Metody Numeryczne - Lista 3

Janusz Szwabiński

1. Rozwiąż układ równań
$$\mathbf{A}_{5\times 5}\vec{x} = \vec{b},$$
gdzie $\mathbf{A}_{5\times 5}$ to macierz Hilberta i $\vec{b} = (5, 4, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$. Skorzystaj z metody iteracyjnego poprawiania rozwiązań.

2. Napisz program rozwiązujący poniższy układ równań metodą Gaussa-Seidla:
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$
Program powinien działać dla dowolnych n. Przeprowadź obliczenia dla $n = 20$ i sprawdź zbieżność rozwiązania.

3. Rozwiąż układ z zadania 2 dowolną metodą dokładną (możesz skorzystać z funkcji bibliotecznych). Porównaj nakład obliczeń w obu przypadkach.

4. Niech $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{20\times 20}$ będzie górną macierzą dwudiagonalną o elementach $0,025$, $0,05$, $0,075$,…, $0,5$ na głównej diagonali, i wszystkich elementach równych 5 na diagonali ponad nią. Oblicz i przedstaw na wykresie $\eta_k = \|x^{(k)}\|_2/\|x^{(0)}\|_2$, $k = 1, \dots, 100$, gdzie
$$x^{(k+1)} = \mathbf{B}x^{(k)}, \quad x^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}.$$
Pokaż, że początkowo $\eta_k > 10^{14}$ i dopiero po 25 iteracjach wielkość ta zaczyna maleć. Wyznacz najmniejsze k, dla którego $\|x^{(k)}\|_2 < \|x^{(0)}\|_2$.