1\. a. $f(u,v) = Au \cdot Av = A(U_1 \cdot V_1) + A(U_2 \cdot V_2) + A(U_3 \cdot V_3)$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} (U_1 \cdot V_1) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} (U_2 \cdot V_2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} (U_3 \cdot V_3)$

$f(v,u) = Av \cdot Au = A(V_1 \cdot U_1) + A(V_2 \cdot U_2) + A(V_3 \cdot U_3)$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} (V_1 \cdot U_1) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} (V_2 \cdot U_2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} (V_3 \cdot U_3)$

maka terbukti fungsi $f(u,v) = Au \cdot Av$ adalah hasil kali dalam pada R^3

c. Tidak, karena jika bobot yang dimiliki adalah 0 maka tidak memenuhi aksioma keempat dan jika bobot yang dimiliki adalah negatif bisa dimisalkan $f(u,v) = 3u_1v_1 - 7u_2v_2 + 4u_3v_3$, $v = (1,1,1)$ maka $f(v,v) = 0$. sehingga tidak memenuhi aksioma keempat.

b. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$

- Aksioma Pertama $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$
$= v_1u_1 + 2v_2u_2 + 3v_3u_3$
$= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

- Aksioma Kedua $\langle (\vec{u}+\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\langle (\vec{u}+\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle ((u_1+v_1), (u_2+b_2), (u_3+v_3)), (w_1, w_2, w_3) \rangle$
$= (u_1+v_1)w_1 + 2(u_2+v_2)w_2 + 3(u_3+v_3)w_3$
$= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

•> Aksioma Ketiga $\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (ku_1, ku_2, ku_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle$

$= (ku_1v_1 + 2ku_2v_2 + 3ku_3v_3)$

$= k(u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3)$

$= k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

•> Aksioma Keempat

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1^2 + 2u_2^2 + 3u_3^2$ sehingga selalu bernilai ≥ 0

untuk setiap $\vec{u}$ dan $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ hanya jika $\vec{u} = 0$

2.a. $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = 2a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$

$\Rightarrow$ Aksioma Pertama $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = \langle \bar{q}, \bar{p} \rangle$

$\langle p, q \rangle = 2a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$

$= 2b_0a_0 + 2b_1a_1 + 3b_2a_2 + b_3a_3 = \langle q, p \rangle$

$\Rightarrow$ Aksioma Kedua $\langle (\vec{p}+\vec{q}), \vec{r} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle + \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle$

$\langle (\vec{p}+\vec{q}), \vec{r} \rangle = \langle ((a_0+b_0), (a_1+b_1), (a_2+b_2), (a_3+b_3)),$

$(c_0, c_1, c_2, c_3) \rangle$

$= 2(a_0+b_0)c_0 + 2(a_1+b_1)c_1 + 3(a_2+b_2)c_2$

$+ (a_3+b_3)c_3$

$= (2a_0c_0 + 2a_1c_1 + 3a_2c_2 + a_3c_3) + (2b_0c_0$

$+ 2b_1c_1 + 3b_2c_2 + b_3c_3)$

$= \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle + \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle$

$\Rightarrow$ Aksioma Ketiga $\langle k\vec{p}, \vec{q} \rangle = k \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$

$\langle k\vec{p}, \vec{q} \rangle = \langle (ka_0, ka_1, ka_2, ka_3).(b_0, b_1, b_2, b_3) \rangle$

$= \langle (2ka_0b_0 + 2ka_1b_1 + 3ka_2b_2 + ka_3b_3) \rangle$

$= k \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$

$\Rightarrow$ Aksioma Keempat $\langle q, q \rangle$

$\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle = 2b_0b_0 + 2b_1b_1 + 3b_2b_2 + b_3b_3 \rightarrow$ positif

b. Bisa, apabila w_1 diubah menjadi -2 maka

$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 2a_0b_0 - 2a_1b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$

$q \Rightarrow (1,1,1,1) \rightarrow \langle q, q \rangle = 4 \rightarrow$ positif sehingga

aksioma keempat terpenuhi dan bobot dapat didefinisikan

suatu hasil kali dalam berbobot pada P^3

2c. $a := (1, 0, 0, 0) \rightarrow p(x) = 1$

$$F(p(x); p(x)) = \int_{-2}^{-1} p(x)\, p(x)\, dx = \int_{-2}^{-1} 1 \cdot 1\, dx$$

$$= [x + C]_{-2}^{-1}$$

$$= 1 + C$$

Aksioma ke empat $\rightarrow \int_{-2}^{-1} p(x)^2\, dx \geq 0$ jika dan hanya jika $C \geq 0$

3. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 3a_{22}b_{22} + a_{31}b_{31} + 4a_{32}b_{32}$

→ Aksioma Pertama

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 3a_{22}b_{22} + a_{31}b_{31} + 4a_{32}b_{32}$$

$$= b_{11}a_{11} + 2b_{12}a_{12} + b_{21}a_{21} + 3b_{22}a_{22} + b_{31}a_{31} + 4b_{32}a_{32}$$

$$= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

→ Aksioma Kedua

$$\langle (\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \rangle = \left\langle \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{vmatrix}, \vec{c} \right\rangle$$

$$= (a_{11}+b_{11})c_{11} + 2(a_{12}+b_{12})c_{12} + (a_{21}+b_{21})c_{21} + 3(a_{22}+b_{22})c_{22} + (a_{31}+b_{31})c_{31} + 4(a_{32}+b_{32})c_{32}$$

$$= a_{11}c_{11} + b_{11}c_{11} + 2a_{12}c_{12} + 2b_{12}c_{12} + a_{21}c_{21} + b_{21}c_{21} + 3a_{22}c_{22} + 3b_{22}c_{22} + a_{31}c_{31} + b_{31}c_{31} + 4a_{32}c_{32} + 4b_{32}c_{32}$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

→ Aksioma Ketiga

$$\langle k\vec{a}, \vec{b} \rangle = ka_{11}b_{11} + k2a_{12}b_{12} + ka_{21}b_{21} + k3a_{22}b_{22} + ka_{31}b_{31} + k4a_{32}b_{32}$$

$$= k\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

→ Aksioma Keempat

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_{11}^2 + 2a_{12}^2 + a_{21}^2 + 3a_{22}^2 + a_{31}^2 + 4_{32}^2$$

sehingga selalu bernilai ≥ 0 untuk $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\vec{a} = 0$

4. $\langle \vec{p} . \vec{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$p = 2 - 3x + 6x^2 - 2x^3$

$q = 1 - 2x - 3x^2 + 5x^3$

$\langle \vec{p} . \vec{q} \rangle = 2 \cdot 1 + -3 \cdot -2 + 6(-3) + -2 \cdot 5$

$= 2 + 6 + (-18) + 10$

$= 0$ → tidak memenuhi aksioma 4

5. a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{3u_1^2 + 2u_2^2}$

b. $d(u,v) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{3(u_1 - v_1)^2 + 2(u_2 - v_2)^2}$

c. $\cos(\alpha) = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \dfrac{3u_1 \cdot v_1 + 2u_2 v_2}{\left(\sqrt{(3u_1)^2 + (2u_2)^2}\right) \cdot \left(\sqrt{(3v_1)^2 + (2v_2)^2}\right.}$

Date. /

6.a. $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \int_1^{10} f(x)\, g(x)\, dx$

→ Aksioma Pertama $\langle \vec{f} \cdot \vec{g} \rangle = \langle \vec{g} \cdot \vec{f} \rangle$

$\rightarrow \int_1^{10} f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_1^{10} g(x)\, f(x)\, dx)$

$\rightarrow \langle \vec{g}, \vec{f} \rangle$

→ Aksioma Kedua $\langle (\vec{f} + \vec{g}), \vec{h} \rangle = \langle \vec{f}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{h} \rangle$

$\rightarrow \int_1^{10} (f + g)(x)\, h(x)\, dx = \int_1^{10} f(x)\, h(x)\, dx)$

$+$

$\langle \vec{f}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{h} \rangle = \int_1^{10} g(x)\, h(x)\, d(x))$

→ Aksioma Ketiga $\langle k\vec{f} \cdot \vec{g} \rangle = k \langle \vec{f} \cdot \vec{g} \rangle$

$\rightarrow \int_1^{10} k\, f(x)\, g(x)\, dx = k \int_1^{10} f(x)\, g(x)\, dx$

$\rightarrow k \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$

→ Aksioma Keempat $\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle$

$\rightarrow \int_1^{10} f^2(x)\, dx \geq 0$ apabila $\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\vec{f} = 0$

b. $\vec{f} = f(x) = x + 3$

$\|\vec{f}\| = \sqrt{\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle} = \sqrt{\int_1^{10} f(x)\, f(x)\, dx} = \sqrt{\int_1^{10} f^2(x)\, dx}$

$= \sqrt{\int_1^{10} (x+3)^2\, dx} = \sqrt{\int_1^{10} x^2 + 6x + 9\, dx}$

$= \sqrt{\left. \frac{1}{3} x^3 + 3x^2 + 9x \right]_1^{10}}$

$= \sqrt{711} = 26{,}6$

Date. /

c. $\vec{f} = f(x) = x+5,\ \vec{g} = g(x) = x+2$

$\vec{f} - \vec{g} = x+5-(x+3) = 2$

$d(\vec{f},\vec{g}) = \sqrt{\langle \vec{f}-\vec{g}, \vec{f}-\vec{g} \rangle}$

$= \sqrt{\int_1^{10} (f(x)-g(x))^2\, dx} = \sqrt{\int_1^{10} 2^2\, dx}$

$= \sqrt{4x\Big]_1^{10}} = \sqrt{40-4} = \sqrt{36} = 6$

d. $f(x) = 0,\ g(x) = 0$

$\quad\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\quad\vec{f} \qquad\qquad \vec{g}$

$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = 0 \rightarrow$ ortogonal

$\hookrightarrow \langle f(x), g(x) \rangle = \int_1^{10} f(x) g(x)\, dx$

$= \int_1^{10} 0 \cdot 0 = 0$

Date. /

7. a. hasil kali dalam antara dua vektor tersebut sama dengan 0

b. $u = (1, 0, 0, -1)$

$b = (0, 1, -1, 0)$

$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$

$= (1.0) + (0.1) + (0.-1) + (-1.0) = 0$

c. $a = 2 + 3x + x^2 - x^3 + 5x^4$

$b = 2 + 3x + x^2 + 9x^3 - x^4$

$\langle a ; b \rangle = (2.2) + (3.3) + (1.1) + (-1.9) + (5.(-1))$

$= 4 + 9 + 1 + (-9) + (-5)$

$= 0$

d. Iya, berdasarkan definisi ortoghonal dan aksioma positif

HKD $\rightarrow (\bar{u}, \bar{u}) = 0$ jhj u vektor nol

e. Iya, $k0 = 0$ untuk k bilangan riil apapun dan berdasarkan konsep bahwa kelipatan skalar sebuah vektor akan menghasillkan vektor yang sejajar dengan dirinya sendiri

Nama: Alvaro Austin

NPM: 2100382180

Kelas: D

Pasjarah: Ratu Dimas

8a) Ortogonalitas himpunan dapat diselidiki jika setiap vektor dalam himpunan S saling ortogonal

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\text{Trace}(A^T B) = \text{Trace}(B^T A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -10 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix} = -4$

$\text{Trace}(A^T C) = \text{Trace}(C^T A) =$

$\text{Trace}(B^T C) = \text{Trace}(C^T B) =$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ dilihat dari ini terlihat bahwa S bukan himpunan yg ortogonal

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{bmatrix} = 6 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{bmatrix} = 8$

Maka terlihat bahwa himpunan S diatas bukanlah himpunan yg ortogonal

$P_1 = 1 - 2x + x^2$

$P_2 = 1 - x^2$

$P_3 = 1 + 2x + x^2$

b) $\langle p, q \rangle = 2a_0b_0 + a_1b_1 + 2a_2b_2$

$\langle P_1, P_2 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-2)(0) + 2(1)(-1) = 2 + 0 - 2 = 0$

$\langle P_1, P_3 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-2)(2) + 2 \cdot (1)(1) = 2 - 4 + 2 = 0$

$\langle P_2, P_3 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (0)(2) + 2 \cdot (-1)(1) = 2 - 2 = 0$

Memiliki sifat simetris

Maka terlihat bahwa himpunan $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ merupakan himpunan yg ortogonal karena setiap vektornya membentuk ortogonal.

9) a) saling ortogonal komplemen jika dan hanya jika W_2 mengandung semua vektor yg ortogonal terhadap setiap vektor di W_1 dan sebaliknya. ditulis $(W_1)^\perp = W_2$ atau $(W_2)^\perp = W_1$

b) Dengan asumsi HKD yg digunakan adalah dot product dalam ruang euclid maka untuk setiap vektor sembarang pada W_2 akan membentuk ortogonal pada setiap operasi HKD dengan vektor W_2. Akan kita buktikan, kita tahu bahwa $W_1 = \{(a, -a, 0) \mid a \in R\}$ dan $W_2 \{(-b, b, c) \mid b, c \in R\}$ maka HKD nya

$a \cdot -b + -a \cdot b + c \cdot 0 = -ab + ab = 0$ terlihat bahwa pada setiap vektor di W_1 dan W_2 membuat hasil kali dalam di ruang euclid bernilai 0 maka dipastikan saling ortogonal komponen

c) Contoh 2 subruang anggap $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^4$ maka

$W_1 = \{(a,b,0,0) \mid a,b \in R\}$
$W_2 = \{(0,0,c,d) \mid c,d \in R\}$
] anggap operasi HKD berada pada ruang euclid yg berarti HKD merupakan operasi dot product

maka $\langle W_1, W_2 \rangle = a.0 + b.0 + 0.c + 0.d = 0$

Terlihat bahwa W_1, W_2 ortogonal komplemen satu sama lain maka $(W_1)^{\perp} = W_2$

d) P^3 yg saling ortogonal komplemen:

$W_1, W_2 \subseteq P^3 \to W_1 = \{d + cx \mid d,c \in R\}$
$W_2 = \{bx^2 + ax^3 \mid a,b \in R\}$

Apabila HKD di ruang euclid (dot product) maka $\langle W_1, W_2 \rangle =$
$d.0 + c.0 + b.0 + a.0 = 0$, maka $(W_1)^{\perp} = W_2$

e) Sumbu y sehingga $W = \{(0,a,0) \mid a \in R\}$ maka $(W_1)^{\perp}$ adalah himpunan semua vektor yg ortogonal dengan W sehingga dapat kita lihat apabila HKD pada ruang euclid (dot product) akan menghasilkan nilai 0, maka himpunan tersebut adalah $W^{\perp} = \{(b,0,c) \mid b,c \in R\}$ maka $\langle W, W^{\perp} \rangle$
$= 0.b + a.0 + 0.c = 0$

10 a) $W^{\perp}$ = subruang yg semua elemennya ortogonal dengan vektor W

b) $W^{\perp} \cap W = \{\vec{0}\}$

c) $V^{\perp} = \{\vec{0}\}$

d) $(V^{\perp})^{\perp} = V$

e) Belum tentu, karena dapat saja elemen yg harusnya berada pada V tidak ada di $W \cup W^{\perp}$

11 a) norm dari vektor, apabila norm dari vektor basis ortogonal tidak harus bernilai 1 namun basis ortonormal mengharuskan untuk setiap memiliki panjang/norm sebesar 1

b) Cek basis ortogonal

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow \sqrt3 R_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{2}{\sqrt2} R_3]{R_1 \leftarrow \sqrt2 R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa B merupakan basis ortogonal karena bebas linear dan merentang serta setiap vektor tidak akan membentuk 0

Contoh vektor 2 dan 3 → $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

~~Ortogonal kurang untuk 3 vektor~~

$||u_3|| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

bukan

maka A merupakan basis ortonormal di ruang euclid atau ortogonal

B)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2}R_2]{R_1 \leftarrow \sqrt{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka tidak bebas linear

karena terdapat 1 parameter bebas

maka bukan basis

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftarrow -R_1]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

terdapat

Parameter bebas maka bukan merupakan

basis ortogonal maupun ortonormal

C) Asumsi HKD dot product:

$$D = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

12 a) tidak konsisten

b) $\text{Proy}_{\text{col}(A)}\, \bar{b}$ yg disebut penyelesaian kuadrat terkecil dari $Ax = b$.

SPL yang konsisten dan akan memiliki solusi tunggal bila $A^T A$ mempunyai invers

c) Penyelesaian kuadrat terkecil

(13)

$$\left.\begin{aligned} c &= 2 \\ a+b+c &= 4 \\ a-b+c &= 0 \\ c &= 1 \end{aligned}\right]$$ tidak dapat pers parabolanya

$$\underset{4\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{R_2}{2}]{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{R_3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

sehingga $a = \frac{1}{2}$ $b = 2$ $c = \frac{3}{2}$

maka pers parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

(4)

$2x_1 - x_2 = 5$ dapatkan x_1 = unknown x_2 unknown

$x_1 + x_2 = -2$

$2x_1 = 1$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

maka sistem normal

$$\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

~~$9x_1 - x_2 = 10$~~

~~$-x_1 + 2x_2 = -7$~~

~~maka~~

14b) $5x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + x_3 = -2$
$2x_2 - 5x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 4 & -4 \\ 4 & 6 & -12 \\ -4 & -12 & 27 \end{bmatrix} \quad A^T B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sistem normal

$$\begin{bmatrix} 26 & 4 & -4 \\ 4 & 6 & -12 \\ -4 & -12 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

~~didapat~~ $x_1 = -\frac{1}{54}$, $x_2 = \frac{149}{162}$, $x_3 = \frac{29}{81}$

$R_1 \leftarrow \frac{R_1}{26}$
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \\ 4 & 6 & -12 & 3 \\ -4 & -12 & 27 & -3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 + 4R_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \\ 0 & \frac{70}{13} & -\frac{148}{13} & \frac{33}{13} \\ 0 & -\frac{148}{13} & \frac{343}{13} & -\frac{59}{13} \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow \frac{13}{70} R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \\ 0 & 1 & -\frac{74}{35} & \frac{33}{70} \\ 0 & -\frac{148}{13} & \frac{343}{13} & -\frac{59}{13} \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{148}{13} R_2$, $R_1 \leftarrow R_1 - \frac{2}{13} R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{35} & \frac{3}{70} \\ 0 & 1 & -\frac{74}{35} & \frac{33}{70} \\ 0 & 0 & \frac{81}{35} & \frac{29}{35} \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow \frac{35}{81} R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{54} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{149}{162} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{29}{81} \end{bmatrix}$$

Persamaan normal $y = -\frac{1}{54} x_1 + \frac{149}{162} x_2 + \frac{29}{81} x_3$

c) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_1 - x_2 = 0$
$x_2 - x_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ -10 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 7 & -4 \\ -3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 7 & -4 \\ -3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ -10 \end{bmatrix}$$

solusi $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$

maka $y = -x_1 + \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_3$

1) Panjang vektor (2,0,0) adalah 2

Salah $\rightarrow$ $||u|| = \sqrt{2^2+0^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$ untuk ruang euclid

namun untuk HKD dengan $\langle u,u \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

maka $\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 + 0^2 + 0^2} = 4$

2) A_{nxn} $A_a \cdot A_b$

Benar untuk vektor a, b di R^n. karena memenuhi aksioma hasil kali R^n yg dibangkitkan oleh matriks

$\rightarrow$ karena akan menghasilkan skalar, sehingga tak apa

Yaitu: 1) $A_u \cdot A_v = A_v \cdot A_u$ (dot product, tidak apa²)

2) $A(u+v) \cdot A_w = A_uA_w + A_vA_w$ $\rightarrow$ perkalian memperbolehkan distributif

3) $A(ku \cdot Av) = k(A_u \cdot A_v)$ $\rightarrow$ berlaku sifat ini karena perkalian memperbolehkan komutatif per

4) $A_vA_v > 0$ dengan $A_vA_v = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$, karena invers

3) Benar, karena vektor nol pasti berisi elemen yg bernilai nol. Maupapun nilai HKD pada fungsi tidak akan mengubah apapun karena $\sqrt{0} = 0$ $\rightarrow$ didapat dari $\sqrt{a \cdot 0^2 + b \cdot 0^2 + \ldots + z \cdot 0^2}$

$= \sqrt{0}$

$= 0$

4) Setiap himpunan bergantung linear pasti ortogonal:

Jawaban: Salah, contoh himpunan $S = \{(1,1,0)\ (2,2,0)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ bergantung linear

maka hasil dot product

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4$, bukan ortogonal

Date. /

7. Salah, solusi dari persamaan biasa adalah $A^T A x = A^T b$ sehingga Ax elemen dari Coll (A) & jaraknya paling dekat dengan b pada PKT tidak berada pada Coll (A). Namun pada SPL $Ax = b$ konsisten, maka b pasti elemen Coll (A). yang artinya Ax juga elemen Coll (A) karena merupakan vektor yang sama, sehingga x solusi dari SPL $Ax = b$ dikatakan sebagai PKT dari SPL

5. Benar, $A^T = A^{-1}$, jika A^T merupakan ortogonal maka A^{-1} matriks ortogonal sehingga $2A^T = 2A^{-1}$ benar. Matriks ortogonal adalah matriks persegi dimana himpunan vektor² baris-nya ortonormal begitu juga dengan himpunan vektor² kolomnya bersifat ortonormal.

6. Benar, Himpunan vektor² baris dari matriks ortogonal & himpunan vektor² kolomnya hrs bersifat ortonormal sementara itu, matriks elementer memenuhi kedua syarat tersebut

8. Salah, persamaan normal ada yang dimana $A^T A$ mempunyai invers tetapi SPL $Ax = b$ tidak konsisten / tdk mempunyai invers

Dot Product

Date. /

- HKD
  - → Jarak 2 vektor
  - → Sifat : Simetris, homogen, additif, positif
  - → $\text{proy}_y x$
  - → panjang vektor
  - → sudut antara 2 vektor
- Orthogonalitas
  - → Orthonormal
  - → Himpunan RKHD disebut ortogonal jika dan hanya jika setiap pasang vektor berbeda saling orthogonal
  - → Orthogonal komplemen
- Sistem normal
  - → Teorema konsistensi
  - → $\text{Null}(A^T) = (\text{Coll}(A))^\perp$
- Solusi Kuadrat Terkecil
  - → Jika A adalah matriks $m \times n$ penyelesaian kuadrat terkecil dari $Ax = b$ adalah penyelesaian dari sistem normal