Vorlesungsmitschrift
Analysis für Informatiker

Michael Koch (Universität Paderborn)
m.koch@emkay443.de

Wintersemester 2013/14
Stand: 8. Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis für das Wintersemester 2014/15

Dieses Inhaltsverzeichnis erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit!
Bitte besuchen Sie trotzdem die Vorlesung und Übungen, machen Sie die Heimübungen und arbeiten Sie mit dem Buch *"'Analysis 1"' von Forster*.

Einführung, Vorlesungsüberblick:

2014-10-13 (Mo)

- Zahlenmystik: *Wikipedia*
- Assoziativ-, Kommutativ-, Distibutivgesetze: 3.2
- Mengenlehre: 1.2
- Fibonacci: 5.1

2014-10-16 (Do)

- Aussagen: §1
- Mengenlehre: 1.2
- Abbildungen zwischen Mengen, Bild, Urbild: 4.1
- Potenzmengen: 1.7
- Vollständige Induktion: 2.2

2014-10-20 (Mo)

- Wurzelziehen: 3.16
- Newton-Verfahren: 15.7
- Rationale Zahlen: 1.3
- *„Der kritische Mensch“, attac, Gemeinnützigkeit, Freihandel, „Einheitsbrei der Parteien“*
- Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen: 8.2
- Folgen, Grenzwerte (nächste Woche): §5
- Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiome, leere Menge, Paarbildungsaxiom): 1.2 und *Wikipedia*
- Kartesisches Produkt: 1.6

2014-10-23 (Do)

- Exponentialfunktion: 8.8, 10.5, *Wikipedia*
- Fakultät: 2.5
- differenzierbare Funktionen, Ableitungen: 11.1
- Stammfunktion: 14.9
- Funktionalgleichung: 8.10
- Konvergenz, Grenzwert: 5.2
- natürlicher Logarithmus: 10.5
- Trigonometrie: §12
- Komplexe Zahlen: §6
- Gruppen: *Wikipedia*
  - Gruppenaxiome: Siehe Körperaxiome (3.2), G1 = K3, G2 = K4
- Komposition von Abbildungen: 4.3, 4.4
- Beispiele für Abbildungen (Identität, konstante Abbildung, Bijektion): 4.1
- Axiomatie für $\mathbb{R}$: §3
  - Körperaxiome: 3.1
  - Anordnumsaxiome: 3.3
  - Vollständigkeitsaxiom: 3.9

2014-10-27 (Mo)

- Abgebrochene geometrische Reihe: 2.4, (3)
- Binomialkoeffizienten & bin. Formel: 2.7, 2.9, 2.9
  - Rekursionsformel: 2.8
  - Binomischer Satz und Beweis: 2.10
- *Dieter Nuhr, freies Land, „political correctnes“, „Neger“, „man darf ja nix mehr sagen“*
- Gruppen: *Wikipedia*
  - Gruppenaxiome: Siehe Körperaxiome (3.2), G1 = K3, G2 = K4
  - Kommutative / abelsche Gruppe: $x \circ y = y \circ x$ $(x, y \in G)$
- Körper: 3.2
  - Endlicher Körper: *Wikipedia*, 3.3

2014-10-30 (Do)

- Körper: 3.2
  - Angeordnete Körper: 3.5
    - Endliche Körper $\mathbb{F}_p$ sind nicht anordbar.
  - Anordnungsaxiome: 3.3
  - Jeder ang. Körper enthält $\mathbb{Q}$: *Wikipedia*
  - Archimedisches Axiom: 3.14
    - : Folgerungen: 3.15
    - : $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordnet.
- Betrag: 3.7
  - Dreiecksungleichung: 3.8
- Gauß-Klammer: 4.1
- Demnächst: Vollständigkeitsaxiom (3.9), Cauchy-Folge (5.13)
- Bernoulli-Ungleichung: 3.6

2014-11-03 (Mo)

- Mengenlehre (Zermalo-Fraenkel): *Wikipedia*
- Abbildungen $\longleftrightarrow$ Graphen: 4.1
- Folgen: §5
  - Konstante, (un-)beschränkte, alternierende (Häufungspunkte) Folge: 5.1, 5.3
  - Teilfolgen: 5.11
  - Konvergenz, Grenzwert: 5.3
    - Beispiele für kon-/divergente Folgen: 5.4
- *Programm*:
  - Eindeutigkeit des Grenzwerts
  - Rechenregeln für Folgen: 5.7
  - Beschränktheit: 5.5

2014-11-06 (Do)

- Grenzwerte: 5.3
- Rechenregeln für Folgen: 5.7
- Beschränktheit: 5.5
  - Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit: 5.6
- Cauchy-Folgen: 5.13
  - Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy-Folge: 5.14
- Teilfolgen: 5.11

- *Demnächst:*
  - Bolzano-Weierstraß: 5.12
  - Vollständigkeit
  - Reelle Zahlen: §3

2014-11-10 (Mo)

- Konvergenz $\Leftrightarrow$ Cauchy-Folge: 5.14 + 3.9
- Bolzano-Weierstraß: 5.12
- Monotonie: 5.9
  - Monotoniekriterium: 5.10
- Reihen: §7
  - Unendliche Reihen, Konvergenz: 7.1
  - Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Reihen: 7.3
  - Geometrische Reihe, alternierende Reihe, Harmonische Reihe: 7.2, 7.7
  - Majorantenkriterium: 7.11
  - $\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n$ Nullfolge
    - Gegenrichtung gilt nicht, Bsp: harm. Reihe
  - Quotientenkriterium: 7.13

2014-11-13 (Do)

- Reihen: §7
- Leibniz-Kriterium: 7.8
- Exponentialfunktion: 8.8, 8.9
  - Funktionalgleichung: 8.10
  - $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$: 8.11 (2)
  - $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \exp(x)$ bijektiv
- Cauchy-Produkt von Reihen: 7.16
- Stetigkeit: §9, 9.1

2014-11-17 (Mo)

- Vektorräume: Skript *lineare Algebra* und *Wikipedia*
  - Vektor: *Wikipedia*
  - Skalar: *Wikipedia*
- Supremum, Infimum: 3.10
- *Demokratismus*, *Political correctness*, *Polygamy Porter*, *Viagra*, *#Aufschrei*
- Stetige Funktionen: §9

2014-11-20 (Do)

- *Blondinenwitze, political correctness, „man darf ja nix mehr sagen!“*
- Vektorräume: Skript *lineare Algebra* und *Wikipedia*
  - Vektor: *Wikipedia*
  - Skalar: *Wikipedia*
- Cauchy-Folge & Vollständigkeit: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in Vektorraum V heißt CF,
  $\forall\varepsilon > 0\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_\varepsilon ||x_n - x_m|| < \varepsilon$;
  V heißt vollständig, falls jede CF konvergiert.
- Satz von Weierstraß: 5.12, *Wikipedia*
- *“Früher war alles besser, früher hatten Matheprofs noch Tafelwischer!“*
- $\varepsilon - \delta$-Kriterium: 9.1

2014-11-24 (Mo)

- *Sesamstraße, Muppet-Show, „Der Mann ein Frosch, die Frau ein Schwein“, political correctness*
- Stetigkeit: §9
  - $\varepsilon - \delta$-Kriterium: 9.1
- Vollständigkeitssatz von Weierstraß: $(\varepsilon([a, b]), || \cdot ||_\infty)$ ist vollständig.
  Im Forster nachgucken oder googlen - ich hab nichts unter dem Namen gefunden.
- Gleichmäßige Stetigkeit: *Wikipedia*
- Zwischenwertsatz: 9.18

2014-11-27 (Do)

- Abgeschlossenheit, Kompaktheit: 3.8, 9.19
- Satz von Maximum und Minimum: 9.20
- Punktweise Konvergenz: 13.1
- Gleichmäßige Konvergenz: 13.2
- Monotonie und Injektivität: 10.2
- *Systemfrage, Bologna, Kritik an übertriebenen Regelwerken, Prüfungen doch lieber am Ende der Semesterferien, stattdessen „hin zum Schlechteren“*
- Umkehrfunktion, Bijektivität: 4.6, 4.7, 10.3
- Exponentialfunktion: 8.8, 8.9
- Logarithmus (naturalis): 10.5
- Allgemeine Potenzrechnung: 10.8

2014-12-01 (Mo)

- *Drogen, „was soll man studieren", „Politiker koksen", alternative Medizin, „Deutschland hat keine Verfassung" (Grundgesetz $\neq$ Verfassung), „Würde" (Art. 1 (1) GG) nicht definiert, ebensowenig „Geld"*
- Komplexe Zahlen: §6
  - Geometrische Darstellung komplexer Zahlen: 6.3
  - Rechnen mit komplexen Zahlen: 6.1
  - Körper der komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$): 6.2
  - Realteil, Imaginärteil: 6.3
  - Konjugiert komplexe Zahl, Betrag: 6.4
- Sinus, Cosinus: 8.14
  - Eigenschaften: 8.17
  - Grafische Darstellung: 8.19

2014-12-04 (Do)

- *Kiffen, DMT, Nikotin: höchste Abhängigkeit, Heroin: Harte Entzugsphase, LSD: geringere Abhängigkeit, Gras: nur bei Überdosis abhängig, „Ich finde, man sollte alle Drogen legalisieren. Wenn Sie 18 sind, sollten Sie selbst entscheiden dürfen.", Wirtschaftliche Vorteile (Steuern), hohe Qualität der „Ware" bei Legalisierung*
- Komplexe Zahlen: §6
- Integration: §14
- Umkehrfunktion: 4.6
  - Ableitung: 11.8
- Relationen: *Wikipedia*
- Äquivalenzrelationen: *Wikipedia*

2014-12-08 (Mo)

- *"Stell dir vor, es ist Krieg, und keiner geht hin", „Deutschland wird am Hindukusch verteidigt" für'n Arsch, Spiegel Online lesen macht keinen kritischen Bildungsbürger*
- Differentialrechnung: §11
  - Ableitung: 11.1
  - Differenzierbarkeit ⇒ Stetigkeit: 11.3
  - Summe, Produkt, Differenzierbarkeit: 11.4
  - Kettenregel: 11.6
  - Ableitung der Umkehrfunktion: 11.8
    - Beweis (Klausuraufgabe):

      f stetig bei x_0, $f(x_0) > 0 \Rightarrow\ \exists \delta > 0 :\ f(x) > 0\ \forall (x - x_0) < \delta.$

      $$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x - x_0} = \underbrace{\frac{-1}{f(x)f(x_0)}}_{\Rightarrow -\frac{1}{f'(x_0)}} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\Rightarrow f'(x_0)}$$

      Quotientenregel: $\dfrac{NAZ - ZAN}{N^2}$ (*„Nenner Ableitung Zähler minus Zähler Ableitung Nenner durch Nenner Quadrat"*)

      $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g'(x_0))^2}$$

      Schreibweise: $\dfrac{df}{dx} = f'$
- *"Auschwitz-Keule", „Nazi-Keule", Kissinger, Fischer und co. „geistige Elite", „Ich habe damals den Schröder in Hannover getroffen, auf der Straße. Wissen Sie, was ich zu ihm gesagt habe? 'Sie Arschloch!'. Diese Zivilcourage müssen Sie haben!"*
- Potenzreihen: 13.8
  - Konvergenzradius: 13.10
  - Ableitung von Potenzreihen: 13.14

2014-12-11 (Do)

- *Studentische Mitbestimmung, Basisdemokratie, Dezentralität statt Bologna, „Wollen Sie lieber ein flexibles Hauptstudium, wo Sie lernen, was Sie wollen, oder wollen Sie nur Zertifikate erlangen?“, Überbürokratisierung, „Wie viel wollen wir uns vorschreiben lassen?“*
- *„Früher waren überall in der Uni noch Wasserspender“, lieber kostenfreie Trinkwasserbrunnen statt „Nestle und CocaCola“*
- *Bindestrichstudiengänge sind Mist - lieber einen vernünftigen Studiengang zuende studieren*
- *lieber richtiges Studium Generale, „wo Sie studieren, was Sie interessiert, nicht, was die Professoren interessiert!“*
- *Science Slam Mumpitz, „Rechtsesoterischer, grobintellektueller Größenwahnsinniger“, „Antisemit“, Nazi-Keule*
- ***„Beteiligen Sie sich! Machen Sie Ihren Mund auf! Gehen Sie zu den Fachschaften!“***
- Differentialrechnung: §11
  - Produktregel, Quotientenregel: 11.4
  - Ableitung von Polynom: 11.5
  - Kettenregel: 11.6
- *Alfred Herrhausen, Detlev Karsten Rohwedder - beide von der RAF ermordet*
- *“Der Deutsche Depp muss alles bezahlen in Europa“ ⇒ Nationalismus, „’Den Krötz kann man nicht verstehen, der spricht ja Dialekt!’ - Du verstehst mich nicht, weil du’n Idiot bist!“*
- *Pädagogische Erkenntnisse der letzten 20 Jahre sind Mist*
- Differentialrechnung: §11
  - Lokale Extrema: 11.10, 11.15
  - Ableitungen von Umkehrfunktionen: 11.8
  - Umkehrfunktion von exp (ln / log): Beispiel von 11.8
  - Umkehrfunktionen von sin (arcsin) und von cos (arccos): 12.7

2014-12-15 (Mo)

- *Deutschlandreise, Dialekte des Landes, in Dresden ist die Exponentialfunktion „ö hoch x“, Bielefeld: „Freunde der komplexen Zahlen kommen in Bielefeld wegen des hohen Imaginärteils der Stadt voll auf ihre Kosten“*
- *„Monsters of Poetry“ (Amazon-Link), „Mit gutem Wein kann man nichts falsch machen“*
- ***Es gibt keine Übungsblätter über die Weihnachtsferien: „Sie sollen in den zwei Wochen entspannen, nicht arbeiten!“***
- *Ria Novosti: „Noch nie Satire ⇒ rechts?“, Gérard Depardieu trinkt 14 Flaschen Rotwein am Tag und knallt Löwen ab, Helmut Kohl hält BND für nutzlos*
- *“Wie schmeckt eigentlich Löwenfleisch?“*
- *In Franken (Prof. Dr. kommt aus Franken) sind die Kneipen und -gänger um 1 dicht*
- *Asterix & Obelix, Analogien zum Unileben („Sebigbos“, „Dekan“ ⇔ „Derkannix“)*
- *Christian Wulff, „Deutschland ist ein christlich geprägtes Land“ Mumpitz*
- *“Die maßgebenden Menschen: Sokrates, Buddha, Konfuzius, Jesus“ (Amazon-Link)*
- *Kohl rechnet ab: Wulff „Verräter“, „Null“, Merkel „lungert herum“, Geißler „hinterfotzig“, Scheel „charakterliche Null“ und „nichts als NSDAP-Mitglied“, allgemein viel Kritik an Bundespräsidenten (Amazon-Link zur Kohl-Biographie)*
- *CDU war mal „Bildungs- und Professorenpartei“, „hat mal liberales Gedankengut vertreten“*
- *Atlantikbrücke, „Alternativlosigkeit“, Deutschland hat keine Verfassung, „Ich kann das Verantwortungsgeschwafel nicht mehr hören!“, sollte endlich mal neutral und pazifistisch werden - stattdessen mischen wir uns in Kriege ein und liefern Waffen in Krisengebiete, Einmarschieren „darf nicht sein“*
- *Hussein, Gaddafi - „alles Hitlers“, Putin „der nächste Hitler?“*
- Potenzreihen: 13.8
  - Konvergenzradius: 13.10, Berechnung: 13.12
  - Wurzelkriterium: *Wikipedia*
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Satz von Rolle: 11.12

2014-12-18 (Do)

- *Lektüre:*
  - *Schiller, „Sämtliche Gedichte“, Insel Verlag (Amazon-Link)*
    - *„Der Handschuh“, Link*
    - *„Die Worte des Wahns“, Link*
    - **Anmerkung des Mitschreibers:** *„Schiller“, Wise Guys, YouTube-Link*
  - *Friedrich Nietzsche, „Gedichte“, Diogenes Verlag, 16,80 DM (Amazon-Link)*
  - *Albert Camus, „Der Mythos von Sisyphos“, ro ro ro Verlag, 10,90 DM (Amazon-Link)*
  - *Giolo Mann, „Deutsche Geschichte des 19. & 20. Jahrhunderts“, Fischer Verlag (Amazon-Link)*
    - *Thomas Mann, „Der Zauberberg“ (Amazon-Link, Wikipedia-Link)*
    - *Thomas Mann, „Doktor Faustus“ (Amazon-Link, Wikipedia-Link)*
- *Interessante und lustige Leute:*
  - *Marcel Reich-Ranicki, Buchkritiker*
  - *Stan Laurel, Komiker („Dick und Doof“)*
  - *Sigi Zimmerschmied, Kabarettist*
  - *Gerhard Polt, Kabarettist*
  - *Karl Valentin, Komiker*
  - *Jürgen von Manger, Schauspieler, Kabarettist und Komiker, Bühnenfigur „Adolf Tegtmeier“, CD: Wunderbar (Amazon-Link)*
  - *Wilhelm Tell, „Asterix bei den Schweizern“ (Amazon-Link)*
- *Prof. Dr. hat mit 18 seine Entschuldigungen selbst unterschrieben und Deutsch geschwänzt, „Wenn die anderen in der Schule waren, saß Krötz alleine im Café“*
- *Prof. Dr. hält Urknalltheorie für Mumpitz, „Nur weil ein Mann im Rollstuhl sitzt, soll er plötzlich schlau sein?!“*
- *Mit offenen Augen durch die Welt gehen*
- *Prof. Dr. kritisiert vereinheitlichtes Europa „der Vorschriften aus Brüssel“, lieber ein Europa nationaler Identitäten, „Kontroversen aushalten - das ist Europa. Nicht Einheitsbrei“, „Europa braucht keinen Euro“*
- *Mit Mathe sind wir fast durch, nur noch Riemann-Integrale nach den Ferien*
- ***Frohe Feiertage! Entspannt euch! :)***

2015-01-05 (Mo)

- Krümmung: *Wikipedia*
- Satz (Kriterium für lokale Extrema): 11.15
- Konvexität: 11.17
- Konvexitätskriterium: 11.18
- Ungleichungen
  - AGM (arithm.-geom. Mittel): *Wikipedia*

  - CSU (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung): *Wikipedia*
  - DEU (Dreiecksungleichung): 3.8, 6.7, *Wikipedia*
  - Verallgemeinerung: Hölder-Ungleichung: *Wikipedia*

2015-01-08 (Do)

- Normen auf Vektorräumen: *Wikipedia*
  - Maximumsnorm: *Wikipedia*

2015-01-12 (Mo)

- Integration: §14
- Riemannsches Integral, Riemann-Summe: *Wikipedia*
- Treppenfunktionen: 14.1
- Eigenschaften des Integrals von Trepenfunktionen: 14.2

2015-01-15 (Do)

- *Ausgefallen*

2015-01-19 (Mo)

- Riemannsches Integral, Riemann-Summe: *Wikipedia*
- Eigenschaften des Integrals: 14.2
  - Zusätzlich: $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Leftrightarrow \forall a < b < c :\ f|_{[}a,b], f|_{[}b,c]$ integrierbar und $\displaystyle\int_a^c f\ dx = \int_a^b f\ dx + \int_b^c f\ dx$
- f stetig $\Rightarrow$ integrierbar
- f monoton $\Rightarrow$ integrierbar
- Mittelwertsatz der Integralrechnung: 14.8
- Stammfunktion: 14.9
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: 14.11 $\Rightarrow$ Integrieren = „Aufleiten“
- Substitutionsregel: 14.14
- Partielle Integration: 14.13

2015-01-22 (Do)

- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: 14.11
- Taylor: §15
- Restglied-Abschätzung (Lagrange-Formel): 15.3
- Approximation n-ter Ordnung

2015-01-26 (Mo)

- Uneigentliche Integrale: 14.14
- Gamma-Funktion: 14.19
  - Eigenschaften: 14.19
- Logarithmische Konvexität: *Wikipedia*

2015-01-29 (Do)

- Satz von Bohr-Mollerup: *Wikipedia*
- Gauß'sche Limesdarstellung: *Wikipedia*
- Wallis'sches Produkt: *Wikipedia*
- Stirling-Formel: *Wikipedia*

2015-02-02 (Mo)

- Trapezregel: *Wikipedia*
- Wallis'sches Produkt: *Wikipedia*

§0 Vorwort

0.1 Zur Mitschrift

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung "Analysis für Informatiker" (Prof. Dr. Margit Rösler).

Die Mitschrift ist an die Vorlesung angelehnt, beinhaltet aber u.U. eigene Ausführungen und andere Formulierungen, und garantiert auch irgendwo, wenn auch ungewollt, Fehler.

Daher ist es ratsam, zusätzlich zu dieser Mitschrift das handschriftliche Skriptum von Prof. Dr. Rösler auf koaLA sowie eigene Mitschriften zu Rate zu ziehen.

Diese Mitschrift ersetzt nicht den Besuch der Vorlesungen und Übungen!

0.2 Danksagung

Vielen Dank an Prof. Dr. Rösler für ihre Vorlesungen, sowie den Tutorinnen und Tutoren für den Übungsbetrieb.

Vielen Dank an Björn Beckendorf, Ngoc Chi Banh und Stefan Heid, die mir mit ihrer Stochastik-Mitschrift als Motivation für eine eigene Mitschrift gedient haben.

Außerdem danke ich Wikibooks für das großartige LaTeX-Tutorial, das mir beim Anfertigen dieser Mitschrift ungemein geholfen hat.

0.3 Anmerkungen

Nummerierung

Die Nummerierung muss nicht zwingend mit der aus den Vorlesungen übereinstimmen, obwohl ich schon versuche, mich einigermaßen daran zu halten, um nicht unnötige Verwirrung zu stiften.

Symbolik

- Echte Teilmengen werden mit $\subset$ angegeben
- Normale Teilmengen (oder gleich) werden mit $\subseteq$ angegeben
- Wenn nicht ausdrücklich als $\mathbb{N}_0$ angegeben, beinhaltet $\mathbb{N}$ nicht die Null
- $\lightning$ steht für einen Widerspruch (in Beweisen bspw.)

0.4 Bedingungen

Sollten Fehler gefunden werden, würde ich bitten, diese an "m.koch@emkay443.de" oder in den entsprechenden Facebook-Gruppen zu melden.
Das Weiterverteilen und Veröffentlichen der Mitschrift ist aus urheberrechtlichen Gründen unerwünscht.

§1 Logik und Mengen

Aussagen

Eine math. Aussage ist ein sprachlicher Ausdruck, dem genau ein Wahrheitswert $wahr(w)$ oder $falsch(w)$ zugeordnet werden kann.

Beispiel

- $2 \cdot 3 = 6$ ist wahr
- $1 + 2 = 4$ ist falsch
- "Tom ist ein guter Koch" ist keine Aussage, da nicht eindeutig wahr oder falsch

1.1 Verknüpfung von Aussagen

Die Verknüpfung von Aussagen liefert neue Aussagen.
Seien P und Q zwei Aussagen.

(1) Konjunktion: $P \wedge Q$ (sprich: P und Q)
Ist wahr genau dann, wenn P und Q wahr sind.

(2) Disjunktion: $P \vee Q$ (sprich: P oder Q)
Ist wahr genau dann, wenn P oder Q wahr ist (oder beide).

(3) Negation: $\neg P$ (sprich: nicht P)
Ist wahr genau dann, wenn P falsch ist.

(4) Implikation: $P \Rightarrow Q$ (sprich: P impliziert Q, aus P folgt Q)
Ist falsch genau dann, wenn P wahr, aber Q falsch ist.
Ist immer wahr, wenn P falsch ist.

(5) Äquivalenz: $P \Leftrightarrow Q := (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
Ist wahr genau dann, wenn P und Q denselben Wahrheitswert haben.
Beispiel: Für ganze Zahlen n gilt: $n^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq n \leq 2$

Wahrheitstafel

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w

1.2 Bezeichnung: Semantische Äquivalenz

Zwei Aussagen P und Q mit selber Wahrheitstafel heißen semantisch äquivalent: $P \equiv Q$

Beispiele

(1) $\neg(\neg P) \equiv P$ denn:

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
w	f	w
f	w	f

(2) Regeln von de Morgan:
$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$
Erkenntnis: $\neg$ bindet stärker als $\wedge$ und $\vee$.

(3) Distributivgesetze:
$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Mengen

Definition nach G. Cantor: *"Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen Elemente der Menge."*

Diese Definition ist *vage*!
Pragmatischer Standpunkt: Eine Menge ist gebildet, wenn feststeht, welche Elemente ihr zugehörig sind.

Schreibweisen

- $x \in A$ falls x Element der Menge A ist
- $x \notin A$ falls x kein Element der Menge A ist
- $A \subseteq B$ (sprich: A ist Teilmenge von oder gleich B) falls jedes Element aus A auch in B vorkommt
- $B \supseteq A$ (sprich: B ist Obermenge von oder gleich A)
- $A = B$ falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$
- $\emptyset$ ist die leere Menge
- $A \subset B$ (auch: $A \subsetneq B$) heißt, A ist eine Teilmenge von, aber nicht gleich B

Beschreibung von Mengen

(1) <u>Durch Aufzählung der Elemente, z.B.:</u>
$A = \{rot, blau\}$
$B = \{1, \{1,2\}, \{1,2,\{1,2\}\}\}$
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

(2) <u>Durch eine charakterisierende Eigenschaft, z.B.:</u>
$A = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ ist gerade}\}$
$B = \{n \in \mathbb{Z} : \text{es gibt } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k\}$
$P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist Primzahl}\}$

1.3 Definition: Teiler

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$.
m heißt Teiler von n (kurz: $m \mid n$), falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = k \cdot m$.
Sonst ist m kein Teiler von n, also $m \nmid n$.

Beispiele

- $-3 \mid 6$, da es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $6 = k \cdot -3$, nämlich $k = -2$
- $5 \nmid 6$, da es kein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $6 = k \cdot 5$
- $p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, falls $p \neq 1$ und p keine Teiler in $\mathbb{N}$ hat außer 1 und p

Weitere Mengen von Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} : n \neq 0 \right\}$ Menge der rationalen Zahlen
Rechnen in $\mathbb{Q}$ ist aus der Schule bekannt.
Wichtig: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

Inklusionen

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.4 Mengenoperationen

Seien A und B zwei Mengen.

- $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$ Vereinigung von A und B
- $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ Durchschnitt von A und B
- $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ Komplement von A und B

1.5 Regeln von de Morgan

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beweis der ersten Regel von de Morgan

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$
$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
q.e.d.

1.6 Kartesisches Produkt von Mengen

Seien A und B zwei Mengen.
$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ Menge aller geordneten Paare (a, b)
Im Gegensatz zu $\{a, b\} = \{b, a\}$ kommt es beim kartesischen Produkt auf die Reihenfolge an!
Insbesondere: $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$

Beispiele

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{*, \circ\}$
$A \times B = \{(1, *), (1, \circ), (2, *), (2, \circ), (3, *), (3, \circ)\}$

1.7 Bezeichnung: Potenzmengen, Mächtigkeit

Sei A eine Menge.

(1) $\mathcal{P}(A) := \{B : B \subseteq A\}$ <u>Potenzmenge von A</u>
Beispiel: $A = \{0, 1\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

(2) Ist A endlich, so kennzeichnet $|A|$ die <u>Mächtigkeit</u>, die <u>Anzahl der Elemente</u> von A.
Falls A nicht endlich ist, so ist $|A| = \infty$

Es gilt: $|A| = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$ (mit Konvention $2^0 = 1$)
Beachte: $A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$

§2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein wichtiges Beweisprinzip für Aussagen über natürliche Zahlen.
Es beruht auf dem...

2.1 Induktionsaxiom

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ mit

(1) $1 \in M$

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen:
$1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n \to n + 1$

Bemerkung

Axiome sind grundlegende Aussagen in einer Theorie, die ohne Beweis vorausgesetzt werden.

2.2 Satz: Prinzip der vollständigen Induktion

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte:

(1) $A(1)$ ist wahr (Induktionsanfang)

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$
"Dominoeffekt": $A(1)$ ist wahr $\Rightarrow A(2)$ ist wahr $\Rightarrow \ldots$

Beweis

Setze $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$
M erfüllt 1. und 2. des Induktionsaxioms. Also ist $M = \mathbb{N}$.
q.e.d.

Verschiebung des Induktionsanfangs

Seien $A(n)$ Aussagen für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{Z}$ fest).
Dann gilt das Prinzip der vollständigen Induktion entsprechend mit dem Induktionsanfang bei n_0 statt 1.

Beispiele

Zuvor: Summen- und Produktzeichen
Gegeben seien relle Zahlen a_k für $m \leq k \leq n$ wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m \leq n$.
Man setzt $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$ und $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_n$
Konvention für $m > n$ ist:
$\sum\limits_{k=m}^{n} a_k := 0$ (leere Summe) und $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k := 1$ (leeres Produkt)
Oft nützlich: Indexverschiebung, zum Beispiel $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1}$

Beispiel: Arithmetische Summe

$\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = ?$ $(n \in \mathbb{N})$
Idee von Carl Friedrich Gauß für $n = 100$ (*Gaußsche Summenformel*):
$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$

2.3 Satz: Gaußsche Summenformel

$\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *(Erinnerung aus dem Vorwort: $\forall$ steht für "für alle")*

Beweis mit vollständiger Induktion

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$ $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *(Induktionsvoraussetzung)*

(1) Induktionsanfang: $n = 1$
$A(1)$ ist wahr, denn $\sum\limits_{k=1}^{1} k = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ✓

(2) Induktionsschluss: $n \to n + 1$
Es sei $A(n)$ wahr (Induktionsvoraussetzung, s.o.).
$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \underset{I.V.}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$
$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung. ✓

q.e.d.

Bemerkung: Rechnen mit Summen (analog für Produkte)

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+m} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$

Potenzen

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
Dann: $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x$
Insbesondere: $x^0 = 1$

2.4 Satz: Geometrische Summenformel

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$

Beweis mit vollständiger Induktion

(1) Induktionsanfang: $n = 0$
$x^0 = 1 = \dfrac{1-x}{1-x}$ ✓

(2) Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges, festes n gelte: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

(3) Induktionsschluss: $n \to n + 1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k \underset{I.V.}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1-x) \cdot x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \quad ✓$$

q.e.d.

Anmerkung

Ein Beweis mit vollständiger Induktion setzt voraus, dass man die zu beweisende Identität bereits kennt bzw. vermutet.
Eine solche Vermutung gewinnt man z.B. durch Berechnung für kleine Werte von n.

Binomialkoeffizienten & Kombinatorik

2.5 Definition: Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (sprich: n Fakultät)
Also: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 2 \cdot 3$, $n! = (n-1)! \cdot n$
$n!$ wächst sehr schnell, z.B. $13! \approx 6{,}2 \cdot 10^9$
Es gibt dafür keine einfache Formel analog zur arithmetischen Summenformel.

Beispiel

Sei $M = \{a_1, ..., a_n\}$ eine Menge mit $|M| = n$
Wie viele mögliche Anordnungen von M gibt es?
$n = 2 \Rightarrow M = \{1, 2\} \Rightarrow 12, 21 \Rightarrow 2! = 2$ Anordnungen
$n = 3 \Rightarrow M = \{1, 2, 3\} \Rightarrow 123, 132, 213, 231, 312, 321 \Rightarrow 3! = 6$ Anordnungen
$n = 1 \Rightarrow M = \{1\} \Rightarrow 1 \Rightarrow 1! = 1$ Anordnung

2.6 Satz: Permutationen

Die Anzahl der möglichen Anordnungen *(=Permutationen)*
der Elemente einer Menge M mit $|M| = n$ ist $n!$.

Beweis mit vollständiger Induktion

(1) Induktionsanfang: $n = 1$
Eine Menge mit einem Element hat genau $1! = 1$ Anordnung. ✓

(2) Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges, festes n gelte: $|M| = n \Rightarrow$ #Permutationen $= n!$

(3) Induktionsschluss: $n \to n + 1$
Besetze zunächst die erste Position, dafür gibt es $n + 1$ Möglichkeiten.
Sei $P_k := \{$Permutationen von $1, \ldots, n+1$ mit k an Position $1\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $|P_k| = n!$ (Anzahl der Möglichkeiten die Stellen $2, 3, \ldots, n + 1$ zu besetzen)
$\Rightarrow$ Anzahl der Permutationen von $1, 2, \ldots, n + 1$ ist $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ ✓

q.e.d.

2.7 Definition: Binomialkoeffizient

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \text{ (sprich: } k \text{ aus } n\text{, oder } n \text{ über } k\text{)}$$

Folgerungen

(1) $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{n} = 1$

(2) $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$

(3) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ falls $0 \le k \le n$

2.8 Satz: Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ für } 0 \le k \le n$$

Beweis

In der Übung.

Veranschaulichung: Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
\equiv
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Anmerkung

Binomialkoeffizienten sind wichtig in der Kombinatorik! *(Stochastik)*

2.9 Satz: k-elementige Teilmengen

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$

Beispiel

Beim Zahlenlotto "6 aus 49" werden 6 aus 49 nummerierten Kugeln gezogen ohne Zurücklegen.
Es gibt $\binom{49}{6} = 13.983.816$ mögliche Ziehungen.

Die Wahrscheinlichkeit für "6 Richtige" ist also rund: $\frac{1}{14.000.000}$

Folgerung

$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq k \leq n$

Beweis

Ziehe k Kugeln aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen (zunächst unter Beachtung der Reihenfolge):

1. Zug: n Möglichkeiten
2. Zug: $n - 1$ Möglichkeiten
k. Zug: $n - k + 1$ Möglichkeiten

Insgesamt: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten

Nach *Satz 2.6* kommt dabei jede k-elementige Teilmenge in $k!$ verschiedenen Anordnungen vor (Reihenfolge der Kugeln).

$\Rightarrow$ Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen ist: $\dfrac{n \cdot n - 1 \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \dbinom{n}{k}$ q.e.d.

Wichtige Anwendung

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
Was ist dann $(x + y)^n$?

$(x + y)^0 = 1$ (per Definition)
$(x + y)^1 = x + y$
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (Binomische Formel)
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Vermutung: Die Koeffizienten sind gerade Binomialkoeffizienten.

2.10 Binomischer Satz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$

Insbesondere gilt für $y = 1$: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Beweis mit vollständiger Induktion

(1) Induktionsanfang: $n = 0$

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 \qquad \checkmark$$

(2) Induktionsvoraussetzung: Die Formel gilt für ein beliebiges, festes n.

(3) Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot (x+y)^n = (x+y) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right)$$

$$= x \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) + y \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$= \underbrace{y^{n+1}}_{k=0} + \underbrace{x^{n+1}}_{k=n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right)}_{\binom{n+1}{k}} x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \qquad \checkmark$$

q.e.d.

§3 Die reellen Zahlen

Ein Ziel bei der Erweiterung von Zahlenbereichen ist die Lösbarkeit von Gleichungen.
$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$: Löse $x + n = m$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$
$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$: Löse $x \cdot n = m$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$
Aber: $x^n = m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ hat in der Regel keine Lösung in $\mathbb{Q}$!

Beispiel (aus der Zentralübung)

Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ für $x^2 = 2$.
Abhilfe: Erweiterung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ (reelle Zahlen).
Im $\mathbb{R}$ hat $x^2 = 2$ zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{2}$

Axiomatische Einführung des reellen Zahlenraums

(geht zurück auf David Hilbert)

Wir geben eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften für $\mathbb{R}$ an:

(1) Körperaxiome

(2) Anordnungsaxiome

(3) Vollständigkeitsaxiom (sichert u.a. die Lösbarkeit von $x^n = m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ ab)

Das Körper- sowie das Anordnungsaxiom werden übrigens auch von $\mathbb{Q}$ erfüllt.

Man kann zeigen (wichtiger Satz), dass es genau eine Menge $\mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften (bis auf Umbenennungen) gibt.
Es gibt präzise Konstruktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ so dass $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist.

3.1 Vorbemerkung: Quantoren

Gegeben seien Aussagen $P(x)$ mit $x \in X$ (X sei eine Menge),
z.B. $X = \mathbb{N}$ und $P(x) = x$ ist gerade.

Aussage	Schreibweise
Für alle $x \in X$ gilt $P(x)$	$\forall x \in X : P(x)$
Es gibt mindestens ein $x \in X$ mit $P(x)$	$\exists x \in X : P(x)$
Es gibt genau ein $x \in X$ mit $P(x)$	$\exists! x \in X : P(x)$
Es gibt kein $x \in X$ mit $P(x)$	$\nexists x \in X : P(x)$

Aus dem Vorwort wissen wir: $\forall$ ist der Allquantor, $\exists$ der Existenzquantor.

Beispiele

$\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2$, $\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$, $\forall x \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : x \cdot n \in \mathbb{Z}$

Definition: Körperaxiome

Auf der Menge $\mathbb{R}$ sind zwei Rechenoperationen $+$ (die Addition) und $\cdot$ (die Multiplikation) erklärt, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

3.2 Definition: Körper

Ein Körper ist eine Menge K mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$, so dass gilt:

(K1) Assoziativgesetz:
$\forall x, y, z \in K : (x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität für die Addition)
$\forall x, y, z \in K : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität für die Multiplikation)

(K2) Kommutativgesetz:
$\forall x, y \in K : x + y = y + x$ (Kommutativität für die Addition)
$\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität für die Multiplikation)

(K3) Existenz neutraler Elemente:
$\forall x \in K \exists 0 \in K : x + 0 = x$ (Nullelement)
$\forall x \in K \exists 1 \in K : x \cdot 1 = x$ (Einselement)

(K4) Existenz von Inversen:
$\forall x \in K \exists y \in K : x + y = 0$ (additives Inverses von x)
$\forall x \in K \setminus \{0\} \exists z \in K : x \cdot z = 1$ (multiplikatives Inverses von x)

(K5) Distributivgesetz:
$\forall x, y, z \in K : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Anmerkung

Jedem Paar $(x, y) \in K \times K$ wird genau ein Element $x + y \in K$ bzw. $x \cdot y = xy \in K$ zugeordnet.

3.3 Folgerungen

Sei K ein Körper.

(1) 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.
Beweis für 0 (für 1 analog): Sei auch $0'$ neutral bezüglich der Addition.
$\Rightarrow 0 = 0 + 0' \underset{K2}{=} 0' + 0 \underset{K3}{=} 0'$

(2) y und z in (K4) sind (bei festem x) eindeutig bestimmt.
Beweis für y (Addition): Sei $x + y' = 0 = x + y$
$\Rightarrow y \underset{K3}{=} y + 0 = y + (x + y') \underset{K1}{=} (y + x) + y' \underset{K2}{=} (x + y) + y' = 0 + y' \underset{K2}{=} y'$
Bezeichnung: $-x$ ist das additive Inverse von x und $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ das multiplikative Inverse von $x \neq 0$

(3) $a, b \in K \Rightarrow$ die Gleichung $a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung $x = b + (-a) =: b - a$
Falls $a \neq 0 \Rightarrow$ auch $a \cdot x = b$ hat eine eindeutige Lösung $x = a^{-1} \cdot b =: \dfrac{b}{a}$
Beweis für die Addition: $a + x = b \Leftrightarrow a + x + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow (a + (-a)) + x = b - a \Leftrightarrow x = b - a$
Analog für die Multiplikation.

(4) $-(-x) = x$ und falls $x \neq 0$ gilt: $(x^{-1})^{-1} = x$
Beweis für das additive Inverse: $(-x) + x \underset{K2}{=} x + (-x) = 0 \underset{K2}{\Rightarrow} -(-x)$

(5) $-(x+y) = -x-y$ und falls $x, y \neq 0$ gilt: $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ (Beweis in Übung)

(6) $\forall x \in K : x \cdot 0 = 0$
Denn: $\frac{x \cdot 0}{a} + x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = \frac{x \cdot 0}{b} \Rightarrow x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0$

(7) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

(8) $(-x)y = -xy$
Insbesondere: $(-1)y = -y$

Beweise von 7. und 8. in der Übung.

Allgemeines Assoziativ- und Kommunitativgesetz

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n := (\ldots((x_1 + x_2) + x_3) + \ldots)$
Wiederholte Anwendung des A- und K-Gesetzes zeigt: Das Eregbnis ist unabhängig von Klammerung (also Klammern weglassen!) und Reihefolge.
Das gilt auch für Produkte.

Potenzen

Sei $x \in K$.
Für $n \in \mathbb{N}$ setze $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$ mit $x^0 = 1$
Falls $x \neq 0$ setze $x^{-1} := (x^{-1})^n$
Damit: $x^{-n} = (x^n)^{-1}$
Regeln für $x, y \in K$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$ seien:

- $x^n x^m = x^{n+m}$
- $x^n y^n = (xy)^n$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

Falls $x, y \neq 0$ gelten diese Regeln auch für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Beispiele

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind Körper mit den üblichen Operationen.
$\mathbb{Z}$ ist kein Körper, denn nur $+1$ und -1 haben multiplikative Inverse.

Beispiel eines endlichen Körpers

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit Operationen wie folgt:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Nachweis des Axioms: direktes Nachprüfen.
In $\mathbb{F}_2$ gilt: $1 + 1 = 0$

Definition: Anordnungsaxiome

$\mathbb{R}$ enthält eine Teilmenge von Elementen, die als positiv ausgezeichnet sind (Schreibweise: $x > 0$).

(A1) Jedes $x \in \mathbb{R}$ genügt genau eine der Beziehungen $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$ (Trichotomie)

(A2) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0, x \cdot y > 0$

Beziehungen

$x > y \Leftrightarrow x - y > 0$
$x < y \Leftrightarrow y > x$
$x \geq y \Leftrightarrow x > y \vee x = y$
$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$

3.4 Folgerungen

(1) $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen $x > y, x = y, x < y$

(3) $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität)

(4) $x < y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow x + z < y + z$

(5) $x < y \Leftrightarrow -y < -x$

(6) $x < y \wedge a < b \Rightarrow x + a < y + b$

(7) $x < y \wedge a > 0 \Rightarrow ax < ay$ (i)
$x < y \wedge a < 0 \Rightarrow ax > ay$ (ii)

(8) $0 \leq x < y, 0 \leq a < b \Rightarrow ax < by$
Folgerung (mit $a = x, b = y$): $0 \leq x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x^n < y^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(9) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, insbesondere $1 = 1 \cdot 1 > 0$

Beweise

(1) $x < 0 \Leftrightarrow 0 > x \Leftrightarrow 0 - x = -x > 0$

(2) aus Trichotomie für $x - y$

(3) $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$

(4) bilde Differenz

(5) bilde Differenz

(6) $(y + b) - (x + a) = \underbrace{(y - x)}_{>0} + \underbrace{(b - a)}_{>0} > 0$

(7) (i) $ay - ax = \underbrace{a}_{>0} \underbrace{(y - x)}_{>0} > 0$
(ii) $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ analog

(8) In der Übung

(9) Falls $x > 0$: $\Rightarrow x^2 > 0$
Falls $x < 0$: $\Rightarrow$ [7.(ii) mit $y = 0, a = x$] $x^2 > 0$

Vorlesung 4 (24.10.2013)

3.5 Definition: Angeordnete Körper

Ein Körper K, in dem eine Teilmenge von Elementen als positiv ausgezeichnet ist ($x > 0$), so dass die Axiome (A1) und (A2) gelten, heißt angeordneter Körper.
Die Folgerungen 3.5 gelten in jedem angeordneten Körper.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind angeordnete Körper.
$\mathbb{F}_2$ ist kein angeordneter Körper, denn in $\mathbb{F}_2$ gilt: $1 + 1 = 0$
Annahme: $\mathbb{F}_2$ wäre angeordnet. $\Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow 1 + 1 > 0$ ↯

3.6 Bernoulli-Ungleichung

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
Dann ist $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis mit vollständiger Induktion

(1) Induktionsanfang: $n = 0$
$(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$ ✓

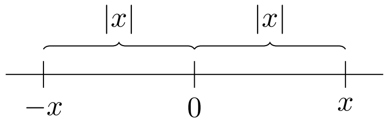
(2) Induktionsvoraussetzung: Die Bernoulli-Ungleichung gelte für ein beliebiges, festes n.

(3) Induktionsschluss: $n \to n + 1$
$$(1 + x)^{n+1} = \underbrace{(1 + x)}_{>0} \cdot \underbrace{(1 + x)^n}_{>=1 \text{ nach IV}} \geq (1 + x) \cdot (1 + nx)$$
$$= 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$ ✓

q.e.d.

3.7 Definition: Betrag

Sei $x \in \mathbb{R}$.
$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$
Insbesondere: $|x| \geq 0$ und $| - x| = |x|$
Anschaulich: $|x|$ ist der Abstand von x und $-x$ zu 0.



3.8 Satz: Regeln für Beträge

(1) $|x| \geq 0$ wohei $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $|xy| = |x| \cdot |y|$ (Multiplikativität)

(3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ falls $y \neq 0$

(4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Beweise

(1) Klar aus Definition ✓

(2) $|xy| \in \{\pm xy\}, |x| \cdot |y| \in \{\pm xy\}$
Beide sind $\geq 0 \Rightarrow$ Gleichheit ✓

(3) $x = \frac{x}{y} \cdot y \Rightarrow |x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot \underbrace{|y|}_{\neq 0} \Rightarrow$ Behauptung ✓

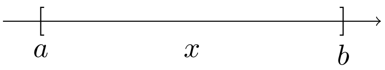
(4) $\pm x \leq |x|, \pm y \leq |y| \Rightarrow \pm(x+y) \leq |x| + |y| \Rightarrow$ Behauptung ✓

q.e.d.

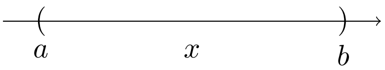
Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

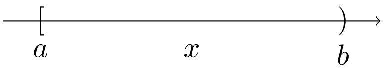
(1) Abgeschlossenes Intervall: $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

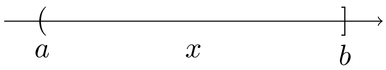


(2) Offenes Intervall: $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

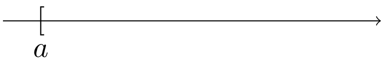


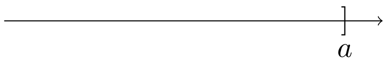
(3) Halboffene Intervalle: $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ und $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$





(4) Uneigentliche Intervalle: $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ und $(\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

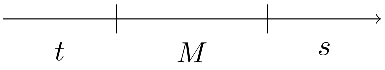




3.9 Definition: Vollständigkeitsaxiom

In eckigen Klammern stehendes bezieht sich auf "nach unten beschränkt"

$M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben [unten] beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : x \leq s \forall x \in M$ $[x \geq s \forall x \in M]$
Das s ist dann die obere [untere] Schranke von M.
Eine obere [untere] Schranke, die in M liegt, ist das Maximum [Minimum] von M.
M heißt beschränkt $\Leftrightarrow$ M ist nach oben und unten beschränkt.



Beispiele

(1) $M = [0, 1] \Rightarrow M$ ist beschränkt.
Jedes $s \geq 1$ ist obere Schranke und jedes $t \leq 0$ ist untere Schranke von M.
1 ist Maximum, 0 ist Minimum von M ($1 = \max M$ und $0 = \min M$).

(2) $M = [0, 1)$
M hat kein Maximum, denn es gibt kein $m \in [0, 1)$, welches obere Schranke des Intervalls ist.
Es gibt immer größere Zahlen, die sich auch im Intervall befinden. ($m < \underbrace{\frac{1}{2}(m + 1)}_{\in[0,1)} < 1$)

(3) Das Intervall, das zur linken Seite geöffnet ist, hat kein Minimum (analog).

3.10 Definition: Supremum, Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M $\Leftrightarrow$ s ist kleinste obere Schranke von M.
Das heißt:
  i. s ist obere Schranke von M.
  ii. $s \leq s'$ für jede weitere obere Schranke s' von M.

(2) $t \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M $\Leftrightarrow$ t ist größte untere Schranke von M.

1.ii. zeigt: M hat höchstens ein Supremum s (bezeichnet mit $s = \sup M$),
denn: s, s' seien Suprema $\Rightarrow s \leq s' \wedge s' \leq s \Rightarrow s = s'$
Analog: M hat höchstens ein Infimum t (bezeichnet mit $t = \inf M$).

Beispiel

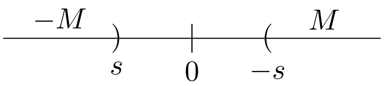
$M = [0, 1] \Rightarrow 1 = \sup M$ (denn: 1 ist obere Schranke, und kein $x < 1$ ist obere Schranke).

3.11 Vollständigkeitsaxiom: Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt $\Rightarrow$ M besitzt ein Supremum.

3.12 Folgerung aus der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ nach unten beschränkt $\Rightarrow$ M beistzt ein Infimum.
Betrachte $-M = \{-x : x \in M\}$. $-M$ hat ein Supremum s, da es nach oben beschränkt ist.
Also hat M ein Infimum $-s$.



Beispiel

$M = (-3, 2] \Rightarrow \inf M = -3$

Beachte

Hat M ein Maximum $m = \max M$, so ist zugleich $m = \sup M$,
denn: $x < m \Rightarrow x$ ist keine obere Schranke für M.

3.13 Lemma

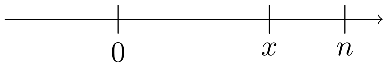
Sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt und $s = \sup M$.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : s - \varepsilon < x \leq s$

Beweis

$s - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von M (da s schon die kleinste obere Schranke ist).
$\Rightarrow \exists x \in M : s - \varepsilon < x$ Dabei ist $x \leq s$, da obere Schranke von M. q.e.d.

3.14 Satz: Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$

(AR) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$



Beweis durch Widerspruch

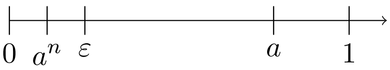
Angenommen, (AR) gelte nicht, also:
$\exists x \in \mathbb{R} : n \leq x \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist (durch x) nach oben beschränkt $\Rightarrow s = \sup \mathbb{N}$ existiert.
$\Rightarrow$ (nach Lemma 3.13) $\exists n \in \mathbb{N} : s - 1 < n$ ($\varepsilon = 1$)
$\Rightarrow \underbrace{n + 1}_{\in \mathbb{N}} > s$ ↯ q.e.d.

3.15 Folgerungen aus der archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$

(1) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

(2) Wachstum von Potenzen:
Sei $a \in \mathbb{R}, a > 1 \Rightarrow \forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N} : a^n > M$

(3) Sei $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : a^n < \varepsilon$



Beweis

(1) Sei $\varepsilon > 0$. Dann: (AR) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

(2) Sei $M > 0$. $x = a - 1 > 0 \Rightarrow a^n = (1 + x)^n > 1 + nx > nx \forall n \in \mathbb{N}$
(AR) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \dfrac{M}{x} \Rightarrow a^n > M$

(3) Sei $\varepsilon > 0$. $\dfrac{1}{a} > 1 \underset{(2)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \left(\dfrac{1}{a}\right)^n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a^n < \varepsilon$

q.e.d.

Man kann sagen: Es gibt (bis auf Umbenennungen) genau einen angeordneten Körper, der das Vollständigkeitsaxiom erfüllt, nämlich $\mathbb{R}$.

Wichtige Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$:

3.16 Satz: Existenz von Wurzeln

Sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ mit $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}, x \geq 0 : x^k = a$

Schreibweise

$x = a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$ (sprich: k-te Wurzel aus a)
$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Beachte

$\sqrt[k]{0} = 0$ und $\forall a > 0$ ist $\sqrt[k]{a} > 0$ (per Definition)

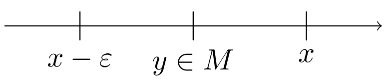
Beweis

(1) Eindeutigkeit:
Seien $x_1, x_2 \geq 0, x_1 \neq x_2$ mit $x_1^k = a = x_2^k$. Sei etwa $x_1 < x_2 \underset{3.4}{\Rightarrow} x_1^k < x_2^k$ ↯

(2) Existenz:
Hier für $k = 2$ ($k > 2$ ähnlich, etwas aufwendiger).
Sei ohne Einschränkung *(kurz: o.e.)* $a \geq 1$.
(Für $a = 0$ klar; für $0 < a < 1$ betrachten wir den Kehrwert $\frac{1}{a} > 1$.
Ist $y^k = \frac{1}{a} \underset{y \neq 0}{\Rightarrow} (\frac{1}{y})^k = a$)
Setze $M := \{y > 0 : y^2 \leq a\}$. $M \neq \emptyset$ (da $1 \in M$) ist nach oben beschränkt durch a, denn:
Angenommen, $\exists y \in M : y > a \Rightarrow y^2 > a^2 \underset{a \geq 1}{\geq} a$. ↯
Setze $x := \sup M$.

Behauptung: $x^2 = a$

Annahme 1: $x^2 > a \Rightarrow \varepsilon := \dfrac{x^2 - a}{2x} > 0$



Nach Lemma 3.13 $\Rightarrow \exists y \in M : x - \varepsilon < y \leq x$. Dabei $y^2 \leq a$.
$x^2 - a \leq x^2 - y^2 = \underbrace{(x+y)}_{\in(0,2x]}\underbrace{(x-y)}_{\in[0,\varepsilon)} < 2x\varepsilon - x^2 - a$ ↯

Annahme 2: $x^2 < a \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} > 1 \Rightarrow \dfrac{a}{x^2} - 1 > 0$
Sei $r := \min\left\{1, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{x^2} - 1\right)\right\} > 0 \Rightarrow (1+r)^2 = 1 + (2+r) \cdot r < 1 + 3r \leq \dfrac{1}{x^2}$
$\Rightarrow (x(1+r))^2 \leq a \Rightarrow x(1+r) \in M$, aber $x(1+r) > x$ (↯zu $x = \sup M$!)

q.e.d.

3.17 Rechenregel für Wurzeln gleichen Exponents

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y > 0$ und $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[k]{x} \cdot \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{xy}$

Beweis

$\left(\sqrt[k]{x} \cdot \sqrt[k]{y}\right)^k = \left(\sqrt[k]{x}\right)^k \cdot \left(\sqrt[k]{y}\right)^k = x \cdot y$ (Behauptung)

Wir wissen: $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \wedge \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ ist bedeutend größer!).
Die Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrational.

Bemerkung

Im Körper $\mathbb{Q}$ ist das Vollständigkeitsaxiom nicht erfüllt, das heißt es gibt beschränkte Mengen $M \subsetneq \mathbb{Q}$, so dass M kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat.
Denn sonst würde 3.16 auch in $\mathbb{Q}$ gelten $\Rightarrow x^2 = 2$ hätte eine Lösung in $\mathbb{Q}$ ↯

Beispiel

$\{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \wedge y^2 \leq 2\}$ hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

§4 Funktionen

4.1 Definition: Funktionen, Abbildungen

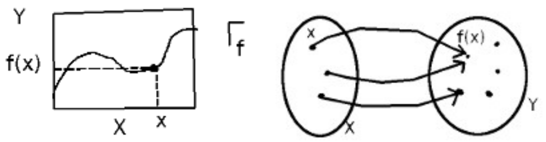
Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung *(=Funktion)* f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Schreibweise

$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$
X: Definitionsbereich von f
Y: Ziel-, Wertebereich von f
$f(x)$: Bild von x unter f (Wert von f in x)

Graph von f

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$



Beachte: Bei jedem $x \in X$ (im rechten Bild) startet genau ein Pfeil!

Bezeichnung

Der Begriff "Funktion" ist insbesondere gängig, falls X und Y Mengen von Zahlen sind.

Beispiele

(1) $X = \{\text{Studenten an der Uni Paderborn}\}, f : X \to \mathbb{N}, x \mapsto \text{Alter von } x$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
Γ_f : Normalparabel
$f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
Wenn einem $x \in X$ mehrere $y \in Y$ zugeordnet werden können, ist es keine Funktion!

(3) Lineare Funktionen:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b \ (a, b \in \mathbb{R})$
Γ_f: Gerade, a: Steigung, b: Achsenabschnitt

(4) Polynomfunktionen:
Funktion der Form $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$
mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten

(5) Floorfunktion (Gauß-Klammer):
$\lfloor . \rfloor = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\lfloor x \rfloor :=$ größtes $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x$

(6) Identische Abbildung:
$id_x : X \to X, x \mapsto x$

(7) $P :=$ Menge aller Sortierprogramme für endliche Listen
$L : P \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$L(p, n) :=$ max. Laufzeit, die Programm p zum Sortieren einer Liste der Länge n braucht

Für die Charakterisierung einer Abbildung ist neben der Abbildungsvorschrift auf der Definitionsbereich X wichtig.

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ und $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = |x|$ sind verschiedene Abbildungen, denn g ist eine Restriktion von f.

4.2 Definition: Bild, Urbild

(i) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $A \subseteq X$.
$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ ist das Bild von A unter f.
$f(X) \subseteq Y$ ist der Wertebereich von f.

(ii) Sei $B \subseteq Y$.
$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ ist das Urbild von B unter f.
f^{-1} ist hierbei keine eigenständige Funktion, sondern nur eine Bezeichnung!

Beispiel

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x^2$
$f(\{-2, 5\}) = \{4, 25\}$
$f^{-1}(\{4, 25\}) = \{\pm 2, \pm 5\}$
$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
$f^{-1}(\{4\}) = \{\pm 2\}$
$f^{-1}(\{3, 4\}) = \{\pm 2\}$

4.3 Definition: Komposition von Abbildungen

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.
Die Komposition (Verknüpfung, Verkettung) von f und g ist die Abbildung:
$g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$ (g nach f)

Beispiel

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2$

$$\left.\begin{array}{l}(g \circ f)(x) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ (f \circ g)(x) = 2x^2 + 1\end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

4.4 Satz: Assoziativität der Komposition

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen.
$\Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Beweis

$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ q.e.d.

4.5 Definition: Eigenschaften von Abbildungen (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

$f : X \to Y$ heißt:

(1) <u>injektiv</u>, falls es zu jedem $y \in Y$ <u>höchstens</u> ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

(2) <u>surjektiv</u>, falls es zu jedem $y \in Y$ <u>mindestens</u> ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

(3) <u>bijektiv</u>, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist, also falls es zu jedem $y \in Y$ <u>genau</u> ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

Also

f injektiv $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ gilt: wenn $f(x_1) = f(x_2)$ dann $x_1 = x_2$
f surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x) \Leftrightarrow f(X) = Y$
f bijektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x)$

Anmerkungen zur Hausübung

$2^n - 1$ prim $\Rightarrow n$ prim
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, $n = pq$ und $p, q \neq 1$
$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (\underbrace{2^p}_{x})^q - 1 = x^q - 1$

Beispiele

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ drei Varianten:

(i) $f(n) = n + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

(ii) $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ n - 1 & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv

(iii) $f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n + 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist bijektiv

Sei $f : X \to Y$ bijektiv, das heißt $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$.
Wir können dann $g : Y \to X$ definieren durch: $g(y) := x$ falls $y = f(x)$.
Damit ist $g(f(x)) = x \forall x \in X$ und $f(g(y)) = y \forall y \in Y$.
Das heißt: $g \circ f = id_x$ und $f \circ g = id_y$.

4.6 Definition: Umkehrabbildung

g heißt Umkehrabbildung von f.
Bezeichnung: $g = f^{-1}$ *(hier ist f^{-1} tatsächlich eine Funktion!)*

Damit (falls f bijektiv): $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

4.7 Satz: Äquivalenz Bijektivität, Umkehrabbildung

Für $f : X \to Y$ sind äquivalent:

(i) f ist bijektiv

(ii) $\exists g : Y \to X : g \circ f = id_x, f \circ g = id_y$
In diesem Fall ist $g = f^{-1}$.

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) siehe oben

(ii) $\Rightarrow$ (i) f ist injektiv, denn: Sei $f(x-1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
f ist surjektiv, denn: Sei $y \in Y \Rightarrow y = f(g(y))$
g ist in (ii) eindeutig, da $g(f(x)) = x$ und f surjektiv $\Rightarrow g = f^{-1}$

q.e.d.

Frage

Sei $f : X \to Y$ bijektiv und $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.
Was ist der Graph von f^{-1}?
$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$
$\Gamma_{f^{-1}} = \{(f(x), x) : x \in X\}$ entsteht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen $y = x$

Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ (Normalparabel)
f ist weder surjektiv (da $x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ also $f(\mathbb{R}) \subseteq [0, \infty)$) noch injektiv (da $f(-x) = f(x)$).

$f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ denn $y \geq 0 \Rightarrow \exists! x \geq 0 : x^2 - y$

Betrachte $g : [0, \infty) \to [0, \infty), g(x) = x^2$
$\Rightarrow g$ ist bijektiv mit Umkehrfunktion $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$ ist bijektiv mit $f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{3}$

§5 Folgen

5.1 Definition: Folgen

Sei X eine Menge. Eine Folge in X ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X, x \mapsto f(x) =: a_n \in X$.

Schreibweise

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$
Varianten: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n)_{n\geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$ mit festen $k \in \mathbb{Z}$

Folgen im $\mathbb{R}$ bezeichnet man auch als "reelle Folgen"

Beispiele

(1) $a_n = n^2$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, \ldots)$

(2) $a_n = (-1)^n$, $(a_n)_{n\geq 0} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

(3) Konstante Folgen: $a_n = a \forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n) = (a, a, a, \ldots)$
Dagegen: $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$

Rekursive Definition von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$

(I) Angabe von a_1

(II) Angabe einer Vorschrift, mit der a_{n+1} aus a_n berechnet wird: $a_{n+1} = F(a_n)$ mit einer Funktion $F : X \to X$

Nach Induktionsaxiom ist dann a_n definiert für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele

(1) Potenzen: $a_n = x^n$ $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0)$
$a_0 := 1$, $a_{n+1} := x \cdot a_n$

(2) Fakultät: $a_n = n!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$
$a_0 := 1$, $a_{n+1} := (n+1) \cdot a_n$

Allgemeiner

(I') Angabe von $a_1, \ldots, a_k$ $(k \in \mathbb{N})$

(II') $a_{n+1} = F(a_{n-k+1}, \ldots, a_n)$ $(n \geq k)$ mit $F : X^k \to X$

Zur Notation: Seien $X_1, \ldots, X_k$ Mengen.
Kartesisches Produkt der X_1:

$$\prod_{i=1}^{k} X_i := X_1 \times \ldots \times X_k := \{ \underbrace{(x_1, \ldots, x_k)}_{k\text{-Tupel (geordnet)}} : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq k\}$$

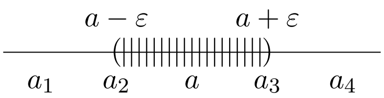
$X^k := X \times X \times \ldots \times X$ (k Faktoren)
z.B.: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

$a_0 := 1$, $a_1 := 1$, $a_{n+1} := a_{n-1} + a_n$ $(n \geq 1)$
$(a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$

5.2 Definition: Konvergenz, Grenzwert

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$



Das heißt: $\forall \varepsilon > 0$ liegen alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
a: Grenzwert (Limes) der Folge (a_n)

Schreibweise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$

Beispiel

Konstante Folge $a_n = a$ (also: $a = a_1 = a_2 = \ldots$) $a_n \to a$

5.3 Lemma: Grenzwert von Folgen

Jede Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ hat höchstens 1 Grenzwert.

Beweis

Sei $a_n \to a$, $a_n \to a'$ und $a \neq a'$.
Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - a'| > 0 \Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_1, |a_n - a'| < \varepsilon \forall n \geq n_2$
Für $n \geq n_0 := max(n_1, n_2)$ folgt: $|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|$ ↯

Bezeichnung

(1) Eine Folge (a_n) mit $a_n \to 0$ heißt Nullfolge.

(2) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

5.4 Beispiele für kon-/divergente Folgen

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir wollen: $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \forall n \geq n_0$
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$!)
$n \geq n_0 \Rightarrow |\frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ q.e.d.

(2) $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$
(a_n) divergiert, denn: $|a_{n+1} - a_n| = 2 \forall n$

Angenommen, $a_n \to a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \forall n \geq n_0$
Also: $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2$ ↯

(3) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ $(1, x, x^2, x^3, \dots) = (x^n)_{n\geq 0}$
Denn: Sei $\varepsilon > 0 \underset{3.15}{\Rightarrow} \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x^{n_0}| = |x|^{n_0} < \varepsilon$
$n \geq n_0 \Rightarrow |x^n| \underset{|x|<1}{\leq} |x|^{n_0} < \varepsilon$ q.e.d.

(4) $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$
Folgt aus dem dritten Beispiel, da $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ und $|\frac{1}{x}| < 1$

(5) $|x| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{x^n} = 0$
Denn: $y := |x| - 1 > 0 \Rightarrow |x^n| = |x|^n = (1+y)^n \underset{\text{Bin. Formel}}{=}$
$\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k = 1 + ny + \binom{n}{2} y^2 + \dots > \binom{n}{2} y^2 = \frac{n(n-1)}{2} y^2 \Rightarrow \left|\frac{n}{x^n}\right| < \frac{2}{n-1} \cdot y^2 \ (n > 1)$
Bedingung: $\frac{2y^2}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{2}{\varepsilon y^2}$
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1 + \frac{2}{\varepsilon y^2}$.
$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{n}{x^n}\right| < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots)$
<u>Beweis</u>: $n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0 \Rightarrow n = (1 + x_n)^n \underset{\text{Bin. Formel}}{=}$
$\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k > 1 + \binom{n}{2} x_n^2 \Rightarrow n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$
$n > 1 \Rightarrow 1 > \frac{n}{2} x_n^2 \Rightarrow 0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$
$n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{n_0}} < \varepsilon$, sofern $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2}$
$\Rightarrow 0 < x_n < \varepsilon$ für $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \to 0$ q.e.d.

5.5 Definition: Beschränktheit

Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>beschränkt</u>, falls $\exists M > 0 : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

5.6 Lemma

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beispiel

$(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt (da $n^2 \geq n$), also divergent.

Anmerkung

Die Umkehrung von Lemma 5.6 gilt nicht!

Beispiel

$((-1)^n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Beweis von 5.6

Sei $a_n \to a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \forall n \geq n_0$
$\forall n \in \mathbb{N}$ folgt: $|a_n| \leq max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\} =: M$ q.e.d.

5.7 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann gilt:

(1) $a_n + b_n \to a + b$

(2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(3) Ist $b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \forall n \geq N$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N} \to \frac{a}{b}$

(4) $|a_n| \to |a|$

Aus Regeln 1. und 2. folgen: $b \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n + b \to a + b$ und $a_n \cdot b \to a \cdot b$

Beispiele

(1) $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
Also: $\frac{1}{n^2} \to 0, \frac{1}{n^3} \to 0$
Folgt aus Regel 2., denn $\frac{1}{n^k} = \left(\frac{1}{n}\right)^k \to 0^k = 0$ (da $\frac{1}{n} \to 0$)

(2) $a_n = \frac{n+1}{n}$, $(a_n) = (\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots)$
$a_n = 1 + \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow a_n \to 1 + 0 = 1$

(3) $a_n = \frac{n^2 - 5}{2n^2 + n} = \frac{n^2(1 - \frac{5}{n^2})}{n^2(2 + \frac{1}{n})} = \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$

Beweise der Rechenregeln

(1) $|a_n + b_n - (a+b)| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| =: s_n$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_0$ q.e.d.

(2) In der Übung.

(3) Wegen (2) o.E.: $a_n = a = 1 \forall n$

$|b| > 0$ und $b_n \to b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \forall n \geq N$

$n \geq N \Rightarrow |b_n| = |b - (b - b_n)| \underset{\text{umgk. Dreiecksungl.}}{\geq} |b| - |b - b_n| > \frac{|b|}{2}$

Ferner: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{2}{|b|} \cdot |b - b_n| \forall n \geq N$

Sei $\varepsilon > 0 : b_n \to b \Rightarrow \exists n_0 \geq N : |b - b_n| < \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ q.e.d.

(4) Sei $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow ||a_n| - |a|| \underset{\text{umgk. Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ q.e.d.

5.8 Satz: Vergleichskriterium, Sandwich-Regel

(1) Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n \to a, b_n \to b$ und $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $a \leq b$

(2) Speziell: Sei $a_n \to a, A \leq a_n \leq B \forall n \Rightarrow A \leq a \leq B$

(3) Seien $(a_n), (c_n) \subseteq \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N}$ und $lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} c_n$

Sei $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine weitere Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n$

$\Rightarrow (b_n)$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

$\Rightarrow a_n \to a, c_n \to a, a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow b_n \to a$

Bemerkung

Die Bedingung "$\forall n \in \mathbb{N}$" kann überall ersetzt werden durch "$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$", $N \in \mathbb{N}$ geeignet.

Beispiel

$x > 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{x} \to 1 \text{ für } n \to \infty}$

Denn: o.E. $x > 1$, denn $x = 1$ klar, falls $x < 1$ betrachte $\frac{1}{x} > 1$

$\Rightarrow 1 < \sqrt[n]{x} < \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1}$ für $n > x$

Dank Sandwich-Regel folgt die Behauptung. q.e.d.

Beweis von 5.8

(1) Angenommen, $a > b$. Setze $\varepsilon := a - b > 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow 0 \leq b_n - a_n = \underbrace{(b_n - b)}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{(b - a)}_{-\varepsilon} + \underbrace{(a - a_n)}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < -\frac{\varepsilon}{3} < 0$ ↯

(2) Ausgelassen

(3) $|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} (b_n - a_n) + |a_n - a| \leq \underbrace{(c_n - a_n)}_{\to 0} + \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0} =: s_n$

$\Rightarrow s_n \to 0$ (alles nach Regeln 5.7)
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : s_n < \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ q.e.d.

5.9 Definition: Monotone Folgen

Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge.

(i) (a_n) ist monoton wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
(a_n) ist monoton fallend $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Ist dabei stets $a_{n+1} > a_n$ bzw. $a_{n+1} < a_n$, so spricht man von strenger Monotonie

(iii) $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist monton, falls (a_n) monoton wachsend oder fallend ist

Beispiele

- $a_n = n^2$ ist streng monoton wachsend
- $a_n = \dfrac{1}{n}$ ist streng monoton fallend
- $a_n = -n$ ist streng monoton fallend
- $a_n = (-1)^n \cdot n$ ist nicht monoton

5.10 Monotoniekriterium

Jede monotone <u>und</u> beschränkte Folge ist konvergent.
Dabei gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } (a_n) \text{ monoton wachsend} \\ \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } (a_n) \text{ monoton fallend} \end{cases}$

Beweis (für wachsend)

$s := sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ existiert, da (a_n) beschränkt ist.
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > s - \varepsilon$
Monotonie von $(a_n) \Rightarrow s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ q.e.d.

Bemerkung

Es genügt, dass (a_n) monoton ab einem gewissen Index $N \in \mathbb{N}$ ist.

Vorlesung 8 (07.11.2013)

5.11 Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

Algorithmus zur Berechnung von $\sqrt{a}, a > 0$

Motivation: Sei $\xi > 0$ (sprich: "*xi*") eine Näherung für $\sqrt{a}$.
Angenommen, $\xi > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{a}{\xi} < \sqrt{a}$
Betrachte $\frac{1}{2} \cdot \left(\xi + \frac{a}{3}\right)$ als neue Näherung!
Definiere rekursiv Näherungen $x_n, n \in \mathbb{N}_0$:
$x_0 > 0$ beliebig, z.B. $x_0 = a$
$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$

Behauptung

$x_n \to \sqrt{a}$

Beweis

Induktion zeigt: $x_n > 0 \forall n \geq 0$.
Ferner: $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - a = \frac{1}{4} \cdot \left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \geq 0$
$\underset{x_n > 0}{\Rightarrow} x_n \geq \sqrt{a} \forall n \in \mathbb{N}$

Behauptung

$(x_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend (und dank obigem Beweis auch beschränkt).
Monotoniekriterium $\Rightarrow x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ existiert, und $x \geq \sqrt{a}$ (Vergleichskriterium)

Frage

Was ist der Grenzwert x? Betrachte Rekursion!

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to x} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}_{\to \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = a \underset{x > 0}{\Rightarrow} x = \sqrt{a}$$

Beobachtung

Das Verfahren konvergiert sehr schnell.

Teilfolgen

Sei X eine Menge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge in X.
Ist $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ eine aufsteigende Folge von Indizes $n_k \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine Teilfolge von (a_n).
Ist $J = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, so schreiben wir auch $(a_j)_{j\in J}$.

Beispiel

$(a_p)_{p \text{ prim}} = (a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, \ldots)$

Bemerkung

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert ebenfalls gegen a: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$

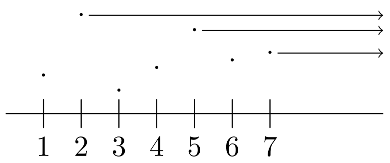
5.12 Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis

Wir zeigen: (a_n) enthält eine monotone Teilfolge.
Mit dem Monotoniekriterium ist diese Teilfolge konvergent.

Wir definieren dazu: $J := \{j \in \mathbb{N} : a_j \geq a_n \forall n > j\}$
Das heißt: $j \in J \Leftrightarrow$ alle Folgenglieder ab dem j-ten Glied sind $\leq a_j$.



$J = \{2, 5, 7, \ldots\}, (a_j)_{j\in J} = (a_2, a_5, a_7, \ldots)$

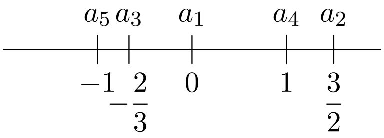
1. Fall: J nach oben unbeschränkt $\Rightarrow (a_j)_{j\in J}$ ist monoton fallende Teilfolge

2. Fall: J ist nach oben beschränkt, etwa durch $m \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: (*) $\forall j > m \exists n > j$ mit $a_n > a_j$.
Konstruiere mittels (*) rekursiv eine monoton wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:
$n_1 := m + 1$
(*) mit $j = n_1$: $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} > a_{n_1}$
(*) mit $j = n_2$: $\exists n_3 > n_2 : a_{n_3} > a_{n_2}$
...
Wir erhalten also eine monoton wachsende Folge.

q.e.d.

Beispiel

$a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.



$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$
$a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to -1$
$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergente Teilfolgen

5.13 Definition: Cauchyfolge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt Cauchyfolge (benannt nach dem französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy) genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m \geq n_0$

5.14 Satz: Konvergenz, Cauchyfolge

Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchyfolge.

Beweis

$a_n \to a \Rightarrow |a_n - a_m| - |a_n - a + a - a_m| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a - a_m|$
Wähle n_0 so groß, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow \forall n - m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ q.e.d.

5.15 Satz: Cauchy-Kriterium

Jede Cauchyfolge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist konvergent.

Beweis

(a_n) ist beschränkt, denn $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_0}| < 1 \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow |a_n| \leq max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a_{n_0} + 1|\} < \infty$ Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ (a_n) hat konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$
$a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$

Behauptung

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall k \geq N_1$
$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n, m \geq N_2$
$k \geq max(N_1, N_2) \Rightarrow |a_k - a| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|a_k - a_{n_k}|}_{\text{da } n_k \geq k} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon$ q.e.d.

5.16 Definition: Uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>uneigentlich konvergent</u> gegen $+\infty$ *[bzw. gegen $-\infty$]*, falls gilt:
$\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M \forall n \geq n_0$ *[bzw. $a_n < -M \forall n \geq n_0$]*

Schreibweise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *[bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$]*

Beispiele

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

(2) (a_n) sei monoton wachsend und nach oben unbeschränkt.
$\Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > M \underset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow} a_n > M \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(3) $a_n = (-1)^n \cdot n$ ist weder konvergent, noch uneigentlich konvergent.

5.17 Lemma

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$
Denn: Für $M > 0$ gilt:
$a_n > M \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a_n} < \dfrac{1}{M} \forall n \geq n_0$ q.e.d.

5.18 Definition: Landau-Symbole

Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ Folgen. Man schreibt:

(1) $a_n = O(b_n)$ für $n \to \infty$, falls $\exists c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c|b_n| \forall n \geq n_0$
anschaulich: (a_n) wächst höchstens so schnell wie (b_n).

(2) $a_n = \Theta(b_n)$ für $n \to \infty$, falls $a_n = O(b_n)$ und $b_n = O(a_n)$, das heißt (a_n) und (b_n) wachsen gleich schnell.

(3) $a_n = o(b_n)$ für $n \to \infty$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, das heißt (b_n) wächst schneller als (a_n).

Beachte

1. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: c \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n = O(b_n)$ (Übung)
2. $a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$

Beispiele

1. $a_n = 2n^2 - 5 \Rightarrow a_n = O(n^2)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n_2} = 2$
   sogar $a_n = \Theta(n^2)$ (da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{a_n} = \frac{1}{2}$)
   Dagegen nicht: $a_n = O(n)$, da $\frac{a_n}{n} = 2n - \frac{5}{n}$ unbeschränkt.
   $a_n = o(n^3)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3} = 0$
2. a_n sei die Zahl der Rechenoperationen, die ein Computer benötigt, um eine Liste der Länge n mit Bubblesort zu sortieren: $a_n = O(n^2)$
   Mit Quicksort: $O(n \log n)$

§6 Komplexe Zahlen

Motivation

Die Gleichung (*) $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung im $\mathbb{R}$,
denn: $x \in \mathbb{R} \underset{Anordnungsax.}{\Rightarrow} x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$

Ziel

Konstruktion eines Körpers $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ umfasst und in dem (*) lösbar ist.

Vorüberlegung

Angenommen, es existiert ein Körper $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$,
so dass (*) eine Lösung $i \in \mathbb{C}$ hat (i wie *"imaginär"*)

Rechenregeln

Für $\Rightarrow x, y, z, v \in \mathbb{R}$ gilt:

- $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$
- $(x + iy) \cdot (u + iv) = xu + i^2yv + i(xv + yu) = xu - yv + i(xv + yu)$

6.1 Definition: Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sei $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit
Addition: $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$
Multiplikation: $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$

6.2 Satz: Körper der komplexen Zahlen

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist der <u>Körper der komplexen Zahlen</u>.

Beweis

$+, \cdot$ sind kommutativ, $+$ assoziativ und das Distributivgesetz ist erfüllt (leicht nachzurechnen).

Neutrale Elemente:
bzgl. $+ : 0 = (0, 0)$
bzgl. $\cdot : 1 = (1, 0)$

Inverse: $-(x, y) = (-x, -y)$
$(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$

$\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$

$(x,0) \overset{\cdot}{+} (y,0) = (x \overset{\cdot}{+} y, 0)$ *($\overset{\cdot}{+}$ steht für: "mal/plus", ähnlich wie $\pm$)*
Man identifiziert daher $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$ und fasst $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf.

Bezeichnung

$i := (0,1) \in \mathbb{C}$ ist die imaginäre Einheit. Damit: $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$
$\Rightarrow i$ und $-i = (-1) \cdot i$ lösen die Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Ferner: $\mathbb{C} \ni z = (x,y) \Leftrightarrow z = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) \Leftrightarrow y = x + iy$
Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat daher eine eindeutige Darstellung der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

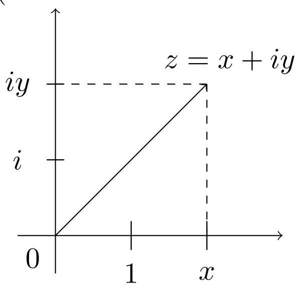
6.3 Definition: Realteil, Imaginärteil

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Dann sind
Re $z := x$ der Realteil von z und
Im $z := y$ der Imaginärteil von z.

z heißt reell, falls Im $z = 0$, z heißt imaginär, falls Re $z = 0$.

Geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlenebene

(nach Carl Friedrich Gauß, um 1800)

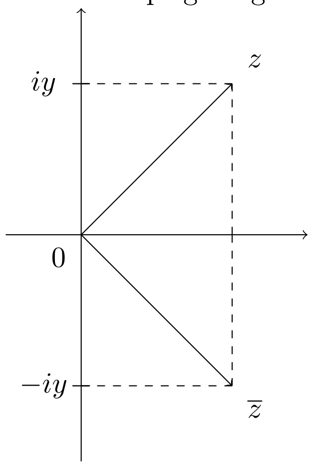


6.4 Definition: Komplexe Konjugation und Betrag

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
$\overline{z} := x - iy$ konjugiert komplexe Zahl

Geometrisch

$z \mapsto \overline{z}$ ist Spiegelung an der reellen Achse.



6.5 Eigenschaften von $z \mapsto \overline{z}$

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
4. $z + \overline{z} = 2 \text{ Re } z, z - \overline{z} = 2 \text{ Im } z$
5. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
6. $z = x + iy(x, y) \Rightarrow z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z\overline{z} \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

Beweise

Bis auf 3. alle klar.
Zu 3.: $z = x+iy, w = u+iv \Rightarrow \overline{zw} = \overline{(x + iy)(u + iv)} = \overline{xu - yv + i(yu + xv)} = xu-yv-i(yu+xv) = (x - iy)(u - iv)$ ✓

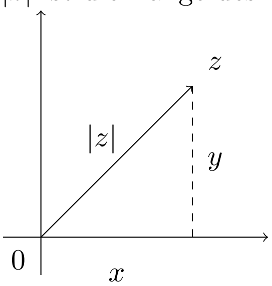
6.6 Definition: Betrag einer komplexen Zahl

Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Der Betrag ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Geometrisch (Satz des Pythagoras)

$|z|$ ist die Länge des Ortsvektors von z, bzw. Abstand des Punktes z von 0.



6.7 Eigenschaften des Betrags

1. $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|\text{Re } z| \leq |z|, |\text{Im } z| \leq |z|$
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ Multiplikativität
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung
6. $||z| - |w|| \leq |z - w|$

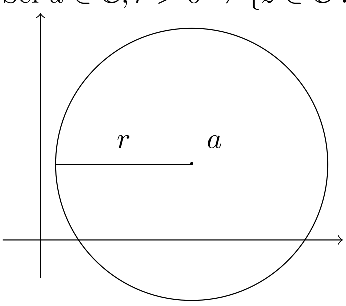
Beweise

4. $|z \cdot w|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$
   Wurzelziehen $\Rightarrow |zw| = |z| \cdot |w|$ q.e.d.
5. $|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\overline{z+w}) = (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+(z\overline{w}+\overline{z}w)+w\overline{w} = |z|^2+2\underbrace{\text{Re}(z\overline{w})}_{\leq|z|\cdot|w|} \leq (|z|+|w|)^2$

   q.e.d.
6. Folgt aus 5. wie für $\mathbb{R}$ ($z = z - w + w$)

Bemerkungen

1. Sei $a \in \mathbb{C}, r > 0 \Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ Kreis um a mit Radius r



2. Zum Invertieren in $\mathbb{C}$:
   Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} \underset{\text{Trick}}{=} \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

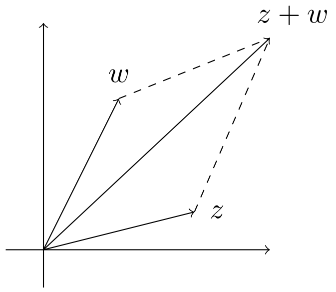
   (wieder in Form $a + ib$)

3. Es gibt keine Anordnung “>” auf $\mathbb{C}$, bezüglich der $\mathbb{C}$ angeordneter Körper wäre ($\mathbb{C}$ lässt sich nicht anordnen).
   Denn: Sonst wäre $-1 = i^2 > 0 \Rightarrow 1 < 0$, aber $1 > 0$ in jedem angeordneten Körper. ↯
   $z > w, z > 0$ ist im $\mathbb{C}$ nicht sinnvoll; nur die <u>Beträge</u> komplexer Zahlen lassen sich der Größe nach vergleichen.

Geometrische Interpretation von $+, \cdot$

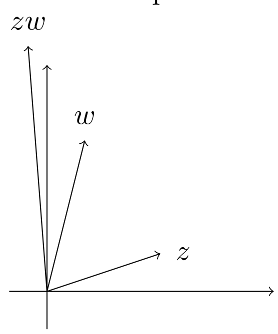
Addition

$z = x + iy, w = u + iv \Rightarrow z + w = (x + u) + i(y + v)$
Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$



Multiplikation

$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |zw| = |z| \cdot |w|$
Wir werden sehen: zw entsteht aus z, w
durch Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel zur $\mathbb{R}$-Achse.



Beispiel

$z = x + iy = (x, y)$
$i \cdot z = -y + ix = (-y, x)$
iz entsteht aus z durch Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn um 0.
Beachte: $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

Quadratische Gleichungen im $\mathbb{C}$

Seien $p, q \in \mathbb{C}$. Betrachte die Gleichung:
(*) $z^2 + pz + q = 0$

Hat diese Gleichung eine Lösung im $\mathbb{C}$? (*) $\Leftrightarrow (z + \frac{p}{2})^2 = -1 + \frac{p^2}{4} =: c$

Sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$
Gesucht ist: $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = c$.
Mit z ist dann auch $-z$ Lösung.

Ansatz: $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$
$z^2 = c \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \underset{\text{Vergleich der Re- und Im-Teile}}{\Leftrightarrow} x^2 - y^2 = a \wedge 2xy = b$

Beachte: Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn ihre Re- und Im-Teile gleich sind.
Auflösen nach x, y liefert zwei komplexe Lösungen $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = -z_1$
Schreibe: $z_{1/2} = \pm\sqrt{c}$ (Randfall: $x = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0$)
Damit: (*) hat die Lösungen $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Algebraische Gleichungen im $\mathbb{C}$

Eine algebraische Gleichung in $\mathbb{C}$ ist eine Gleichung der Form

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + za_1 + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ und unbekanntem $z \in \mathbb{C}$.

6.8 Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung hat mindestens eine Lösung im $\mathbb{C}$.

Beweis

Ausgelassen

Vorbemerkung: Algebraische Operationen mit Funktionen

Hier: $\mathbb{K}$ *einer der Körper* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$.

Seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ Funktionen (X Menge, z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$)
Definiere $f \pm g, f \cdot g : X \to \mathbb{K}$ so:

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

Beispiel

$f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2, g(z) = z^3 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = z^5$
Ferner: $\frac{f}{g} : \{x \in X : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$

6.9 Definition: Polynome

Eine Funktion $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$) der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ heißt Polynomfunktion (kurz: Polynom) über $\mathbb{K}$.
a_j sind die Koeffizienten von p.
Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p, $n = \operatorname{grad} p$.
Sind alle $a_j = 0$, so heißt p das Nullpolynom ($p = 0$).

$$\operatorname{grad} 0 := -\infty$$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{K}} := \{p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : p \text{ Polynom}\}$$

Summen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
Etwa: $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$
$\Rightarrow (pq)(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \ldots + c_x + c_0$
mit $c_{n+m} = a_n b_m$, $c_0 = a_0 b_0$ $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$, $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$
allgemein: $c_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$

6.10 Polynomdivision mit Rest

Seien $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, $q \neq 0$
$\Rightarrow$ es gibt eindeutige $r, s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ mit $p = sq + r$, wobei $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} q$ $(-\infty < n \forall n \in \mathbb{N}_0)$

Beweis

Ausgelassen

Beispiel

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, $q(x) = x^2 + 1$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 2x^2 - 3x + 4\big) : \big(x^2 + 1\big) = x + 2 + \dfrac{-4x + 2}{x^2 + 1} \\
\underline{-\,x^3 \qquad\quad\; -\,x} \\
\qquad\quad 2x^2 - 4x + 4 \\
\qquad\; \underline{-\,2x^2 \qquad\; -\,2} \\
\qquad\qquad\quad -\,4x + 2
\end{array}$$

$-4x + 2 = r(x)$ ist der Rest.

Bezeichnung

- Ist $r = 0$ in 6.10, das heißt $p = sq$, so heißt q ein Teiler von p.
- $\alpha \in \mathbb{K}$ heißt Nullstelle von $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, falls $p(x) = 0$

6.11 Korollar: Abspalten von Linearfaktoren zur Nullstelle

Sei $p(\alpha) = 0 \Rightarrow \exists! s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}} : p(x) = (x - \alpha) \cdot s(x)$.
Dabei ist $\operatorname{grad} s = \operatorname{grad} p - 1$

Beweis

Polynomdivision mit $q(x) = x - \alpha \Rightarrow p = (x - a) \cdot s(x) + r$ mit $r \in \mathbb{K}$, da grad $r \leq 0$
$p(\alpha) = 0 \Rightarrow r = 0$ q.e.d.
Ist auch $s(\alpha) = 0$, so kann man $x - \alpha$ nochmals abspalten, etc.

6.12 Definition: k-fache Nullstelle von p

Ist p durch $(x-\alpha)^k$ teilbar, also nicht durch $(x-\alpha)^{k+1}$ mit $k \in \mathbb{N}$, so heißt α k-fache Nullstelle von p.
Dann: $p(x) = (x - \alpha)^k \cdot q(x)$, grad q = grad $p - k$, $q(\alpha) \neq 0$

6.13 Folgerung

(1) Ist grad $p = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow p$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{K}$ (mit Vielfachheiten gezählt).

(2) Identitätssatz für Polynome: Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$.
Angenommen, p hat mindestens $n+1$ Nullstellen $\Rightarrow p = 0$ (Nullpolynom), d.h. $a_0 + \ldots + a_n = 0$.

Der Fundamentalsatz der Algebra (6.8) besagt: Jedes komplexe Polynom $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ mit grad $p \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Abspalten der Nullstellen-Linearfaktors und Iteration liefert:

6.14 Satz

Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, grad $p = n \in \mathbb{N} \Rightarrow p$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$, das heißt:

$$p(x) = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n), c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{Nullstellen von } p$$

Vorsicht!

Ein reelles $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ zerfällt im Allgemeinen nicht in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$.

Beispiel

$x^2 + 1$ hat keine reellen Nullstellen

Aber

$p(x) = (x + i)(x - i)$ über $\mathbb{C}$

6.15 Definition: Folgen in $\mathbb{C}$

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen.

(1) (z_n) heißt konvergent mit Grenzwert $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \varepsilon \forall n > n_0$

(2) (z_n) heißt Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |z_n - z_m| < \varepsilon \forall n, m > n_0$

(3) (z_n) ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists M > 0 : |z_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

Schreibweise

Falls (z_n) konvergent gegen z: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z, z_n \to z \ (n \to \infty)$

Beachte!

$z_n \to z \Leftrightarrow \underbrace{|z_n - z|}_{\text{reelle Folge}} \to 0 \ (n \to \infty)$

Beispiel

$z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$
Denn: $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |z^n| = |z|^n < \varepsilon \forall n > n_0$

6.16 Lemma

Sei $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ mit $z_n = x_n + iy_n \ (x_n, y_n \in \mathbb{R})$

(1) $z_n \to z$ mit $z = x + iy \ (x, y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x_n \to x \in \mathbb{R} \wedge y_n \to y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re } z_n \to \text{Re } z \wedge \text{Im } z_n \to \text{Im } z$

(2) (z_n) ist Cauchyfolge in $\mathbb{C} \Leftrightarrow (\text{Re } z_n) \wedge (\text{Im } z_n)$ sind Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$

Beweis

(1) "$\Rightarrow$" $|\text{Re } z_n - \text{Re } z| = |\text{Re } (z_n - z)| \leq |z_n - z| \to 0$
$\Rightarrow \text{Re } z_n \to \text{Re } z$, ebenso für Im z_n

"$\Leftarrow$" $|z_n - z| - |x_n + iy_n - (x + iy)| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|x_n - x|}_{\to 0} + \underbrace{\underbrace{|i(y_n - y)|}_{= |y_n - y|}}_{\to 0} \Rightarrow |z_n - z| \to 0$

✓

(2) analog ✓

q.e.d.

Wie für reelle Folgen erhält man:

6.17 Lemma

Jede Folge in $\mathbb{C}$ hat höchstens einen Grenzwert.
Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist beschränkt.

6.18 Rechenregeln

Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{C}$ Folgen mit $a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow$

(1) $a_n + b_n \to a + b$

(2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(3) Ist $b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \forall n \geq N$, mit $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \dfrac{a}{b}$

(4) $|a_n| \to |a|$

(5) $\overline{a_n} \to \overline{a}$

Beweise

(1)-(4) wörtlich wie für reelle Folgen (5.7)

(5) $a_n \to a \Rightarrow \text{Re } a_n \to \text{Re } a \wedge \text{Im } a_n \to \text{Im } a \Rightarrow \overline{a_n} = \text{Re } a_n - i\text{Im } a_n \overset{(1)+(2)}{\to} \text{Re } a - i\text{Im } a = \overline{a}$

6.19 Satz: Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$

Für eine Folge $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ gilt: (z_n) ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ (z_n) konvergiert.
Denn: $z_n = x_n + iy_n$
(z_n) Cauchyfolge $\Leftrightarrow (x_n), (y_n)$ Cauchyfolgen $\underset{\text{nach Cauchy-Kr.}}{\Leftrightarrow}$ $(x_n) \wedge (y_n)$ konv. in $\mathbb{R} \Leftrightarrow (z_n)$ konv. in $\mathbb{C}$
q.e.d.

6.20 Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$

Jede beschränkte Folge $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis

$z_n = x_n + iy_n \Rightarrow |x_n|, |y_n| \leq |z_n| \Rightarrow (x_n), (y_n)$ sind beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.
Nach Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$ (5.12) $\Rightarrow (x_n)$ hat konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$.
Nach Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$ (5.12) $\Rightarrow (y_n)$ hat konv. Teilfolge $y_{n_l} \to y \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lim\limits_{l\to\infty} z_{n_{k_l}} = x + iy$ q.e.d.

§7 Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ (die } n\text{-te Partialsumme)}$$

Also: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, etc.
Die Partialsummen bilden eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiele

1. $a_k = k \forall k \in \mathbb{N}$
   $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

2. $a_k = (-1)^k \forall k \in \mathbb{N}$
   $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$

7.1 Definition: Unendliche Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge.
Die (unendliche) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit Gliedern a_k ist definiert als die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent $\Leftrightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Man schreibt dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ (\underline{Wert} der Reihe)}$$

Also

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Partialsummenfolge, als auch deren Grenzwert im Fall der Konvergenz.

Entsprechend

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n>n_0}$, $n_0 \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow$ Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$

7.2 Beispiele für Reihen

(1) <u>Geometrische Reihe</u>: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$, $z \in \mathbb{C}$ $(z^0 := 1)$

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + \ldots + z^n$

<u>1. Fall</u>: $z = 1 \Rightarrow s_n = n+1 \to \infty$ für $n \to \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1^k = \infty$, die Reihe divergiert

<u>2. Fall</u>: $z \neq 1 \Rightarrow s_n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1-z}$ (geom. Summenformel, für $z \in \mathbb{C}$ wie für $z \in \mathbb{R}$)

$|z| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z}$

$|z| > 1 \Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert, da $(z^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt

<u>Also</u>: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$

Für $|z| > 1$ divergiert die geometrische Reihe.

Ebenso für $z = -1$: $s_n = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{array} \right\} \Rightarrow (s_n)$ divergiert

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$ divergiert, da $s_n = \frac{1}{2} n(n+1)$ unbeschränkt

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = ?$

Ansatz: $\dfrac{1}{k(k+1)} \overset{!}{=} \dfrac{A}{k} + \dfrac{B}{k+1}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)} \Leftrightarrow A = 1, B = -A = -1$

<u>Also</u>: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ "<u>Partialbruchzerlegung</u>"

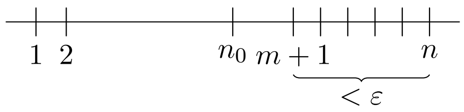
$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \underbrace{(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})}_{\text{"Teleskopsumme"}}$$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$

7.3 Cauchy-Kriterium für Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$ die Partialsummenfolge $(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \underbrace{|s_n - s_m|}_{=|\sum_{k=1}^{n} a_k|} < \varepsilon \forall n > m \geq n_0$



7.4 Korollar

Sei $\sum a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$

Beweis

Cauchykriterium mit $n = n + 1$

Achtung

1. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0 \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent!
   Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert (später), obwohl $\left(\frac{1}{k}\right)$ Nullfolge
2. Ändert man endlich viele Glieder einer Reihe (oder lässt sie weg), so ändert dies das Konvergenzverhalten nicht. Der Reihenwert ändert sich aber im Allgemeinen schon!

7.5 Regeln für konvergente Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ seien konvergent, $\Rightarrow$

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergiert, $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(2) $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} i(\lambda a_k)$ konvergiert gegen $\lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
Produkte von Reihen: schwieriger $\to$ später
Warnung: $(\sum a_k) \cdot (\sum b_k) \neq \sum a_k b_k$

Beweis

(1) $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, s_n \to s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, t_n \to t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = s_n + t_n \to s + t$

(2) analog

q.e.d.

Warnung

Klammern dürfen im Allgemeinen nicht weggelassen werden!
Beispiel: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(1-1)=0 \quad 1-1+1-1+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ divergiert!

7.6 Reihen mit positiven Gliedern

Sei $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Dann:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow \left(s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis

(s_n) ist monoton wachsend. Monotoniekriterium (5.10) zeigt:
(s_n) konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)$ ist beschränkt. q.e.d.

7.7 Beispiele für konvergente/divergente Reihen

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert. Denn:
   $$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\leq 1+1=2$$
   $\Rightarrow (s_n)$ beschränkt $\underset{7.6}{\Rightarrow} \sum\frac{1}{k^2}$ konvergiert
2. Allgemein: $s\in\mathbb{N}, s\geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ konvergiert (Übung)
3. Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergiert. Denn:
   $$s_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{\text{4 Summanden}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}\text{ Summanden}}$$
   $$>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=1+n\cdot\frac{1}{2}\to\infty(n\to\infty)\Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist unbeschränkt}$$

Als Nächstes: Alternierende Reihen, z.B.: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{20}+\frac{1}{35}\mp\ldots$ (Glieder abwechselnd positiv/negativ)

7.8 Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Sei $(a_k)\subseteq\mathbb{R}$ mit $a_k\geq 0\forall k$ monoton fallende Nullfolge. $\Rightarrow$

(i) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert

(ii) Fehlerabschätzung: $s = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \Rightarrow |s - \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k}_{=s_n}| \leq a_{n+1}$

Beweis

$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$
$s_n - s_{n-2} = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} = (-1)^n \cdot \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{\leq 0}$

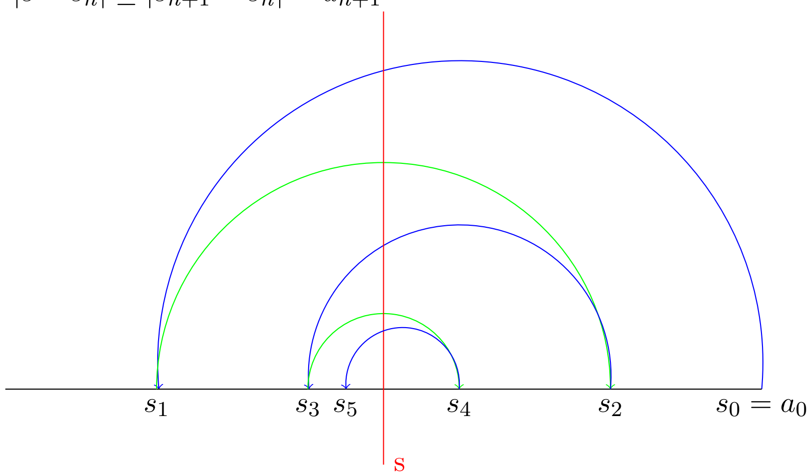
$$\text{Also:} \begin{array}{lcll} n \text{ gerade} & \Rightarrow & s_n \leq s_{n-2} & \text{das heißt: } s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots \\ n \text{ ungerade} & \Rightarrow & s_n \geq s_{n-2} & \text{das heißt: } s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \end{array}$$

$s_0 \geq s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$

$\Rightarrow (s_2 n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt.
$\Rightarrow A := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}, B := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$ existieren in $\mathbb{R}$

$a_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1} \to A - B$; Andererseits: $a_{2n} \to 0$; Also: $A = B =: s$
$\Rightarrow s_n \to s$ für $s \to \infty$, das heißt, (i) sei damit gezeigt.

Fehlerabschätzung: s liegt zwischen s_n und s_{n+1}
$\Rightarrow |s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$ q.e.d.



Vielen Dank an Helen Meyer für diese Grafik. :)

7.9 Beispiele

1. Alternierende harmonische Reihe:
   $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergiert nach Leibniz-Kriterium.
   Sei s der Reihenwert $\Rightarrow \left| s - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$. Bem.: $s = ln2$

2. Leibniz-Reihe:
   $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ konvergiert nach Leibniz-Kriterium (gegen $\frac{\pi}{4}$).

7.10 Definition: Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiele

1. $z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist absolut konvergen t. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}\right)$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist zwar konvergent, aber nicht absolut.

7.11 Definition: Majorantenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{C}$ mit $|a_k| \leq b_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}$, wobei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiere ("Konvergente Majorante").
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent und auch absolut konvergent, und $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Beweis

$\sum b_k$ erfüllt das Cauchy-Kriterium $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_0 : \varepsilon \geq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\geq}$
$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \Rightarrow \sum a_k$ erfüllt Cauchy-Kriterium $\Rightarrow \sum a_k$ konvergiert.
Ebenso $\sum |a_k|$. Ferner:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|}_{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|}$$

q.e.d.

7.12 Korollar

Jede absolut konvergente Reihe $\sum a_k$ ist konvergent.

Beweis

Majorantenkriterium mit $b_k = |a_k|$. q.e.d.

Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^3}$ konvergiert absolut, denn $\left|\frac{i^k}{k^3}\right| = \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$, und $\sum \frac{1}{k^2}$ ist konvergente Majorante.

7.13 Definition: Quotientenkriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, $a_n \in \mathbb{C}$.

(1) Es gebe $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0 : a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Es gebe $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0 : a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Beweis

(1) $n \geq n_0 : |a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot |a_{n_0}|$
$\leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| = c \cdot q^n, c > 0$ (unabh. von n)
$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ist konvergente Majorante (geometrische Reihe).

(2) $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_0}| \neq 0 \Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge.

q.e.d.

Vorsicht

In 7.13 (1) genügt <u>nicht</u>: … und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \forall n \geq n_0$

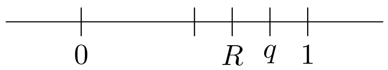
Gegenbeispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \forall n$

Aber: $\frac{n}{n+1} \to 1 \Rightarrow \nexists q$ wie in (1) gefordert; Konvergenz nicht mit Quotientenkriterium entscheidbar!

7.14 Korollar

Angenommen, $R := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, \infty]$ existiere.

- $R < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
- $R > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert



Beispiel

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert, denn: $a_n = \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} (n \to \infty)$

2. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ konvergiert absolut für $|z| < 1$, denn:
$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1) \cdot z^{n+1}}{n z^n}\right| = \frac{n+1}{n} \cdot |z| \to |z| < 1 \underset{7.14}{\Rightarrow}$ Behauptung

Frage

Was passiert, wenn man die Glieder einer Reihe umordnet?

Beispiel

Alternierende harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \ldots =: s$

$s = \overline{1 - \frac{1}{2}} + \overline{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \overline{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} + \ldots > \frac{1}{2}$

$s' = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right)}_{=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)}$

$\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \ldots\right] = \frac{1}{2} s$!

7.15 Umordnungssatz

Beweis im Skript

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>absolut</u> konvergent und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv

Permutation der Indizes $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert absolut, und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Problem im Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ <u>nicht</u> absolut konvergent!

Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j, B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$.

Idee: $AB = (a_0+a_1+a_2+\ldots)\cdot(b_0+b_1+b_2+\ldots) \stackrel{?}{=} a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

mit $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$

Stets richtig, falls A, B endliche Summen sind.
Aber für unendliche Reihen ist das <u>nicht o.E.</u> richtig!

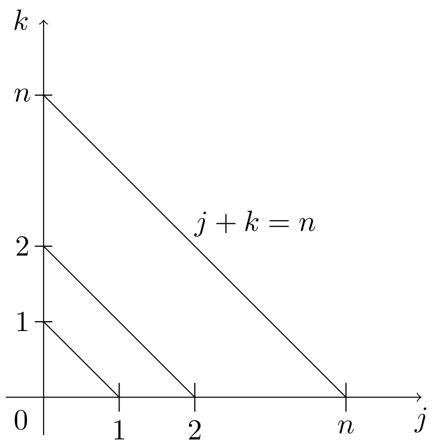
7.16 Satz: Cauchy-Produkt

Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ <u>absolut konvergent</u> $(a_j, b_k \in \mathbb{C})$

Setze $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{(j,k):j+k=n} a_j b_k (n \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut, und

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)$$

<u>Cauchy-Produkt</u>



Summ. indizes für $a_j b_k$

Beweis

$A := \sum a_j, B := \sum b_k, S_1 := \sum_0^\infty |a_j| < \infty, S_2 := \sum_0^\infty |b_k| < \infty$

(1) $\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n |a_j b_{n-j}| = \sum_{n=0}^N \sum_{j+k=n} |a_j||b_k| \leq \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N |a_j||b_k| \overset{\text{Distributivges.}}{=} \left(\sum_{j=0}^N |a_j|\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^N |b_k|\right) \leq$

$S_1 \cdot S_2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^\infty |c_n|$ konvergiert.

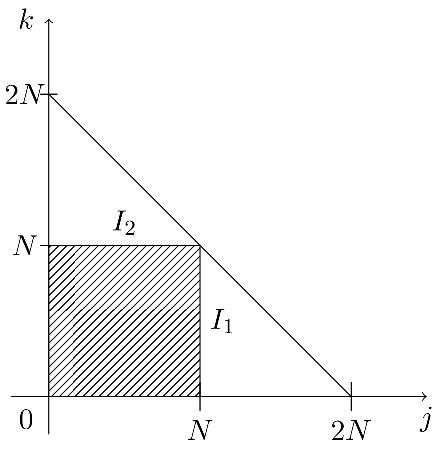
(2) Grenzwert von $\sum_{n=0}^\infty c_n$: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall N \geq n_0$:

$\left|\left(\sum_{j=0}^N a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^N b_k\right) - AB\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\sum_{j>N} |a_j| < \frac{\varepsilon}{3M}, \sum_{k>N} |b_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$ mit $M = S_1 + S_2$

Dann: $\left|\sum_{n=0}^{2N} c_n - AB\right| = \left|\sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) - AB\right| \leq \left|\underbrace{\overbrace{\left(\sum_{j=0}^N a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^N b_k\right)}^{\text{schraffierter Bereich}} - AB}_{=:r_1 < \frac{\varepsilon}{3}}\right| + \underbrace{\sum_{(j,k) \in I_1 \cup I_2} |a_j||b_k|}_{=:r_2}$

$r_2 \leq \underbrace{\left(\sum_{j=N+1}^{2N} |a_j|\right)}_{< \frac{\varepsilon}{3M}} \cdot \underset{(|b_k| \leq S_2)}{S_2} + S_1 \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=N+1}^{2N} |b_k|\right)}_{< \frac{\varepsilon}{3M}} \underset{S_i \leq M}{M} \left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\left|\sum_{n=0}^{2N} c_n - AB\right| < \varepsilon \forall N \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^\infty c_n = AB$ q.e.d.



Beispiel

Im Skript (nicht zwingend notwendig)

§8 Reihen: Anwendungen und Beispiele

8.1 Definition: Dezimalentwicklung reeller Zahlen

Ein Dezimalbruch ist eine Reihe der Form

$$(*) \ \pm \sum_{k=-N}^{\infty} a_k 10^{-k} = \pm a_{-N} \dots a_0, a_1 a_2 \dots \left[10^{-k} = \left(\frac{1}{10}\right)^k \right]$$

mit $N \in \mathbb{N}_0, a_k \in \{0, \dots, 9\}$ Ziffern

Beispiel

$417,29 = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} (N = 2)$

$0,\overline{3} := 0,333\dots := \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k} = \frac{3}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$

$0,\overline{9} \underset{\text{analog}}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$

8.2 Satz: Zusammenhang reelle Zahl / Dezimalbruch

Jeder Dezimalbruch ist eine konvergente Reihe und stellt daher eine reelle Zahl dar.
Umgekehrt lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}$ als Dezimalbruch darstellen.
Die Dezimaldarstellung ist nicht notwendig eindeutig! Beispiel: $0,\overline{9} = 1, 0,6\overline{9} = 0,7$

Beweis

(1) Konvergenz der Reihe (*): $9 \cdot \sum_{k=-N}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ ist konvergente Majorante

(2) Sei $x \in \mathbb{R}$ o.E. $x \geq 0$.

1. Fall: $x \in [0,1)$
Gesucht: Darstellung $x = 0, a_1 a_2 \ldots$
Konstruiere $a_1, a_2, \ldots$ rekursiv so, dass

$$(\square)\ 0, a_1 \ldots a_n \leq x < 0, a_1 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} \forall n \in \mathbb{N}$$

Setze dazu: $a_1 := \lfloor 10x \rfloor, a_1 \leq 10x < a_1 + 1$
$a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, da $0 \leq x < 1$ und $0, a_1 \leq x < 0, a_1 + \frac{1}{10}$
Seien nun $a_1, \ldots, a_{n-1}$ bereits konstruiert $(n \geq 2)$
$a_n := \lfloor 10^n \underbrace{(x - 0, a_1 \ldots a_{n-1})}_{=y_n} \rfloor \Rightarrow a_n \leq 10^n y_n < a_n + 1$
$(\square) \Rightarrow 0 \leq y_n < \frac{1}{10^{n-1}} \Rightarrow a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ und $\frac{a_n}{10^n} \leq y_n < \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$
$\Rightarrow 0 \leq x - 0, a_1 \ldots a_n = y_n - \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^n} \Rightarrow (\square)$ für n
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0 \Rightarrow x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$

(3) $x \geq 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \frac{x}{10^N} \in [0,1) + (2)$

Zusatz

Die Dezimaldarstellung von x ist eindeutig, wenn man ausschließt, dass $a_k = 9$ für fast alle k ist, also $x = \ldots, \ldots \overline{9}$

Hier ohne Beweis.

Bemerkung

Statt der Basis 10 kann man eine beliebige Zahle $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ als Basis wählen.
Analog zu Satz 8.2 gilt: Jedes $x \in \mathbb{R}$ hat eine so genannte $\underline{b\text{-adische Entwicklung}}$

$$x = \pm \sum_{k=-N}^{\infty} a_k b^{-k} \text{ mit } N \in \mathbb{N}_0, a_k \in \{0, \ldots, b-1\}$$

$b = 2$: Dualsystem, $a_k \in \{0, 1\} \to$ Binärdarstellung von x
$b = 8$: Oktalsystem (vor 1980 in der Informatik)

8.3 Definition: Abzählbare Mengen, Mächtigkeit

(1) Zwei Mengen X, Y heißen gleichmächtig, kurz $X \sim Y$, $\Leftrightarrow \exists$ bijektive Abbildung $f : X \to Y$

(2) X ist abzählbar unendlich $\Leftrightarrow X \sim \mathbb{N}$

(3) X ist abzählbar $\Leftrightarrow X$ ist endlich (auch $X = \emptyset$ möglich) oder abzählbar unendlich

(4) X ist überabzählbar $\Leftrightarrow X$ ist nicht abzählbar

Abzählbar unendlich sind zum Beispiel:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{N}_0, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0, n \to n-1$ ist bijektiv
- $\mathbb{Z}$, bijektives $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \ldots \end{matrix}$

Achtung: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z}$, aber alle drei Mengen sind gleichmächtig!

8.4 Lemma

$X \neq \emptyset$ ist abzählbar $\Leftrightarrow \exists$ surjektives $f : \mathbb{N} \to X$, das heißt, mit $x_i = f(i)$ gilt: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

Beweis

"$\Rightarrow$" o.E. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ endlich

Definiere $f : \mathbb{N} \to X : \begin{array}{ll} f(i) := x_1 & \text{für } 1 \leq i \leq n \\ f(i) := x_n & \text{für } i > n \end{array}$, f ist surjektiv

"$\Leftarrow$" Sei $f : \mathbb{N} \to X$ surjektiv, o.E. X unendlich

$X = \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$, $f(i) = f(j)$ für $i \neq j$ ist möglich

Konstruiere daraus neue Abzählung $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, bei der bereits gezählte Elemente übersprungen werden, das heißt $\underbrace{f(1)}_{=x_1} = \cancel{f(2)} = \cancel{f(3)}, \underbrace{f(4)}_{=x_2} = \cancel{f(5)} \dots$

$x_1 := f(1), x_2 := f(4), 4 :=$ kleinster Index mit $f(4) \neq x_1$

$x_2 := f(i_2), i_2 :=$ kleinster Index mit $f(i_2) \notin \{x_1, x_2\}$ usw...

Liefert Bijektion $\mathbb{N} \to X, i \mapsto x_i$

Konsequenz: X ist abzählbar, $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ ist abzählbar (anschaulich klar).

8.5 Satz

Seien X_n $(n \in \mathbb{N})$ abzählbare Mengen $\Rightarrow X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist abzählbar.

Beweis

o.E. $X_n \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$

Sei $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots\}$

$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots\}$

etc...

$$\begin{array}{ccccccc}
\overset{1}{x_{11}} & \to & \overset{2}{x_{12}} & & \overset{6}{x_{13}} & \to & \overset{7}{x_{14}} \\
& \swarrow & & \nearrow & & & \\
\overset{3}{x_{21}} & & \overset{5}{x_{22}} & & \dots & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & \\
\overset{4}{x_{31}} & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Abzählung von X:

8.6 Korollar

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\right\}}_{\text{abzählbar}}$$

8.7 Satz: Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis (Cantorsches Diagonalverfahren)

Wir zeigen, dass bereits $(0,1)$ überabzählbar ist.
Angenommen, $(0,1)$ sei abzählbar: $(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
x_n in Dezimaldarstellung (ohne $\overline{9}$)
$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$
$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$
$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$
$\vdots$

Definiere Dezimalzahl $z \in (0,1)$ wie folgt:
$x_1 = 0, \mathbf{a_{11}}a_{12}a_{13}\ldots$
$x_2 = 0, a_{21}\mathbf{a_{22}}a_{23}\ldots$
$x_3 = 0, a_{31}a_{32}\mathbf{a_{33}}\ldots$
$\vdots$

$$z := 0, z_1z_2z_3 \text{ mit } z_n := \begin{cases} 5 & \text{falls } a_{nn} \neq 5 \\ 4 & \text{falls } a_{nn} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z \in (0,1) : z_n \neq a_{nn} \Rightarrow \underset{\text{Eindeutigkeit der Darstellung}}{\Rightarrow} z \neq x_n \forall n$$

Beispiel

Jedes Programm ist eine endliche Folge von Symbolen aus einer endlichen Menge A (Alphabet).
Nach Satz 8.5 $\Rightarrow$ { Programme (über A)} ist abzählbar
$X = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ Menge der $0,1$-Folgen
$f \in X$ ist berechenbar $\Leftrightarrow \exists$ Programm, das zu einer Eingabe n die Ausgabe $f(n)$ liefert.
$\Rightarrow \{f \in X : f \text{ berechenbar}\}$ ist abzählbar

Aber: X ist überabzählbar! (Übung)
Also: $\exists f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, die nicht berechenbar sind!

8.8 Satz: Die Exponentialfunktion

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialfunktion

$$\boxed{exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$ absolut konvergent.

Beweis

$z = 0 \Rightarrow$Konvergenz klar; $exp(0) = 1$
$z \neq 0$: Quotientenkriterium: $a_n = \dfrac{z^n}{n!} \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot |z| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Nach Korollar 7.14 folgt die Behauptung.

8.9 Definition: Exponentialfunktion

Die Funktion $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto exp(z)$ heißt Exponentialfunktion.

Beachte

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$

Spezielle Werte

- $exp(0) = 1$
- $\boxed{exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e \approx 2,718}$ Eulersche Zahl

8.10 Satz: Funktionalgleichung

$\forall z, w \in \mathbb{C} : \boxed{exp(z + w) = exp(z) \cdot exp(w)}$

Beweis

Exponentialreihe ist absolut konvergent $\Rightarrow$ Cauchy-Produkt bildbar:

$exp(z) \cdot exp(w) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

mit $c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \frac{1}{n!} (z+w)^n$ (Binomische Formel)

$\Rightarrow exp(z) \cdot exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (z+w)^n = exp(z+w)$ q.e.d.

8.11 Folgerungen

(1) $exp(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ und $exp(-z) = \dfrac{1}{exp(z)}$
Denn: $1 = exp(0) = exp(z + (-z)) \underset{8.10}{=} exp(z) \cdot exp(-z)$ ✓

(2) $\boxed{x \in \mathbb{R} \Rightarrow exp(x) > 0}$

Denn: Für $x \geq 0$: $exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1$

Für $x < 0$: $exp(x) \underset{(1)}{=} \dfrac{1}{exp(-x)} > 0$ ✓

(3) $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow exp(nz) = (exp(z))^n$
Insbes. (mit $z = 1$): $\boxed{exp(n) = e^n}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$
Denn: Für $n \in \mathbb{N}_0$: Induktion nach n
$n = 0$: $(exp(z))^0 = 1 = exp(0 \cdot z)$
$n \to n+1$: $exp((n+1)z) = exp(nz + z) \underset{8.10}{=} exp(nz) \cdot exp(z) \underset{I.V.}{=} (exp(z))^{n+1}$ ✓
Für $n < 0$: $exp(nz) \underset{(1)}{=} \dfrac{1}{exp(-nz)} \underset{-n>0}{=} \dfrac{1}{(exp(z))^{-n}} = (exp(z))^n$ q.e.d.

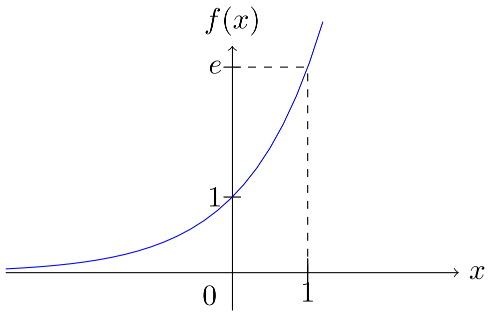
(4) $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \Rightarrow exp\left(\dfrac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} =: e^{p/q}$
Denn: $\left(exp\left(\dfrac{p}{q}\right)\right)^q \underset{(3)}{=} exp\left(q \cdot \dfrac{p}{q}\right) = exp(p) = e^p \underset{exp\left(\frac{p}{q}\right)>0}{\Rightarrow} exp\left(\dfrac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p}$ q.e.d.

Schreibweise (motiviert durch (4))

$\boxed{e^z := exp(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$

Damit: $e^0 = 1$, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ (FG 8.10), $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

Graph der e-Funktion auf $\mathbb{R}$



Berechnung von e^x

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = g + x', x' \in [0,1), g \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow e^x = e^g \cdot e^{x'}$
Bestimme also e^x für $0 \leq x < 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ Restglied}$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow |R_{n+1}(x)| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\right)$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots}_{=2 \text{ (geom. Reihe)}} \right)$$

Dabei gilt sogar striktes „$<$“ statt „$\leq$“, falls $x \neq 0$.
Dieselbe Abschätzung funktioniert für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$, also:

8.12 Satz: Restgliedabschätzung für die Exponentialfunktion

$$x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1 \Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), \text{ wobei } |R_{n+1}(x)| \leq 2 \cdot \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{(*)}$$

dabei gilt “$<$”, falls $x \neq 0$.
(*): Betrag des ersten weggelassenen Gliedes

Speziell: $|x| \leq 1 \Rightarrow |e^x - 1| \leq 2|x|, |e^x - 1 - x| \leq |x|^2$

Beispiel

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_{n+1}(1), |R_{n+1}(1)| < \frac{2}{(n+1)!}$$

$R_n(1) < 6 \cdot 10^{-8} \Rightarrow e \approx 2,7182818$
Die exp. Reihe konvergiert rasch!

8.13 Korollar

e ist irrational.

Beweis

Angenommen, $e = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$s := \underbrace{\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)}_{(*)} n! \in \mathbb{N}$$

Aber: $(*) = R_{n+1}(1) \Rightarrow s < n! \cdot \frac{2}{(n+1)!} \Rightarrow s < \frac{2}{n+1}$ ↯

Bemerkung

e ist sogar transzendent, das heißt $\nexists$ Polynom $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ mit rationalen Koeffizienten, so dass $p(e) = 0$.

8.14 Bemerkung: Weitere wichtige Darstellungen von e^x

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \in \mathbb{R}$$

Beweis

Später.

Anwendung: Kontinuierliche Verzinsung

Gegeben: Anfangskapital K, Zinssatz für ein Jahr: $p\%$ (Zinsfuß)

Verzinsung: In jedem $\frac{1}{n}$-ten Jahr $\frac{p}{n}\%$ Zinsen auf das jeweils aktuelle Kapital
Kapital nach einem Jahr: $K \cdot \left(1 + \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{100}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} K \cdot e^{\frac{p}{100}}$

Sinus und Cosinus

Vorüberlegung

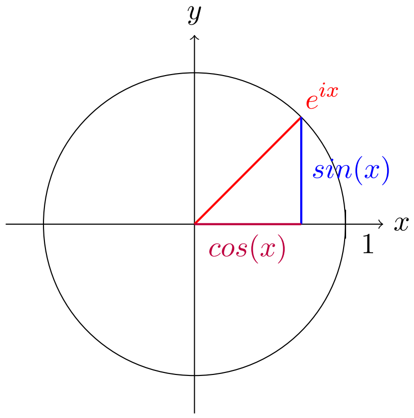
$z \in \mathbb{C} \to \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

Denn: $e^{\overline{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \overline{\frac{z^k}{k!}} \underset{\text{Regeln f. GW}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}$

Speziell

$z = ix, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{e^{ix}} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$

$\Rightarrow |e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} \underset{\text{FG}}{=} e^0 = 1$



8.15 Definition: Cosinus/Sinus auf $\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &:= \text{Re }(e^{ix}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x &:= \text{Im }(e^{ix}) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}}$$

Damit folgt:

8.16 Satz: Eulersche Formel

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x}$ Eulersche Formel

8.17 Satz

(1) $cos^2 x + sin^2 x = 1$ $[cos^2 x = (cos\ x)^2$ etc.]
Insbes.: $-1 \leq \cos x, sin\ x \leq 1$

(2) $cos(-x) = cos\ x$; cos ist gerade; $cos\ 0 = 1$
$sin(-x) = -sin\ x$; sin ist ungerade; $sin\ 0 = 0$

(3) Additionstheoreme:
$cos(x + y) = cos\ x\ cos\ y - sin\ x\ sin\ y$
$sin(x + y) = sin\ x\ cos\ y + cos\ x\ sin\ y$

Beweis

(1) $cos^2x + sin^2x = [\text{Re } (e^{ix})]^2 + [\text{Im } (e^{ix})]^2 = |e^{ix}|^2 = 1$

(2) klar aus Definition

(3) $e^{i(x+y)} \underset{\text{FG}}{=} e^{ix} \cdot e^{iy} \Rightarrow cos(x+y) + i \cdot sin(x+y) = (cos\ x + i \cdot sin\ x) \cdot (cos\ y + i \cdot sin\ y)$
$= cos\ x\ cos\ y - sin\ x\ sin\ y + i(cos\ x\ sin\ y + sin\ x\ cos\ y)$

Vergleich der Real-/Imaginärteile $\Rightarrow$ Behauptung. q.e.d.

8.18 Satz: Reihenentwicklung des Sinus/Cosinus

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $cos\ x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$

(2) $sin\ x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$

Beide Reihen sind absolut konvergent.

Beweis

Für Cosinus:

$$cos\ x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(1 + (-1)^k)\frac{(ix)^k}{k!}$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \underset{(k=2n)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Analog für den Sinus.
Die Reihen für e^{ix}, e^{-ix} konvergieren absolut
$\Rightarrow$ die Cosinus- und Sinus-Reihen konvergieren absolut, wegen dem

8.19 Lemma

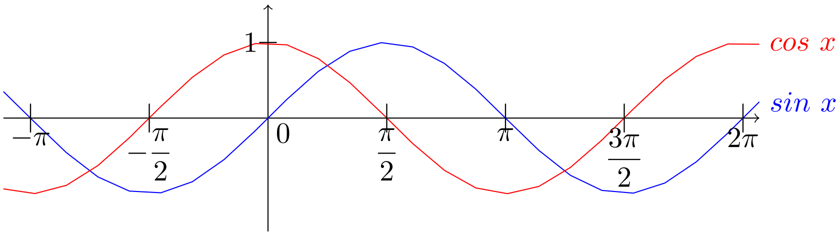
Seien $\sum_{k=0}^{\infty} z_k, \sum_{k=0}^{\infty} w_k$ absolut konvergent $(z_k, w_k \in \mathbb{C})$
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(z_k + w_k), \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k}$ sind absolut konvergent.

Beweis

$\sum_{k=0}^{\infty}(|z_k| + |w_k|)$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ sind konvergente Majoranten. q.e.d.

Später

cos und *sin* sind 2π-periodisch, $\frac{\pi}{2} :=$ erste positive Nullstelle von *cos*

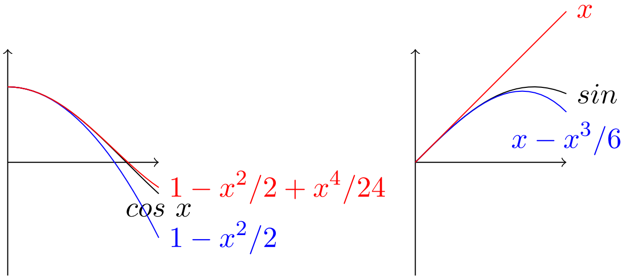


8.20 Einschließungslemma

Für $x \in [0,2]$ gilt:

(1) $1 - \frac{x^2}{2} \leq cos\ x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

(2) $0 \leq x - \frac{x^3}{6} \leq sin\ x \leq x$



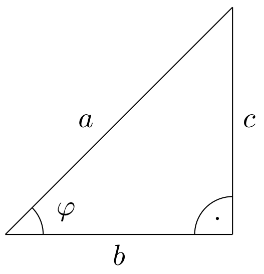
Beweis

(1) $cos\ 0 = 1 \Rightarrow$ richtig für $x = 0$

$0 < x \leq 2 \Rightarrow cos\ x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{a_k > 0}$ alternierend

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} \leq \frac{4}{(2k+2)(2k+1)} < 1$ für $k \geq 1$

$\Rightarrow (a_k)_{k\geq 1}$ monoton fallende Nullfolge (nächstes Mal)



$cos\ \varphi := \frac{b}{a}$ und $sin\ \varphi := \frac{c}{a}$

$$cos\ x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots$$

$$sin\ x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$

Problem: Wir wissen nicht, was ein Winkel ist.

Beweis von 8.20

(1) $x = 0$: ✓

$x \neq 0$: $cos\ x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{a_k > 0}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} \leq \frac{4}{(2k+2)(2k+1)} < 1$ für $k \geq 1$

$\Rightarrow (a_k)_{k \geq 1}$ ist monoton fallende Nullfolge und die Cosinus-Reihe konvergiert.

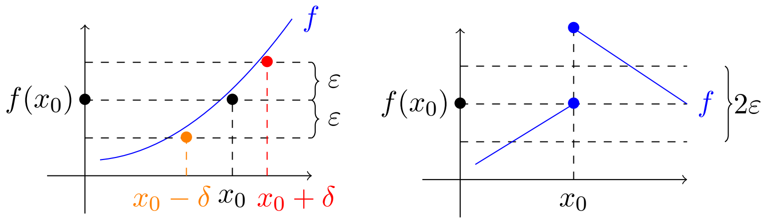
Leibniz-Kriterium (7.8) $\Rightarrow$ $cos\ x$ liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen $\Rightarrow$ Behauptung

(2) In der Übung.

q.e.d.

§9 Stetige Funktionen und Grenzwerte

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit D als Definitionsbereich.
Varianten:



Anschaulich: f ist stetig in $x_0 :\Leftrightarrow f$ hat keinen Sprung in x_0.

Mathematisch präzise Fassung:

9.1 Definition: ε-δ-Kriterium

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f heißt <u>stetig</u> in $x_0 \in D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

f stetig auf $D :\Leftrightarrow f$ stetig in jedem $x_0 \in D$.
Interpretation: $x \to \boxed{\begin{array}{c} f \\ \text{Programm} \end{array}} \to f(x)$
Kleine Änderungen der Eingaben bewirken nur kleine Änderungen der Ausgabe.

Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b \; (a, b \in \mathbb{R})$

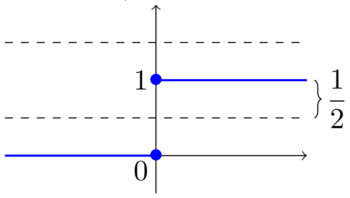
f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, denn:
Sei $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |a| \cdot |x - x_0|$

1. Fall $a = 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0$
   Wähle $\delta = 1$ (zu vorgeg. $\varepsilon > 0$)

2. Fall $a \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
   $\delta := \dfrac{\varepsilon}{|a|} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

(2) Heaviside-Funktion: $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$



H ist unstetig in $x_0 = 0$

Denn: $x < 0$ bel. $\Rightarrow |\overbrace{H(x)}^{=0} - \overbrace{H(0)}^{=1}| = 1$

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \delta > 0$ so, dass das ε-δ-Kriterium (9.1) in $x_0 = 0$ erfüllt ist!

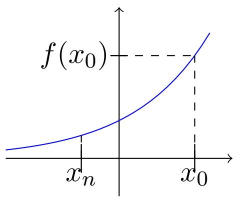
Aber: H stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Wichtiges Kriterium:

9.2 Folgenkriterium für Stetigkeit reeller Funktionen

Für $f : D \to \mathbb{R}$ gilt:

f ist stetig in $x_0 \in D :\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$



ε-δ-Definition der Stetigkeit in x_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

Beweis

"$\Rightarrow$" Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$.

Sei $\varepsilon > 0 \overset{9.1}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 :$

$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, sofern $|x_n - x_0| < \delta$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \delta \forall n \geq n_0$

Also: $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

"$\Leftarrow$" Angenommen, f sei unstetig in x_0.

Dann $\exists \varepsilon_0 > 0$, zu dem sich kein δ finden lässt, so dass das ε-δ-Kriterium (9.1) erfüllt ist.

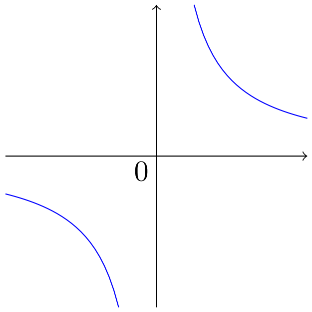
Insbes.: Zu $\frac{1}{n} = \delta$ $(n \in \mathbb{N})$ $\exists x_n \in D :$

$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x_0| \geq \varepsilon_0$. Also: $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$ ↯

q.e.d.

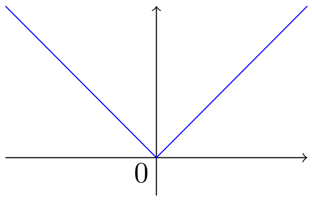
Beispiele

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist stetig auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Denn: Sei $x_0 \neq 0, (x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Folge mit $x_n \to x_0$
$\Rightarrow f(x_n) = \dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{x_0} = f(x_0)$

(2) $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.



Denn: $x_n \to x_0 \Rightarrow |x_n| \to |x_0|$

9.3 Regeln für stetige Funktionen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D \Rightarrow$

$$f + g, f \cdot g, c \cdot f (c \in \mathbb{R}) : D \to \mathbb{R}$$

sind ebenfalls stetig in x_0.
(Dabei: $(f \underset{\cdot}{+} g)(x) = f(x) \underset{\cdot}{+} g(x), (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$)

Falls $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g} : \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0

Beweis

Mit Folgenkriterium (9.2) und Regeln für Grenzwerte (6.18):
Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$
$\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0), g(x_n) \to g(x_0)$
$\Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) \Rightarrow f + g$ stetig in x_0, etc.

Zu $\dfrac{f}{g}$: $\underbrace{g(x_0)}_{=:c} \neq 0 \underset{g \text{ stetig in } x_0}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : |g(x_n)| > \dfrac{1}{2} c > 0 \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$

9.4 Beispiele: Polynome und rationale Funktionen

(1) Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ eine Polynomfunktion.
Wiederholte Anwendung von 9.3 $\Rightarrow p$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(2) Eine <u>rationale Funktion</u> auf $\mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}, q \neq 0$ (Nullpolynom).
Definitionsbereich: $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ (höchstens endlich viele Def.-Lücken!)
Regeln 9.3 $\Rightarrow R$ stetig auf ganz D

Vergrößerung von D eventuell möglich durch Kürzen gemeinsamer Faktoren.
Beispiel: $R(x) = \frac{x}{x^3 - x} = \frac{1}{x^2 - 1}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = D_{\max}$

9.5 Satz

$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis

(1) exp ist stetig in $x_0 = 0$, denn:
Sei $x_n \to 0 \Rightarrow |e^{x_n} - e^0| = |e^{x_n} - 1| \underset{\text{für } |x_n \leq 1}{\leq} 2|x_n| \overset{n\to\infty}{\to} 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} = e^0$

(2) exp ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$, denn:
Sei $x_n \to x_0 \Rightarrow |e^{x_n} - e^{x_0}| = |e^{x_0}(e^{x_n - x_0} - 1)| = |e^{x_0}| \cdot \underbrace{|e^{x_n - x_0} - e^0|}_{\to 0 \text{ nach 1.}}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |e^{x_n} - e^{x_0}| = 0$

q.e.d.

9.6 Komposition stetiger Funktionen

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$.
f sei stetig in $x_0 \in D$, g stetig in $f(x_0) \in E \Rightarrow$
$g \circ f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0

Beweis

Sei $(x_n) \subseteq D, x_n \to x_0 \overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(x_n) \to f(x_0) \overset{g \text{ stetig}}{\Rightarrow} g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ q.e.d.

Beispiel

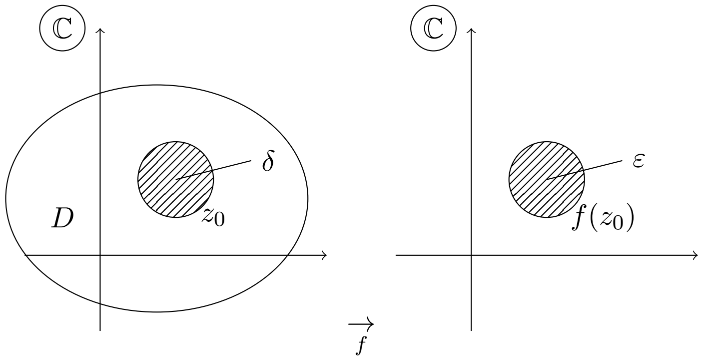
(1) $f(x) = e^{x^2} = e^{(x^2)}$ stetig auf $\mathbb{R}$.

(2) $f : D \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow |f| : D \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$ stetig auf D, da $|f| = |.| \circ f$

9.7 Definition: Stetigkeit komplexer Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}, f : D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \forall z \in D : |z - z_0| < \delta$$



f stetig auf $D :\Leftrightarrow f$ stetig in jedem $z_0 \in D$

9.8 Folgenkriterium für komplexe Funktionen

$f : D \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z_0 \in D \Leftrightarrow$

$$\forall (z_n) \subseteq D, z_n \to z_0 : f(z_n) \to f(z_0)$$

Beweis

Wörtlich wie für $\mathbb{R}$ (9.2)

9.9 Beispiele

(1) Jedes Polynom $p(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathcal{P}_\mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$, denn:
$z_n \to z_0 \in \mathbb{C} \underset{\text{Regeln für Grenzwerte}}{\Rightarrow} p(z_n) \to p(z_0) \underset{\text{Folgenk. 9.8}}{\Rightarrow} p$ stetig in z_0

(2) $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ ist stetig auf $\mathbb{C}$
Beweis: Wörtlich wie Satz 9.5 (reeller Fall)

Die Regeln 9.3 sowie 9.6 (Summen, Produkte, Quotienten, Komposition) gelten entsprechend auch für komplexe Funktionen.

9.10 Korollar

$cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis (für cos und sin analog)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}, (x_n) \subseteq \mathbb{R} : x_n \to x_0$
$cos\ x = \text{Re}\ (e^{ix})$
$x_n \to x_0 \Rightarrow ix_n \to ix_0$ (in $\mathbb{C}$) $\underset{exp\text{ stetig}}{\Rightarrow} e^{ix_n} \to e^{ix_0} \Rightarrow cos(x_n) = \text{Re}\ (e^{ix_n}) \underset{6.16}{\to} \text{Re}\ (e^{ix_0}) = cos(x_0)$
$\Rightarrow cos$ ist stetig in x_0. q.e.d.

Grenzwerte bei Funktionen

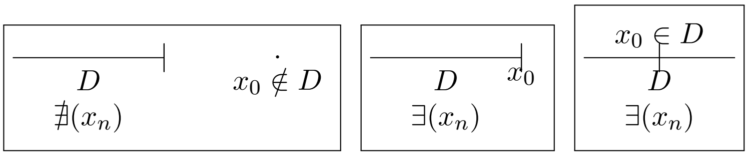
Beispiel: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wie sieht f nahe 0 aus?

Betrachte $f(x_n)$ für $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$

9.11 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ Funktion und $\underline{x_0 \in \mathbb{R}}$.
Man sagt: f konvergiert für $x \to x_0$ gegen $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} :\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq D, x_n \to x_0 : f(x_n) \to c$

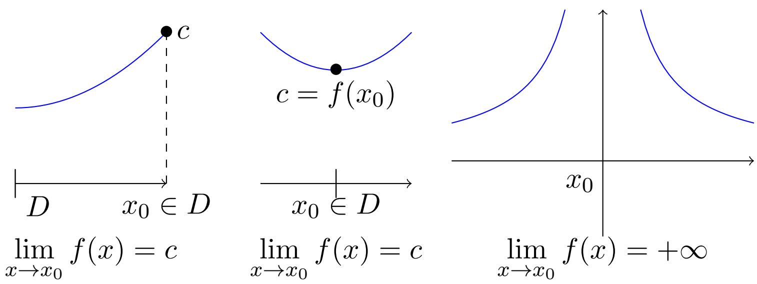
Dabei wird vorausgesetzt, dass es mindestens eine Folge $(x_n) \subseteq D$ gibt mit $x_n \to x$.
c: Grenzwert von f in x_0
Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to x_0$



Beachte:

(1) Falls $x_0 \in D \Rightarrow x_n = x_0$ wählbar $\forall n$ (konstante Folge).
Also: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow c = f(x_0)$
Und: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f$ stetig in x_0 (nach Folgenkriterium 9.2).

(2) Falls $c \in \{\pm\infty\}$ ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ uneigentlicher Grenzwert



Beachte

Falls $x_0 \notin D$: Dann $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \Leftrightarrow$ die Fortsetzung

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), x \in D \\ c, x = x_0 \end{cases}, \tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$$

ist stetig in x_0

9.12 Korollar

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

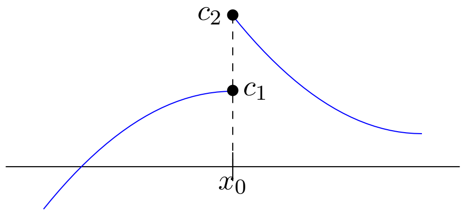
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - c| < \varepsilon \forall x \in D : |x - x_0| < \delta$$

9.13 Einseitige Grenzwerte

Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt rechtsseitiger Grenzwert von f in $x_0 :\Leftrightarrow$
$\lim\limits_{\{x \in D : x > x_0\}, x \to x_0} f(x) = c$

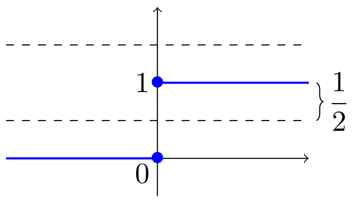
Schreibweise: $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = c$
Analog: Linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim\limits_{\{x \in D : x < x_0\}, x \to x_0} f(x)$



9.14 Beispiele

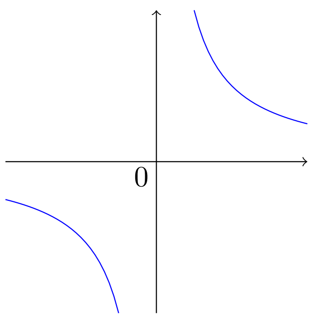
(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \underbrace{(x+1)}_{\text{stetig in } x=1} = 2$

(2) Heaviside-Funktion: $H(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$



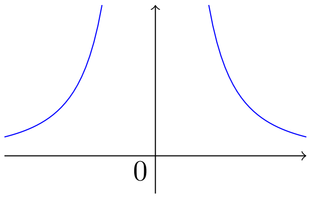
$\lim\limits_{x \uparrow 0} H(x) = 0$ (denn: $(x_n) \subseteq \mathbb{R}, x_n < 0, x_n \to 0 \Rightarrow H(x_n) = 0$)
$\lim\limits_{x \downarrow 0} H(x) = 1 = H(0)$
$\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ existiert nicht

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty$, denn:
$x_n \downarrow 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to +\infty$
$\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = -\infty$

Dagegen: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



(4) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$

$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$

<u>Beweis</u>: $|e^x - 1 - x| \leq |x^2|$ für $|x| \leq 1$ (Restgliedabschätzung, 8.12)

$\Rightarrow \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$ für $|x| \leq 1$, $x \neq 0$

Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Folge mit $x_n \to 0 \Rightarrow$ für n groß genug

$\left| \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - 1 \right| \leq |x_n| \underset{n \to \infty}{\to} 0 \Rightarrow \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \to 1$

<u>Alternativer Beweis</u> mit Korollar 9.12 (ε-δ-Bed.)

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. (*) $\Rightarrow \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ für alle $x \neq 0$ mit $|x| < \varepsilon$ (o.E. $\varepsilon < 1$)

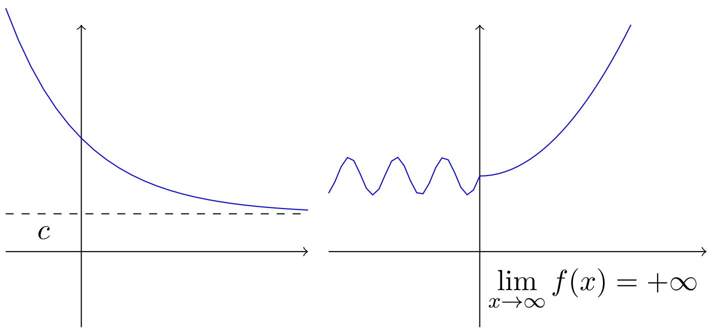
$\underset{9.12}{\Rightarrow}$ Behauptung q.e.d.

9.15 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} :\Leftrightarrow$

$\forall (x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to +\infty$ gilt $f(x_n) \to c$



Analog: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, falls D nach unten unbeschränkt.

Beispiel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$

(denn: $x_n \to \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$)

9.16 Regeln für Grenzwerte von Funktionen

Ergeben sich aus den Regeln für Folgen-Grenzwerte (ab 5.2), z.B.:
$f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \to a, g(x) \to b$ für $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

(1) $f(x) \dot{+} g(x) \to a \dot{+} b$ für $x \to x_0$,

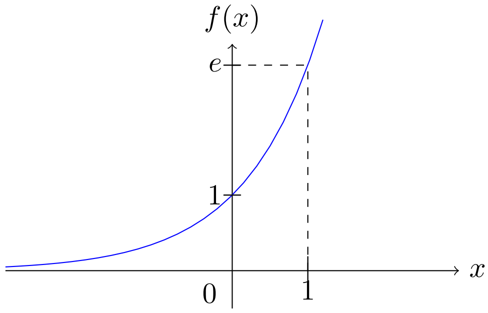
$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ sofern $b \neq 0$

(2) $f \leq g$ auf $D \Rightarrow a \leq b$

Ferner: $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to x_0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to 0$ für $x \to x_0$

9.17 Beispiele

(1) $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty}$ (*)



Das heißt: e^x wächst für $x \to +\infty$ schneller als jede Potenz von x.

<u>Ferner</u>: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x \underset{y=-x}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} (-1)^n \dfrac{y^n}{e^y} \underset{(*)}{=} 0$

<u>Beweis von (*)</u>: $x > 0 \Rightarrow e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \dfrac{e^x}{x^n} > \dfrac{x}{(n+1)!} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$

$\Rightarrow \dfrac{e^x}{x^n} \to +\infty$ q.e.d.

(2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$ $\quad \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} \pm \dots$

<u>Beweis</u>: Einschließungslemma (8.20): $0 < x \leq 2 \Rightarrow 1 - \dfrac{x^2}{3} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ ($\square$)

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist gerade in x, d.h. $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow$ ($\square$) gilt $\forall |x| \leq 2, x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right) = 1 \underset{5.8}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Sätze über stetige Funktionen

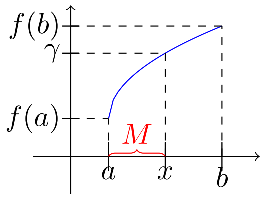
Erinnerung: $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq D \text{ mit } x_n \to x_0 : f(x_n) \to f(x_0)$$

9.18 Zwischenwertsatz (ZWS)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.
Das heißt: γ zwischen $f(a)$ und $f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b] : f(x) = \gamma$



Beweis

Sei etwa $f(a) \le f(b)$, o.E. $f(a) < \gamma < f(b)$
$M := \{t \in [a, b] : f(t) \le \gamma\}, M \neq \emptyset$ (da $a \in M$), beschränkt
$\Rightarrow x := sum\ M$ existiert, $x \in [a, b]$

Behauptung: $f(x) = \gamma$

Dazu: $x = sum\ M \Rightarrow \exists$ Folge $(t_n) \subseteq M : x - \dfrac{1}{n} < t_n \le x$
$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x; f(t_n) \le \gamma$
f stetig $\Rightarrow f(x) = \lim f(t_n) \le \gamma < f(b)$, Insbes.: $x < b$
Wähle Folge (s_n) in $(x, b]$ mit $s_n \to x$
$\Rightarrow f(s_n) > \gamma$ (da $s_n \notin M$) und $f(x) = \lim f(s_n) \ge \gamma$ (Vergleichskriterium für Folgen, 5.8).

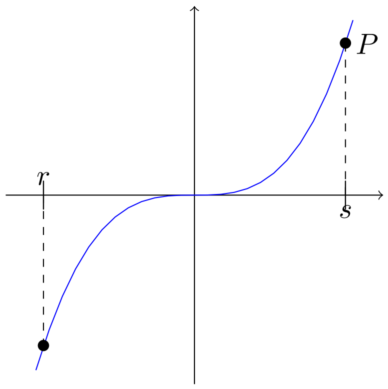
Zus.: $f(x) = \gamma$ q.e.d.

Beispiel

$f(x) = x + e^x - 2$ hat Nullstelle auf $[0, 2]$
Denn: $f(0) = 1 - 2 < 0, f(2) = e^2 > 0$
$\underset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists x \in [0, 2] : f(x) = 0$

9.19 Satz: Nullstellen von Polynomen

Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ ein reelles Polynom ungeraden Grades.
$\Rightarrow p$ hat mindestens eine reelle Nullstelle.



Beweis

p habe o.E. Leitkoeffizienten 1, das heißt $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$
$\underset{x \neq 0}{=} x^n \underbrace{(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n})}_{=:h(x)}$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = 1$
$\Rightarrow \exists s > 0 : h(s) > 0, \exists r < 0 : h(r) > 0$
$\Rightarrow p(s) = s^n \cdot h(s) > 0; p(r) = r^n \cdot h(r) < 0$ (n ungerade)
ZWS (9.18) $\Rightarrow \exists x \in [r, s] : p(x) = 0$ q.e.d.

Bezeichnung

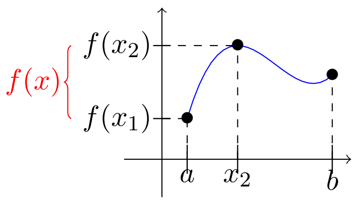
(1) Ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ heißt auch kompakt.

(2) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt $:\Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in D$

9.20 Satz: Maximum und Minimum

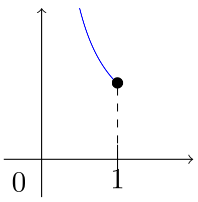
Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$\underbrace{f(x_1)}_{min\ f(x) \in [a,b]} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{max\ f(x) \in [a,b]} \quad \forall x \in [a,b]$$

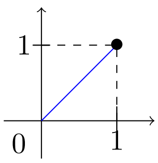


Beispiel (zu Notwendigkeit d. Vorauss.)

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ auf $\underbrace{(0,1]}_{\text{nicht komp.!}}$, f unbeschränkt



(b) Auf $[0,1] : f(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1) \\ 0, x = 1 \end{cases}$, f unstetig, nimmt kein Maximum an.



Beweis

Nachweis des Maximums (Minimum analog)

$s := sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($s := +\infty$, falls f nach oben unbeschr.)

Def. von $sup \Rightarrow \exists$ Folge $(x_n) \subseteq [a,b] : f(x_n) \to s$

(x_n) beschränkt $\Rightarrow$ (Bolzano-Weierstraß, 5.12) (x_n) hat konv. Teilfolge (s_{n_k}).

Sei $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. $a \leq x_{n_k} \leq b \forall k \Rightarrow a \leq x \leq b$

f stetig $\Rightarrow \underbrace{f(x_{n_k})}_{\to s \text{ wegen } (*)} \to f(x) \Rightarrow s = f(x) < \infty \wedge s = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ q.e.d.

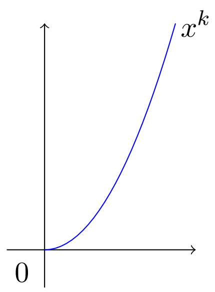
§10 Monotone Funktionen und ihre Umkehrfunktion

10.1 Definition

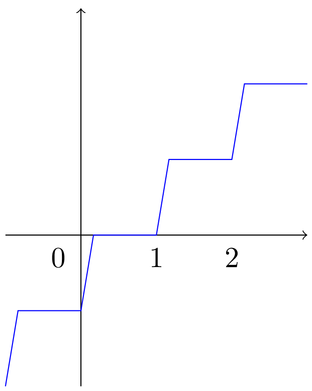
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$; $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend [fallend] $:\Leftrightarrow \forall x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$ $[f(x) \geq f(y)]$
Ist sogar stets $f(x) < f(y)$ $[f(x) > f(y)]$, so heißt f streng monoton wachsend [fallend].

Beispiel

(1) Potenzfunktion $x \mapsto x^k$ $(k \in \mathbb{N})$ streng monton wachsend (s.m.w.) auf $[0, \infty)$

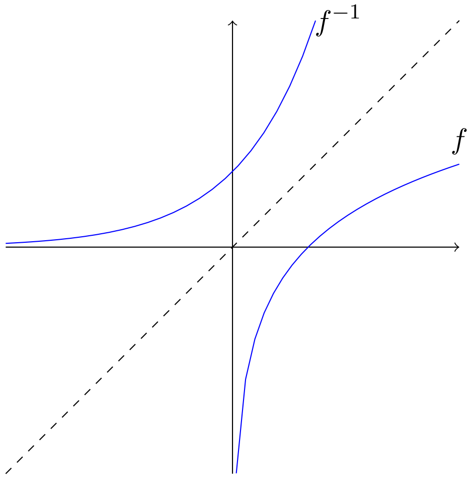


(2) Floor-Funktion $x \mapsto \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend, aber nicht streng monoton, nicht injektiv



10.2 Lemma

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ s.m.w. [s.m.f.] $\Rightarrow f : D \to f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ ist bijektiv, und $f^{-1} : f(D) \to D$ ist s.m.w. [s.m.f.]



Beweis

$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ (*)
(zu "$\Leftarrow$" ang.: $x \geq y \underset{\text{s.m.w.}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(y)$ ↯)
$\Rightarrow f$ injektiv, also $f : D \to f(D)$ bijektiv und aus "$\Leftarrow$" in (*): f^{-1} s.m.w.

10.3 Satz: Stetigkeit der Umkehrfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ s.m.w. und stetig.
$\Rightarrow f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv und f^{-1} ist ebenfalls s.m.w. und auch stetig.

Beweis

f stetig $\underset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} f$ nimmt jeden Wert aus $[f(a), f(b)]$ an (und keine sonstigen wegen Monotonie).
Ferner: $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ s.m.w. (10.2)

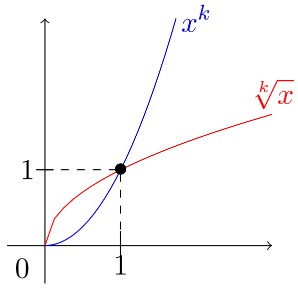
f^{-1} stetig:
Sei $y_0 \in [f(a), f(b)], y_0 = f(x_0)$
Hier: Fall $a < x_0 < b$ ($x_0 \in \{a, b\}$) analog)
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, o.E. so klein, dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq [a, b]$
$\alpha := f(x_0 - \varepsilon), \beta := f(x_0 + \varepsilon)$
$\alpha < y_0 < \beta$ (für s.m.w.)

Sei $y \in [\alpha, \beta] \underset{f^{-1}\text{ s.m.w}}{\Rightarrow} \underbrace{f^{-1}(\alpha)}_{x_0-\varepsilon} \leq f^{-1}(y) \leq \underbrace{f^{-1}(\beta)}_{x_0+\varepsilon}$
$\Rightarrow |f^{-1}(y) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{=x_0}| < \varepsilon \forall y \in [\alpha, \beta]$
$\Rightarrow f^{-1}$ stetig in y_0 q.e.d.

10.4 Beispiel: Wurzel-Funktion

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Potenzfunktion: $f(x) = x^k, [0,\infty) \to [0,\infty)$
f stetig und s.m.w., f auch bijektiv, denn:
$y \geq 0 \Rightarrow \exists! x \geq 0 : x^k = y$, nämlich $x = \sqrt[k]{y}$
Umkehrfunktion: $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[k]{x}, [0,\infty) \to [0,\infty)$ k-te Wurzelfunktion.

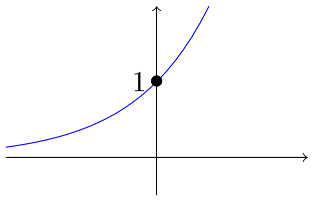
Streng monoton wachsend nach Lemma 10.2, außerdem stetig auf $[0,\infty)$, denn:
Sei $R > 0$ beliebig $\Rightarrow f : [0, \sqrt[k]{R}] \to [0, R]$ bijektiv $\underset{10.3}{\Rightarrow}$ f^{-1} stetig auf $[0, R]$ $\underset{R \text{ bel.}}{\Rightarrow}$ f^{-1} ist $[0,\infty)$.



Der natürliche Logarithmus (logarithmus naturalis)

10.5 Lemma

$exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), x \mapsto e^x$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.



Beweis

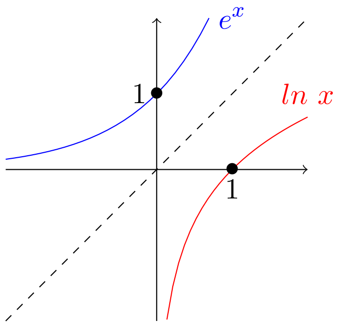
Stetigkeit, Satz 9.5, Strenge Monotonie

Sei $x \in \mathbb{R}, h > 0 \Rightarrow e^{x+h} - e^x = \underbrace{e^x}_{>0}(e^h - 1) = e^x \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!}}_{>0} > 0$

$\Rightarrow exp$ ist injektiv.
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
exp stetig $\underset{\text{ZWS}}{\Rightarrow}$ exp nimmt jeden Wert aus $(0, \infty)$ an $\Rightarrow exp$ ist surjektiv.

Konsequenz

$exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ hat eine Umkehrfunktion $ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, den <u>natürlichen Logarithmus</u> (logarithmus naturalis).
ln ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.



Spezielle Werte

$ln\ 1 = 0$
$ln\ e = 1$
$\lim\limits_{x \downarrow 0} ln\ x = -\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} ln\ x = +\infty$ (aus Graphen ablesen)

10.6 Satz

(1) $x, y > 0 \Rightarrow \boxed{ln(xy) = ln\ x + ln\ y}$ Funktionalgleichung

(2) $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln\ x$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$

Beweis

(1) $e^{ln(xy)} = xy = e^{ln\ x} \cdot e^{ln\ y} = e^{ln\ x + ln\ y} \underset{exp\text{ bij.}}{\Rightarrow} ln(xy) = ln\ x + ln\ y$

(2) $ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = ln\ 1 = 0$, anderersetis: $ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \underset{(1)}{=} ln\ x + ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(3) $y := ln(1+x) \Leftrightarrow x = e^y - 1, x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$ (9.14, 4)

q.e.d.

Exponentialfunktion zu allgemeinen Basen

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Ziel: Definition von $a^x, x \in \mathbb{R}$.
$x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \Rightarrow a^p q := \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{(e^{ln\ a})^p} \underset{\text{FG}}{=} \sqrt[q]{e^{p\ ln\ a}} = e^{\frac{p}{q} ln\ a}$

10.7 Definition: Exponentialfunktion zu allgemeinen Basen

$\boxed{exp_a(x) = a^x := e^{x\ ln\ a}}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$.

10.8 Eigenschaften

(1) $a^0 = 1$; $q \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$

(2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}}$
Denn: $a^{x+y} = e^{(x+y) ln\ a} = e^{x\ ln\ a} \cdot e^{y\ ln\ a} = a^x \cdot a^y$

(3) $a, b > 0 \Rightarrow a^x b^x = (ab)^x$; $(a^x)^y = a^{xy}$ (Übung)

(4) $exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv und stetig (Kompos. stetige Funktion)

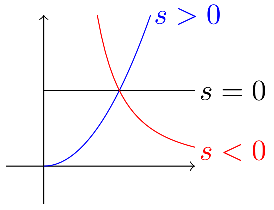
(5) $a > 1 \underset{ln\ a > 0}{\Rightarrow} exp_a$ s.m.w. auf $\mathbb{R}$
$a < 1 \underset{ln\ a < 0}{\Rightarrow} exp_a$ s.m.f. auf $\mathbb{R}$

Konsequenz aus (4) und (5): $exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$; $a \neq 1$ ($exp_1 \equiv 1$) hat eine Umkehrfunktion $log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, den Logarithmus zur Basis a, streng monoton wachsend (falls $a > 1$) bzw. fallend (falls $a < 1$), stetig und bijektiv

Insbes.: $exp_e = exp$, $log_e = ln$
Wichtig in der Informatik: $a = 1, log_2$

Potenzfunktionen

Fixiere Exponenten $s \in \mathbb{R}$.
$\boxed{p_s(x) := x^s = e^{s\ ln\ x},\ x \in (0,\infty)}$ ist die <u>Potenzfunktion zum Exponenten s</u>.
Speziell: $p_{1/2}(x) = \sqrt{x}$, $p_{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$
p_s ist stetig auf $(0,\infty)$ (Kompos. stetiger Funktion)



Sei $s > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \downarrow 0} p_s(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} e^{s\ ln\ x} = 0$
$\Rightarrow p_s$ ist stetig fortsetzbar in 0 mit $p_s(0) = 0$

§11 Differentialrechnung

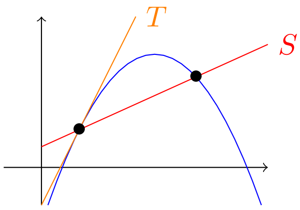
11.1 Definition: Die Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f heißt <u>differenzierbar</u> in $x_0 \in D$, falls $f'(x_0) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \neq x_0)}} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differenzenquotient in } x_0} \in \mathbb{R}$ existiert.

Bezeichnung

f ist differenzierbar auf $D :\Leftrightarrow f$ ist differenzierbar in allen $x_0 \in D$
$f'(x_0)$: <u>Ableitung</u> von f im Punkt x_0

Geometrische Deutung



Bez.: ***S**ekante,* ***T**angente*

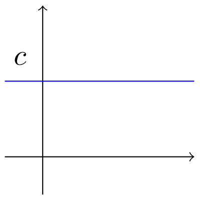
Gleichung der Geraden durch p_0 und p

$S(t) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Steigung}} \cdot (t - x_0),\ t \in \mathbb{R}$

Falls $f'(x_0)$ existiert, so geht mit $x \to x_0$ die Sekante in die Tangente an dem Graphen Γ_f im Punkt p_0 über; deren Gleichung ist:
$T(t) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (t - x_0),\ t \in \mathbb{R}$

11.2 Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ (konst. Funktion) mit $c \in \mathbb{R}$



$f(x) - f(x_0) = 0 \forall x \Rightarrow f$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f' \equiv 0$ (identisch 0)

(2) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1} x + x_0^{n-1} \underset{x \to x_0}{\to} n x_0^{n-1}$$

f differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

<u>Bemerkung</u>: Bezeichnung: $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$

(3) $f(x) = e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\boxed{\frac{d}{dx}(e^{ax}) = a \cdot e^{ax}}$

Insbes.: $exp' = exp$ $(a = 1)$

Denn: Sei $a \neq 0$. $\frac{e^{ax} - e^{ax_0}}{x - x_0} \underset{h := x - x_0}{=} \frac{e^{a(x_0 + h)} - e^{ax_0}}{h}$

$$\underset{\text{FG}}{=} a \cdot e^{ax_0} \cdot \underbrace{\frac{e^{ah} - 1}{ah}}_{\to 1 \text{ für } h \to 0} \underset{h \to 0}{\to} a \cdot e^{ax_0}$$

Formel gilt auch, falls $a = 0$: $\frac{d}{dx}(1) = 0$

(4) $\boxed{ln'(x) = \frac{1}{x}}$ $(x > 0)$

Denn: $x > 0, h \neq 0 \Rightarrow \frac{ln(x+h) - ln\ x}{h} \underset{\text{FG von } ln}{=} \frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \underbrace{\frac{ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1 \text{ für } h \to 0 \text{ (10.6)}} \cdot \frac{1}{x}$

(5) $\boxed{\begin{array}{l} sin'(x) = cos(x) \\ cos'(x) = -sin(x) \end{array}}$ $(x \in \mathbb{R})$

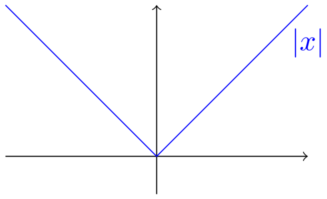
<u>Beweis für sin</u> (cos analog): $h \neq 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} \underset{\text{Add.Thm.}}{=} \frac{sin(x) \cdot cos(h) + cos(x) \cdot sin(h) - sin(x)}{h}$$

$$= sin(x) \cdot \underbrace{\frac{cos(h) - 1}{h}}_{(*) \to 0 \text{ für } h \to 0} + cos(x) + \underbrace{\frac{sin(h)}{h}}_{\to 1 \text{ für } h \to 0}$$

Zu (*): $\frac{cos(h) - 1}{h} = h \cdot \underbrace{\frac{cos(h) - 1}{h^2}}_{\to \frac{1}{2} \text{ für } h \to 0 \text{ Übg.}} \to 0$ q.e.d.

(6) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$



f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

f ist nicht differenzierbar in 0.

$\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{|x| - 0}{x} = +1$

$\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{|x| - 0}{x} = -1$

11.3 Satz: Differenzierbarkeit und Stetigkeit

f sei differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ ist stetig in x_0.

Beweis

Sei $x \neq x_0$.

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \to 0$ für $x \to x_0 \Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

11.4 Satz: Ableitungsregeln

Seien f, g differenzierbar in $x_0 \in D$

$\Rightarrow f + g, f \cdot g$ sind differenzierbar in x_0 und im Fall $g(x) \neq 0$ auch $\dfrac{f}{g}$.

Dabei gelten:

(1) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
$c \in \mathbb{R} \Rightarrow (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

(2) Produktregel: $(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(3) Quotientenregel: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

11.5 Beispiele

(1) Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom.
$\underset{11.2 + \text{Regeln}}{\Rightarrow} p$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$

(2) $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow R$ differenzierbar auf $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$
Beispiel: $R(x) = \dfrac{1}{x^k}(k \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $R'(x) \underset{\text{Q-R}}{=} -\dfrac{n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
Beweis: $\dfrac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \underbrace{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} + f(x) \cdot \underbrace{\left(\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)}_{\to g'(x)}$
für $h \to 0$

(3) $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$
$\Rightarrow \left(\dfrac{f}{0}\right)' \underset{\text{Produktr.}}{=} \dfrac{f'}{g} + f \cdot \left(\dfrac{-g'}{g^2}\right) = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

11.6 Satz: Kettenregel

Seien $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen.
f sei differenzierbar in $x_0 \in D$, g sei differenzierbar in $f(x_0)$
$\Rightarrow g \circ f$ ist differenzierbar in x_0 mit $\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Nachdiff. von } f}}$

11.7 Beispiele

(1) $p_s(x) = x^s$ mit $x > 0$ und $s \in \mathbb{R}$
$p_s(x) = e^{s \cdot ln(x)}$
Kettenregel mit $f(x) = ln(x)$, $g(y) = e^{sy}$
$\overset{ln'(x) = \frac{1}{x}}{\Rightarrow} p_s'(x) = s \cdot e^{s \cdot ln(x)} \cdot \dfrac{1}{x} = s \cdot x^{s-1}$

(2) f differenzierbar in $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

(3) $f > 0 \Rightarrow (ln(f))' = \dfrac{f'}{f}$ "logarithmische Ableitung von f"

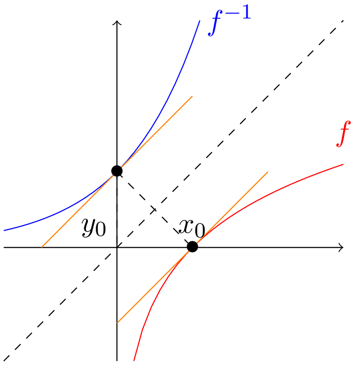
Idee zum Beweis der Kettenregel

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\overset{?}{\to} g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0) \text{ für } x \to x_0}$$

Nicht präzise, da für $x \to x_0$ $(x \neq x_0)$ zwar $f(x) \to f(x_0)$ gilt,
aber $f(x) = f(x_0)$ in einer Umgebung von x_0 sein kann (z.B. falls f konstant $\Rightarrow$ Division durch 0).
Dies kann repariert werden. q.e.d.

11.8 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, und differenzierbar in $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$
f^{-1} differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$



Beweis

Satz 10.3 + Lemma 10.2 $\Rightarrow f : D \to f(D)$ bijektiv, und f^{-1} stetig.
Betrachte $y_0, y \in f(D), y \neq y_0, y \to y_0 \Rightarrow x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$
$\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ q.e.d.

Beispiel

$\ln y$ ist Umkehrfunktion von $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$ (wie gehabt)

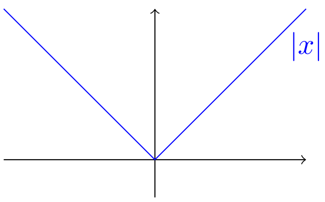
Einseitige Ableitungen

Sei $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$
Existiert nur $\lim\limits_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_-(x_0)$
bzw. $\lim\limits_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0)$,
so heißt dieser Grenzwert die linksseitige bzw. rechtsseitige Ableitung von f in x_0.

Beispiel

$f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in 0.

$f'_+(0) = \lim\limits_{x \downarrow x_0} \frac{|x|}{x} = 1$
$f'_-(0) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} \frac{|x|}{x} = -1$



Höhere Ableitungen

Betrachte $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$, f sei differenzierbar auf einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ um x_0.
Ist f' differenzierbar in x_0, so heißt f 2-mal differenzierbar in x_0.

Bezeichnung

$$f''(x_0) := \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) := (f')'(x_0)$$

Für $n \geq 2$: n-te Ableitung von f in x_0:
$f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$
$f^{(n)}(x_0) := (f^{n-1})'(x_0)$ sofern existent

f heißt dann n-mal differenzierbar in x_0.

Bezeichnung

f n-mal stetig differenzierbar auf D $:\Leftrightarrow$
$f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, \dots, f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ existieren und sind stetig auf D.

$C^n(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$

Extrema und Mittelwertsatz

11.9 Definition: Extrema

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f hat in $x_0 \in D$ ein

- globales Maximum $:\Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) \forall x \in D$
- lokales Maximum $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq f(x_0) \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$

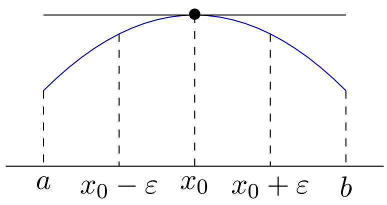
Dieses heißt isoliert, falls zusätzlich $f(x) < f(x_0) \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon, x \neq x_0$.
Analog: globales/lokales Minimum.

11.10 Notwendiges Kriterium für lokale Extrema

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$.
f habe in x_0 lokales Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Beweis

f habe in x_0 lokales Maximum.
$\varepsilon > 0$ klein genug $\Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \\ \geq 0 & \text{für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$ q.e.d.

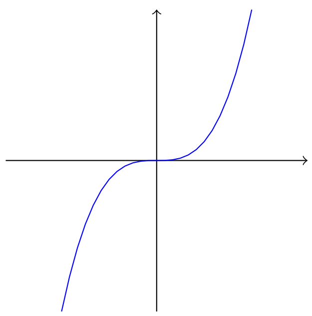


Beachte

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ habe in x_0 ein lokales Extremum, und f ist differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
Dieses Kriterium ist notwendig, aber nicht hinreichend!

Beispiel

$f(x) = x^3, f'(0) = 0$, aber kein Extremum in 0



11.11 Vorgehen bei der Suche nach Extrema

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Satz von Maximum und Minimum $\Rightarrow f$ nimmt auf $[a, b]$ globales Maximum und globales Minimum an.

Kandidaten

(a) Punkte $x \in (a, b)$, wo f differenzierbar mit $f'(x) = 0$

(b) Randpunkte a, b

(c) Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist

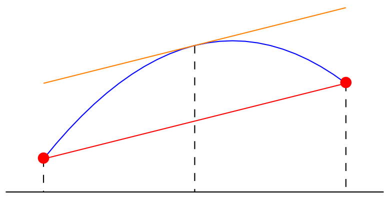
Globale/Lokale Extrema durch Vergleich der Funktionswerte

Falls $f : I \to \mathbb{R}$, I unbeschränktes Intervall: Untersuche auch $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

11.12 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b)

$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : \boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$ (Steigung der Sekanten)



Spezialfall: Satz von Rolle

Ist zusätzlich $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Beweis

(I) Für Rolle: f stetig auf $[a, b] \Rightarrow f$ nimmt auf $[a, b]$ ein globales Maximum und Minimum an. Falls beide am Rand $\underset{f(a)-f(b)}{\Rightarrow} f = \text{konst.} \Rightarrow f' = 0$ auf (a, b) (fertig).
Andernfalls nimmt f ein Extremum in einem $\xi \in (a, b)$ an $\Rightarrow f'(\xi) = 0$

(II) Reduktion des Mittelwertsatzes auf Rolle:
Betrachte: $g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$
$\Rightarrow g(a) = f(a) = g(b) \Rightarrow g$ erfüllt Voraussetzung von Rolle
$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

q.e.d.

11.13 Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

(1) $f' > 0$ auf $(a, b) \Rightarrow f$ s.m.w. auf (a, b)

(2) $f' < 0$ auf $(a, b) \Rightarrow f$ s.m.f. auf (a, b)

(3) $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend auf (a, b)

(4) $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend auf (a, b)

(5) $f' \equiv 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend und monoton fallend $\Leftrightarrow f$ konstant auf (a, b)

Falls f stetig auf ganz $[a, b]$, so gelten die Aussagen über Monotonie und Konstanz auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$.

Beweis

Sei $a < x < y < b$ (bzw. $a \leq x < y \leq b$ falls f stetig auf $[a, b]$)
MWS $\Rightarrow \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi)$ mit geeignetem $\xi \in (x, y)$

(1) $f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f$ s.m.w.

(2) und „$\Rightarrow$“ in (3),(4) analog

Zu „$\Leftarrow$“ in (3): Sei $x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{y \downarrow x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$
(4) analog, (5) aus (3)+(4) q.e.d.

Beachte

In (1),(2) gilt nicht „$\Leftarrow$“. Beispiel: $f(x) = x^3$, s.m.w. auf $\mathbb{R}^3$, $f'(0) = 0$

Anwendung von (5)

Betrachte $f(x) = e^{ax}, f'(x) = a \cdot e^{ax} = a \cdot f(x)$
Das heißt, $f(x) = e^{ax}$ genügt der Differentialgleichung $f' = af$ auf $\mathbb{R}$

11.14 Korollar

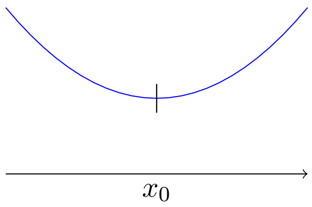
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und erfülle $f' = af$ auf $\mathbb{R}$ mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = c \cdot e^{ax}$ mit $c = f(0)$

Beweis

Trick: $g(x) := e^{-ax} f(x) \underset{\text{Produktr.}}{\Rightarrow} g'(x) = -ae^{-ax} f(x) + e^{-ax} \overbrace{f'(x)}^{af(x)} = 0$
$\underset{(5)}{\Rightarrow} g = \text{konstant} = g(0) = f(0) = c$ q.e.d.

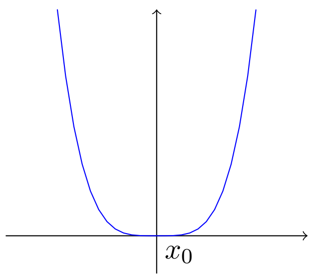
11.15 Kriterium für lokale Extrema

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und in $x_0\in(a,b)$ 2-mal differenzierbar.



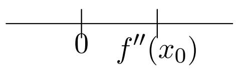
Sei $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$ $[f''(x_0)<0]$ $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Minimum [lokales Maximum].

Vorsicht: „$\Leftarrow$“ gilt nicht!
Beispiel: $f(x)=x^4$ hat lok. Minimum in 0, aber $f'(0)=f''(0)=0$

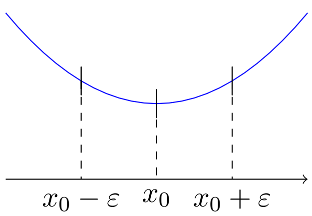


Beweis (für Minimum)

$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0$
$\Rightarrow \exists\varepsilon>0: \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0 \forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon), x\neq x_0$



Da $f'(x_0)=0$ ist, folgt:
$f'(x)>0$ auf $(x_0,x_0+\varepsilon)$, das heißt, f ist dort s.m.w.
$f'(x)<0$ auf $(x_0-\varepsilon,x_0)$, das heißt, f ist dort s.m.f.
$\Rightarrow$ Behauptung. q.e.d.



11.16 Regel von de L'Hospital (nützliche Regel zur Berechnung von Grenzwerten)

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar, mit $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

Es gelte:

(i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \downarrow a$ oder

(ii) $g(x) \to \pm\infty$ für $x \downarrow a$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, sofern der Grenzwert rechts in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert.

Entsprechendes gilt für $x \uparrow b, x \to \pm\infty$

Beweis

Hier ohne Beweis.

Beispiele

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

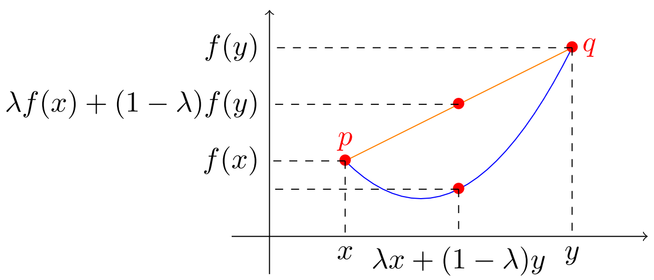
(2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x \cdot \cos x + \sin x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin x}{2 \cos x - x \cdot \sin x} \underset{\text{L'Hos.}}{=} 0$
Existenz des Grenzwerts ergibt sich „von hinten nach vorne“

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$

11.17 Definition: Konvexität

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall.
$f : D \to \mathbb{R}$ ist konvex $:\Leftrightarrow \forall x, y \in D \wedge \lambda \in (0, 1)$ gilt: $f'(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) f(y)$
f konkav auf D $:\Leftrightarrow$ „$\geq$“ in obiger Ungleichung

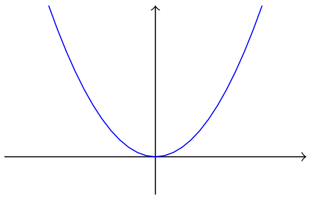
Geometrische Darstellung von Konvexität



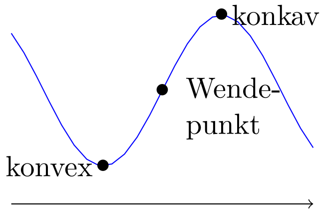
Die Sekante druch p und q liegt im Bereich $[x, y]$ oberhalb des Graphen von f

Beispiele

(1) $f(x) = x^2$ ist konvex auf $\mathbb{R}$



(2)



11.18 Konvexitätskriterium

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad f'' \geq 0 \text{ auf } (a,b) \\ f \text{ konkav} \quad &\Leftrightarrow \quad f'' \leq 0 \text{ auf } (a,b) \end{aligned}$$

Beweis

Hier nur „$\Leftarrow$“ $f'' \geq 0 \Rightarrow f'$ monoton wachsend auf (a, b)
Seien $x, y \in (a, b), \lambda \in (0, 1), z := \lambda x + (1 - \lambda) y$

$\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \underset{\text{MWS}}{=} f'(\xi)$ mit $\xi \in (x, z)$, $\dfrac{f(y) - f(z)}{y - z} \underset{\text{MWS}}{=} f'(\eta), \eta \in (z, y)$, insbes.: $\xi < \eta$

f' monoton $\Rightarrow f'(\xi) \leq f(\eta)$

$z - x = (1 - \lambda)(y - x)$; $y - z = \lambda(y - x)$

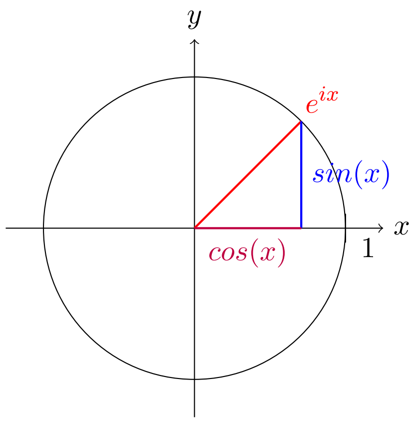
$\Rightarrow \dfrac{f(z) - f(x)}{1 - \lambda} < \dfrac{f(y) - f(z)}{\lambda}$

$\Rightarrow f(z) \left(\dfrac{1}{1 - \lambda} + \dfrac{1}{\lambda} \right) \leq \dfrac{f(x)}{1 - \lambda} + \dfrac{f(y)}{\lambda}$

$\Rightarrow f(z) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$ q.e.d.

§12 Trigonometrische Funktionen; Polarkoordinaten

Erinnerung (Kapitel §8): $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |e^{ix}| = 1$



$\cos x = \text{Re}\ (e^{ix}) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sin x = \text{Im}\ (e^{ix}) = \dfrac{e^{ix} - e^{-iy}}{2i}$
$\cos^2 x + \sin^2 x = |e^{ix}|^2 = 1$

$\sin, \cos$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$

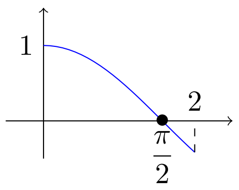
12.1 Satz + Definition

$\cos x$ hat auf $[0, 2]$ genau eine Nullstelle. Diese wird mit $\dfrac{\pi}{2}$ bezeichnet.

π ist die Kreiszahl, $\pi \approx 3,14159\ldots$
π ist irrational, sogar transzendent.

Beweis

$\cos 0 = 1 > 0$
Einschließungslemma: $x \in [0,2] \Rightarrow \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
$\Rightarrow \cos 2 \leq 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} < 0$
ZWS $\Rightarrow$ cos hat mindestens eine Nullstelle in $[0,2]$

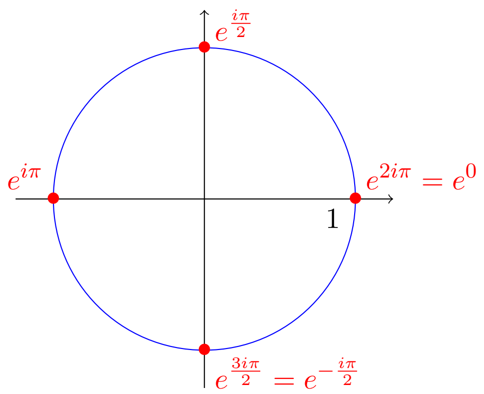


$x \in (0,2] \underset{\text{Einschl.}}{\Rightarrow} \sin x \geq x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > 0 \Rightarrow \cos' x = -\sin x < 0$ auf $(0,2]$
$\underset{11.13}{\Rightarrow} \cos x$ ist streng monoton fallend auf $(0,2] \Rightarrow$ hat nur eine Nullstelle q.e.d.

$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$ (da $\sin > 0$ auf $(0,2]$)
$\Rightarrow e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i$
FG für exp $\Rightarrow e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1$, etc.

Wertetabelle:

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2\pi}{2}$	2π
e^{ix}	i	-1	$-i$	1
$\cos x$	0	-1	0	1
$\sin x$	1	0	-1	0



$e^{2i\pi} = 1 \underset{\text{FG}}{\Rightarrow} e^{z+2i\pi} \underset{\text{FG}}{=} e^z \forall z \in \mathbb{C}$

12.2 Korollar: Periodizität von exp

$z \in \mathbb{C} \Rightarrow \boxed{e^{z+2\pi i} = e^z}$
$e^{z+i\pi} = -e^z$
$e^{z\pm\frac{i\pi}{2}} = \pm ie^z$

$z = ix, x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{i(x+2\pi)} = e^{ix};\ e^{i(x+\pi)} = -e^{ix};\ e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = \pm ie^{ix}$

Zerlege in Real- und Imaginärteile:

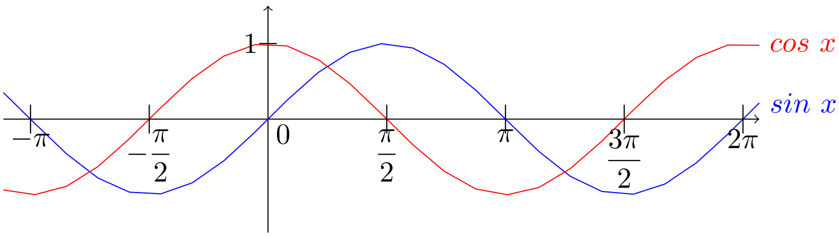
12.3 Korollar

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos, \sin$ sind $\underline{2\pi\text{-periodisch}}$

Ferner:
$\cos(x + \pi) = -\cos x$; $\sin(x + \pi) = -\sin x$; $\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin x$; $\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos x$

12.4 Satz

cos hat auf $\mathbb{R}$ genau die Nullstellen $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
sin hat auf $\mathbb{R}$ genau die Nullstellen $k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Beweis

$\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos$ hat auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nur $\frac{\pi}{2}$ als Nullstelle. $\cos(x + \pi) = -\cos x$
$\Rightarrow$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ hat es genau die Nullstellen $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
2π-Periodizität $\Rightarrow$ Behauptung für cos.
Für sin folgt daraus wegen $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ q.e.d.

12.5 Satz

(1) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$

(2) 2π ist die kleinste Periode von $\sin, \cos$

Beweis

(1) „$\Leftarrow$“ siehe oben.
„$\Rightarrow$“: Sei $e^z = 1, z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
$\Rightarrow 1 = |e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x \Rightarrow x = 0$
$\Rightarrow 1 = e^z = e^{iy} = \cos y + i \cdot \sin y \Rightarrow \cos y = 1, \sin y = 0$
$\Rightarrow y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ gerade $\Rightarrow z = 2l\pi i, l \in \mathbb{Z}$

(2) Angenommen, cos (und damit auch sin) hat eine Periode p mit $0 < p < 2\pi$.
$\Rightarrow e^{ip} = \cos p + i \cdot \sin p = \underbrace{\cos 0}_{=1} + i \cdot \sin 0 = 1$ $\lightning$ zu (1)

q.e.d.

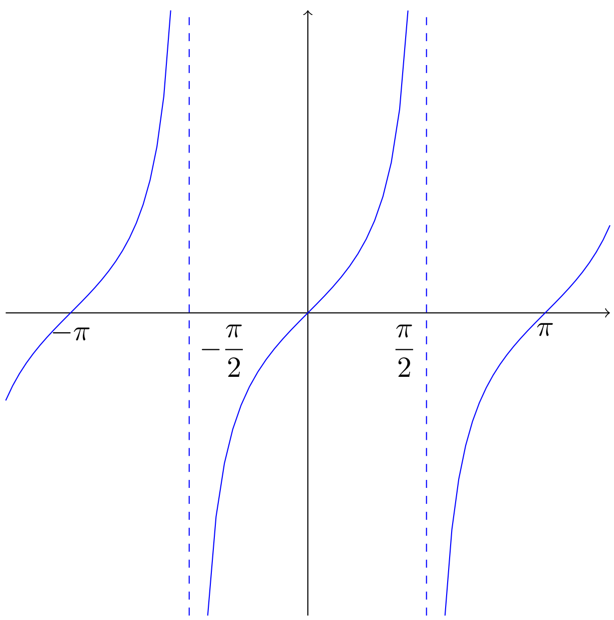
12.6 Definition: Tangens, Cotangens

$\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

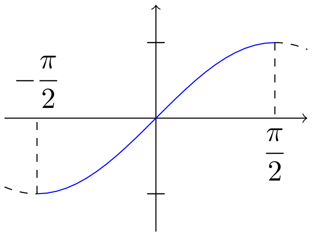
$\tan x, \cot x$ sind ungerade Funktionen und π-periodisch.
$\tan : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, s.m.w. und bijektiv (Übung).

Graph von Tangens



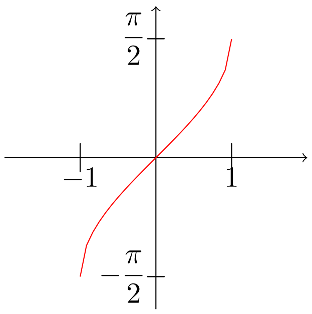
12.7 Definition: Arcus-Funktionen

(1) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ ist stetig (sogar differenzierbar), s.m.w. und bijektiv.



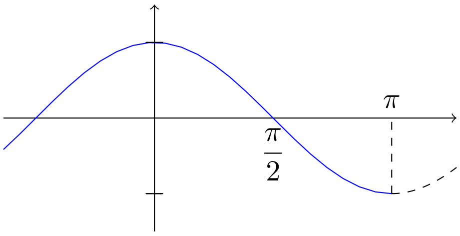
Denn: $\sin' x = \cos x > 0 \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\underset{11.13}{\Rightarrow}$ sin s.m.w. auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
$\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$
ZWS $\Rightarrow$ Bijektivitätsaussage

Umkehrfunktion: $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, der Arcus-Sinus

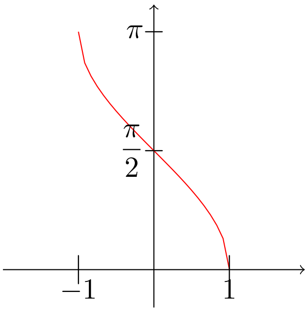


Ableitung: Satz 11.8 $\Rightarrow \arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$ mit $y = \sin x$, sofern $\sin' x = \cos x \neq 0$
$\cos x > 0 \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2} \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow \boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} \forall y \in (-1,1)$
(nicht differenzierbar in $y = \pm 1$, Graph hat dort vertikale Tangente)

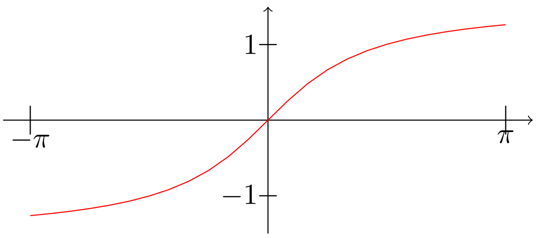
(2) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist stetig, s.m.f. und bijektiv (analog)



Umkehrfunktion: $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, der <u>Arcus-Cosinus</u>



(3) Umkehrfunktion von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$:
$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ebenfalls differenzierbar und s.m.w., der <u>Arcus-Tangens</u>



$\tan \frac{\pi}{4} = 1$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\arctan' y = \frac{1}{1 + y^2}}$ (Übung)

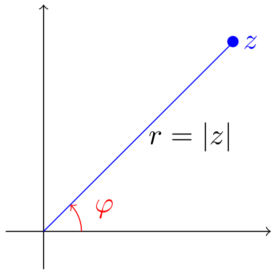
Polarkoordinaten

Erinnerung: $\varphi \in \mathbb{R} \Rightarrow \left|e^{i\varphi}\right| = 1$

12.8 Satz

Jedes $z \in \mathbb{C}$ ist darstellbar als $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z| \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$

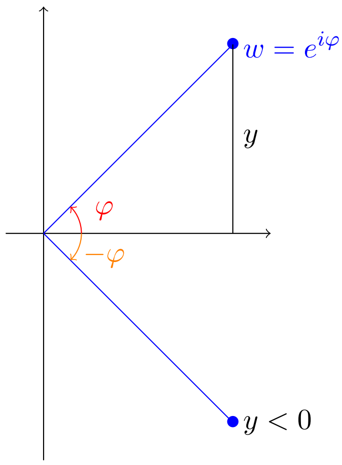
Für $z \neq 0$ ist φ eindeutig bis auf Addition von $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
(r, φ): Polarkoordinaten von z
φ: Argument von z. Übliche Wahl: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, oder $\varphi \in [0, 2\pi)$



Beweis

$z = 0 \Rightarrow r = 0, \varphi$ beliebig
Sei $z \neq 0 \Rightarrow r := |z| \neq 0, w := \dfrac{z}{r} \Rightarrow |w| = 1$
$w = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1$, insbes. $x \in [-1, 1]$

Setze $\varphi := \arccos x \in [0, \pi]$.
$\Rightarrow x = \cos\varphi$
$y = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \pm\underbrace{\sin\varphi}_{\geq 0}$



1. Fall: $y \geq 0 \Rightarrow y = \sin\varphi \Rightarrow w = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}$
2. Fall: $y < 0 \Rightarrow y = -\sin\varphi = \sin(-\varphi) \Rightarrow w = e^{-i\varphi}$

Zur Eindeutigkeitsaussage: Sei $z = r \cdot e^{i\varphi} = e \cdot e^{i\psi}, z \neq 0$
$\underset{r\neq 0}{\Rightarrow} e^{i(\varphi-\psi)} = 1 \underset{\text{Satz 12.5}}{\Rightarrow} \varphi - \psi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi)}$

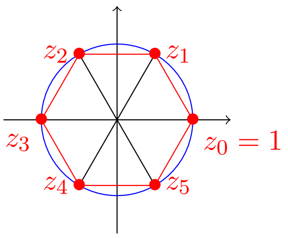
Polarkoordinaten sind praktisch für Multiplikation in $\mathbb{C}$:
$z = r \cdot e^{i\varphi}, w = s \cdot e^{i\psi} \Rightarrow zw = r \cdot s \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$
Multipliziere die Beträge, addiere die Argumente!

12.9 Satz

Die Gleichung $z^n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ hat in $\mathbb{C}$ genau die n Lösungen
$z_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1$ (<u>n-te Einheitswurzeln</u>)

Die z_k bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

Für $n = 6$:

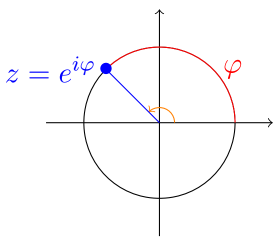


Beweis

Nach Fundamentalsatz der Algebra (6.8) hat das Polynom $p(z) = z^n - 1$ genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.
Und: $z_n^k = (e^{2\pi i \frac{k}{n}})^n = e^{2\pi i k} = 1$ q.e.d.

Bemerkung

$z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$
φ: Länge des Kreisbogens von 1 bis z
2π: Umfang des Einheitskreises



§13 Gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Funktionen mit gemeinamen Definitionsbereich D.

13.1 Definition: Punktweise Konvergenz

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R} :\Leftrightarrow \forall x \in D : f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$
d.h. $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \overline{N(x) \in \mathbb{N} :} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N(x)$

Beispiel

$f_n(x) = x^n$ auf $D = [0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Dann: $f_n \to f$ punktweise
Beachte: alle f_n sind stetig, aber f ist unstetig in $x = 1$!

Anschaulich

Siehe Skript.

13.2 Definition: Gleichmäßige Konvergenz (Stärkerer Konvergenzbegriff)

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$
$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |\overline{f_n(x) - f(x)}| < \varepsilon \forall n \geq N$ und $\forall x \in D$

Beachte

$N = N(\varepsilon)$ unabhängig von $x \in D$ wählbar, die f_n mit $n \geq N$ bleiben im Streifen der Breite 2ε um f.
Klar: $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow f_n \to f$ punktweise

Anschaulich

Siehe Skript.

13.3 Definition: Supremumsnorm

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
$||f||_D := \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$ Supremumsnorm von f auf D

Damit:

(1) f beschränkt $\Leftrightarrow ||f||_D < \infty$

(2) $f_n \to f$ gleichmäßig auf $D \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_D = 0$

Beispiele

(1) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ auf $D = \mathbb{R}$ $||f_n||_{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow f_n \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$

(2) $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$
$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$
$f_n \to f$ punktweise, aber nicht gleichmäßig auf $[0,1]$
Denn: $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [0,1) : f_n(x_n) > \varepsilon$, aber $f(x_n) = 0$
$||f_n - f||_{[0,1]} = 1$

Eigenschaften von $||\dots||$

(1) $||f||_D \geq 0$ und $||f||_D = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (Definitheit)

(2) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow ||\lambda f||_D = |\lambda| \cdot ||f||_D$ (Homogenität)

(3) $||f+g||_D \leq ||f||_D + ||g||_D$ (Dreiecksungleichung),
denn: $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \Rightarrow \sup\limits_{x\in D} |(f+g)(x)| \leq \sup\limits_{x \in D} |f(x)| + \sup |g(x)|$

13.4 Satz

Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$ konvergiert $\Rightarrow$ auch f ist stetig auf D.

Beweis

Sei $x_0 \in D$. Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$
Dazu: $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : ||f_N - f||_D < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (*)
f_N stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |f_N(x) - f_N(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \wedge \forall x \in D : |x - x_0| < \delta$

Für diese x folgt: $|f(x) - f(x_0)| \leq$ Trick!
$\underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \text{aus (*)}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$ q.e.d.

Gleichmäßig konvergente Funktionsreihen

Gegeben: $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Def.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n : D \to \mathbb{R} : \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sofern konv. $\forall x \in D$

Beispiel

$$f_n(x) = \frac{x_n}{n!} \text{ auf } \mathbb{R} \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

13.5 Definition

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt gleichmäßig konvergent auf $D :\Leftrightarrow$

die Folge der Partialsummen $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x), n \in \mathbb{N}$ konvergiert gleichmäßig auf D.

Satz 13.4 zeigt

Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf D und alle f_n stetig auf D

$\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ist stetig auf D.

13.6 Kriterium von Weierstraß

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f_n||_D < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf D

(„konvergiert absolut auf D“ heißt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty \forall x \in D$)

Beispiel

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(nx)}{n^2}}_{=f_n(x)} =: f(x)$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Denn: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\mathbb{R}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Weierstraß $\Rightarrow$ Behauptung.
Alle f_n stetig auf $\mathbb{R} \Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis

Absolute Konvergenz mit Majorantenkriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_D}_{\text{konv. Majorante}} < \infty$

Sei $x \in D \Rightarrow |f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||_D = c_n$ gleichmäßig in x!

$\Rightarrow ||f - \sum_{k=1}^{n} f_k||_D \leq c_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ q.e.d.

13.7 Gleichmäßige Konvergenz komplexer Funktionen

Alle bisherigen Definitionen und Sätze zur gleichmäßigen Konvergenz (insbes. Weierstraßkriterium) übertragen sich wörtlich auf Folgen und Reihen komplexer Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C}$.

Potenzreihen

Exponentialreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{f_n(z), z\in\mathbb{C}} = e^z$

13.8 Definition: Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, z \in \mathbb{C}$$

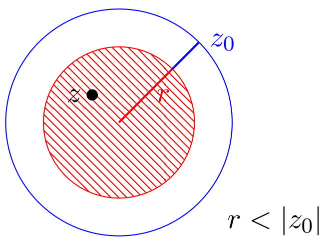
mit Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$
und Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$

Substitution: $z - a =: z' \Rightarrow$ Reduktion auf Fall $a = 0$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$?

13.9 Lemma

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergent für $z = z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0$
$\Rightarrow \sum a_n z^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $\overline{K_r(0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ (mit Rand) mit $r < |z_0|$



Beweis

$\sum c_n z_0^n$ konvergiert $\Rightarrow \exists M > 0 : |c_n z_0^n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

$f_n(z) = c_n z^n, r < |z_0|$

$\Rightarrow ||f_n||_{\overline{K_r(0)}} = \sup\limits_{|z| \leq r} |c_n z^n| = |c_n| \cdot r^n \underset{\text{Trick}}{=} |c_n z_0^n| \cdot \frac{r^n}{|z_0^n|} \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n = Mq^n$ mit $q = \frac{r}{|z_0|} < 1$

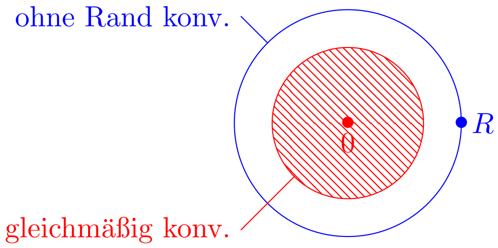
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(Mq^n) < \infty$ (geom. Reihe) $\underset{\text{Weierstr.}}{\Rightarrow}$ Behauptung. q.e.d.

13.10 Definition: Konvergenzradius

Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$:

$R := \sup\{r > 0 : \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n r^n \text{ konv.}\}$ ($R := \infty$, falls konv. $\forall r \leq 0$)

13.11 Satz



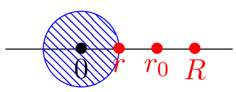
(1) $|z| < \mathbb{R} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ konvergiert absolut, und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $\overline{K_r(0)}$ mit $r < R$

(2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ist stetig in $K_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$

(3) $|z| > R \Rightarrow \sum c_n z^n$ divergiert

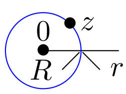
Beweis

(1) Sei $r > R$. Wähle r_0 mit $r < r_0 < R \underset{\text{Def. von R}}{\Rightarrow} \sum c_n r_0^n$ konv.
Lemma 13.9 $\Rightarrow$ absolut und gleichmäßige Konvergenz in $\overline{K_r(0)}$.



(2) $f_n(z) = c_n z^n$ auf $\mathbb{C} \underset{(1)}{\Rightarrow} f$ stetig auf jeden $\overline{K_r(0)}$ mit $r < R$

(3) Sei $|z| > R$. Angenommen, $\sum c_n z^n$ konvergiert. $\underset{13.9}{\Rightarrow} \sum c_n r^n$ konv. $\forall r$ mit $R < r < |z|$ ↯zu Def. von R



q.e.d.

13.12 Berechnung des Konvergenzradius'

Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

(1) Falls $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \in [0,\infty]$ existiert

$\Rightarrow R = \frac{1}{q}$ (dabei: $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} = 0$)

(2) Falls $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0,\infty]$ existiert

$\Rightarrow R = \frac{1}{q}$

Beweis

(1) $\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| \underset{n\to\infty}{\to} q \cdot |z| \begin{cases} < 1 & \text{falls } |z| < \frac{1}{q} \\ > 1 & \text{falls } |z| > \frac{1}{q} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{1}{q}$

(2) Analog mit Wurzelkriterium (T2, Blatt 6) $\sqrt[n]{|c_n z^n|} \to q \cdot |z|$

q.e.d.

13.13 Beispiel

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
   Da konv. $\forall z \in \mathbb{C}$, muss $R = \infty$ sein.
   Berechne mit (1): $c_n = \frac{1}{n!}, \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow q = 0, R = \infty$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (geom. Reihe); $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
Konvergenzradius: Stets $R = 1$ mit (1)

z.B. 3. Reihe: $c_n = \frac{1}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^n} = 1 \Rightarrow R = 1$
1. Reihe: divergiert $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ (dann (z^n) keine Nullfolge)
2. Reihe: divergiert für $z = 1$ (Harm. Reihe), konvergiert für $z = -1$ (alt. Harm. Reihe)
3. Reihe: $|z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert $\forall z$ mit $|z| = 1$

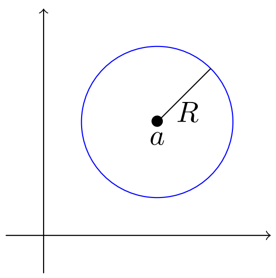
Fazit

Am Rand des Konvergenzkreises ist keine allgemeingültige Aussage möglich!

Bemerkung

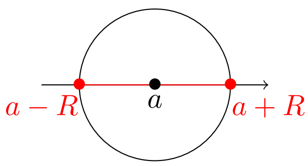
Für allgemeine Potenzreihen $\sum c_n(z-a)^n$ hat man eine konvergente Kreisscheibe $K_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$

$R =$ Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$



13.14 Satz: Ableitung von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit $c_n, a \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R > 0$, betrachtet für $x \in \mathbb{R}$.



$\Rightarrow$ (1) Die gliedweise differenzierte Potenzreihe
$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$ hat ebenfalls Konvergenzradius R

(2) f ist stetig differenzierbar auf dem offenen Intervall $(a-R, a+R)$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

ohne Beweis

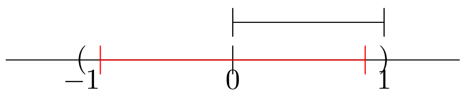
Iteration $\Rightarrow f$ ist beliebig oft differenzierbar auf $(a-R, a+R)$ und darf jeweils gliedweise differenziert werden.

Beispiel

$L(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ „<u>Logarithmusreihe</u>“
Konvergenzradius: $R = 1$ (mit Krit. (1))
Satz 13.14 $\Rightarrow L$ ist stetig differenzierbar auf $(-1, 1)$
mit $L'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ (geom. Reihe) *(i)*
Andererseits: $\frac{d}{dx} \ln \underbrace{(1+x)}_{>0} = \frac{1}{1+x}$ *(ii)*

(i)+*(ii)* $\underset{\text{Satz 11.13}}{\Rightarrow} L(x) - \ln(1+x) = c = \text{konst. auf } (-1, 1)$
Bestimme c: Setze $x = 0$: $c = \underbrace{L(0)}_{=0} - \underbrace{\ln 1}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \forall x \in (-1, 1)$: $\boxed{\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}$ (*)

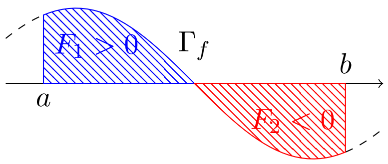


Die Logarithmusreihe $L(x)$ konvergiert nach Leibnizkriterium auch für $x = 1$: $L(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$
Vermutung: Die Reihenentwicklung (*) gilt auch noch für $x = 1$, das heißt $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

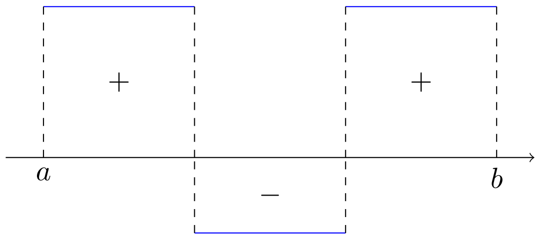
Beweis

In der Übung.

§14 Integration



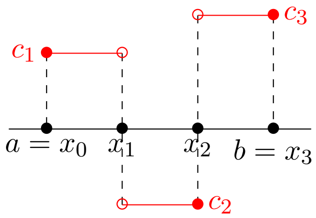
Idee: $\int_a^b f(x)dx =$ Fläche zwischen Γ_f und der x-Achse $= F_1 + F_2$
Falls f stückweise konst.: jeweils Grundlinie · Höhe



14.1 Definition: Integral von Treppenfunktionen

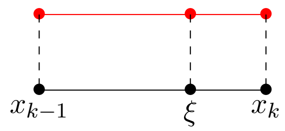
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion $:\Leftrightarrow \exists$ Unterteilung
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so dass
$f\,|_{(x_{n-1},x_k)} =$ konst. $= c_k \forall k = 1, \ldots, n$

Setze: $\int_a^b f(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$ Integral von f über $[a, b]$
$T[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion$\}$



Beachte

1. $\int_a^b f dx$ ist unabhängig von den Werten von f an den Teilpunkten und ändert sich nicht bei Einfügen zusätzlicher Teilpunkte (Verfeinerung der Unterteilung)



2. $f, g \in T[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f, |f| \in T[a,b]$ (klar)
$f + g \in T[a,b]$, denn: f Treppenfunktion zu Unterteilung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$
g ist Treppenfunktion zu Unterteilung $\{\tilde{x_0}(= x_0), \dots, \tilde{x_n}\} = \tilde{Z}$
$\Rightarrow f + g$ ist Treppenfunktion zu $Z \cup \tilde{Z}$

14.2 Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

(1) $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$ „Linearität“ (1)

(2) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b (\lambda f) dx = \lambda \int_a^b f dx$ „Linearität“ (2)

(3) $f \leq g$ auf $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ „Monotonie“

(4) $\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$

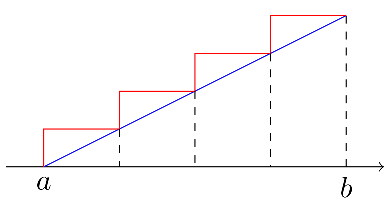
Beweis

(1) Wähle gemeinsame Unterteilung $\{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ für f, g
$f |_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k, g |_{(x_{k-1}, x_k)} = d_k$
$\Rightarrow \int_a^b (f+g)dx = \sum_{k=1}^n (c_k + d_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$

Rest ähnlich. q.e.d.

14.3 Definition: Integration von Regelfunktionen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion $:\Leftrightarrow \exists$ Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $\lim_{n \to \infty} ||f - \varphi_n||_{[a,b]} = 0$



Abkürzung: $||f||_{[a,b]} =: ||f||$

Also: f Regelfunktion auf $[a,b] \Leftrightarrow f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ durch Treppenfunktion approximierbar
$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion$\}$

14.4 Definition: Folge von Treppenfunktionen

Sei $f \in R[a,b]$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||f-\varphi_n|| = 0$.

Setze $\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx}$

Diese Definition ist sinnvoll, denn:

(1) Der Limes rechts existiert, da $\left(\int_a^b \varphi_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent.

Dazu: $\left|\int_a^b \varphi_n dx - \int_a^b \varphi_m dx\right| \underset{14.2}{\leq} \int_a^b \left|\underbrace{\varphi_n(x) - \varphi_m(x)}_{\leq ||\varphi_n - \varphi_m||}\right| dx \underset{\text{Monotonie}}{\leq} \int_a^b ||\varphi_n - \varphi_m|| dx$

$\underset{\text{Trick}}{=} (b-a)\cdot ||\varphi_n - \varphi_m|| \underset{\text{Dreiecksungl. für } ||...||}{\leq} (b-a)(||\varphi_n - f|| + ||f-\varphi_m||) < \varepsilon \forall n,m \geq N_\varepsilon$

(2) Der Limes ist unabhängig von der Wahl der approx. Folge (φ_n) (ohne Beweis, siehe z.B. Königsberger)

Beachte

$f,g \in R[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f, |f|, f+g \in R[a,b]$ (durch Approximieren mit Treppenfunktion)

14.5 Satz: Eigenschaften des Integrals

Seien $f,g \in R[a,b]$.

(1) $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$ „Linearität“ (1)

(2) $\int_a^b (\lambda f)dx = \lambda \cdot \int_a^b f dx$

(3) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ „Monotonie“

(4) $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx \leq (b-a)\cdot ||f||$

Beachte

Jede Regelfunktion auf $[a,b]$ ist beschränkt.

Beweis

(1) Seien $(\varphi), (\psi) \subseteq T[a,b]$ mit $\|f-\varphi_n\| \to 0, \|g-\psi_n\| \to 0$
$\Rightarrow \|f+g-\underbrace{\varphi_n+\psi_n)}_{\in T[a,b]}\| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \|f-\varphi_n\| + \|g-\psi_n\| \to 0$

$$\Rightarrow \int_a^b (f+g)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n+\psi_n)dx \underset{14.2}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \varphi_n dx + \int_a^b \psi_n dx\right) = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

Rest analog. q.e.d.

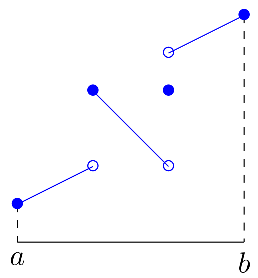
Seien $a<b<c, f \in R[a,c] \Rightarrow f$ eigenschränkt auf $[a,b]$ und $[b,c]$ ist Regelfunktion und $\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$ (mit Approx. durch Treppenf.)

Konvention: $a<b, f \in R[a,b]$:

$$\int_b^a f dx := -\int_a^b f dx, \int_a^a f dx := 0$$

14.6 Satz: Charakterisierung von Regelfunktionen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion $\Leftrightarrow \forall x_0 \in (a,b] \exists \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall x_0 \in [a,b) \exists \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$



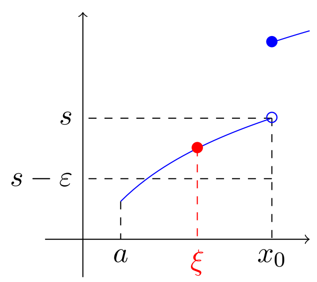
14.7 Korollar

(1) Jede stetige Funktion auf $[a,b]$ ist Regelfunktion

(2) Jede monotone Funktion auf $[a,b]$ ist Regelfunktion

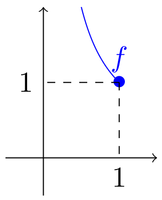
Beweis von (2)

Sei $x_0 \in (a,b], f$ monoton wachsend.
Behauptung: $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,x_0)} f(x) =: s \in \mathbb{R}$ (existiert, da f beschränkt)
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a,x_0) : s-\varepsilon < f(\xi) \leq s$
f mon. wachsend $\Rightarrow \forall x \in [\xi, x_0) : s-\varepsilon < f(x) \leq s$
$\underset{\text{Kor. 9.12}}{\Rightarrow}$ Behauptung. q.e.d.



Gegenbeispiele

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ auf $[0,1]$



Keine Regelfunktion: $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty$

(2) Dirichletsche Sprungfunktion:

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
ist auf keinem $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Regelfunktion (die Limiten existieren nirgends)

Weitere Konsequenz von 14.6: $f, g \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a,b]$

14.8 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, $p \geq 0$

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x)dx$$

Für $p = 1$: $\int_a^b f dx = f(\xi) \cdot (b-a)$

Beweis

$m := \min\limits_{[a,b]} f, M := \max\limits_{[a,b]} f$ (Satz von Minimum/Maximum, 9.20)
$\Rightarrow m \cdot p \leq f \cdot p \leq M \cdot p$ auf $[a,b]$
$\Rightarrow m \cdot \int_a^b pdx \leq \int_a^b fpdx \leq M \cdot \int_a^b pdx$
$\Rightarrow \int_a^b fpdx = c \cdot \int_a^b pdx$ mit $c \in [m, M]$
Zwischenwertsatz (9.18) $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : c = f(\xi)$ q.e.d.

Integration und Differentiation

14.9 Definition: Stammfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f :\Leftrightarrow F$ differenzierbar mit $F' = f$ auf $[a, b]$

14.10 Lemma

F, G Stammfunktikonen von $f \Rightarrow F - G =$ konstant

Beweis

$(F - G)' = 0$ auf $[a, b] \underset{11.13}{\Rightarrow}$ Behauptung. q.e.d.

14.11 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in [a, b]$
$\boxed{F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt}$, $x \in [a, b] \Rightarrow$

(1) F ist Stammfunktion von f, das heißt F differenzierbar auf $[a, b]$ mit $F' = f$

(2) Ist $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ beliebige Stammfunktion von $f \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) =: G \mid_a^b}$

Beweis

(1) Sei $x \in [a, b], x + h \in [a, b]$
$$\Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f dt - \int_{x_0}^{x} f dt\right) = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} 1 \cdot f(t)dt$$
$$\underset{14.8}{=} \frac{1}{h} \cdot f(\xi) \cdot \underbrace{\int_x^{x+h} 1dt}_{=h}, \xi \in [x, x + h]$$
$$= f(\xi)$$
$h \to 0 \Rightarrow x + h \to x \Rightarrow \xi \to x \underset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(\xi) \to f(x)$ für $h \to 0$
F differenzierbar in $x, F'(x) = f(x)$

(2) $F(x) := \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F, G$ Stammfunktionen von f
$$\underset{14.10}{\Rightarrow} F - G = \text{konst.} \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = G(b) - G(a)$$

q.e.d.

Bezeichnung

Sei $f \in R[a,b]$. Für die Aussage „F ist Stammfunktion von f“ schreibt man:
$\int f(x)dx = F(x)$
“Unbestimmtes Integral“ von f (eindeutig nur bis auf additive Konstante)

14.12 Beispiele

1. $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   $\Rightarrow \int_a^b x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1}|_a^b$
   Dabei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ fällt $s \in \mathbb{Z}, 0 \notin [a,b]$ falls $z \in \mathbb{Z}, s < 0$
   (über die Definitionslücke darf nicht hinaus integriert werden!)

   Falls $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $x^s = e^{s \ln x}$für $x > 0$, Also $a, b > 0$
   kurz: $\int x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1}$ $(s \neq -1)$

2. $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x|_a^b & a,b > 0 \\ \ln(-x)|_a^b & a,b < 0 \end{cases}$
   kurz: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

3. $\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4. $\int \cos(x)dx = \sin(x)$, $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$ auf $(-1,1)$

6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$ auf $\mathbb{R}$

7. $\int \frac{dx}{x^2-1} =?$
   $R(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$ zwei verschiedene Nullstellen im Nenner
   Partialbruchzerlegung: $R(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ mit
   $a = (x-1)R(x)|_{x=1} = \frac{1}{2}$, $b = (x+1)R(x)|_{x=-1} = -\frac{1}{2}$
   $\Rightarrow \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$
   $\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ (auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$)

Integrationstechniken

14.13 Partielle Integration

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar $\Rightarrow$

$$\int_a^b f \cdot g' dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f' \cdot g dx$$

bzw.

$$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

Beweis

$$(fg)|_a^b \underset{\text{HDI (14.11)}}{=} \int_a^b (fg)' dx = \int_a^b f' g dx + \int_a^b f g' dx$$

Beispiele

1. $\displaystyle\int_0^1 \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{e^x} dx = \underbrace{x \cdot e^x|_0^1}_{e} - \int_0^1 e^x dx = e - e^x|_0^1 = 1$

2. $\displaystyle\int \ln(x) dx = \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\ln(x)} dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(x) - x = x \cdot (\ln(x) - 1)$

14.14 Substitutionsregel

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig (I Intervall), und $\varphi : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a, b]) \subseteq I$
$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$

Merkregel

$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt+$ Grenzen substituieren

In Praxis oft: φ streng monoton ($\Rightarrow$ bijektiv). Dann:

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Beweis

Sei F Stammfunktion von f
$\Rightarrow (F \circ \varphi)'(t) \underset{Kettenregel}{=} \underbrace{F'}_{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

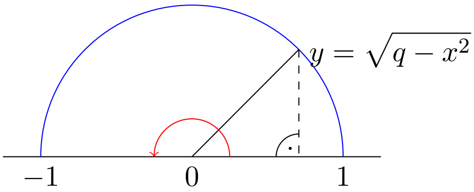
$$\underset{\text{HDI (14.11)}}{\Rightarrow} \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \underset{\text{HDI (14.11)}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiele

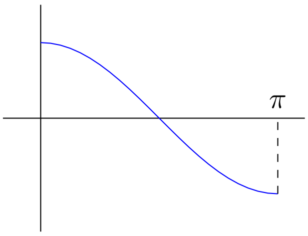
1. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \int_a^b f(ct)dt \underset{\substack{x = ct \\ dx = c \cdot dt}}{=} \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x)dx$

2. $\int_a^b f(t+c)dt \underset{\substack{x = t + c \\ dx = dt}}{=} \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$

3. Fläche des Einheitskreises (Radius 1)



$F = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = ?$



Substituiere: $x = \underbrace{\cos(t)}_{\text{streng mon. auf } [0,\pi]} = \varphi(t), dx = -\sin(t)dt, t \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\cos^2(t)} \sin(t) dt = \int_0^{\pi} sin^2(t)dt$

$\underline{\int \sin^2(t)dt} = \int \underset{f}{\sin(t)} \cdot \underset{g'}{\sin(t)} dt \underset{\text{part. Int.}}{=} -\sin(t) \cdot \cos(t) + \underbrace{\int \cos^2(t)dt}_{=t-\underline{\int \sin^2(t)dt}}$

$\Rightarrow \int \sin^2(t)dt = \frac{1}{2}(t - \sin(t) \cdot \cos(t))$

$\Rightarrow f = (t - \sin(t) \cdot \cos(t))|_0^{\pi} = \underline{\underline{\pi}}$

4. $\underbrace{\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}}_{=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dx}{x} - \ln|x||_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right|}$, dabei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nullstellenfrei

Bemerkung

$\int x^n \sin(x)dx, \int x^n e^x dx$, etc.
Sukzessives Verkleinern des Exponenten n durch partielles Integrieren

Beispiel

$$\int \underset{f}{x^n} \underset{g'}{e^x} dx = x^n e^x - n \cdot \int x^{n-1} e^x = \dots$$

Vorsicht

Oft gibt es zu selbst zu einfachen Integranden keine geschlossen angebbare Stammfunktion!

Beispiele

$$\int e^{-x^2} dx,\ erf(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ Gaußsche Fehlerfunktion}, \int \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Uneigentliche Integrale

<u>Bisher</u>: Integration von Regelfunktionen über kompakte Intervalle

<u>Jetzt</u>: Ausdehnung auf allgemeine Intervalle, unbeschränkte Integranden

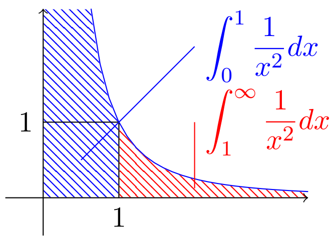
Beispiel

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = ?$

0 ist hier die kritische Grenze: $\frac{1}{x^2}$ ist in 0 nicht definiert!

Betrachte $\int_\alpha^1 \frac{dx}{x^2}$ mit $\alpha \downarrow 0$. Existiert der Limes?

Alternativ: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = ?$



Bezeichnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall.
$f : I \to \mathbb{R}$ heißt <u>Regelfunktion</u> $:\Leftrightarrow$
$f|_{[}a,b]$ Regelfunktion $\forall$ kompakten $[a,b] \subseteq I$

14.15 Definition

(1) Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, $-\infty \leq a < b < \infty$:
$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x)dx$ sofern der Limes existiert.
Man sagt dann: Das uneigentliche Integral von f über $(a,b]$ existiert/konvergiert.

(2) $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, $-\infty < a < b \leq \infty$:
$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)dx$ sofern der Limes existiert.

(3) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, $-\infty \leq a < b \leq \infty$:
Wähle $c \in (a,b)$ und setze $\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, sofern <u>beide</u> uneigentlichen Integrale existieren!
(Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von c)

14.16 Beispiele

(1) $\int_0^\infty e^{-ax}dx, a \in \mathbb{R}$, kritisch: ∞

1. $a \leq 0 : \beta > 0 \Rightarrow \int_0^\beta e^{-ax}dx \geq \int_0^\beta 1dx = \beta \Rightarrow \int_0^\infty e^{-ax}dx$ divergiert
2. $a > 0 : \int_0^\beta e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}|_0^\beta = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\beta}) \underset{\beta\to\infty}{\to} \frac{1}{a}$

(2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ $(s \in \mathbb{R})$, $x^s = e^{s\cdot\ln(x)}$ $(x > 0)$, kritisch: ∞

$$\beta > 1 \Rightarrow \int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{-s+1}x^{-s+1}|_1^\beta = \frac{1}{s-1}(1 - \frac{1}{\beta^{s-1}}), & s \neq 1 \\ \underbrace{\ln(x)|_1^\beta}_{\ln(\beta)}, & s = 1 \end{cases}$$

$$\beta \to \infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s > 1 \\ \text{divergiert}, & s \leq 1 \end{cases}$$

Insbes.: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$, kritisch: 0 (falls $s > 0$)

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^s} \underset{\text{s.o.}}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-s}(1 - \alpha^{1-s}), & s \neq 1 \\ -\ln(\alpha), & s = 1 \end{cases}$$

$$\alpha \downarrow 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & s < 1 \\ \text{divergiert}, & s \geq 1 \end{cases}$$

(4) Beispiel zur Vorsicht: $\int_{-\infty}^\infty xdx =?$

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^R xdx = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{x^2}{2}|_{-R}^R = 0$

Aber: $\int_{-\infty}^\infty xdx$ existiert nicht, da die Limiten $+\infty, -\infty$ getrennt zu nehmen sind, und $\int_0^\infty xdx$ divergiert.

Wichtiges Kriterium für die Konvergenz uneigentlicher Integrale:

14.17 Majorantenkriterium

Seien $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen mit $g \geq 0$ und $|f| \leq g$.
Angenommen, $\int_a^b g(x)dx$ existiert $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ existiert.

Entsprechend für $(a,b], (a,b)$

Beweis

Der Beweis basiert auf dem Cauchy-Kriterium für Grenzwerte (5.15):
Sei $h : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt: $\exists \lim_{x \uparrow b} h(x) :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists s \in [a,b) : |h(x) - h(y)| < \varepsilon \forall x, y \in [s,b)$

Beweis des Majorantenkriteriums: $F(x) := \int_a^x f(t)dt, G(x) := \int_a^x g(t)dt, x \in [a,b)$

$x \leq < \Rightarrow |F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|dt \underset{\text{vor.}}{\leq} \int_x^y g(t)dt = G(y) - G(x)$ (*)

$\exists \lim_{x \uparrow b} G(x) \Rightarrow G$ erfüllt Cauchy-Bedingung in der kritischen Obergrenze b (s.o.)
$\underset{(*)}{\Rightarrow}$ auch F erfüllt Cauchy-Bedingung in $b \Rightarrow \exists \lim_{x \uparrow b} F(x)$ q.e.d.

14.18 Grenzwertkriterium

Seien $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen, $g > 0$
Angenommen, $\exists \int_a^b g(x)dx$ und $\exists \lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} =: c \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx$

Beweis

Vorauss. $\Rightarrow \exists s \in [a,b) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq |c| + 1 \forall x \in [s,b)$
d.h. $|f(x)| \leq (|c| + 1) \cdot g(x)$ auf $[s,b)$
Majorantenkrit. $\Rightarrow$ Beh. q.e.d.

14.19 Beispiel: Die Gamma-Funktion

Gamma-Funktion: von Leonhard Euler, 1729

$n!$ (Fakultät) ist nur definiert für $n \in \mathbb{N}_0$.
Ziel: Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(n+1) = n!$ (Das heißt: Γ interpoliert die Fakultät)

Definition

$\Gamma(s) := \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$, $s > 0$, ist die Gamma-Funktion.

Konvergenz des Integrals (beide Grenzen kritisch)

1. Auf $(0, 1]$: $|x^{s-1}e^{-x}| \leq x^{s-1} \forall x > 0$
   $\displaystyle\int_0^1 x^{s-1} dx$ konvergiert $\forall s > 0$ (Beispiel 14.16) $\underset{\text{Majorantenk. 14.17}}{\Rightarrow} \displaystyle\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ konvergiert
2. Auf $[1, \infty)$: Vergleichsfunktion: $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$
   $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx < \infty$ (Beispiel 14.16)
   $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$
   $\underset{\text{Grenzwertk. 14.18}}{\Rightarrow} \displaystyle\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ existiert

Eigenschaften der Gamma-Funktion

(1) $\Gamma(1) = 1$

(2) $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s) \forall s >=$ (Funktionalgleichung)

(3) $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}_0$ (Γ interpoliert die Fakultät)

Beweis

(1) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x} ex = \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-x}|_0^R\right)$

(2) $0 < \varepsilon < \mathbb{R} < \infty$: $\underbrace{\displaystyle\int_\varepsilon^R \underset{f}{x^s} \underset{g'}{e^{-x}} dx}_{\to\Gamma(s+1)} \underset{\text{pktw. Int.}}{=} \underbrace{-x^s e^{-x}|_\varepsilon^R}_{\to 0} + s \cdot \underbrace{\displaystyle\int_\varepsilon^R x^{s-1}e^{-x}dx}_{\to f(s)}$ (für $\varepsilon \downarrow 0, R \to \infty$)
$\Rightarrow \Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$

(3) $\Gamma(n+1) \underset{\text{FG}}{=} n \cdot \Gamma(n) \underset{\text{FG}}{=} n(n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \ldots = n! \cdot \Gamma(1) = n!$

q.e.d.

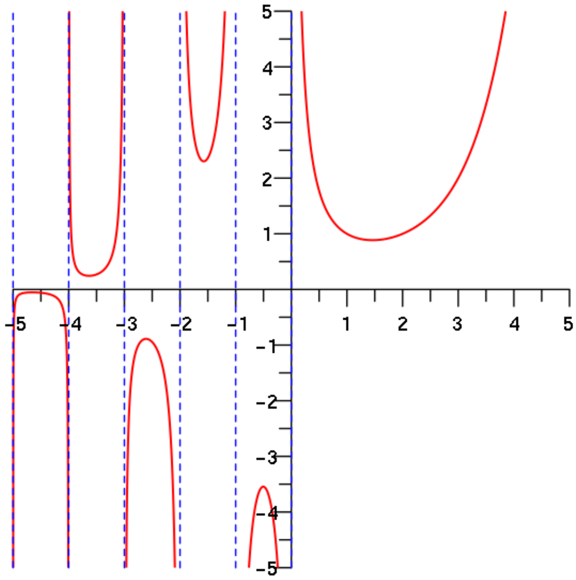


Abbildung §14.1: Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gammafunktion.svg

Bemerkung

Γ ist eine der wichtigsten Funktionen der Analysis, tritt oft in Normierungskonst. auf.

Stirlingsche Formel (Bemerkung zum Wachstum von $n!$)

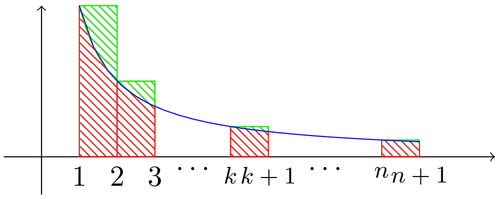
$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}a\right)^n$

Dabei schreibt man für zwei Folgen $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$:
$a_n \sim b_n :\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (asymptotische Gleichheit)

Hier: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

14.20 Integralkriterium

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $f \geq 0$.
$a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n-1} f(x)dx \ (n \in \mathbb{N})$



Der grüne Bereich entspricht a_n, der rote dem Integral und beide zusammen der Summe in obiger Gleichung

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ existiert, und $0 \leq a \leq f(1)$

Ferner gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert

Beweis

f ist monoton fallend, $f \geq 0$.

(a_n) ist monoton wachsend und beschränkt mit $0 \leq a_n \leq f(1) \forall n$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert und $0 \leq a \leq f(1)$. Rest klar. q.e.d.

Beispiel

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^s}, s > 1$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ existiert $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergiert

<u>Beachte</u>: $s \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ divergiert, da $\dfrac{1}{n^s} \geq \dfrac{1}{n}$ (harm. Reihe)

$\hat{=} \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ div. für $s < 1$

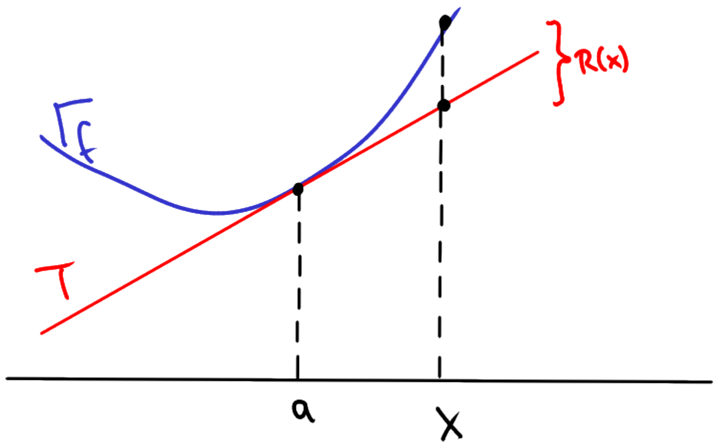
(2) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)) =: \gamma \in [0,1]$ existiert *(γ ist die <u>Euler-Mascheroni-Konstante</u>)*

d.h. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n+1)$ für $n \to \infty$

§15 Taylorreihen

Taylorpolynome

Lineare Approximation einer differenzierbaren Funktion:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in I$ und I ein offenes Intervall.



Tangente an Γ_f im Punkt $\underline{(a, f(a))}$: $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Wie gut ist diese Approximation in der Nähe von a?
Fehler: $R(x) = f(x) - T(x)$; $R(a) = 0$

$$x \neq a \Rightarrow \frac{R(x)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\to f'(a) \text{ für } x \to a} - f'(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$$

Das heißt, $R(x)$ geht für $x \to a$ deutlich schneller gegen 0 als $x - a$.

Ziel

Noch bessere Approximation durch Polynome höheren Grades, falls f genug oft differenzierbar ist in a.

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in $a \in I$, $I \subseteq R$ ein offenes Intervall.
Gesucht: Polynom T, grad $T \leq n$, mit $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$, $T''(a) = f''(a)$, …, $T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ (*)

Ansatz

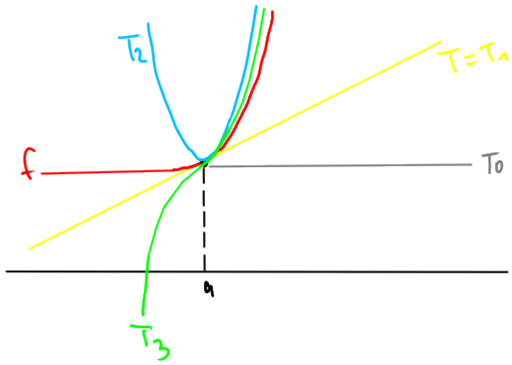
$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

$\Rightarrow T(a) = c_0$, $T'(a) = c_1$, $T''(a) = 2c_2$, …, $T^{(n)}(a) = n! \cdot c_n$
$\Rightarrow \exists!$ Polynom T vom Grad $\leq n$ mit (*), nämlich:

$$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

das Taylorpolynom n-ter Ordnung an f im Punkt a.

$$T_n f(x;a) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$



$T_0 f$ hat den selben Wert wie f in a
$T_1 f$ hat den selben Wert und die selbe Steigung
$T_2 f$ hat den selben Wert, die selbe Steigung und die selbe Krümmung
etc.

Beispiel

$f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in (-1,1) \in I$ (bel. oft differenzierbar auf I)

Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in $a = 0$:
$f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow T_2 f(x;0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$

Beobachtung

Approximationsgüte von $T_n f(x;a)$ nahe a?
Erwartung: Wird umso besser, je größer n ist.

Restglied

$$\boxed{R_{n+1}(x) := f(x) - T_n f(x;a)}$$

15.1 Satz: Integralformel für das Restglied

Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $(n \in \mathbb{N}_0)$, $a \in I$ ($C^{n+1}(I)$ ist n-mal stetig differenzierbar auf I)

$$\Rightarrow \boxed{R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt} \; \forall x \in I \text{ (offenes Intervall)}$$

Beweis mit Induktion nach n

$n = 0$: $R_1(x) = f(x) - f(a) \underset{\text{HDI}}{=} \int_a^x f'(t)dt$ ✓

$n-1 \to n$: $f(x) - T_{n-1}f(x;a) = R_n(x) \underset{\text{IV}}{=} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}\Big|_a^x}_{=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

diesen Term nach links $\Rightarrow$ Behauptung für n q.e.d.

15.2 Korollar

$f \in C^{n+1}(I)$ mit $f^{(n+1)} \equiv 0$ auf I
$\Rightarrow f$ ist Polynom vom Grad $\leq n$, nämlich $f(x) = T_n f(x; a)$

15.3 Satz: Lagrange-Form des Restglieds

Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $a \in I \Rightarrow \forall x \in I \exists \xi_x$ zwischen a und x:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Spezialfall $n = 0$: $R_1(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_x) \cdot (x - a)$ (MWS der Differentialrechnung, 11.12)

Beweis

$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x \underbrace{(x-t)^n}_{p(t)} f^{(n+1)}(t) dt$ hat einheitliches Vorzeichen zwischen a und x
(x ist einzige Nullstelle)

MWS der Integralrechnung (14.8) $\Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot \underbrace{\int_a^x (x-t)^n dt}_{\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}}$ (ξ_x: geeignete Zwischenstelle zwischen a und x)

Anwendung

Wichtige Anwendung der Lagrange-Form: Abschätzung von $|R_{n+1}(x)|$

15.4 Beispiel

Gesucht: Näherung für $\sqrt{x}$, $x = 1 + \delta$, $\delta > 0$ klein
Bekannt: $\sqrt{1} = 1$

$f(x) := \sqrt{x}$, Taylorentwicklung um $a = 1$
n-te Näherung: $\sqrt{x} = T_n f(x; 1) + R_{n+1}(x)$
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, $f''(x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$, ...

$$|R_n(x)| \underset{\text{Lagrange}}{\leq} \frac{|x-1|^n}{n!} \max_{[1,x]} |f^{(n)}| \underset{x>1}{=} \frac{\delta^n}{n!} \cdot |f^{(n)}(1)|$$

$n = 0$: $\sqrt{x} = f(1) + R_1(x) = 1 + R_1(x)$, $|R_1(x)| \leq \frac{\delta}{2}$
$n = 1$: $\sqrt{x} = 1 + f'(1) \cdot \delta + R_2(x) = 1 + \frac{\delta}{2} + R_2(x)$, $|R_2(x)| \leq \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\delta^2}{8}$
$n = 2$: $\sqrt{x} = \underbrace{1 + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8}\delta^2}_{T_2 f(x;1)} + R_3(x)$, $|R_3(x) \leq \frac{\delta^3}{16}$

Qualitative Betrachtung

Vorbemerkung: Landau-Symbol „o"

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, $a \in \mathbb{R}$
Man schreibt: $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a$, falls $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
(Analog für $x \to \pm\infty$, falls D nach oben/unten unbeschränkt)

Beispiel

$|x|^{\frac{3}{2}} = o(x)$ für $x \to 0$; $|x|^{\frac{3}{2}} = o(x^2)$ für $x \to \infty$

15.5 Qualitative Taylorformel

Sei $f \in C^n(I)$ (nicht notwendig C^{n+1}), $a \in I$
$\Rightarrow \boxed{f(x) = T_n f(x; a) + o((x-a)^n)}$ für $x \to a$

Beweis

$r(x) := \dfrac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^n}$
Zu zeigen: $\lim\limits_{x\to a} r(x) = 0$
$T_n f(x) = T_{n-1} f(x) + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$
$r(x) = \underbrace{\dfrac{f(x) - T_{n-1} f(x)}{(x-a)^n}}_{\text{Lagr.}=\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)} - \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = \dfrac{1}{n!}(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a))$
$x \to a \Rightarrow \xi \to a \underset{f^{(n)} \text{ stetig}}{\Rightarrow} f^{(n)}(\xi) \to f^{(n)}(a) \Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

Beispiel

$f(x) = (1+x)^s$ mit $s \in \mathbb{R}, x > -1$

$a := 0$
$f(0) = 1$; $f'(x) = s(1+x)^{s-1}$; $f'(0) = s \Rightarrow (1+x)^s = 1 + sx + o(x)$ für $x \to 0$
Das heißt: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^s - 1 - x}{x} = 0$

$s = \dfrac{1}{2} : \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)\ (x \to 0)$

15.6 Definition: Taylorreihen

$C^\infty(I) := \{f : I \to \mathbb{R}, f$ beliebig oft differenzierbar auf $I\}$

Sei $f \in C^\infty(I)$ Taylorreihe von f um $a \in I$.

$$Tf(x; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

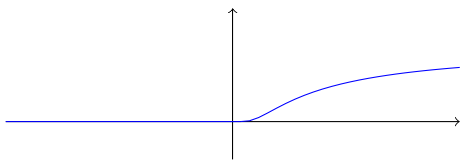
Dies ist eine Potenzreihe um a (Entwicklungspunkt)

Fakten

1. $Tf(x;a)$ konvergiert für festes $x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x;a)$ existiert
2. Falls $Tf(x;a)$ konvergiert, muss nicht notwendig $Tf(x;a) = f(x)$ sein!
   Das heißt, es kann sein, dass $f \in C^\infty(I)$ im Punkt $a \in I$ nicht durch seine Taylorreihe dargestellt wird.

Beispiele

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



Es gilt: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (kritisch nur $x = 0$) mit $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow Tf(x;0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Daher: $Tf(x;0) \neq f(x) \forall x > 0$!

Aber es gilt:

15.7 Satz

Sei f eine Funktion mit Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ $(a, c_n \in \mathbb{R})$

Der Konvergenzradius sei $R > 0 \Rightarrow c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \forall n \in \mathbb{N}_0$
Also: $f(x) = Tf(x;a) \forall x \in (a-R, a+R)$

Man sagt: f besitzt auf $(a-R, a+R)$ eine Taylorentwicklung um a (Beachte: Taylorentwicklung = Potenzreihenentwicklung)

Beweis

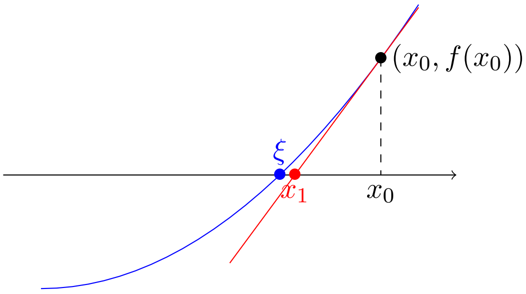
Satz 13.14 $\Rightarrow f \in C^\infty((a-R, a+R))$ und darf gliedweise differenziert werden

$f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^k = \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k \cdot k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot (x-a)^{k-n}$
$\Rightarrow f^{(n)}(a) \underset{(k=n)}{=} c_n \cdot n!$ q.e.d.

Das Newton-Verfahren

Zur Berechnung von Nullstellen einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

Voraussetzung: f ist differenzierbar auf D
Sei ξ eine Nullstelle von f, das heißt: $f(\xi) = 0$. Sei x_0 eine erste Näherung für ξ.

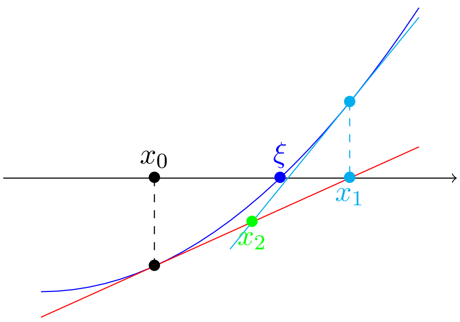


Idee

Die Nullstelle x_1 von T ist bessere Näherung für ξ als x_0.

Tangente in $(x_0, f(x_0))$: $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$T(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, sofern $f'(x_0) \neq 0$

Sei $f'(x_0) \neq 0$. Neue Näherung: $x_1 := x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
Sei $f'(x_1) \neq 0$. Neue Näherung: $x_2 := x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
usw.



Definition: Newton-Iteration

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, sofern $f'(x_n) \neq 0, n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel

Sei $a > 0$.
Gesucht: $\sqrt{a}$ (Näherung dafür)

$f(x) = x^2 - a, f'(x) = 2x$
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_N + \frac{a}{x_n} \right)$ (auch bekannt als Babylonisches Wurzelziehen, 5.11)

Achtung

Das Newton-Verfahren kann divergieren, die Konvergenz ist abhängig vom Verhalten von f in der Nähe von ξ.

15.8 Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion (d.h.: zwei Mal stetig differenzierbar auf $[a, b]$) mit:

(1) f hat in $[a, b]$ eine Nullstelle: ξ

(2) $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$

(3) $f''(x) \geq 0 \vee f''(x) \forall x \in [a, b]$

(4) Die Iterationen x_1 zu $x_0 = a$ und $x_0 = b$ liegen in $[a, b]$

Dann gilt:

1. ξ ist einzige Nullstelle von f auf $[a, b]$ (direkt aus (1) und (2))
2. Bei beliebigen $x_0 \in [a, b]$ gilt:
   $x_n \in [a, b] \forall n, (x_n)$ monoton ab $n = 1$, und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$
3. Fehlerabschätzung: $m := \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)| > 0, M : \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$
   $\Rightarrow |x_n - \xi| \leq \frac{M}{2m} \cdot |x_n - x_{n-1}|^2$
   (Hat man $x_1, \ldots, x_n$ berechnet, so kann man $|x_n - \xi|$ abschätzen)

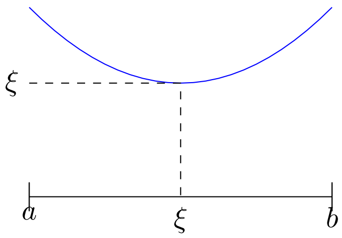
Beweis

Betrachte Fall $f' > 0 \wedge f'' \geq 0$ (weitere drei Fälle analog)

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ (\blacksquare),\ g' = 1 - \frac{(f')^2 - ff''}{(f')^2} = f \cdot \underbrace{\frac{f''}{(f')^2}}_{>0}$$

f s.m.w., $f(\xi) = 0$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} \leq 0 & \text{auf} \quad [a, \xi] \\ \geq 0 & \text{auf} \quad [\xi, b] \end{cases}$$



$\Rightarrow g$ hat absolutes Minimum in ξ, $g(\xi) = \xi$; (4) $\Rightarrow g(a), g(b) \in [a, b]$
$\Rightarrow \xi \leq g(x) \leq b \forall x \in [a, b]$ (*)
$f \geq 0$ auf $[\xi, b] \Rightarrow g(x) \leq x$ auf $[\xi, b]$ (**)

Betrachte nun (x_n): $x_{n+1} = g(x_n)$

<u>Zu 2.</u>: $x_0 \in [a, b] \underset{(*)}{\Rightarrow} x_1 = g(x_0) \in [\xi, b]$
Ist $x_n \in [\xi, b]$ gezeigt für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi \leq \underbrace{g(x_n)}_{x_{n+1}} \underset{(**)}{\leq} x_n \leq b \Rightarrow x_{n+1} \in [\xi, b]$

Also: Induktion $\Rightarrow (x_n) \subseteq [\xi, b]$ und monoton fallend ab $n = 1$
$\Rightarrow x_n \to \hat{\xi} \in [\xi, b]$

$x_0 \in [a, b]$ beliebig, $x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}_0$
$(x_n)_{n \geq 1} \subseteq [\xi, b]$ monoton fallend $\Rightarrow \hat{\xi} := \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in [\xi, b]$ existiert
$\hat{\xi} = \lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) \underset{g \text{ stetig}}{=} g(\lim\limits_{n \to \infty} x_n) = g(\hat{\xi})$
$(\blacksquare) \Rightarrow f(\hat{\xi}) = 0 \underset{\text{Teil 1.}}{\Rightarrow} \hat{\xi} = \xi$

<u>Zur Fehlerabschätzung</u>: $x_n \neq \xi \Rightarrow \left| \frac{f(x_n) - \overbrace{f(\xi)}^{=0}}{x_n - \xi} \right| \underset{\text{MWS}}{=} |f'(\mu)| \geq m > 0$ (μ zwischen ξ, x_n)

$$\Rightarrow |x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \forall n$$

Abschätzung von $f(x_n)$: Taylorentwicklung von f um x_{n-1}:
Lagrange (15.3) $\Rightarrow f(x_n) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1})}_{=0} + \frac{1}{2} f''(\overline{\mu}) \cdot (x_n - x_{n-1})^2$ ($\overline{\mu}$ zwischen x_{n-1}, x_n)

$$\Rightarrow |f(x_n)| = \frac{1}{2} |f''(\overline{\mu})| \cdot |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \frac{M}{2} \cdot |x_n - x_{n-1}|^2$$

$$\Rightarrow |x_n - \xi| \leq \frac{M}{2m} \cdot |x_n - x_{n-1}|^2$$

q.e.d.

Beispiel

$f(x) = x - e^{-x} \stackrel{!}{=} 0$
$f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$

$[a, b] = [0, 1]$ wählbar, denn:

(1) erfüllt nach ZWS ✓

(2) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ ✓

(3) $f''(x) = -e^{-x} < 0$ ✓

(4) $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}[0, 1], x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{1 + e} \in [0, 1]$ ✓

$m = 1 + \frac{1}{e}, M = 1$

Konkretes Beispiel: Startwert $x_0 := \frac{1}{2}$ (1. Iteration zu 0)
$x_1 = 0,566311\ldots$
$x_2 = 0,567143\ldots$
$|x_2 - \xi| \leq \frac{M}{2m}|x_2 - x_1|^2 < 0,5 \cdot 10^{-6}$

Infos zur 1. Klausur WS 2013/14

Grundsätzliches zur Klausur

- Keine Aufgabe ist optional, alle sind zu bearbeiten und gehen vollständig in die Zielnote mit ein
- Ein beidseitig handbeschriebener DIN-A4 Spicker ist als Hilfsmittel zugelassen
- Weitere Hilfsmittel (u.a. Taschenrechner) sind nicht zugelassen!

Aufgaben der ersten Klausur

Folgendes ist aus meinem Gedächtnisprotokoll der ersten Klausur.
Dieses, andere sowie Klausuren der Vorjahre können in der Fachschaft (E1.311) eingesehen werden.

Aufgabe 1: Rekursive Folgen
Gegeben: eine rekursive Definition für (a_n)

(a) Beweis mit vollständiger Induktion, dass sich a_n zwischen zwei Werten aufhält

(b) Zeigen Sie Monotonie der Folge

(c) Prüfen Sie, ob die Folge konvergiert, und wenn, dann berechnen Sie den Grenzwert

---

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen

(a) Wandeln Sie zwei gegebene, komplexe Zahlen um in das Format $x + yi$

(b) Berechnen Sie von einer gegebenen, komplexen Zahl z (nicht im Format $x + yi$) den Betrag $|z|$

Aufgabe 3: Differentialrechnung
Gegeben: eine Funktion f

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

(b) Wo ist die Funktion differenzierbar? Berechnen Sie dort die Ableitung

---

Aufgabe 4: Konvergenzradius
Gegeben: Potenzreihe

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe

(b) Wo konvergiert diese Reihe?

Aufgabe 5: Kurvendiskussion, Trigonometrie
Zeigen Sie, dass eine gegeben Funktion f genau eine Nullstelle in einem gegebenen, halboffenen Intervall hat

---

Aufgabe 6: Kurvendiskussion, Logarithmus

(a) Berechnen Sie für $x \to \infty$ den Grenzwert von einem gegebenen Term mit Logarithmus Naturalis

(b) Untersuchen Sie die Funktion diesen Terms auf lokale und globale Extrema

---

Aufgabe 7: Integralrechnung

(a) Berechnen Sie den Wert eines gegebenen Integrals

(b) Zeigen/widerlegen Sie, dass ein gegebenes Integral konvergiert