Metody Numeryczne - Lista 7

Janusz Szwabiński

1. Dane jest zagadnienie początkowe
$$y' + 4y = x^2, \quad y(0) = 1.$$
Oblicz $y(0.03)$ w jednym, dwóch i czterech krokach czasowych
   - metodą Eulera,
   - metodą Rungego-Kutty drugiego rzędu,
   - metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu.

   Wyniki porównaj z rozwiązaniem analitycznym
$$y = \frac{31}{32}e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}.$$

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe
$$y' = \sin y, \quad y(0) = 1$$
dla x od 0 do $0,5$ metodą Eulera i metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu dla kroku czasowego $h = 0.1$. Porównaj wyniki na wykresie.

3. Równanie ruchu wahadła matematycznego z tłumieniem oraz okresową siłą wymuszającą można przedstawić w postaci
$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q}\frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta = \hat{A}\cos(\hat{\omega}\tau), \tag{1}$$
gdzie
$$Q = \frac{mg}{\omega_0\nu}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \hat{A} = \frac{A}{mg}.$$
Rozwiąż równanie (1) metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu dla:
   - $Q = 2$; $\hat{\omega} = 2/3$; $\hat{A} = 0,5$; $\hat{v}_0 = 0$; $\theta_0 = 0,01$;
   - $Q = 2$; $\hat{\omega} = 2/3$; $\hat{A} = 0,5$; $\hat{v}_0 = 0$; $\theta_0 = 0,3$;
   - $Q = 2$; $\hat{\omega} = 2/3$; $\hat{A} = 1,35$; $\hat{v}_0 = 0$; $\theta_0 = 0,3$.

   Wyniki (zależności $\theta = \theta(t)$ oraz trajektorie w przestrzeni fazowej) przedstaw na wykresach.

4. Znajdź trajektorię piłki rzuconej ukośnie do powierzchni Ziemi
   (a) zaniedbując opory powietrza,
   (b) uwzględniając opory powietrza.

   W drugim przypadku załóż, że siła oporu powietrza jest postaci
$$F_o = -\frac{1}{2}c_w\rho A|V|\vec{V},$$
gdzie

$c_w \simeq 0,35$	-	współczynnik oporu powietrza,
$\rho \simeq 1,2\ \left[\frac{kg}{m^3}\right]$	-	gęstość powietrza,
$A\ [m^2]$	-	pole przekroju poprzecznego piłki,
$\vec{V}$	-	wektor prędkości piłki.

Obliczenia przeprowadź dla różnych wielkości piłki, prędkości początkowych i kątów rzutu. Wyniki przedstaw na wykresie.

5. Rozwiąż następujące zagadnienie brzegowe

$$y'' + (1 - 0,2x)y^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1.$$