LK 7 Aljabar linear

Nama : Jaycent Gunawan Ongris Kelas : C

NPM : 2106750231 Asdos : ARV

Pasjar : Diah Afia Safitri

A.1. $A_{2\times 2}$ dan $\vec{a}, \vec{b}$, dengan $\vec{a}$ vektor eigen A dan $\vec{b}$ bukan vektor eigen A. Tentukan juga nilai eigen yang bersesuaian dengan $\vec{a}$

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ karena $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Nilai eigen $= 2$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ karena $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \neq k\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Tidak ada nilai k yang bisa memenuhi

2. Apakah nilai eigen suatu matriks selalu merupakan bilangan riil?

Tidak selamanya. Counterexample:

misalkan matriks tersebut $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda)(3-\lambda) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9 + \lambda^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i$$

Dengan demikian, nilai eigen bisa berupa bilangan kompleks

3. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

a. Nilai eigen?

$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow (6-\lambda)(3-\lambda) - (-2)(-2) = 0$

$\Leftrightarrow 18 - 9\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 7) = 0$

Nilai eigen: $\lambda = 2$ dan $\lambda = 7$

b. Ambil $\lambda = 2$ vektor eigen yg bersesuaian:

$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$6a - 2b = 2a \Leftrightarrow 4a = 2b$

$-2a + 3b = 2b \Leftrightarrow 2a = b$

Dengan demikian, semua vektor eigen yg bersesuaian dapat dinyatakan dalam himpunan A berikut:

$A = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \right\}$

c. Ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ adalah

$E_\lambda = A \cup \{\vec{0}\}$

d. Pada contoh di atas, ruang eigennya adalah

$E_\lambda = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ dan himpunan semua vektor eigen adalah

$A = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \right\}$

e. Apakah ruang eigen memuat selain vektor eigen?

Ya, ruang eigen memuat $\vec{0}$, yang tidak dikandung oleh himpunan vektor eigen.

f. Tentukan ruang eigen untuk nilai eigen selain λ.

untuk $a = 7$.

$$A - 7 \cdot I = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -a - 2b = 0 \\ -2a - 4b = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} -a &= 2b \\ a &= -2b \end{aligned}$$

Maka, ruang eigen yang bersesuaian:

$$E_a = \left\{ b \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Buktikan SPL $A\vec{x} = \vec{0}$ hanya memiliki solusi trivial iff 0 bukan nilai eigen dari A.

Perhatikan bahwa SPL $A\vec{x} = \vec{0}$ hanya memiliki solusi trivial jika dan hanya jika $EBT(A) = I$ atau A invertibel atau $\det(A) \neq 0$. Sementara itu, λ adalah nilai eigen A jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I) = 0$. Jika $\lambda = 0$, maka $\det(A - \lambda I) = \det(A) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan di awal bahwa SPL $A\vec{x} = \vec{0}$ hanya memiliki solusi trivial jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$. Dengan demikian, SPL $A\vec{x} = \vec{0}$ hanya memiliki solusi trivial iff 0 bukan nilai eigen dari A.

5. $A_{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Pernyataan berikut ekuivalen:

1) λ adalah nilai eigen untuk A

   λ adalah akar persamaan karakteristik $\underline{\det(A - \lambda I) = 0}$.

2) Terdapat vektor tak nol $\vec{x}$ sedemikian hingga $\underline{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}$

3) $SPL (\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ mempunyai penyelesaian non-trivial.

4) $\det(\lambda I - A)$ adalah polinom berderajat $\underline{n}$ yang salah satu akarnya bernilai $\underline{0}$ bila bentuk $ebt(A) \neq I$.

6. Misalkan $A_{n \times n}$, λ adalah nilai eigen A, $\vec{x}$ vektor eigen yang bersesuaian

a) Buktikan untuk $k \in \mathbb{Z}^+$, λ^k adalah nilai eigen untuk A^k dan $\vec{x}$ adalah vektor eigen dari A^k yang berpadanan.

Untuk λ nilai eigen $A_{n \times n}$, berlaku: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \ldots (1)$$

$$A \cdot A\vec{x} = A\lambda\vec{x}$$

$$A^2\vec{x} = \lambda(A\vec{x}) \quad \ldots (3)$$

Substitusi $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ke (3)

$$A^2\vec{x} = \lambda(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}$$

$$A \cdot A^2\vec{x} = A \cdot \lambda^2\vec{x} = \lambda^2 A\vec{x}$$

$$A^3\vec{x} = \lambda^2(\lambda\vec{x})$$

$$A^3\vec{x} = \lambda^3\vec{x}$$

Generalisasi untuk pangkat sebanyak k-kali.

$$A \cdot A^{k-1}\vec{x} = A \cdot \lambda^{k-1}\vec{x}$$

$$A^k\vec{x} = \lambda^{k-1} A\vec{x}$$

$$A^k\vec{x} = \lambda^{k-1}(\lambda\vec{x})$$

$$A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$$

Sementara itu, dapat dilihat bahwa vektor eigen $\vec{x}$ tidak berubah dan masih tetap berlaku untuk A^k.

b. Contoh dengan menggunakan $A_{2 \times 2}$ dan $k = 2$

misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kita ketahui bahwa matriks A adalah matriks segitiga bawah, sehingga $\lambda_1 = 2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa A^2 juga segitiga bawah, dengan $\lambda_2 = 4$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $\lambda_2 = \lambda_1^k = 2^2 = 4$.

7. Contoh matriks 3x3 yang punya 3 nilai eigen berbeda, 2 nilai eigen berbeda, dan 1 nilai eigen berbeda

Contoh akan menggunakan matriks segitiga, di mana nilai eigen-nya terdiri dari elemen-elemen diagonal utama.

$A_{3\times3}$ dengan 3 nilai eigen berbeda:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1, \quad \lambda = 2, \quad \lambda = 3$$

$B_{3\times3}$ dengan 2 nilai eigen berbeda:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1, \quad \lambda = 2$$

$C_{3\times3}$ dengan 1 nilai eigen berbeda:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1$$

Tidak mungkin ada matriks 3x3 yang punya 4 nilai eigen berbeda. Hal ini karena matriks 3x3 akan menghasilkan polinomial karakteristik dengan derajat tertinggi 3. Artinya, maksimal akar persamaan yg bisa didapatkan adalah 3. Dikarenakan nilai eigen didapatkan dari akar-akar persamaan (polinomial) karakteristik tersebut, maka pastilah nilai eigen tersebut maksimal berjumlah 3. Sehingga, tidak mungkin ada matriks 3x3 yang punya 4 nilai eigen berbeda.

8. a. Diberikan matriks A dan nilai eigen k. Definisikan multiplisitas geometri dan aljabar untuk nilai eigen k.

Multiplisitas geometri untuk nilai eigen k merupakan dimensi ruang eigen dari A yang berpadanan dengan k.

Multiplisitas aljabar k dari A adalah jumlah berapa kali $(\lambda - k)$ muncul sebagai suatu faktor dalam polinom karakteristik dari A.

b. Jelaskan mengapa multiplisitas geometri nilai eigen minimal 1.
Multiplisitas geometri merupakan dimensi ruang eigen suatu matriks yang berpadanan dengan nilai eigen tersebut. Hal ini berarti akan dibuktikan bahwa dimensi minimal ruang eigen adalah 1.
Dimensi dari ruang eigen untuk nilai eigen tertentu adalah nulitas dari $(A - \lambda I)$ dengan λ nilai eigen tersebut untuk matriks A.
Selanjutnya, kita tahu bahwa pernyataan "λ nilai eigen A" ekuivalen dengan "spl $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ memiliki solusi non-trivial". Karena spl $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ punya solusi non-trivial, berarti pasti terdapat minimal 1 parameter bebas untuk spl tersebut. Karena nulitas bersesuaian dengan jumlah parameter bebas untuk spl yang dibentuk, maka dapat dipastikan nulitas $(A - \lambda I) \geq 1$. Dengan demikian, dapat disimpulkan juga bahwa dimensi ruang eigen atau multiplisitas geometri-nya minimal 1.

c. Berikan masing-masing contoh:
i. Matriks $\lambda = 3$ dengan multiplisitas geometri < multiplisitas aljabar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3, \ \lambda = 1$$

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

multiplisitas aljabar untuk $\lambda = 3$ adalah 1

$$(A - 3I)\vec{x} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$EBT(A - 3I) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nulitas $(A - 3I) = 1$ karena terdapat 1 parameter bebas
Dengan demikian, multiplisitas geometri untuk $\lambda = 3$ bernilai 1.
$\therefore$ multiplisitas geometri < multiplisitas aljabar

ii. Matriks dgn $\lambda = 3$, multiplisitas geometri = multiplisitas aljabar.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 3$$

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

multiplisitas aljabar untuk $\lambda = 3$ adalah 2

Selanjutnya akan dicari nulitas dari $A - \lambda I$, $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-3 & 0-0 \\ 0-0 & 3-3 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Terdapat 2 parameter bebas (tidak bersesuaian dengan 1 utama) sehingga nulitas $(A - 3I)$ adalah 2. Dengan demikian, multiplisitas geometri-nya untuk $\lambda = 3$ bernilai 2 juga.

$\therefore$ multiplisitas geometri = multiplisitas aljabar = 2

9. $A_{n \times n}$

a. A dapat didiagonalkan jika terdapat matriks P yang memiliki invers sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D$, dengan D adalah matriks diagonal. Syarat A agar dapat diagonalkan adalah A merupakan matriks persegi dengan n-baris dan n-kolom, serta A punya n vektor-vektor eigen yang bebas linear.

b. Prosedur mendiagonalkan A berfungsi untuk mencari P sedemikian hingga $PAP^{-1} = D$ dengan $A_{n \times n}$ dan D matriks diagonal.

Prosedur :

1) Tentukan n vektor eigen A yang bebas linear, dalam hal ini misalnya $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \ldots, \vec{p_n}$.

2) Bentuk matriks P yang kolom-kolomnya $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \ldots, \vec{p_n}$.

3) Matriks $D = P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal yang entri

diagonal utamanya $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ dengan λ_j adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan $\vec{p_j}$ untuk $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

c. A terdiagonalisasi secara ortogonal berarti A similar ortogonal terhadap suatu matriks diagonal, atau $P^T A P = D$ dengan P adalah matriks ortogonal dan D adalah matriks diagonal. Syarat yang harus dipenuhi A agar dapat didiagonalkan secara ortogonal adalah A matriks persegi dengan n-baris dan n-kolom, A memiliki himpunan ortonormal yang terdiri dari n vektor eigen, serta A simetris.

d. Salah, seharusnya matriks yang dapat terdiagonalkan secara ortogonal yang pasti dapat didiagonalkan. Terdapat matriks yang dapat didiagonalkan tetapi tidak dapat terdiagonalkan secara ortogonal. Sebagai contoh, matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dapat didiagonalkan karena terdapat matriks P

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di mana $P^{-1}AP$ akan menghasilkan matriks diagonal, yaitu D.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Akan tetapi,
A tidak dapat terdiagonalkan secara ortogonal karena A tidak simetris. //

10. $$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

a. multiplisitas geometri & aljabar untuk masing-masing nilai eigen matriks A

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + 0 + 0 - (3-\lambda) - 0 - 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow (4-\lambda)^2(3-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow (3-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(16 - 8\lambda + \lambda^2 - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda - 5)(\lambda - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-3)^2(\lambda-5) = 0 \qquad \lambda = 3,\ \lambda = 5$

Multiplisitas aljabar untuk $\lambda = 3$ adalah 2

Multiplisitas aljabar untuk $\lambda = 5$ adalah 1

Multiplisitas geometri untuk $\lambda = 3$:

$$\text{Null}(A - 3I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Lakukan OBE utk mendapat EBT:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk EBT tersebut, dilihat bahwa terdapat 2 parameter bebas (tidak bersesuaian dengan 1 utama). Dengan demikian, basis dari Null$(A-3I)$ terdiri dari 2 vektor. Artinya, multiplisitas geometri untuk $\lambda = 3$ bernilai 2.

Multiplisitas geometri untuk $\lambda = 8$

$$\text{Null}(A - 5I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

Lakukan OBE untuk mendapat EBT:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \left(-\frac{1}{2}\right)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow (-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk EBT tersebut, dilihat bahwa terdapat 1 parameter bebas (tidak bersesuaian dengan 1 utama). Dengan demikian, basis dari Null$(A-5I)$ terdiri dari 1 vektor. Artinya, multiplisitas geometri untuk $\lambda = 5$ bernilai 1.

b. Apakah matriks di atas dapat didiagonalkan?

Suatu matriks $n \times n$ dapat didiagonalkan jika dan hanya jika matriks tersebut memiliki n vektor eigen yang bebas linear. Cara untuk menentukan ini adalah menentukan basis untuk tiap ruang eigen dan menghitung jumlah vektor basis yang didapat. Jika jumlah vektor basis yang didapat berjumlah n, maka matriks tersebut dapat didiagonalkan.

Berdasarkan jawaban (a),

- Untuk $\lambda = 3$:

Basis $\mathrm{Null}(A-3I)$ adalah sbb

Dalam bentuk EBT,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

param. utama: x_1

param. bebas: x_2, x_3

MB. $x_2 = s$, $x_3 = t$

$x_1 = -x_3 = -t$

$x_2 = s$

$x_3 = t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{basis } \mathrm{Null}(A-3I) : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Untuk $\lambda = 5$

Basis $\mathrm{Null}(A-5I)$ adalah sbb.

Dalam bentuk EBT,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Param utama: x_1, x_2

Param bebas: x_3

Misal. $x_3 = s$

$x_1 = s$ $\quad$ $x_3 = s$

$x_2 = 2s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Basis Null}(A - 5I) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dengan demikian, didapatkan basis:

$$\lambda = 3 : \vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \lambda = 5 : \vec{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka, matriks yang kolomnya terdiri dari $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ mendiagonalkan A, yaitu P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Pembuktian:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = D$$

Di mana D merupakan matriks diagonal.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

11. Polinom karakteristik A : $(\lambda+1)^2(\lambda+2)(\lambda-1)^3 = 0$

a. Ordo matriks A :

ordo matriks A merupakan $n \times n$, di mana n merupakan derajat tertinggi pada polinom karakteristik A. Dalam hal ini, derajat tertinggi polinom karakteristik A : $2+3+1 = 6$. Berarti, ordo matriks A adalah 6×6.

b. Apakah A mempunyai inverse? Jelaskan!

Ya, A mempunyai inverse karena nilai-nilai eigen A, yaitu

$\lambda = -1$, $\lambda = -2$, $\lambda = 1$ tidak ada yang bernilai nol.

c. Apakah A dapat didiagonalkan ? Jelaskan!
Untuk bisa mengetahui apakah A dapat didiagonalkan atau tidak, tidak bisa hanya dengan informasi terkait persamaan karakteristik. Sebaliknya, perlu diketahui matriks A apa, karena satu persamaan karakteristik bisa berasal dari matriks yang berbeda.

12. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

a. Diagonalisasi matriks A
Menentukan nilai eigen A

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (5-\lambda)^2(6-\lambda) + \cancel{0 + 0 - 0} - 4(6-\lambda) - 0 = 0$

$\Leftrightarrow (6-\lambda)((5-\lambda)^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow (6-\lambda)(25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (6-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 21) = 0 \quad \Leftrightarrow (6-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-7) = 0$

Didapatkan nilai eigen $\lambda = 6$, $\lambda = 3$, $\lambda = 7$

Mencari basis untuk tiap ruang eigen:

-) $\lambda = 6$

Basis Null $(A - 6I)$

$$\text{Null}(A-6I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Reduksi jadi EBT

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftarrow (-1)R_1]{R_1 \leftarrow (-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1]{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \left(-\frac{1}{3}\right) R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Maka, untuk $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

parameter utama: x_1, x_2 parameter bebas: x_3

misalkan $x_3 = s$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= s \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis Null $(A - 6I) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

-) $\lambda = 3$

Basis Null $(A - 3I)$

$$\text{Null}(A-3I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 5-3 & 2 & 0 \\ 2 & 5-3 & 0 \\ -3 & 4 & 6-3 \end{bmatrix}\right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

Reduksi jadi EBT

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2]{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{7}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 1 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Maka, untuk $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 1 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

parameter utama: x_1, x_2 parameter bebas: x_3

misalkan $x_3 = s$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - \frac{3}{7}x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + \frac{3}{7}x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3}{7}s \\ x_2 &= -\tfrac{3}{7}s \\ x_3 &= s \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Basis Null}(A - 3I) = \left\{ \begin{bmatrix} 3/7 \\ -3/7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

-) $\lambda = 7$

Basis Null $(A - 7I)$

$$\text{Null}(A - 7I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 5-7 & 2 & 0 \\ 2 & 5-7 & 0 \\ -3 & 4 & 6-7 \end{bmatrix}\right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

Reduksi jadi EBT

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftarrow (-\frac{1}{2})R_1]{R_2 \leftarrow (-\frac{1}{2})R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{maka,} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

parameter utama: x_1, x_2 parameter bebas: x_3

misalkan $x_3 = s$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= s \\ x_2 &= s \\ x_3 &= s \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis Null$(A - 7I) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Didapatkan bahwa $\vec{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{P}_2 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ -3/7 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka $P = [\vec{P}_1 \quad \vec{P}_2, \vec{P}_3]$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{7} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{7} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 1 \\ 7/6 & -7/6 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 1 \\ 7/6 & -7/6 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{7} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{7} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{7} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{7} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

b. Tunjukkan terdapat basis $\mathbb{R}^3$ yang terdiri atas vektor-vektor eigen dari A.

Vektor-vektor eigen dari A untuk nilai eigen yang bersesuaian dinyatakan dalam $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, dan $\vec{p_3}$. $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, dan $\vec{p_3}$ merupakan vektor eigen dari A karena merupakan basis ruang eigen untuk masing-masing nilai eigen yang bersesuaian. Sebelumnya, kita tahu $A_{n\times n}$ dapat didiagonalkan jika dan hanya jika A memiliki n vektor eigen yang bebas linear. Berarti, $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, dan $\vec{p_3}$ pasti vektor eigen yg bebas linear karena A dapat didiagonalkan. Selanjutnya akan dibuktikan $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, dan $\vec{p_3}$ merentang $\mathbb{R}^3$. Atau, span $(\{\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}\}) = \mathbb{R}^3$. Artinya, tiap elemen di $\mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sbg kombinasi linear $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, $\vec{p_3}$. Ambil elemen sembarang $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a, b, c, k, l, m \in \mathbb{R}$

$$k\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + l\begin{bmatrix}\frac{3}{7}\\-\frac{3}{7}\\1\end{bmatrix} + m\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{7}l + m = a & \ldots (1)\\ -\frac{3}{7}l + m = b & \ldots (2)\\ k + l + m = c & \ldots (3)\end{cases}$$

$(1) + (2)$: $2m = a + b$

$m = \frac{a+b}{2}$

$(1) - (2)$: $\frac{6}{7}l = a - b$

$l = \frac{7(a-b)}{6}$

$$k + \frac{7}{6}(a-b) + \frac{a+b}{2} = c$$

$$6k + 7(a-b) + 3(a+b) = 6c$$

$$6k + 7a - 7b + 3a + 3b = 6c$$

$$6k = 6c + 4b - 10a$$

$$k = \frac{6c + 4b - 10a}{6}$$

karena k, l, m dapat dinyatakan dari a, b, c, maka untuk $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, (a, b, c) tersebut dapat dinyatakan dengan kombinasi linear vektor $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, $\vec{p_3}$.

13. A dan B similar. Tunjukkan bahwa:

a. $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B)$

$B = P^{-1}AP$

$\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(P^{-1}AP)$

$= \mathrm{Det}(P^{-1})\,\mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(P)$

$= \dfrac{1}{\cancel{\mathrm{Det}(P)}}\,\mathrm{Det}(A)\cdot\cancel{\mathrm{Det}(P)}$

$= \mathrm{Det}(A)$

Terbukti $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B)$

b. A dan B sama-sama punya invers atau tidak punya invers
Berangkat dari poin (a), karena $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B)$, maka pasti sifat invertible atau tidaknya A sama dengan B. Jika A invertible, berarti $\mathrm{Det}(A) \neq 0$, maka $\mathrm{Det}(B) \neq 0$ karena $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B)$, begitu pula sebaliknya. Jika A tidak invertible, berarti $\mathrm{Det}(A) = 0$ maka $\mathrm{Det}(B) = 0$ karena $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B)$, begitu pula sebaliknya. Dengan demikian, A dan B sama-sama punya invers atau tidak punya invers.

c. Persamaan karakteristik A dan B sama

$B = P^{-1}AP$

Persamaan karakteristik B : $\det(B - \lambda I) = 0$

$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = 0$

$= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = 0$

$= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = 0$

$= \det(P^{-1})\,\det(A - \lambda I)\cdot\det(P) = 0$

$= \dfrac{1}{\cancel{\det(P)}}\cdot\det(A - \lambda I)\cdot\cancel{\det(P)} = 0$

$= \det(A - \lambda I) = 0$

d. Nilai-nilai eigen A sama dengan nilai-nilai eigen B
Berdasarkan poin (c), didapatkan bahwa persamaan karakteristik

A dan B sama. Karena nilai eigen merupakan solusi dari persamaan karakteristik dan persamaan karakteristiknya sama, maka pasti nilai eigennya juga sama.

e. Vektor-vektor eigen A dan B bisa jadi berbeda.
Untuk nilai eigen yang sama, vektor eigen untuk A dan B bisa berbeda. Sebenarnya, untuk $\vec{v}$ vektor eigen A untuk nilai eigen λ, maka yang menjadi vektor eigen pada B untuk nilai eigen yang sama adalah $P^{-1}\vec{v}$. Berikut pembuktiannya:

$P^{-1}\vec{v}$ vektor eigen B untuk nilai eigen λ berarti

$$B P^{-1}\vec{v} = \lambda P^{-1}\vec{v}$$

Kita ketahui $B = P^{-1}AP$ dan $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$$\begin{aligned} BP^{-1}\vec{v} &= (P^{-1}AP)P^{-1}\vec{v} = (P^{-1}A)(PP^{-1})\vec{v} = (P^{-1}A)\cdot I\vec{v} = P^{-1}A\vec{v} \\ &= P^{-1}\lambda\vec{v} \\ &= \lambda P^{-1}\vec{v} \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti $BP^{-1}\vec{v} = \lambda P^{-1}\vec{v}$. Berarti, untuk nilai eigen yang sama, vektor eigen untuk A dan B bisa berbeda karena vektor eigen A untuk nilai eigen λ adalah $\vec{v}$ sedangkan vektor eigen B untuk nilai eigen yang sama adalah $P^{-1}\vec{v}$.

B. 1. Benar.
Vektor eigen tak boleh vektor nol, berarti $k\vec{v} \neq \vec{0}$.
Selanjutnya, misalkan λ adalah nilai eigen A, berarti

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$k.A.\vec{v} = k.\lambda\vec{v} \quad \text{(kalikan kedua ruas dengan k)}$$

$$A \cdot k\vec{v} = \lambda k\vec{v} \quad \dots (1)$$

Berdasarkan (1), dapat dilihat bahwa $k\vec{v}$ juga merupakan vektor eigen matriks A untuk nilai eigen λ.

2. Salah

Counterexample:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A dan B ekuivalen baris karena matriks A didapatkan dari menerapkan OBE pada B, dan begitupula sebaliknya. Akan tetapi, nilai eigen untuk matriks A adalah 2 dan nilai eigen untuk matriks B adalah 1.

3. Salah

Counterexample:

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nilai eigen matriks $I = 1$

Ruang eigen untuk $\lambda = 1$

$Null(A - I) = Null\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = Null\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

x_1 dan x_2 parameter bebas. Misal $x_1 = s$, $x_2 = t$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

basis $Null(A-I) = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Berarti, ruang eigen A untuk nilai eigen $\lambda = 1$:

$E_\lambda = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Kita dapat mengambil $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ vektor eigen yg bebas linear:

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_1$ tidak dapat dinyatakan sbg kombinasi linear $\vec{v}_2$, dan begitu juga sebaliknya.

Akan tetapi, $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ sama-sama berasal dari ruang eigen yang sama, yaitu ruang eigen A untuk $\lambda = 1$.

4. Benar

A matriks invertible yg dapat didiagonalkan berarti terdapat P matriks invertible dan D matriks diagonal sedemikian sehingga: $P^{-1}AP = D$. Akan dicek apakah $(A^T)^{-1}$ dapat didiagonalkan

$(P^{-1}AP)^T = D^T$

$P^T \cdot A^T \cdot (P^{-1})^T = D$ (karena transpose matriks diagonal jg diagonal)

$P^T \cdot A^T \cdot (P^T)^{-1} = D$

$(P^T A^T (P^T)^{-1})^{-1} = D^{-1}$

$((P^T)^{-1})^{-1} (A^T)^{-1} (P^T)^{-1} = D$ (karena inverse matriks diagonal jg diagonal)

misalkan $Q = (P^T)^{-1}$

$Q^{-1} (A^T)^{-1} Q = D$

Berarti $(A^T)^{-1}$ juga dapat didiagonalkan

5. Benar

Untuk $A_{3\times3}$ yang didiagonalkan oleh P, maka P merupakan matriks yang kolom-kolomnya terdiri vektor-vektor eigen dari A untuk semua nilai eigen matriks A. Kolom-kolom tersebut juga membentuk basis dari R^3 karena bersifat bebas linear dan merentang R^3.

6. Salah

Counterexample:

matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nilai eigen matriks segitiga atas A: $\lambda = 0$, $\lambda = 1$

Akan dicari matriks yg mendiagonalkan A:

Untuk $\lambda = 0$

Basis $\text{Null}(A - \lambda I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

Basis : $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Untuk $\lambda = 1$

Basis $\text{Null}(A - \lambda I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

Basis : $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

P yang terbentuk bisa lebih dari 1, yaitu

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P_2^{-1} A P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks yang mendiagonalkan ada 2, yaitu P_1 dan P_2

7. Benar

A dan B saling similar, berarti $\det(A) = \det(B)$

B dan C saling similar, berarti $\det(B) = \det(C)$

Maka, $\det(A) = \det(B) = \det(C)$

Berarti, $\det(A) = \det(C)$

C. Kaitan konsep-konsep nilai eigen, aljabar matriks, SPL homogen, OBE, dan determinan

Nilai eigen λ merupakan nilai yang memenuhi persamaan $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dengan $\vec{v} \neq 0$, yang disebut sebagai vektor eigen. Untuk bisa mendapatkan nilai eigen yang bersesuaian dengan suatu matriks, kita perlu mencari λ yang membuat SPL Homogen $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ mempunyai solusi tak nol. Artinya, kita perlu mencari λ sedemikian hingga determinan $(A - \lambda I)$ bernilai nol. Untuk bisa mendapatkan matriks $(A-\lambda I)$ untuk kemudian ditentukan determinannya, kita perlu mengetahui konsep aljabar matriks, utamanya penjumlahan (pengurangan) matriks dan perkalian matriks dengan skalar.

Selanjutnya, untuk menentukan semua vektor eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen tertentu, kita perlu mencari $\vec{v}$ yang merupakan solusi dari SPL Homogen $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, yang berarti mencari $Null(A - \lambda I)$, untuk kemudian kita kurangi dengan $\{\vec{0}\}$. Adapun $Null(A-\lambda I)$ sendiri merupakan ruang eigen untuk nilai eigen λ. Untuk bisa mencari $Null(A-\lambda I)$, dapat diterapkan OBE pada $(A - \lambda I)$ dahulu agar matriks tersebut lebih sederhana dan mudah ditentukan solusinya.