MITSCHRIEBE

Analysis

Emma Bach

Eine Sammlung an Vorlesungsmitschrieben und generellen Notizen, basierend auf:

Vorlesungen Analysis II-III von
Prof. Dr. Michael RŮŽIČKA

Skripten Analysis I-III von
Prof. Dr. Ernst KUWERT
und
Prof. Dr. Wolfgang SOERGEL

2025-11-26

Inhalt

Chapter 1

Grundlagen der Mengenlehre

1.1 Die de-Morganschen Regeln

Satz 1.1.1. *Es gilt:*

(i) $X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i$

(ii) $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i &\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} x \in X \wedge x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists j \in I : x \in X \wedge x \notin A_j \\ &\Leftrightarrow \exists j \in I : x \in X \setminus A_j \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

(ii) TODO

□

Chapter 2

Zahlen

2.1 Die natürlichen Zahlen

2.2 Die rationalen Zahlen

2.3 Algebraische Grundbegriffe

2.4 Reelle Zahlen axiomatisch

Die Konstruktion der reellen Zahlen ist deutlich komplizierter als die Konstruktion der natürlichen Zahlen und der rationalen Zahlen. Insbesondere ist für die meiner Meinung nach anschaulichste Konstruktion der Begriff einer Cauchyfolge nötig, für welchen wiederum topologische Grundbegriffe gebraucht werden.

Die reellen Zahlen können aber auch ohne eine explizite Konstruktion bereits axiomatisch definiert werden: Wir sagen "Falls die reellen Zahlen existieren, sollen sie diese Gesetze erfüllen".

Definition 2.4.1. Die reellen Zahlen sind der angeordnete Körper $\mathbb{R}$, in dem für jede beschränkte Menge M auch eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$ existiert. Man sagt dann, der Körper ist *Dedekind-vollständig.*

Diese Definition erlaubt es uns a priori noch nicht von "den" reellen Zahlen zu sprechen - es könnte schließlich viele Dedekind-vollständige Körper geben, die eventuell nichts mit den reellen Zahlen zu tun haben. Es stellt sich jedoch heraus, dass dies nicht der Fall ist.

Satz 2.4.2. *Alle angeordneten Körper mit dieser Eigenschaft sind isomorph.*

Wir können also getrost von "den reellen Zahlen" reden. Der Beweis dieses Satzes wird allerdings einiges an Vorarbeit benötigen.

2.4.1 $\mathbb{R}$ enthält $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Im folgenden Abschnitt definieren wir $\mathbb{R}$ als beliebiges Modell der reellen Zahlen, ohne von Eindeutigkeit auszugehen.

Definition 2.4.3. Sei K ein Körper und $S \subset K$ eine Teilmenge dieses Körpers. Wir nennen S eine **induktive Teilmenge** von K, falls:

(i) $0 \in S$

(ii) $\forall a \in S : a + 1 \in S$

Lemma 2.4.4. *Es sei die Menge N der Schnitt aller induktiver Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) Die Menge N ist induktiv.

(ii) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ induktiv, so ist $N \subseteq A$.

(iii) Ist $n \in N$, so ist $n \geq 0$.

Beweis. (i) Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir wissen $1 \in I$ für alle $I \in \mathcal{I}$, also auch $1 \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I = N$. Analog gilt für $a \in N = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ auch $a \in I$ für alle I, also $a + 1 \in I$ für alle I, also $a + 1 \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I = N$.

(ii) N ist per Definition der Schnitt aller induktiver Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ein Schnitt von Mengen ist immer Teilmenge aller ursprünglichen Mengen.

(iii) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ist induktiv. Somit muss N eine Teilmenge dieser Menge sein, also kann N keine Elemente $n < 0$ enthalten.

□

Satz 2.4.5. *Die Menge N mit Nachfolgerfunktion $s : n \to n + 1$ ist ein Modell der natürlichen Zahlen.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass N die Peanoaxiome erfüllt.

(i) $\underline{\neg(\exists n \in N : s(n) = 0)}$:
Angenommen, $n + 1 = 0$. Dann muss n das additive Inverse von 1 sein, also $n = -1$. Dann ist aber $n < 0$, also wissen wir aus dem vorherigen Lemma, dass $n \notin N$.

(ii) $\underline{s \text{ ist injektiv:}}$ Angenommen, $s(n) = s(m)$. Dann gilt $m + 1 = n + 1$, also $m = n$. Somit ist s injektiv.

(iii) <u>Induktionsaxiom:</u> Das Induktionsaxiom sagt uns, dass jede induktive Menge G, welche 0 enthält und unter der Nachfolgerfunktion abgeschlossen ist, eine

Obermenge der Natürlichen Zahlen ist. Dies folgt aus Bedingung (ii) aus unserem Lemma.

$\square$

Wir schreiben dementsprechend von nun an $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ statt $N \subseteq \mathbb{R}$.

Satz 2.4.6. **Wohlordnungsprinzip:** *Jede nichtleere Teilmenge $G \subseteq \mathbb{N}$ enthält ein minimales Element $m \in G$, also ein Element m, welches $\forall g \in G : m \leq g$ erfüllt.*

Korollar 2.4.7. *Die Reellen Zahlen enthalten ein Modell der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Teilmengen.*

Beweis. Die Ganzen Zahlen sind per Definition gegeben durch $\mathbb{N} \cup \{n' \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n' + n = 0\}$, also als die Menge der natürlichen Zahlen vereinigt mit der Mengen ihrer additiven Inversen. Analog sind die rationalen Zahlen der Abschluss der natürlichen Zahlen und ihrer multiplikativen Inversen. $\square$

Chapter 3

Topologie

In den meisten Anfängervorlesungen über Analysis ist der einzige relevante Topologische / Metrische Raum der Raum $(\mathbb{R}, |-|)$ der Reellen Zahlen mit der Absolutbetragsmetrik $d(x,y) = |x-y|$. Falls kein zusätzliches Interesse besteht, tiefer in die Theorie einzutauchen und die betrachteten Konzepte in voller Allgemeinheit aufzunehmen, kannst dieses Kapitel dementsprechend auch fürs Erste übersprungen werden und in jedem Satz in den darauffolgenden Kapiteln die Wörter "Topologischer Raum" und "Metrischer Raum" durch "$\mathbb{R}$" und die Funktion "$d(x,y)$" durch "$|x-y|$" ersetzt werden.

Spätestens ab dem Kapitel über den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ entsprechen die Notizen eher einer Vorlesung "Analysis II" - ab diesem Punkt werden auch andere Metrische Räume als $\mathbb{R}$ relevant, und es lohnt es sich, die Grundlagen nachzuholen.

3.1 Metrische und Topologische Räume

Definition 3.1.1. Eine **Metrik** auf einer Menge M ist eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$, welche für alle $x, y, z \in M$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$

(ii) **Symmetrie:** $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) **Dreiecksungleichung:** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Ist d eine Metrik auf einer Menge M, so nennen wir das Paar (M,d) einen **Metrischen Raum**.

Ein Metrischer Raum ist eine Menge, auf der **Abstände** zwischen den Elementen definiert werden können. Der Abstand von $x \in M$ und $y \in M$ ist dann genau $d(x,y)$.

Satz 3.1.2. *Sei (M,d) ein Metrischer Raum und $x, y \in M$. So gilt* ***Positivität:*** $d(x,y) \geq 0$

Beweis.

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$$

Also auch $d(x,y) \geq 0$. $\square$

Definition 3.1.3. Sei (M,d) ein Metrischer Raum. Wir nennen eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ **offen**, falls für jedes $x \in \Omega$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass auch alle $y \in M$ mit $d(x,y) \leq \varepsilon$ in Ω enthalten sind.

Definition 3.1.4. Gegeben einen Punkt $x \in M$ und eine positive reelle Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ nennen wir eine solche Menge $\{y \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ auch den **ε-Ball um** y und schreiben sie $B_\varepsilon(p)$. Die Zahl ε gibt uns also den "Radius" des Balls.

Definition 3.1.5. Sei T eine beliebige Menge und $\tau \in \mathcal{P}(M)$. Wir nennen τ eine **Topologie** und das Paar (T,τ) einen **Topologischen Raum**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \tau$

(ii) $M \in \tau$

(iii) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus τ ist ebenfalls in τ.

(iv) Die Vereinigung endlich vieler Mengen aus τ ist ebenfalls in τ.

Satz 3.1.6. *Jeder Metrische Raum bildet zusammen mit den System seiner offenen Teilmengen einen Topologischen Raum.*

Ein Topologischer Raum ist ein Raum, in dem definiert ist, welche Elemente "nah aneinander liegen". Somit macht es intuitiv hoffentlich Sinn, dass Metrische Räume Topologische Räume sind.

Allerdings gibt es auch Topologische Räume, auf denen keine Metriken existieren. In solchen Räumen kann man zwar erkennen, dass manche Punkte näher aneinanderliegen als andere, kann aber den Punkten keine exakten Abstände zuordnen.

Definition 3.1.7. Ist (T,τ) ein Topologischer Raum, so nennen wir die Elemente der Topologie allgemein immer **offene Teilmengen**, selbst wenn der Topologische Raum kein Metrischer Raum ist. Ist U eine offene Menge und $x \in U$, nennen wir U auch eine **Umgebung von** x.

Definition 3.1.8. Sei (T,τ) ein Topologischer Raum. Wir nennen T **Hausdorff**, falls es für jedes Paar $x, y \in T$ mit $x \neq y$ disjunkte Umgebungen gibt, also $\exists U \ni x, V \ni y : U \cap V = \emptyset$

Satz 3.1.9. *Jeder Metrische Raum ist Hausdorff.*

Beweis. Da für $x \neq y$ per Definition $d(x,y) \neq 0$ gilt, reicht es, Bälle um x und y zu wählen, deren Radius kleiner als $d(x,y)$ ist. y liegt nicht in $U = \{p \mid d(x,p) < \frac{1}{2}d(x,y)\}$ und umgekehrt. $\square$

3.2 Normierte Vektorräume

Viele wichtige Metrische Räume sind Vektorräume, auf denen eine Norm definiert ist, also eine Funktion, welche den Vektoren Längen zuordnet. Ich werde hier in aller Kürze die Definitionen und einige relevante Eigenschaften wiederholen. Die allgemeine Theorie der Vektorräume ist enorm wichtig und wird in der Linearen Algebra genauer behandelt.

Intuitiv ist ein Vektorraum ein Raum, dessen Elemente sich unter Addition und Skalierung wie Vektoren im $\mathbb{R}^n$ verhalten. Diese Intuition wird durch folgende Definition formalisiert:

Definition 3.2.1. Ein Vektorraum V über einem Körper K ist ein Tupel $(V, K, +, \cdot)$, sodass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe bildet und sodass $\cdot$ eine Abbildung $K \times V \to V$ ist, welche für $a, b \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ die folgenden Axiome erfüllt:

(i) $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

(ii) $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

(iii) $(ab) \cdot \vec{v} = a(b \cdot \vec{v})$

(iv) $1_K\vec{v} = \vec{v}$

Die vier zusätzlich gegebenen Axiome entsprechen der Vorraussetzung, dass $\cdot$ ein Ringhomomorphismus $K \to \mathrm{End}(V)$ ist. Falls dies mehr Verwirrung als Klarheit schafft, kann man sich aber natürlich auch einfach die Axiome merken.

Definition 3.2.2. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine **Norm** auf V ist eine Funktion $\|-\| : V \to \mathbb{R}$, welche für $\lambda \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ folgenden Eigenschaften hat:

(i) **Positivität:** $\|\vec{v}\| \geq 0$

(ii) **Halblinearität:** $\|\lambda\vec{v}\| = \lambda\|\vec{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung:** $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

Satz 3.2.3. *Gegeben eine Norm $\|-\| : V \to \mathbb{R}$ bildet $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$ eine Metrik auf V.*

3.3 Folgen

Definition 3.3.1. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to T$ in einen Topologischen Raum (T, τ). Für eine Folge a schreibt man in der Regel "a_n" statt "$a(n)$".

Definition 3.3.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Topologischen Raum (T, τ). Wir nennen ein Element $a \in T$ den **Grenzwert** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls man für jede beliebige offene Umgebung U von a ein Folgenglied a_{n_0} mit $n_0 \in \mathbb{N}$ finden kann, sodass alle darauf folgenden Folgenglieder in U enthalten sind. Als Formel:

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n \in U$$

Eine Folge, die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**.

Satz 3.3.3. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Metrischen Raum (M, d). $a \in M$ ist genau dann ein Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) \leq \varepsilon$$

Satz 3.3.4. *Der Grenzwert einer Folge in einem Metrischen Raum ist eindeutig.*

Beweis. Angenommen, eine Folge a_n hat zwei Grenzwerte $a \neq b$. So gilt für $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $n \geq n_1$ (bzw. $n > n_2$)

$$d(a_n - a) < \varepsilon$$

und

$$d(a_n - b) < \varepsilon$$

Wählen wir nun $n_3 = \max(n_1, n_2)$, So gilt für alle $n \geq n_3$:

$$\begin{aligned} d(a - b) &= d(a - a_n - (b - a_n)) \\ &\leq d(a - a_n) + d(b - a_n) \\ &< 2\varepsilon \\ &= d(a - b) \end{aligned}$$

Also $d(a - b) < d(a - b)$, was ein Widerspruch ist. □

Satz 3.3.5. *Der Grenzwert einer Folge in einem Hausdorff-Raum T ist eindeutig.*

Beweis. Angenommen, die Folge a_n konvergiert gegen $a \in T$. Sei $b \in T$ beliebig, sodass $a \neq b$. So existiert eine Umgebung $U \ni a$ und eine Umgebung $V \ni b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Nach der Definition von Konvergenz nach a muss ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass alle a_n ab a_{n_0} in U enthalten sind. Für konvergenz gegen V müssten nun ab einem Gewissen Punkt alle Folgenglieder außerdem in V enthalten sein. Aber $U \cap V = \emptyset$, also kann es kein Folgenglied geben, welches in beiden Umgebungen enthalten ist. Also konvergiert die Folge nicht gegen b. □

Die Version für Metrische Räume folgt natürlich gemäß Satz 3.1.9 aus der Version für Hausdorff-Räume. Ich persönlich finde den allgemeineren Beweis deutlich übersichtlicher, und hoffe, dieses Beispiel dient als gute Rechtfertigung dafür, warum ich in diesen Notizen gerne Sätze in voller Metrischer / Topologischer Allgemeinheit formuliere und beweise.

Definition 3.3.6. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Metrischen Raum M heißt **beschränkt**, falls sie in einem ε-Ball in M enthalten ist, also wenn:

$$\exists m \in M : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\varepsilon(m)$$

Definition 3.3.7. Der **Durchmesser** einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Reelle Zahl $D = \sup(d(a_n, a_m) \mid n, m \in \mathbb{N})$.

Satz 3.3.8. *Eine Folge ist genau dann beschränkt, wenn ihr Durchmesser endlich ist.*

> *Beweis.* Sei a_k ein beliebiges Folgenglied. So ist die gesamte Folge im Ball $B_D(a_k)$ enthalten. □

Satz 3.3.9. *Jede konvergente Folge in einem Metrischen Raum ist beschränkt.*

> *Beweis.* Sei a_n eine Folge, welche gegen den Grenzwert a konvergiert. So gilt per Definition von Konvergenz für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:
>
> $$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(a_n - a) \leq \varepsilon$$
>
> Es folgt:
>
> - Alle a_n mit $n \geq n_0$ sind im Ball $B_\varepsilon(a)$ enthalten.
> - Die Menge $\{a_n \mid n < n_0\}$ ist endlich, also existiert ein maximaler Abstand zu a:
>
> $$\forall n < n_0 : a_n \in B_{\max(d(a,a_1),\ldots,d(a,a_{n_0}))}(a)$$
>
> Nehmen wir nun das Maximum der beiden Radien, so ist die gesamte Folge im entstehenenden Ball enthalten, also begrenzt. □

Satz 3.3.10. *Jede begrenzte, monoton steigende Folge in einem geordneten Körper K ist konvergent.*

Satz 3.3.11. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in eine Körper K und a und b die dazugehörigen Grenzwerte. So gilt:*

- $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit Grenzwert* $a + b$

- $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit Grenzwert* ab
- *Für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist* $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit Grenzwert* λa.
- *Falls* $a \neq 0$ *ist* $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit Grenzwert* $\frac{1}{a}$.

Beweis.

(i)

(ii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert ab:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

Da die Folgen a_n und b_n konvergieren sind sie Beschränkt mit Schranke C:

$$|a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq C(|b_n - b| + |a_n - a|)$$

Durch die Konvergenz von b_n und a_n finden wir nun δ, sodass

$$C(|b_n - b| + |a_n - a|) \leq C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\right) = \varepsilon$$

(iii)

(iv)

□

Satz 3.3.12. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit Grenzwerten* a *und* b. *Sei außerdem* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$. *So ist auch* $a \leq b$.

Satz 3.3.13. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit Grenzwerten* a *und* b. *Sei außerdem* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$. *So ist immer noch* $a \leq b$.

Definition 3.3.14. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent gegen** ∞, geschrieben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Falls

$$\forall c \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > c$$

Definition 3.3.15. Eine Zahl heißt **Häufungspunkt** oder **Häufungswert** einer Folge, wenn sie der Grenzwert einer Teilfolge ist.

Satz 3.3.16. ***Bolzano-Weierstraß:*** *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweisskizze. Beweis durch Intervallhalbierung: Wähle Intervall $[s, S]$, sodass s das Infimum und S das Supremum ist. Wähle bei Halbierung das Intervall, welches unendlich viele Folgenglieder enthält. "□"

Satz 3.3.17. *Hat eine beschränkte Folge genau einen Häufungswert, so konvergiert sie gegen diesen Häufungswert.*

Definition 3.3.18. Eine Folge heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Satz 3.3.19. *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Dieser Satz ist je nach verwendeter Konstruktion der reellen Zahlen entweder ein Axiom oder folgt aus den Axiomen.

Satz 3.3.20. *Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist Cauchy.*

Beweis. Angenommen, eine Folge $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergiert. So gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ und $m, n > n_0$ mit $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nun gilt

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon,$$

also ist a_n Cauchy. □

Korollar 3.3.21. *Jede monoton wachsende, beschränkte Folge ist Cauchy.*

Beweis. Jede monoton wachsende beschränkte Folge ist konvergent, also Cauchy. □

Definition 3.3.22. Gegeben eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen wir den Grenzwert der oberen Schranken der Folge den **Limes superior**:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} a_m \right)$$

Analog definieren wir für untere Schranken den **Limes inferior**:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} a_m \right)$$

Satz 3.3.23. *Es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq a$ gdw. für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \geq a + \varepsilon\}$ endlich ist.*

Satz 3.3.24. *Es gilt* $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq a$ *gdw. für alle* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *die Menge* $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \geq a - \varepsilon\}$ *unendlich ist.*

Satz 3.3.25. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge. So ist* $\limsup a_n$ *der größte und* $\liminf a_n$ *der kleinste Häufungswert der Folge.*

Korollar 3.3.26. *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist mit* $\limsup a_n = \liminf a_n$*.*

Definition 3.3.27. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** der Menge M, wenn:

(i) $\forall x \in M : a \leq x$

(ii) $\forall a < a' : \exists x \in M : x < a'$

Der folgende Trick wird später in der Integrations- und Maßtheorie oft nützlich:

Proposition 3.3.28. *Sei* $M \subset \mathbb{R}$*. Sei* $\inf M \neq -\infty$*. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \exists m \in M : m < \inf M + \varepsilon$$

Definition 3.3.29. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** der Menge M, wenn:

(i) $\forall x \in M : x \leq a$

(ii) $\forall a' < a : \exists x \in M : a' < x$

Satz 3.3.30. *Sei* M *nichtleer. So gibt es Folgen* $x_n, y_n \in M$*, sodass*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf M$$

und

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup M$$

Beweis. Im Fall einer nach oben unbeschränkten Menge lässt sich trivial eine Folge finden, welche gegen $\sup M = \infty$ konvergiert, eben so für das Infimum im Fall einer nach unten unbeschränkten Menge.

Sei nun $a_1 \in M$ und $b_1 \geq M$. Wir konstruieren nun durch sukzessives Halbieren des Intervalls $[a_1, b_1]$ eine Intervallschachtelung, welche gegen das Supremum konvergiert:

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [(a_n + b_n)/2, b_n] & [(a_n + b_n)/2, b_n] \cap M \neq \emptyset \\ [a_n, (a_n + b_n)/2] & \end{cases}$$

□

Korollar 3.3.31. *Jede Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *hat genau ein Supremum und genau ein Infimum.*

Beweis. In der vorherigen Intervallschachtelung ist jedes Intervall Obermenge eines Intervalls in M. Da also das Supremum und das Infimum in der Intervallschachtelung enthalten sind, sind die auch in M enthalten. $\square$

3.4 Stetigkeit

Definition 3.4.1. **Stetigkeit in Topologischen Räumen:** Seien X, Y Topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **stetig**, wenn das Urbild jeder offener Menge offen ist.

Satz 3.4.2. ***ε-δ-Kriterium:*** *Seien M, N Metrische Räume mit Metriken d_M und d_N. Eine Funktion $f : M \to N$ heißt* ***stetig*** *an einem Punkt $p \in M$, wenn:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : d_M(x,p) < \delta \implies d_N(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

Die Funktion ist genau dann stetig im Topologischen Sinne, wenn das $\varepsilon - \delta$-Kriterium an allen Punkten erfüllt ist.

Anmerkung 3.4.3. Im Fall einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ also:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : |x - p| < \delta \implies |f(x), -f(p)| < \varepsilon$$

Beweisskizze. Left as an exercise to the reader :) (I'll get back to it) "$\square$"

Definition 3.4.4. **Folgenstetigkeit:** Eine Folge x_k heißt **folgenstetig**, wenn:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \implies \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Satz 3.4.5. *Jede stetige Funktion ist folgenstetig.*

Beweis. Sei $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Wähle zu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, sodass $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Da die Aussage $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, gilt sie insbesondere für x_k mit groß genugem k. $\square$

Satz 3.4.6. *Jede folgenstetige Funktion in $\mathbb{R}$ ist stetig.*

Beweis. Angenommen, f sei folgenstetig, aber nicht stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für kein $|x_k - x_0| < \delta \in \mathbb{R}^+$ die Bedingung

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Wählen wir nun $\delta_k = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, so gibt es jeweils ein $x_k \in D$ mit $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$, aber $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dies ist ein Widerspruch zur Folgenstetigkeit. □

Satz 3.4.7. *Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis. Durch Folgenstetigkeit.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(f(x_0))$$

□

Satz 3.4.8. *Das Produkt stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0)$$

□

Satz 3.4.9. *Das Inverse einer stetigen Funktion ist stetig.*

Beweisskizze. Monotone Surjektionen auf kompakte Mengen sind stetig. "□"

Satz 3.4.10. *Eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_n)$ ist genau dann an einem Punkt p stetig, wenn dort alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.*

Satz 3.4.11. ***<u>Zwischenwertsatz:</u>*** *Gegeben $a < b$ in $\mathbb{R}$ nimmt eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Sei $z \in [f(a), f(b)]$ und

$$p = \sup\{x \in [a,b] : f(p) \leq z\}.$$

Zu zeigen ist $f(p) = z$. Angenommen, $f(p) < z$. Da $z \leq f(b)$ folgt $p < b$. Sei nun $\varepsilon = z - f(p)$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert ein δ, sodass für $q := p + \delta$ sowohl $p < q$ als auch $f(p) \leq z$ gelten. Somit war p kein Supremum, was ein Widerspruch ist. □

Korollar 3.4.12. *Das Bild eines Intervalles unter einer Stetigen Funktion ist ebenfalls ein Intervall.*

Satz 3.4.13. *Ist das Bild einer monotonen Abbildung* $f : \mathbb{R} \subset D \to \mathbb{R}$ *ein Intervall in* $\mathbb{R}$*, so ist* f *stetig.*

Korollar 3.4.14. *Ist eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *streng monoton und stetig, so ist auch die Umkehrfunktion streng monoton und stetig.*

Beweis. Die Umkehrfunktion ist klar monoton (sonst könnte man sie nicht erneut invertieren, um die ursprüngliche Funktion zu erhalten). Außerdem ist ihr Bild das Intervall $[a,b]$. Somit ist die Umkehrfunktion stetig. □

Satz 3.4.15. ***Existenz von Extremalstellen auf Kompakta:*** *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren Kompaktum hat ein Maximum und ein Minimum.*
Alternativ: *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren Kompaktum nimmt das Supremum und Infimum ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.*
Also:

$$\forall f : D \to \mathbb{R} : \exists x_0, x_1 \in D : f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x), \quad f(x_1) = \sup_{x \in D} f(x)$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage über das Infimum, das Supremum folgt dann analog. Setze

$$\alpha = \inf_{x \in D} f(x) \in [-\infty, \infty)$$

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $x_k \in D$ mit $f(x_k) \to a$. Da D beschränkt ist, ist die Folge beschränkt. Nach Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge x_{k_j}, welche gegen einen Wert $x_0 \in D$ konvergiert.

Wir wissen, dass $f(x_{k_j})$ gegen $f(x_0)$ konvergiert (dies ist genau die Folgenstetigkeit von f). Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt nun $f(x_0) = \alpha$. □

Chapter 4

Formale Konstruktion der Reellen Zahlen

Chapter 5

Reihen

Definition 5.0.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir nennen die Zahl

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die n**-te Partialsumme** der Folge. Wir nennen Folgen der Form $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendliche Reihen und schreiben solche auch als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, bezeichnet dieser Ausdruck außerdem den Grenzwert der Folge. Per Definition ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

Gemäß Satz 3.3.11 können **konvergente** Reihen wie intuitiv erwartet addiert, skalarmultipliziert etc. werden.

5.1 Konvergenzkriterien

Satz 5.1.1. ***Nullfolgentest:*** *Ist eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so folgt* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Satz 5.1.2. ***Konvergenzkriterium von Cauchy:*** *Eine Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis. Dies ist genau die Bedingung, dass die Reihe eine Cauchyfolge ist. □

Satz 5.1.3. ***Reihen mit positiven Gliedern:*** *Falls $\forall k \in \mathbb{N} : a_k > 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis. Die Folge der Partialsummen ist dann monoton steigend und beschränkt, also konvergent nach 3.3.10 □

Satz 5.1.4. ***Leibnizkriterium:*** *Sei a_k eine reelle, monoton fallende Nullfolge. So ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent. Es gilt außerdem:*

$$0 \leq (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k \leq a_n$$

Beweis. Sei S_n die n-te Partialsumme.

- Es gilt $S_{n+2} - S_n = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$, also ist die Folge der Partialsummen mit geradem Index streng monoton fallend.
- Es gilt $S_{n+1} - S_{n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$, also ist die Teilfolge der Partialsummen mit ungeradem Index streng monoton steigend.
- Es gilt außerdem $S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$, also ist die gerade Partialsummen nach unten beschränkt und die ungeraden Partialsummen sind nach oben beschränkt.
- Zuletzt gilt auch noch $S_{n+1} - S_n \to 0$, da beides Nullfolgen sind, also konvergieren beide Teilfolgen gegen den gleichen Grenzwert, also konvergiert die gesamte Reihe gegen diesen Grenzwert.

□

Satz 5.1.5. ***Majorantenkriterium:*** *Gilt $|a_k| \leq c_k \in [0, \infty)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.*

Satz 5.1.6. ***Quotientenkriterium:*** *Gibt es ein $\theta \in [0, 1)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ sodass*

$$\forall k \geq n : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \theta,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Satz 5.1.7. *Eine äquivalente Bedingung ist* $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

Beweis. Per Induktion gilt

$$\forall k \geq n : |a_k| \leq \theta^{k-n}|a_n|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \theta^{k-n}|a_n| \\ &= |a_n| \sum_{k=n}^{\infty} \theta^{k-n} \\ &= |a_n| \cdot \frac{1}{1-\theta}\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.1.8. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$$

Der Quotiententest liefert für $k \geq 10$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)e^k}{ke^{k+1}}\right| = \left|\frac{k+1}{ke}\right| < \frac{1}{2}$$

Also konvergiert die Reihe absolut. (Die Abschätzung ist hier natürlich sehr grob.)

Satz 5.1.9. ***Wurzelkriterium:*** *Gibt es ein $\theta \in [0,1)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ sodass*

$$\forall k \geq n : \sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Anmerkung 5.1.10. Existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall k \geq n : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$$

oder

$$\forall k \geq n : \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

so ist die Reihe offensichtlich nicht Cauchy, divergiert also.

Satz 5.1.11. *Eine absolut konvergente Reihe kann beliebig umgeordnet werden, ohne den Grenzwert zu verändern.*

Chapter 6

Eindimensionale Ableitungen

6.1 Differenzierbarkeitsbegriffe im Mehrdimensionalen

6.1.1 Totale Differenzierbarkeit

Definition 6.1.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt **total differenzierbar** oder einfach **differenzierbar** am Punkt $p \in \Omega$, falls eine lineare Abbildung $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, sodass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - Df(p)(h)}{|h|} = 0$$

Existiert ein solches $Df(p)$, nennen wir es das **Differential** von f am Punkt p. Existiert eine solche Abbildung für alle Punkte $p \in \Omega$, so nennen wir die Abbildung $Df : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ***das* Differential** von f.

6.1.2 Partielle Differenzierbarkeit

Definition 6.1.2. Die **partielle Ableitung** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \omega \to \mathbb{R}^m$ ist die eindimensionale Ableitung entlang einer der Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \left(\frac{d}{dh} f(x + he_j)\right)(0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_j) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

6.2 Ableitungsregeln

6.2.1 Kettenregel

Satz 6.2.1. *Es gilt*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0)$$

6.2.2 Produktregel

6.2.3 Quotientenregel

6.2.4 Ableitung von Umkehrfunktionen

Satz 6.2.2. *Sei $I \in \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton, stetig auf I und differenzierbar bei p. So ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $q = f(p)$ mit:*

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

> *Beweis.* Kettenregel:
>
> $$\begin{aligned} f(f^{-1}(q)) &= q \\ \implies (f(f^{-1}(q)))' &= 1 \\ \implies (f^{-1})'(q) \cdot f'(f^{-1}(q)) &= 1 \\ \implies (f^{-1})'(q) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(q))} \end{aligned}$$
>
> □

6.3 Der Mittelwertsatz

Satz 6.3.1. *Nimmt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ an einem Punkt p ein Maximum oder Minimum an, so gilt $f'(p) = 0$.*

Satz 6.3.2. ***Satz von Rolle:*** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.*

> *Beweis.* Im Abschnitt über Stetigkeit haben wir bewiesen, dass es Punkte $p, q \in [a, b]$ gibt, an denen f sein Maximum und Minimum annimmt. Ist einer dieser Punkte in (a, b) folgt der Satz trivial. Liegen die Punkte p und q hingegen am Rand, so folgt aus $f(a) = f(b)$, dass $p = q$ ist, und die Funktion somit konstant.
>
> □

Satz 6.3.3. ***Mittelwertsatz:*** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). So existiert ein $p \in (a, b)$, sodass*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Man wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

an. □

Chapter 7

Riemannintegration über reelle Intervalle

7.1 Treppen- und Regelfunktionen

Definition 7.1.1. Eine Funktion $f \in B([a,b])$ (eine beschränkte Funktion mit Definitionsbereich $[a,b]$) heißt **Treppenfunktion**, falls es Punkte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, sodass f auf jedem offenen Teilintervall (x_k, x_{k+1}) konstant ist. Wir nennen dann $(x_0, \ldots, x_n)$ eine **zu f gehörige Unterteilung von** $[a,b]$. Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ schreiben wir $T([a,b])$.

Definition 7.1.2. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls es eine Folge f_n von Treppenfunktionen gibt, welche Gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ schreiben wir $R([a,b])$.

Satz 7.1.3. *Sei f_n eine Funktionenfolge, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Hat jedes f_n überall einseitige Grenzwerte, so auch f.*

Satz 7.1.4. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn für alle $c \in [a,b]$ die einseitigen Grenzwerte*

$$\liminf_{x \to c} f(x) \text{ und } \limsup_{x \to c} f(x)$$

existieren.

Korollar 7.1.5. *Jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion.*

7.2 Integration von Treppenfunktionen

Definition 7.2.1. Sei f eine Regelfunktion. Sei eine Unterteilung $x_0 < \ldots < x_n$ gegeben, sodass f auf dem offenen Intervall (x_i, x_{i+1}) den Wert c_i annimmt. Wir nennen die Zahl

$$I(f) := \sum_{i=0}^{n} c_i (x_{i+1} - x_i)$$

Das **Integral** von f über $[a, b]$ und schreiben auch $I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$

Lemma 7.2.2. *Der Wert von $I(f)$ ist unabhängig von der Wahl der Unterteilung.*

Betrachte hierfür die gemeinsame Verfeinerung, bei der alle Zwischenpunkte aus zwei verschiedenen Unterteilungen vorkommen.

Satz 7.2.3. *Die Abbildung $I(f)$ ist ein* ***lineares Funktional****, es gilt also:*

(i) $\forall f, g \in T([a,b]) : \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$

(ii) $\forall f \in T([a,b]) : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$

Die Abbildung ist außerdem Monoton, es gilt also:

3. $\forall f, g \in T([a,b]) : \left(\forall x : f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g \right)$

Ferner gelten folgende obere Schranken für den Betrag der Abbildung:

4. $\forall f, g \in T([a,b]) : \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a)\|f\|$

7.3 Integration von Regelfunktionen

Definition 7.3.1. Sei f eine Regelfunktion auf $[a,b]$ und sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir definieren das Integral von f als:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)dx$$

Satz 7.3.2. *Der gesuchte Grenzwert existiert für jede Regelfunktion.*

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Per Definition konvergiert die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq n_0 : \|t_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Für $m, n \geq n_0$ gilt nun unter Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\|t_m - t_n\| \leq \|t_m - f\| + \|t_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

Gemäß 7.2.3 folgt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b t_m - \int_a^b t_n \right| &= \left| \int_a^b (t_m - t_n) \right| && (7.2.3.1) \\
&\leq (b-a)\|t_m - t_n\| && (7.2.3.4) \\
&< (b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Also ist

$$I_t := \left(\int_a^b t_n(x)dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge reeller Zahlen, also konvergent. $\square$

Satz 7.3.3. *Das Integral ist unabhängig von der Wahl der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Treppenfunktionen.*

Beweis. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in $T([a,b])$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Durch die gleichmäßige Konvergenz gegen f existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sodass:

$$\forall n \geq n_1 : \|f - t_n\| < \frac{\varepsilon}{2(a-b)}$$

und

$$\forall n \geq n_2 : \|f - u_n\| < \frac{\varepsilon}{2(a-b)}$$

Für $n_0 = \max n_1, n_2$ gilt also

$$\forall n \geq n_0 : \|t_n - u_n\| \leq \|t_n - f\| + \|u_n - f\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Analog zum vorherigen Beweis folgt durch 7.2.3

$$\left| \int_a^b t_n - \int_a^b u_n \right| \leq (a,b)\|t_n - u_n\| < \varepsilon$$

Also konvergiert die Folge $\left(\int_a^b t_n - \int_a^b u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null, also ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n$$

□

Satz 7.3.4. *Genau wie im Fall der Treppenfunktionen ist das Integral einer Regelfunktion ebenfalls ein beschränktes monotones lineares Funktional.*

Anmerkung 7.3.5. Es gilt desweiteren:

(i) $\int_a^b 1 = b - a$

(ii) $\forall f \in T([a,b]) : \forall z \in [a,b] : \int_a^b f = \int_a^z f + \int_z^b f$

Gemeinsam mit Linearität und Monotonizität, welche im Vorherigen Satz bewiesen wurden, definieren diese Vorschriften die Integralabbildung bereits eindeutig.

Satz 7.3.6. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Regelfunktionen, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren. Dann ist f eine Regelfunktion und es gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Satz 7.3.7. ***Mittelwertsatz der Integralrechnung:*** *Seien $f, g \in R([a,b])$, sei f stetig und $g(x) \geq 0$. Dann existiert ein $c \in [a,b]$, sodass:*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

> *Beweis.* Nach dem Satz von Weierstrass (Extremwertsatz) nimmt die stetige Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ ein Minimum m und ein Maximum M an. Aus $m \leq f(x) \leq M$ und $g(x) \geq 0$ folgt $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, also auch:
>
> $$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$
>
> Also ist $\int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx$ für eine Zahl $\alpha \in [m, M]$. Da α also zwischen den Extremwerten von f liegt gibt es gemäß Zwischenwertsatz eine Zahl $c \in [a,b]$ mit $f(c) = \alpha$. □

Korollar 7.3.8. *Sei $f \in R([a,b])$ und sei f stetig Dann existiert ein $c \in [a,b]$, sodass:*

$$\int_a^b f = f(c)(a-b)$$

> *Beweis.* Dies ist der vorherige Satz im Fall $g(x) = 1$. □

7.4 Hauptsatz der Integralrechnung

Definition 7.4.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Lemma 7.4.2. *Seien F und G Stammfunktionen einer Funktion f. So gilt $\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c$.*

> *Beweis.* Es gilt $F' = G' = f$, also
>
> $$(F - G)' = F' - G' = 0.$$
>
> Somit ist die Funktion $F - G$ konstant. □

Satz 7.4.3. ***Hauptsatz der Integralrechnung:*** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funk-*

tion, also insbesondere eine Regelfunktion. Definiere die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

So ist F eine Stammfunktion von f. (Achtung: a ist keine beliebige Konstante, sondern der kleinste Punkt im Definitionsbereich!)

Beweis. **Beweis nach Růžička:** Sei $x \in [a, b]$. Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in [a, b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|F(x+h) - F(x) - f(x)h| &= \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt - f(x)h \right| \\
&= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h \right| \\
&= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt \right| \\
&= \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \\
&\leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt && 7.2.3
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da f stetig und auf dem Kompaktum $[a, b]$ definiert ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$\forall x, t \in [a, b] : |t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ist nun $|t - x| \leq \delta$, also $|h| \leq \delta$, folgt

$$\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \int_x^{x+h} \varepsilon dt = |h|\varepsilon$$

Also:

$$\begin{aligned}
&|F(x+h) - F(x) - f(x)h| \leq |h|\varepsilon \\
\implies &\lim_{h\to 0} |F(x+h) - F(x) - f(x)h| = 0 \\
\implies &\lim_{h\to 0} F(x+h) - F(x) - f(x)h = 0 \\
\implies &\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = 0 \\
\implies &\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)
\end{aligned}$$

Also ist f die Ableitung von F. □

Beweis. **Beweis per Mittelwertsatz:** (Dieser Beweis ist übersichtlicher, aber nur, weil die ganze Arbeit an den Mittelwertsatz und den Satz von Rolle abgegeben wurden. Vermutlich also für die mündliche Prüfung also weniger gut geeignet.) Wir betrachten die Ableitung von F. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert nun ein $c_h \in [x, x+h]$, sodass

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = (x+h-x)f(c) \implies \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

Da $c \in [x, x+h]$ folgt $\lim_{h\to 0} c_h = x$, da f stetig ist folgt $\lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$. Also gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$$

□

7.4.1 Partielle Integration

Satz 7.4.4. *Es gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Beweis. Folgt direkt aus dem Hauptsatz der Integralrechnung und der Produktregel:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\ \implies \int_a^b (f(x)g(x))'dx &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx\\ \implies [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx\\ \implies \int_a^b f'(x)g(x)dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

□

Anmerkung 7.4.5. Ich persönlich finde folgende äquivalente Schreibweise einfacher anzuwenden:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Beispiel 7.4.6. Ein sehr häufig anwendbarer Trick ist die partielle Integration einer Funktion durch Multiplikation mit der konstanten Einsfunktion, z.B:

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int 1 \cdot \ln(x)dx \\ &= x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= x\ln(x) - \int 1dx \\ &= x\ln(x) - x\end{aligned}$$

Beispiel 7.4.7. Im Fall $f = g$ erhält man durch partielle Integration das gleiche Integral ein zweites Mal und kann daraufhin die Gleichung durch Umstellen lösen:

$$\begin{aligned}\int f'(x)f(x)dx &= f(x)f(x) - \int f(x)f'(x)dx \\ \implies 2\int f'(x)f(x)dx &= f(x)^2 \\ \implies \int f'(x)f(x)dx &= \frac{1}{2}f(x)^2\end{aligned}$$

Diese Formel hat zahlreiche direkte Anwendungen:

- $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2$
- $\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin(x)^2 = -\frac{1}{2}\cos(x)^2$

7.4.2 Integration durch Substitution

Chapter 8

Potenzreihen

Definition 8.0.1. Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

wobei a_k eine Folge ist.

Satz 8.0.2. *Der* ***Konvergenzradius*** *einer Potenzreihe ist das Supremum der Beträge von x, für die die Potenzreihe konvergiert.*

Satz 8.0.3. *Jede Potenzreihe ist auf jedem Kompaktum innerhalb des Konvergenzradius absolut konvergent.*

Satz 8.0.4. *Potenzreihen sind innerhalb des Potenzradius unendlich oft differenzierbar.*

8.1 Taylorreihen

Satz 8.1.1. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbar, so gibt es für alle $x \in I$ ein $\xi \in [p, x]$ mit:*

$$f(x) = \sum_{v=0}^{n} \frac{f^v(p)}{v!}(x-p)^v + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

Diese Darstellung ist bekannt als die *Lagrange-Darstellung des Restglieds.*

> *Beweisskizze.* Durch den verallgemeinerten Mittelwertsatz. "□"

Satz 8.1.2. *Ist $f^{(n+1)}$ zusätzlich auf I stetig, so gilt die direkte Formel:*

$$f(x) = \sum_{v=0}^{n} \frac{f^v(p)}{v!}(x-p)^v + \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Diese Darstellung ist bekannt als die *Integraldarstellung des Restglieds.*

Beweis. Wiederholtes partielles Integrieren der Lagrange-Darstellung. □

8.2 Die Exponentialfunktion

Definition 8.2.1. Wir definieren die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die Potenzreihe:

$$\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Satz 8.2.2. *Der Konvergenzradius der Exponentialfunktion ist unendlich.*

Beweis. Das Quotientenkriterium gibt uns:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1} k!}{x^k (k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{k} = 0,$$

also ist das Quotientenkriterium unabhängig von x immer erfüllt, also ist der Konvergenzradius unendlich. □

Chapter 9

Der Euklidische Raum

Lemma 9.0.1. *Sei $(V, \langle\_,\_\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann wird durch*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

auf V eine Norm erklärt. Diese bezeichnet man als die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

Definition 9.0.2. Seu $(V, \langle\_,\_\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, Die Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal**, wenn

$$\langle u, v\rangle = 0$$

ist. Für $u, v \in V \setminus \{0\}$ Wird die reelle Zahl

$$\varphi = \arccos \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \; \|v\|}$$

als der Winkel zwischen u und v bezeichnet.

Anmerkung 9.0.3. Es gilt

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \; \|v\|} \leq 1$$

Lemma 9.0.4. *Für $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei*

$$\|X\|_{\max} := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Dann ist $||\_||_{\max}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und es gilt

$$\|X\|_{\max} \leq \|X\| \leq \sqrt{n}\|X\|_{\max}$$

Satz 9.0.5. *Die Menge $\mathbb{Q}^n$ der Punkte mit rational Koordinaten ist dicht in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $X \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist gilt

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \exists y_i \in \mathbb{Q} : |x_i - y_i| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Durch Lemma 9.0.4 folgt:

$$\|x - y\| \leq \sqrt{n}\|X - Y\| < \varepsilon$$

□

Satz 9.0.6. *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^n$. Sei $X_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. Dann gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X \Leftrightarrow \forall i : \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Insbesondere ist X_k eine Cauchyfolge, wenn die Komponenten Cauchyfolgen sind.

Beweis. $X_k \to X$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : \|X_k - X\| \leq \varepsilon \implies \forall i : \left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Und umgekehrt:

$$\forall i : x_i^{(k)} \to x_i, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \implies \exists k_0^i \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0^i \left|x_i^{(k)} - x_i\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} k_0 := \max\{k_0^n, \ldots, k_0^n\} &\implies \forall k \geq k_0 : \left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \\ &\implies \|X_k - X\| \leq \sqrt{n}\|X_k - X\| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 9.0.7. *Für konvergente Folgen $(X_k), (Y_k) \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} (X_k + Y_k) = \lim_{k\to\infty} X_k + \lim_{k\to\infty} Y_k \tag{9.1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k X_k = \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_k\right)\left(\lim_{k\to\infty} X_k\right) \tag{9.2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \langle X_k, Y_k\rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} X_k, \lim_{k\to\infty} Y_k \right\rangle \tag{9.3}$$

Satz 9.0.8. *$\mathbb{R}^n$ ist vollständig.*

Beweis. Ist X_k eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, so sind nach Satz 9.0.6 alle Teilfolgen Cauchy in $\mathbb{R}$. Also:

$$\exists x_i \in \mathbb{R} : x_i^{(k)} \to x_i \implies \exists X \in \mathbb{R}^n : X_k \to X$$

□

Satz 9.0.9. ***(Bolzano-Weierstrass:)*** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (X_k) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$. Nach 9.0.4 müssen die Komponentenfolgen ebenfalls beschränkt sein. Nach dem eindimensionalen Fall des Satzes von Bolzano-Weierstrass existieren also konvergente Teilfolgen der Koordinatenfolgen. Angenommen, die konvergente Teilfolge der ersten Komponente ist gegeben durch $x_1^{(k_n)} \to x_1$. So ist $x_2^{(k_n)}$ ebenfalls eine beschränkte Teilfolge, also existiert eine Teilfolge $x_2^{(k_n)_m}$ welche in den ersten beiden Komponenten konvergiert. Führt man dieses Verfahren induktiv fort, erhält man eine konvergente Teilfolge von (X_k). □

Satz 9.0.10. *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter nichtleerer Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, sodass $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$*

Beweis. $A_i \neq \emptyset \implies \exists X_i \in A$ sd. $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist. Da A_i beschränkt ist ist $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also hat X_i eine konvergente Teilfolge X_{i_k} mit Limes X. Es gilt $X_{i_k} \in A_{i_k} \subseteq A_i$, also ist X ein Berührpunkt von A_i, also $X \in A_i$. □

Satz 9.0.11. *Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

Beweis. Analog zur eindimensionalen Version, wobei statt Intervallen $[a_i, b_i]$ Hyperwürfel $[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \times \ldots \times [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$ genutzt werden müssen. □

Satz 9.0.12. *Seien $\|\_\|_1$ und $\|\_\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. So existieren $k, K \in \mathbb{R}^+$ mit*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : k\|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq K\|X\|_1$$

Beweis. Diese Normenäquivalenz bildet eine Äquivalenzrelation. Es reicht also, zu zeigen, dass jede Norm $||\_||_2$ äquivalent zu einer spezifischen Norm $\|\_\|_1$ ist. Wir wählen $\|\_\|_{\max}$.
Sei (E_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren:

$$K := \|E_1\|_2 + \ldots + \|E_n\|_2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|X\|_2 &= \|x_1E_1 + \ldots + x_nE_n\| \\ &\leq |x_1|\|E_1\|_2 + \ldots + |x_n|\|E_n\|_2 \\ &\leq \|X\|_{\max}K \quad {}^{\text{[citation needed]}}\end{aligned}$$

Es bleibt die Rückrichtung zu zeigen.

Lemma 9.0.13. *$f(X) := \|X\|_2$ ist stetig.*

Beweis.

$$|\|X\|_2 - \|Y\|_2| \leq \|X - Y\|_2 \leq K\|X - Y\|_{\max} \leq K\|X - Y\|$$

Also ist $\|\_\|_2$ stetig bezüglich der euklidischen Norm $\|\_\|$. □

Wir definieren nun:

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n \mid ||X||_{\max} = 1\}$$

Diese Menge ist beschränkt. Wir wollen Zeigen, dass sie außerdem abgeschlossen ist. Sei $X_i \to X$, $X_i \in A$. Es gilt:

$$|\|X_i\|_{\max} - \|X\|_{\max}| \leq \|X_i - X\|_{\max} \leq \|X_i - X\|$$

Also konvergiert jede Menge, also ist A kompakt, also auch abgeschlossen. Dementsprechend muss f auf A ein Minimum k annehmen. Wir wissen $f \geq 0$, also ist$k \geq 0$. Es gilt sogar $k > 0$, da keiner der Vektoren in A der Nullvektor ist. Nun gilt also $\forall X \in A : ||X||_2 \geq k$. Wir definieren:

$$\lambda := \frac{1}{\|X\|_{\max}}$$

$$\|\lambda X\|_{\max} = |\lambda|\|X\|_{\max} = 1$$

$$|\lambda|\|X\|_2 = \|\lambda X\|_2 \geq k \implies \|X_2\| \geq k\|X\|_{\max}$$

□

Anmerkung 9.0.14. Im unendlichdimensionalen Fall gilt Satz 9.0.12 nicht.

9.1 Abbildungen und Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Betrachten wir zuerst den Spezialfall Linearer Funktionen, also $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : F(\lambda X + \mu Y) = \lambda F(X) + \mu F(Y)$.

Sei (E_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und sei (E'_i) die Standardbasis des $\mathbb{R}^k$. Nun gilt:

$$F(E_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i$$

Daraus erhalten wir Koeffizienten a_{ij}, welche eine Matrix bilden. Umgekehrt können wir aus den Koeffizienten die Abbildung F rekonstruieren, indem wir definieren:

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j E_j\right) \\ &= \sum x_j F(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) E'_i \end{aligned}$$

[missing stuff here]

Definition 9.1.1. Wir bezeichnen als $p_i : M \to k$ die Projektion eines Vektors auf die i-te Komponente.

Satz 9.1.2. *Sei M ein metrischer Raum, $F : M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x \in M$. Dann ist F stetig in x genau dann, wenn $p_i \circ F$ stetig für alle i ist.*

Beweis. (i) p_i ist stetig. Ist also F stetig folgt direkt, dass auch $p_i \circ F$ stetig ist.

(ii) Angenommen, $p_i \circ F$ ist stetig $\forall i$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $p_i \circ F$ stetig ist existiert eine Umgebung U_i von x, sodass $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \forall y \in U_i$. Ebenso für die anderen Komponenten. Nun gilt:

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sqrt{n}\|F(x) - F(y)\|_{\max} \leq \varepsilon$$

□

Analog gilt das Selbe für Stetigkeit auf M, gleichmäßige Stetigkeit, etc.

Definition 9.1.3. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, x_0 ein Häufungspunkt, $y \in \mathbb{R}^k$. Dann definieren wir:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in M \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| \leq \delta \implies \|F(x) - y\| < \varepsilon$$

F ist stetig in x_0 genau dann, wenn $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Satz 9.1.4. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, $X_0 \in M$ ein Häufungspunkt, $Y \in \mathbb{R}^k$ und $f_i = p_i \circ F$. Dann gilt:*

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = Y \Leftrightarrow \forall i : \lim_{X \to X_0} f_i(X) = y_i$$

Beweis. Analog zu Beweis 9.1.2. □

Korollar 9.1.5.

$$F(X) \to Y, G(X) \to Z \implies F(X) + G(X) \to Y + Z$$

9.2 Mehrdimensionale Ableitungen

Beispiel 9.2.1. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ definiert auf einer offenen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$f(X) = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ bzgl. der Standardbasis}$$

Wir können aber auch $X = \sum x_i' E_i'$ bezüglich einer beliebigen anderen Basis darstellen. Also:

$$f(X) = f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1', \ldots, x_n')$$

Da f in der Regel nicht linear ist, ist ein solcher Basiswechsel sehr viel komplizierter als in der Linearen Algebra! Wo möglich ist es also besser, über $f(X)$ zu reden.

Definition 9.2.2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{X} \in M$. Betrachte die Abbildung

$$t \to f(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_{i-1}, t, \overline{x}_{i+1}, \dots, \overline{x}_n),$$

welche eine Mehrdimensionale Funktion $f(x_1, \dots x_n)$ auf eine eindimensionale Funktion $f(t)$ abbildet. <u>Achtung:</u> Wir nehmen hier implizit eine Darstellung bezüglich der Standardbasis an!

Beispiel 9.2.3. Betrachte folgende Funktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f ist an $(0,0)$ partiellen differenzierbar, die Partiellen Ableitungen sind 0. Allerdings gilt

$$\forall x : f(x,x) = \frac{1}{2}$$

Also ist f an 0 nicht stetig! Es existieren also Funktionen, die an einem Punkt partiell Differenzierbar sind, an dem sie nicht stetig sind.

<u>Idee:</u> Fordere partielle Differenzierbarkeit bezüglich jeder möglichen Basis, also partielle Differenzierbarkeit in jedem Vektor.

Beispiel 9.2.4.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wir betrachten die "Linearisierung" $t \to f(t, \alpha t)$. Einsetzen liefert:

$$f(t, \alpha t) = \frac{\alpha t}{t^2 + a^2}$$

Diese Funktion ist differenzierbar, also ist f differenzierbar bezüglich beliebiger Basen. Das reicht jedoch immer noch nicht:

$$f(a, a^2) = \frac{a^2 a^2}{a^4 + a^4} = \frac{1}{2}$$

Also ist f immer noch nicht stetig - es ist stetig für Folgen, welche den Nullpunkt durch Geraden erreichen, aber nicht, wenn wir durch kompliziertere Pfade gegen den Nullpunkt gehen.

Wir wollen die Begriffe aus der Analysis I über Stetigkeit und Ableitbarkeit retten, also brauchen wir einen komplizierteren Ableitungsbegriff.

9.3 Differenzierbarkeit

Sei f eine beliebige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Ableitung gibt uns die Tangente der Funktion an einem beliebigen Punkt, also die beste affine Approximation der Funktion an diesem Punkt.

Definition 9.3.1. Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ heißt **affin**, wenn es eine Lineare Funktion $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und eine Konstante $Z \in \mathbb{R}^k$ gibt, sodass:

$$F(X) = L(X) + Z$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affin, also $g(x) = cx + t$ für $c, t \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wollen eine beliebige Funktion f an der Stelle x_0 approximieren. Für eine gute Approximation wollen wir $f(x_0) = g(x_0)$, also erhalten wir:

$$g(x) = c(x - x_0) + f(x_0).$$

Schreibe $x = x_0 + h$ und lasse h gegen 0 gehen.

$$h \to f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$$

Wir sagen, die Approximation ist gut, wenn $f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$ schneller gegen 0 geht als h selbst, also:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ch}{h} = 0 \tag{9.4}$$

Was äquivalent ist zu:

$$c = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wir sagen also, f ist in x_0 differenzierbar, genau dann, wenn eine lineare Abbildung L existiert, sodass:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

Diese geometrische Intuition, nach der die Ableitung die beste affine Approximation der Funktion an einem gegebenen Punkt ist, können wir auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen. Analog zu der Interpretation affiner Funktionen als Geraden in $\mathbb{R}$, also der Ableitung als das Finden einer Tangentengeraden auf dem Funktionengraph, sucht man beim Ableiten einer Mehrdimensionalen Funktion eine Tangenten(hyper-)ebene auf dem Funktionengraph.

Definition 9.3.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, sei $X_0 \in M$. Die Abbildung F heißt **differenzierbar** am Punkt X_0, wenn es eine Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gibt, sodass:

$$\lim_{H \to 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = 0.$$

Wir nennen sie das **Differenzial von F im Punkt** X_0 und notieren sie als DF_{X_0}. F heißt differenzierbar, wenn sie differenzierbar an jedem Punkt $X \in M$ ist.

Anmerkung 9.3.3. Im Fall $n = m = 1$ (also bei eindimensionaler Urbild- und Bildmenge) sind lineare Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau durch Multiplikation mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gegeben. In diesem Fall vereinfacht sich die Bedingung zu:

$$\begin{aligned}
&\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - ch}{|h|} = 0 \\
\implies &\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} = \lim_{h\to 0} -\frac{ch}{|h|} \\
\implies &\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} = c
\end{aligned}$$

Was genau die Definition von Differenzierbarkeit im Eindimensionalen ist.

Anmerkung 9.3.4. Ist die Funktion F linear, so ist sie durch Matrixmultiplikation $f : x \to Ax$ gegeben und es gilt trivial für alle x $DF_x = A$.

Anmerkung 9.3.5. Differenzierbarkeit kann analog über die Eigenschaften des Restglieds $R(X, X_0)$ definiert werden: Sei

$$f(X) = f(X_0) + Df_{X_0}(X - X_0) + R(X, X_0).$$

Dann ist f genau dann differenzierbar, wenn:

$$\lim_{X\to X_0} \frac{R(X, X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$$

Satz 9.3.6. *Gibt es ein Differential, ist es eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien L_1, L_2 Differentiale. Es folgt:

$$\lim_{H\to 0} \frac{L_1(H) - L_2(H)}{\|H\|} = 0$$

Sei $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\lim_{t\to 0} \frac{L_1(tX) - L_2(tX)}{\|tX\|} = 0$$

$$\implies \frac{L_1(X) - L_2(X)}{\|X\|} = 0$$

$$\implies L_1(X) - L_2(X) = 0$$

also sind die beiden Differentiale identisch. □

Anmerkung 9.3.7. Unserer Differenzierbarkeitsbegriff wird insbesonders in der älteren Literatur oft als **totale Differenzierbarkeit** bezeichnet.

Satz 9.3.8. *Ist $F : M \to \mathbb{R}^k$ an einem Punkt X_0 differenzierbar, so ist F an diesem Punkt stetig.*

Beweis. Sei F differenzierbar. Da die Differenzierbarkeit über den Limes des Differentialquotienten definiert ist folgt direkt:

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall H \in M : (X_0 + H \in M) \wedge (0 \leq \|H\| \leq \delta_1)\\ \implies \frac{\|F(X_0 + M) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \leq \frac{\varepsilon}{2}\\ \implies \|F(X_0 + M) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|H\|\end{aligned}$$

Da DF_{X_0} eine lineare Abbildung ist ist DF_{X_0} gleichmäßig stetig, also gilt:

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ : \|H\| < \delta_2 \implies \|DF_{X_0}(H)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Also gilt für $\|H\| \leq \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$

$$\begin{aligned}&\|F(X_0 + H) - F(X_0)\|\\ =&\|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H) + DF_{X_0}(H)\|\\ \leq&\|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\| + \|DF_{X_0}(H)\|\\ \leq&\frac{\varepsilon}{2}\|H\| + \frac{\varepsilon}{2}\\ \leq&\varepsilon\end{aligned}$$

□

Satz 9.3.9. *Sind F und G differenzierbar, so auch $F + G$, und es gilt*

$$D(F + G)_{X_0} = DF_{X_0} + DG_{X_0}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}&\lim_{H \to 0} \frac{(F + G)(X_0 + H) - (F + G)(X_0) - (DF_{X_0} + DG_{X_0})}{\|H\|}\\ =&\lim_{H \to 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}}{\|H\|} + \lim_{H \to 0} \frac{G(X_0 + H) - G(X_0) - DG_{X_0}}{\|H\|}\\ =&0\end{aligned}$$

□

Satz 9.3.10. ***Kettenregel:*** *Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, seien $F : M \to N$, G :*

$N \to \mathbb{R}^m$ Abbildungen, sei X_0

Beweis. Sei $F(X_0) = Y_0, F(X_0 + H) - F(X_0) = Z$, $H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X_0 + H \in M$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|H\|}((G \circ F)(X_0 + H) - (G \circ F)(X_0) - DG_{F(X_0)} \circ DF_{X_0}(H)) \\
=&\frac{1}{\|H\|}(G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) \\
=&\frac{1}{\|H\|}(DG_{Y_0}(F(X_0 + H) - F(X_0)) - DG_{Y_0}(DF_{X_0}(H))) \\
=&\frac{1}{\|H\|}DG_{Y_0}((F(X_0 + H) - F(X_0)) - DF_{X_0}(H))
\end{aligned}$$

$$\lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|}DG_{Y_0}((F(X_0 + H) - F(X_0)) - DF_{X_0}(H)) = DG_{Y_0}(0) = 0$$

$$\frac{1}{\|H\|}(G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) = \begin{cases} 0 & Z_H = 0 \\ \frac{1}{\|H\|}(G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) & Z_H \neq 0 \end{cases}$$

Der Term zweite Term in $Z_H \neq 0$ geht gegen 0 für $H \to 0 \implies Z_H = F(X_0 + H) - F(X_0) \to 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\|Z_H\|}{\|H\|} &= \frac{\|F(X_0 + H) - F(X_0)\|}{\|H\|} \\
&= \frac{\|DF_{X_0}(H) - R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\leq \frac{\|DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\leq \frac{\|DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\overset{???}{\leq} \frac{\|DF_{X_0}\|\|H\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&= \|DF_{X_0}\| + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\leq c
\end{aligned}$$

□

Satz 9.3.11. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $N \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, seien $F : I \to N$, $G : N \to \mathbb{R}^n$ Abbildungen.*

Ist F differenzierbar in $t_0 \in I$ und G differenzierbar in $F(t_0)$, so gilt:

$$(G \circ F)'(t_0) = DG_{F(t_0)}(F'(t_0))$$

Beweis. Gemät Kettenregel gilt $D(G \circ F) = DG_{F(t_0)} \circ DF_{t_0}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} h(G \circ F)'(t_0) &= hD(G \circ F)_{t_0}(1) \\ &= D(G \circ F)_{t_0}(h) \\ &= DG_{F(t_0)}(DF_{t_0}(h)) \\ &= hDG_{F(t_0)}(F'(t_0)) \end{aligned}$$

□

Mittelwertsatz: $f : [x, y] \to \mathbb{R}$, dann $\exists y : f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$. Im Allgemeinen ist dieser im Mehrdimensionalen Fall leider falsch.

Betrachte allerdings die folgende Ungleichung, welche die Wichtigste Konsequenz des Mittelwertsatzes ist: $|f(y) - f(x)| \leq |f'(z)||y - x| \leq c|y - x|$. Diese kann im Allgemeinen erhalten werden.

$F : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $X, Y \in M$. Sei $[X, Y] = \{(1 - \lambda)X + \lambda Y\}$ die Verbindungslinie zwischen den beiden Vektoren.

Satz 9.3.12. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X, Y \in M$ mit $[X, Y] \subseteq M$. Die Abbildung $F : M \to \mathbb{R}^k$ sei stetig in M und differenzierbar in den Punkten $(1 - \lambda)X + \lambda Y$ mit $\lambda \in (0, 1)$. Gilt*

$$\forall \lambda \in (0, 1) : \forall (1 - \lambda)X + \lambda Y : \|DF_Z\| \leq c$$

so gilt auch

$$\|F(Y) - F(X)\| \leq c\|Y - X\|$$

Beweis. Angenommen $G : [0, 1] \to \mathbb{R}^k$ ist stetig auf $[0, 1]$ und differenzierbar auf $(0, 1)$. So gilt

$$\forall t \in (0, 1) : \|G'(t)\| \leq c$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und

$$A := \{t \in [0, 1] \mid \|G(t) - G(0)\| \leq (c + \varepsilon)t + \varepsilon\}$$

Da G stetig in 0 ist gilt $[0, \tau] \subseteq A$.

Sei $s = \sup A$. Es gilt $0 < s \leq 1$, also ist G stetig in s.

Da $t \in A \implies t \leq s$

$$\|G(t) - G(0)\| \leq (c+\varepsilon)t + \varepsilon \to s \implies \|G(s) - G(0)\| \leq (c+\varepsilon)s + \varepsilon$$

also $s \in A$. Angenommen, $s < 1$. Dann gilt $\exists h > 0 : s + h < 1$.

$$\left\| \frac{G(s+h) - G(s)}{h} - G'(s) \right\| \leq \varepsilon$$

$$\implies \left\| \frac{G(s+h) - G(s)}{h} \right\| \leq \varepsilon + G'(s) \leq c + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \|G(s+h) - G(0)\| &\leq \|G(s+h) - G(s)\| + \|G(s) - G(0)\| \\ &\leq (c+\varepsilon)h + (c+\varepsilon)s + \varepsilon \\ &\leq (c+\varepsilon)(s+h) + \varepsilon \end{aligned}$$

Daraus folgt $s + h \in A$. Da s das Supremum ist ist dies ein Widerspruch. Also gilt $h = 1$.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \|G(1) - G(0)\| \leq & c + \varepsilon + \varepsilon = c + 2\varepsilon \\ \implies & \|G(1) - G(0)\| \leq c \end{aligned}$$

Sei F wie im Satz. Sei $K : [0,1] \to \mathbb{R}^n : t \to (1-t)X + tY$. Diese Abbildung ist affin, also differenzierbar. Es gilt $K'(t) = Y - X$. $F \circ K$ ist diffbar in $(0,1)$

$$D(F \circ K)_t = DF_{K(t)} \circ DK_t$$

$$(F \circ K)'(t) = DF_{K(t)}(K'(t)) = DF_{K(t)}(Y - X)$$

$$\|(F \circ K)'(t)\| = \left\|DF_{K(t)}(Y - X)\right\| \leq \left\|DF_{K(t)}\right\| \|Y - X\| \leq c\|Y - X\|$$

Mit $G := F \circ K$ und $c := c\|Y - X\|$

$$\|F(Y) - F(X)\| \leq c\|Y - X\|$$

□

[missing stuff - gradients]

Definition 9.3.13. Eine Funktion f heißt **partiell differenzierbar**, wenn für jede Koordinatenachse i die Partielle Ableitung $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : \partial_i f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : X \to$

$\delta_i f(X)$ existiert.

Satz 9.3.14. *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von X_0 partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen in X_0 stetig, so ist f in X_0 differenzierbar.*

Beweis. Sei U ein offener Ball um X_0, welcher vollständig in M enthalten ist. Sei $H \in \mathbb{R}^n$, sodass $X_0 + H \in U$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(X_0 + H) - f(X_0) = &\sum_{i=1}^{n} (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \ldots, x_i + h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n)) \\ &- \sum_{i=1}^{n} (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \ldots, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n)) \end{aligned}$$

Die Summenglieder sind partielle Ableitung. Nach Mittelwertsatz erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{n} h_1 \partial_i f(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ c_i \in (0,1)$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|H\|} \left| f(X_0 + H) - f(X_0) - \left\langle \vec{\nabla} f(X_0), H \right\rangle \right| \\ =&\frac{1}{\|H\|} \left| \sum_{i=1}^{n} h_1 \partial_i f(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n) - \partial_i (f(x_0, \ldots, x_n)) \right| \\ \leq& \left| \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n) - \partial_i (f(x_0, \ldots, x_n)) \right| \to 0 \end{aligned}$$

□

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X_0 \in M$, $F : M \to \mathbb{R}^k$. Seien $\forall i \in \{1, \ldots, n\} f : M \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Koordinatenfunktionen.

$$F(X) = (f_1(X), \ldots, f_k(X)) = \sum_{i=1}^{k} f_i(X) E_i'$$

$$Y = F(X) \Leftrightarrow \forall i : y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{9.5}$$

Satz 9.3.15. *Die Abbildung F ist genau dann differenzierbar in X_0, wenn alle Koordinatenfunktionen f_i in X_0 differenzierbar sind. Ist das der Fall, gilt:*

$$DF_{X_0}(H) = \sum_{i=1}^{k} (Df_i)_{X_0}(H) E_i' \forall H \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann

$$\lim_{H\to 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{H\to 0} \frac{f_i(X_0 + H) - f_i(X_0) - (D_i \circ L)(H)}{\|H\|} = 0$$

□

Wir wollen nun das Differential bezüglich der Standardbasis übersichtlich darstellen. Es gilt:

$$L(E_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i$$

$$DF_{X_0} = \sum_{i=1}^{k} \partial_j f_i(X_0) E'_j$$

Die Koeffizienten der Darstellenden Matrix sind also identisch mit den Partiellen Ableitungen.

Satz 9.3.16. *Sei $F : M \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $X_0 \in M$. Dann wir das Differential DF_{X_0} bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^k$ beschrieben als die $k \times n$-Matrix*

$$JF(X_0) = (\delta_j f_i(X_0))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k}$$

Sie heißt die Funktionalmatrix oder Jacobimatrix von F in X_0. Falls $k = n$ wird die Determinante dieser Matrix als Funktionaldeterminante oder Jacobideterminante von F in X_0 bezeichnet.

[missing stuff]

Satz 9.3.17. *Ist $r \geq 2$ und $f \in C^r(M)$, so sind die partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung r unabhängig von der Reihenfolgen es gilt also:*

$$\partial_1 \dots \partial_r f = \partial_{\sigma(1)} \dots \delta_\sigma(r) f$$

Satz 9.3.18. ***Taylor-Formel***: *Sei $g : [-\varepsilon, h] \to \mathbb{R}$ $\varepsilon, h > 0$. Sei g $(k+1)$- mal differenzierbar. Dann gilt:*

$$\exists c \in (0, h) : g(h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) h^j + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(c) h^{k+1}$$

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in M$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(M)$ mit partielle differenzierbaren partiellen Ableitungen k-ter Ordnung, $H \in \mathbb{R}^n : [x_0, x_0 + H] \subseteq M$. Sei $g(t) := f(x_0 + tH)$. Dann gilt für $r \in \{1, \dots, k+1\}$:

$$g^{(r)}(t) = \sum_{i_1,\dots i_r}^{n} \delta i_1 \dots \delta i_r f(X_0 + tH) h_{i_1} \dots h_{i_r}$$

$$g(1) = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} g^{(r)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(c)$$

Satz 9.3.19. ***Mehrdimensionale Taylorformel:*** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X_0 \in M$, $H \in \mathbb{R}^n$ mit $[X_0, X_0 + h] \subseteq M$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(M)$, sodass die partiellen Ableitungen der Ordnung k in M differenzierbar sind. Dann $\exists c \in (0,1)$, sodass:*

$$f(X_0+h) = f(X_0) + \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r!} \sum_{i_1,\dots i_r=1}^{n} \delta i_1 \dots \delta i_r f(X_0+tH) h_{i_1} \dots h_{i_r} + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1,\dots i_r=1}^{n} \delta i_1 \dots \delta i_r f(X_0+cH) h_{i_1} .$$

Kompakter für $k = 2$:

$$f(X_0+H) = f(X_0) + \left\langle \vec{\nabla} f(X_0), H \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(X_0) h_i h_h + R(X_0, h)$$

$$R(X_0, H) = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{n} \delta_i \delta_j \delta_k f(Y) h_i h_j h_k \quad Y \in [X_0, X_0+H]$$

Falls die dritten Ableitungen auf der Verbindungslinie beschränkt sind gilt:

$$\lim_{H \to 0} \frac{R(X_0; H)}{\|H\|^2} = 0$$

Satz 9.3.20. *Sei $f : M \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in X_0. Dann heißt die durch*

$$Q(f, X_0; H) := \sum_{i,j=1}^{n} \delta_i \delta_j f(X_0) h_i h_j$$

*definierte Funktion $Q(f, X_0; H$ die **Hesse-Form** von f im Punkt X_0 und die dadurch definierte Matrix*

$$Hess(f, X_0)_{ij} = (\partial_i \partial_j f(X_0))$$

*heißt die **Hesse-Matrix** von f in X_0.*

[...]

Lemma 9.3.21. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, sei $X, Y \in M$ mit $[X, Y] \subseteq M$. Dann gilt:*

$$\|F(X) - F(Y) - L(X - Y)\| \leq \|X - Y\| \cdot \max_{Z \in [X,Y]} \|DF_Z - L\|$$

Beweis.

$$G(X) := F(X) - L(X) \quad X \in M$$

$$DG_Z = DF_Z - L$$

Dann muss für $F \in C^1$ folgende Funktion stetig sein:

$$Z \to \|DF_Z - L\|$$

Zusätzlich ist $[X, Y]$ kompakt, also existiert das Maximum

$$\max_{Z \in [X,Y]} \|DF_Z - L\| := c$$

Gemäß Mittelwertsatz ist nun

$$\|F(X) - F(Y) - L(X - Y)\| \leq c\|X - Y\|$$

□

Satz 9.3.22. *Sei $M \subseteq R^n$ offen. Sei $\vec{x}_0 \in M$. Sei $F : M \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Abbildung ($r \in \mathbb{N}_1$). Sei das Differential $DF_{\vec{x}_0}$ regulär, also $\det JF(\vec{x}_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von $\vec{x}_0$, sodass folgendes gilt:*

(i) die Einschränkung $F|_U$ ist injektiv

(ii) die Bildmenge $F(U) := V$ ist offen

(iii) die Umkehrabbildung $(F|_U)^{-1} : V \to U$ ist C^r.

Beweis. Sei I die Identitätsabbildung des $\mathbb{R}^n$. Sei $U(0, \alpha) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} < \alpha\}$.

<u>Annahmen</u>: $\vec{x}_0 = 0$, $F(0) = 0$ (Erfüllbar durch Verschieben), $DF_0 = I$ (Erfüllbar durch invertierbare Lineare Abbildung der Funktion?)

$\vec{x} \to \|DF_{\vec{x}} - I\|$ ist stetig mit $\|DF_0 - I\| = 0$. Also gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha > 0 : \forall \vec{x} \in U_\alpha : \|DF_{\vec{x}} - I\| \leq \varepsilon$$

Nach 4.3 folgt:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in U_\alpha : \|F(\vec{x}) - F(\vec{y}) - (\vec{x} - \vec{y})\| \le \varepsilon \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - \vec{y}\| &\le \|\vec{x} - \vec{y} - (F(\vec{x}) - F(\vec{y}))\| + \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\| \\ &\le \varepsilon\|\vec{x} - \vec{y}\| + \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\|\end{aligned}$$

also:

$$(1 - \varepsilon)\|\vec{x} - \vec{y}\| \le \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\|$$

Also ist $\|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\| = 0$ gdw. $\vec{x} = \vec{y}$, also folgt Injektivität.

Lemma 9.3.23. $U_{(1-\varepsilon)\alpha} \subseteq F(U_\alpha)$

Beweis. Sei $\vec{y} \in U_{(1-\varepsilon)\alpha}$. Wir suchen $\vec{x} \in U_\alpha : \vec{y} = F(\vec{x})$. Wir wollen den Banchschen Fixpunktsatz anwenden. Dafür definieren wir $\varphi : \overline{U_\alpha} \to \mathbb{R}^n$ als:

$$\varphi(\vec{x}) := \vec{y} - F(\vec{x}) + \vec{x}$$

Sei nun $X \in \overline{U_\alpha}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\varphi(\vec{x})\| &\le \|\vec{y}\| + \|F(\vec{x}) - \vec{x}\| \\ &\le \|\vec{y}\| + \varepsilon\|\vec{x}\| \\ &< (1 - \varepsilon)\alpha + \varepsilon\alpha \\ &= \alpha\end{aligned}$$

Sei $X, Z \in \overline{U_\alpha}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}\|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{z})\| &= \|F(\vec{x}) - \vec{x} - (F(\vec{z}) - \vec{z})\| \\ &\le \varepsilon\|\vec{x} - \vec{z}\|\end{aligned}$$

Gemäß Banachschem Fixpunktsatz existert also genau ein $X \in \overline{U_\alpha}$, sodass $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$, also $F(\vec{x}) = \vec{y}$. Da $\varphi(\vec{x}) < \alpha$ gilt auch $\vec{x} \in U_\alpha$. □

Sei nun $V : U_{(1-\varepsilon)\alpha}$ und $U := F^{-1}(V)$. Gemäß Lemma ist U eine Obermenge von V, also ist U eine offene Umgebung von 0. Wir wissen bereits, dass $F|_U$ injektiv ist. Sei also nun $G : V \to U$ die Umkehrabbildung von $F|_U$.

Lemma 9.3.24. *G ist in 0 differenzierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$. So existiert ein $\alpha' \in \mathbb{R}^+$, sodass $U_{\alpha'} \in M$ und

$$\|F(\vec{x}) - \vec{x}\| \leq \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in U_{\alpha'}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &\leq \|\vec{x} - F(\vec{x})\| + \|F(\vec{x})\| \\ &\leq \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\|\vec{x}\| + \|F(\vec{x})\|\end{aligned}$$

also:

$$\|\vec{x}\| \leq (1+\varepsilon')\|F(\vec{x})\| \quad \forall \vec{x} \in U_{\alpha'}$$

Sei nun $\vec{h} \in V$ mit $\left\|\vec{h}\right\| < \alpha'(1-\varepsilon)$. Sei $\vec{x} := G(\vec{h})$. Gemäß Lemma ist $V \subseteq F(U_\alpha)$, also $G(V) \subseteq G(F(U_\alpha))$, also $U \subseteq U_\alpha$, also $\vec{x} \in U$ (?)

Gemäß vorheriger Überlegungen haben wir

$$\|X\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|F(\vec{x})\| = \frac{1}{1-\varepsilon}\left\|\vec{h}\right\| < \alpha'$$

Wir betrachten nun endlich den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}\left\|G(\vec{h}) - \vec{h}\right\| &= \|\vec{x} - F(\vec{x})\| \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon*}{1+\varepsilon'}\|\vec{x}\| \\ &\leq \varepsilon'\|F(\vec{x})\| \\ &\leq \varepsilon'\left\|\vec{h}\right\|\end{aligned}$$

also:

$$\frac{\left\|G(\vec{h}) - \vec{h}\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|} \leq \varepsilon'$$

für alle $0 < \left\|\vec{h}\right\| < \min\{\alpha(1-\varepsilon), \alpha'(1-\varepsilon)\}$, also ist G in 0 differenzierbar mit $DG_0 = I$. □

Was ist nun, wenn die Vorraussetzungen $\vec{x} = 0$, $F(0) = 0$, $DF_0 = I$ nicht gelten?

Wir definieren lineare Translationsabbildungen $T_{\vec{z}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{z}$. Sei nun:

- $L : DF_{\vec{x}_0}$,
- $M' := (L \circ T_{-\vec{x}_0})(M)$,

- $F'(\vec{x}) := T_{-F(\vec{x}_0} \circ F \circ T_{\vec{x}_0} \circ L^{-1}(\vec{x})$

Die Differentiale sind $DL = L$ und $DT_Z = I$. Nun gilt:

$$DF'_0 = I \circ DF_{\vec{x}_0} \circ I \circ (DF_{\vec{x}_0})^{-1} = I$$

Also $F'(0) = 0$, $0 \in M'$. F' ist also umkehrbar und die Umkehrabbildung ist differenzierbar in 0. Für die Ursprüungliche Abbildung gilt $F = T_{T_{\vec{x}_0}} \circ F' \circ L \circ T_{-\vec{x}_0}$. □

Definition 9.3.25. Sei $F : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Funktion mit regulären Differentialen. Eine solche Abbildung nennt man einen C^r-Diffeomorphismus.

[...]

Satz 9.3.26. ***<u>(Implizite Funktion):</u>*** *Sei $k < n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^r : M \to \mathbb{R}^k$, sei $N = \{\vec{x} \in M \mid F(\vec{x}) = 0\}$. Sei $\vec{x}_0 \in N$ und $DF_{\vec{x}_0}$ vom Rang k.*
Dann gibt es nach passender Identifizierung von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von $\vec{x}_0$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ und eine Abbildung $G \in C^r : V \to \mathbb{R}^k$, sodass $N \cap U$ der Graph von G ist.

> *Beweis.* $DF_{\vec{x}_0}$ hat Rang k. Es gilt also k linear unabhängige Spalten. OBDA seien dies die letzten k Spalten. Die ersten $(n-k)$ Basisvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^{n-k}$, ebenso bilden die letzten k Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^k$. Wir haben somit eine Identifikation $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ erhalten, sodass wir $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ abbilden auf $\vec{x} = (\vec{x}', \vec{x}'')$. Wir definieren folgende Funktion:
>
> $$\begin{aligned} \varphi : M \times \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ (\vec{x}', \vec{x}'') &\to (\vec{x}', F(\vec{x}', \vec{x}'')) \end{aligned}$$
>
> Da $F, \times \in C^r$ ist φ ebenfalls in C^r. Für die Jakobimatrix gilt:
>
> $$J\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$
>
> [WIP]
> Nach dem Satz der Inversen Funktion existiert eine Umgebung U_0 von $\vec{x}_0$, sodass auf dieser Umgebung eine Umkehrabbildung ψ existiert. Und so weiter :) $\square$

Anmerkung 9.3.27. Seien A, B Mengen. Es existieren folgende Funktionen:

- Das Produkt $A \times B$
- Die Projektion $\pi_1 : A \times B \to A$ auf die erste Komponente
- Die Projektion $\pi_2 : A \times B \to B$ auf die zweite Komponente
- Die kanonische Injektion $i : A \to A \times B : a \to (a, 0)$

Satz 9.3.28. ***<u>Über lokal surjektive Abbildungen:</u>*** *Sei $k < n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung der Klasse C^r, $r \in \mathbb{N}_1$. Sei $X_0 \in M$ und F in X_0 vom Rang k, also DF_{X_0} surjektiv. Dann gibt es eine offene Umgebung U von X_0 in M, eine offene Menge V in $\mathbb{R}^{n-k}$, und einen C^r-Diffeomorphismus $h : U \to V \times F(u)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "F"'] & V \times F(u) \arrow[d, "\pi_2"] \\ & F(u) \end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Vorraussetzung hat $JF(X_0)$ k unabhängige Spalten. Seien dies OBdA die letzten Spalten. Wir interpretieren $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ und definieren $\pi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ und $\pi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ als die dazugehörigen kanonischen Projektionen. Sei φ folgende Funktion:

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ X &\to (\pi_1(X), F(X)) \end{aligned}$$

Es gilt $F \in C^r$ und $\pi_1 \in C^r$, also auch $\varphi \in C^r$. Gemäß des Satzes der inversen Funktion existiert also eine Umgebung $\varphi \in C^r$, auf der φ ein C^r Diffeomorphismus (also C^r und invertierbar).

Da φ^{-1} stetig ist, ist das Urbild $(\varphi^{-1})^{-1}(U') = \varphi(U')$ offen. Es enthält also eine offene Umgebung von $\varphi(X_0) = (\pi_1(X_0), F(X_0))$ der Form $V \times X$, also ist V offen in $\mathbb{R}^{n-k}$. Wir setzen $U := \varphi^{-1}(V \times W)$ und $h = \varphi\,|_U$. Dann ist $F(U) = W$, und für $X \in U$ gilt $h(X) = (\pi_1(X), F(X))$, also $\pi_2 \circ h = F$. □

Im Fall $k > n$ erhalten wir lokale Injektivität statt lokaler Surjektivität:

Satz 9.3.29. ***Über lokal injektive Abbildungen:*** *Sei $k > n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine C^r-Abbildung. Sei $X_0 \in M$ und F in X_0 vom Rang n (und damit das Differential DF_{X_0} injektiv). Sei i die kanonische Injektion.*

Dann gibt es eine offene Umgebung U von X_0 in M, eine offene Umgebung V von 0 in $\mathbb{R}^{k-n}$, eine offene Umgebung W von $F(X_0)$ in $\mathbb{R}^k$, und einen $\mathbb{C}^r$-Diffeomorphismus $h : U \times V \to W$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "F"'] & V \times F(u) \arrow[d, "h"] \\ & F(u) \end{tikzcd}$$

Beweis. hi :D □

[...]

Chapter 10

Diffeomorphismen

In diesem Kapitel geht es um die lokale Lösbarkeit von nichtlinearen Gleichungen.

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathbb{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sei $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Uns interessieren nun Lösungen der Gleichung $f(x) = y$. Intuitiv ist dann m die Anzahl der Gleichungen und n die Anzahl der Unbekannten.

Angenommen, wir haben bereits eine Lösung x_0 der Gleichung $f(x) = y_0$. Uns interessiert nun:

(i) Hat die Gleichung $f(x) = y$ auch für andere Werte von y nahe an y_0 Lösungen? Falls ja, sind diese nahe an x_0?

(ii) Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$ in einer Umgebung von x_0?

(iii) Falls nein, wie sieht die Lösungsmenge $f^{-1}(y_0)$ nahe bei x_0 aus?

Falls f affin ist, gilt $f(x) = y \Leftrightarrow A(x - x_0) = y - y_0$, und die Lineare Algebra gibt uns folgende Antworten:

(i) Es gibt genau dann eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m$, wenn

$$\text{rang } A = m.$$

(ii) Es gibt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$\ker A = \{0\}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\text{rang } A = n.$$

(iii) $f^{-1}\{y_0\}$ ist ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $n - \text{rang } A$.

Da das Differential $Df(x_0)$ einer Abbildung $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ an einem gegebenen Punkt $x_0 \in \Omega$ eine lineare Abbildung ist, hoffen wir nun, einige dieser Erkenntnisse über lineare

Funktionen auf die allgemeinere Klasse der differenzierbaren Funktionen übertragen zu können.

Wir wollen hierfür die Funktion durch das Differential linear approximieren. Das Restglied für eine solche Approximation mit Abstand $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist dann genau die Differenz zwischen dem Tatsächlichen Wert und dem approximierten Wert, also:

$$R_f(\xi) = f(x_0 + \xi) - (f(x_0) + Df(x_0)\xi)$$

Für unsere Gleichung gilt nun:

$$f(x) = y \Leftrightarrow Df(x_0) \cdot (x - x_0) + R_f(\xi) \cdot (x - x_0) = y - y_0$$

Es wurde also einfach ein Restglied zur Gleichung für affine Funktionen hinzugefügt. Es hilft, im Kopf zu behalten, dass der affine Fall genau der Fall ist, in dem die Approximation exakt und somit das Restglied 0 ist.

Chapter 11

Implizite Funktionen

Chapter 12

Gewöhnliche Differentialgleichungen

12.1 Anfangswertprobleme

12.1.1 Natürliches Wachstum

Wir sprechen von **natürlichem Wachstum** wenn die Wachstums- oder Zerfallgeschwindigkeit proportional zum Wert der Funktion ist, also:

$$x(t_0) = x_0, \qquad x' = \alpha x$$

Die Lösung ist

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

was oft vereinfacht geschrieben wird als:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\alpha(t-t_0)} \\ &= \left(\frac{x_0}{e^{\alpha t_0}}\right) e^{\alpha t} \\ &:= c e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Ntürliches Wachstum tritt z.B. beim radioaktiven Zerfall oder in der Zinsrechnung auf.

12.1.2 Logistisches Wachstum

Beim Logistischen Wachstum wird eine zusätzliche "Sterberate" hinzugefügt:

$$x(t_0) = x_0, \qquad x' = \alpha x - \beta x^2$$

Die Lösung hier ist bereits deutlich komplizierter:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

Durch den Faktor $e^{-\alpha(t-t_0)}$ konvergiert die Lösung für $t \to \infty$ gegen $\frac{\alpha}{\beta}$.

12.1.3 Lotka-Volterra-Modell

Ein bekanntest Modell für Systeme von Raub- und Beutetieren ist das Modell von Lotka-Volterra. Wir betrachten eine Population $x(t)$ an Beutetieren und $y(t)$ von Raubtieren, sodass bei einer zu großen Raubtierpopulation die Wachstumsrate der Beutetierpopulation sinkt und bei einer zu kleinen Beutetierpopulation die Raubtierpopulation sinkt:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \qquad & x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y(t_0) &= y_0, \qquad & y' &= (-\gamma + \delta x)y \end{aligned}$$

Eine besonders simple Lösung ist $x_0 = \frac{\delta}{\gamma}$, $y_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ - in diesem Fall bleiben beide Populationen konstant.

Im allgemeinen sind die Lösungen dieses Modells sind periodisch, eine allgemeine Lösungsformel lässt sich aber bereits nicht mehr analytisch durch Elementarfunktionen darstellen. Immerhin sind sie ohne größere Probleme sehr genau numerisch approximierbar.

Wir wollen nun den Begriff des Anfangswertproblems formalisieren und unsere Lösungsmethoden verallgemeinern.

Definition 12.1.1. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig (in kürzerer Notation: $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$

Eine stetig differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$ (kurz: $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$) ist eine **Lösung der Differentialgleichung** $x' = f(\cdot, x)$, falls

$$\forall t \in I : x'(t) = f(t, x(t))$$

Gilt außerdem $x(t_0) = x_0$, so ist x eine **Lösung des dazugehörigen Anfangswertproblems**.

Definition 12.1.2. Falls die Funktion f zeitunabhängig ist (also unabhängig von ihrer ersten Komponente) nennen wir die zugehörige Differentialgleichung **autonom**.

Die drei zentralen Fragen sind nun:

(i) Existert eine Lösung des Anfangswertproblems?

(ii) Falls eine Lösung existiert, ist sie eindeutig?

(iii) Wie hängt die Lösung von x_0 und f ab?

Die dritte Frage sprengt leider den Rahmen einer Grundlagenvorlesung Analysis. Die ersten beiden Fragen können wir jedoch bald befriedigend beantworten.

Es stellt sich zum Beispiel heraus, dass selbst bei simplen Anfangswertproblemen die Stetigkeit von f nicht ausreicht, um die Eindeutigkeit der Lösungsmenge zu gewährleisten:

Beispiel 12.1.3. Sei $f(t,x) = 2\sqrt{|x|}$. Dann hat das Anfangsproblem

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x' &= f(\cdot, x) \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen in $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nämlich:

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} -(t-\alpha)^2 & t < \alpha \\ 0 & t \in [\alpha, \beta] \\ (t-\beta)^2 & t > \beta \end{cases}$$

für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}^-, \beta \in \mathbb{R}^+$.

Satz 12.1.4. *Hiii!!! 'w'*

Lemma 12.1.5. *Sei $f \in \mathbb{C}^0(G, \mathbb{R}^n)$ und $(t_0, x_0) \in G$.*

Dann sind die folgenden Aussagen quivalent:

(i) $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ *ist eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \forall t \in I : x'(t) &= f(t, x(t)), \end{aligned}$$

(ii) $x \in \mathbb{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ *erfüllt die Gleichung*

$$\forall t \in I : x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds.$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass wir im Allgemeinen nur eine zeitlich lokale Lösung erwarten können:

Beispiel 12.1.6. Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ x' &= x^2 \end{aligned}$$

Hat auf $(-\infty, 1)$ die Lösung $x(t) = \frac{1}{1-t}$. Diese Lösung hat jedoch bei $t = 1$ eine Singularität und ist somit nicht fortsetzbar.

Satz 12.1.7. ***<u>Kurzzeitexistenzsatz von Picard-Lindelöf:</u>***
Sei $f \in \mathbb{C}^0(G, \mathbb{R}^n)$ mit $D_x f \in \mathbb{C}^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$. Sei $(t_0, x_0) \in G$.

Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] : x'(t) &= f(t, x(t)) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis. Banachscher Fixpunktsatz :) □

Gewöhnliche Differentialgleichungen, auf Englisch *ordinary differential equations* (*ODEs*) beschreiben zeitabhängige Prozesse. Sie sind nützlich für die Modellierung zahlreicher Prozesse in verschiedenen Gebieten der Wissenschaft.

12.2 Motivation

Wir wollen die Fischpopulation in einem See modellieren. Wir bezeichnen die Anzahl an Fischen zum Zeitpunkt t mit $y(t)$. Wie viele Fische dürfen die Menschen am See fangen, ohne dass die Fischpopulation ausstirbt?

Wir führen folgende Größen ein:

- Die Geburtenrate $G(t)$. Wir nehmen an, dass diese proportional zur Größe der Fischpopulation ist, also
$$G(t) = by(t).$$
- Die natürliche Todesrate $T(t)$. Auch hier gehen wir von Proportionalität zur Population aus:
$$T(t) = my(t).$$
- Die Fischfangrate $H(t)$.

Wir erhalten nun die Gleichung:

$$y'(t) = (b - m)y(t) - H(t)$$

Wir nehmen außerdem an, dass $(b - m) := a > 0$. Diese Größe kann durch Beobachtungen gemessen werden, $H(t)$ ist kontrollierbar. Zu einem gegebenen Anfangszeitpunkt t_0, an dem die Fischpopulation $y(t_0) = y_0$ beträgt, können die Menschen nun berechnen, wie viele Fische sie fangen dürfen.

Wir betrachten als erstes die einfachstmögliche Situation, in der die Fischfangrate $H(t)$ zeitunabhängig konstant bleibt, also $H(t) = H \in \mathbb{R}$. Wir erhalten so unser erstes Modell:

$$\begin{aligned} y' &= ay - H \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{12.1}$$

Da die Ableitung proportional zur Funktion selbst ist eine Exponentialgleichung eine naheliegende Lösung. Eine rigorose Herleitung dieser Intuition folgt später. Mit diesem Wissen können wir jedoch bereits eine "how would you come up with that"-Herleitung durchführen:

12.3 Existenztheorie

Definition 12.3.1. Für $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ nennen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

eine *explizite Differntialgleichung n-ter Ordnung*. Ist zusätzlich

$$y^{(i)}(t_0) = y_{i-1}$$

für $(t_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben, spricht man von einem *Anfangswertproblem.*

Definition 12.3.2. Sei I ein Intervall. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt *Lösung* von (2.1) im Intervall I, falls y in I n-mal differenzierbar ist und

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Wir erlauben hier jede Art von Intervall, egal ob offen, halboffen, oder geschlossen.

Definition 12.3.3. Sei $F : \omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Wir nennen das Gleichungssystem

$$Y'(t) = F(t, Y(t))$$

ein *System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.* Für $F = (f_1, \dots, f_n)$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$ lässt sich das System komponentenweise schreiben als:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Ergänzt man das System durch die Bedingung $Y(t_0) = Y_0$ erhalten wir komponentenweise:

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_1^0 \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= y_n^0 \end{aligned}$$

Für ein $(t_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in \Omega$ und sprechen wieder von einem *Anfangswertproblem.*

Lemma 12.3.4. *Erfülle F die Vorraussetzung (S), sei außerdem $y_i(a, b) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Gleichungssystems $Y'(t) = F(t, Y(t))$. Weiter existiere der Grenzwert $\lim_{t\to+b} Y(t) := y_1$ und es gelte $(b, y_1) \in \Omega$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass man die Lösung y zu einer Lösung auf dem Intervall $(a, b + \delta]$ fortsetzen kann.*

Definition 12.3.5. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren zwischen den beiden Mengen folgendermaßen eine Abstandsfunktion:

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf_{x\in A, y\in B} \|X - Y\|$$

[big gap here oops]

Lemma 12.3.6. *Seien I, J offene Intervalle, sei $f : J \times I \to \mathbb{R}$ durch $f(t, y) = h(t)g(y)$ gegeben, wobei $g : I \to \mathbb{R}$, $g \neq 0$, $h : J \to \mathbb{R}$ stetig sind. Falls $\varphi : (\alpha, \beta) \subseteq J \to I$ eine Lösung von (3.1) ist, existiert $c \in \mathbb{R} : \forall t \in (\alpha, \beta)$*

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t) + c)$$

Satz 12.3.7. *Erfülle f die Vorraussetzung des letzten Lemmas. Dann existiert $\forall (t_0, y_0) \in J \times I$ eine eindeutige maximale Lösung $y : J_0 \to I$ von (3.1) mit $y(t_0) = y_0$. Diese Lösung ist von der Form*

$$y(t) = G^{-1}(H(t)),$$

wobei

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(x)} dx, y \in I,$$
$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s) ds, t \in J$$

ist.

Beispiel 12.3.8. Sei $y'(t) = 2t(1+y^2)$ mit Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$, wobei $(t_0, y_0 \in \mathbb{R}^2)$. Dann gilt:

$$g(y) = 1 + y^2, \quad h(t) = 2t$$

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{y_0}^{y} \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \arctan y - \arctan y_0 \\ &:= \arctan y - c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_{t_0}^{t} 2s \ ds \\ &= t^2 - t_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{Bild}(G) = \left(-\frac{\pi}{2} - c_0, \frac{\pi}{2} - c_0\right), \quad c_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(i) $-t_0^2 > -\frac{\pi}{2} - c_0$

$$\alpha := \sqrt{\frac{\pi}{2} - c_0 + t_0^2}$$
$$H^{-1}(\text{Bild}(G)) = (-\alpha, \alpha)$$
$$y(t) = \tan\big(t^2 - t_0^2 + \arctan(y_0)\big)$$

(ii) $-t_0^2 \leq -\frac{\pi}{2} - c_0$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\pi}{2} - c_0 + t_0^2}$$
$$\beta := \sqrt{\frac{\pi}{2} - c_0 + t_0^2}$$
$$H^{-1}(\text{Bild}(G)) = (-\beta, -\alpha) \cup (\alpha, \beta)$$

OBdA $t_0 \in (\alpha, \beta)$, dann

$$y(t) = \tan\big(t^2 - t_0^2 - \arctan(y_0)\big)$$

12.4 Lineare Gleichungen

Angenommen, wir haben eine Funktion $f(t, y)$ der Form

$$f(t, y) = h(t)y + p(t)$$

Es gilt:

$$h, p : I = (a, b) \to \mathbb{R}$$

Wobei nach Annahme h, p stetig sind und $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Vorraussetzung (S) erfüllt.

Wenn $p(t) = 0$ nennen wir die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ **homogen**, ansonsten nennen wir sie **inhomogen**.

$$y' = h(t)y + p(t) \Leftrightarrow y'(t) - h(t)y(t) = p(t)$$

Wir suchen nun das Urbild von $p \in C^0(I)$ bezüglich

$$L : C^1(I) \to C^0(U) : y \mapsto y' - hy$$

$$(L(y))(t) := y'(t) - h(t)y(t)$$

Es gilt:

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha L(y) + \beta(L(z))$$

Also ist L ein linearer Operator!

[...]

Lemma 12.4.1. *Sei $I = (a, b)$ und für $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte*

$$f(t, y) = h(t)y + p(t)$$

Wobei p, h auf I stetig sind. Seien Lösungen y_1, y_2 der inhomogenen Gleichung und y_0 Lösung der homogenen Gleichung. Dann gilt:

(i) $y_1 - y_2$ ist Lösung der homogenen Gleichung

(ii) $y_1 + y_0$ ist Lösung der inhomogenen Gleichung

Lemma 12.4.2. *Sei y_2 eine Lösung der inhomogenen Gleichung und y_0 eine Lösung der homogenen Gleichung. So existiert eine Lösung y_1 der inhomogenen Gleichung, sodass*

$$y_2 = y_0 + y_1$$

Variation der Konstanten:

$$y(t) = c(t)e^{H(t)}$$

$$y'(t) = c'(t)e^{H(t)} + c(t)e^{H(t)}h(t)$$

Damit y eine Lösung von (3.1) ist muss gelten:

$$y'(t) = p(t) + h(t)y(t)$$

Also:

$$c'(t) = p(t)e^{-H(t)}$$

Also ist c eine Stammfunktion von pe^{-H}.

Satz 12.4.3. *Sei $I = (a, b)$, für $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte*

$$f(t, y) = h(t)y + p(t)$$

p, h stetig. Dann existert für alle $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ eine eindeutige, maximale Lösung

$$y : I \to \mathbb{R}$$

von (3.1) mit $y(t_0) = y_0$. Diese Lösung hat folgende Form:

$$y(t) = e^{[H(t)]}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} p(s)e^{-H(s)}ds\right)$$

Wobei

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$$

> *Beweis.*
>
> $$y(t_0) = e^{H(t_0)}(y_0 + 0) = y_0$$
>
> Rechnungen liefern, dass $y : I \to \mathbb{R}$ maximal ist. Seien y_1, y_2 eine maximale

Lösung mit $y_i(t_0) = y_0$. $\overline{y} := y_1 - y_2$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung mit $y(t_0) = 0$, also $\overline{y}(t) = 0$, also $y_1 = y_2$. $\square$

Chapter 13

Systeme Linearer Differentalgleichungen

Wir suchen nach Lösungen von Gleichungssystemen der Form:

$$Y'(t) = \mathbf{A}(t)Y(t) + \mathbf{B}(t)$$

Wobei $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ Matrizen sind.

Sei $I = (a, b)$ und sei $F(t, Y) := \mathbf{A}(t)Y + \mathbf{B}(t)$. F ist bezüglich Y lokal Lipschitzstetig, also existiert eine eindeutige maximale Lösung mit $Y(t_0) = Y_0$.

Lemma 13.0.1. ***Lemma von Gronwall:***
Sei J ein Intervall, $t_0 \in J$, $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Ferner sei $x : J \to [0, \infty)$ stetig und erfülle

$$x(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} x(s) ds \right|$$

Für $t \in J$. Dann gilt

$$x(t) \leq \alpha e^{\beta |t - t_0|}$$

Beweis. Sei $t \geq t_0$, $t \in J$. Sei

$$h(s) := \beta e^{\beta(t_0 - s)} \int_{t_0}^{s} x(\tau) d\tau$$

mit $s \in [t_0, t]$. Sei

$$\begin{aligned} h'(s) &= \beta e^{\beta(t_0-s)}(-1)\beta\int_{t_0}^{s} x(\tau)d\tau + \beta e^{\beta(t_0-s)}x(s) \\ &= -\beta h(s) + \beta e^{\beta(t_0-s)}x(s) \\ &\leq -\beta h(s) + \beta e^{\beta(t_0-s)}\left(\alpha + \beta\left|\int_{t_0}^{s} x(\tau)d\tau\right|\right) \\ &= -\beta h(s) + \alpha\beta e^{\beta(t_0-s)} + \beta h(s) \\ &= \alpha\beta e^{\beta(t_0-s)} \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t} h'(s)ds = h(t) - h(t_0) = h(t) = \beta e^{\beta(t_0-s)}\int_{t_0}^{s} x(\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}(-\alpha e^{B(t_0-s)})ds &= -\alpha e^{\beta(t_0-t)} + \alpha \\ \implies \beta e^{\beta(t_0-s)}\int_{t_0}^{t} x(\tau) &\leq \alpha - \alpha e^{\beta(t_0-t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta\int_{t_0}^{t} x(s)ds &\leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} - \alpha \\ \implies \alpha + \beta\int_{t_0}^{t} x(s)ds &\leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} \\ \implies x(t) &\leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

□

Satz 13.0.2. *Seien* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *stetig Funktionen auf* $I = (a, b)$*. Dann ist jede maximale Lösung des dazugehörigen Differentialsystems auf ganz* (a, b) *definiert.*

Beweis. Sei eine maximale Lösung gegeben durch:

$$Y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$$

Wobei $Y(t_0) = Y_0, t_0 \in (\alpha, \beta)$. Da Y eine maximale Lösung ist existiert der Limes

$$\lim_{t \to^+ \beta} Y(t)$$

nicht. Sei $(\alpha, \beta) \subsetneq (a, b)$, OBdA $\beta < b$. Sei für $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n := \{(t, Y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [t_0, \beta], \|Y\| \leq n\}$$

Da diese Menge kompakt ist und Y eine maximale Lösung ist, ist

$$G^+ = \{(t, z) \in \overline{\text{graph}(Y)} \mid t \geq t_0\}$$

keine kompakte Teilmenge.

$$\exists \tau_n \in [t_0, \beta) : \|Y(\tau_n)\| = n$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} \|Y(\tau_n)\| = \infty$$

$$n(T) := \|Y(t)\| t \in (\alpha, \beta)$$
$$\delta := \max_{t\in[t_0,\beta]} \|\mathbf{A}(t)\|_{\mathbb{R}^{n\times m}} < \infty$$
$$\gamma := \max_{t\in[t_0,\beta]} \|\mathbf{B}(t)\|_{\mathbb{R}^{n}} < \infty$$

Da Y eine Lösung ist, ist:

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(s)Y(s) + \mathbf{B}(s) ds t \in [t_0, \beta)$$

□

[...]

Definition 13.0.3. Wir nennen die Matrix $\mathbf{Y}$, welche das System linearer Differentialgleichungen beschreibt, die **Fundamentalmatrix** des Systems.

Lemma 13.0.4. *Es gilt* $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$.

Definition 13.0.5. Wir definieren $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(t_0)$.

Definition 13.0.6. Sei $I = (a, b), A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Sei $\mathbf{Y}$ eine Fundamentalmatrix eines homogenen Systems linearer Differentialgleichungen. Wir nennen

$$W(t) := \det\{\mathbf{Y}(t)\}$$

die **Wronski-Determinante**.

Satz 13.0.7. *Sei* $I = (a, b), \mathbf{A} : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *stetig. Sei* $\mathbf{Y}$ *eine Fundamentalmatrix eines homogenen Systems linearer Differentialgleichungen. Dann gilt*

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \text{tr } (\mathbf{A}(s))ds}$$

für $t \in I$*, wobei die Spur* tr $(\mathbf{A})$ *einer quadratischen Matrix als die Summe der Diagonaleinträge definiert ist.*

Beweis. Es gilt tr $(A) \in \mathbb{R}, W(t) \in \mathbb{R}$. Wir betrachten also eine skalare Gleichung. Gemäß Satz (3.8?) aus Kapitel 12 gilt diese Formel genau dann, wenn

$$W'(t) = \text{tr } (\mathbf{A}(t))$$

Wir benötigen also eine Formel für die Ableitung der Determinante. Für $\mathbf{B} = (b_{ij})$ gilt

$$\det \mathbf{B} = \sum_{\sigma\in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)}$$

Somit gilt:

$$(\det \mathbf{B})' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b'_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)}$$

(insert black magic here)

Es folgt:

$$W(t) = \det \mathbf{Y}(t) = \det \mathbf{Z}(t) \det \mathbf{Y}(t_1) = \det \mathbf{Z}(t)W(t_1)$$

und somit:

$$W'(t) = (\det \mathbf{Z}(t))'W(t_1)$$

Mit der Formel der Ableitung der Determinante gilt:

$$\begin{aligned}(\det \mathbf{Z}(t_1))' &= \sum_{i=1}^{n} \det(Z_1(t_1), \dots, Z_i'(t_1), \dots, Z_n(t_1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(E_1(t_1), \dots, \mathbf{A}(t_1)E_i, \dots, E_n(t_1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t_1) \\ &= \text{tr } \mathbf{A}(t_1)\end{aligned}$$

Es gilt folglich:

$$W'(t) = \text{tr } \mathbf{A}(t_1) W(t_1)$$

□

Korollar 13.0.8. *Die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix ist überall ungleich Null.*

13.1 Systeme mit Konstantem A

Wir betrachten Systeme der Form:

$$Y'(t) = \mathbf{A}Y(t)$$

Wir betrachten dabei die lineare Abbildung:

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : Y \mapsto \mathbf{A}Y$$

Also $\mathbf{A} = M_E^E(A)$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass:

$$M_B^B(A) = M_B^E(id) M_E^E(A) M_E^B(id)$$

Wobei $M_E^B(id) := \mathbf{B}$ und $M_B^E := \mathbf{B}^{-1}$. Also:

$$M_B^B(A) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} := \mathbf{D}$$

$$Z(t) := \mathbf{B}^{-1}Y(T) \Leftrightarrow \mathbf{B}Z(t) = Y(t)$$

Falls Y eine Lösung des Systems mit Konstante ist, gilt:

$$Z'(t) = \mathbf{B}^{-1}Y'(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}Y(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}Z(t) = \mathbf{D}Z(t)$$

Satz 13.1.1. *Wenn* $\mathbf{A}$ *symmetrisch ist, können wir die Matrix diagonalisieren und erhalten eine besonders simple Lösung der Form:*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{Z} = (B_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, B_n e^{\lambda_n t})$$

Chapter 14

Maßtheorie

Unser nächstes Großes Ziel ist eine Verallgemeinerung des Integrationsbegriffs. Wir arbeiten hin zum sogenannten **Lebesque-Integral**, welches uns Funktionen integrieren lässt, die bisher nicht integrierbar waren.

Die erste Vorraussetzung ist ein allgemeiner Volumenbegriff. Dieser wird uns gegeben durch **Maße**, welche die intuitiven Begriffe von Längen, Volumen etc. formalisieren und generalisieren.

- Eindimensionales Maß: Länge eines Intervalls.
- Zweidimensionales Maß: Flächeninhalt eines Rechtecks.
- Dreidimensionales Maß: Volumen eines Quaders.
- etc.

Wie misst man nun beliebige Mengen? Gibt es für jede Menge ein sinnvolles "Volumen"?

Intuitiv sollte ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ eine Funktion

$$m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

sein, welche folgende Eigenschaften hat:

(i) Es ist **bewegungsinvariant** - das Maß ist konstant unter orthogonalen Abbildungen.

(ii) Das Maß ist **zählbar additiv**:

$$m\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i m(A_i) \quad A_i \cap A_j = \infty \quad i \neq j$$

(iii) Das Maß des Einheitswürfels ist auf 1 **normiert**:

$$m([0,1]^n) = 1$$

Erlauben wir bei Bedingung 2 nur endliche Vereinigungen, führt der Maßbegriff zum **Inhaltsproblem**, welches wiederum in Dimension ≥ 3 oder höher zum **Banach-Tarski-Paradox** führt und somit nicht lösbar ist.

Erlauben wir jedoch auch unendliche Vereinigungen, erhalten wir das **Maßproblem**, dessen Unlösbarkeit in Dimension ≥ 1 durch Lebesque gezeigt wurde.

Es ist also leider nicht möglich, einen sinnvollen Maßbegriff in unserer idealisierten Form zu erhalten.

Unser Ansatz ist wird letztendlich sein, nur Mengen zu messen, welche im Grenzwert als zählbare Vereinigung von Rechtecken / Quadern / etc. (endliche Vereinigung von Intervallen) dargestellt werden können. Glücklicherweise sind die einzigen Gegenbeispiele jedoch pathologische Mengen, die uns sowieso nicht allzu sehr interessiert haben.

Satz 14.0.1. *Jede offene Menge ist als zählbare Vereinigung geschlossenerer Quader darstellbar.*

14.1 Mengensysteme

14.1.1 Mengenringe und Mengenalgebren

Definition 14.1.1. Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Mengenring**, falls:

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \bigtriangleup B \in \mathcal{R}$

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \cap B \in \mathcal{R}$

Mengenringe bilden einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, in dem $\bigtriangleup$ der Addition entspricht, $\cap$ der Multiplikation, und $\emptyset$ das Nullelement $0_{\mathcal{R}}$. Falls $X \in \mathcal{R}$, so ist es das Einselement $X = 1_{\mathcal{R}}$.

Proposition 14.1.2. *Äquivalent kann ein Mengenring definiert werden als ein Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$, welches folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \setminus B \in \mathcal{R}$

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \cup B \in \mathcal{R}$

Definition 14.1.3. Eine **Mengenalgebra** ist ein Mengenring, welcher die gesamte Menge X enthält.

Proposition 14.1.4. *Das System aller endlichen Teilmengen einer Menge X bildet einen Mengenring.*

Proposition 14.1.5. *Das System aller höchstens abzählbaren endlichen Teilmengen einer Menge X bildet einen Mengenring.*

Proposition 14.1.6. *Sei H die Menge der halboffenen Intervalle $[a, b)$. So bildet das System aller Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$, die sich als endliche Vereinigung solcher Intervalle darstellen lassen, einen Mengenring $\mathcal{H}$.*

Proposition 14.1.7. *Sei $A \subseteq X$. So ist $\{\emptyset, A\}$ ein Mengenring, welcher genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn $A = X$.*

14.1.2 σ-Algebren

Definition 14.1.8. Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ-Algebra**, falls folgendes gilt:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}_i$

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ heißt **messbarer Raum**.

Satz 14.1.9. *Es gilt außerdem:*

(i) $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

(ii) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \setminus B \in \mathcal{A}$

Beweis.

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus A_i) \right)$$

$$\emptyset = X \setminus X$$

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$$

□

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ selbst ist bereits eine σ-Algebra. Ebenso ist die Menge $\{\emptyset, X\}$ bereits eine σ-Algebra. Später werden wir zeigen, dass die Menge der **messbaren Mengen** eine σ-Algebra bilden und dass die offenen Mengen ein Teilsystem der messbaren Mengen bilden.

Satz 14.1.10. *Jeder zählbar unendliche Durchschnitt von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra.*

> *Beweis.* Proof by trying every necessary condition and realizing it works. □

Definition 14.1.11. Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

$$\sigma(\mathcal{E}_i) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$$

die von $\mathcal{E}$ **erzeugte** σ-Algebra.

$\sigma(\mathcal{E})$ ist in jeder Sigma-Algebra, welche $\mathcal{E}$ enthält, enthalten, also ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{E}$ enthält.

Einige Beispiele für wichtige σ-Algebren:

(i) Ist $E \subseteq X$ und $\mathcal{E} = \{E\}\}$, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$

(ii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, also $\mathcal{O}$ das System der offenen Mengen. Die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra heißt **Borel-σ-Algebra** $\mathcal{B}(\mathcal{O})$, und ihre Elemente heißen **Borelmengen**. Im Fall des $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Topologie schreiben wir auch $\mathcal{B}^n$.

(iii) Sei X eine beliebige nichtleere Menge, $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Y und $f : X \to Y$ eine Abbildung. So ist

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{B \subseteq X : f(B) \in \mathcal{C}\}$$

eine σ-Algebra.

3.1 Sei $X \subseteq Y$ und sei $\mathbb{C}$ eine σ-Algebra auf Y. So nennen wir die durch die Identitätsabbildung $\text{id} : X \to Y, x \to x$ induzierte σ-Algebra

$$\mathcal{C} \mid_X := \text{id}^{-1}(\mathcal{C}) = \{\text{id}^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\} = \{X \cup A \mid A \in \mathcal{C}\}$$

auch die **Spur-σ-Algebra auf** X oder die **von $\mathcal{C}$ auf X induzierte σ-Algebra.**

Proposition 14.1.12. *Es ist konsistent mit ZF (Also der Standardaxiomatik der Mengenlehre, ausgenommen das Auswahlaxiom), dass jede Menge $M \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine Borelmenge ist.*

Somit sind Existenzbeweise von Mengen, welche nicht Borel sind, in der Regel nichtkonstruktive Beweise, welche auf Feinheiten der Mengenlehre aufbauen. Das berühmteste Beispiel sind die sogenannten Vitalimengen, welche auch nach unseren späteren Verfeinerungen des Maßbegriffs noch Probleme bleiben werden.

Definition 14.1.13. Eine **Vitalimenge** ist eine Teilmenge $V \subset [0, 1]$, sodass für jede reelle Zahl r genau eine Zahl $v \in V$ enthalten ist, sodass $v - r \in \mathbb{Q}$.

Proposition 14.1.14. *Wird das Auswahlaxiom angenommen, existieren Vitalimengen.*

Beweisskizze. Die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden eine normale Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Somit können wir die Quotientengruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ bilden.

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist überabzählbar. Die Elemente von $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ sind disjunkte Mengen reeller Zahlen, welche die Form $\{r + \mathbb{Q} \mid r \in \mathbb{R}\}$ haben. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, ist auch jede Äquivalenzklasse dicht in $\mathbb{R}$.

Durch das Auswahlaxiom können wir nun aus jeder Äquivalenzklasse ein Element wählen, welches in $[0, 1]$ liegt. Wir erhalten eine Vitalimenge. "$\square$"

Proposition 14.1.15. *Vitalimengen sind nicht Borel.*

Ein Beweis folgt deutlich später in 14.8.23.

Nun fürs Erste zurück zu σ-Algebren.

Satz 14.1.16. *Sei X eine Menge und seien $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ Mengensysteme. So gilt:*

$$\sigma\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i\right) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right)$$

Beweis. Es gilt $\mathcal{E}_i \subseteq \sigma(\mathcal{E}_i)$, also auch $\sigma\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i\right) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right)$.

Umgekehrt gilt (TODO) $\square$

Satz 14.1.17. *Jede σ-Algebra ist entweder endlich oder überabzählbar.*

Beweis. Wir definieren:

$$\mathrm{at}(x) := \bigcap \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

Lemma 14.1.18. *Für jedes $x, y \in X$ gilt*

$$\mathrm{at}(x) \cap \mathrm{at}(y) \neq \emptyset \implies \mathrm{at}(x) = \mathrm{at}(y)$$

Beweis. Angenommen, $\mathrm{at}(x) \neq \mathrm{at}(y)$. Dann existiert ein Element $A_x \in \mathcal{A}$, in dem x enthalten ist, aber nicht y. Dann ist $X \setminus A_x \in \mathrm{at}(y)$ und disjunkt von A_x. Dann gilt $\mathrm{at}(y) = \mathrm{at}(y) \cap X \setminus A_x$. Außerdem ist

$$\mathrm{at}(x) = \bigcap\{A \in \mathcal{A} : x \in A\} = \bigcap\{A \in \mathcal{A} : x \in A\} \cap A_x = \mathrm{at}(x) \cap A_x.$$

Es folgt:

$$\mathrm{at}(x) \cap \mathrm{at}(y) = \mathrm{at}(x) \cap A_x \cap X \setminus A_x \cap \mathrm{at}(y) = \emptyset$$

□

Lemma 14.1.19. *Falls $\mathcal{A}$ abzählbar ist, gilt für jedes $x \in X$ $\mathrm{at}(x) \in \mathcal{A}$, und für jedes $A \in \mathcal{A}$ $A = \bigcup_{x \in A} \mathrm{at}(x)$*

Beweis. Die erste Bedingung folgt daraus, dass die σ-Algebra unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen ist. Es gilt $A \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathrm{at}(x)$, da in jedem $\mathrm{at}(x)$ zumindest eine Menge enthalten ist, die x enthält. Es gilt $\forall x : \mathrm{at}(x) \subseteq A$, da $x \in A$ und $\mathrm{at}(X)$ als Schnitt aller solcher Teilmengen definiert ist, somit gilt auch $\bigcup_{x \in A} \mathrm{at}(x) \subseteq A$. □

Wir wollen nun diese Lemmas zum Widerspruch führen. Angenommen, $\mathcal{A}$ ist nicht überabzählbar. Sei $B \subseteq \mathcal{A}$ die Menge der Atome.

(i) Angenommen, B ist endlich. Dann besteht $\mathcal{A}$ nach unserem zweiten Lemma höchstens aus jeder möglichen Kombination aus Atomen, wovon es endlich viele gibt, also ist auch $\mathcal{A}$ endlich.

(ii) Angenommen, B ist abzählbar. Dann können wir $B = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ schreiben. Definiere nun $B = \{\bigcup_{i \in I} B_i : I \subseteq \mathbb{N}\}$. Diese Menge ist in Bijektion mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

□

14.2 Maße

Definition 14.2.1. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Eine nichtnegative Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß**, falls:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Für beliebige paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}_i, i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann **Maßraum**.

Definition 14.2.2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. μ heißt **endlich**, falls $\mu(X) < \infty$, und **σ-endlich**, falls es eine Folge $(X_i) \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Definition 14.2.3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt.

Definition 14.2.4. Sei X beliebig, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ beliebig. Das **Diracmaß** ist das Maß:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

Definition 14.2.5. Auf einer beliebigen Menge X definieren wir das **Zählmaß** $\mathrm{card}(A) : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch:

$$\mathrm{card}(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ endlich} \\ \infty & A \text{ unendlich} \end{cases}$$

Definition 14.2.6. <u>Einschränkungen von Maßen:</u> Sei (X, A, μ) ein Maßraum, $M \in \mathcal{A}$ und $A|_M \subseteq \mathcal{P}(M)$ die von $\mathcal{A}$ auf M induzierte σ-Algebra. Wir können ein Maß $\mu|_M$ auf $\mathcal{A}|_M$ definieren, da es für alle $B \in \mathcal{A}|_M$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $B = A \cap M$ gibt. Wir setzen also:

$$\mu|_M(B) = \mu(A \cap M)$$

Definition 14.2.7. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Das **triviale Maß** ist gegeben durch:

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0$$

Satz 14.2.8. <u>Stetigkeitseigenschaften:</u> *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gelten für $A_i \subseteq \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:*

(i) Ist A_i monoton wachsend, also $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, so folgt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

(ii) Ist $\mu(A_1) < \infty$ und A_i monoton fallend, also $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, dann folgt:

$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

*(iii) μ ist σ-**Subadditiv**:*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Beweis.

(i) Wir definieren $\widetilde{A}_1 := A_1$ und $\widetilde{A}_k := A_j \setminus A_{k-1}$. So sind die $\widetilde{A}_k$ paarweise disjunkt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup A_i\right) &= \mu\left(\bigcup \widetilde{A}_i\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(\widetilde{A}_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(\widetilde{A}_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

(ii) Wir definieren $\widetilde{A}'_k := A_1 \setminus A_k$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) &= \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) \\
&= \mu(A_k) + \mu(A'_k)
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A'_k)$$

Also auch:

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A'_k\right) \\
&= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \\
&= \mu\left(A_1\right) - \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)
\end{aligned}$$

(iii)

□

Proposition 14.2.9. *Das Zählmaß führt zu Gegenbeispielen zu 2. bei unendlichem $\mu(A_1)$.*

Definition 14.2.10. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **Nullmenge**. Wir bezeichnen das System aller Nullmengen eines Maßes mit $\mathcal{N}(\mu)$. μ heißt **vollständig**, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge ebenfalls in der σ-Algebra enthalten ist und ebenfalls Maß 0 hat.

Proposition 14.2.11. *Das triviale Maß ist auf jeder σ-Algebra, welche nicht die Potenzmenge ist, nicht vollständig.*

Definition 14.2.12. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{T}_\mu$ die Mengen aller Teilmengen von Nullmengen in μ. Wir definieren den **Abschluss** von $\mathcal{A}$ als:

$$\overline{\mathcal{A}_\mu} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu\}$$

μ ist offensichtlich genau dann vollständig, wenn $\mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{A}$. Wir definieren für $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{T}_\mu$ nun den Abschluss des Maßes als:

$$\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$$

Satz 14.2.13. **<u>Vervollständigung:</u>** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ eine σ-Algebra und $\overline{\mu}$ ein vollständiges Maß, welches auf $\mathcal{A}$ mit μ übereinstimmt.*

Beweis.

(i) $\mathcal{T}_\mu$ ist unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen, ebenso $\mathcal{A}$. Also ist auch $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen.

Sei $E \in \overline{\mathcal{A}_\mu}$. Dann existieren ein $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{T}_\mu$ und ein $B \in \mathcal{N}(\mu)$, sodass $E = A \cup N$.

Es gilt $B \setminus N \in \mathcal{T}_\mu$. Nun gilt:

$$X \setminus E = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus N)$$

Da $(X \setminus (A \cup B)) \in \mathcal{A}$ und $B \setminus N \in \mathcal{T}_\mu$ gilt also $X \setminus E \in \overline{\mathcal{A}_\mu}$. Also ist $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ eine σ-Algebra.

□

(ii) coming soon :)

□

Satz 14.2.14. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(X, \overline{\mathcal{A}_\mu}, \overline{\mu})$ dessen Vervollständigung. Sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein weiterer vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)$. Dann ist $\overline{\mathcal{A}_\mu} \subseteq \mathcal{B}$ und $\forall A \in \overline{\mathcal{A}_\mu} : \nu(A) = \overline{\mu}(A)$.*

Beweis. Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$ folgt direkt $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{N}(\nu)$, also auch $\mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\nu$. Da ν vollständig ist, ist $\mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\nu \subseteq \mathcal{B}$, also auch $\overline{\mathcal{A}_\mu} \subseteq \mathcal{B}$.

Da $\overline{\mu}$ auf $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ vollständig durch μ auf $\mathcal{A}$ bestimmt ist, und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$, folgt außerdem $\overline{\mu} = \nu$ auf $\overline{\mathcal{A}_\mu}$. □

14.3 Messbare Funktionen

Definition 14.3.1. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $\mathcal{A} - \mathcal{C}$-Messbar, falls

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A},$$

also

$$\forall c \in \mathcal{C} : f^{-1}(c) \in \mathcal{A}.$$

Proposition 14.3.2.

(i) Konstante Abbildungen sind messbar.

(ii) Sei $\mathbb{R}$ mit der Borel-σ-Algebra versehen. Dann ist für jeden Messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$ und jede Menge $E \in \mathcal{A}$ die Indikatorfunktion χ_E messbar.

(iii) Die Komposition messbarer Funktionen ist messbar.

Proposition 14.3.3. *Das Finden nicht Borel-messbarer Funktionen ist ähnlich schwierig wie das Finden von Mengen, die nicht Borel sind. Alle praxisrelevanten Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ sind Borel-messbar.*

Lemma 14.3.4. *Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für beliebige Systeme $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ gilt:*

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$$

Die Urbildbildung kommutiert also mit der Erzeugung von σ-Algebren.

Beweis.

$\supseteq$: $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ ist wieder eine σ-Algebra. Es gilt außerdem $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Da die erzeugte σ-Algebra die kleinstmögliche ist gilt also $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$.

$\subseteq$:

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq Y \mid f^{-1}(F) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$$

ist wieder eine σ-Algebra. Es gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, also $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$, also $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.

□

Korollar 14.3.5. *Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und sei $C = \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$-messbar.*

Beweis.

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$$

□

Korollar 14.3.6. *Stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ sind $\mathcal{B}^n$ - $\mathcal{B}^k$-messbar (Borel-messbar).*

Korollar 14.3.7. *Sei $X \neq \emptyset$, $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum und $f : X \to Y$. Sei $f^{-1}(\mathcal{C})$ eine σ-Algebra. Dann ist f $f^{-1}(\mathcal{C}) - \mathcal{C}$-messbar. $f^{-1}(\mathcal{C})$ ist außerdem die kleinste σ-Algebra, die f messbar macht.y*

Korollar 14.3.8. *Analog für Familien f_i.*

Definition 14.3.9. Wir definieren $0 \cdot \pm\infty = 0$.

Die Multiplikation ist damit in den vier Punkten $(0, \pm\infty)$ und $(\pm\infty, 0)$ unstetig. Diese Erweiterung wird sich aber später für die Integration als sinnvoll erweisen - die Fläche der Nullfunktion über das unendliche Intervall $\mathbb{R}$ soll schließlich 0 sein.

Definition 14.3.10. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$. eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma 14.3.11. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist äquivalent:*

(i) f *ist* $\mathcal{A}$*-messbar*

(ii) *Für jede offene Menge* $U \subseteq \mathbb{R}$ *ist* $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(\infty) \in A$ *und* $f^{-1}(-\infty) \in A$.

(iii) $\forall s \in \mathbb{R} : \{f(x) \leq s\} \in A$

(iv) $\forall s \in \mathbb{R} : \{f(x) < s\} \in A$

(v) $\forall s \in \mathbb{R} : \{f(x) \geq s\} \in A$

(vi) $\forall s \in \mathbb{R} : \{f(x) > s\} \in A$

Beweis. 1. und 2. sind durch unsere Korrolare äquivalent. Aus 2. folgt 6., da

$\{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}(\infty)$. 3.-6. sind äquivalent, da

$$\{f(x) \leq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f(x) \leq s + \frac{1}{k}\}$$
$$\{f(x) > s\} = D \setminus \{f(x) \leq s\}$$

etc. Betrachte nun $f^{-1}((a, b)) = \{f(x) > a\} \cap \{f(x) < b\}\} \in \mathcal{A}$. Wir behaupten nun, dass jede offene Menge in $\overline{\mathbb{R}}$ durch abzählbar viele Intervalle generiert ist. Dadurch folgt dann aus 3.-6. auch 2. □

Proposition 14.3.12. *Es reicht auch, die gegebenen Eigenschaften für $\mathbb{Q}$ zu fordern.*

Lemma 14.3.13. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\}$ und $\{f \leq g\}$ messbar.*

Beweis.

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{g > q\})$$
$$\{f \leq g\} = D \setminus \{g < f\}$$

□

Definition 14.3.14. Wir definieren in den folgenden Sätzen die Grenzwerte von Funktionenfolgen **punktweise**:

$$(\liminf_{k \to \infty} f_k)(x) = \liminf_{k \to \infty} f_k(x)$$

Satz 14.3.15. *Folgende Funktionen von messbaren f_k sind messbar:*

(i) $\inf f_k$

(ii) $\sup f_k$

(iii) $\liminf f_k$

(iv) $\limsup f_k$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\{(\inf f_k) \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \geq s\}$$
$$\{(\sup f_k) \leq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \leq s\}$$

Also sind $\inf f_k$ und $\sup f_k$ messbar.

Es gilt außerdem:

$$\liminf f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{l \geq k} f_l)$$
$$\limsup f_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{l \geq k} f_l)$$

Also sind $\liminf f_k$ und $\limsup f_k$ ebenfalls messbar. □

Definition 14.3.16. Wir definieren die Positiv- und Negativanteile einer Funktion als:

$$f^+ := \max(f, 0) \geq 0$$
$$f^- := \max(-f, 0) \geq 0$$

Es gilt also $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$

Satz 14.3.17. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch folgende Funktionen auf ihren Definitionsbereichen messbar:*

(i) $f + g$

(ii) αf

(iii) f^+

(iv) f^-

(v) $\max(f, g)$

(vi) $\min(f, g)$

(vii) $|f|$

(viii) fg

(ix) $\frac{f}{g}$

Mit "auf ihren Definitionsbereichen messbar" werden Definitonslücken Ausgeschlossen, z.B. $(f+g)(x)$ mit $f(x)=\infty$ und $g(x)=-\infty$

Beweis. Seien $f,g : X \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\{f+g<t\} = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q},r+s<t} \{f<r\}\cap\{g<s\}$$

Also sind $f+g$ und $-f$ $\mathcal{A}$-messbar. Es gilt außerdem:

$$\{\alpha f > t\} = \{f > \frac{t}{\alpha}\}$$

Also ist auch αf messbar.

Sei nun $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$. Dann ist $\varphi \circ f$ $\mathcal{A}$-messbar:

$$(\varphi\circ f)^{-1}(U) = f^1(\varphi^{-1}(U)) \in \mathcal{A}$$

Daraus folgt nun die Messbarkeit von $f^{\pm}$:

$$\varphi(s) = \max(\pm s, 0)$$

Für $|f|$ gilt:

$$|f| = f^+ + f^-$$

Für max und min gelten folgende Formeln:

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$
$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

Es gilt $f^2 = \varphi\circ f$ mit $\varphi(s)=s^2$, daraus folgt die Messbarkeit von f^2, also auch von:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$$

Schließlich ist auch $\frac{1}{g}$ messbar, da

$$\left\{\frac{1}{g} < s\right\} = \begin{cases} \frac{1}{s} < g < 0 & s<0 \\ \{g<0\} & s=0 \\ \{g<0\}\cup\{g>\frac{1}{s}\} & s>0 \end{cases}$$

Für $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir nun:

$$f_k(x) := \begin{cases} k & f(x)\geq k \\ f(x) & -k<f(x)<k \\ -k & f(x)\leq -k \end{cases}$$

Diese f_k sind messbar (?). Ersetzen wir nun die Funktionen f und g in den gewünschten Formeln durch f_k und g_k, kovergieren die entstehenden Funktionenfolgen punktweise gegen die gewünschten Funktionen in den erweiterten reellen Zahlen. Also gilt der Satz nicht nur für $f, g : X \to \mathbb{R}$, sondern auch für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. □

Definition 14.3.18. Eine Aussage $A[x]$ ist **wahr für μ-fast alle** x, wenn

$$\{x \in M \mid A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N \in \mathcal{N}(\mu)$$

Definition 14.3.19. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte numerische Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ-messbar auf X, wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und f $\mathcal{A}|_D$-messbar ist.

Satz 14.3.20. *Die Relation "$f = g$ μ-fast überall" ist eine Äquivalenzrelation*

Satz 14.3.21. *Sei $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Dann gibt es eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ auf D.*

Korollar 14.3.22. *Unsere Sätze über $\mathcal{A}$-messbare Funktionen gelten auch für μ-messbare Funktionen.*

Lemma 14.3.23. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und sei f μ-messbar auf X. Dann ist jede Funktion $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}$ μ-fast überall auch μ-messbar.*

Beweis. Wir haben $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, $D \in \mathcal{A}$, $\mu(X \setminus D) = 0$.

$\tilde{F} : \tilde{D} \to \overline{\mathbb{R}} \implies \exists N \in \mathcal{N}(\mu) : X \setminus N \subseteq D \cap \tilde{D}$ und $\forall X \in X \setminus N : f(x) = \tilde{f}(x)$. Es folgt, dass $X - \tilde{D} \in N$. Da μ vollständig ist, folgt $\tilde{D} \in \mathcal{A}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\{x \in \tilde{D} : \tilde{f}(x) < s\} &= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in \tilde{D} \cap (X \setminus N) : \tilde{f}(x) < s\} \\
&= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in X \setminus N : \tilde{f}(x) < s\} \\
&= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \\
&\cup (\{x \in D : \tilde{f}(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N : \tilde{f}(x) < s\}) \\
&= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \\
&\cup (\{x \in D : \tilde{f}(x) < s\} \setminus (\{x \in D : \tilde{f}(x) < s\} \cap N))
\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{f}$ μ-messbar. □

Satz 14.3.24. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Seien Funktionen $f_k, k \in \mathbb{N}$ μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast-überall gegen f konvergiert, so ist f μ-messbar.*

Satz 14.3.25. **<u>Satz von Severini-Egorov:</u>** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ eine Menge mit $\mu(D) < \infty$, und seien f_k, f messbare, μ-fast-überall endliche Funktionen auf D, sodass die f_k fast überall gegen f konvegieren. Dann existiert für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und*

(i) $\mu(D \setminus B) < \varepsilon$

(ii) f_k *konvergiert auf* B *gleichmäßig gegen* f.

14.4 Äußere Maße

Definition 14.4.1. Sei X eine Menge. Wir nennen eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein **äußeres Maß auf** X, falls

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Alle bisher eingeführten Begrifflichkeiten zu Maßen und ihren Eigenschaften sind analog für äußere Maße definiert. Insbesondere ist ein äußeres Maß immer monoton und σ-subadditiv.

Definition 14.4.2. Sei μ ein äußeres Maß auf X. Die Menge $A \subseteq X$ heißt μ-messbar, falls für alle $S \subseteq X$:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

Das System aller μ-messbaren Mengen wird mit $\mathcal{M}(\mu)$ bezeichnet.

Beispiel 14.4.3. Jedes Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist ein äußeres Maß. Beispiele sind z.B. das Diracmaß oder das Zählmaß.

Satz 14.4.4. *Sei Q ein System von Teilmengen einer Menge X, welches die leere Menge enthält. Sei $\lambda : Q \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion, sodass $\lambda(\emptyset) = 0$. Sei außerdem $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ für beliebige $E \subseteq X$, sodass:*

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i) \mid P_i \in Q, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i \right\}$$

Dann ist μ ein äußeres Maß.

Satz 14.4.5. *Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$. Für ein gegebenes äußeres Maß $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ erhält man durch die Vorschrift*

$$\begin{aligned} f(\mu) : \mathcal{P}(Y) &\to [0, \infty] \\ B &\mapsto \mu(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

ein äußeres Maß auf Y, genannt das ***Bildmaß von μ unter f****.*

Ist $f^{-1}(B)$ μ-messbar, so ist B $f(\mu)$-messbar.

Satz 14.4.6. *Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X. Für $M \subseteq X$ erhält man durch*

$$\begin{aligned} \mu_{LM} : \mathcal{P}(X) &\to [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu(M \cap A) \end{aligned}$$

Ein äußeres Maß auf X, welches wir die Einschrnkung von μ auf M nennen. Ist A μ-messbar, so ist A auch μ_{LM}-messbar.

Satz 14.4.7. *Sei μ ein äußeres Maß auf einer Menge X. Dann gilt:*

(i) Jede μ-Nullmenge N ist μ-messbar

(ii) Für jede Familie N_k von Nullmengen ist auch $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ μ-messbar.

Beispiel 14.4.8. Wir können auf jeder Menge X durch

$$\beta(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein äußeres Maß definieren. Dann sind nur $\emptyset$ und X β-messbar.

Lemma 14.4.9. *Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, \dots, k$ paarweise disjunkt. Dann gilt für alle $S \subseteq X$*

$$\mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)$$

Satz 14.4.10. *Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein äußeres Maß. Dann ist das System $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.*

Beweis. Zu zeigen ist:

1. **Endliche Durchschnitte und Vereinigungen sind messbar:** Es gilt $X \in \mathcal{M}$, denn für jede Menge $S \subseteq X$ ist

$$\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S)$$

Mit $A \in \mathcal{M}$ folgt auch $X \setminus A \in \mathcal{M}$, denn für $S \subseteq X$ gilt

$$\mu(S \cap (X \setminus A)) + \mu(S \setminus (X \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S)$$

Als nächstes zeigen wir, dass $A \cap B \in \mathcal{M}$ für $A, B \in \mathcal{M}$. Für alle $S \subseteq X$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \\ \mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B) \end{aligned}$$

Durch Wahl von $S \setminus A \cap B$ als Teilmenge und Messbarkeit von A erhält man:

$$\begin{aligned}\mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A)\end{aligned}$$

Aus diesen drei Identitäten folgt sofort:

$$\mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))$$

Es gilt also:

$$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \in \mathcal{M}$$

und

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}$$

Also ist $\mathcal{M}$ unter endlichen Vereinigungen und Durchscnitten abgeschlossen.

2. μ ist σ-additiv auf $\mathcal{M}$ Left as an exercise :)

3. $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter zählbaren Vereinigungen Left as an exercise :)

□

Korollar 14.4.11. *Sei μ ein äußeres Maß. Seien A_i μ-messbar. Dann gilt:*

(i) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

(ii) Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, so gilt

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

14.5 Der Fortsetzungssatz von Carathéodory

Definition 14.5.1. Ein Mengensystem $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\cup$-stabil, falls

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{A}.$$

analog heißt $\mathcal{A}$ $\cap$-stabil, falls

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}.$$

Per Induktion folgt direkt, dass auch Ergebnisse endlicher Wiederholungen der Operationen in $\mathcal{A}$ enthalten sein müssen.

Definition 14.5.2. Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengenring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{R}$, wenn:

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$

(ii) Für paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ gilt σ-Additivität, also:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

Definition 14.5.3. Sei λ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf $\mathcal{P}(X)$, bzw. ein Maß μ auf $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, heißt Fortsetzung von λ, falls

(i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$

(ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$)

Satz 14.5.4. <u>Carathéodory-Fortsetzung:</u> *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ das äußere Maß*

$$\mu(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}$$

*Dann ist μ eine Fortsetzung von λ, welches wir als das **von λ induzierte äußere Maß** oder als die **Carathéodory-Fortsetzung von** λ bezeichnen.*

Beweis.

<u>1: $\forall A \in \mathcal{R} : \mu(A) = \lambda(A)$.</u> Es gilt $\mu(A) \leq \lambda(A)$, da wir $A_1 = A$ und $A_i = \emptyset$ für $i \geq 2$ wählen können.

Für $\lambda(A) \leq \mu(A)$ reicht zu zeigen, dass:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \wedge A_i \in \mathcal{R} \implies \lambda(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

Wir betrachten hierfür die disjunkten Mengen

$$B_i = \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) \cap A \in \mathcal{R}.$$

Für diese gilt:

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

<u>2: Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ-messbar.</u> Sei $A \in \mathcal{R}$ und $S \subseteq X$ beliebig mit $\mu(S) < \infty$.

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wähle $A_i \in \mathcal{R}$, sodass

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \leq \mu(S) + \varepsilon$$

So gilt

$$S \cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)$$

sowie

$$S \setminus A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A).$$

Aus der Definition von μ folgt

$$\begin{aligned} \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i \setminus A) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \\ &\leq \mu(S) + \varepsilon \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt, dass A μ-messbar ist.

□

Die Carathéodory-Fortsetzung μ ist ein vollständiges Maß auf der σ-Algebra der Messbaren Mengen $\mathcal{M}(\mu)$, die die durch den Ring $\mathcal{R}$ generierte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ enthält.

Wir wollen als nächstes Zeigen, dass die Carathéodory-Fortsetzung eindeutig ist.

Lemma 14.5.5. Maximalität der Carathéodory-Fortsetzung: *Sei μ die Carathéodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ auf dem Ring $\mathcal{R}$ über X. Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\forall E \in \sigma(\mathcal{R}) : \tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

Beweis. Da Maße σ-subadditiv sind, gilt für alle $E \in \sigma(\mathcal{R})$ die Implikation

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \wedge P_i \in \mathcal{R} \implies \tilde{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i)$$

Die Bildung des Infimums über alle solchen Überdeckungen liefert die Carathéodory-Fortsetzung. □

Satz 14.5.6. **Hopf-Fortsetzung:** *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein Prämaß auf dem Mengenring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(x)$. Dann gibt es ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mt $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls λ σ-endlich ist.*

Beweis. Die Existenz von μ folgt aus der Carathéodory-Fortsetzung und daraus, dass jedes äußere Maß ein Maß bildet.

Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, sodass $\tilde{\mu} = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Sei $A_i \in \mathcal{R}$ und $\bigcup A_i = A \in \sigma(\mathcal{R})$.

Dann ist

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(\bigcup A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup A_i) = \mu(A)$$

Sei $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu(E) < \infty$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert eine Überdeckung $A = \bigcup A_i \supseteq E$, sodass $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$. Es folgt $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$, also

$$\begin{aligned}
\mu(E) + \varepsilon \geq \mu(A) &= \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) = \mu(E) + \mu(A \setminus E) \\
\implies \varepsilon &\geq \mu(A \setminus E) \\
\mu(E) \leq \mu(A) &= \tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(E) + \tilde{\mu}(A \setminus E) \\
&\leq \tilde{\mu}(E) + \mu(A \setminus E) \leq \tilde{\mu}(E) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt $\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$.

Sei λ σ-endlich. Dann existieren paarweise disjunkte $X_n \in \mathcal{R}$, die endliches λ haben, somit auch endliches μ. Sei $X = \bigcup X_n$ und $E \in \mathcal{R}$. Dann gilt:

$$\mu(E) = \sum \mu(E \cap X_n) = \sum \tilde{\mu}(E \cap X_n) = \tilde{\mu}(E).$$

□

Definition 14.5.7. Ein Maß μ heißt **regulär**, falls:

$$\forall M \subseteq X : \exists D \supseteq M, D \in \mathcal{M}(\mu) : \mu(M) = \mu(D)$$

Satz 14.5.8. *Die Carathéodory-Fortsetzung ist regulär.*

Satz 14.5.9. *Sei μ die Carathéodory-Fortsetzung des Prämaßes $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ auf dem Mengenring $\mathcal{R}$ über X. Dann gibt es zu jeder Menge $D \subseteq X$ eine Menge $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(D) = \mu(E)$. Insbesondere ist μ ein äußeres Maß.*

Satz 14.5.10. **Eindeutigkeit der Maßfortsetzung:** *Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf einem Mengenring $\mathcal{R}$ über X, und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ die Carathéodory-Fortsetzung* *von λ. Dann ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ die Vervollständigung vom Maß $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ und $\mathcal{M}(\mu)$ ist die vervollständigte σ-Algebra $\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}}$ von $\sigma(\mathcal{R})$ gemäß $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$. Insbesondere gibt es genau eine Fortsetzung von $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ zu einem vollständigen Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.*

Korollar 14.5.11. **Charakterisierung von $\mathcal{M}(\mu)$:** *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein σ-endliches Prämaß auf dem Mengenring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit Charathéodory-Fortsetzung μ. Eine Menge $D \subset X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(i) Es gibt ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supset D$ und $\mu(E \setminus D) = 0$.

(ii) Es gibt ein $C \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $C \subset D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$

Sei μ ein Äußeres Maß. Wir wissen, dass wir μ auf seine messbaren Mengen einschränken, um ein vollständiges Maß λ zu erhalten. Umgekehrt können wir mit einem Maß λ auf $\mathcal{A}$ anfangen und durch Carathéodory eine Fortsetzung λ^C erhalten, welche ein reguläres äußeres Maß ist.

Satz 14.5.12. *Die durch Einschränkung bzw. Fortsetzung gegebenen Abbildungen zwischen den σ-endlichen, regulären Abbildungen zwischen den σ-endlichen regulären äußeren Maßen und den σ-endlichen vollständigen Maßen auf X sind zueinander invers und somit insbesondere bijektiv.*

Beweis. (i) Sei λ ein σ-endliches vollständiges Maß auf $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$ folgt $\lambda = \lambda^C|_{\mathcal{A}}$. Da λ vollständig ist folgt $\mathcal{A}\overline{\mathcal{A}_\lambda} = \mathcal{M}(\lambda^C)$.

(ii) Sei μ ein σ-endliches reuläres äußeres Maß. Wir zeigen $\mu = \lambda^C$ für $\lambda = \mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$. Es gilt $\mathcal{M}(\mu) \subset \mathcal{M}(\mu)$ nach vorherigen Sätzen. μ ist regulär nach Vorraussetzung und λ^C ist regulär nach einem der vorherigen Sätze. Weiter stimmen beide äußere Maße auf $\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{M}(\lambda^C)$ überein, sind also gleich. $\square$

14.6 Mengensysteme und Mengenfunktionen

Wie konstruiert man aus einfachen Mengenfunktionen Prämaße?

Definition 14.6.1. Ein Mengensystem $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Halbring** über X, falls:

(i) $\emptyset \in \mathcal{Q}$

(ii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \cap Q \in \mathcal{Q}$

(iii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \setminus Q = \bigcup P_i$ mit endlich vielen paarweise disjunkten $P_i \in \mathcal{Q}$.

Beispiel 14.6.2. Sei X eine beliebige Menge. Dann ist $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$ ein Halbring.

Beispiel 14.6.3. Eine Menge $I \subset \mathcal{R}$ heißt **Intervall**, wenn es $a, b \in \mathcal{R}$ mit $a \leq b$ gibt, sodass:

$$(a, b) \subset I \subset [a, b]$$

Wir bezeichnen das System aller Intervalle mit $\mathcal{I}$. Ein achsenparalleler **Quader** in $\mathbb{R}^n$ ist ein kartesisches Produkt von Intervallen. Das System aller Quader in $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{Q}^n$ bezeichnet.

Wir wollen im folgenden Zeigen, dass das System der Quader des $\mathbb{R}^n$ einen Halbring bildet.

Satz 14.6.4. *Das System $\mathcal{I}$ der Intervalle in $\mathcal{R}$ ist ein Halbring.*

Satz 14.6.5. *Seien $\mathcal{Q}_i$ Halbringe über X_i. Dann ist das System der Produktmengen*

$$\mathcal{Q} = \{P_1 \times \ldots \times P_n \mid P_i \in \mathcal{Q}_i\}$$

ein Halbring über $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Korollar 14.6.6. *Das System $\mathcal{Q}^n$ der Quader in $\mathbb{R}^n$ ist ein Halbring.*

Satz 14.6.7. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Halbring und F das System aller endlichen Vereinigungen*

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$$

von Mengen $P_i \in \mathcal{Q}$. Dann ist F der durch $\mathcal{Q}$ generierte Mengenring.

Korollar 14.6.8. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Halbring über X und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Dann ist $\sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F})$*

Satz 14.6.9. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Halbring über X und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. So gibt es zu jedem $F \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkte Mengen $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{Q}$, sodass*

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i.$$

Definition 14.6.10. Sei $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}(X)$ ein Halbring. Eine Funltion $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathcal{Q}$, wenn:

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$

(ii) Für paarwise disjunkte $A_i \in \mathcal{Q}$ mit $\bigcup A_i \in \mathcal{Q}$ gilt

$$\lambda\Big(\bigcup A_i\Big) = \sum^{n} \lambda(A_i)$$

Ein Inhalt λ definiert ein Prämaß auf $\mathcal{Q}$, wenn λ σ-additiv ist, also die Additivität auch für abzählbar unendliche Vereinigungen gilt.

Satz 14.6.11. **<u>Fortsetzung auf den erzeugten Ring:</u>** *Sei λ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathcal{Q}$. Sei $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Dann gibt es genau einen Inhalt $\bar{\lambda}$ auf $\mathcal{Q}$, sodass $\forall Q \in \mathcal{Q} : \lambda(Q) = \bar{\lambda}(Q)$*

Korollar 14.6.12. *Ein Inhalt auf einem Halbring $\mathcal{Q}$ über X ist monoton und subadditiv.*

Beispiel 14.6.13. Sei $\mathcal{Q}^n$ der Halbring der Quader im $\mathbb{R}^n$. Sei $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \in \mathcal{Q}$, sodass jedes I_j die Grenzen a_j und b_j hat. Wir definieren das **elementargeometrische Volumen** als

$$\mathrm{vol}^n(Q) := \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$

Satz 14.6.14. *Das elementargeometrische Volumen induziert einen Inhalt auf dem Quaderhalbring $\mathcal{Q}^n$.*

Satz 14.6.15. *Sei λ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q}$ über X und $\bar{\lambda}$ die eindeutige Erweiterung auf den von $\mathcal{Q}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$. So ist $\bar{\lambda}$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.*

Satz 14.6.16. **Caratheodory-Fortsetzung auf Halbringen:** *Sei λ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q}$ über X. Sei μ das äußere Maß*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right\}$$

So ist μ ein äußeres Maß. Wie im Fall für Ringe bezeichnen wir μ als die Carathéodory-Fortsetzung von λ.

Satz 14.6.17. *Für einen Inhalt λ auf einem Ring $\mathcal{R}$ und Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ betrachten wir folgende Aussagen:*

(i) *λ ist ein Prämaß auf $\mathcal{R}$*

(ii) *Falls $A_i \subseteq A_{i+1}$ für alle i und $\bigcup A_i \in \mathcal{R}$ ist äquivalent:*

$$\lambda\Big(\bigcup A_i\Big) = \lim_{i\to\infty}\lambda(A_i)$$

(iii) *Falls $A_i \supseteq A_{i+1}$ für alle i, mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap A_i \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\lambda\Big(\bigcap A_i\Big) = \lim_{i\to\infty}\lambda(A_i)$$

(iv) *Falls $A_i \supseteq A_{i+1}$ für alle i, mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap A_i = \emptyset$ gilt*

$$\lim_{i\to\infty}\lambda(A_i) = 0$$

Es gilt:

- *Aussagen (i) und (ii) sind äquivalent.*
- *Aus Aussagen (i) und (ii) folgen Aussagen (iii) und (iv).*
- *Ist λ endlich, so sind alle Aussagen äquivalent.*

14.7 Dynkin-Systeme, monotone Klassen und Produkträume

Definition 14.7.1. Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ mit Grundmenge X heißt **Dynkin-System**, falls:

(i) $X \in \mathcal{D}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B : B \setminus A \in \mathcal{D}$

(iii) Sind $A_i \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt, so ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

Beispiel 14.7.2. Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System.

Beispiel 14.7.3. Sei X eine Menge mit gerader Kardinalität. Dann ist die Menge mit Teilmengen mit gerader Kardinalität ein Dynkin-System.

Satz 14.7.4. *Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist.*

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass jedes $\cap$-stabile Dynkin-System $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist.

Sei also $A, B \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil. Dann gilt

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{D}$$

Da letztere Vereinigung eine disjunkte Vereinigung von in $\mathcal{D}$ enthaltenen Mengen ist.

Seien $A_i \in \mathcal{D}$, $\hat{A}_0 := \emptyset$, $\hat{A}_i := \bigcup_{j=1}^{i} A_j$. So sind $B_i := \hat{A}_i \setminus \hat{A}_{i+1}$ paarweise disjunkt, also $\bigcup A_i \in \mathcal{D}$. □

Satz 14.7.5. *Für jedes $\cap$-stabile Mengensystem $\mathcal{E}$ über einer Menge X gilt:*

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$$

Beweis. Da $\sigma(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Für $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$ reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

Sei $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Wir definieren:

$$\mathcal{D}_D := \{Q \subseteq X \mid Q \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{D}_D$ ein Dynkin-System ist. Es gilt:

(i) $X \in \mathcal{D}_D$

(ii) Für $E, F \in \mathcal{D}_D$, $E \subseteq F$ gilt:

$$\begin{aligned}(F \setminus E) \cap D = (F \cap D) \setminus (E \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \\ \implies F \setminus E \in \mathcal{D}_D\end{aligned}$$

(iii) Für paarweise disjunkte $D_i \in \mathcal{D}_D$ gilt analog:

$$\begin{aligned}\left(\bigcup D_i\right) \cap D = \bigcup (D_i \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \\ \implies \bigcup D_i \in \mathcal{D}_D\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$, und zu folgern, dass für $\forall D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) : \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D$. Dies ist den Lesenden überlassen :) $\square$

Definition 14.7.6. Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **monotone Klasse**, falls:

(i) Aus $A_i \in \mathcal{M}$ mit $A_i \subseteq A_{i+1}$ folgt $\bigcup A_i \in \mathcal{M}$

(ii) Aus $A_i \in \mathcal{M}$ mit $A_i \supseteq A_{i+1}$ folgt $\bigcap A_i \in \mathcal{M}$

Korollar 14.7.7. *Jede σ-Algebra ist eine monotone Klasse.*

Satz 14.7.8. *Jede monotone Klasse, die eine Mengenalgebra ist, ist eine σ-Algebra. Insbesondere ist für jede Mengenalgebra $\mathcal{R}$ $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R})$.*

Definition 14.7.9. Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ messbare Räume. Die von den Projektionen $(\pi_i)_{i\in I}$ induzierte σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt **Produkt-σ-Algebra** auf $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$.

Wir schreiben $\mathcal{A} := \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Der dazugehörige messbare Raum heißt das Produkt der messbaren Räume.

Lemma 14.7.10. *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, messbare Rume, und sei $J \subset I$ eine nichtleere Teilmenge von I. So ist die Projektion*

$$\pi_J = \pi_J^I : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{j\in J} x_j$$

$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ - $\bigotimes_{j\in J} \mathcal{A}_j$-messbar.

Lemma 14.7.11. *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume, und sei $g : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ eine Abbildung. Dann ist g genau dann $\mathcal{C} - \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$-messbar, wenn alle Projektionen $\pi_i \circ g$ $\mathcal{C} - \mathcal{A}_i$-messbar sind.*

Definition 14.7.12. Sei $M \subset \displaystyle\prod_{i\in I} X_i$ und sei für ein beliebiges j $a_j \in X_j$. Der **Schnitt von M durch a_j** ist die Menge:

$$M^{a_j} := \left\{ (x_i)_{i\in I\setminus\{j\}} \in \prod_{i\in I\setminus\{j\}} X_i : x_j := a_j \implies (x_i)_{i\in I} \in M \right\}$$

Korollar 14.7.13. *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ messbare Räume, sei $M \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$, und sei $a_j \in X_j$ für ein $j \in I$. Dann ist der Schnitt M^{a_j} ein Element von $\bigotimes_{i \in I \setminus \{j\}} \mathcal{A}_i$.*

Satz 14.7.14. *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ messbare Räume, sodass jedes $\mathcal{A}$ die erzeugte σ-Algebra eines Mengensystems $\mathcal{E}_i$ ist. Dann gilt*

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right)$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i &= \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) \\
&= \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_i))\right) \\
&= \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i))\right) \\
&= \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right)
\end{aligned}$$

□

Korollar 14.7.15. *Sei $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i=1,\dots,n}$ eine endliche Menge messbarer Räume, wobei $\mathcal{A}_i$ durch $\mathcal{E}_i$ generiert sind und sodass für alle $i = 1, \dots, n$ eine Folge $(E_i^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_i$, sodass*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_i^k = X_i$$

Dann erzeugt das System

$$Q_0 := \left\{\prod_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathcal{E}_i\right\}$$

die Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$.

Beispiel 14.7.16. Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ ist das Produkt der Borel-Sigma-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$. Wir wählen also als $\mathcal{E}_i$ die Intervalle, also Mengen M mit $(a, b) \subseteq M \subseteq [a, b]$. Dann ist Q_0 die Menge der Quader. Wir werden später Zeigen, dass $\mathcal{B}^n = \sigma(Q^n)$ und $\mathcal{B} = \sigma(I)$.

Es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(-k,k)$, also ist

$$\mathcal{B}^n = \sigma(Q^n) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}^1.$$

Definition 14.7.17. Sei I eine Indexmenge. So defieren wir

$$P_0(I) := \{J \subseteq I : (J \neq \emptyset) \wedge (|J| < \infty)\}$$

Dann ist

$$\mathcal{Q} := \bigcup_{J \in P_0(I)} \left\{ \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j \times \prod_{i \notin J} X_i : A_i \in \mathcal{A}_i, j \in J \right\}$$

die Menge der **messbaren Quader** und

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{J \in P_0(I)} \left\{ \mathcal{A}_J \times \prod_{i \notin J} X_i : A_J \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j \right\} = \bigcup_{J \in P_0(I)} \pi_j^{-1}(A_j)$$

die Menge der **messbaren Zylinder**.

Satz 14.7.18. *Sei $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie messbarer Räume. Dann erzeugen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{I}$ die Produkt-Sigma-Algebra $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$, d.h.*

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i := \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{Z})$$

14.8 Das n-dimensionale Lebesquemaß λ^n

Lemma 14.8.1. *Der elementargeometrische Inhalt $\mathrm{vol}^n : \mathcal{Q}^n \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ist ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q}^n \subset P(\mathbb{R}^n)$.*

Definition 14.8.2. Das n-dimensionale äußere Lebesquemaß ist die Carathéodory-Fortsetzung des elementargeometrischen Inhalts, also:

$$\lambda^n(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(Q_k) : Q_k \in \mathcal{Q}^n, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{Q}_k \right\}$$

Das n-dimensionale Lebesquemaß ist dann die Einschränkung von λ^n auf die σ-Algebra $\mathcal{M}(\lambda^n)$ der messbaren Mengen. Wir bezeichnen dieses Maß ebenfalls mit λ^n.

Korollar 14.8.3. *(i) Das äußere Maß λ^n ist regulär.*

(ii) Das Maß λ^n ist vollständig.

> *Beweis.* Gemäß der Vorüberlegungen zur Carathéodory-Fortsetzung aus dem letzten Kapitel. □

Lemma 14.8.4. **Approximation durch Gitterfiguren:** *Betrachte für $k \in \mathbb{N}_0$ die Würfelfamilie*

$$\mathcal{W}_k := \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0,1]^n) \mid m \in \mathbb{Z}^n\}$$

und definiere für $E \subseteq \mathbb{R}^n$ die Approximationen von unten und oben:

$$\mathcal{F}_k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \subseteq E\}$$
$$\mathcal{F}^k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$$

So gilt:

(i) *$F_k(E)$ und $F^k(E)$ sind abzählbare Vereinigungen abzählbar vieler kompakter Quader mit paarweise disjunktem Inneren*

(ii)

$$F_1(E) \subseteq F_2(E) \subseteq \ldots \subseteq E$$
$$F^1(E) \supseteq F^2(E) \supseteq \ldots \supseteq E$$

(iii)

$$F_k(E) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k}\sqrt{n}\}$$
$$F^k(E) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, E) \leq 2^{-k}\sqrt{n}\}$$

(iv)

$$\operatorname{int}(E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(E) \subseteq E$$
$$\bar{E} \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(E) \supseteq E$$

Lemma 14.8.5. *Die Borelmengen $\mathcal{B}^n$ sind die vom Halbring der Quader $\mathcal{Q}^n$, dem Ring $\mathcal{F}^n$ der Figuren, und dem vom System $\mathcal{C}^n$ der abgeschlossenen Mengen erzeugte σ-Algebra, also:*

$$\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$$

Korollar 14.8.6. *Für das äußere Lebesquemaß λ^n gilt folgendes:*

(i) *Alle Borelmengen sind λ^n-messbar.*

(ii) *Zu jeder Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine Obermenge $B \subseteq E$ mit $\lambda^n(E) = \lambda^n(B)$*

(iii) *$\lambda^n(K) < \infty$ für alle beschränkten Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (also insbesondere für kompakte Mengen).*

Lemma 14.8.7. *Für ein beliebiges $E \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lambda^n(E) = \inf \{\lambda^n(U) \mid U \text{ offen}, U \supseteq E\}.$$

Ist E zusätzlich λ^n-messbar, gilt außerdem

$$\lambda^n(E) = \sup \{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq E\}.$$

Satz 14.8.8. *Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ^n-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(i) Es existiert eine Borelmenge $E \in \mathcal{B}^n$ mit $E \supseteq D$ und $\lambda^n(E \setminus D) = 0$.

(ii) Es existiert eine Borelmenge $C \in \mathcal{B}^n$ mit $C \subseteq D$ und $\lambda^n(D \setminus C) = 0$.

Wir können hier insbesondere $E = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$ mit U_i offen oder $C = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit A_i abgeschlossen wählen.

Satz 14.8.9. **Lusin**: *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $\lambda^n(A) < \infty$. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ auf A λ^n-messbar. Dann existiert für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine kompakte Teilmenge K, sodass $\lambda^n(A \setminus K) < \varepsilon$ und sodass f auf K stetig ist.*

Satz 14.8.10. *Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt* ***Borelmaß****, falls folgendes gilt:*

(i) Alle Borelmengen sind μ-messbar

(ii) Für jede kompakte Menge K gilt $\mu(K) < \infty$

Beispiel 14.8.11.

(i) λ^n ist ein Borelmaß.

(ii) Für beliebiges $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\lambda^n|_E$ ein Borelmaß.

Definition 14.8.12. Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **translationsinvariant**, falls

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, E \subseteq \mathbb{R}^n :$$
$$\mu(E + \vec{v}) = \mu(E)$$

Beispiel 14.8.13. Da der Elementarinhalt vol^n translationsinvariant ist folgt auch direkt die Translationsinvarianz von λ^n.

Lemma 14.8.14. *Ist μ ein translationsinvariantes äußeres Maß, so ist jede Hyperebene*

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists i \in 1, \dots, n : x_i = c \in \mathbb{R}\}$$

eine μ-Nullmenge.

Satz 14.8.15. *Sei μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Sei E λ^n-messbar. Dann gilt*

$$\mu(E) = \mu([0,1]^n) \cdot \lambda^n(E) := \theta \cdot \lambda^n(E)$$

Lemma 14.8.16. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante Λ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt für alle $E \subseteq U$:*

$$\lambda^n(f(E)) \leq \Lambda^n \lambda^n(E)$$

Satz 14.8.17. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

(i) Ist $N \subseteq U$ eine λ^n-Nullmenge, so ist $f(N)$ ebenfalls eine λ^n-Nullmenge.

(ii) Ist $E \subseteq U$ λ^n-messbar, so ist auch $f(E)$ λ^n-messbar.

Satz 14.8.18. <u>Invarianz von λ^n unter orthogonalen Transformationen:</u> *Sei $S \in O(n)$. Dann gilt für alle $E \subset \mathbb{R}^n$:*

$$\lambda^n(S(E)) = \lambda^n(E)$$

Korollar 14.8.19. <u>Bewegungsinvarianz von λ^n:</u> *Sei $S \in O(n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $E \subset \mathbb{R}^n$:*

$$\lambda^n(S(E) + a) = \lambda^n(E)$$

Lemma 14.8.20. <u>Polarzerlegung:</u> *Zu jedem $S \in GL_n(\mathbb{R})$ gibt es eine Diagonalmatrix Λ mit positiven Einträgen λ_i und Orthogonale Matrizen $T_1, T_2 \in O(n)$, sodass*

$$S = T_1 \Lambda T_2$$

Satz 14.8.21. *Für eine beliebige Lineare Abbildung $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt*

$$\lambda^n(S(E)) = |\det S| \lambda^n(E)$$

Beispiel 14.8.22. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. So definiert die Menge

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{\lambda_i})^2 < 1\}$$

einen Ellipsoid mit Halbachsen λ_i. Dieser ist das Bild eines offenen Balls unter einer Diagonalmatrix Λ. Also gilt

$$\lambda^n(E) = \lambda^n(\Lambda(B_1(0)))) \prod_{i=1}^n \lambda_i \cdot \lambda^n(B_1(0))$$

Satz 14.8.23. *Jede Vitalimenge V ist nicht λ^1-messbar, und somit insbesondere nicht Borel.*

Beweis. Sei q_k eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Wir wissen $\forall q \in \mathbb{Q} : \lambda^1(V) = \lambda^1(V + q)$. Wir wissen außerdem

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} q_k + V \subseteq [-1, 2],$$

also gilt insbesondere

$$1 \leq \lambda^1(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} q_k + V) \leq 3.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^1(V) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^1(V + q_k) \\ &= \lambda^1(\bigcup_{k=1}^{\infty}(S + q_k)) \\ &\in [1, 3]\end{aligned}$$

Was ein Widerspruch sowohl zu $\lambda^1(V) = 0$ also auch zu $\lambda^1(V) = \varepsilon > 0$ ist. $\square$

Chapter 15

Integrationstheorie

15.1 Das Lebesqueintegral

Im gesamten folgende Kapitel nehmen wir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ als beliebigen Maßraum. Ist μ ein äußeres Maß, ersetzen wir $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{M}(\mu)$.

Wir nehmen außerdem $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $D \subset X$ entwededer als $\mathcal{A}$-messbare Funktion an, also

$$D \in \mathcal{A}, \forall s \in \mathbb{R} : \{f > s\} \in \mathcal{A},$$

oder als μ-messbare Funktion, also

$$f : \tilde{D} \to \overline{\mathbb{R}}, \tilde{D} \in \mathcal{A}, \mu(D \setminus \tilde{D}) = 0,$$

und $f|_{\tilde{D}}$ ist $\mathcal{A}|_{\tilde{D}}$ messbar.

Wir erinnern uns, dass die einfachsten messbaren Funktionen die Indikatorfunktionen χ_E von Mengen $E \in \mathcal{A}$ sind.

Definition 15.1.1. Sei $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum. So nennen wir eine Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ eine **Treppenfunktion**, wenn sie als endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ darstellbar ist, also:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot (\chi_{A_i}(x))$$

Insbesondere hat eine Treppenfunktion nur endlich viele mögliche Werte.

Proposition 15.1.2. *Die Treppenfunktionen bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Satz 15.1.3. *Sei $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum. Für jede nichtnegative $\mathcal{C}$-messbare Funktion $f : Y \to [0, \infty]$ existiert eine monoton wachsende Folge f_n nichtnegativer Treppenfunktionen, welche punktweise gegen f konvergiert.*

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, m2^m$. Wir definieren

$$F_{m,k} := \{x \in Y \mid \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m}\}$$

Da f messbar ist, sind auch diese Mengen $F_{m,k}$ messbar. Wir definieren nun

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^m} & x \in F_{m,k} \\ m & x \in Y \setminus \bigcup_k F_{m,k} \end{cases}$$

Offensichtlich ist die Folge f_m monoton wachsend. Da die Differenz zum Funktionswert immer kleiner wird, konvergiert die Folge außerdem gegen f. $\square$

Definition 15.1.4. <u>Lebesqueintegral von Charakteristischen Funktionen:</u> Das Lebesqueintegral einer Charakeristischen Funktion einer Menge $E \in \mathcal{A}$ kann nun sehr intuitiv definiert werden durch:

$$\int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$$

Lemma 15.1.5. *Seien $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und seien α_i, β_j nichtnegative Zahlen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j} \\ \implies &\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j) \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i$, $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^n B_j$ mit $A_i \cap B_j = \emptyset$ oder $\alpha_i \leq \beta_j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \mu(A_j \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(A_j \cap B_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(\cap B_j) \end{aligned}$$

$\square$

Anmerkung 15.1.6. Wir können jede Treppenfunktion

$$f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

in eine Darstellung mit paarweise disjunkten B_j bringen, indem wir den Funktionswert auf einem Schnitt $B_i \cap B_j$ als $\beta_i + \beta_j$ definieren.

Definition 15.1.7. **Lebesqueintegral von Treppenfunktionen:** Sei $D \in \mathcal{A}$ und s eine nichtnegative Treppenfunktion mit einer Darstellung

$$s = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j}$$

mit paarweise disjunkten $B_j \in \mathcal{A}$ und $\beta_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

So definieren wir das Lebesqueintegral von s als:

$$\int_D s \; d\mu = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j)$$

Definition 15.1.8. **Lebesqueintegral messbarer Funktionen:** Für nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare numerischer Funktionen auf $D \in \mathcal{A}$ setzen wir:

$$\int_D f \; d\mu := \sup \left\{ \int_D s \; d\mu \right\}$$

Wobei jedes s eine Treppenfunktion ist, sodass $\forall x \in D : 0 \leq s(x) \leq f(x)$. Für beliebige $\mathcal{A}$-messbare Funktionen f auf $D \in \mathcal{A}$ definieren wir das Lebesqueintegral durch

$$\int_D f \; d_\mu := \int_D f^+ \; d\mu - \int_D f^- \; d\mu,$$

solange wenigstens eines der Intergral auf der rechten Seite endlich ist.

Anmerkung 15.1.9. Für Treppenfunktion stimmen die Integraldefinitionen gemäß unseres Lemmas überein.

Proposition 15.1.10. *Sei f $\mathcal{A}$-messbar auf einer Nullmenge $N \in \mathcal{A}$. Dann ist*

$$\int_N f \; d\mu = 0$$

Proposition 15.1.11. *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $M \in \mathcal{A}$. Dann gilt*

$$\int_M f \; d\mu = \int_X f\chi_M \; d\mu$$

und

$$\int_M f \; d\mu = \int_M f \; d\mu|_M$$

Beweis. (i) Sei $f \geq 0$ und $0 \leq s \leq f$ auf M. Dann folgt $0 \leq s\chi_M \leq f\chi_M$. Sei nun

$$s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Dann ist

$$s\chi_M = \sum \alpha_i \chi_{A_i \cap M}.$$

Also gilt

$$\sup_{0 \le s \le f} \le \sup_{0 \le s \le f_{\chi_M}},$$

also

$$\int_M f \, d\mu \le \int_X f\chi_M \, d\mu.$$

Wir wissen außerdem $x \in X \setminus M \implies \forall i : x \notin A_i$, also

$$s = \sum \alpha_i \chi_{A_i \cap M},$$

also

$$\int_X s \, d\mu = \int_M s \, d\mu \implies \int_X f(X_M) \, d\mu \le \int_M f \, d\mu.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_M s \, d\mu &= \sum \alpha_i \mu(A_i) \\ &= \sum \alpha_i \mu(A_i \cap M) \\ &= \sum \alpha_i \mu|_M(A_i) \\ &= \int_M s \, d\mu|_M \end{aligned}$$

□

Es reicht also, uns auf Integrale über ganz X zu beschränken.

Lemma 15.1.12. Monotonie des Lebesqueintegrals: *Für nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare Funktionen f, g folgt aus $0 \le f \le g$*

$$0 \le \int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$$

Beweis. Die Menge der Treppenfunktionen unter f ist eine Teilmenge der Treppenfunktionen unter g. □

Satz 15.1.13. Über monotone Konvergenz: *Seien f_n nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare Funk-*

tionen auf X, sodass $f_n \uparrow f$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_x f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Lemma 15.1.14. *Seien f_1, f_2 nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare Funktionen auf X. Dann gilt*

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu$$

Anmerkung 15.1.15. Sei f nur μ-messbar, also auf einer Menge D definiert, sodass $\mu(X \setminus D) = 0$. So setzten wir

$$\int_X f \, d\mu = \int_D f \, d\mu$$

(solange das Integral auf der rechten Seite tatsächlich definiert ist).

Lemma 15.1.16. *Seien f_1, f_2 nichtnegative μ-messbare Funktionen auf X. Dann gilt ebenfalls*

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu$$

Lemma 15.1.17. *Für nichtnegative μ-messbare Funktionen f, g folgt aus $0 \leq f \leq g$ μ-fast-überall, dass*

$$0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

Definition 15.1.18. Die Menge aller μ-messbaren Funktionen auf X, deren Lebesque-Integral definiert ist, wird mit

$$\mathcal{L}^*(\mu) = \mathcal{L}^*$$

bezeichnet. Weiter definieren wir

$$\mathcal{L}^1 := \left\{ f \in \mathcal{L} * (\mu) \mid \int_X f \, d\mu \in \mathbb{R} \right\}$$

und nennen eine Funktion f **integrierbar**, falls $f \in \mathcal{L}^1$.

Lemma 15.1.19. *Sei $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ und f eine μ-messbare Funktion mit $f = g$ μ-fast überall. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ und*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

Ist μ vollständig, so gilt die Behauptung auch für f nicht μ-messbar.

Lemma 15.1.20. **<u>(Chebyshevsche Ungleichung:)</u>** *Sei $f \geq 0$ μ-messbar auf X und $\int_X f \, d\mu < \infty$. Dann gilt:*

$$\mu(\{f \geq s\}) = \begin{cases} \frac{1}{s} \int_X f \, d\mu & s \in (0, \infty) \\ 0 & s = \infty \end{cases}$$

Korollar 15.1.21.

(i) *Ist* $\int_X f \, d\mu < \infty$, *so folgt* $f(X) < \infty$ *für* μ*-fast alle* $x \in X$.

(ii) *Ist* $f \geq 0$ *und* $\int_X f \, d\mu = 0$, *so gilt* $f(x) = 0$ μ*-fast überall.*

Korollar 15.1.22. *Seien* $f, g \in \mathcal{L}^1$.

(i) *Falls* $\forall A \in \mathcal{A} : \int_A f \, d\mu = 0$ *ist, dann gilt* $f = 0$ μ*-fast überall.*

(ii) *Gilt für alle* $A \in \mathcal{A}$ *die Ungleichung* $\int_X f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu$, *so ist* $f \leq g$ μ*-fast überall.*

Satz 15.1.23. *Seien* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. *Dann gilt:*

(i) *Für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist auch* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und es gilt:*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$$

(ii) $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$\left| \int_x f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

(iii) $\max(f, g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\min(f, g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Ist f *nur* μ*-messbar, aber* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *mit* $|f| \leq g$ μ*-fast überall, so gilt*

(iv) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

Korollar 15.1.24. *Seien* f, g μ*-messbar und* $\int_X f \, d\mu > -\infty$. *Sei* $f \leq g$ μ*-fast überall. Dann gilt*

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

Insbesondere ist $\int_X g \, d\mu$ *definiert. Die entsprechende Aussage gilt mit* $\geq$, *falls* $\int_X f \, d\mu < \infty$.

Proposition 15.1.25. *Sei* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wir betrachten*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto |x|^{-\alpha} \end{aligned}$$

So gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f \, d\lambda^n < \infty \Leftrightarrow \alpha > n$$

und

$$\int_{B_1(0)} f \, d\lambda^n < \infty \Leftrightarrow \alpha < n$$

15.2 Konvergenzsätze

Das Lebesqueintegral wurde insbesondere definiert, weil man die Bedingungen abschwächen wollte, bei denen man Grenzwerte und Integrale vertauschen kann, also:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n \; d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \; d\mu$$

Auch beim Lebesqueintegral geht dies nicht immer.

Beispiel 15.2.1. Sei

$$f_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$$

So konvergiert f_ε fast überall gegen

$$f_0 = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Also:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_X f_\varepsilon \; d\mu = 1 > 0 = \int_X \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon \; d\mu$$

Satz 15.2.2. **Satz von Levi / Monotoner Konvergenzsatz:** *Seien f_n, f μ-messbare Funktionen auf X mit $f_n \uparrow f$ μ-fast überall und sei $\int_X f_1 \; d\mu > -\infty$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_x f_n \; d\mu = \int_x f \; d\mu$$

Anmerkung 15.2.3. Ist μ vollständig, so folgt die μ-Messbarkeit von f bereits aus der μ-Messbarkeit der f_n.

Korollar 15.2.4. *Für nichtnegative μ-messbare Funktionen f_n gilt:*

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_X f_n \; d\mu$$

Lemma 15.2.5. **Lemma von Fatou:** *Sei (f_k) eine Folge μ-messbarer Funktionen auf X und sei g integrierbar. Falls für alle $k \in \mathbb{N}$ $f_k \geq g$ μ-fast überall, dann gilt*

$$\int_x \liminf f_k \; d\mu \leq \liminf \int_X f_k \; d\mu$$

Beweis. f_k sei auf $D_k \in \mathcal{A}$ definiert und $\mu(X \setminus D_k) = 0$. Sei $D := \bigcap D_k$ und

$$\begin{aligned} f : D &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \liminf f_k(x) \end{aligned}$$

Sei nun $g_k := \inf_{j\geq k} f_j$. Diese Folge ist monoton wachsend und definiert auf

$\bigcup_{j\geq k} D_j$. Nun gilt

$$\lim_{k\to\infty} g_k = f$$

Es existiert $g_k \geq g \in \mathcal{L}^1$, also gilt

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \; d\mu &= \int_X f \; d\mu \\ &= \liminf_{k\to\infty} g_k \; d\mu \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \; d\mu\end{aligned}$$

□

Satz 15.2.6. <u>Satz von Lebesque / Satz über dominierte Konvergenz:</u> *Seien f_k und f μ-messbare Funktionen auf X mit $f_k \to f$ μ-fast überall. Sei g eine nichtnegative integrierbare Funktion, sodass*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k| \leq g$$

μ-fast überall. Dann ist f integrierbar und

$$\int_x f \; d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_x f_k \; d\mu.$$

Es gilt sogar

$$\|f - f_k\|_{L^1(\mu)} := \int_X |f - f_k| \; d\mu \to 0$$

Korollar 15.2.7. *Sei h_n eine Folge μ-messbarer Funktionen und $g \in \mathcal{L}^1$. Falls die die Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} h_j$$

μ-fast überall konvergiert und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{n} \right| \leq g$$

Dann gilt

$$\int_X \sum_{j\in\mathbb{N}} h_j \; d\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_X h_j \; d\mu$$

Korollar 15.2.8. *Jede Regelfunktion $f : (I = [a,b]) \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, und der Regelintegral stimmt mit dem Lebesqueintegral überein, also:*

$$\int_a^b f \; dx = \int_I f \; d\lambda^1$$

Anmerkung 15.2.9. Dies gilt nicht für uneigentliche Integrale! Es gibt Funktionen, die ein uneigentliches Regelintegral haben, aber kein Lebesqueintegral!

Appendix A

Wörterbuch Analysis III

A

Algebra: Sei X eine beliebige Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Mengenalgebra* oder einfach *Algebra*, falls $\mathcal{A}$ ein Mengenring ist und X enthält. Somit ist $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra, falls:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist $\setminus$-*stabil*),

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist $\cap$-*stabil*),

(iv) $X \in \mathcal{A}$.

äußeres Maß: Sei X eine beliebige Menge. Ein *äußeres Maß* ist eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (σ-subadditivität)

Jedes äußere Maß definiert ein vollständiges Maß auf der σ-Algebra seiner messbaren Mengen.

C

Carathéodory-Fortsetzung Sei $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein Prämaß. So ist die Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

ein äußeres Maß auf X, welches wir die *Carathéodory-Fortsetzung von* λ nennen. Per Definition ordnet μ jeder Menge E den Wert der gemäß λ kleinstmöglichen Überdeckung mit Mengen aus $\mathcal{R}$ zu (bzw. die größte untere Schranke, falls es kein Minimum gibt).

D

***Dynkin-System*:** Sei X eine beliebige Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Dynkin-System*, falls:

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{D}, A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$,

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt $\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Die Definition entspricht der Definition einer σ-Algebra, aber mit eingeschränkten Stabilitätseigenschaften. Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist.

E

***endliche Additivität*:** Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem auf X. Eine Abbildung $f : M \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *endlich additiv*, wenn für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ mit $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$ gilt, dass:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i).$$

Inhalte sind per Definition endlich additiv. Maße und Prämaße sind per Definition σ-additiv, also insbesondere endlich additiv.

***endliches Maß*:** Ein Maß (bzw. Prämaß, äußeres Maß, Inhalt) *mu* auf einem Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt **endlich**, falls $\forall M \in \mathcal{M} : \mu(M) < \infty$.

H

Halbring: Sei X eine beliebige Menge. Eine Menge $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Halbring*, falls:

(i) $\emptyset \in \mathcal{Q}$

(ii) $\mathcal{Q}$ ist $\cap$-*stabil*, also $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \cap Q \in \mathcal{Q}$

(iii) Für $P, Q \in \mathcal{Q}$ existieren endlich viele paarweise disjunkte Mengen $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{Q}$, sodass

$$P \setminus Q = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$$

$\mathcal{Q}$ erfüllt also eine abgeschwächte Version von $\setminus$-*Stabilität*.

Halbringe sind die Mengensysteme, auf denen Inhalte definiert werden können.

Hopf-Fortsetzung: Sei $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein Prämaß auf einem Mengenring $\mathcal{R}$. So existiert ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Falls λ σ-endlich ist, ist diese Fortsetzung eindeutig.

I

Inhalt: Sei $\mathcal{Q}$ ein Halbring über einer Menge $\mathcal{X}$. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{Q} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *Inhalt* auf $\mathcal{Q}$, falls

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$

(ii) λ ist *endlich additiv* - Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{Q}$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{Q}$ gilt also:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i).$$

M

Maß: Sei $\mathcal{A}$ ein σ-Algebra auf einer Menge $\mathcal{X}$. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *Maß* auf $\mathcal{A}$, falls

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) μ ist σ*-additiv* - Für jede Folge paarweise disjunkten Mengen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ gilt also:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

messbare Funktion: Wir unterscheiden zwischen $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$*-messbaren Funktionen*, welche auf einer gesamten Menge X definiert sein müssen, und μ*-messbaren Funktionen*, welche nur fast überall auf X definiert sein müssen.

$\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar: Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$*-messbar*, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$, also falls

$$\forall C \in \mathcal{C} : f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$$

Ist $f : X \to X$ sprechen wir auch einfach von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen.

μ-messbar: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ*-messbar* auf X, wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und wenn f $\mathcal{A}|_D$ messbar ist, also messbar auf der Einschränkung von $\mathcal{A}$ von X auf D.

messbare Menge: Sei μ ein äußeres Maß auf einer Menge X. So heißt eine Menge $A \subset X$ *messbar*, falls für alle $S \subset X$:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

Da per Definition äußerer Maße bereits $\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$, ist dies äquivalent zu

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

N

numerische Funktion: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$. So bezeichnen wir Funktionen $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ als *numerische Funktionen.*

P

Prämaß: Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring über einer Menge $\mathcal{X}$. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *Prämaß* auf $\mathcal{R}$, falls

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$

(ii) μ ist σ-*additiv* - Für jede Folge paarweise disjunkten Mengen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ gilt also:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

Ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ kann durch *Carathéodory-Fortsetzung* zu einem äußeren Maß auf $\mathcal{P}(X)$ fortgesetzt werden. Es kann außerdem durch *Hopf-Fortsetzung* zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.

R

reguläres äußeres Maß: Ein äußeres Maß heißt *regulär*, falls für jede Menge $M \in X$ eine messbare Obermenge $D \supset M$ mit $\mu(D) = \mu(M)$ existiert.

Ring: Sei X eine beliebige Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Mengenring* oder einfach *Ring*, falls:

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ ist $\setminus$-*stabil*),

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ ist $\cap$-*stabil*),

Ringe sind die Mengensysteme, auf denen Prämaße definiert werden können.

S

σ-Algebra: Sei X eine beliebige Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-*Algebra*, falls:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist nicht nur $\cup$-*stabil*, sondern auch abzählbar unendlich $\cup$-stabil), Aus der Definition folgt, dass $\mathcal{A}$ auch $\setminus$-stabil und abzählbar unendlich $\cap$-stabil ist. σ-Algebren sind die Mengensysteme, auf denen Maße definiert werden können.

Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem, so notieren wir die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ enthält als $\sigma(\mathcal{M})$.

σ-additivität: Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem auf X. Eine Abbildung $f : M \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *σ-additiv*, wenn für jede Folge von paarweise disjunkten Teilmengen $A_i \in \mathcal{M}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$ gilt, dass:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Maße und Prämaße sind per Definition σ-additiv.

σ-subadditivität: Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem auf X. Eine Abbildung $f : M \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *σ-subadditiv*, falls für jede Teilmenge $A \in \mathcal{M}$ und Folge von Teilmengen $A_i \in \mathcal{M}$ gilt, dass:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \implies f(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Äußere Maße sind per Definition σ-subadditiv. Da σ-subadditivität aus σ-additivität folgt sind Maße und Prämaße ebenfalls σ-additiv.

***stabil*:** Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt stabil, falls es unter einer bestimmten Mengenoperation abgeschlossen ist. Insbesondere sind für die Maßtheorie folgende Begriffe relevant:

$\cap$***-stabil:*** $\mathcal{M}$ heißt $\cap$-stabil, falls für alle $A, B \in \mathcal{M}$ auch $A \cap B \in \mathcal{M}$.

$\cup$***-stabil:*** $\mathcal{M}$ heißt $\cap$-stabil, falls für alle $A, B \in \mathcal{M}$ auch $A \cup B \in \mathcal{M}$.

$\setminus$***-stabil:*** $\mathcal{M}$ heißt $\cap$-stabil, falls für alle $A, B \in \mathcal{M}$ auch $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

σ-Algebren sind $\cap$-stabil, $\cup$-stabil und $\setminus$-stabil. Mengenringe und Mengenalgebren sind $\cap$-stabil und $\setminus$-stabil. Halbringe sind $\cap$-stabil und erfüllen eine abgeschwächte Version von $\setminus$-Stabilität..

Appendix B

Sammlung von Reihen und ihren Grenzwerten

B.1 Geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Also für $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

B.2 Standardbeispiel für Teleskopsummen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^{*} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

* Die Umformung der Brüche funktioniert folgendermaßen:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

B.3 Wichtige Taylorreihen

B.3.1 Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \left(= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right)$$

B.3.2 Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}
\end{aligned}$$

Aus diesen Reihen folgt direkt die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \cos(x) + i\sin(x)
\end{aligned}$$

B.3.3 Logarithmus

Da $\ln(x)$ eine Singularität am Punkt $x = 0$ hat, Entwickeln wir stattdessen am Punkt $x = 1$ und erhalten:

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Appendix C

Sammlung von Stammfunktionen

C.1 Inverse Trigonometrie

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
\arccos(x) &= -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
\arctan(x) &= \int \frac{1}{1+x^2} dx
\end{aligned}$$

Für die Herleitung sind die Ableitungsformel für Umkehrfunktionen und die Identität

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

$$\implies \sin(x) = \sqrt{1-\cos(x)^2}, \qquad \cos(x) = \sqrt{1-\sin(x)^2}$$

nötig.

C.2 Hyperbolische Trigonometrie

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}
\end{aligned}$$