Conjuntos generadores y bases

En un espacio vectorial V, nos interesan especialmente los conjuntos de vectores A que cumplen la propiedad de que cualquier vector $\boldsymbol{v} \in V$ puede obtenerse mediante una combinación lineal de vectores en A. Estos vectores son vectores especiales, y en lo que sigue, vamos a caracterizarlos.

Definición 1 (Conjunto generador/Espacio)**.** Considérese un espacio vectorial V y un conjunto de vectores $A = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \subseteq V$. Si cada vector $\boldsymbol{v} \in V$ puede expresarse como un lineal combinación de $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, A se denomina *conjunto generador* o *span*, que abarca el espacio vectorial V. En este caso, escribimos $V = [A]$ o $V = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$. conjunto generador span

Los conjuntos generadores son conjuntos de vectores que abarcan (sub)espacios vectoriales, es decir, cada vector puede representarse como una combinación lineal de los vectores del conjunto generador. Ahora seremos más específicos y caracterizaremos el conjunto generador más pequeño que abarca un (sub)espacio vectorial.

Definición 2 (Base)**.** Consideremos un espacio vectorial real V y $A \subseteq V$.

- Un conjunto generador A de V se denomina *mínimo* si no existe un conjunto más pequeño mínimo $\tilde{A} \subseteq A \subseteq V$ que abarca V.
- Todo conjunto generador linealmente independiente de V es mínimo y se denomina *base* de V. base

Sea V un espacio vectorial real y $B \subseteq V$, $B \neq \emptyset$. Entonces, el siguiente estadomentos son equivalentes:

- B es una base de V
- B es un grupo generador mínimo
- B es un subconjunto linealmente independiente máximo de vectores en V.
- Cada vector $\boldsymbol{x} \in V$ es una combinación lineal de vectores de B, y cada combinación lineal es única, es decir, con

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{k} \psi_i \boldsymbol{b}_i \tag{1}$$

  y $\lambda_i, \psi_i \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b}_i \in B$ se deduce que $\lambda_i = \psi_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Por ejemplo:

- En $\mathbb{R}^3$, la *base canónica/estándar* es canónica/estándar

10 0 base

$B = 0 , 1 , 0 .$ (2)

0 0 1

- Diferentes bases en $\mathbb{R}^3$ son

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix}0.5\\0.8\\-0.4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.8\\0.3\\0.3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2.2\\-1.3\\3.5\end{bmatrix} \right\} \tag{3}$$

- El conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\-4\end{bmatrix} \right\} \tag{4}$$

es linealmente independiente, pero no es un conjunto generador (y no tiene base): Por ejemplo, el vector $[1, 0, 0, 0]^T$ no puede obtenerse mediante una combinación lineal de elementos de $\mathcal{A}$.

Observación. Todo espacio vectorial V posee una base $\mathcal{B}$. Los ejemplos anteriores muestran que puede haber muchas bases de un espacio vectorial V, es decir, no existe una base única.
Sin embargo, todas las bases poseen el mismo número de elementos, los *vectores base*. vectores base

Sólo consideramos los espacios vectoriales de dimensión finita V. En este caso, la *dimensión* de V es el número de vectores base, y escribimos $\dim(V)$. Si $U \subseteq V$ es un subespacio de V entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$ y $\dim(U) = \dim(V)$ si y sólo si $U = V$. Intuitivamente, la dimensión de un espacio vectorial puede pensarse como la número de direcciones independientes en este espacio vectorial. dimensión