Mitschrieb

Analysis II

Sommersemester 2025

Emma Bach

Vorlesung gehalten von
Prof. Dr. Michael Růžička

May 21, 2025

Inhalt

Chapter 1

Wiederholung

Chapter 2

Der Euklidische Raum

Lemma 2.1. *Sei $(V, \langle\_,\_\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann wird durch*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

auf V eine Norm erklärt. Diese bezeichnet man als die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

Definition 2.2. Seu $(V, \langle\_,\_\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, Die Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal**, wenn

$$\langle u, v\rangle = 0$$

ist. Für $u, v \in V \setminus \{0\}$ Wird die reelle Zahl

$$\phi = \arccos \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\ \|v\|}$$

als der Winkel zwischen u und v bezeichnet.

Anmerkung 2.3. Es gilt

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\ \|v\|} \leq 1$$

Lemma 2.4. *Für $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei*

$$\|X\|_{\max} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

Dann ist $||\_||_{\max}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und es gilt

$$\|X\|_{\max} \leq \|X\| \leq \sqrt{n}\|X\|_{\max}$$

Satz 2.5. *Die Menge $\mathbb{Q}^n$ der Punkte mit rational Koordinaten ist dicht in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $X \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \exists y_i \in \mathbb{Q} : |x_i - y_i| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Durch Lemma 2.4 folgt:

$$\|x - y\| \leq \sqrt{n}\|X - Y\| < \varepsilon$$

$\square$

Satz 2.6. *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^n$. Sei $X_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Dann gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X \Leftrightarrow \forall i : \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Insbesondere ist X_k eine Cauchyfolge, wenn die Komponenten Cauchyfolgen sind.

Beweis. $X_k \to X$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\exists k_o \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : \|X_k - X\| \leq \varepsilon \implies \forall i : \left| x_i^{(k)} - x_i \right| < \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Und umgekehrt:

$$\forall i : x_i^{(k)} \to x_i, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \implies \exists k_0^i \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0^i \left| x_i^{(k)} - x_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$k_0 := \max\{k_0^n, \dots, k_0^n\} \implies \forall k \geq k_0 : \left| x_i^{(k)} - x_i \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \implies \|X_k - X\| \leq \sqrt{n}\|X_k - X\| < \varepsilon$$

□

Satz 2.7. *Für konvergente Folgen $(X_k), (Y_k) \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} (X_k + Y_k) = \lim_{k\to\infty} X_k + \lim_{k\to\infty} Y_k \tag{2.1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k X_k = \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_k\right)\left(\lim_{k\to\infty} X_k\right) \tag{2.2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \langle X_k, Y_k \rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} X_k, \lim_{k\to\infty} Y_k \right\rangle \tag{2.3}$$

Satz 2.8. *$\mathbb{R}^n$ ist vollständig.*

Beweis. Ist X_k eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, so sind nach Satz 2.6 alle Teilfolgen Cauchy in $\mathbb{R}$. Also:

$$\exists x_i \in \mathbb{R} : x_i^{(k)} \to x_i \implies \exists X \in \mathbb{R}^n : X_k \to X$$

□

Satz 2.9. (Bolzano-Weierstrass:) *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (X_k) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$. Nach 2.4 müssen die Komponentenfolgen ebenfalls beschränkt sein. Nach dem eindimensionalen Fall des Satzes von Bolzano-Weierstrass existieren also konvergente Teilfolgen der Koordinatenfolgen. Angenommen, die konvergente Teilfolge der ersten Komponente ist gegeben durch $x_1^{(k_n)} \to x_1$. So ist $x_2^{(k_n)}$ ebenfalls eine beschränkte Teilfolge, also existiert eine Teilfolge $x_2^{(k_n)_m}$ welche in den ersten beiden Komponenten konvergiert. Führt man dieses Verfahren induktiv fort, erhält man eine konvergente Teilfolge von (X_k). □

Satz 2.10. *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter nichtleerer Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, sodass $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$*

Beweis. $A_i \neq \emptyset \implies \exists X_i \in A$ sd. $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist. Da A_i beschränkt ist ist $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also hat X_i eine konvergente Teilfolge X_{i_k} mit Limes X. Es gilt $X_{i_k} \in A_{i_k} \subseteq A_i$, also ist X ein Berührpunkt von A_i, also $X \in A_i$. □

Satz 2.11. *Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

Beweis. Analog zur eindimensionalen Version, wobei statt Intervallen $[a_i, b_i]$ Hyperwürfel $[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \times \dots \times [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$ genutzt werden müssen. □

Satz 2.12. *Seien $\|\text{\_}\|_1$ und $\|\text{\_}\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. So existieren $k, K \in \mathbb{R}^+$ mit*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : k\|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq K\|X\|_1$$

Beweis. Diese Normenäquivalenz bildet eine Äquivalenzrelation. Es reicht also, zu zeigen, dass jede Norm $||\text{\_}||_2$ äquivalent zu einer spezifischen Norm $\|\text{\_}\|_1$ ist. Wir wählen $\|\text{\_}\|_{\max}$.
Sei (E_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren:

$$K := \|E_1\|_2 + \dots + \|E_n\|_2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|X\|_2 &= \|x_1 E_1 + \dots + x_n E_n\| \\ &\leq |x_1|\|E_1\|_2 + \dots + |x_n|\|E_n\|_2 \\ &\leq \|X\|_{\max} K \quad ^{\text{[citation needed]}}\end{aligned}$$

Es bleibt die Rückrichtung zu zeigen.

Lemma 2.13. $f(X) := \|X\|_2$ *ist stetig.*

Beweis.

$$|\|X\|_2 - \|Y\|_2| \leq \|X - Y\|_2 \leq K\|X - Y\|_{\max} \leq K\|X - Y\|$$

Also ist $\|\_\|_2$ stetig bezüglich der euklidischen Norm $\|\_\|$. □

Wir definieren nun:

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n \mid ||X||_{\max} = 1\}$$

Diese Menge ist beschränkt. Wir wollen Zeigen, dass sie außerdem abgeschlossen ist. Sei $X_i \to X$, $X_i \in A$. Es gilt:

$$|\|X_i\|_{\max} - \|X\|_{\max}| \leq \|X_i - X\|_{\max} \leq \|X_i - X\|$$

Also konvergiert jede Menge, also ist A kompakt, also auch abgeschlossen. Dementsprechend muss f auf A ein Minimum k annehmen. Wir wissen $f \geq 0$, also ist$k \geq 0$. Es gilt sogar $k > 0$, da keiner der Vektoren in A der Nullvektor ist. Nun gilt also $\forall X \in A : ||X||_2 \geq k$. Wir definieren:

$$\lambda := \frac{1}{\|X\|_{\max}}$$

$$\|\lambda X\|_{\max} = |\lambda|\|X\|_{\max} = 1$$

$$|\lambda|\|X\|_2 = \|\lambda X\|_2 \geq k \implies \|X_2\| \geq k\|X\|_{\max}$$

□

Anmerkung 2.14. Im unendlichdimensionalen Fall gilt Satz 2.12 nicht.

2.1 Abbildungen und Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Betrachten wir zuerst den Spezialfall Linearer Funktionen, also $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : F(\lambda X + \mu Y) = \lambda F(X) + \mu F(Y)$.

Sei (E_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und sei (E'_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^k$. Nun gilt:

$$F(E_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i$$

Daraus erhalten wir Koeffizienten a_{ij}, welche eine Matrix bilden. Umgekehrt können wir aus den Koeffizienten die Abbildung F rekonstruieren, indem wir definieren:

$$\begin{aligned}
F(X) &= F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j E_j\right) \\
&= \sum x_j F(E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) E'_i
\end{aligned}$$

[missing stuff here]

Definition 2.15. Wir bezeichnen als $p_i : M \to k$ die Projektion eines Vektors auf die i-te Komponente.

Satz 2.16. *Sei M ein metrischer Raum, $F : M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x \in M$. Dann ist F stetig in x genau dann, wenn $p_i \circ F$ stetig für alle i ist.*

Beweis.

1. p_i ist stetig. Ist also F stetig folgt direkt, dass auch $p_i \circ F$ stetig ist.
2. Angenommen, $p_i \circ F$ ist stetig $\forall i$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $p_i \circ F$ stetig ist existiert eine Umgebung U_i von x, sodass $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \forall y \in U_i$. Ebenso für die anderen Komponenten. Nun gilt:

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sqrt{n}\|F(x) - F(y)\|_{\max} \leq \varepsilon$$

□

Analog gilt das Selbe für Stetigkeit auf M, gleichmäßige Stetigkeit, etc.

Definition 2.17. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, x_0 ein Häufungspunkt, $y \in \mathbb{R}^k$. Dann definieren wir:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in M \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| \leq \delta \implies \|F(x) - y\| < \varepsilon$$

F ist stetig in x_0 genau dann, wenn $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Satz 2.18. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, $X_0 \in M$ ein Häufungspunkt, $Y \in \mathbb{R}^k$ und $f_i = p_i \circ F$. Dann gilt:*

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = Y \Leftrightarrow \forall i : \lim_{X \to X_0} f_i(X) = y_i$$

Beweis. Analog zu Beweis 2.16. □

Korollar 2.19.

$$F(X) \to Y, G(X) \to Z \implies F(X) + G(X) \to Y + Z$$

2.2 Mehrdimensionale Ableitungen

Beispiel 2.20. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ definiert auf einer offenen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \text{ bzgl. der Standardbasis}$$

Wir können aber auch $X = \sum x'_i E'_i$ bezüglich einer beliebigen anderen Basis darstellen. Also:

$$f(X) = f(x_1, \dots, x_n) = g(x'_1, \dots, x'_n)$$

Da f in der Regel nicht linear ist, ist ein solcher Basiswechsel sehr viel komplizierter als in der Linearen Algebra! Wo möglich ist es also besser, über $f(X)$ zu reden.

Definition 2.21. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{X} \in M$. Betrachte die Abbildung

$$t \to f(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_{i-1}, t, \overline{x}_{i+1}, \dots, \overline{x}_n),$$

welche eine Mehrdimensionale Funktion $f(x_1, \dots x_n)$ auf eine eindimensionale Funktion $f(t)$ abbildet. Achtung: Wir nehmen hier implizit eine Darstellung bezüglich der Standardbasis an!

Beispiel 2.22. Betrachte folgende Funktion:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f ist an $(0, 0)$ partiellen differenzierbar, die Partiellen Ableitungen sind 0. Allerdings gilt

$$\forall x : f(x, x) = \frac{1}{2}$$

Also ist f an 0 nicht stetig! Es existieren also Funktionen, die an einem Punkt partiell Differenzierbar sind, an dem sie nicht stetig sind.

Idee: Fordere partielle Differenzierbarkeit bezüglich jeder möglichen Basis, also partielle Differenzierbarkeit in jedem Vektor.

Beispiel 2.23.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wir betrachten die "Linearisierung" $t \to f(t, \alpha t)$. Einsetzen liefert:

$$f(t, \alpha t) = \frac{\alpha t}{t^2 + a^2}$$

Diese Funktion ist differenzierbar, also ist f differenzierbar bezüglich beliebiger Basen. Das reicht jedoch immer noch nicht:

$$f(a, a^2) = \frac{a^2a^2}{a^4 + a^4} = \frac{1}{2}$$

Also ist f immer noch nicht stetig - es ist stetig für Folgen, welche den Nullpunkt durch Geraden erreichen, aber nicht, wenn wir durch kompliziertere Pfade gegen den Nullpunkt gehen.

Wir wollen die Begriffe aus der Analysis I über Stetigkeit und Ableitbarkeit retten, also brauchen wir einen komplizierteren Ableitungsbegriff.

2.3 Differenzierbarkeit

Sei f eine beliebige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Ableitung gibt uns die Tangente der Funktion an einem beliebigen Punkt, also die beste affine Approximation der Funktion an diesem Punkt.

Definition 2.24. Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ heißt **affin**, wenn es eine Lineare Funktion $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und eine Konstante $Z \in \mathbb{R}^k$ gibt, sodass:

$$F(X) = L(X) + Z$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affin, also $g(x) = cx + t$ für $c, t \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wollen eine beliebige Funktion f an der Stelle x_0 approximieren. Für eine gute Approximation wollen wir $f(x_0) = g(x_0)$, also erhalten wir:

$$g(x) = c(x - x_0) + f(x_0).$$

Schreibe $x = x_0 + h$ und lasse h gegen 0 gehen.

$$h \to f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$$

Wir sagen, die Approximation ist gut, wenn $f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$ schneller gegen 0 geht als h selbst, also:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ch}{h} = 0 \tag{2.4}$$

Was äquivalent ist zu:

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wir sagen also, f ist in x_0 differenzierbar, genau dann, wenn eine lineare Abbildung L existiert, sodass:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

Diese geometrische Intuition, nach der die Ableitung die beste affine Approximation ist, können wir auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen.

Definition 2.25. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, sei $X_0 \in M$. Die Abbildung F heißt **differenzierbar** am Punkt X_0, wenn es eine Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gibt, sodass:

$$\lim_{H \to 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = 0.$$

Wir nennen sie das **Differenzial von** F **im Punkt** X_0 und notieren sie als DF_{X_0}. F heißt differenzierbar, wenn sie differenzierbar an jedem Punkt $X \in M$ ist.

Satz 2.26. *Gibt es ein Differential, ist es eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien L_1, L_2 Differentiale. Es folgt:

$$\lim_{H \to 0} \frac{L_1(H) - L_2(H)}{\|H\|} = 0$$

Sei $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{L_1(tX) - L_2(tX)}{\|tX\|} = 0$$

$$\implies \frac{L_1(X) - L_2(X)}{\|X\|} = 0$$

$$\implies L_1(X) - L_2(X) = 0$$

also sind die beiden Differentiale identisch. □

Anmerkung 2.27. Unserer Differenzierbarkeitsbegriff wird insbesonders in der älteren Literatur oft als **total Differenzierbarkeit** bezeichnet.