Mitschrieb

Analysis II

Sommersemester 2025

Emma Bach

Vorlesung gehalten von
Prof. Dr. Michael Růžička

May 19, 2025

Inhalt

Chapter 1

Wiederholung

Chapter 2

Der Euklidische Raum

Lemma 2.1. *Sei* $(V, \langle \_, \_ \rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum. Dann wird durch*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

auf V *eine Norm erklärt. Diese bezeichnet man als die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.*

Definition 2.2. Seu $(V, \langle \_, \_ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, Die Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal**, wenn

$$\langle u, v \rangle = 0$$

ist. Für $u, v \in V \setminus \{0\}$ Wird die reelle Zahl

$$\phi = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \ \|v\|}$$

als der Winkel zwischen u und v bezeichnet.

Anmerkung 2.3. Es gilt

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \ \|v\|} \leq 1$$

Lemma 2.4. *Für* $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *sei*

$$\|X\|_{\max} := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Dann ist $||\_||_{\max}$ *eine Norm auf* $\mathbb{R}^n$ *und es gilt*

$$\|X\|_{\max} \leq \|X\| \leq \sqrt{n}\|X\|_{\max}$$

Satz 2.5. *Die Menge* $\mathbb{Q}^n$ *der Punkte mit rational Koordinaten ist dicht in* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $X \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist gilt

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \exists y_i \in \mathbb{Q} : |x_i - y_i| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Durch Lemma 2.4 folgt:

$$\|x - y\| \leq \sqrt{n}\|X - Y\| < \varepsilon$$

$\square$

Satz 2.6. *Sei* $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathbb{R}^n$. *Sei* $X_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. *Dann gilt:*

$$\lim_{k \to \infty} X_k = X \Leftrightarrow \forall i : \lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Insbesondere ist X_k *eine Cauchyfolge, wenn die Komponenten Cauchyfolgen sind.*

Beweis. $X_k \to X$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\exists k_o \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : \|X_k - X\| \leq \varepsilon \implies \forall i : \left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Und umgekehrt:

$$\forall i : x_i^{(k)} \to x_i, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \implies \exists k_0^i \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0^i \left|x_i^{(k)} - x_i\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$k_0 := \max\{k_0^n, \ldots, k_0^n\} \implies \forall k \geq k_0 : \left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \implies \|X_k - X\| \leq \sqrt{n}\|X_k - X\| < \varepsilon$$

□

Satz 2.7. *Für konvergente Folgen $(X_k), (Y_k) \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} (X_k + Y_k) = \lim_{k\to\infty} X_k + \lim_{k\to\infty} Y_k \tag{2.1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k X_k = \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_k\right)\left(\lim_{k\to\infty} X_k\right) \tag{2.2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \langle X_k, Y_k\rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} X_k, \lim_{k\to\infty} Y_k\right\rangle \tag{2.3}$$

Satz 2.8. *$\mathbb{R}^n$ ist vollständig.*

Beweis. Ist X_k eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, so sind nach Satz 2.6 alle Teilfolgen Cauchy in $\mathbb{R}$. Also:

$$\exists x_i \in \mathbb{R} : x_i^{(k)} \to x_i \implies \exists X \in \mathbb{R}^n : X_k \to X$$

□

Satz 2.9. (Bolzano-Weierstrass:) *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (X_k) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$. Nach 2.4 müssen die Komponentenfolgen ebenfalls beschränkt sein. Nach dem eindimensionalen Fall des Satzes von Bolzano-Weierstrass existieren also konvergente Teilfolgen der Koordinatenfolgen. Angenommen, die konvergente Teilfolge der ersten Komponente ist gegeben durch $x_1^{(k_n)} \to x_1$. So ist $x_2^{(k_n)}$ ebenfalls eine beschränkte Teilfolge, also existiert eine Teilfolge $x_2^{(k_n)_m}$ welche in den ersten beiden Komponenten konvergiert. Führt man dieses Verfahren induktiv fort, erhält man eine konvergente Teilfolge von (X_k). □

Satz 2.10. *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter nichtleerer Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, sodass $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$*

Beweis. $A_i \neq \emptyset \implies \exists X_i \in A$ sd. $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist. Da A_i beschränkt ist ist $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also hat X_i eine konvergente Teilfolge X_{i_k} mit Limes X. Es gilt $X_{i_k} \in A_{i_k} \subseteq A_i$, also ist X ein Berührpunkt von A_i, also $X \in A_i$. □

Satz 2.11. *Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

Beweis. Analog zur eindimensionalen Version, wobei statt Intervallen $[a_i, b_i]$ Hyperwürfel $[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \times \ldots \times [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$ genutzt werden müssen. □

Satz 2.12. *Seien $\|\_\|_1$ und $\|\_\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. So existieren $k, K \in \mathbb{R}^+$ mit*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : k\|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq K\|X\|_1$$

Beweis. Diese Normenäquivalenz bildet eine Äquivalenzrelation. Es reicht also, zu zeigen, dass jede Norm $||\_||_2$ äquivalent zu einer spezifischen Norm $\|\_\|_1$ ist. Wir wählen $\|\_\|_{\max}$.
Sei (E_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren:

$$K := \|E_1\|_2 + \ldots + \|E_n\|_2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|X\|_2 &= \|x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n\| \\ &\leq |x_1|\|E_1\|_2 + \ldots + |x_n|\|E_n\|_2 \\ &\leq \|X\|_{\max} K \quad ^{\text{[citation needed]}} \end{aligned}$$

Es bleibt die Rückrichtung zu zeigen.

Lemma 2.13. $f(X) := \|X\|_2$ *ist stetig.*

Beweis.

$$|\|X\|_2 - \|Y\|_2| \leq \|X - Y\|_2 \leq K\|X - Y\|_{\max} \leq K\|X - Y\|$$

Also ist $\|\_\|_2$ stetig bezüglich der euklidischen Norm $\|\_\|$. □

Wir definieren nun:

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n \mid ||X||_{\max} = 1\}$$

Diese Menge ist beschränkt. Wir wollen Zeigen, dass sie außerdem abgeschlossen ist. Sei $X_i \to X$, $X_i \in A$. Es gilt:

$$|\|X_i\|_{\max} - \|X\|_{\max}| \leq \|X_i - X\|_{\max} \leq \|X_i - X\|$$

Also konvergiert jede Menge, also ist A kompakt, also auch abgeschlossen. Dementsprechend muss f auf A ein Minimum k annehmen. Wir wissen $f \geq 0$, also ist$k \geq 0$. Es gilt sogar $k > 0$, da keiner der Vektoren in A der Nullvektor ist. Nun gilt also $\forall X \in A : ||X||_2 \geq k$. Wir definieren:

$$\lambda := \frac{1}{\|X\|_{\max}}$$

$$\|\lambda X\|_{\max} = |\lambda|\|X\|_{\max} = 1$$

$$|\lambda|\|X\|_2 = \|\lambda X\|_2 \geq k \implies \|X_2\| \geq k\|X\|_{\max}$$

□

Anmerkung 2.14. Im unendlichdimensionalen Fall gilt Satz 2.12 nicht.

2.1 Abbildungen und Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Betrachten wir zuerst den Spezialfall Linearer Funktionen, also $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : F(\lambda X + \mu Y) = \lambda F(X) + \mu F(Y)$.

Sei (E_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und sei (E'_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^k$. Nun gilt:

$$F(E_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i$$

Daraus erhalten wir Koeffizienten a_{ij}, welche eine Matrix bilden. Umgekehrt können wir aus den Koeffizienten die Abbildung F rekonstruieren, indem wir definieren:

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j E_j\right) \\ &= \sum x_j F(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) E'_i \end{aligned}$$