Nama : Alvaro A
NPM : 2106752080
Kelas : D
Pasjar : Rafa Almas
Asdos : F[illegible]

① Matrix A : $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ vektor eigen adalah apabila

$A v = k \cdot v$

$\to k \in R$

maka v adalah vektor eigen

apabila $a : \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} \to k = 6$, maka a vektor eigen

$b : \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 27 \end{bmatrix}$ → untuk k skalar tidak ada yg memenuhi maka b bukan vektor eigen

~~[illegible]~~ nilai eigen yg bersesuaian = 6

② Tidak, contoh

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \to (1-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)$

$\lambda^2 + \lambda - \lambda - 1 - (-2)$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1$

$\lambda = \pm i$

③ $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ a) $\begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ $(6-\lambda)(3-\lambda) - (-2)(-2)$

$18 + \lambda^2 - 9\lambda - (4)$

$\lambda^2 - 9\lambda + 14$

$(\lambda - 7)(\lambda - 2)$

$\lambda = 2$ dan $\lambda = 7$

b)

(3b) $\cancel{A}$ $\det(A-\lambda I)=0$

$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Null}}$ → ambil $\lambda = 2$ maka

$(A-2I)x = 0$

$\left(\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) x = 0$

$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\downarrow R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$2x_1 - x_2 = 0$

anggap $x_1 = a$

$x_2 = 2a$

$x_1 = a$

$x_2 = 2a$

→ artinya semua himpunan $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ tanpa vektor nol //

maka semua himpunan vektor yg bersesuaian dengan 2 adalah

$\left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| a \neq 0, a \in R \right\} - \{\vec{0}\}$

(3c) Ruang eigen dari A yg bersuaian dengan nilai eigen 2 adalah

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a \middle| a \in R \right\}$

↳ himpunan seluruh vektor $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ dalam $a \in R$ //

(3d) ruang eigen adalah Null$(A-2I)$ atau

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a \middle| a \in R \right\}$

himpunan semua vektor eigen adalah

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a \middle| a \in R, a \neq 0 \right\}$

(3e) Ya ~~Tidak~~, pada ruang eigen terdapat vektor nol

(F) Pada λ lainnya yaitu 7 yaitu

Null$((A-7I)x=0) \rightarrow \begin{bmatrix} 6-7 & -2 \\ -2 & 3-7 \end{bmatrix} x = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

matrix augmented

$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow -2R_2]{R_1 \leftarrow -R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = -2x_2$

$x_2 = s$

↳ anggap

$x_1 = -2s$

Ruang eigen

$E_7 = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in R \right\}$ //

(4) Solusi trivial artinya ~~[illegible]~~ memiliki 1 solusi artinya matrix tersebut itu memiliki invers.
Matrix homogen

Namun hal ini tidak memenuhi syarat / teorema 7.2 dimana ~~apabila~~ A tidak mempunyai invers ~~apabila~~ jika dan hanya jika 0 nilai eigen A. Sehingga apabila 0 merupakan nilai eigen A maka tidak mungkin memiliki tepat 1 solusi / trivial.

Trivial maka $\det(A) \neq 0$, maka buktikan kontradiksinya yaitu $\det(A) = 0$ maka → tidak trivial

→ Sesuai yg kita tahu $(A - \lambda I)$ akan memiliki determinan 0, apabila ~~[illegible]~~ nilai eigen yg kita miliki $(\lambda = 0)$ maka $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \det(A - 0\lambda) = 0$
$\det(A) = 0$, sehingga terbukti bahwa apabila nilai eigen 0 maka solusi tidak trivial. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan awal

(5) ① $\det(A - \lambda I) = 0$

② $Ax = \lambda x$

③ tidak trivial (disamping itu terdapat satu trivial)

④ polinom berderajat ~~n~~ yg salah satu akarnya bernilai λ

(6) a) Setiap nilai eigen dimulai dengan ~~$Ax = \lambda x$~~
$Av = \lambda v$ → Apabila kita buktikan maka

$$A^{k-1} \cdot Av = \underbrace{A^{k-1} \cdot \lambda v}_{\text{memakai sifat perkalian skalar}}$$

$$A^k v = \lambda (A^{k-1} \cdot v)$$

→ $A^{k-1} \cdot v = A^{k-2} \cdot \underbrace{Av}_{\lambda v}$

maka $\lambda^2 (A^{k-2} \cdot v)$

dst...

sehingga terbukti bahwa

$A^k v = \lambda^k \cdot v$ //

b) Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 5 \\ -6 & 12 & 12 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ → nilai eigen A^2: 0, 4, 9

→ nilai eigen A: 0, 2, 3 //

Perbedaan apabila A^k dengan $k = 2$ //

(7) Matrix 3x3 dengan 3 nilai eigen berbeda

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

→ $A - \lambda I$: ~~[illegible]~~

$$A - I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

→ $\det(A - I) = 0$

~~[illegible]~~

$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

→ $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ //

B: matrix dengan 2 nilai eigen berbeda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow (A-\lambda I) : \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I) = 0$$

$$= (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

$$\lambda = 1 , \lambda = 2$$

C: matrix dengan 1 nilai eigen, matrix identitas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I) : \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} : (1-\lambda)^3$$

$$\lambda = 1$$

Tidak mungkin bahwa matriks berordo 3x3 mempunyai 4 nilai eigen berbeda karena apabila diuraikan pada solusi persamaan $A-\lambda I$ adalah $\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + C_1 \lambda + C_0$

$\det(A-\lambda I) = 0$

$\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_0 = 0$ akan terlihat maksimal polinomial tersebut adalah n ~~[illegible]~~. Sehingga paling banyak n nilai eigen pada suatu matrix 3x3 mempunyai paling banyak 3 nilai eigen berbeda karena pasti akan membentuk $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$, dengan $a, b, c, d \in R$

8 a) Multiplisitas ~~geometri~~ aljabar : Jumlah berapa kali $K - K_0$ muncul sebagai suatu faktor dalam polinom karakteristik dari A

geometris: dimensi ruang eigen yg berpadanan dengan K_0

nilai eigen K yg merupakan hasil

b) Multiplisitas geometri nilai eigen minimal 1 karena

Karena sifat matrix homogen yg memiliki solusi nontrivial, karena eigen didapat dari matrix dengan determinan bernilai 0. Oleh karena non trivial pada SPL Homogen mencari

Sehingga pastinya dimensi yg dihasilkan pasti bernilai setidaknya 1

c) i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$(3-\lambda)^2 = 0$

$\lambda = 3$

dengan multiplisitas aljabar = 2

Cari multiplisitas geometris

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ~~[illegible]~~

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = t$

$x_2 = 0$

$\left[t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| t \in R \right]$

ii) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow (3-\lambda)^2 \rightarrow \lambda = 3$ aljabar geometri = 2,

$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = s \\ x_2 = t \end{matrix} \rightarrow \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Sehingga multiplisitas geometri = multiplisitas aljabar

9) a) A dapat didiagonalkan artinya matrix A tersebut dapat diubah menjadi matrix diagonal. Syarat yg harus dipenuhi jika terdapat $P^{-1}AP = D \rightarrow$ matrix diagonal

P merupakan kumpulan n vektor nilai eigen. Sehingga syarat utama adalah matrix A merupakan matrix berordo nxn dan matrix A mempunyai n vektor-vektor eigen yg bebas linear

b) → sebelum ini: tentukan nilai eigen terlebih dahulu → melalui SPL $(A - \lambda I)x = 0$

① Tentukan n vektor eigen yg bebas linear misalkan $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$

② Dibentuk matriks P yg kolom²nya $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

③ Matriks $D = P^{-1}AP$ adalah matrix diagonal yg entri diagonal utamanya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ dengan λ_j adalah nilai eigen dengan p_j untuk j = 1, 2, 3, ..., n

c) Matriks A terdiagonalisasi secara ortogonal artinya matriks simetris yg dapat diubah menjadi matriks diagonal. Syarat yg harus dipenuhi adalah A memiliki himpunan ortonormal yg terdiri atas n vektor eigen dan A merupakan matrix simetris

d) Tidak tentu, untuk mendapatkan matriks yg dapat didiagonalkan secara ortogonal, maka matriks tersebut harus memiliki sifat simetris. Namun matrix yg dapat didiagonalkan tidak tentu merupakan matriks yg simetris

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ → tidak dapat didiagonalkan karena bukan matrix simetris

eigen: 2 dan -1 → maka matriks diagonal: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10 a) cari $\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow (4-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3-\lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - 0 + (-(3-\lambda))$$

$$(3-\lambda)(4-\lambda)^2 - (3-\lambda)$$

$$(3-\lambda)((4-\lambda)^2-1)$$

$$(3-\lambda)(4-\lambda+1)(4-\lambda-1)$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda)$$

→ ~~[illegible]~~ multipeitas aljabar dari 5 adalah 1

multiplisitas aljabar dari 3 adalah 2

multipeitas geometris dari 5 adalah 1

multipitas geometris dari 3 maka 2

$\text{Null}(A-\lambda I)=0$

$\lambda=5 \rightarrow \text{Null}(A-5I) \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{ebt} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ → maka ~~basis~~ ruang eigen: $\left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$

→ basis dimensi 1 //

$\lambda=3 \rightarrow \text{Null}(A-3I) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ebt} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $E_3 \left\{ s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}$

basis = 2

(b) Matrix diatas ~~tidak~~ dapat di diagonalkan karena ~~multi matriks tersebut pada nilai eigen 3 adalah 1. Hal ini melanggar syarat diagonalitas yaitu multiplisitas aljabar = multiplisitas geometri, karena nilai eigen hanya memiliki 1 dimensi pada λ = 1 maka tidak dapat didiagonalkan pisitas geometris~~

Kita mendapatkan basis yg memenuhi persyaratan dari ruang eigen diatas yaitu

$$E_3 = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \text{basis}: \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_5 = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow \text{basis} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot AP = D$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} //$$

(11) a) Ordo matriks A : $2+1+3=6$ sehingga karena matriks $n \times n$
maka ordo matriks $A = 6 \times 6$

b) Tidak ada nilai eigen bernilai nol sehingga A memiliki invers

c) Tidak dapat ditentukan diagonalitas / dapat di diagonalkan atau tidak karena tidak diberikan matriks elemennya

(12) Diagonalisasi matriks A

Persamaan karakteristik dari pers $\det(A-\lambda I)=0$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$\rightarrow -2\cdot(12-2\lambda) = -24+4\lambda$

Cari nilai eigen:

$(5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow (5-\lambda)((5-\lambda)(6-\lambda)) - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$

$-2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5-\lambda & 0 \end{vmatrix}$

$\cancel{(5-\lambda)^2(6-\lambda)}, (5-\lambda)^2(6-\lambda) - 4(6-\lambda)$

$(6-\lambda)((5-\lambda)^2-4)$

$\lambda=6, \lambda=3, \lambda=7$

$((6-\lambda)(5-\lambda-2)(5-\lambda+2)$

$(6-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda)$

selesaikan

$\lambda=3$ maka Null $(A-3I)=0$

$$A-3I=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda=6$ maka Null $(A-6I)=0$,

$$A-6I=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$A-6I(x)=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3+3R_1]{R_2 \leftarrow \frac{R_2}{-5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=a$

maka: $\left\{a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a\in R\right\}$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2-R_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3+3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow x_1 = -x_2$, $x_2 = -\frac{3}{7}a$, $x_3 = a$

$\rightarrow x_1 = \frac{3}{7}a$

$\rightarrow \left\{a\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a\in R\right\}$

$\lambda=7$, maka $E_7 = $ Null $(A-7I)$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2+R_1} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = a$

$x_1 = a$, $x_2 = a$, $x_3 = a$

$\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a\in R\right\}$

$$P=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Mari buktikan $P^{-1} A P = D$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Sehingga terbukti bahwa A dapat didiagonalkan

(b) Basis yg terdiri dari vektor² eigen A adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

→ sudah bebas linear karena merupakan sifat matrix yg dapat didiagonalkan

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{3}{7}x + z &= a \\ -\tfrac{3}{7}x + z &= b \\ x + y + z &= c \end{aligned}\right\}$$

→ $\cancel{\frac{7a-7z}{3} = x}$ $\quad$ $\cancel{-\frac{7b-7z}{3} = x}$ → $\cancel{\frac{7a-7c}{3} = \frac{-7b+7z}{3}}$

$\cancel{7a+7b = 7c+7z}$

$\cancel{a+b = c+z}$

$$z = \frac{a+b}{2}$$

$$x = \frac{7(a-b)}{6}$$

$\cancel{y + \frac{7a-7z}{3} + b}$

$$y + \frac{7(a-b)}{6} + \frac{a+b}{2} = c$$

$$y = \frac{6c+4b-10a}{6}$$

→ bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear sehingga (a, b, c) merupakan basis bagi R^3

(13) a) $Det(A) = det(B)$

$A = PBP^{-1}$

$= det(P)\ det(B)\ det(P^{-1})$

$det(B) = \cancel{det(P)}\ detB\ \cancel{det(P)}\ \frac{1}{\cancel{det(P)}}$

(b) Betul karena nilai det (A) dan nilai det (B) pasti sama ~~karena~~. Hal itu kalau A tidak punya invers ($det(A) = 0$) maka det (B) juga 0 yg berarti tidak memiliki invers

(c) Betul karena jika $det(A) = det(B)$ maka $det(A - \lambda I) = det(B - \lambda I) = 0$ juga

(d) Betul karena nilai dari B adalah merupakan matriks diagonal dengan nilai² eigen pada diagonalnya. Sehingga karena bersifat similar maka B akan juga memiliki nilai eigen yg sama. Persamaan karakteristik A dan B sama sehingga nilai eigen juga sama

(e) Vektor² eigen A dan B dapat berbeda vektor² eigennya karena perbedaan bentuk matriks A tersebut

B

(1) ~~Salah~~, Benar, karena vektor eigen terdiri dari tak hingganya namun vektor eigen tidak dapat bernilai vektor nol.

(2) Salah, apabila

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A dan B ekuivalen baris namun A tidak memiliki nilai eigen yg sama dengan B

nilai eigen 2   nilai eigen : 1

(3) Benar, ~~karena apabila berasal dari ruang eigen yg sama maka vektor tersebut akan merupakan kombinasi linear dari basis awal pada vektor~~

Salah, untuk matriks identitas $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 1$

sehingga $Null(A - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

oleh karena itu $x_1 = s$ $\rightarrow E_\lambda = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t \in R \right\}$

$x_2 = t$

Apabila kita ambil $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ maka v_1 tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear v_2 maupun sebaliknya

(4) Benar

Apabila A memiliki invers maka pasti terdapat P matriks yg invertible dan D diagonal

$P^{-1} A P = D$, akan dicek $(A^{T})^{-1}$ dapat didiagonalkan

$(P^{-1} A P)^{T} = D^{T}$

$P^{T} A^{T} ((P)^{T})^{-1} = D$ → mx diagonal = mx diagonal transpos

$(P^{T} A^{T} (P^{T})^{-1})^{-1} = D^{-1}$

$(P^{T}) \cdot (A^{T})^{-1} \cdot (P^{T})^{-1} = D$

Anggap $Q = (P^{T})^{-1}$

$Q^{-1} \cdot ((A)^{T})^{-1} \cdot Q = D$

↳ dapat didiagonalkan

(5) Benar, karena terdapat kolom² yg berisi dari vektor² eigen dari A, kolom tersebut merupakan basis di R^{3} dan merentang sebuah basis dari kumpulan kolom² tersebut adalah bebas linear sehingga

(6) Salah, Apabila berdasarkan contoh pada slide maka pada matrix A_i

$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ → memiliki $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

dikita bisa membuat $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

berbeda

Hasilnya akan membentuk matriks ~~tunggal~~ diagonal yaitu

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ atau $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ → maka tidak berlaku matrix yg mendiagonalkan tunggal

(7) Benar,

~~det(A) = det P . det~~

$A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$\det(A) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \det(P^{-1})$

$\det(A) = \cancel{\det(P)} \det(B) \cdot \frac{1}{\cancel{\det(P)}}$

$\det(A) = \det(B)$

$B = C$

$\det(B) = \det C \cdot \det(P) \cdot \det(P^{-1})$

$\det(B) = \det C$

Substitusi $\det(A) = \det(C)$

sehingga benar