

MITSCHRIEB

# Analysis II

Sommersemester 2025

*Emma Bach*

Vorlesung gehalten von  
Prof. Dr. Michael RŮŽIČKA

June 11, 2025

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Der Euklidische Raum</b>	<b>2</b>
1.1	Abbildungen und Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ .....	4
1.2	Mehrdimensionale Ableitungen .....	6
1.3	Differenzierbarkeit .....	7

# Chapter 1

## Der Euklidische Raum

**Lemma 1.1.** Sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Dann wird durch

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

auf  $V$  eine Norm erklärt. Diese bezeichnet man als die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

**Definition 1.2.** Sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Die Vektoren  $u, v \in V$  heißen **orthogonal**, wenn

$$\langle u, v \rangle = 0$$

ist. Für  $u, v \in V \setminus \{0\}$  wird die reelle Zahl

$$\phi = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

als der Winkel zwischen  $u$  und  $v$  bezeichnet.

**Anmerkung 1.3.** Es gilt

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

**Lemma 1.4.** Für  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  sei

$$\|X\|_{\max} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

Dann ist  $\|\cdot\|_{\max}$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  und es gilt

$$\|X\|_{\max} \leq \|X\| \leq \sqrt{n} \|X\|_{\max}$$

**Satz 1.5.** Die Menge  $\mathbb{Q}^n$  der Punkte mit rational Koordinaten ist dicht in  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Sei  $X \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . Da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \exists y_i \in \mathbb{Q} : |x_i - y_i| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Durch Lemma 1.4 folgt:

$$\|x - y\| \leq \sqrt{n} \|X - Y\| < \varepsilon$$

□

**Satz 1.6.** Sei  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $X_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ . Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X \Leftrightarrow \forall i : \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Insbesondere ist  $X_k$  eine Cauchyfolge, wenn die Komponenten Cauchyfolgen sind.

*Beweis.*  $X_k \rightarrow X$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . Dann gilt

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : \|X_k - X\| \leq \varepsilon \implies \forall i : \left| x_i^{(k)} - x_i \right| < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Und umgekehrt:

$$\forall i : x_i^{(k)} \rightarrow x_i, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \implies \exists k_0^i \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0^i \left| x_i^{(k)} - x_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$k_0 := \max\{k_0^1, \dots, k_0^n\} \implies \forall k \geq k_0 : \left| x_i^{(k)} - x_i \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \implies \|X_k - X\| \leq \sqrt{n} \|X_k - X\| < \varepsilon$$

□

**Satz 1.7.** Für konvergente Folgen  $(X_k), (Y_k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\lambda_k) \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k + Y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k + \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k \quad (1.1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k X_k = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \right) \left( \lim_{k \rightarrow \infty} X_k \right) \quad (1.2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle X_k, Y_k \rangle = \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} X_k, \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k \right\rangle \quad (1.3)$$

**Satz 1.8.**  $\mathbb{R}^n$  ist vollständig.

*Beweis.* Ist  $X_k$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}^n$ , so sind nach Satz 1.6 alle Teilfolgen Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Also:

$$\exists x_i \in \mathbb{R} : x_i^{(k)} \rightarrow x_i \implies \exists X \in \mathbb{R}^n : X_k \rightarrow X$$

□

**Satz 1.9. (Bolzano-Weierstrass:)** Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Sei  $(X_k)$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$ . Nach 1.4 müssen die Komponentenfolgen ebenfalls beschränkt sein. Nach dem eindimensionalen Fall des Satzes von Bolzano-Weierstrass existieren also konvergente Teilfolgen der Koordinatenfolgen. Angenommen, die konvergente Teilfolge der ersten Komponente ist gegeben durch  $x_1^{(k_n)} \rightarrow x_1$ . So ist  $x_2^{(k_n)}$  ebenfalls eine beschränkte Teilfolge, also existiert eine Teilfolge  $x_2^{(k_{n_m})}$  welche in den ersten beiden Komponenten konvergiert. Führt man dieses Verfahren induktiv fort, erhält man eine konvergente Teilfolge von  $(X_k)$ . □

**Satz 1.10.** Sei  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge abgeschlossener beschränkter nichtleerer Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ . Dann ist  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$

*Beweis.*  $A_i \neq \emptyset \implies \exists X_i \in A_i$  s.d.  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge ist. Da  $A_i$  beschränkt ist ist  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  beschränkt, also hat  $X_i$  eine konvergente Teilfolge  $X_{i_k}$  mit Limes  $X$ . Es gilt  $X_{i_k} \in A_{i_k} \subseteq A_i$ , also ist  $X$  ein Berührungspunkt von  $A_i$ , also  $X \in A_i$ . □

**Satz 1.11.** Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist kompakt.

*Beweis.* Analog zur eindimensionalen Version, wobei statt Intervallen  $[a_i, b_i]$  Hyperwürfel  $[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \times \dots \times [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$  genutzt werden müssen. □

**Satz 1.12.** Seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  Normen auf  $\mathbb{R}^n$ . So existieren  $k, K \in \mathbb{R}^+$  mit

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : k \|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq K \|X\|_1$$

*Beweis.* Diese Normenäquivalenz bildet eine Äquivalenzrelation. Es reicht also, zu zeigen, dass jede Norm  $\|\cdot\|_2$  äquivalent zu einer spezifischen Norm  $\|\cdot\|_1$  ist. Wir wählen  $\|\cdot\|_{\max}$ .

Sei  $(E_i)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren:

$$K := \|E_1\|_2 + \dots + \|E_n\|_2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|X\|_2 &= \|x_1 E_1 + \dots + x_n E_n\| \\ &\leq |x_1| \|E_1\|_2 + \dots + |x_n| \|E_n\|_2 \\ &\leq \|X\|_{\max} K \quad [\text{citation needed}] \end{aligned}$$

Es bleibt die Rückrichtung zu zeigen.

**Lemma 1.13.**  $f(X) := \|X\|_2$  ist stetig.

*Beweis.*

$$|\|X\|_2 - \|Y\|_2| \leq \|X - Y\|_2 \leq K\|X - Y\|_{\max} \leq K\|X - Y\|$$

Also ist  $\|\cdot\|_2$  stetig bezüglich der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$ . □

Wir definieren nun:

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\|_{\max} = 1\}$$

Diese Menge ist beschränkt. Wir wollen zeigen, dass sie außerdem abgeschlossen ist. Sei  $X_i \rightarrow X$ ,  $X_i \in A$ . Es gilt:

$$|\|X_i\|_{\max} - \|X\|_{\max}| \leq \|X_i - X\|_{\max} \leq \|X_i - X\|$$

Also konvergiert jede Menge, also ist  $A$  kompakt, also auch abgeschlossen. Dementsprechend muss  $f$  auf  $A$  ein Minimum  $k$  annehmen. Wir wissen  $f \geq 0$ , also ist  $k \geq 0$ . Es gilt sogar  $k > 0$ , da keiner der Vektoren in  $A$  der Nullvektor ist. Nun gilt also  $\forall X \in A : \|X\|_2 \geq k$ . Wir definieren:

$$\lambda := \frac{1}{\|X\|_{\max}}$$

$$\|\lambda X\|_{\max} = |\lambda| \|X\|_{\max} = 1$$

$$|\lambda| \|X\|_2 = \|\lambda X\|_2 \geq k \implies \|X\|_2 \geq k \|X\|_{\max}$$

□

**Anmerkung 1.14.** Im unendlichdimensionalen Fall gilt Satz 1.12 nicht.

## 1.1 Abbildungen und Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Betrachten wir zuerst den Spezialfall Linearer Funktionen, also  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : F(\lambda X + \mu Y) = \lambda F(X) + \mu F(Y)$ .

Sei  $(E_i)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $(E'_i)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^k$ . Nun gilt:

$$F(E_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij} E'_i$$

Daraus erhalten wir Koeffizienten  $a_{ij}$ , welche eine Matrix bilden. Umgekehrt können wir aus den Koeffizienten die Abbildung  $F$  rekonstruieren, indem wir definieren:

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{j=1}^n x_j E_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j F(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^k a_{ij} E'_i \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) E'_i \end{aligned}$$

[missing stuff here]

**Definition 1.15.** Wir bezeichnen als  $p_i : M \rightarrow k$  die Projektion eines Vektors auf die  $i$ -te Komponente.

**Satz 1.16.** Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $x \in M$ . Dann ist  $F$  stetig in  $x$  genau dann, wenn  $p_i \circ F$  stetig für alle  $i$  ist.

*Beweis.* 1.  $p_i$  ist stetig. Ist also  $F$  stetig folgt direkt, dass auch  $p_i \circ F$  stetig ist.

2. Angenommen,  $p_i \circ F$  ist stetig  $\forall i, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . Da  $p_i \circ F$  stetig ist existiert eine Umgebung  $U_i$  von  $x$ , sodass  $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \forall y \in U_i$ . Ebenso für die anderen Komponenten. Nun gilt:

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sqrt{n} \|F(x) - F(y)\|_{\max} \leq \varepsilon$$

□

Analog gilt das Selbe für Stetigkeit auf  $M$ , gleichmäßige Stetigkeit, etc.

**Definition 1.17.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Abbildung,  $x_0$  ein Häufungspunkt,  $y \in \mathbb{R}^k$ . Dann definieren wir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in M \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| \leq \delta \implies \|F(x) - y\| < \varepsilon$$

$F$  ist stetig in  $x_0$  genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ .

**Satz 1.18.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Abbildung,  $X_0 \in M$  ein Häufungspunkt,  $Y \in \mathbb{R}^k$  und  $f_i = p_i \circ F$ . Dann gilt:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = Y \Leftrightarrow \forall i : \lim_{X \rightarrow X_0} f_i(X) = y_i$$

*Beweis.* Analog zu Beweis 1.16.

□

**Korollar 1.19.**

$$F(X) \rightarrow Y, G(X) \rightarrow Z \implies F(X) + G(X) \rightarrow Y + Z$$

## 1.2 Mehrdimensionale Ableitungen

**Beispiel 1.20.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert auf einer offenen Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \text{ bzgl. der Standardbasis}$$

Wir können aber auch  $X = \sum x'_i E'_i$  bezüglich einer beliebigen anderen Basis darstellen. Also:

$$f(X) = f(x_1, \dots, x_n) = g(x'_1, \dots, x'_n)$$

Da  $f$  in der Regel nicht linear ist, ist ein solcher Basiswechsel sehr viel komplizierter als in der Linearen Algebra! Wo möglich ist es also besser, über  $f(X)$  zu reden.

**Definition 1.21.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{X} \in M$ . Betrachte die Abbildung

$$t \rightarrow f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, t, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n),$$

welche eine Mehrdimensionale Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  auf eine eindimensionale Funktion  $f(t)$  abbildet.  
Achtung: Wir nehmen hier implizit eine Darstellung bezüglich der Standardbasis an!

**Beispiel 1.22.** Betrachte folgende Funktion:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f$  ist an  $(0, 0)$  partiell differenzierbar, die Partiellen Ableitungen sind 0. Allerdings gilt

$$\forall x : f(x, x) = \frac{1}{2}$$

Also ist  $f$  an 0 nicht stetig! Es existieren also Funktionen, die an einem Punkt partiell Differenzierbar sind, an dem sie nicht stetig sind.

Idee: Fordere partielle Differenzierbarkeit bezüglich jeder möglichen Basis, also partielle Differenzierbarkeit in jedem Vektor.

**Beispiel 1.23.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Wir betrachten die “Linearisierung”  $t \rightarrow f(t, \alpha t)$ . Einsetzen liefert:

$$f(t, \alpha t) = \frac{\alpha t}{t^2 + \alpha^2}$$

Diese Funktion ist differenzierbar, also ist  $f$  differenzierbar bezüglich beliebiger Basen. Das reicht jedoch immer noch nicht:

$$f(a, a^2) = \frac{a^2 a^2}{a^4 + a^4} = \frac{1}{2}$$

Also ist  $f$  immer noch nicht stetig - es ist stetig für Folgen, welche den Nullpunkt durch Geraden erreichen, aber nicht, wenn wir durch kompliziertere Pfade gegen den Nullpunkt gehen.

Wir wollen die Begriffe aus der Analysis I über Stetigkeit und Ableitbarkeit retten, also brauchen wir einen komplizierteren Ableitungsbegriff.

## 1.3 Differenzierbarkeit

Sei  $f$  eine beliebige Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Ableitung gibt uns die Tangente der Funktion an einem beliebigen Punkt, also die beste affine Approximation der Funktion an diesem Punkt.

**Definition 1.24.** Eine Funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißt **affin**, wenn es eine Lineare Funktion  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  und eine Konstante  $Z \in \mathbb{R}^k$  gibt, sodass:

$$F(X) = L(X) + Z$$

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  affin, also  $g(x) = cx + t$  für  $c, t \in \mathbb{R}$ . Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir wollen eine beliebige Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  approximieren. Für eine gute Approximation wollen wir  $f(x_0) = g(x_0)$ , also erhalten wir:

$$g(x) = c(x - x_0) + f(x_0).$$

Schreibe  $x = x_0 + h$  und lasse  $h$  gegen 0 gehen.

$$h \rightarrow f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$$

Wir sagen, die Approximation ist gut, wenn  $f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$  schneller gegen 0 geht als  $h$  selbst, also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ch}{h} = 0 \quad (1.4)$$

Was äquivalent ist zu:

$$c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wir sagen also,  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar, genau dann, wenn eine lineare Abbildung  $L$  existiert, sodass:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

Diese geometrische Intuition, nach der die Ableitung die beste affine Approximation der Funktion an einem gegebenen Punkt ist, können wir auf den  $\mathbb{R}^n$  übertragen. Analog zu der Interpretation affiner Funktionen als Geraden in  $\mathbb{R}$ , also der Ableitung als das Finden einer Tangentengeraden auf dem Funktionengraph, sucht man beim Ableiten einer Mehrdimensionalen Funktion eine Tangenten(hyper-)ebene auf dem Funktionengraph.



**Definition 1.25.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Abbildung, sei  $X_0 \in M$ . Die Abbildung  $F$  heißt **differenzierbar** am Punkt  $X_0$ , wenn es eine Lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  gibt, sodass:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = 0.$$

Wir nennen sie das **Differenzial von  $F$  im Punkt  $X_0$**  und notieren sie als  $DF_{X_0}$ .  $F$  heißt differenzierbar, wenn sie differenzierbar an jedem Punkt  $X \in M$  ist.

**Anmerkung 1.26.** Differenzierbarkeit kann analog über die Eigenschaften des Restglieds  $R(X, X_0)$  definiert werden: Sei

$$f(X) = f(X_0) + Df_{X_0}(X - X_0) + R(X, X_0).$$

Dann ist  $f$  genau dann differenzierbar, wenn:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{R(X, X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$$

**Satz 1.27.** *Gibt es ein Differential, ist es eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Seien  $L_1, L_2$  Differentiale. Es folgt:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{L_1(H) - L_2(H)}{\|H\|} = 0$$

Sei  $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_1(tX) - L_2(tX)}{\|tX\|} = 0$$

$$\implies \frac{L_1(X) - L_2(X)}{\|X\|} = 0$$

$$\implies L_1(X) - L_2(X) = 0$$

also sind die beiden Differentiale identisch. □

**Anmerkung 1.28.** Unserer Differenzierbarkeitsbegriff wird insbesondere in der älteren Literatur oft als **totale Differenzierbarkeit** bezeichnet.

**Satz 1.29.** *Ist  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  an einem Punkt  $X_0$  differenzierbar, so ist  $F$  an diesem Punkt stetig.*

*Beweis.* Sei  $F$  differenzierbar. Da die Differenzierbarkeit über den Limes des Differentialquotienten definiert ist folgt direkt:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall H \in M : (X_0 + H \in M) \wedge (0 \leq \|H\| \leq \delta_1) \\ \implies \frac{\|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|H\| \end{aligned}$$

Da  $DF_{X_0}$  eine lineare Abbildung ist ist  $DF_{X_0}$  gleichmäßig stetig, also gilt:

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ : \|H\| < \delta_2 \implies \|DF_{X_0}(H)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Also gilt für  $\|H\| \leq \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$

$$\begin{aligned} & \|F(X_0 + H) - F(X_0)\| \\ &= \|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H) + DF_{X_0}(H)\| \\ &\leq \|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\| + \|DF_{X_0}(H)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|H\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Satz 1.30.** Sind  $F$  und  $G$  differenzierbar, so auch  $F + G$ , und es gilt

$$D(F + G)_{X_0} = DF_{X_0} + DG_{X_0}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} & \lim_{H \rightarrow 0} \frac{(F + G)(X_0 + H) - (F + G)(X_0) - (DF_{X_0} + DG_{X_0})H}{\|H\|} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}H}{\|H\|} + \lim_{H \rightarrow 0} \frac{G(X_0 + H) - G(X_0) - DG_{X_0}H}{\|H\|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Satz 1.31. Kettenregel:** Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, seien  $F : M \rightarrow N$ ,  $G : N \rightarrow \mathbb{R}^m$  Abbildungen, sei  $X_0$

*Beweis.* Sei  $F(X_0) = Y_0$ ,  $F(X_0 + H) - F(X_0) = Z$ ,  $H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $X_0 + H \in M$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|H\|} ((G \circ F)(X_0 + H) - (G \circ F)(X_0) - DG_{F(X_0)} \circ DF_{X_0}(H)) \\ &= \frac{1}{\|H\|} (G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) \\ &= \frac{1}{\|H\|} (DG_{Y_0}(F(X_0 + H) - F(X_0)) - DG_{Y_0}(DF_{X_0}(H))) \\ &= \frac{1}{\|H\|} DG_{Y_0}((F(X_0 + H) - F(X_0)) - DF_{X_0}(H)) \end{aligned}$$

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} DG_{Y_0}((F(X_0 + H) - F(X_0)) - DF_{X_0}(H)) = DG_{Y_0}(0) = 0$$

$$\frac{1}{\|H\|} (G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) = \begin{cases} 0 & Z_H = 0 \\ \frac{1}{\|H\|} (G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) & Z_H \neq 0 \end{cases}$$

Der Term zweite Term in  $Z_H \neq 0$  geht gegen 0 für  $H \rightarrow 0 \implies Z_H = F(X_0 + H) - F(X_0) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\|Z_H\|}{\|H\|} &= \frac{\|F(X_0 + H) - F(X_0)\|}{\|H\|} \\ &= \frac{\|DF_{X_0}(H) - R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\ &\leq \frac{\|DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\ &\leq \frac{\|DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\ &\stackrel{???}{\leq} \frac{\|DF_{X_0}\| \|H\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\ &= \|DF_{X_0}\| + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\ &\leq c \end{aligned}$$

□

**Satz 1.32.** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  offen, seien  $F : I \rightarrow N$ ,  $G : N \rightarrow \mathbb{R}^n$  Abbildungen.

Ist  $F$  differenzierbar in  $t_0 \in I$  und  $G$  differenzierbar in  $F(t_0)$ , so gilt:

$$(G \circ F)'(t_0) = DG_{F(t_0)}(F'(t_0))$$

*Beweis.* Gemäß Kettenregel gilt  $D(G \circ F) = DG_{F(t_0)} \circ DF_{t_0}$ . Nun gilt:

$$\begin{aligned} h(G \circ F)'(t_0) &= hD(G \circ F)_{t_0}(1) \\ &= D(G \circ F)_{t_0}(h) \\ &= DG_{F(t_0)}(DF_{t_0}(h)) \\ &= hDG_{F(t_0)}(F'(t_0)) \end{aligned}$$

□

Mittelwertsatz:  $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann  $\exists y : f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$ . Im Allgemeinen ist dieser im Mehrdimensionalen Fall leider falsch.

Betrachte allerdings die folgende Ungleichung, welche die Wichtigste Konsequenz des Mittelwertsatzes ist:  $|f(y) - f(x)| \leq |f'(z)||y - x| \leq c|y - x|$ . Diese kann im Allgemeinen erhalten werden.

$F : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $X, Y \in M$ . Sei  $[X, Y] = \{(1 - \lambda)X + \lambda Y\}$  die Verbindungslinie zwischen den beiden Vektoren.

**Satz 1.33.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $X, Y \in M$  mit  $[X, Y] \subseteq M$ . Die Abbildung  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  sei stetig in  $M$  und differenzierbar in den Punkten  $(1 - \lambda)X + \lambda Y$  mit  $\lambda \in (0, 1)$ . Gilt

$$\forall \lambda \in (0, 1) : \forall (1 - \lambda)X + \lambda Y : \|DF_Z\| \leq c$$

so gilt auch

$$\|F(Y) - F(X)\| \leq c\|Y - X\|$$

*Beweis.* Angenommen  $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist stetig auf  $[0, 1]$  und differenzierbar auf  $(0, 1)$ . So gilt

$$\forall t \in (0, 1) : \|G'(t)\| \leq c$$

Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  und

$$A := \{t \in [0, 1] \mid \|G(t) - G(0)\| \leq (c + \varepsilon)t + \varepsilon\}$$

Da  $G$  stetig in 0 ist gilt  $[0, \tau] \subseteq A$ .

Sei  $s = \sup A$ . Es gilt  $0 < s \leq 1$ , also ist  $G$  stetig in  $s$ .

Da  $t \in A \implies t \leq s$

$$\|G(t) - G(0)\| \leq (c + \varepsilon)t + \varepsilon \rightarrow s \implies \|G(s) - G(0)\| \leq (c + \varepsilon)s + \varepsilon$$

also  $s \in A$ . Angenommen,  $s < 1$ . Dann gilt  $\exists h > 0 : s + h < 1$ .

$$\left\| \frac{G(s + h) - G(s)}{h} - G'(s) \right\| \leq \varepsilon$$

$$\implies \left\| \frac{G(s + h) - G(s)}{h} \right\| \leq \varepsilon + G'(s) \leq c + \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\|G(s+h) - G(0)\| &\leq \|G(s+h) - G(s)\| + \|G(s) - G(0)\| \\
&\leq (c + \varepsilon)h + (c + \varepsilon)s + \varepsilon \\
&\leq (c + \varepsilon)(s+h) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Daraus folgt  $s+h \in A$ . Da  $s$  das Supremum ist ist dies ein Widerspruch. Also gilt  $h = 1$ .

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \|G(1) - G(0)\| &\leq c + \varepsilon + \varepsilon = c + 2\varepsilon \\
&\implies \|G(1) - G(0)\| \leq c
\end{aligned}$$

Sei  $F$  wie im Satz. Sei  $K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow (1-t)X + tY$ . Diese Abbildung ist affin, also differenzierbar. Es gilt  $K'(t) = Y - X$ .  $F \circ K$  ist diffbar in  $(0, 1)$

$$D(F \circ K)_t = DF_{K(t)} \circ DK_t$$

$$(F \circ K)'(t) = DF_{K(t)}(K'(t)) = DF_{K(t)}(Y - X)$$

$$\|(F \circ K)'(t)\| = \|DF_{K(t)}(Y - X)\| \leq \|DF_{K(t)}\| \|Y - X\| \leq c \|Y - X\|$$

Mit  $G := F \circ K$  und  $c := c \|Y - X\|$

$$\|F(Y) - F(X)\| \leq c \|Y - X\|$$

□

[missing stuff - gradients]

**Definition 1.34.** Eine Funktion  $f$  heißt **partiell differenzierbar**, wenn für jede Koordinatenachse  $i$  die Partielle Ableitung  $\forall i \in \{0, \dots, n\} : \partial_i f : M \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : X \rightarrow \partial_i f(X)$  existiert.

**Satz 1.35.** Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $X_0$  partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen in  $X_0$  stetig, so ist  $f$  in  $X_0$  differenzierbar.

*Beweis.* Sei  $U$  ein offener Ball um  $X_0$ , welcher vollständig in  $M$  enthalten ist. Sei  $H \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $X_0 + H \in U$ . Nun gilt:

$$\begin{aligned}
f(X_0 + H) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^n (f(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_i + h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n (f(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n))
\end{aligned}$$

Die Summenglieder sind partielle Ableitung. Nach Mittelwertsatz erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n) \quad c_i \in (0, 1)$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|H\|} |f(X_0 + H) - f(X_0) - \langle \nabla f(X_0), H \rangle| \\
&= \frac{1}{\|H\|} \left| \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n) - \partial_i f(x_0, \dots, x_n) \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n) - \partial_i f(x_0, \dots, x_n) \right| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

□

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $X_0 \in M$ ,  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Seien  $\forall i \in \{1, \dots, n\} f_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Koordinatenfunktionen.

$$F(X) = (f_1(X), \dots, f_k(X)) = \sum_{i=1}^k f_i(X) E'_i$$

$$Y = F(X) \Leftrightarrow \forall i : y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (1.5)$$

**Satz 1.36.** Die Abbildung  $F$  ist genau dann differenzierbar in  $X_0$ , wenn alle Koordinatenfunktionen  $f_i$  in  $X_0$  differenzierbar sind. Ist das der Fall, gilt:

$$DF_{X_0}(H) = \sum_{i=1}^k (Df_i)_{X_0}(H) E'_i \quad \forall H \in \mathbb{R}^n$$

*Beweis.*  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear. Dann

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f_i(X_0 + H) - f_i(X_0) - (D_i \circ L)(H)}{\|H\|} = 0$$

□

Wir wollen nun das Differential bezüglich der Standardbasis übersichtlich darstellen. Es gilt:

$$L(E_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij} E'_i$$

$$DF_{X_0} = \sum_{i=1}^k \partial_j f_i(X_0) E'_i$$

Die Koeffizienten der Darstellenden Matrix sind also identisch mit den Partiellen Ableitungen.

**Satz 1.37.** Sei  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar in  $X_0 \in M$ . Dann wird das Differential  $DF_{X_0}$  bezüglich der Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^k$  beschrieben als die  $k \times n$ -Matrix

$$JF(X_0) = (\delta_j f_i(X_0))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}$$

Sie heißt die Funktionalmatrix oder Jacobimatrix von  $F$  in  $X_0$ . Falls  $k = n$  wird die Determinante dieser Matrix als Funktionaldeterminante oder Jacobideterminante von  $F$  in  $X_0$  bezeichnet.

[missing stuff]

**Satz 1.38.** Ist  $r \geq 2$  und  $f \in C^r(M)$ , so sind die partiellen Ableitungen von  $f$  bis zur Ordnung  $r$  unabhängig von der Reihenfolgen es gilt also:

$$\partial_1 \dots \partial_r f = \partial_{\sigma(1)} \dots \partial_{\sigma(r)} f$$

**Satz 1.39. Taylor-Formel:** Sei  $g : [-\varepsilon, h] \rightarrow \mathbb{R}$   $\varepsilon, h > 0$ . Sei  $g$   $(k+1)$ -mal differenzierbar. Dann gilt:

$$\exists c \in (0, h) : g(h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) h^j + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(c) h^{k+1}$$

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$   $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in M$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^k(M)$  mit partielle differenzierbaren partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung,  $H \in \mathbb{R}^n : [x_0, x_0 + H] \subseteq M$ . Sei  $g(t) := f(x_0 + tH)$ . Dann gilt für  $r \in \{1, \dots, k+1\}$ :

$$g^{(r)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_r} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} f(X_0 + tH) h_{i_1} \dots h_{i_r}$$

$$g(1) = \sum_{r=0}^k \frac{1}{r!} g^{(r)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(c)$$

**Satz 1.40. Mehrdimensionale Taylorformel:** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $X_0 \in M$ ,  $H \in \mathbb{R}^n$  mit  $[X_0, X_0 + h] \subseteq M$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^k(M)$ , sodass die partiellen Ableitungen der Ordnung  $k$  in  $M$  differenzierbar sind. Dann  $\exists c \in (0, 1)$ , sodass:

$$f(X_0 + h) = f(X_0) + \sum_{r=1}^k \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} f(X_0 + tH) h_{i_1} \dots h_{i_r} + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \delta_{i_1} \dots \delta_{i_{k+1}} f(X_0 + cH) h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}$$

Kompakter für  $k = 2$ :

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \langle \nabla f(X_0), H \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(X_0) h_i h_j + R(X_0, h)$$

$$R(X_0, H) = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \delta_i \delta_j \delta_k f(Y) h_i h_j h_k \quad Y \in [X_0, X_0 + H]$$

Falls die dritten Ableitungen auf der Verbindungslinie beschränkt sind gilt:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{R(X_0; H)}{\|H\|^2} = 0$$

**Satz 1.41.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal partiell differenzierbar in  $X_0$ . Dann heißt die durch

$$Q(f, X_0; H) := \sum_{i,j=1}^n \delta_i \delta_j f(X_0) h_i h_j$$

definierte Funktion  $Q(f, X_0; H)$  die **Hesse-Form** von  $f$  im Punkt  $X_0$  und die dadurch definierte Matrix

$$\text{Hess}(f, X_0)_{ij} = (\partial_i \partial_j f(X_0))$$

heißt die **Hesse-Matrix** von  $f$  in  $X_0$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\text{Hom}(A, f)} & \text{Hom}(A, X) \\ \downarrow \Phi_Y & & \downarrow \Phi_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \end{array}$$