Mitschrieb

Lineare Algebra II

Sommersemester 2025

Emma Bach

Vorlesung gehalten von
Prof. Dr. Stefan Kebekus

April 22, 2025

Inhalt

Chapter 1

Wiederholung

Zu Beginn will ich einige relevante Sätze, Definitionen und Notationsstandards aus der Vorlesung "Lineare Algebra I" wiederholen.

Definition 1.0.1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von W. So lässt sich jeder Vektor $w \in W$ darstellen als **endliche** Linearkombination der Basisvektoren:

$$w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i \tag{1.1}$$

Insbesondere lassen sich die Bilder der Basisvektoren $a_j \in A$ in dieser Form darstellen:

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i \tag{1.2}$$

Die **Darstellungsmatrix** $\mathrm{Mat}_B^A f$ ist genau durch diese Koeffizienten α_{ij} gegeben.

$$\mathrm{Mat}_B^A f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

In der Regel arbeiten wir mit der Standardbasis $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ und interpretieren jede Matrix M als Darstellungsmatrix $M_E^E f$ einer Linearen Abbildung f.

Definition 1.0.2. Die **Basiswechselmatrix** T_B^A ist die Abbildungsmatrix der Identitätsabbildung.

$$T_B^A = \mathrm{Mat}_B^A(\mathrm{id}_V) \tag{1.4}$$

Satz 1.0.3. *Für jede Basis B eines beliebigen Vektorraums V gilt*

$$T_B^B = id_V = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Beweis. Da die Darstellung jedes Vektors durch die Basisvektoren eindeutig gegeben ist, ist die Darstellung $id_V(b_j) = b_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i$ eines Basisvektors als Linearkombination genau gegeben durch die Linearkombination mit $\alpha_{ij} = 1$ und $\alpha_{ik} = 0$ für $k \neq j$. Dies entspricht genau dem Standardbasisvektor e_j. Also gilt $T_B^B = (e_1 \ldots e_n) = id_V$. $\square$

Proposition 1.0.4. *Gegeben $Mat_B^A f$ lässt sich die Abbildungsmatrix $Mat_D^C f$ von f bezüglich zweier neuen Basen C und D durch Nutzung von Basiswechselmatrizen folgendermaßen berechnen:*

$$Mat_D^C(f) = T_D^B \cdot Mat_B^A f \cdot T_C^B \tag{1.6}$$

Ein besonders relevanter Spezialfall ist:

$$Mat_B^B(f) = T_B^A \cdot Mat_A^A f \cdot T_A^B \tag{1.7}$$

Satz 1.0.5. *Es gilt $T_B^A = (T_A^B)^{-1}$*

Beweis.

$$\begin{aligned} T_A^B \cdot T_B^A &= T_A^B \cdot id_V \cdot T_B^A \\ &= \mathrm{Mat}_A^B(\mathrm{id}_V) \cdot \mathrm{Mat}_B^B(id_V) \cdot \mathrm{Mat}_B^A(\mathrm{id}_V) \\ &= \mathrm{Mat}_A^A(\mathrm{id}_V) \\ &= \mathrm{id}_V \end{aligned}$$

□

Betrachten wir eine beliebige Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Die Matrix T_B^E kann man trivial finden, da jeder Vektor $b_i = (b_{i1} \ldots b_{in})^T$ bezüglich der Standardbasis trivial geschrieben ist als $b_i = \sum_{i=1}^n b_{ij} \cdot e_i$. Nach 1.0.5 lässt sich die Matrix T_E^B ebenfalls ohne größere Probleme durch invertierung von T_B^E finden.

Appendix A

Ausblicke in die Zukunft

In der Funktionalanalysis werden unendlichdimensionale Vektorräume betrachtet.

Satz A.0.1. *Der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Basis.*

Wie sieht diese Basis aus? Es stellt sich heraus, dass der Beweis nur dank Auswahlaxiom funktioniert, und dass sich diese Basis nicht explizit konstruieren lässt. Die Menge der sog. Kroneckerdeltas δ_{ij} sieht auf den ersten Blick wie ein vielversprechender Kandidat aus:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Aber es muss bedacht werden, dass zwingende Bedingung für eine Basis ist, dass sich jeder Vektor nicht nur als Linearkombination der Basisvektoren darstellen lässt, sondern sogar als **endliche Linearkombination**. Diese Definition der Basis ist auch bekannt als Hamelbasis.

Es stellt sich heraus, dass die Hamel-Basis aus A.0.1 nur dank Auswahlaxiom existiert und nicht explizit dargestellt werden kann. Lockern wir den traditionellen Basisbegriff, um zählbar unendliche Linearkombinationen zu erlauben, erhalten wir den Begriff der Schauder-Basis. Die Funktionen δ_{ij} reichen jedoch immer noch nicht als Schauder-Basis des Raums $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sondern nur für den Folgenraum $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Da sich der Begriff der Linearkombination auf keine sinnvolle Weise auf überabzählbare Mengen erweitern lässt bleibt man an diesem Punkt leider stecken, es existiert leider keine explizit angebbare Basis des Raums $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. :(