Temat raportu: **Testowanie hipotez statystycznych**

Termin: **20 czerwca, godzina 23:59**

Raport proszę przygotować samodzielnie lub w dwuosobowych grupach.

W ramach raportu należy rozwiązać trzy zadania przedstawione na liście 7. Dwa pierwsze wymagają wykorzystania danych dołączonych do listy, a w trzecim zadaniu należy wykonać symulacje. W pracy oprócz rezultatów powinny zostać umieszczone odpowiednie wnioski i interpretacja otrzymanych wyników. W raporcie powinny znaleźć się również wszystkie użyte wzory oraz definicje.

Poniżej umieszczam krótki opis zadań.

1) Zadanie pierwsze należy wykonać wykorzystując dane umieszczone na stronie www. Należy przetestować hipotezę zerową H0: mu = 1.5 przeciwko trzem hipotezom alternatywnym.

Dla każdego z przypadków wyznaczamy wartość statystyki testowej, określamy obszary krytyczne (proszę je również przedstawić graficznie, np. korzystając z gęstości N(0,1)) i wyznaczamy p-wartości.

Następnie odpowiadają Państwo na pytanie, co się stanie, gdy zwiększymy lub zmniejszymy poziom istotności (można na przykład rozważyć dodatkowo alfa = 0.01 i alfa = 0.1). Proszę zwrócić uwagę na to, że 0.2 podane w poleceniu oznacza odchylenie standardowe, czyli jest to sigma, a nie sigma^2.

2) W zadaniu drugim wykorzystując dane umieszczone na stronie www testujemy hipotezę zerową H0: sigma^2 = 1.5 przeciwko trzem hipotezom alternatywnym.

Dla każdego z przypadków wyznaczamy wartość statystyki testowej, określamy obszary krytyczne (proszę je również przedstawić graficznie, np. korzystając z gęstości rozkładu chi kwadrat) i wyznaczamy p-wartości.

Następnie należy odpowiedzieć na pytanie, co się stanie, gdy zwiększymy lub zmniejszymy poziom istotności.

3) W zadaniu trzecim należy symulacyjnie wyznaczyć błąd I rodzaju oraz błąd II rodzaju i moc testu. Tutaj pracujemy na danych symulowanych.

Błąd pierwszego rodzaju to odrzucenie hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa. Jego teoretyczna wartość jest równa pozimowi istotności alfa. Aby wyznaczyć symulacyjnie błąd I rodzaju musimy wygenerować prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H0 i sprawdzić ile razy odrzucimy hipotezę zerową.

1) Ustalamy alfa = 0.05, n = 1000

2) Generujemy X_1, …, X_n - prostą próbę losową z rozkładu N(mu,sigma) (parametry zgodne z H0)

3) Wyznaczamy wartość statystyki testowej Z (lub Chi^2 w drugim zadaniu)

4) Wyznaczmy obszar krytyczny (jego postać będzie zależała od postaci hipotezy alternatywnej, czyli dla każdego z podpunktów zadania 1 oraz zadania 2 będziemy tutaj mieć inny obszar)

5) Sprawdzamy, czy statystyka Z (lub Chi^2 w drugim zadaniu) jest w obszarze krytycznym

6) Powtarzamy kroki 2)-5) N = 1000 razy i zliczamy ile razy statystyka testowa jest w obszarze krytycznym

7) #{Z (lub Chi^2) w obszarze krytycznym}/N to symulacyjnie wyznaczony błąd I rodzaju

Wyniki mogą przedstawić Państwo w tabelce dla kilku przykładowych poziomów istotności alfa albo też wszystkie kroki 1) - 7) powtórzyć M = 100 razy i wartości błędów zaprezentować na wykresie pudełkowym/ histogramie również dla kilku przykładowych alfa.

Błąd drugiego rodzaju to nieodrzucenie fałszywej hipotezy zerowej na rzecz prawdziwej hipotezy alternatywnej. Jego wartość będzie zależała m.in. od tego jak daleko jesteśmy od hipotezy zerowej, tzn. ile wynosi wartość parametru mu (lub sigma^2) w generowanych danych. Aby wyznaczyć symulacyjnie błąd II rodzaju musimy wygenerować prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H1 (proszę wziąć H1 blisko H0) i sprawdzić ile razy przyjmujemy hipotezę zerową.

Dla testów średniej z zadania pierwszego:

1) Ustalamy alfa = 0.05, mu = (wartość zgodna z H1), sigma = 0.2, n = 1000

2) Generujemy X_1, …, X_n - prostą próbę losową z rozkładu N(mu,sigma)

3) Wyznaczamy wartość statystyki testowej Z

4) Wyznaczmy obszar krytyczny (jego postać będzie zależała od postaci hipotezy alternatywnej, czyli dla każdego z podpunktów będziemy tutaj mieć inny obszar)

5) Sprawdzamy, czy statystyka Z jest poza obszarem krytycznym

6) Powtarzamy kroki 2)-5) N = 1000 razy i zliczamy ile razy statystyka Z jest poza obszarem krytycznym

7) #{Z poza obszarem krytycznym}/N to w przybliżeniu błąd II rodzaju

Otrzymujemy symulacyjnie wyznaczony błąd II rodzaju. Tym razem proszę sprawdzić tylko przypadek alfa = 0.05, ale należy zmieniać mu – ustalane w kroku 1, możemy przykładowo brać mu oddalone maksymalnie o 0.05 od wartości z H0 – czyli dla hipotezy alternatywnej H1: mu (różne od) 1.5 można na przykład rozważyć mu = 1.45, mu = 1.46, mu = 1.47, mu = 1.48, mu = 1.49, mu = 1.51, mu = 1.52, mu = 1.53, mu = 1.54, mu = 1.55; dla hipotezy alternatywnej H1: mu > 1.5 można wziąć mu = 1.51, mu = 1.52, mu = 1.53, mu = 1.54, mu = 1.55; a dla hipotezy H1: mu < 1.5 można rozważyć mu = 1.45, mu = 1.46, mu = 1.47, mu = 1.48 i mu = 1.49. Tutaj też wyniki mogą być przedstawione w tabelce. Można też oczywiście rozważyć więcej alternatywnych mu (np. dla H1: mu (różne od) 1.5 wziąć sobie mu z przedziału [1, 2] z jakiś krokiem) i przygotować wykres, w którym na osi x mamy wartość mu, a na osi y wartość błędu II rodzaju. Moc testu, którą też należy policzyć w tym zadaniu, to odrzucenie fałszywej hipotezy zerowej i przyjęcie prawdziwej hipotezy alternatywnej, i liczymy ją jako (1 – błąd II rodzaju), więc po wyznaczeniu błędu II rodzaju, od razu dostajemy też moc i przedstawiamy ją na wykresach/ w tabelkach.

Analogicznie wyznaczmy błąd II rodzaju oraz moc testu w przypadku testów dla wariancji.