Nama : Alvaro Austin

NPM : 2100352180

Kelas : D

Pasjarah : Ratu Dimas

8a) Ortogonalitas himpunan dapat diselidiki jika setiap ~~himpunan~~ vektor dalam himpunan S saling ortogonal

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\text{Trace}(A^T B) = \text{Trace}(B^T A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -10 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix} = -4$

$\text{Trace}(A^T C) = \text{Trace}(C^T A) =$

$\text{Trace}(B^T C) = \text{Trace}(C^T B) =$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \neq 0$ dilihat dari ini terlihat bahwa S bukan himpunan yg ortogonal

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{bmatrix} = 6 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{bmatrix} = 8$

Maka terlihat bahwa himpunan S diatas bukanlah himpunan yg ortogonal

b) $\langle p, q \rangle = 2a_0b_0 + a_1b_1 + 2a_2b_2$

$P_1 = 1 - 2x + x^2$

$P_2 = 1 - x^2$

$P_3 = 1 + 2x + x^2$

$\langle P_1, P_2 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-2)(0) + 2(1)(-1) = 2 + 0 - 2 = 0$

$\langle P_1, P_3 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-2)(2) + 2 \cdot (1)(1) = 2 - 4 + 2 = 0$

$\langle P_2, P_3 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (0)(2) + 2 \cdot (-1)(1) = 2 - 2 = 0$

Memiliki sifat simetris

Maka terlihat bahwa himpunan $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ merupakan himpunan yg ortogonal karena setiap vektornya membentuk ortogonal.

9) a) saling ortogonal komplemen jika dan hanya jika W_2 mengandung semua vektor yg ortogonal terhadap setiap vektor di W_1 dan sebaliknya. ditulis $(W_1)^\perp = W_2$ atau $(W_2)^\perp = W_1$

b) Dengan asumsi HKD yg digunakan adalah dot product dalam ruang euclid maka untuk setiap vektor sembarang pada W_2 akan membentuk ortogonal pada setiap operasi HKD dengan vektor W_2. Akan kita buktikan, kita tahu bahwa $W_1 = \{(a, -a, 0) \mid a \in R\}$ dan $W_2 = \{(-b, b, c) \mid b, c \in R\}$ maka HKD nya

$a \cdot -b + -a \cdot b + c \cdot 0 = -ab + ab = 0$ terlihat bahwa pada setiap vektor di W_1 dan W_2 membuat hasil kali dalam di ruang euclid bernilai 0 maka dipastikan saling ortogonal komponen

c) Contoh 2 subruang anggap $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ maka

$w_1 = \{(a,b,0,0) \mid a,b \in R\}$
$w_2 = \{(0,0,c,d) \mid c,d \in R\}$] Anggap operasi HKD berada pada ruang euclid yg berarti HKD merupakan operasi dot product

maka $\langle w_1, w_2 \rangle = a \cdot 0 + b \cdot 0 + 0 \cdot c + 0 \cdot d = 0$

Terlihat bahwa w_1, w_2 ortogonal komplemen satu sama lain maka $(w_1)^{\perp} = w_2$

d) P^3 yg saling ortogonal komplemen :

$W_1, W_2 \subseteq P^3 \longrightarrow W_1 = \{d + cx \mid d, c \in R\}$

$W_2 = \{bx^2 + ax^3 \mid a, b \in R\}$

Apabila HKD di ruang euclid (dot product) maka $\langle w_1, w_2 \rangle =$

$d \cdot 0 + c \cdot 0 + b \cdot 0 + a \cdot 0 = 0$, maka $(w_1)^{\perp} = w_2$

e) Sumbu y sehingga $W = \{(0, a, 0) \mid a \in R\}$ maka $(W)^{\perp}$ adalah himpunan semua vektor yg ortogonal dengan W sehingga dapat kita lihat apabila HKD pada ruang euclid (dot product) akan menghasilkan nilai 0, maka himpunan tersebut adalah $W^{\perp} = \{(b, 0, c) \mid b, c \in R\}$ maka $\langle w, w^{\perp} \rangle$

$= 0 \cdot b + a \cdot 0 + 0 \cdot c = 0$

10 a) $W^{\perp}$ = subruang yg semua elemennya ortogonal dengan vektor W

b) $W^{\perp} \cap W = \{\vec{0}\}$

c) $V^{\perp} = \{\vec{0}\}$

d) $(V^{\perp})^{\perp} = V$

e) Belum tentu, karena dapat saja elemen yg harusnya berada pada V tidak ada di $W \cup W^{\perp}$

11 a) Norm dari vektor, apabila norm dari setiap vektor basis ortogonal tidak harus bernilai 1 namun basis ortonormal mengharuskan untuk memiliki panjang/norm sebesar 1

b) Cek basis ortogonal

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow \sqrt{3} R_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{2}{\sqrt{2}} R_3]{R_1 \leftarrow \sqrt{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa B merupakan basis ortogonal karena bebas linear dan merentang serta setiap vektor tidak akan membentuk 0

Contoh vektor 2 dan 3 $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

bukan 0

maka A merupakan basis ortonormal di ruang euclid atau ortogonal

$\|u_3\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

B)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2} R_2]{R_1 \leftarrow \sqrt{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka tidak bebas linear karena terdapat 1 parameter bebas maka bukan basis

c)
$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftarrow -R_1]{R_1 \leftarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

terdapat Parameter bebas maka bukan merupakan basis ortogonal maupun ortonormal

C) Asumsi HKD dot product:

$D = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

12) a) tidak konsisten

b) ~~...~~ $\text{Proy}_{\text{col}(A)} \bar{b}$ yg disebut penyelesaian kuadrat terkecil dari $Ax = b$. SPL yang konsisten dan akan memiliki solusi tunggal bila $A^T A$ mempunyai invers

c) Penyelesaian kuadrat terkecil

(13) $c = 2$

$a + b + c = 4$

$a - b + c = 0$

$c = 1$

tidak dapat pers parabolanya

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4×3 $\quad$ 3×1

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{R_2}{2}]{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{R_3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

sehingga $a = \frac{1}{2}$ $\quad b = 2$ $\quad c = \frac{3}{2}$

maka pers parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

(4)

$2x_1 - x_2 = 5$

$x_1 + x_2 = -2$

$2x_1 = 1$

dapatkan x_1 = unknown x_2 unknown

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

maka sistem normal

$$\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

14b) $5x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$x_1 - x_2 + x_3 = -2$

$2x_2 - 5x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 4 & -4 \\ 4 & 6 & -12 \\ -4 & -12 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sistem normal

$$\begin{bmatrix} 26 & 4 & -4 \\ 4 & 6 & -12 \\ -4 & -12 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftarrow \frac{R_1}{26}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \\ 4 & 6 & -12 & 3 \\ -4 & -12 & 27 & -3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1$
$R_3 \leftarrow R_3 + 4R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \\ 0 & \frac{70}{13} & -\frac{148}{13} & \frac{33}{13} \\ 0 & -\frac{148}{13} & \frac{343}{13} & -\frac{33}{13} \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow \frac{13}{70} R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \\ 0 & 1 & -\frac{74}{35} & \frac{33}{70} \\ 0 & -\frac{148}{13} & \frac{343}{13} & -\frac{59}{13} \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{148}{13} R_2$
$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{2}{13} R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{35} & \frac{3}{70} \\ 0 & 1 & -\frac{74}{35} & \frac{33}{70} \\ 0 & 0 & \frac{81}{35} & \frac{29}{35} \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow \frac{35}{81} R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{54} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{199}{162} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{29}{81} \end{bmatrix}$$

~~didapat $x_1 = -\frac{1}{54}$, $x_2 = \frac{199}{162}$, $x_3 = \frac{29}{81}$~~

~~Persamaan normal $y = -\frac{1}{54} x_1 + \frac{199}{162} x_2 + \frac{29}{81} x_3$~~

c) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$x_1 - x_2 = 0$

$x_2 - x_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 7 & -4 \\ -3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 7 & -4 \\ -3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ -10 \end{bmatrix}$$

~~solusi $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$~~

~~maka $y = -x_1 + \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_3$~~