Caso KAVAK

En este problema Luis tiene que minimizar el costo esperado de surtir 4000 maquinas tal que el número total de días-máquina donde la demanda supera al inventario disponible sea menor al 2% mensual. Este es un problema de control estocástico.

Supuestos

- Noten que no hay interacciones entre una máquina y otra, es decir no hay externalidades ni de costos ni de información. Voy a ejemplificar cuales serían externalidades de costos (que no aplican en este problema)
  - Que rellenar una máquina haga más barato rellenar otra máquina cercana
  - Que hubiera un límite de fabricación en la congeladora central o el número de camiones disponibles para rellenar
  - Que la (falta) de disponibilidad en una ubicación haga que la demanda por paletas se traslade a ubicaciones cercanas.
- Un supuesto razonable es que si ya tenemos la información sobre la demanda de paletas para la máquina-día M_{it1} no ganamos nada con información adicional de otra máquina-día M_{it2}.
- Como resultado de las dos observaciones anteriores, la demanda por máquina-día M_{it} va a ser una variable aleatoria independiente.
- La única interacción de información en el problema es que la esperanza de número de fallas depende de las probabilidades de falla de todas las máquinas.
  - Por ejemplo, si todos los días tuviera 10 máquinas expendedoras y 9 de ellas tuvieran 0% de probabilidad de falla y 1 de ellas tuviera 20% de probabilidad de falla, el valor esperado de fallas al mes sería 2%. Esto es diferente a limitar la probabilidad de falla de cada máquina a ser menor a 2%.
  - Voy a suponer que la esperanza del número de fallas en el sistema por día es estable, esto para tener una estrategia general. Probablemente esto se cumpla, pero hay que investigar.
- Como consecuencia de estos supuestos **basta tener una estrategia general para una sola máquina genérica y luego implementarla en todas las máquinas**.

Supuestos sobre la demanda por Maquina-dia

- Nuestra variable aleatoria es demanda por maquina-dia M_{it} tiene una distribución conocida al inicio del día. Esto puede conseguirse con inferencia estadística sencilla, y, por supuesto, depende del día de la semana, la estación del año, si hay día festivo o no, etc.

Con 5 años de datos de demanda se espera saber la distribución de la demanda por paletas con poco margen de error.

- Para darle más estructura al problema supondré que $M_{it} \sim Poisson(\lambda it)$. Esto es razonable, pues el arribo de clientes a la máquina es independiente, con una probabilidad de arribo en cada instante muy baja. La desventaja es que asume que a mayor demanda mayor varianza, podría modelarse con alguna otra distribución, por ejemplo una lognormal si los datos así lo sugieren.
- Suponemos que el jefe de operaciones tiene la información sobre la distribución de M_{it} en el presente y en el futuro (en un sentido mas realista basta con tener la estimación de la distribución para los próximos días). También tiene información sobre el inventario restante en cada máquina al inicio del día I_it

Planteamiento para 1 máquina-día.

Sólo hay 2 decisiones que tomar cada día:
1. Ese día se rellena la máquina?
2. Si se rellena ese día, ¿cuánto inventario ponerle?

La decisión de rellenar la máquina es afirmativa si la probabilidad de que la demanda de la máquina ese día sea mayor al inventario (probabilidad de falla) sea mayor al 2%. En términos matemáticos, se rellena la máquina ese día (t) si

$$P(M_t > I_t) > 0.02$$

- Esto es fácil de calcular porque ya tenemos la distribución de M_t.
- Voy a definir $\tilde{I}_t$ como la cantidad de inventario I_t tal que $P(M_t > \tilde{I}_t) = 0.02$ (o el entero menor)
- Así, si I_t es menor o igual que $\tilde{I}_t$ se rellena la máquina, en caso contrario no se rellena.

Suponiendo que ese día se rellena la máquina ¿Cuánto inventario se le va a poner? Para esto se resuelve un problema de minimización de costos medios esperados:

$$\min_{I_t} E\Big\{\frac{100}{N+1} + I_t - E\big(\sum_{k=0}^{N} \frac{N-k}{N+1} M_{t+k}\big)\Big\}$$

Donde:

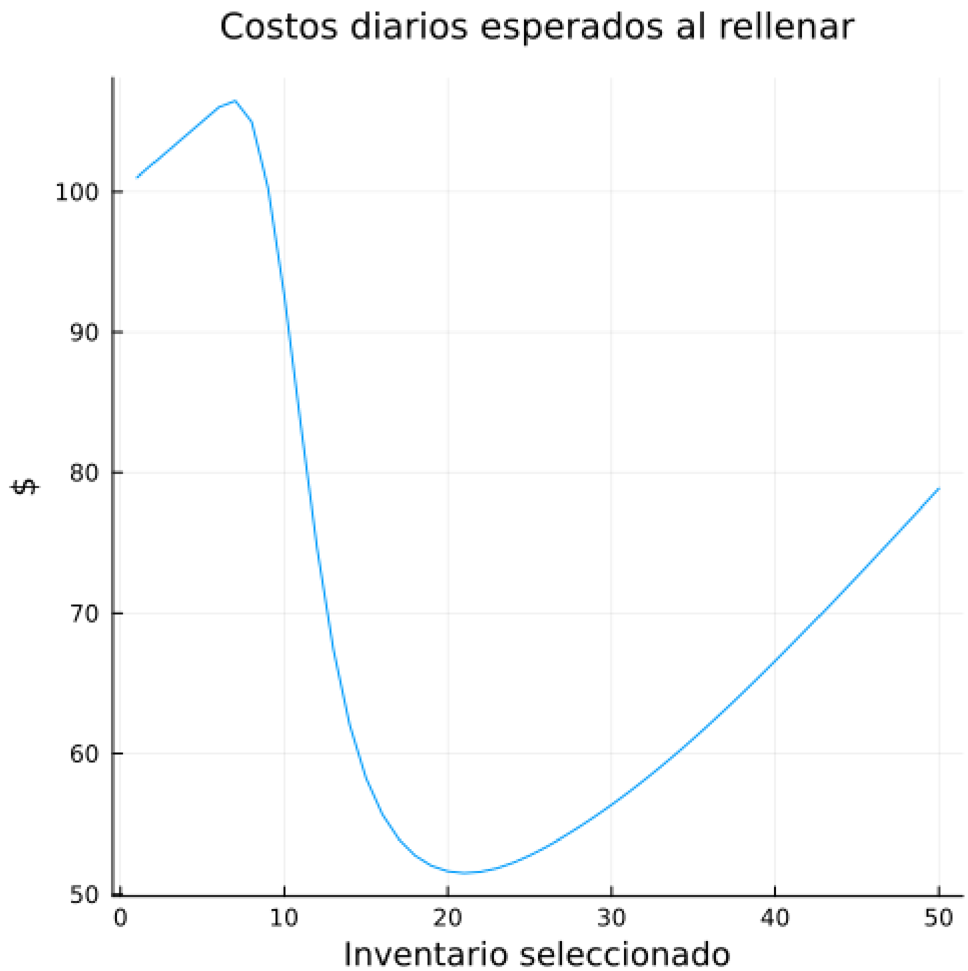
- $N \equiv N(I_t, M_t, M_{t+1}, M_{t+1}, \ldots)$ es **una variable aleatoria** que representa el número de días que va a transcurrir antes de que se cumpla la condición para volver a rellenar el inventario. Esta distribución depende de la decisión de cuánto inventario ponerle I_t y de las demandas esperadas para $t = 0, t = 1, \ldots$
  - En términos matemáticos:

    - $P(N \leq n) \approx P(\sum_{k=0}^{n} M_{t+k} > I_t - \tilde{I}_{t+1})$
    - La razon de que sea sólo una aproximación es que la probabilidad cuando n es grande es condicional a que no haya parado en los n-1 periodos anteriores
- I_t es la variable a elegir (Cuánto inventario ponerle el día que se rellena)
- La fórmula se obtiene porque el costo que se paga el día 0 es 100 como costo fijo más $1 * I_0$ como costo variable, el día 1 se paga $1 * I_0 - M_0$ como costo variable, el día 2 se paga $1 * I_0 - M_0 - M_1$ y así sucesivamente. A esta suma se le divide entre N, el número de días en los que se reparte el costo, para obtener el costo diario promedio esperado.
    - Notar que el costo se paga completo al inicio del día, por lo que si se acaban todas las paletas el mismo día que se relleno ($N = 0$) aún así se pagan I_t dólares del costo variable, esto es para sobreestimar los costos en lugar de subestimarlos

Implementación y Resultados

Voy a escribir un código para simular el problema y su solución, lo siguiente son los pasos

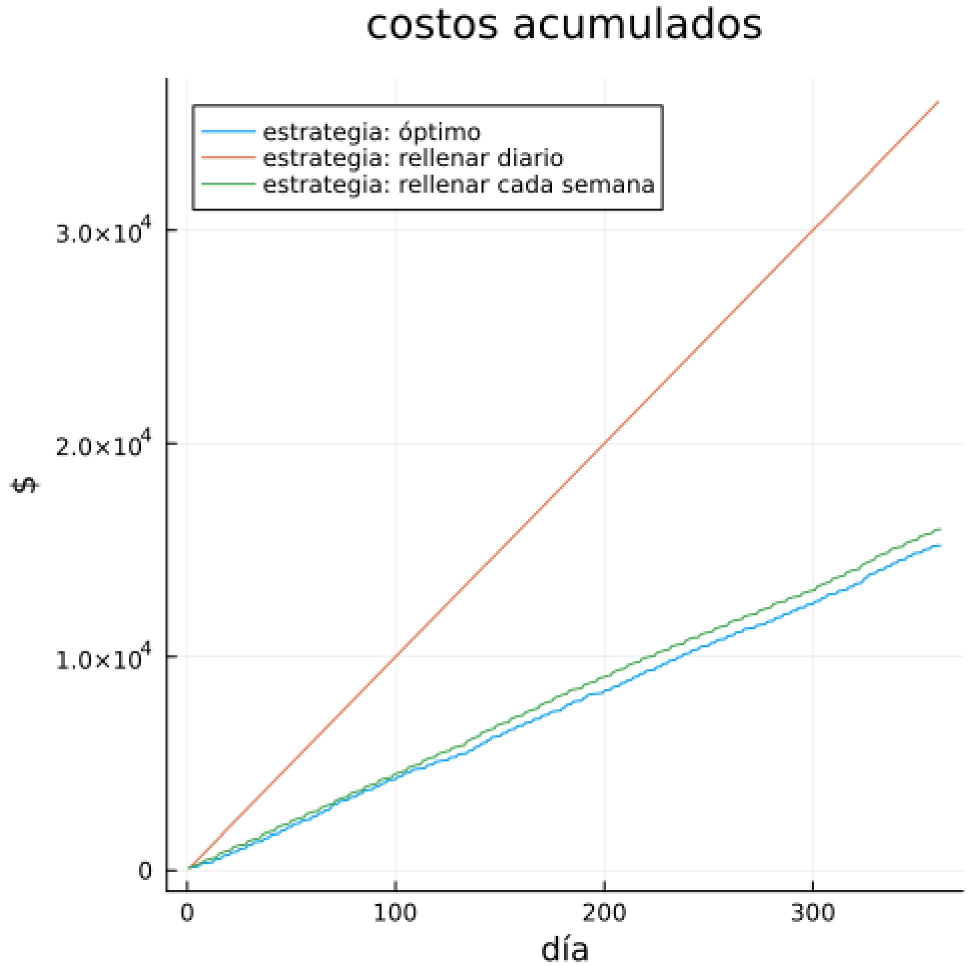
1. Las distribuciones futuras de M_t se supone son dadas. Para la simulación voy a generar los parámetros $\lambda_0, \lambda_1, ...$ de una distribucion Gamma(5, 1).
2. Con los lambdas tengo las distribuciones poisson M_t, con las distribuciones poisson calculo las $\tilde{I}_t$
3. Se crea una funcion que calcula la función de pérdida dado que es el tiempo t, y que se va a rellenar la máquina con inventario I.
    1. Primero se obtiene la función de probabilidad de N utilizando las lambdas de los siguientes 30 días y las $\tilde{I}_t$
    2. Se calcula el primer término de la función de costos $E(\frac{100}{N})$
    3. Se le suma el segundo término de la función de costos I
    4. Se le resta el tercer término de la función de costos $E\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{N-k}{N+1} M_{t+k}\right)$
4. Con la función de costos medios esperados se puede minimizar el costo seleccionando I óptimo. Por ejemplo, en la siguiente gráfica se muestra la función de costos para $t = 1$ y rellenando con inventario que va desde 0 hasta 50



1. Podemos observar que efectivamente poner muy poco inventario que fuerce a la empresa a rellenar diario es muy costoso, pero que agregar exceso de inventario hace que los costos variables crezcan demasiado y levanten los costos medios.
2. Además se tiene respuesta a otra pregunta, no hemos considerado la capacidad de la máquina expendedora, si esta fuera mayor al punto óptimo la solución es la misma, si es menor al punto óptimo pero suficiente para que los costos medios sean bajos la solución sería llenarlo a capacidad, si la capacidad de la máquina fuera excesivamente reducida habría que hacer la recomendación de considerar descontinuar su uso o instalar una de mayor capacidad.

5. Teniendo la función de los costos se simula la política óptima durante 1 año (360 días).
    1. Cada día se evalúa si hay que hacer rellenar la máquina, en caso de que sí se hace la política óptima y se paga el precio fijo ($100)
    2. Se pagan los costos variables de inventario ($ I_t)
    3. Se observa la demanda de ese día M_t y se le resta al inventario (cuidando que no se haga negativo)
    4. Se registran las siguientes series de tiempo: Niveles de inventario al final del día, costos totales acumulados.
    5. Se ajusta la tolerancia del error para que número de errores sea cercano a 2%

6. El resultado es una estrategia óptima, con 1.6% de no disponibilidad. Esta estrategia óptima es mejor que rellenar diario y que rellenar óptimamente 1 vez a la semana como se ve en el siguiente gráfico



7. Para el caso con muchas máquinas basta con implementar la estrategia óptima en cada una de ellas.

Conclusiones y observaciones

- Lo más difícil de implementar esta solución sería implementar el sistema de recopilación de datos, cálculo óptimo e indicador de cuáles máquinas rellenar y con cuanto de tal manera que sea entendible y fácil de usar para Luis en su día a día.
- Algo notorio es que suponiendo que se utiliza información sobre la demanda futura se puede hacer rellenos con una frecuencia fija (por ejemplo semanalmente) con una pérdido menor de eficiencia. Pero esto sólo refuerza que la información sobre la demanda futura debe ser de buena calidad
- Minimizar los costos de operación tiene beneficios importantes que se acumulan con el tiempo.