times n$ *covector* con un $n \times 1$vector, produciendo un 1×1matriz (un escalar), mientras que el producto exterior es el producto de un $m \times 1$vector con un $1 \times n$covector, produciendo un $m \times n$matriz. El producto exterior se define para diferentes dimensiones, mientras que el producto interior requiere la misma dimensión. Si las dimensiones son las mismas, entonces el producto interno es la *traza* del producto externo (la traza solo se define correctamente para matrices cuadradas). En un resumen informal: "el interior es horizontal por vertical y se contrae, el exterior es vertical por horizontal y se expande".

De manera más abstracta, el producto exterior es el mapa bilineal $W \times V^* \to \hom(V, W)$enviando un vector y un covector a una transformación lineal de rango 1 (tensor simple de tipo (1, 1)), mientras que el producto interno es el mapa de evaluación bilineal $V^* \times V \to F$dada por la evaluación de un covector en un vector; el orden de los espacios vectoriales de dominio aquí refleja la distinción covector/vector.

El producto interior y el producto exterior no deben confundirse con el producto interior y el producto exterior , que son operaciones sobre campos vectoriales y formas diferenciales , o más generalmente sobre el álgebra exterior .

Como complicación adicional, en el álgebra geométrica, el producto interior y el producto *exterior* (Grassmann) se combinan en el producto geométrico (el producto de Clifford en un álgebra de Clifford): el producto interior envía dos vectores (1-vectores) a un escalar (un 0-vector), mientras que el producto exterior envía dos vectores a un bivector (2-vector), y en este contexto, el producto exterior suele llamarse *producto exterior* (alternativamente, *producto de cuña*). El producto interno se llama más correctamente producto *escalar* en este contexto, ya que la forma cuadrática no degenerada en cuestión no necesita ser definida positiva (no necesita ser un producto interno).