A.

1) Minor, anggap M_{ij} adalah determinan dari suatu matriks A setelah dihapus baris ke i dan kolom ke-j dari matriks tersebut

Nama : Alvaro P
Kelas : D
NPM : 2106095 2180
Kelas Pasjar : Ratu Almas
Asdos : MRT

Sedangkan kofaktor anggap C_{ij} adalah $(-1)^{i+j} M_{ij}$ minor

Contoh apabila matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ sehingga Minor M_{ij}, dengan $i=3$ $j=2$ dimana $a_{ij} = a_{32} = 5$ maka $M_{32} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1-3 = -2$

dan kofaktor $C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32}$

$= (-1)^5 \cdot -2 = 2$

B) ① $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

Aturan sarrus matrix A: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 12 - (5 \times -2) = 12 - (-10) = 22$

$B: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - (0 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1)$

$= 12 + 0 + 6 - (0 + 6 + 12) = 0$

$C: \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 + (-1 \cdot -3 \cdot 14 \cdot 4) + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 3$

$- (4 \cdot 1 \cdot -3 \cdot 6 + 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 14 \cdot 0 \cdot -1)$ + 2 · 4 · 0 · 1

$= 0 + 168 + 12 + 0 - (-72 + 0 + 0)$

$= 252$ (Tidak dapat didapatkan menggunakan Sarrus, hasil berbeda dengan hasil sebenarnya

Sehingga Determinan C tidak dapat digunakan menggunakan aturan sarrus

D) Tidak dapat didapatkan karena bukan matrix nxn (persegi)

Kesalahan yg sering ditemui bahwa dalam menghitung matrix ukuran nxn ($n > 3$)

- Untuk matrix 4x4 hanya melibatkan 8 perkalian elementer harusnya 24 sehingga aturan Sarrus biasa hanya menggunakan n+n perkalian elementer namun harusnya n!

Perkalian elementer

- Tanda hasil kali elementer ada yg salah

2 a) Determinan matriks adalah fungsi yg domainnya himpunan matrix persegi dan kodomainnya himpunan bilangan riil

2 d) $\det(A) = 0$ jika dan hanya jika matrix A tidak memiliki invers

b) 1) Mencari $\mathrm{Det}(A)$ dengan kofaktor dapat menggunakan rumus seperti

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}}_{\text{ekspansi baris } i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}}_{\text{ekspansi kolom } j} \qquad C_{ij} = \text{Kofaktor } M_{ij} = (-1)^{i+j} \underbrace{M_{ij}}_{\text{Minor}}$$

Minor didapat dari determinan eleman yg bukan berada pada baris i dan kolom j

2) $\mathrm{Det}(A) = \sum a_{1j_1} a_{1j_2} a_{1j_3} \ldots a_{nj_n}$ untuk semua permutasi $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$

sehingga untuk mencari determinan A = jumlahan semua hasil kali elementer bertanda dari A. Hasil kali elementer dari matriks $n \times n$ adalah hasil kali n entri masing-masing dari kolom dan baris yg berbeda

3) $\mathrm{Det}(A)$ bergantung dengan:

$$\det(A) = \frac{(-1)^r}{(k_1 k_2 k_3 \ldots k_s)}$$

r: kali tukar baris

s: kali perkalian baris dengan skalar $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s)$

Hal ini didapat dari basis,

$X \to X'$ dengan tukar baris $\det(X') = -\det(X)$

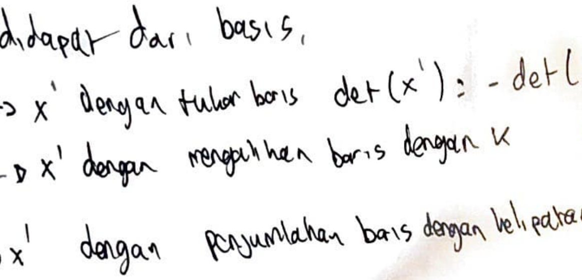
$X \to X'$ dengan mengalikan baris dengan k $\quad \det(X') = k \cdot \det(X)$

$X \to X'$ dengan penjumlahan baris dengan kelipatan baris lain $\quad \det(X') = \det(X)$

C. Apakah fungsi determinan bijektif

Tidak ~~bijektif~~. Fungsi determinan bisa saja surjektif, injektif ~~atau bijektif~~

contoh



Surjektif

Injektif

bisa saja kedua matrix berbeda namun memiliki ~~nilai~~ determinan sama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ Hitung det (B)

a) ekspansi baris kolom 2,

$a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$

$a_{12} = 3$ $\quad C_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5-(1\cdot -4) = 9\cdot(-1)^3$ $\quad a_{12}\cdot C_{12} = 3\cdot -9 = -27$

$a_{22} = 0$ $\quad C_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15-1 = 14$ $\quad a_{22}C_{22} = 0\cdot 14 = 0$

$a_{32} = -3$ $\quad C_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12-1 = -13\cdot(-1)^5$ $\quad a_{32}\cdot C_{32} = -3\cdot 13 = 39$ +

$= -66$

b) kombinatorik ada 6 permutasi

Perkalian elementer :

		Inversi	tanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$= 3\cdot 0\cdot 5 = 0$	0	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	$= 3\cdot -4\cdot -3 = 36$	1	-
$a_{12}a_{21}a_{33}$	$= 3\cdot 1\cdot 5 = 15$	1	-
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$= 3\cdot -4\cdot 1 = -12$	2	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$= 1\cdot 1\cdot -3 = -3$	2	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	$= 1\cdot 0\cdot 1 = 0$	1	-

Jadi $-36-15-12-3-0 = -66$

c) menggunakan OBE

$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$
$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 9 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & -13 \end{bmatrix}$

$R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -13 \end{bmatrix}$

$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -22 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -22 \end{bmatrix}$

$R_3 \leftarrow -\frac{1}{22}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftarrow R_1 - 18R_3$
$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$

$R_2 \leftarrow R_2 + R_3$

Terdapat : - 1 kali pertukaran

det (I) - Perkalian baris konstanta = -3

- Perkalian baris konstanta = -22

$\det(A) = 1\cdot(-3)(-22)\cdot\underbrace{(-1)^1}_{\text{pertukaran}} = -66$

(4) Pengaruh OBE terhadap nilai determinan

1) $X \to X'$ dengan tukar baris $\det(X') = -\det(X)$

2) $X \to X'$ dengan mengalikan baris dengan k & $\det(X') = k \cdot \det(X)$

3) $X \to X'$ dengan penjumlahan baris dengan kelipatan baris lain maka $\det(X') = \det(X)$

Contoh 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -2$ $\quad \det(A') = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 2$ terlihat bahwa $\det(A') = -\det(A)$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 10R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -2$ $\quad \det(A) = -20$

terlihat bahwa mengalikan suatu baris dengan konstanta k maka $\det(A') = k \cdot \det(A)$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -2$ $\quad \det(A') = -2$

terlihat bahwa penjumlahan baris dengan kelipatan baris elementer tidak mengubah hasil kali elementer bertanda oleh karena itu determinan tidak berubah $\det(x') = \det(x)$

(5) a) $\det(AB) = \underbrace{\det(A)}_{A^-} \cdot \det(B)$

karena: $I = E_s \cdots E_1 A$

$E_s^{-1} \cdot E_{s-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1} \cdot I = A$

$E_s^{-1} \ldots E_1^{-1} = A$

$E_s^{-1} \ldots E_1^{-1} \cdot B = AB \to \operatorname{Det}(\underbrace{E_s^{-1} \ldots E_1^{-1}}_{A}) \operatorname{Det}(B)$

~~det(E_s^{-1} ... E_1 ... B)~~

sehingga $\operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{DET}(B) = \operatorname{Det}(AB)$

5b) Apakah $\det(A+B) = \det(B) + \det(A)$. Jelaskan

Tidak, contoh (counterexample)

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\det A = 1} \quad B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\det B = 8} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(A+B) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 =$

~~$\det(A+B) = 9$~~

$\det A + \det B = 9$

c) $\underbrace{\det(A^T)}_{\det(A)} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

diperoleh dengan metode baris ke-i

$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots a_{in} C_{in}$

metode baris ke i

$\det(A^T) : a_{i} c_{1} + a_{i2} C_{i2} + \dots a_{in} C_{in}$

terlihat bahwa ekspansi kolom i di A^T $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

samasaja seperti ekspansi baris i di A

Sehingga $\det(A^T) = \det(A)$

d) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow$

$A^{-1} \cdot A = I$

$\det(A^{-1} A) = \det I$

$\det(A^{-1}) \det(A) = 1$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

e) $\det(A^T) = \det(A^{-1})$

Karena dengan cara ekspansi, kita tidak perlu menentukan baris / kolom tertentu karena setiap ekspansi baris dan kolom akan menghasilkan $\underbrace{\text{Jawaban yang sama}}_{= \text{determinan}}$. Oleh karena itu karena ekspansi kolom di A^T = ekspansi baris di A maka tidak akan mengubah nilai determinan

(6) Kesalahan pada kalimat ini adalah bagian "$\underset{\text{pasti}}{\&}$ berukuran sama". Ada banyak counterexample untuk pertanyaan ini namun counterexample termudah adalah dengan menggunakan

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 1$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(B) = 1$

Terlihat bahwa $A \neq B$, walaupun mereka berupa matrix identitas namun mereka tidak berukuran sama. Mereka juga memiliki determinan

7 a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ → invers ada yaitu -36, pakai ekspansi

$a_{14} \cdot C_{14} + a_{24} C_{24} + a_{34} C_{34} + a_{44} C_{44}$

$\underbrace{(-1)^5 \, 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}}_{0} + 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} + 1 (-1)^7 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$0 + 1 \cdot$ (ekspansi kolom 2) $-$ 1. (ekspasi kolom 1) $+ 0$

$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}_{(-1)^3} + 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}_{(-1)^4} + 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{(-1)^5}$ ~~ekspansi kolom~~ $- \left(2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 4 (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right)$

$= -1 \cdot (-16) + 4 \cdot (-24) - 4(2) - \left(2 \cdot 4 + (-1)(-28) + 4(-22)\right)$

$= 16 - 96 - 8 - (8 + 28 - 88)$

$= -36$
//

Δ = 2 x 5/2 x 19/5 x (-36/19) = -36

Hide solution Recalculate

Result:

Δ = -36

Computation time: 0.007 sec.

▲ Up

8 a) (1) Matriks mempunyai baris nol contoh $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ekspansi ~~baris~~ ~~kolo~~ baris 2 =

$(-1)^3 \, 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$0 + 0 + 0 = 0$ $\det(A) = 0$

determinan = 0

(2) Matrix memiliki kolom 0 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ekspansi kolom 2 = $(-1)^3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0$ $\det(A) = 0$

(3) Matrix yg baris pertama dan kedua sama

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ekspansi baris 3 : $(-1)^4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 2$

$(-1)^4 \cdot 2 \cdot 0 + (-1)^5 \cdot 3 \cdot 0 + (-1)^6 \cdot 0 \cdot 2 = 0$

$\det(A) = 0$

(4) matriks yg baris ketiga adalah 5 kali baris pertama

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ ekspansi baris 2 $(-1)^3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$

$1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + -1 \cdot 2 \cdot 0$

$= 0$ $\det(A) = 0$

(5) matriks yg baris ketiga adalah jumlahan baris pertama

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ekspansi baris 2 $(-1)^3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 0 + 0 + 0 = 0$ $\det(A) = 0$

Your matrix

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	1	1	1
	3	0	0	0

Eliminate elements in the 1st column under the 1st element

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	0	0	0
	3	0	0	0

Multiply the main diagonal elements

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	0	0	0
	3	0	0	0

$\Delta = 1 \times 0 \times 0 = 0$

Your matrix

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	0
+	2	1	1	0
	3	1	1	0

Eliminate elements in the 1st column under the 1st element

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	0
+	2	0	0	0
	3	0	0	0

Multiply the main diagonal elements

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	0
+	2	0	0	0
	3	0	0	0

$\Delta = 1 \times 0 \times 0 = 0$

Your matrix

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	1	1	1
	3	2	3	2

Eliminate elements in the 1st column under the 1st element

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	0	0	0
	3	0	1	0

Swap the 2nd and the 3rd rows inversing determinant sign

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
-	2	0	1	0
	3	0	0	0

Multiply the main diagonal elements

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
-	2	0	1	0
	3	0	0	0

$\Delta = -(1 \times 1 \times 0) = 0$

Your matrix

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	2	3	2
	3	5	5	5

Eliminate elements in the 1st column under the 1st element

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	0	1	0
	3	0	0	0

Multiply the main diagonal elements

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	0	1	0
	3	0	0	0

[2,3]

$\Delta = 1 \times 1 \times 0 = 0$

Your matrix

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	1	1	1
	3	2	2	2

Eliminate elements in the 1st column under the 1st element

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	0	0	0
	3	0	0	0

Multiply the main diagonal elements

Sign		A_1	A_2	A_3
	1	1	1	1
+	2	0	0	0
	3	0	0	0

$\Delta = 1 \times 0 \times 0 = 0$

8b) sehingga dapat dikatakan bahwa sebuah matriks akan memiliki $\underbrace{\text{determinan } 0}_{\text{tidak memiliki invers}}$

apabila memenuhi beberapa syarat berikut

1. Matriks mempunyai baris / kolom 0
2. Terdapat matriks yg memiliki baris / kolom yg identik
3. Terdapat baris/kolom yg merupakan hasil obe baris yg lain.

Hal ini berlaku untuk matrix dengan ordo 4x4, 5x5, dst

9) Jika $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\to \det(A) = \det(A)$

Oleh karena itu

$x = A^{-1} b$

$$x = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) b \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\operatorname{adj}(A) = \operatorname{kof}(A)^T$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{1n} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \boxed{b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1}} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

$\to \det(A)$ dengan kolom pertama diganti b.

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

sehingga terbukti bahwa A_i dapat diperoleh dari A dengan mengganti kolom i dengan b

Selesaikan SPL:

$$\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$\to \det(A) =$ ekspansi kolom 3:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-3) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(8+2) + (-1) \cdot (2)(10) - 3(15)$$

$$= -55$$

$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -20 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ det(A_1) = ekspansi kolom 3

$(-1)^4 \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -20 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5 (2) \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -20 & 2 \end{vmatrix}$

$+ (-1)^6 (-3) \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 144$

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -20 \end{bmatrix}$ det(A_3) = ekspansi kol 1

$1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -20 \end{vmatrix}$

$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -230$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -20 & -3 \end{bmatrix}$ det(A_2) = ekspansi kol 3

$(-1)^4 (1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} + (-1)^5 (2) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -20 \end{vmatrix}$

$+ (-1)^6 (-3) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 61$

$x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{144}{-55} = -\dfrac{144}{55}$ $\quad z = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \dfrac{-230}{-55} = \dfrac{46}{11}$

$y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{61}{-55} = -\dfrac{61}{55}$

6) $3x_1 - x_2 + x_3 = 4$

$-x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 1$

$2x_1 + 6x_2 - x_3 = 5$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Det(A) = ekspansi kol 3

$1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot -1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

$-20 + 40 - 20 = 0$

karena rumus $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ dan det (A) = 0, maka kita tidak dapat mendapatkan x_i dan matrik koef A bukanlah matrix invertible

1. Salah, apabila $A_{m \times n}$ tidak mempunyai invers maka A ~~tidak mempunyai determinan~~ mempunyai determinan namun hasil determinan tsb adalah 0

2. Benar, karena terdapat sifat determinan det (AB) = det(A) . det(B) sehingga apabila det(A) = 0 atau det (B) = 0 ~~maka~~ maka det(AB) pasti 0. Ini artinya A tidak memiliki invers atau B tidak memiliki invers

3. Salah, berdasarkan sifat determinan det(AB) = det (A) . det(B)

Oleh karena itu det (ABC) = det(AB) . det(C) = det(A) . det(B) . det(C) } sama saja

det (BAC) = det (BA) . det(C) = det (B) . det (A) . det (C)

sehingga det (ABC) = det(BAC) pasti sama

4. Benar. A = matrix 3x3 det (A) = 2, maka det (A adj(A)) = 8

karena A . adj(A) = det (A) . I

$\rightarrow$ A . adj(A) = 2 . I $\rightarrow$ A . adj (A) = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

det (A . adj(A)) = 8

5. Salah. Aturan Cramer menggunakan beberapa sifat ini

- Minor
- Cofaktor
- Adjoint
- Determinan

Sehingga apabila membutuhkan determinan artinya Aturan Cramer berguna apabila matrix memiliki invers ($\det \neq 0$). Oleh karena itu, apabila matrix merupakan Invertible, maka matrix tsb hanya memiliki 1 solusi

Oleh karena itu kontradiksi bahwa Cramer bisa mencari tak hingga banyak solusi

6. Salah. Matrix elementer adalah matrix yg diperoleh dari melakukan 1 operasi baris elementer pada matriks Identitas. Apabila determinan matriks $E = 2$ maka hanya dapat terjadi operasi perkalian pada baris dengan konstanta $= 2$

Anggap 3x3 $I = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ $\det(I) = 1$

$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det = 2$

karena ada sifat $\det(A') = k \cdot \det(A)$ apabila dilakukan operasi kali

D. • Saya baru mempelajari bahwa matriks determinan mempunyai beberapa sifat yg penting untuk dipelajari. Salah satu contohnya adalah operasi pertukaran baris. Ketika pertama kali saya melihat sifat tersebut, saya sangat tertarik.

• Saya juga mempelajari ~~[illegible]~~ rumus determinan ~~invers~~ dengan menggunakan operasi baris elementer yg dilakukan yaitu $\frac{(-1)^n}{(r_1 \ldots r_s)}$

• Saya juga mempelajari tentang Cramer yg sangat berguna, kita bisa menggunakan Cramer untuk mencari nilai $x_1, \ldots, x_n$ berdasarkan kolom.

Saya ingin mempelajari Cramer lebih lanjut karena terlihat sangat menarik.