# $p$-adische Zahlen und das Henselsche Lemma

Emma Bach - Proseminar Elementare Zahlentheorie, WS25/26

28. Oktober 2025

**Definition 1.1.** Sei $p$ eine Primzahl. Wir nennen folgende Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ die ***p*-adische Bewertung** auf $\mathbb{Z}$:

$$v_p(n) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid n\} & n \neq 0 \\ \infty & n = 0 \end{cases}$$

Die $p$-adische Bewertung ist auch bekannt als die **Vielfachheit von *p* in *n***. Die $p$-adische Bewertung kann durch die Vorschrift $v_p\left(\frac{r}{s}\right) = v_p(r) - v_p(s)$ auf die rationalen Zahlen erweitert werden.

**Definition 1.2.** Der $p$-adischen Betrag $|-|_p$ auf $\mathbb{Q}$ ist die Abbildung:

$$|n|_p = \frac{1}{p^{v_p(n)}}$$

**Satz 1.3.** <u>**Satz von Ostrowski:**</u> *Jeder Betrag auf $\mathbb{Q}$ ist entweder der triviale Betrag, oder äquivalent zu $|-|_p$ für eine Primzahl p, oder äquivalent zum Standardabsolutbetrag $|-|$.*

**Definition 2.4.** Wir bezeichnen die Vervollständigung des Rings $\mathbb{Z}$ gemäß der durch den $p$-adischen Absolutbetrag erzeugten Metrik als die ***p*-adischen ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}_p$. Analog bezeichnen wir die Vervollständigung des Rings $\mathbb{Q}$ gemäß der $p$-adischen Metrik als die ***p*-adischen Zahlen** $\mathbb{Q}_p$. Die Konstruktion verläuft analog zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$.

**Proposition 2.5.** *Jede Reihe der Form*

$$x = \sum_{n=m}^{\infty} d_n p^n,$$

*wobei $m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $d_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, konvergiert in $\mathbb{Q}_p$. Wir nennen die Folge $d_n$ die **p-adische Darstellung von** $x$. Jede p-adische Zahl kann als eine solche Reihe dargestellt werden.*

Wir können jede $p$-adische Zahl $z$ somit analog zur Standarddarstellung Basis $p$ schreiben:

$$z = \ldots d_4 d_3 d_2 d_1 d_0, d_{-1} \ldots d_m$$

In manchen Quellen werden $p$-adische Zahlen umgekehrt geschrieben, mit der kleinsten Ziffer links.

**Proposition 2.6.** *Sei p beliebig. So ist in der p-adischen Darstellung von $-1$ jede Ziffer $p-1$. Die 5-adische Darstellung von $-1$ ist also $\ldots 4444$ und die 7-adische Darstellung ist $\ldots 66666$. Somit ist bei der Darstellung p-adischer Zahlen kein Vorzeichen nötig.*

**Satz 3.7.** <u>**Henselsches Lemma:**</u> *Sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Z}_p$. Sei $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$. Sei außerdem $a \in \mathbb{Z}_p$, sodass:*

$$\begin{aligned} f(a) &\equiv 0 \mod p \\ f'(a) &\not\equiv 0 \mod p \end{aligned}$$

*Dann existiert ein eindeutiges $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, sodass:*

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0 \\ \alpha &\equiv a \mod p \end{aligned}$$

**Anwendung 3.8.** *Das Polynom $f(x) = x^2 + 1$ erfüllt für $p = 5$ und $a = 2$ die gefragten Bedingungen. Somit existiert eine Nullstelle in $\mathbb{Z}_5$, also $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{Z}_5$.*

**Anwendung 3.9.** *Eine p-adische Zahl u hat eine k-te Wurzel in den p-adischen Zahlen, wenn $k \not\equiv 0 \mod p$ und eine Zahl n mit $n \equiv u \mod p$ existiert, sodass n eine k-te Wurzel in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat.*