Dengan ini, saya menyatakan bahwa tugas ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri.

Nama : Alvaro A
Kelas : A
NPM : 2106752180

1. a) Fungsi $f(x,y) = (x-y^2)^2 + 2(x+y)^2$

$F(x,y) = x^2 + y^4 - 2xy^2 + 2(x^2 + 2xy + y^2)$

$F(x,y)\ 3x^2 + y^4 + 4xy + 2y^2 - 2xy^2$

Untuk menemukan titik minimum, kita dapat menggunakan second partial test:

$D = D(x_0,y_0) = F_{xx}(x_0,y_0)\,F_{yy}(x_0,y_0) - F_{xy}^2(x_0,y_0)$

$F_x(x,y) = 6x + 4y - 2y^2$

$F_y(x,y) = 4y^3 + 4x + 4y - 4xy$

cari titik kritis: $F_x = 0 \rightarrow 6x = 2y^2 - 4y$

$x = \frac{y^2 - 2y}{3}$

$F_y = 0$

$\rightarrow 4y^3 + 4\left(\frac{y^2-2y}{3}\right) + 4y - 4\left(\frac{y^2-2y}{3}\right)y$

$F_y = 4y^3 + \frac{4y^2}{3} - \frac{8y}{3} + 4y - \frac{4y^3}{3} + \frac{8y^2}{3} = 0$

$= \frac{8y^3}{3} + 4y^2 + \frac{4y}{3} = 0$

$y\underbrace{\left(\frac{8}{3}y^2 + 4y + \frac{4}{3}\right)}_{D>0}$, maka $y = 0$

Substitusi y pada $F_x(x,y)$, maka diperoleh

$F_x(x,y) = 0$

$6x + 0 - 0 = 0 \rightarrow x = 0$

Diperoleh titik kritis, dicari D

$F_{xx}(x,y) = 6$

$F_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4y + 4$ (masukkan titik kritis) (0,0)

$= 4$

$F_{xy}(x,y) = 4 - 4y = 4$ (masukkan titik kritis)

$D = 6 \cdot 4 - 4^2 = 24 - 16 = 8.$

Maka, karena $8 > 0$ atau $D > 0$ dan $F_{xx}(x_0,y_0)$ atau $F(0,0) > 0$, maka $F(0,0)$ adalah titik minimum.

Sehingga titik (0,0) adalah titik minimum agar $f(x,y)$ minimum.

Kita juga dapat melihat dari persamaan, karena persamaan tersebut diselimuti oleh operator kuadrat maka pastinya nilai $f(x,y)$ dengan x atau y apapun akan bernilai ≥ 0 (bilangan non negatif).

Sehingga titik (0,0), merupakan titik yg dapat membuat nilai $F(x,y)$ minimum yaitu 0 //

b) Iterasi 1:

Diketahui tebakan awal $x_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\nabla F = \begin{pmatrix} 6x + 4y - 2y^2 \\ 4y^3 + 4x + 4y - 4xy \end{pmatrix}$ ← x ← y

$p = -\nabla F(5,5) = \begin{pmatrix} 0 \\ -440 \end{pmatrix}$

$F(x_0 + \alpha p)$ dengan $x_0 + \alpha p$ yg minimum:

$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 - 440\alpha \end{bmatrix}$

→ masukkan $x = 5$ dan $y = 5 - 440\alpha$ pada $F(0)$ //

maka

$F(x,y) = (x - y^2)^2 + 2(x+y)^2$

$F(5, 5-440\alpha) = (5 - (5-440\alpha)^2)^2 + 2(5 + 5 - 440\alpha)^2$

$= 37480960000\alpha^4 - 1703680000\alpha^3 + 27491200\alpha^2 - 193600\alpha + 600$

Akan mencapai minimum pada

$F'(\alpha) = 0$

$\frac{d}{d\alpha} = 149923840000\alpha^3 - 5111040000\alpha^2 + 54982400\alpha - 193600 = 0$

$\alpha_1 = 0.01695$

$\alpha_2 = 0.00857 + 0.00165i$

$\alpha_3 = 0.00857 - 0.01695i$

→ gunakan ini, maka

$x_1 = x_0 + \alpha p$

$= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + 0.01695 \begin{bmatrix} 0 \\ -440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2.458 \end{bmatrix}$

$P_1 = -\nabla F(5, -2.458) = \begin{bmatrix} -8.084 \\ 0.0746 \end{bmatrix}$ Iterasi 2

$F(x_1 + \alpha p_1)$ dengan $x_1 + \alpha p_1$ yg minimum:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2.458 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -8.084 \\ 0.0746 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 8.084\alpha \\ -2.458 + 0.0746\alpha \end{bmatrix}$$

$$F(5 - 8.084\alpha, -2.458 + 0.0746\alpha) = \left((5 - 8.084\alpha) - (-2.458 + 0.0746\alpha)^2\right)^2 + 2\left(5 - 8.084\alpha + (-2.458 + 0.746\alpha)\right)^2$$

$$= 0.006031\alpha^4 - 0.085896\alpha^3 + 187.868773\alpha^2 - 65.360439\alpha + 14.0088$$

$$F'(x_1 + \alpha p_1) = \frac{124\alpha^3 - 257688\alpha^2 + 3753754\alpha - 65360439}{1000} = 0$$

Diperoleh nilai α sebesar:

$\alpha_1 = 0.017397$ ✓

$\alpha_2 = 1038.97753 + 1396.53395\,i$

$\alpha_3 = 1038.97753 - 1396.53395\,i$

Maka diperoleh

$$X_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2.458 \end{bmatrix} + 0.017397 \begin{bmatrix} -8.084 \\ 0.0746 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5936 \\ -2.445 \end{bmatrix}$$

//

1c) Iterasi 1:

$x_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 440 \end{bmatrix}$ $\quad$ diketahui $\nabla F(x) = \begin{pmatrix} 6x+4y-2y^2 \\ 4y^3+4x+4y-4xy \end{pmatrix}$

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 4-4y \\ 4-4y & 12y^2+4-4x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4-4y \\ 4-4y & 12y^2-4x+4 \end{bmatrix}$$

$\uparrow x \qquad \uparrow y$

$Hd = -\nabla F(x_0)$

$H_{x_0} = \begin{bmatrix} 6 & -16 \\ -16 & 284 \end{bmatrix}$

Untuk mencari d, kita dapat melakukan perkalian invers

$$\rightarrow d = H_0^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -440 \end{bmatrix} = \frac{1}{1448} \begin{bmatrix} 284 & 16 \\ 16 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{880}{181} \\ -\frac{330}{181} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + d = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{880}{181} \\ -\frac{330}{181} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{181} \\ \frac{575}{181} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.1378 \\ 3.1768 \end{bmatrix}$$

Iterasi 2:

$x_1 = \begin{bmatrix} \frac{25}{181} \\ \frac{575}{181} \end{bmatrix}$ $\quad \nabla F(x_1) = \begin{bmatrix} -\frac{217800}{32761} \\ \frac{828656400}{5929741} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -6.6497 \\ 139.7458 \end{bmatrix}$

$\|\nabla F(x_1)\| = 139.90$ (masih langkah baik dari $440 \rightarrow 139.90$)

$$H_1 = \begin{bmatrix} 6 & -8.7071 \\ -8.7071 & 124.3511 \end{bmatrix}$$

$H_1 d = -\nabla F(x_1)$

$d = H_1^{-1} \cdot -\nabla F(x_1)$

$\rightarrow d = H_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 6.6497 \\ -139.7956 \end{bmatrix}$

$d = \begin{bmatrix} -0.5786 \\ -1.1629 \end{bmatrix}$

$x_2 = x_1 + d = \begin{bmatrix} 0.1378 \\ 3.1768 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5786 \\ -1.1629 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -0.4408 \\ 2.0143 \end{bmatrix}$

↳ rounded (because in octave)

Dapat diperoleh

$\nabla F(x_2) = \begin{bmatrix} -2.7026 \\ 42.5385 \end{bmatrix}$

$\|\nabla F(x_2)\| = 42.624$ (masih langkah baik)

Sehingga langkah yg tergolong baik adalah langkah yg membuat $|\text{grad } F(x_i)|$ turun mendekati 0 dibandingkan sebelumnya. Kebalikannya, langkah buruk adalah langkah yg memiliki nilai $|\text{grad } F(x_i)|$ ↳ nilai $|\text{grad } F(x_i)|$ bertambah menjauhi 0 dibandingkan nilai sebelumnya.

d) cara memastikan bahwa titik tersebut adalah titik minimum / maksimum lokal adalah dengan mengevaluasi nilai dari matriks Hessiannya. Nilai ini akan menentukan apakah definit positif atau tidak:

$$H = \begin{bmatrix} 6 & -4.0573 \\ -4.0573 & 59.4535 \end{bmatrix}$$

→ Seperti pada cholesky, kita dapat memperoleh definit positif matriks hessian tersebut.

$H(1{:}1) = 6 \ (>0)$: positif

$H(1{:}2, 1{:}2) = 310.2593 \ (>0)$: positif

] definit positif

karena matriks tersebut definit positif, oleh karena itu titik tersebut (x_2) merupakan titik minimum lokal karena definit positif $(D>0)$.

② Metode pengali Langrange

$g(x)$: kendala: $x + y - 4 = 0$

$f(x) = x^2 y + 2x - y$

→ Oleh karena itu:

$L(x, y, \lambda) = x^2 y + 2x - y + \lambda(x + y - 4)$

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy + 2 + \lambda \\ x^2 - 1 + \lambda \\ x + y - 4 \end{bmatrix}$$

$\nabla F(x, y, z) = 0$

③ $x + y = 4$

$x = 4 - y$

② $\lambda = 1 - x^2$

$\lambda = 1 - (4-y)^2$

$= 1 - (16 + y^2 - 8y)$

$= -y^2 + 8y - 15$

① $2(4-y)y + 2 + 8y - y^2 - 15 = 0$

$8y - 2y^2 + 2 + 8y - y^2 - 15 = 0$

$-3y^2 + 16y - 13 = 0$

$(-3y + 13)(y - 1)$

$y_1 = \frac{13}{3}$ $\quad y_2 = 1$

$x_1 = -\frac{1}{3}$ $\quad x_2 = 3$

$\lambda_1 = \frac{8}{9}$ $\quad \lambda_2 = -8$

Selanjutnya karena terdapat titik optimum pada F karena kendala $\leq$ (lebih kecil, atau sama dengan)
maka perlu dicek, grad(F) = 0

▷ Perlu dicari lambda dari kedua nilai ini
Kita dapat menggunakan $\nabla F(x,y,\lambda) = 0$ pers 1:

$$F(x,y) = x^2 y + 2x - y$$

$$\hookrightarrow F_x = 0 = 2xy + 2 = 0$$

$$F_y = x^2 - 1 = 0$$

$$x_3 = 1 \qquad x_4 = -1 \quad y_4 = 1$$

$$y_3 = 2(1)y + 2 = 0$$

$$y_3 = -1$$

$$\nabla F(x,y,\lambda) = 2xy + 2 + \lambda = 0$$

$$\lambda_3 = 2(1)(-1) + 2 + \lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda_4 = 2(-1)(1) + 2 + \lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\underbrace{\begin{matrix} x_1 = -\frac{1}{3} & x_2 = 3 \\ y_1 = \frac{13}{3} & y_2 = 1 \\ \lambda_1 = \frac{8}{9} & \lambda_2 = -8 \end{matrix}}_{\text{masuk kendala } x+y=4} \qquad \underbrace{\begin{matrix} x_3 = 1 & x_4 = -1 \\ y_3 = -1 & y_4 = 1 \\ \lambda_3 = 0 & \lambda_4 = 0 \end{matrix}}_{\text{masuk kendala } x+y \leq 4}$$

Membuat matriks hessian dari grad F

$$H = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

pada bagian 1: $\begin{bmatrix} \frac{26}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

2: $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

3: $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

4: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

maka titik 1 $(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}, \frac{8}{9})$: saddle point
2 $(3, 1, -8)$: saddle point
3 $(1, -1, 0)$: saddle point
4 $(-1, 1, 0)$: saddle point

Oleh karena itu, tidak ada nilai maksimum/minimum lokal karena eigen²nya
tidak ada definit positif/negatif

Interpolation

3 a) $F(x) = \sin(x)$

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y	1	0	-1

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})}{(-\frac{\pi}{2})(-\pi)} = \frac{2}{\pi^2}(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})(-\frac{\pi}{2})} = -\frac{4}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\pi)(\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)$$

karena pada y_1 dilihat bahwa nilai $\sin(\pi) = 0$, maka $p(x)$ hanya

$y_0 l_0(x) + y_2 l_2(x) = p(x)$

$\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2}) - \frac{2}{\pi^2}(x-\pi)(x-\frac{\pi}{2})$

$\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)\left((x-\frac{3\pi}{2}) - (x-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{2}{\pi^2}(x-\pi)(-\pi) = \frac{-2x\pi}{\pi^2} + \frac{2\pi^2}{\pi^2}$

$p(x) = \frac{-2x}{\pi} + 2$

$p(0.727\pi) = \frac{-2(0.727\pi)}{\pi} + 2 = 0.546$

$p(0.727\pi) = 0.546$

Maka diperoleh $p(x) = \frac{-2x}{\pi} + 2$ dan $p(0.727\pi) = 0.546$

b) i) Fenomena runge adalah fenomena yg terjadi ketika memperbanyak jumlah titik interpolasi tidak menyebabkan fungsi error menjadi semakin kecil. Terutama pada ujung interval yg disebabkan akibat fungsi $e(x)$ yg diberikan, bergantung pada norm dari $\prod_{i=1} (x-x_i)$. Fenomena ini biasa terjadi karena interpolasi ~~[illegible]~~ pada suatu fungsi sehingga terjadi osilasi pada ujung interval dengan polinomial orde tinggi dari fungsi interpolasi

ii) Dengan menambahkan titik interpolasi, kita perlu mengatur penempatan titik tersebut sehingga norm dari $\prod_{i=1} (x-x_i)$ dapat di kontrol. Solusi yg ditawarkan adalah piecewise interpolation

(3c) $S_i(x)$: Polynomial orde-3 yg menginterpolasi data

$S_0(x)$ pada titik $(\frac{\pi}{2}, 1)$ dan $(\pi, 0)$
$S_1(x)$ interpolasi pada titik $(\pi, 0)$ dan $(\frac{3\pi}{2}, -1)$] $S_i: A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i$

(1) Interpolasi data:

$$S_0(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow \frac{\pi^3}{8}A_0 + \frac{\pi^2}{4}B_0 + \frac{\pi}{2}C_0 + D_0 = 1$$

$$S_0(\pi) = 0 \rightarrow \pi^3 A_0 + \pi^2 B_0 + \pi C_0 + D_0 \quad -$$

dikurang

$$\frac{7\pi^3}{8}A_0 + \frac{3\pi^2}{4}B_0 + \frac{\pi}{2}C_0 = -1$$

$$S_1(\pi) = 0 : \pi^3 A_1 + \pi^2 B_1 + \pi C_1 + D_1 = 0$$

$$S_1(\tfrac{3\pi}{2}) = -1 : \frac{27\pi^3}{8} + \frac{9}{4}\pi^2 B_1 + \frac{3\pi}{2}C_1 + D_1 = -1 \quad -$$

dikurang

$$-\frac{19\pi^3}{8}A_1 - \frac{5}{4}\pi^2 B_1 - \frac{\pi}{2}C_1 = 1$$

$$\frac{9\pi^3}{8}A_1 + \frac{5}{4}\pi^2 B_1 + \frac{\pi}{2}C_1 = -1$$

(2) Kontinu pada $S_i'(x) \rightarrow = 0$

$S_0'(x) = 3A_0x^2 + 2B_0x + C_0$
$S_1'(x) = 3A_1x^2 + 2B_1x + C_1$] $S_0'(x) = S_1'(\pi) \Rightarrow 3\pi^2 A_0 + 2\pi B_0 + C_0 = 3\pi^2 A_1 + 2\pi B_1 + C_1$

$$= 3\pi^2 A_0 + 2\pi B_0 + C_0 - 3\pi^2 A_1 - 2\pi B_1 - C_1 = 0$$

(3) Kontinu pada $S_i''(x) = 0$

$S_0''(x) = 6A_0x + 2B_0$
$S_1''(x) = 6A_1x + 2B_1$] $\rightarrow S_0''(\pi) = S_1''(\pi) \rightarrow 6\pi A_0 + 2B_0 = 6\pi A_1 + 2B_1$

$$= 6\pi A_0 + 2B_0 - 6\pi A_1 - 2B_1 = 0$$

(4) Natural spline: $S_0''(x_0) = S_1''(x_2) = 0$

ujung kiri $= \frac{\pi}{2} \rightarrow S_0''(\frac{\pi}{2}) : 3\pi A_0 + 2B_0 = 0$

ujung kanan $= \frac{3\pi}{2} \rightarrow S_1''(\frac{3\pi}{2}) : 9\pi A_1 + 2B_1 = 0$

Kita dapat mengevaluasi nilai dari $S_0(x)$ dan $S_1(x)$ (Octave assisted)

$$\begin{array}{cccccccc} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 & A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^3}{8} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi^3 & \pi^2 & \pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi^3 & \pi^2 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{27\pi^3}{8} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{2} & 0 \\ 3\pi^2 & 2\pi & 1 & 0 & -3\pi^2 & -2\pi & -1 & 0 \\ 6\pi & 2 & 0 & 0 & -6\pi & -2 & 0 & 0 \\ 3\pi & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9\pi & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh $(A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1, D_1) = (0, 0, -0.6366, 2, 0, 0, -0.6322, 2)$

$S_0(x) = -0.6366x + 2$

$S_1(x) = -0.6366x + 2$

(d) Kondisi natural untuk Boundary condition adalah $S''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$ atau turunan kedua setiap ujung interval 0. Penggunaan Boundary point lain, seperti kondisi not-a-knot akan memungkinkan terbentuknya nilai maksimum dan minimum pada ujung interval. Hal ini seharusnya pada kondisi natural tidak terjadi. Biasanya, kedua ujung, pada kondisi natural, membentuk interpolasi menjadi simple dan smooth.