

MITTSCHRIEBE

Analysis

Emma Bach

Eine Sammlung an Vorlesungsmitschriften und generellen Notizen, basierend auf:

Vorlesungen Analysis II-III von
Prof. Dr. Michael RŮŽIČKA

Skripten Analysis I-III von
Prof. Dr. Ernst KUWERT
und
Prof. Dr. Wolfgang SOERGEL

October 14, 2025

Inhalt

1	Zahlen	3
1.1	Die natürlichen Zahlen.....	3
1.2	Die rationalen Zahlen.....	3
1.3	Die reellen Zahlen	3
1.4	Algebraische Grundbegriffe.....	3
2	Topologie	4
2.1	Metrische und Topologische Räume.....	4
2.2	Normierte Vektorräume	5
2.3	Folgen.....	6
2.4	Stetigkeit.....	10
3	Reihen	13
3.1	Konvergenzkriterien	13
4	Eindimensionale Ableitungen	16
4.1	Differenzierbarkeitsbegriffe im Mehrdimensionalen.....	16
4.1.1	Totale Differenzierbarkeit	16
4.1.2	Partielle Differenzierbarkeit	16
4.2	Ableitungsregeln	16
4.2.1	Kettenregel	16
4.2.2	Produktregel.....	16
4.2.3	Quotientenregel	16
4.2.4	Ableitung von Umkehrfunktionen	16
4.3	Der Mittelwertsatz	17
5	Integration	18
5.1	Treppen- und Regelfunktionen.....	18
5.2	Integration von Treppenfunktionen.....	18
5.3	Integration von Regelfunktionen	19
5.4	Hauptsatz der Integralrechnung.....	21
5.4.1	Partielle Integration.....	23
5.4.2	Integration durch Substitution	24
6	Potenzreihen	25
6.1	Taylorreihen	25
6.2	Die Exponentialfunktion	26
7	Der Euklidische Raum	27
7.1	Abbildungen und Koordinatenfunktionen auf \mathbb{R}^n	30
7.2	Mehrdimensionale Ableitungen	32

7.3 Differenzierbarkeit.....	33
8 Diffeomorphismen	50
9 Implizite Funktionen	52
10 Gewöhnliche Differentialgleichungen	53
10.1 Anfangswertprobleme.....	53
10.1.1 Natürliches Wachstum.....	53
10.1.2 Logistisches Wachstum.....	53
10.1.3 Lotka-Volterra-Modell	54
10.2 Motivation.....	55
10.3 Existenztheorie.....	56
10.4 Lineare Gleichungen.....	60
11 Systeme Linearer Differentialgleichungen	62
11.1 Systeme mit Konstantem A	65
12 Maßtheorie	66
12.1 Mengensysteme	67
12.1.1 Mengenringe	67
12.1.2 Mengenalgebren.....	67
12.1.3 σ -Algebren.....	67
13 Integrationstheorie	70
A Sammlung von Reihen und ihren Grenzwerten	71
A.1 Geometrische Summe.....	71
A.2 Standardbeispiel für Teleskopsummen	71
A.3 Wichtige Taylorreihen	71
A.3.1 Exponentialfunktion	71
A.3.2 Sinus und Kosinus	72
A.3.3 Logarithmus.....	72
B Sammlung von Stammfunktionen	73
B.1 Inverse Trigonometrie	73
B.2 Hyperbolische Trigonometrie	73

Chapter 1

Zahlen

- 1.1 Die natürlichen Zahlen
- 1.2 Die rationalen Zahlen
- 1.3 Die reellen Zahlen
- 1.4 Algebraische Grundbegriffe

Chapter 2

Topologie

In den meisten Anfängervorlesungen über Analysis ist der einzige relevante Topologische / Metrische Raum der Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ der Reellen Zahlen mit der Absolutbetragsmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Falls du nicht daran interessiert bist, tiefer in die Theorie einzutauchen und die betrachteten Konzepte in voller Allgemeinheit aufzunehmen, kannst du dieses Kapitel dementsprechend auch fürs Erste überspringen und in jedem Satz in den darauffolgenden Kapiteln die Wörter "Topologischer Raum" und "Metrischer Raum" durch " \mathbb{R} " und die Funktion " $d(x, y)$ " durch " $|x - y|$ " ersetzen.

Spätestens ab dem Kapitel über den Euklidischen Raum \mathbb{R}^n entsprechen die Notizen eher einer Vorlesung "Analysis II" - ab diesem Punkt werden auch andere Metrische Räume als \mathbb{R} relevant, und es lohnt es sich, die Grundlagen nachzuholen.

2.1 Metrische und Topologische Räume

Definition 2.1. Eine **Metrik** auf einer Menge M ist eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, welche für alle $x, y, z \in M$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$
2. **Symmetrie:** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung:** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ist d eine Metrik auf einer Menge M , so nennen wir das Paar (M, d) einen **Metrischen Raum**.

Ein Metrischer Raum ist eine Menge, auf der **Abstände** zwischen den Elementen definiert werden können. Der Abstand von $x \in M$ und $y \in M$ ist dann genau $d(x, y)$.

Satz 2.2. Sei (M, d) ein Metrischer Raum und $x, y \in M$. So gilt **Positivität:** $d(x, y) \geq 0$

Beweis.

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

Also auch $d(x, y) \geq 0$. □

Definition 2.3. Sei (M, d) ein Metrischer Raum. Wir nennen eine Teilmenge $\Omega \subseteq M$ **offen**, falls für jedes $x \in \Omega$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass auch alle $y \in M$ mit $d(x, y) \leq \varepsilon$ in Ω enthalten sind.

Definition 2.4. Gegeben einen Punkt $x \in M$ und eine positive reelle Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ nennen wir eine solche Menge $\{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ auch den ε -**Ball um** y und schreiben sie $B_\varepsilon(p)$. Die Zahl ε gibt uns also den "Radius" des Balls.

Definition 2.5. Sei T eine beliebige Menge und $\tau \in \mathcal{P}(M)$. Wir nennen τ eine **Topologie** und das Paar (T, τ) einen **Topologischen Raum**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\emptyset \in \tau$
2. $M \in \tau$
3. Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus τ ist ebenfalls in τ .
4. Die Vereinigung endlich vieler Mengen aus τ ist ebenfalls in τ .

Satz 2.6. *Jeder Metrische Raum bildet zusammen mit den System seiner offenen Teilmengen einen Topologischen Raum.*

Ein Topologischer Raum ist ein Raum, in dem definiert ist, welche Elemente "nah aneinander liegen". Somit macht es intuitiv hoffentlich Sinn, dass Metrische Räume Topologische Räume sind.

Allerdings gibt es auch Topologische Räume, auf denen keine Metriken existieren. In solchen Räumen kann man zwar erkennen, dass manche Punkte näher aneinanderliegen als andere, kann aber den Punkten keine exakten Abstände zuordnen.

Definition 2.7. Ist (T, τ) ein Topologischer Raum, so nennen wir die Elemente der Topologie allgemein immer **offene Teilmengen**, selbst wenn der Topologische Raum kein Metrischer Raum ist. Ist U eine offene Menge und $x \in U$, nennen wir U auch eine **Umgebung von** x .

Definition 2.8. Sei (T, τ) ein Topologischer Raum. Wir nennen T **Hausdorff**, falls es für jedes Paar $x, y \in T$ mit $x \neq y$ disjunkte Umgebungen gibt, also $\exists U \ni x, V \ni y : U \cap V = \emptyset$

Satz 2.9. *Jeder Metrische Raum ist Hausdorff.*

Beweis. Da für $x \neq y$ per Definition $d(x, y) \neq 0$ gilt, reicht es, Bälle um x und y zu wählen, deren Radius kleiner als $d(x, y)$ ist. y liegt nicht in $U = \{p \mid d(x, p) < \frac{1}{2}d(x, y)\}$ und umgekehrt. \square

2.2 Normierte Vektorräume

Viele wichtige Metrische Räume sind Vektorräume, auf denen eine Norm definiert ist, also eine Funktion, welche den Vektoren Längen zuordnet. Ich werde hier in aller Kürze die Definitionen und einige relevante Eigenschaften wiederholen. Die allgemeine Theorie der Vektorräume ist enorm wichtig und wird in der Linearen Algebra genauer behandelt.

Intuitiv ist ein Vektorraum ein Raum, dessen Elemente sich unter Addition und Skalierung wie Vektoren im \mathbb{R}^n verhalten. Diese Intuition wird durch folgende Definition formalisiert:

Definition 2.10. Ein Vektorraum V über einem Körper K ist ein Tupel $(V, K, +, \cdot)$, sodass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe bildet und sodass \cdot eine Abbildung $K \times V \rightarrow V$ ist, welche für $a, b \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ die folgenden Axiome erfüllt:

1. $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
2. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
3. $(ab) \cdot \vec{v} = a(b \cdot \vec{v})$
4. $1_K \vec{v} = \vec{v}$

Die vier zusätzlich gegebenen Axiome entsprechen der Voraussetzung, dass \cdot ein Ringhomomorphismus $K \rightarrow \text{End}(V)$ ist. Falls dies mehr Verwirrung als Klarheit schafft, kann man sich aber natürlich auch einfach die Axiome merken.

Definition 2.11. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Eine **Norm** auf V ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, welche für $\lambda \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ folgenden Eigenschaften hat:

1. **Positivität:** $\|\vec{v}\| \geq 0$
2. **Halblinearität:** $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$
3. **Dreiecksungleichung:** $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

Satz 2.12. Gegeben eine Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ bildet $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$ eine Metrik auf V .

2.3 Folgen

Definition 2.13. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow T$ in einen Topologischen Raum (T, τ) . Für eine Folge a schreibt man in der Regel " a_n " statt " $a(n)$ ".

Definition 2.14. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem Topologischen Raum (T, τ) . Wir nennen ein Element $a \in T$ den **Grenzwert** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls man für jede beliebige offene Umgebung U von a ein Folgenglied a_{n_0} mit $n_0 \in \mathbb{N}$ finden kann, sodass alle darauf folgenden Folgenglieder in U enthalten sind. Als Formel:

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n \in U$$

Eine Folge, die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**.

Satz 2.15. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem Metrischen Raum (M, d) . $a \in M$ ist genau dann ein Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) \leq \varepsilon$$

Satz 2.16. Der Grenzwert einer Folge in einem Metrischen Raum ist eindeutig.

Beweis. Angenommen, eine Folge a_n hat zwei Grenzwerte $a \neq b$. So gilt für $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $n \geq n_1$ (bzw. $n > n_2$)

$$d(a_n - a) < \varepsilon$$

und

$$d(a_n - b) < \varepsilon$$

Wählen wir nun $n_3 = \max(n_1, n_2)$, So gilt für alle $n \geq n_3$:

$$\begin{aligned} d(a - b) &= d(a - a_n + (a_n - b)) \\ &\leq d(a - a_n) + d(a_n - b) \\ &< 2\varepsilon \\ &= d(a - b) \end{aligned}$$

Also $d(a - b) < d(a - b)$, was ein Widerspruch ist. □

Satz 2.17. *Der Grenzwert einer Folge in einem Hausdorff-Raum T ist eindeutig.*

Beweis. Angenommen, die Folge a_n konvergiert gegen $a \in T$. Sei $b \in T$ beliebig, sodass $a \neq b$. So existiert eine Umgebung $U \ni a$ und eine Umgebung $V \ni b$ mit $U \cap V = \emptyset$. Nach der Definition von Konvergenz nach a muss ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass alle a_n ab a_{n_0} in U enthalten sind. Für Konvergenz gegen V müssten nun ab einem gewissen Punkt alle Folgenglieder außerdem in V enthalten sein. Aber $U \cap V = \emptyset$, also kann es kein Folgenglied geben, welches in beiden Umgebungen enthalten ist. Also konvergiert die Folge nicht gegen b . \square

Die Version für Metrische Räume folgt natürlich gemäß Satz 2.9 aus der Version für Hausdorff-Räume. Ich persönlich finde den allgemeineren Beweis deutlich übersichtlicher, und hoffe, dieses Beispiel dient als gute Rechtfertigung dafür, warum ich in diesen Notizen gerne Sätze in voller Metrischer / Topologischer Allgemeinheit formuliere und beweise.

Definition 2.18. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Metrischen Raum M heißt **beschränkt**, falls sie in einem ε -Ball in M enthalten ist, also wenn:

$$\exists m \in M : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\varepsilon(m)$$

Definition 2.19. Der **Durchmesser** einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Reelle Zahl $D = \sup(d(a_n, a_m) \mid n, m \in \mathbb{N})$.

Satz 2.20. *Eine Folge ist genau dann beschränkt, wenn ihr Durchmesser endlich ist.*

Beweis. Sei a_k ein beliebiges Folgenglied. So ist die gesamte Folge im Ball $B_D(a_k)$ enthalten. \square

Satz 2.21. *Jede konvergente Folge in einem Metrischen Raum ist beschränkt.*

Beweis. Sei a_n eine Folge, welche gegen den Grenzwert a konvergiert. So gilt per Definition von Konvergenz für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(a_n - a) \leq \varepsilon$$

Es folgt:

- Alle a_n mit $n \geq n_0$ sind im Ball $B_\varepsilon(a)$ enthalten.
- Die Menge $\{a_n \mid n < n_0\}$ ist endlich, also existiert ein maximaler Abstand zu a :

$$\forall n < n_0 : a_n \in B_{\max(d(a, a_1), \dots, d(a, a_{n_0}))(a)}$$

Nehmen wir nun das Maximum der beiden Radien, so ist die gesamte Folge im entstehenden Ball enthalten, also begrenzt. \square

Satz 2.22. *Jede begrenzte, monoton steigende Folge in einem geordneten Körper K ist konvergent.*

Satz 2.23. *Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in einem Körper K und a und b die dazugehörigen Grenzwerte. So gilt:*

- $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a + b$
- $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert ab
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert λa .

- Falls $a \neq 0$ ist $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{a}$.

Beweis.

- 1.
2. $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert ab :

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|$$

Da die Folgen a_n und b_n konvergieren sind sie Beschränkt mit Schranke C :

$$|a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq C(|b_n - b| + |a_n - a|)$$

Durch die Konvergenz von b_n und a_n finden wir nun δ , sodass

$$C(|b_n - b| + |a_n - a|) \leq C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\right) = \varepsilon$$

- 3.
- 4.

□

Satz 2.24. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwerten a und b . Sei außerdem $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$. So ist auch $a \leq b$.

Satz 2.25. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwerten a und b . Sei außerdem $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$. So ist immer noch $a \leq b$.

Definition 2.26. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent gegen** ∞ , geschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Falls

$$\forall c \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > c$$

Definition 2.27. Eine Zahl heißt **Häufungspunkt** oder **Häufungswert** einer Folge, wenn sie der Grenzwert einer Teilfolge ist.

Satz 2.28. Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweisskizze. Beweis durch Intervallhalbierung: Wähle Intervall $[s, S]$, sodass s das Infimum und S das Supremum ist. Wähle bei Halbierung das Intervall, welches unendlich viele Folgenglieder enthält. "□"

Satz 2.29. Hat eine beschränkte Folge genau einen Häufungswert, so konvergiert sie gegen diesen Häufungswert.

Definition 2.30. Eine Folge heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Satz 2.31. Jede Cauchyfolge in \mathbb{R} ist konvergent.

Dieser Satz ist je nach verwendeter Konstruktion der reellen Zahlen entweder ein Axiom oder folgt aus den Axiomen.

Satz 2.32. *Jede konvergente Folge in \mathbb{R} ist Cauchy.*

Beweis. Angenommen, eine Folge $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. So gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ und $m, n > n_0$ mit $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nun gilt

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon,$$

also ist a_n Cauchy. □

Korollar 2.33. *Jede monoton wachsende, beschränkte Folge ist Cauchy.*

Beweis. Jede monoton wachsende beschränkte Folge ist konvergent, also Cauchy. □

Definition 2.34. Gegeben eine beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nennen wir den Grenzwert der oberen Schranken der Folge den **Limes superior**:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right)$$

Analog definieren wir für untere Schranken den **Limes inferior**:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} a_m \right)$$

Satz 2.35. *Es gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$ gdw. für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \geq a + \varepsilon\}$ endlich ist.*

Satz 2.36. *Es gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a$ gdw. für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \geq a - \varepsilon\}$ unendlich ist.*

Satz 2.37. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. So ist $\limsup a_n$ der größte und $\liminf a_n$ der kleinste Häufungswert der Folge.*

Korollar 2.38. *Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist mit $\limsup a_n = \liminf a_n$.*

Definition 2.39. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt **Infimum** der Menge M , wenn:

1. $\forall x \in M : a \leq x$
2. $\forall a' < a : \exists x \in M : x < a'$

Definition 2.40. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt **Supremum** der Menge M , wenn:

1. $\forall x \in M : x \leq a$
2. $\forall a' < a : \exists x \in M : a' < x$

Satz 2.41. *Sei M nichtleer. So gibt es Folgen $x_n, y_n \in M$, sodass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf M$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup M$$

Beweis. Im Fall einer nach oben unbeschränkten Menge lässt sich trivial eine Folge finden, welche gegen $\sup M = \infty$ konvergiert, eben so für das Infimum im Fall einer nach unten unbeschränkten Menge.

Sei nun $a_1 \in M$ und $b_1 \geq M$. Wir konstruieren nun durch sukzessives Halbieren des Intervalls $[a_1, b_1]$ eine Intervallschachtelung, welche gegen das Supremum konvergiert:

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [(a_n + b_n)/2, b_n] & [(a_n + b_n)/2, b_n] \cap M \neq \emptyset \\ [a_n, (a_n + b_n)/2] & \end{cases}$$

□

Korollar 2.42. Jede Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat genau ein Supremum und genau ein Infimum.

Beweis. In der vorherigen Intervallschachtelung ist jedes Intervall Obermenge eines Intervalls in M . Da also das Supremum und das Infimum in der Intervallschachtelung enthalten sind, sind die auch in M enthalten. □

2.4 Stetigkeit

Definition 2.43. Stetigkeit in Topologischen Räumen: Seien X, Y Topologische Räume. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, wenn das Urbild jeder offener Menge offen ist.

Satz 2.44. ε - δ -Kriterium: Seien M, N Metrische Räume mit Metriken d_M und d_N . Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt **stetig** an einem Punkt $p \in M$, wenn:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : d_M(x, p) < \delta \implies d_N(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

Die Funktion ist genau dann stetig im Topologischen Sinne, wenn das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium an allen Punkten erfüllt ist.

Anmerkung 2.45. Im Fall einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ also:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : |x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Beweisskizze. Left as an exercise to the reader :) (I'll get back to it)

□

Definition 2.46. Folgenstetigkeit: Eine Folge x_k heißt **folgenstetig**, wenn:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Satz 2.47. Jede stetige Funktion ist folgenstetig.

Beweis. Sei $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$.

Wähle zu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, sodass $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Da die Aussage $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, gilt sie insbesondere für x_k mit großem k . □

Satz 2.48. Jede folgenstetige Funktion in \mathbb{R} ist stetig.

Beweis. Angenommen, f sei folgenstetig, aber nicht stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für kein $|x_k - x_0| < \delta \in \mathbb{R}^+$ die Bedingung

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Wählen wir nun $\delta_k = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, so gibt es jeweils ein $x_k \in D$ mit $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$, aber $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dies ist ein Widerspruch zur Folgenstetigkeit. \square

Satz 2.49. *Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis. Durch Folgenstetigkeit.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(f(x_0))$$

\square

Satz 2.50. *Das Produkt stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0)$$

\square

Satz 2.51. *Das Inverse einer stetigen Funktion ist stetig.*

Beweisskizze. Monotone Surjektionen auf kompakte Mengen sind stetig. ” \square ”

Satz 2.52. *Eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_n)$ ist genau dann an einem Punkt p stetig, wenn dort alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.*

Satz 2.53. Zwischenwertsatz: *Gegeben $a < b$ in \mathbb{R} nimmt eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Sei $z \in [f(a), f(b)]$ und

$$p = \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq z\}.$$

Zu zeigen ist $f(p) = z$. Angenommen, $f(p) < z$. Da $z \leq f(b)$ folgt $p < b$. Sei nun $\varepsilon = z - f(p)$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert ein δ , sodass für $q := p + \delta$ sowohl $p < q$ als auch $f(p) \leq z$ gelten. Somit war p kein Supremum, was ein Widerspruch ist. \square

Korollar 2.54. *Das Bild eines Intervalles unter einer Stetigen Funktion ist ebenfalls ein Intervall.*

Satz 2.55. *Ist das Bild einer monotonen Abbildung $f : \mathbb{R} \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ ein Intervall in \mathbb{R} , so ist f stetig.*

Korollar 2.56. *Ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, so ist auch die Umkehrfunktion streng monoton und stetig.*

Beweis. Die Umkehrfunktion ist klar monoton (sonst könnte man sie nicht erneut invertieren, um die ursprüngliche Funktion zu erhalten). Außerdem ist ihr Bild das Intervall $[a, b]$. Somit ist die Umkehrfunktion stetig. \square

Satz 2.57. Existenz von Extremalstellen auf Kompakta: *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren Kompaktum hat ein Maximum und ein Minimum.*

Alternativ: *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren Kompaktum nimmt das Supremum und Infimum ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.*

Also:

$$\forall f : D \rightarrow \mathbb{R} : \exists x_0, x_1 \in D : f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x), \quad f(x_1) = \sup_{x \in D} f(x)$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage über das Infimum, das Supremum folgt dann analog. Setze

$$\alpha = \inf_{x \in D} f(x) \in [-\infty, \infty)$$

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $x_k \in D$ mit $f(x_k) \rightarrow \alpha$. Da D beschränkt ist, ist die Folge beschränkt. Nach Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge x_{k_j} , welche gegen einen Wert $x_0 \in D$ konvergiert.

Wir wissen, dass $f(x_{k_j})$ gegen α konvergiert (dies ist genau die Folgenstetigkeit von f). Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt nun $f(x_0) = \alpha$. \square

Chapter 3

Reihen

Definition 3.1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Wir nennen die Zahl

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

Die **n -te Partialsumme** der Folge. Wir nennen Folgen der Form $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unendliche Reihen und schreiben solche auch als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Ist die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, bezeichnet dieser Ausdruck außerdem den Grenzwert der Folge. Per Definition ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$$

Gemäß Satz 2.23 können **konvergente** Reihen wie intuitiv erwartet addiert, skalarmultipliziert etc. werden.

3.1 Konvergenzkriterien

Satz 3.2. Nullfolgentest: Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Satz 3.3. Konvergenzkriterium von Cauchy: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis. Dies ist genau die Bedingung, dass die Reihe eine Cauchyfolge ist. \square

Satz 3.4. Reihen mit positiven Gliedern: Falls $\forall k \in \mathbb{N} : a_k > 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Beweis. Die Folge der Partialsummen ist dann monoton steigend und beschränkt, also konvergent nach 2.22 \square

Satz 3.5. Leibnizkriterium: Sei a_k eine reelle, monoton fallende Nullfolge. So ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent. Es gilt außerdem:

$$0 \leq (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \leq a_n$$

Beweis. Sei S_n die n -te Partialsumme.

- Es gilt $S_{n+2} - S_n = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$, also ist die Folge der Partialsummen mit geradem Index streng monoton fallend.
- Es gilt $S_{n+1} - S_{n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$, also ist die Teilfolge der Partialsummen mit ungeradem Index streng monoton steigend.
- Es gilt außerdem $S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$, also ist die gerade Partialsummen nach unten beschränkt und die ungeraden Partialsummen sind nach oben beschränkt.
- Zuletzt gilt auch noch $S_{n+1} - S_n \rightarrow 0$, da beides Nullfolgen sind, also konvergieren beide Teilfolgen gegen den gleichen Grenzwert, also konvergiert die gesamte Reihe gegen diesen Grenzwert.

\square

Satz 3.6. Majorantenkriterium: Gilt $|a_k| \leq c_k \in [0, \infty)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Satz 3.7. Quotientenkriterium: Gibt es ein $\theta \in [0, 1)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$\forall k \geq n : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \theta,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Satz 3.8. Eine äquivalente Bedingung ist $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$.

Beweis. Per Induktion gilt

$$\forall k \geq n : |a_k| \leq \theta^{k-n} |a_n|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \theta^{k-n} |a_n| \\ &= |a_n| \sum_{k=n}^{\infty} \theta^{k-n} \\ &= |a_n| \cdot \frac{1}{1-\theta} \end{aligned}$$

\square

Beispiel 3.9. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$$

Der Quotiententest liefert für $k \geq 10$:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(k+1)e^k}{ke^{k+1}} \right| = \left| \frac{k+1}{ke} \right| < \frac{1}{2}$$

Also konvergiert die Reihe absolut. (Die Abschätzung ist hier natürlich sehr grob.)

Satz 3.10. Wurzelkriterium: *Gibt es ein $\theta \in [0, 1)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ sodass*

$$\forall k \geq n : \sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Anmerkung 3.11. Existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall k \geq n : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$$

oder

$$\forall k \geq n : \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

so ist die Reihe offensichtlich nicht Cauchy, divergiert also.

Satz 3.12. *Eine absolut konvergente Reihe kann beliebig umgeordnet werden, ohne den Grenzwert zu verändern.*

Chapter 4

Eindimensionale Ableitungen

4.1 Differenzierbarkeitsbegriffe im Mehrdimensionalen

4.1.1 Totale Differenzierbarkeit

Definition 4.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **total differenzierbar** oder einfach **differenzierbar** am Punkt $p \in \Omega$, falls eine lineare Abbildung $Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, sodass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - Df(p)(h)}{|h|} = 0$$

Existiert ein solches $Df(p)$, nennen wir es das **Differential** von f am Punkt p . Existiert eine solche Abbildung für alle Punkte $p \in \Omega$, so nennen wir die Abbildung $Df : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ***das* Differential** von f .

4.1.2 Partielle Differenzierbarkeit

Definition 4.2. Die **partielle Ableitung** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist die eindimensionale Ableitung entlang einer der Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \left(\frac{d}{dh} f(x + he_j) \right) (0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

4.2 Ableitungsregeln

4.2.1 Kettenregel

Satz 4.3. *Es gilt*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0)$$

4.2.2 Produktregel

4.2.3 Quotientenregel

4.2.4 Ableitung von Umkehrfunktionen

Satz 4.4. *Sei $I \in \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton, stetig auf I und differenzierbar bei p . So ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar*

bei $q = f(p)$ mit:

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Beweis. Kettenregel:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(q)) &= q \\ \implies (f(f^{-1}(q)))' &= 1 \\ \implies (f^{-1})'(q) \cdot f'(f^{-1}(q)) &= 1 \\ \implies (f^{-1})'(q) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(q))} \end{aligned}$$

□

4.3 Der Mittelwertsatz

Satz 4.5. *Nimmt eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ an einem Punkt p ein Maximum oder Minimum an, so gilt $f'(p) = 0$.*

Satz 4.6. Satz von Rolle: *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b) . Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.*

Beweis. Im Abschnitt über Stetigkeit haben wir bewiesen, dass es Punkte $p, q \in [a, b]$ gibt, an denen f sein Maximum und Minimum annimmt. Ist einer dieser Punkte in (a, b) folgt der Satz trivial. Liegen die Punkte p und q hingegen am Rand, so folgt aus $f(a) = f(b)$, dass $p = q$ ist, und die Funktion somit konstant. □

Satz 4.7. Mittelwertsatz: *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b) . So existiert ein $p \in (a, b)$, sodass*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Man wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

an. □

Chapter 5

Integration

5.1 Treppen- und Regelfunktionen

Definition 5.1. Eine Funktion $f \in B([a, b])$ (eine beschränkte Funktion mit Definitionsbereich $[a, b]$) heißt **Treppenfunktion**, falls es Punkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt, sodass f auf jedem offenen Teilintervall (x_k, x_{k+1}) konstant ist. Wir nennen dann (x_0, \dots, x_n) eine **zu f gehörige Unterteilung von $[a, b]$** . Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ schreiben wir $T([a, b])$.

Definition 5.2. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls es eine Folge f_n von Treppenfunktionen gibt, welche Gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ schreiben wir $R([a, b])$.

Satz 5.3. *Sei f_n eine Funktionenfolge, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Hat jedes f_n überall einseitige Grenzwerte, so auch f .*

Satz 5.4. *Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn für alle $c \in [a, b]$ die einseitigen Grenzwerte*

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) \text{ und } \limsup_{x \rightarrow c} f(x)$$

existieren.

Korollar 5.5. *Jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion.*

5.2 Integration von Treppenfunktionen

Definition 5.6. Sei f eine Regelfunktion. Sei eine Unterteilung $x_0 < \dots < x_n$ gegeben, sodass f auf dem offenen Intervall (x_i, x_{i+1}) den Wert c_i annimmt. Wir nennen die Zahl

$$I(f) := \sum_{i=0}^n c_i (x_{i+1} - x_i)$$

Das **Integral** von f über $[a, b]$ und schreiben auch $I(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$

Lemma 5.7. *Der Wert von $I(f)$ ist unabhängig von der Wahl der Unterteilung.*

Betrachte hierfür die gemeinsame Verfeinerung, bei der alle Zwischenpunkte aus zwei verschiedenen Unterteilungen vorkommen.

Satz 5.8. Die Abbildung $I(f)$ ist ein **lineares Funktional**, es gilt also:

1. $\forall f, g \in T([a, b]) : \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\forall f \in T([a, b]) : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$

Die Abbildung ist außerdem Monoton, es gilt also:

3. $\forall f, g \in T([a, b]) : \left(\forall x : f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g \right)$

Ferner gelten folgende obere Schranken für den Betrag der Abbildung:

4. $\forall f, g \in T([a, b]) : \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \|f\|$

5.3 Integration von Regelfunktionen

Definition 5.9. Sei f eine Regelfunktion auf $[a, b]$ und sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir definieren das Integral von f als:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t_n(x) dx$$

Satz 5.10. Der gesuchte Grenzwert existiert für jede Regelfunktion.

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Per Definition konvergiert die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f , also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq n_0 : \|t_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Für $m, n \geq n_0$ gilt nun unter Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\|t_m - t_n\| \leq \|t_m - f\| + \|t_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

Gemäß 5.8 folgt:

$$\left| \int_a^b t_m - \int_a^b t_n \right| = \left| \int_a^b (t_m - t_n) \right| \tag{5.8.1}$$

$$\leq (b-a) \|t_m - t_n\| \tag{5.8.4}$$

$$< (b-a) \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

$$= \varepsilon$$

Also ist

$$I_t := \left(\int_a^b t_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge reeller Zahlen, also konvergent. □

Satz 5.11. *Das Integral ist unabhängig von der Wahl der Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Treppenfunktionen.*

Beweis. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge in $T([a, b])$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Durch die gleichmäßige Konvergenz gegen f existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sodass:

$$\forall n \geq n_1 : \|f - t_n\| < \frac{\varepsilon}{2(a-b)}$$

und

$$\forall n \geq n_2 : \|f - u_n\| < \frac{\varepsilon}{2(a-b)}$$

Für $n_0 = \max n_1, n_2$ gilt also

$$\forall n \geq n_0 : \|t_n - u_n\| \leq \|t_n - f\| + \|u_n - f\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Analog zum vorherigen Beweis folgt durch 5.8

$$\left| \int_a^b t_n - \int_a^b u_n \right| \leq (b-a) \|t_n - u_n\| < \varepsilon$$

Also konvergiert die Folge $\left(\int_a^b t_n - \int_a^b u_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null, also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b u_n$$

□

Satz 5.12. *Genau wie im Fall der Treppenfunktionen ist das Integral einer Regelfunktion ebenfalls ein beschränktes monoton lineares Funktional.*

Anmerkung 5.13. Es gilt desweiteren:

1. $\int_a^b 1 = b - a$
2. $\forall f \in T([a, b]) : \forall z \in [a, b] : \int_a^b f = \int_a^z f + \int_z^b f$

Gemeinsam mit Linearität und Monotonizität, welche im Vorherigen Satz bewiesen wurden, definieren diese Vorschriften die Integralabbildung bereits eindeutig.

Satz 5.14. *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Regelfunktionen, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren. Dann ist f eine Regelfunktion und es gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

Satz 5.15. Mittelwertsatz der Integralrechnung: *Seien $f, g \in R([a, b])$, sei f stetig und $g(x) \geq 0$. Dann existiert ein $c \in [a, b]$, sodass:*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

Beweis. Nach dem Satz von Weierstrass (Extremwertsatz) nimmt die stetige Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ein Minimum m und ein Maximum M an. Aus $m \leq f(x) \leq M$ und $g(x) \geq 0$ folgt $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, also auch:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

Also ist $\int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx$ für eine Zahl $\alpha \in [m, M]$. Da α also zwischen den Extremwerten von f liegt gibt es gemäß Zwischenwertsatz eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \alpha$. \square

Korollar 5.16. Sei $f \in R([a, b])$ und sei f stetig. Dann existiert ein $c \in [a, b]$, sodass:

$$\int_a^b f = f(c)(a - b)$$

Beweis. Dies ist der vorherige Satz im Fall $g(x) = 1$. \square

5.4 Hauptsatz der Integralrechnung

Definition 5.17. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f , falls

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Lemma 5.18. Seien F und G Stammfunktionen einer Funktion f . So gilt $\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c$.

Beweis. Es gilt $F' = G' = f$, also

$$(F - G)' = F' - G' = 0.$$

Somit ist die Funktion $F - G$ konstant. \square

Satz 5.19. Hauptsatz der Integralrechnung: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, also insbesondere eine Regelfunktion. Definiere die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

So ist F eine Stammfunktion von f . (Achtung: a ist keine beliebige Konstante, sondern der kleinste Punkt im Definitionsbereich!)

Beweis. **Beweis nach Růžička:** Sei $x \in [a, b]$. Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in [a, b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 |F(x+h) - F(x) - f(x)h| &= \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt - f(x)h \right| \\
 &= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h \right| \\
 &= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt \right| \\
 &= \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \\
 &\leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da f stetig und auf dem Kompaktum $[a, b]$ definiert ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$\forall x, t \in [a, b] : |t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ist nun $|t - x| \leq \delta$, also $|h| \leq \delta$, folgt

$$\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \int_x^{x+h} \varepsilon dt = |h|\varepsilon$$

Also:

$$\begin{aligned}
 &|F(x+h) - F(x) - f(x)h| \leq |h|\varepsilon \\
 \implies &\lim_{h \rightarrow 0} |F(x+h) - F(x) - f(x)h| = 0 \\
 \implies &\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) - F(x) - f(x)h = 0 \\
 \implies &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = 0 \\
 \implies &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)
 \end{aligned}$$

Also ist f die Ableitung von F . □

Beweis. **Beweis per Mittelwertsatz:** (Dieser Beweis ist übersichtlicher, aber nur, weil die ganze Arbeit an den Mittelwertsatz und den Satz von Rolle abgegeben wurden. Vermutlich also für die mündliche Prüfung also weniger gut geeignet.) Wir betrachten die Ableitung von F . Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt
 \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert nun ein $c_h \in [x, x+h]$, sodass

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = (x+h-x)f(c) \implies \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

Da $c \in [x, x+h]$ folgt $\lim_{h \rightarrow 0} c_h = x$, da f stetig ist folgt $\lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x)$. Also gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x)$$

□

5.4.1 Partielle Integration

Satz 5.20. *Es gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Beweis. Folgt direkt aus dem Hauptsatz der Integralrechnung und der Produktregel:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \implies \int_a^b (f(x)g(x))'dx &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \\ \implies [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ \implies \int_a^b f'(x)g(x)dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

□

Anmerkung 5.21. Ich persönlich finde folgende äquivalente Schreibweise einfacher anzuwenden:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Beispiel 5.22. Ein sehr häufig anwendbarer Trick ist die partielle Integration einer Funktion durch Multiplikation mit der konstanten Einsfunktion, z.B:

$$\begin{aligned} \int \ln(x)dx &= \int 1 \cdot \ln(x)dx \\ &= x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= x \ln(x) - \int 1dx \\ &= x \ln(x) - x \end{aligned}$$

Beispiel 5.23. Im Fall $f = g$ erhält man durch partielle Integration das gleiche Integral ein zweites Mal und kann daraufhin die Gleichung durch Umstellen lösen:

$$\begin{aligned}\int f'(x)f(x)dx &= f(x)f(x) - \int f(x)f'(x)dx \\ \implies 2 \int f'(x)f(x)dx &= f(x)^2 \\ \implies \int f'(x)f(x)dx &= \frac{1}{2}f(x)^2\end{aligned}$$

Diese Formel hat zahlreiche direkte Anwendungen:

- $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(x)^2$
- $\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin(x)^2 = -\frac{1}{2} \cos(x)^2$

5.4.2 Integration durch Substitution

Chapter 6

Potenzreihen

Definition 6.1. Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

wobei a_k eine Folge ist.

Satz 6.2. Der **Konvergenzradius** einer Potenzreihe ist das Supremum der Beträge von x , für die die Potenzreihe konvergiert.

Satz 6.3. Jede Potenzreihe ist auf jedem Kompaktum innerhalb des Konvergenzradius absolut konvergent.

Satz 6.4. Potenzreihen sind innerhalb des Potenzradius unendlich oft differenzierbar.

6.1 Taylorreihen

Satz 6.5. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n+1)$ -mal differenzierbar, so gibt es für alle $x \in I$ ein $\xi \in [p, x]$ mit:

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(p)}{v!} (x-p)^v + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-p)^{n+1}$$

Diese Darstellung ist bekannt als die *Lagrange-Darstellung des Restglieds*.

Beweisskizze. Durch den verallgemeinerten Mittelwertsatz.

”□”

Satz 6.6. Ist $f^{(n+1)}$ zusätzlich auf I stetig, so gilt die direkte Formel:

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(p)}{v!} (x-p)^v + \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Diese Darstellung ist bekannt als die *Integraldarstellung des Restglieds*.

Beweis. Wiederholtes partielles Integrieren der Lagrange-Darstellung.

□

6.2 Die Exponentialfunktion

Definition 6.7. Wir definieren die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die Potenzreihe:

$$\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Satz 6.8. *Der Konvergenzradius der Exponentialfunktion ist unendlich.*

Beweis. Das Quotientenkriterium gibt uns:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1} k!}{x^k (k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x}{k+1} = 0,$$

also ist das Quotientenkriterium unabhängig von x immer erfüllt, also ist der Konvergenzradius unendlich. \square

Chapter 7

Der Euklidische Raum

Lemma 7.1. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann wird durch

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

auf V eine Norm erklärt. Diese bezeichnet man als die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

Definition 7.2. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Die Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal**, wenn

$$\langle u, v \rangle = 0$$

ist. Für $u, v \in V \setminus \{0\}$ Wird die reelle Zahl

$$\phi = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

als der Winkel zwischen u und v bezeichnet.

Anmerkung 7.3. Es gilt

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

Lemma 7.4. Für $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\|X\|_{\max} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

Dann ist $\|-\|_{\max}$ eine Norm auf \mathbb{R}^n und es gilt

$$\|X\|_{\max} \leq \|X\| \leq \sqrt{n} \|X\|_{\max}$$

Satz 7.5. Die Menge \mathbb{Q}^n der Punkte mit rational Koordinaten ist dicht in \mathbb{R}^n .

Beweis. Sei $X \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} ist gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \exists y_i \in \mathbb{Q} : |x_i - y_i| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Durch Lemma 7.4 folgt:

$$\|x - y\| \leq \sqrt{n} \|X - Y\| < \varepsilon$$

□

Satz 7.6. Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus \mathbb{R}^n . Sei $X_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X \Leftrightarrow \forall i : \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Insbesondere ist X_k eine Cauchyfolge, wenn die Komponenten Cauchyfolgen sind.

Beweis. $X_k \rightarrow X$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : \|X_k - X\| \leq \varepsilon \implies \forall i : |x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$$

Und umgekehrt:

$$\forall i : x_i^{(k)} \rightarrow x_i, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \implies \exists k_0^i \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0^i : |x_i^{(k)} - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$k_0 := \max\{k_0^1, \dots, k_0^n\} \implies \forall k \geq k_0 : |x_i^{(k)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \implies \|X_k - X\| \leq \sqrt{n} \|X_k - X\| < \varepsilon$$

□

Satz 7.7. Für konvergente Folgen $(X_k), (Y_k) \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k + Y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k + \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k \quad (7.1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k X_k = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} X_k \right) \quad (7.2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle X_k, Y_k \rangle = \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} X_k, \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k \right\rangle \quad (7.3)$$

Satz 7.8. \mathbb{R}^n ist vollständig.

Beweis. Ist X_k eine Cauchyfolge in \mathbb{R}^n , so sind nach Satz 7.6 alle Teilfolgen Cauchy in \mathbb{R} . Also:

$$\exists x_i \in \mathbb{R} : x_i^{(k)} \rightarrow x_i \implies \exists X \in \mathbb{R}^n : X_k \rightarrow X$$

□

Satz 7.9. (Bolzano-Weierstrass:) Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei (X_k) eine beschränkte Folge in \mathbb{R}^n . Nach 7.4 müssen die Komponentenfolgen ebenfalls beschränkt sein. Nach dem eindimensionalen Fall des Satzes von Bolzano-Weierstrass existieren also konvergente Teilfolgen der Koordinatenfolgen. Angenommen, die konvergente Teilfolge der ersten Komponente ist gegeben durch $x_1^{(k_n)} \rightarrow x_1$. So ist $x_2^{(k_n)}$ ebenfalls eine beschränkte Teilfolge, also existiert eine Teilfolge $x_2^{(k_n)_m}$ welche in den ersten beiden Komponenten konvergiert. Führt man dieses Verfahren induktiv fort, erhält man eine konvergente Teilfolge von (X_k) . □

Satz 7.10. Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter nichtleerer Teilmengen des \mathbb{R}^n , sodass $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Dann ist $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$

Beweis. $A_i \neq \emptyset \implies \exists X_i \in A_i$ s.d. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge ist. Da A_i beschränkt ist ist $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also hat X_i eine konvergente Teilfolge X_{i_k} mit Limes X . Es gilt $X_{i_k} \in A_{i_k} \subseteq A_i$, also ist X ein Berührungspunkt von A_i , also $X \in A_i$. □

Satz 7.11. Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist kompakt.

Beweis. Analog zur eindimensionalen Version, wobei statt Intervallen $[a_i, b_i]$ Hyperwürfel $[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \times \dots \times [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$ genutzt werden müssen. \square

Satz 7.12. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf \mathbb{R}^n . So existieren $k, K \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : k\|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq K\|X\|_1$$

Beweis. Diese Normenäquivalenz bildet eine Äquivalenzrelation. Es reicht also, zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|_2$ äquivalent zu einer spezifischen Norm $\|\cdot\|_1$ ist. Wir wählen $\|\cdot\|_{\max}$. Sei (E_i) die Standardbasis des \mathbb{R}^n . Wir definieren:

$$K := \|E_1\|_2 + \dots + \|E_n\|_2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|X\|_2 &= \|x_1 E_1 + \dots + x_n E_n\| \\ &\leq |x_1| \|E_1\|_2 + \dots + |x_n| \|E_n\|_2 \\ &\leq \|X\|_{\max} K \quad [\text{citation needed}] \end{aligned}$$

Es bleibt die Rückrichtung zu zeigen.

Lemma 7.13. $f(X) := \|X\|_2$ ist stetig.

Beweis.

$$|\|X\|_2 - \|Y\|_2| \leq \|X - Y\|_2 \leq K\|X - Y\|_{\max} \leq K\|X - Y\|$$

Also ist $\|\cdot\|_2$ stetig bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|$. \square

Wir definieren nun:

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\|_{\max} = 1\}$$

Diese Menge ist beschränkt. Wir wollen zeigen, dass sie außerdem abgeschlossen ist. Sei $X_i \rightarrow X$, $X_i \in A$. Es gilt:

$$|\|X_i\|_{\max} - \|X\|_{\max}| \leq \|X_i - X\|_{\max} \leq \|X_i - X\|$$

Also konvergiert jede Menge, also ist A kompakt, also auch abgeschlossen. Dementsprechend muss f auf A ein Minimum k annehmen. Wir wissen $f \geq 0$, also ist $k \geq 0$. Es gilt sogar $k > 0$, da keiner der Vektoren in A der Nullvektor ist. Nun gilt also $\forall X \in A : \|X\|_2 \geq k$. Wir definieren:

$$\lambda := \frac{1}{\|X\|_{\max}}$$

$$\|\lambda X\|_{\max} = |\lambda| \|X\|_{\max} = 1$$

$$|\lambda| \|X\|_2 = \|\lambda X\|_2 \geq k \implies \|X\|_2 \geq k \|X\|_{\max}$$

\square

Anmerkung 7.14. Im unendlichdimensionalen Fall gilt Satz 7.12 nicht.

7.1 Abbildungen und Koordinatenfunktionen auf \mathbb{R}^n

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Betrachten wir zuerst den Spezialfall Linearer Funktionen, also $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : F(\lambda X + \mu Y) = \lambda F(X) + \mu F(Y)$.

Sei (E_i) die Standardbasis des \mathbb{R}^n und sei (E'_i) die Standardbasis des \mathbb{R}^k . Nun gilt:

$$F(E_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij} E'_i$$

Daraus erhalten wir Koeffizienten a_{ij} , welche eine Matrix bilden. Umgekehrt können wir aus den Koeffizienten die Abbildung F rekonstruieren, indem wir definieren:

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{j=1}^n x_j E_j\right) \\ &= \sum x_j F(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^k a_{ij} E'_i \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) E'_i \end{aligned}$$

[missing stuff here]

Definition 7.15. Wir bezeichnen als $p_i : M \rightarrow k$ die Projektion eines Vektors auf die i -te Komponente.

Satz 7.16. Sei M ein metrischer Raum, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x \in M$. Dann ist F stetig in x genau dann, wenn $p_i \circ F$ stetig für alle i ist.

Beweis. 1. p_i ist stetig. Ist also F stetig folgt direkt, dass auch $p_i \circ F$ stetig ist.

2. Angenommen, $p_i \circ F$ ist stetig $\forall i, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $p_i \circ F$ stetig ist existiert eine Umgebung U_i von x , sodass $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \forall y \in U_i$. Ebenso für die anderen Komponenten. Nun gilt:

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sqrt{n} \|F(x) - F(y)\|_{\max} \leq \varepsilon$$

□

Analog gilt das Selbe für Stetigkeit auf M , gleichmäßige Stetigkeit, etc.

Definition 7.17. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, x_0 ein Häufungspunkt, $y \in \mathbb{R}^k$. Dann definieren wir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in M \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| \leq \delta \implies \|F(x) - y\| < \varepsilon$$

F ist stetig in x_0 genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$.

Satz 7.18. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, $X_0 \in M$ ein Häufungspunkt, $Y \in \mathbb{R}^k$ und $f_i = p_i \circ F$. Dann gilt:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = Y \Leftrightarrow \forall i : \lim_{X \rightarrow X_0} f_i(X) = y_i$$

Beweis. Analog zu Beweis 7.16. □

Korollar 7.19.

$$F(X) \rightarrow Y, G(X) \rightarrow Z \implies F(X) + G(X) \rightarrow Y + Z$$

7.2 Mehrdimensionale Ableitungen

Beispiel 7.20. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf einer offenen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \text{ bzgl. der Standardbasis}$$

Wir können aber auch $X = \sum x'_i E'_i$ bezüglich einer beliebigen anderen Basis darstellen. Also:

$$f(X) = f(x_1, \dots, x_n) = g(x'_1, \dots, x'_n)$$

Da f in der Regel nicht linear ist, ist ein solcher Basiswechsel sehr viel komplizierter als in der Linearen Algebra! Wo möglich ist es also besser, über $f(X)$ zu reden.

Definition 7.21. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{X} \in M$. Betrachte die Abbildung

$$t \rightarrow f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, t, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n),$$

welche eine Mehrdimensionale Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ auf eine eindimensionale Funktion $f(t)$ abbildet. Achtung: Wir nehmen hier implizit eine Darstellung bezüglich der Standardbasis an!

Beispiel 7.22. Betrachte folgende Funktion:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f ist an $(0, 0)$ partiell differenzierbar, die Partiellen Ableitungen sind 0. Allerdings gilt

$$\forall x : f(x, x) = \frac{1}{2}$$

Also ist f an 0 nicht stetig! Es existieren also Funktionen, die an einem Punkt partiell Differenzierbar sind, an dem sie nicht stetig sind.

Idee: Fordere partielle Differenzierbarkeit bezüglich jeder möglichen Basis, also partielle Differenzierbarkeit in jedem Vektor.

Beispiel 7.23.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Wir betrachten die “Linearisierung” $t \rightarrow f(t, \alpha t)$. Einsetzen liefert:

$$f(t, \alpha t) = \frac{\alpha t}{t^2 + \alpha^2}$$

Diese Funktion ist differenzierbar, also ist f differenzierbar bezüglich beliebiger Basen. Das reicht jedoch immer noch nicht:

$$f(a, a^2) = \frac{a^2 a^2}{a^4 + a^4} = \frac{1}{2}$$

Also ist f immer noch nicht stetig - es ist stetig für Folgen, welche den Nullpunkt durch Geraden erreichen, aber nicht, wenn wir durch kompliziertere Pfade gegen den Nullpunkt gehen.

Wir wollen die Begriffe aus der Analysis I über Stetigkeit und Ableitbarkeit retten, also brauchen wir einen komplizierteren Ableitungsbegriff.

7.3 Differenzierbarkeit

Sei f eine beliebige Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Ableitung gibt uns die Tangente der Funktion an einem beliebigen Punkt, also die beste affine Approximation der Funktion an diesem Punkt.

Definition 7.24. Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt **affin**, wenn es eine Lineare Funktion $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ und eine Konstante $Z \in \mathbb{R}^k$ gibt, sodass:

$$F(X) = L(X) + Z$$

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ affin, also $g(x) = cx + t$ für $c, t \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen eine beliebige Funktion f an der Stelle x_0 approximieren. Für eine gute Approximation wollen wir $f(x_0) = g(x_0)$, also erhalten wir:

$$g(x) = c(x - x_0) + f(x_0).$$

Schreibe $x = x_0 + h$ und lasse h gegen 0 gehen.

$$h \rightarrow f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$$

Wir sagen, die Approximation ist gut, wenn $f(x_0 + h) - f(x_0) - ch$ schneller gegen 0 geht als h selbst, also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ch}{h} = 0 \quad (7.4)$$

Was äquivalent ist zu:

$$c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wir sagen also, f ist in x_0 differenzierbar, genau dann, wenn eine lineare Abbildung L existiert, sodass:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

Diese geometrische Intuition, nach der die Ableitung die beste affine Approximation der Funktion an einem gegebenen Punkt ist, können wir auf den \mathbb{R}^n übertragen. Analog zu der Interpretation affiner Funktionen als Geraden in \mathbb{R} , also der Ableitung als das Finden einer Tangentengeraden auf dem Funktionengraph, sucht man beim Ableiten einer Mehrdimensionalen Funktion eine Tangenten(hyper-)ebene auf dem Funktionengraph.

Definition 7.25. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, sei $X_0 \in M$. Die Abbildung F heißt **differenzierbar** am Punkt X_0 , wenn es eine Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ gibt, sodass:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = 0.$$

Wir nennen sie das **Differenzial von F im Punkt X_0** und notieren sie als DF_{X_0} . F heißt differenzierbar, wenn sie differenzierbar an jedem Punkt $X \in M$ ist.

Anmerkung 7.26. Im Fall $n = m = 1$ (also bei eindimensionaler Urbild- und Bildmenge) sind lineare Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau durch Multiplikation mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gegeben. In diesem Fall vereinfacht sich die Bedingung zu:

$$\begin{aligned} \exists c \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - ch}{|h|} &= 0 \\ \implies \exists c \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{ch}{|h|} \\ \implies \exists c \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} &= c \end{aligned}$$

Was genau die Definition von Differenzierbarkeit im Eindimensionalen ist.

Anmerkung 7.27. Ist die Funktion F linear, so ist sie durch Matrixmultiplikation $f : x \rightarrow Ax$ gegeben und es gilt trivial für alle x $DF_x = A$.

Anmerkung 7.28. Differenzierbarkeit kann analog über die Eigenschaften des Restglieds $R(X, X_0)$ definiert werden: Sei

$$f(X) = f(X_0) + Df_{X_0}(X - X_0) + R(X, X_0).$$

Dann ist f genau dann differenzierbar, wenn:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{R(X, X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$$

Satz 7.29. *Gibt es ein Differential, ist es eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien L_1, L_2 Differentiale. Es folgt:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{L_1(H) - L_2(H)}{\|H\|} = 0$$

Sei $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_1(tX) - L_2(tX)}{\|tX\|} = 0$$

$$\implies \frac{L_1(X) - L_2(X)}{\|X\|} = 0$$

$$\implies L_1(X) - L_2(X) = 0$$

also sind die beiden Differentiale identisch. □

Anmerkung 7.30. Unserer Differenzierbarkeitsbegriff wird insbesondere in der älteren Literatur oft als **totale Differenzierbarkeit** bezeichnet.

Satz 7.31. *Ist $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ an einem Punkt X_0 differenzierbar, so ist F an diesem Punkt stetig.*

Beweis. Sei F differenzierbar. Da die Differenzierbarkeit über den Limes des Differentialquotienten definiert ist folgt direkt:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall H \in M : (X_0 + H \in M) \wedge (0 \leq \|H\| \leq \delta_1) \\ \implies \frac{\|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|H\| \end{aligned}$$

Da DF_{X_0} eine lineare Abbildung ist ist DF_{X_0} gleichmäßig stetig, also gilt:

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ : \|H\| < \delta_2 \implies \|DF_{X_0}(H)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Also gilt für $\|H\| \leq \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$

$$\begin{aligned} & \|F(X_0 + H) - F(X_0)\| \\ &= \|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H) + DF_{X_0}(H)\| \\ &\leq \|F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}(H)\| + \|DF_{X_0}(H)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|H\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 7.32. Sind F und G differenzierbar, so auch $F + G$, und es gilt

$$D(F + G)_{X_0} = DF_{X_0} + DG_{X_0}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & \lim_{H \rightarrow 0} \frac{(F + G)(X_0 + H) - (F + G)(X_0) - (DF_{X_0} + DG_{X_0})H}{\|H\|} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - DF_{X_0}H}{\|H\|} + \lim_{H \rightarrow 0} \frac{G(X_0 + H) - G(X_0) - DG_{X_0}H}{\|H\|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Satz 7.33. Kettenregel: Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $N \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, seien $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ Abbildungen, sei X_0

Beweis. Sei $F(X_0) = Y_0$, $F(X_0 + H) - F(X_0) = Z$, $H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X_0 + H \in M$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|H\|} ((G \circ F)(X_0 + H) - (G \circ F)(X_0) - DG_{F(X_0)} \circ DF_{X_0}(H)) \\ &= \frac{1}{\|H\|} (G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) \\ &= \frac{1}{\|H\|} (DG_{Y_0}(F(X_0 + H) - F(X_0)) - DG_{Y_0}(DF_{X_0}(H))) \\ &= \frac{1}{\|H\|} DG_{Y_0}((F(X_0 + H) - F(X_0)) - DF_{X_0}(H)) \end{aligned}$$

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} DG_{Y_0}((F(X_0 + H) - F(X_0)) - DF_{X_0}(H)) = DG_{Y_0}(0) = 0$$

$$\frac{1}{\|H\|} (G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) = \begin{cases} 0 & Z_H = 0 \\ \frac{1}{\|H\|} (G(Y_0 + Z_H) - G(Y_0) - DG_{Y_0}(Z_H)) & Z_H \neq 0 \end{cases}$$

Der Term zweite Term in $Z_H \neq 0$ geht gegen 0 für $H \rightarrow 0 \implies Z_H = F(X_0 + H) -$

$$F(X_0) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\|Z_H\|}{\|H\|} &= \frac{\|F(X_0 + H) - F(X_0)\|}{\|H\|} \\
&= \frac{\|DF_{X_0}(H) - R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\leq \frac{\|DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\leq \frac{\|DF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\stackrel{???}{\leq} \frac{\|DF_{X_0}\| \|H\|}{\|H\|} + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&= \|DF_{X_0}\| + \frac{\|R(X_0, H)\|}{\|H\|} \\
&\leq c
\end{aligned}$$

□

Satz 7.34. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $N \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, seien $F : I \rightarrow N$, $G : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen.

Ist F differenzierbar in $t_0 \in I$ und G differenzierbar in $F(t_0)$, so gilt:

$$(G \circ F)'(t_0) = DG_{F(t_0)}(F'(t_0))$$

Beweis. Gemäß Kettenregel gilt $D(G \circ F) = DG_{F(t_0)} \circ DF_{t_0}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
h(G \circ F)'(t_0) &= hD(G \circ F)_{t_0}(1) \\
&= D(G \circ F)_{t_0}(h) \\
&= DG_{F(t_0)}(DF_{t_0}(h)) \\
&= hDG_{F(t_0)}(F'(t_0))
\end{aligned}$$

□

Mittelwertsatz: $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$, dann $\exists y : f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$. Im Allgemeinen ist dieser im Mehrdimensionalen Fall leider falsch.

Betrachte allerdings die folgende Ungleichung, welche die Wichtigste Konsequenz des Mittelwertsatzes ist: $|f(y) - f(x)| \leq |f'(z)||y - x| \leq c|y - x|$. Diese kann im Allgemeinen erhalten werden.

$F : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ $X, Y \in M$. Sei $[X, Y] = \{(1 - \lambda)X + \lambda Y\}$ die Verbindungsline zwischen den beiden Vektoren.

Satz 7.35. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X, Y \in M$ mit $[X, Y] \subseteq M$. Die Abbildung $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ sei stetig in M und differenzierbar in den Punkten $(1 - \lambda)X + \lambda Y$ mit $\lambda \in (0, 1)$. Gilt

$$\forall \lambda \in (0, 1) : \forall (1 - \lambda)X + \lambda Y : \|DF_Z\| \leq c$$

so gilt auch

$$\|F(Y) - F(X)\| \leq c\|Y - X\|$$

Beweis. Angenommen $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist stetig auf $[0, 1]$ und differenzierbar auf $(0, 1)$. So gilt

$$\forall t \in (0, 1) : \|G'(t)\| \leq c$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und

$$A := \{t \in [0, 1] \mid \|G(t) - G(0)\| \leq (c + \varepsilon)t + \varepsilon\}$$

Da G stetig in 0 ist gilt $[0, \tau] \subseteq A$.

Sei $s = \sup A$. Es gilt $0 < s \leq 1$, also ist G stetig in s .

Da $t \in A \implies t \leq s$

$$\|G(t) - G(0)\| \leq (c + \varepsilon)t + \varepsilon \rightarrow s \implies \|G(s) - G(0)\| \leq (c + \varepsilon)s + \varepsilon$$

also $s \in A$. Angenommen, $s < 1$. Dann gilt $\exists h > 0 : s + h < 1$.

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{G(s+h) - G(s)}{h} - G'(s) \right\| \leq \varepsilon \\ \implies & \left\| \frac{G(s+h) - G(s)}{h} \right\| \leq \varepsilon + G'(s) \leq c + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|G(s+h) - G(0)\| & \leq \|G(s+h) - G(s)\| + \|G(s) - G(0)\| \\ & \leq (c + \varepsilon)h + (c + \varepsilon)s + \varepsilon \\ & \leq (c + \varepsilon)(s+h) + \varepsilon \end{aligned}$$

Daraus folgt $s+h \in A$. Da s das Supremum ist ist dies ein Widerspruch. Also gilt $h = 1$.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \|G(1) - G(0)\| & \leq c + \varepsilon + \varepsilon = c + 2\varepsilon \\ \implies \|G(1) - G(0)\| & \leq c \end{aligned}$$

Sei F wie im Satz. Sei $K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow (1-t)X + tY$. Diese Abbildung ist affin, also differenzierbar. Es gilt $K'(t) = Y - X$. $F \circ K$ ist diffbar in $(0, 1)$

$$D(F \circ K)_t = DF_{K(t)} \circ DK_t$$

$$(F \circ K)'(t) = DF_{K(t)}(K'(t)) = DF_{K(t)}(Y - X)$$

$$\|(F \circ K)'(t)\| = \|DF_{K(t)}(Y - X)\| \leq \|DF_{K(t)}\| \|Y - X\| \leq c \|Y - X\|$$

Mit $G := F \circ K$ und $c := c \|Y - X\|$

$$\|F(Y) - F(X)\| \leq c \|Y - X\|$$

□

[missing stuff - gradients]

Definition 7.36. Eine Funktion f heißt **partiell differenzierbar**, wenn für jede Koordinatenachse i die Partielle Ableitung $\forall i \in \{0, \dots, n\} : \partial_i f : M \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : X \rightarrow \delta_i f(X)$ existiert.

Satz 7.37. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von X_0 partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen in X_0 stetig, so ist f in X_0 differenzierbar.

Beweis. Sei U ein offener Ball um X_0 , welcher vollständig in M enthalten ist. Sei $H \in \mathbb{R}^n$, sodass $X_0 + H \in U$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(X_0 + H) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^n (f(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_i + h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (f(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n)) \end{aligned}$$

Die Summenglieder sind partielle Ableitung. Nach Mittelwertsatz erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad c_i \in (0, 1)$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|H\|} |f(X_0 + H) - f(X_0) - \langle \nabla f(X_0), H \rangle| \\ &= \frac{1}{\|H\|} \left| \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n) - \partial_i(f(x_0, \dots, x_n)) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + c_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n) - \partial_i(f(x_0, \dots, x_n)) \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X_0 \in M$, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$. Seien $\forall i \in \{1, \dots, n\} f : M \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Koordinatenfunktionen.

$$F(X) = (f_1(X), \dots, f_k(X)) = \sum_{i=1}^k f_i(X) E'_i$$

$$Y = F(X) \Leftrightarrow \forall i : y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (7.5)$$

Satz 7.38. Die Abbildung F ist genau dann differenzierbar in X_0 , wenn alle Koordinatenfunktionen f_i in X_0 differenzierbar sind. Ist das der Fall, gilt:

$$DF_{X_0}(H) = \sum_{i=1}^k (Df_i)_{X_0}(H) E'_i \quad \forall H \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear. Dann

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f_i(X_0 + H) - f_i(X_0) - (D_i \circ L)(H)}{\|H\|} = 0$$

□

Wir wollen nun das Differential bezüglich der Standardbasis übersichtlich darstellen. Es gilt:

$$L(E_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij} E'_i$$

$$DF_{X_0} = \sum_{i=1}^k \partial_j f_i(X_0) E'_j$$

Die Koeffizienten der Darstellenden Matrix sind also identisch mit den Partiellen Ableitungen.

Satz 7.39. Sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $X_0 \in M$. Dann wird das Differential DF_{X_0} bezüglich der Standardbasis in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^k beschrieben als die $k \times n$ -Matrix

$$JF(X_0) = (\delta_j f_i(X_0))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}$$

Sie heißt die Funktionalmatrix oder Jacobimatrix von F in X_0 . Falls $k = n$ wird die Determinante dieser Matrix als Funktionaldeterminante oder Jacobideterminante von F in X_0 bezeichnet.

[missing stuff]

Satz 7.40. Ist $r \geq 2$ und $f \in C^r(M)$, so sind die partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung r unabhängig von der Reihenfolge es gilt also:

$$\partial_1 \dots \partial_r f = \partial_{\sigma(1)} \dots \partial_{\sigma(r)} f$$

Satz 7.41. Taylor-Formel: Sei $g : [-\varepsilon, h] \rightarrow \mathbb{R}$ $\varepsilon, h > 0$. Sei g $(k+1)$ -mal differenzierbar. Dann gilt:

$$\exists c \in (0, h) : g(h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) h^j + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(c) h^{k+1}$$

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in M$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(M)$ mit partielle differenzierbaren partiellen Ableitungen k -ter Ordnung, $H \in \mathbb{R}^n : [x_0, x_0 + H] \subseteq M$. Sei $g(t) := f(x_0 + tH)$. Dann gilt für $r \in \{1, \dots, k+1\}$:

$$g^{(r)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_r}^n \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} f(X_0 + tH) h_{i_1} \dots h_{i_r}$$

$$g(1) = \sum_{r=0}^k \frac{1}{r!} g^{(r)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(c)$$

Satz 7.42. Mehrdimensionale Taylorformel: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $X_0 \in M$, $H \in \mathbb{R}^n$ mit $[X_0, X_0+H] \subseteq M$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(M)$, sodass die partiellen Ableitungen der Ordnung k in M differenzierbar sind. Dann $\exists c \in (0, 1)$, sodass:

$$f(X_0 + h) = f(X_0) + \sum_{r=1}^k \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} f(X_0 + tH) h_{i_1} \dots h_{i_r} + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \delta_{i_1} \dots \delta_{i_{k+1}} f(X_0 + cH) h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}.$$

Kompakter für $k = 2$:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \langle \nabla f(X_0), H \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(X_0) h_i h_j + R(X_0, h)$$

$$R(X_0, H) = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \delta_i \delta_j \delta_k f(Y) h_i h_j h_k \quad Y \in [X_0, X_0 + H]$$

Falls die dritten Ableitungen auf der Verbindungslinie beschränkt sind gilt:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{R(X_0; H)}{\|H\|^2} = 0$$

Satz 7.43. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in X_0 . Dann heißt die durch

$$Q(f, X_0; H) := \sum_{i,j=1}^n \delta_i \delta_j f(X_0) h_i h_j$$

definierte Funktion $Q(f, X_0; H)$ die **Hesse-Form** von f im Punkt X_0 und die dadurch definierte Matrix

$$\text{Hess}(f, X_0)_{ij} = (\partial_i \partial_j f(X_0))$$

heißt die **Hesse-Matrix** von f in X_0 .

[...]

Lemma 7.44. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Abbildung, sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, sei $X, Y \in M$ mit $[X, Y] \subseteq M$. Dann gilt:

$$\|F(X) - F(Y) - L(X - Y)\| \leq \|X - Y\| \cdot \max_{Z \in [X, Y]} \|DF_Z - L\|$$

Beweis.

$$G(X) := F(X) - L(X) \quad X \in M$$

$$DG_Z = DF_Z - L$$

Dann muss für $F \in C^1$ folgende Funktion stetig sein:

$$Z \rightarrow \|DF_Z - L\|$$

Zusätzlich ist $[X, Y]$ kompakt, also existiert das Maximum

$$\max_{Z \in [X, Y]} \|DF_Z - L\| := c$$

Gemäß Mittelwertsatz ist nun

$$\|F(X) - F(Y) - L(X - Y)\| \leq c\|X - Y\|$$

□

Satz 7.45. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\vec{x}_0 \in M$. Sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^r -Abbildung ($r \in \mathbb{N}_1$). Sei das Differential $DF_{\vec{x}_0}$ regulär, also $\det JF(\vec{x}_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von \vec{x}_0 , sodass folgendes gilt:

1. die Einschränkung $F|_U$ ist injektiv
2. die Bildmenge $F(U) := V$ ist offen
3. die Umkehrabbildung $(F|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ ist C^r .

Beweis. Sei I die Identitätsabbildung des \mathbb{R}^n . Sei $U(0, \alpha) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} < \alpha\}$.

Annahmen: $\vec{x}_0 = 0$, $F(0) = 0$ (Erfüllbar durch Verschieben), $DF_0 = I$ (Erfüllbar durch invertierbare Lineare Abbildung der Funktion?)

$\vec{x} \rightarrow \|DF_{\vec{x}} - I\|$ ist stetig mit $\|DF_0 - I\| = 0$. Also gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha > 0 : \forall \vec{x} \in U_\alpha : \|DF_{\vec{x}} - I\| \leq \varepsilon$$

Nach 4.3 folgt:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in U_\alpha : \|F(\vec{x}) - F(\vec{y}) - (\vec{x} - \vec{y})\| \leq \varepsilon \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\| &\leq \|\vec{x} - \vec{y} - (F(\vec{x}) - F(\vec{y}))\| + \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\| \\ &\leq \varepsilon \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\| \end{aligned}$$

also:

$$(1 - \varepsilon) \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\|$$

Also ist $\|F(\vec{x}) - F(\vec{y})\| = 0$ gdw. $\vec{x} = \vec{y}$, also folgt Injektivität.

Lemma 7.46. $U_{(1-\varepsilon)\alpha} \subseteq F(U_\alpha)$

Beweis. Sei $\vec{y} \in U_{(1-\varepsilon)\alpha}$. Wir suchen $\vec{x} \in U_\alpha : \vec{y} = F(\vec{x})$. Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Dafür definieren wir $\phi : \overline{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als:

$$\phi(\vec{x}) := \vec{y} - F(\vec{x}) + \vec{x}$$

Sei nun $X \in \overline{U_\alpha}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\phi(\vec{x})\| &\leq \|\vec{y}\| + \|F(\vec{x}) - \vec{x}\| \\ &\leq \|\vec{y}\| + \varepsilon\|\vec{x}\| \\ &< (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\alpha \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Sei $X, Z \in \overline{U_\alpha}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \|\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{z})\| &= \|F(\vec{x}) - \vec{x} - (F(\vec{z}) - \vec{z})\| \\ &\leq \varepsilon\|\vec{x} - \vec{z}\| \end{aligned}$$

Gemäß Banachschem Fixpunktsatz existiert also genau ein $X \in \overline{U_\alpha}$, sodass $\phi(\vec{x}) = \vec{x}$, also $F(\vec{x}) = \vec{y}$. Da $\phi(\vec{x}) < \alpha$ gilt auch $\vec{x} \in U_\alpha$. \square

Sei nun $V : U_{(1-\varepsilon)\alpha}$ und $U := F^{-1}(V)$. Gemäß Lemma ist U eine Obermenge von V , also ist U eine offene Umgebung von 0. Wir wissen bereits, dass $F|_U$ injektiv ist. Sei also nun $G : V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von $F|_U$.

Lemma 7.47. G ist in 0 differenzierbar.

Beweis. Sei $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$. So existiert ein $\alpha' \in \mathbb{R}^+$, sodass $U_{\alpha'} \in M$ und

$$\|F(\vec{x}) - \vec{x}\| \leq \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in U_{\alpha'}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &\leq \|\vec{x} - F(\vec{x})\| + \|F(\vec{x})\| \\ &\leq \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\|\vec{x}\| + \|F(\vec{x})\| \end{aligned}$$

also:

$$\|\vec{x}\| \leq (1+\varepsilon')\|F(\vec{x})\| \quad \forall \vec{x} \in U_{\alpha'}$$

Sei nun $\vec{h} \in V$ mit $\|\vec{h}\| < \alpha'(1-\varepsilon)$. Sei $\vec{x} := G(\vec{h})$. Gemäß Lemma ist $V \subseteq F(U_\alpha)$, also $G(V) \subseteq G(F(U_\alpha))$, also $U \subseteq U_\alpha$, also $\vec{x} \in U$ (?)

Gemäß vorheriger Überlegungen haben wir

$$\|X\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|F(\vec{x})\| = \frac{1}{1-\varepsilon}\|\vec{h}\| < \alpha'$$

Wir betrachten nun endlich den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \|G(\vec{h}) - \vec{h}\| &= \|\vec{x} - F(\vec{x})\| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon'} \|\vec{x}\| \\ &\leq \varepsilon' \|F(\vec{x})\| \\ &\leq \varepsilon' \|\vec{h}\| \end{aligned}$$

also:

$$\frac{\|G(\vec{h}) - \vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} \leq \varepsilon'$$

für alle $0 < \|\vec{h}\| < \min\{\alpha(1 - \varepsilon), \alpha'(1 - \varepsilon)\}$, also ist G in 0 differenzierbar mit $DG_0 = I$. \square

Was ist nun, wenn die Voraussetzungen $\vec{x} = 0$, $F(0) = 0$, $DF_0 = I$ nicht gelten?

Wir definieren lineare Translationsabbildungen $T_{\vec{z}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{z}$. Sei nun:

- $L : DF_{\vec{x}_0}$,
- $M' := (L \circ T_{-\vec{x}_0})(M)$,
- $F'(\vec{x}) := T_{-F(\vec{x}_0)} \circ F \circ T_{\vec{x}_0} \circ L^{-1}(\vec{x})$

Die Differentiale sind $DL = L$ und $DT_Z = I$. Nun gilt:

$$DF'_0 = I \circ DF_{\vec{x}_0} \circ I \circ (DF_{\vec{x}_0})^{-1} = I$$

Also $F'(0) = 0$, $0 \in M'$. F' ist also umkehrbar und die Umkehrabbildung ist differenzierbar in 0. Für die ursprüngliche Abbildung gilt $F = T_{T_{\vec{x}_0}} \circ F' \circ L \circ T_{-\vec{x}_0}$. \square

Definition 7.48. Sei $F: M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^r -Funktion mit regulären Differentialen. Eine solche Abbildung nennt man einen C^r -Diffeomorphismus.

[...]

Satz 7.49. (Implizite Funktion): Sei $k < n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^r : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, sei $N = \{\vec{x} \in M \mid F(\vec{x}) = 0\}$. Sei $\vec{x}_0 \in N$ und $DF_{\vec{x}_0}$ vom Rang k . Dann gibt es nach passender Identifizierung von \mathbb{R}^n mit $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von \vec{x}_0 , eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ und eine Abbildung $G \in C^r : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, sodass $N \cap U$ der Graph von G ist.

Beweis. $DF_{\vec{x}_0}$ hat Rang k . Es gilt also k linear unabhängige Spalten. OBDA seien dies die letzten k Spalten. Die ersten $(n-k)$ Basisvektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^{n-k} , ebenso bilden die letzten k Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^k . Wir haben somit eine Identifikation $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ erhalten, sodass wir $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ abbilden auf $\vec{x} = (\vec{x}', \vec{x}'')$. Wir definieren folgende Funktion:

$$\begin{aligned} \phi : M \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ (\vec{x}', \vec{x}'') &\rightarrow (\vec{x}', F(\vec{x}', \vec{x}'')) \end{aligned}$$

Da $F, \times \in C^r$ ist ϕ ebenfalls in C^r . Für die Jakobimatrix gilt:

$$J\phi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

[WIP]

Nach dem Satz der Inversen Funktion existiert eine Umgebung U_0 von \vec{x}_0 , sodass auf dieser Umgebung eine Umkehrabbildung ψ existiert. Und so weiter :) \square

Anmerkung 7.50. Seien A, B Mengen. Es existieren folgende Funktionen:

- Das Produkt $A \times B$
- Die Projektion $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ auf die erste Komponente
- Die Projektion $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$ auf die zweite Komponente
- Die kanonische Injektion $i : A \rightarrow A \times B : a \rightarrow (a, 0)$

Satz 7.51. Über lokal surjektive Abbildungen: Sei $k < n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung der Klasse C^r , $r \in \mathbb{N}_1$. Sei $X_0 \in M$ und F in X_0 vom Rang k , also DF_{X_0} surjektiv. Dann gibt es eine offene Umgebung U von X_0 in M , eine offene Menge V in \mathbb{R}^{n-k} , und einen C^r -Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V \times F(u)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & V \times F(u) \\ & \searrow F & \downarrow \pi_2 \\ & & F(u) \end{array}$$

Beweis. Nach Voraussetzung hat $JF(X_0)$ k unabhängige Spalten. Seien dies OBdA die letzten Spalten. Wir interpretieren $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ und definieren $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ und $\pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ als die dazugehörigen kanonischen Projektionen. Sei φ folgende Funktion:

$$\begin{aligned} \varphi : M &\rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ X &\rightarrow (\pi_1(X), F(X)) \end{aligned}$$

Es gilt $F \in C^r$ und $\pi_1 \in C^r$, also auch $\varphi \in C^r$. Gemäß des Satzes der inversen Funktion existiert also eine Umgebung $\varphi \in C^r$, auf der φ ein C^r Diffeomorphismus (also C^r und invertierbar).

Da φ^{-1} stetig ist, ist das Urbild $(\varphi^{-1})^{-1}(U') = \varphi(U')$ offen. Es enthält also eine offene Umgebung von $\varphi(X_0) = (\pi_1(X_0), F(X_0))$ der Form $V \times X$, also ist V offen in \mathbb{R}^{n-k} . Wir setzen $U := \varphi^{-1}(V \times W)$ und $h = \varphi|_U$. Dann ist $F(U) = W$, und für $X \in U$ gilt $h(X) = (\pi_1(X), F(X))$, also $\pi_2 \circ h = F$. \square

Im Fall $k > n$ erhalten wir lokale Injektivität statt lokaler Surjektivität:

Satz 7.52. Über lokal injektive Abbildungen: Sei $k > n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^r -Abbildung. Sei $X_0 \in M$ und F in X_0 vom Rang n (und damit das Differential DF_{X_0} injektiv). Sei i die kanonische Injektion.

Dann gibt es eine offene Umgebung U von X_0 in M , eine offene Umgebung V von 0 in \mathbb{R}^{k-n} , eine offene Umgebung W von $F(X_0)$ in \mathbb{R}^k , und einen C^r -Diffeomorphismus $h : U \times V \rightarrow W$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & V \times F(u) \\ & \searrow F & \downarrow h \\ & & F(u) \end{array}$$

Beweis. hi :D

\square

[...]

Chapter 8

Diffeomorphismen

In diesem Kapitel geht es um die lokale Lösbarkeit von nichtlinearen Gleichungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sei $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Uns interessieren nun Lösungen der Gleichung $f(x) = y$. Intuitiv ist dann m die Anzahl der Gleichungen und n die Anzahl der Unbekannten.

Angenommen, wir haben bereits eine Lösung x_0 der Gleichung $f(x) = y_0$. Uns interessiert nun:

1. Hat die Gleichung $f(x) = y$ auch für andere Werte von y nahe an y_0 Lösungen?
Falls ja, sind diese nahe an x_0 ?
2. Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$ in einer Umgebung von x_0 ?
3. Falls nein, wie sieht die Lösungsmenge $f^{-1}(y_0)$ nahe bei x_0 aus?

Falls f affin ist, gilt $f(x) = y \Leftrightarrow A(x - x_0) = y - y_0$, und die Lineare Algebra gibt uns folgende Antworten:

1. Es gibt genau dann eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m$, wenn

$$\text{rang } A = m.$$

2. Es gibt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$\ker A = \{0\}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\text{rang } A = n.$$

3. $f^{-1}\{y_0\}$ ist ein affiner Unterraum des \mathbb{R}^n mit Dimension $n - \text{rang } A$.

Da das Differential $Df(x_0)$ einer Abbildung $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ an einem gegebenen Punkt $x_0 \in \Omega$ eine lineare Abbildung ist, hoffen wir nun, einige dieser Erkenntnisse über lineare Funktionen auf die allgemeinere Klasse der differenzierbaren Funktionen übertragen zu können.

Wir wollen hierfür die Funktion durch das Differential linear approximieren. Das Restglied für eine solche Approximation mit Abstand $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist dann genau die Differenz zwischen dem Tatsächlichen Wert und dem approximierten Wert, also:

$$R_f(\xi) = f(x_0 + \xi) - (f(x_0) + Df(x_0)\xi)$$

Für unsere Gleichung gilt nun:

$$f(x) = y \Leftrightarrow Df(x_0) \cdot (x - x_0) + R_f(\xi) \cdot (x - x_0) = y - y_0$$

Es wurde also einfach ein Restglied zur Gleichung für affine Funktionen hinzugefügt. Es hilft, im Kopf zu behalten, dass der affine Fall genau der Fall ist, in dem die Approximation exakt und somit das Restglied 0 ist.

Chapter 9

Implizite Funktionen

Chapter 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1 Anfangswertprobleme

10.1.1 Natürliches Wachstum

Wir sprechen von **natürlichem Wachstum** wenn die Wachstums- oder Zerfallgeschwindigkeit proportional zum Wert der Funktion ist, also:

$$x(t_0) = x_0, \quad x' = \alpha x$$

Die Lösung ist

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

was oft vereinfacht geschrieben wird als:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\alpha(t-t_0)} \\ &= \left(\frac{x_0}{e^{\alpha t_0}} \right) e^{\alpha t} \\ &:= c e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Ntürliches Wachstum tritt z.B. beim radioaktiven Zerfall oder in der Zinsrechnung auf.

10.1.2 Logistisches Wachstum

Beim Logistischen Wachstum wird eine zusätzliche "Sterberate" hinzugefügt:

$$x(t_0) = x_0, \quad x' = \alpha x - \beta x^2$$

Die Lösung hier ist bereits deutlich komplizierter:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

Durch den Faktor $e^{-\alpha(t-t_0)}$ konvergiert die Lösung für $t \rightarrow \infty$ gegen $\frac{\alpha}{\beta}$.

10.1.3 Lotka-Volterra-Modell

Ein bekanntest Modell für Systeme von Raub- und Beutetieren ist das Modell von Lotka-Volterra. Wir betrachten eine Population $x(t)$ an Beutetieren und $y(t)$ von Raubtieren, sodass bei einer zu großen Raubtierpopulation die Wachstumsrate der Beutetierpopulation sinkt und bei einer zu kleinen Beutetierpopulation die Raubtierpopulation sinkt:

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0, & x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y(t_0) &= y_0, & y' &= (-\gamma + \delta x)y\end{aligned}$$

Eine besonders simple Lösung ist $x_0 = \frac{\delta}{\gamma}$, $y_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ - in diesem Fall bleiben beide Populationen konstant.

Im allgemeinen sind die Lösungen dieses Modells periodisch, eine allgemeine Lösungsformel lässt sich aber bereits nicht mehr analytisch durch Elementarfunktionen darstellen. Immerhin sind sie ohne größere Probleme sehr genau numerisch approximierbar.

Wir wollen nun den Begriff des Anfangswertproblems formalisieren und unsere Lösungsmethoden verallgemeinern.

Definition 10.1. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig (in kürzerer Notation: $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$)

Eine stetig differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (kurz: $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$) ist eine **Lösung der Differentialgleichung** $x' = f(\cdot, x)$, falls

$$\forall t \in I : x'(t) = f(t, x(t))$$

Gilt außerdem $x(t_0) = x_0$, so ist x eine **Lösung des dazugehörigen Anfangswertproblems**.

Definition 10.2. Falls die Funktion f zeitunabhängig ist (also unabhängig von ihrer ersten Komponente) nennen wir die zugehörige Differentialgleichung **autonom**.

Die drei zentralen Fragen sind nun:

1. Existiert eine Lösung des Anfangswertproblems?
2. Falls eine Lösung existiert, ist sie eindeutig?
3. Wie hängt die Lösung von x_0 und f ab?

Die dritte Frage sprengt leider den Rahmen einer Grundlagenvorlesung Analysis. Die ersten beiden Fragen können wir jedoch bald befriedigend beantworten.

Es stellt sich zum Beispiel heraus, dass selbst bei simplen Anfangswertproblemen die Stetigkeit von f nicht ausreicht, um die Eindeutigkeit der Lösungsmenge zu gewährleisten:

Beispiel 10.3. Sei $f(t, x) = 2\sqrt{|x|}$. Dann hat das Anfangsproblem

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 \\ x' &= f(\cdot, x)\end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nämlich:

$$x_{\alpha, \beta}(t) = \begin{cases} -(t - \alpha)^2 & t < \alpha \\ 0 & t \in [\alpha, \beta] \\ (t - \beta)^2 & t > \beta \end{cases}$$

für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}^-$, $\beta \in \mathbb{R}^+$.

Satz 10.4. *Hiii!!! 'w'*

Lemma 10.5. *Sei $f \in \mathbb{C}^0(G, \mathbb{R}^n)$ und $(t_0, x_0) \in G$.*

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \forall t \in I : x'(t) &= f(t, x(t)), \end{aligned}$$

2. $x \in \mathbb{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ erfüllt die Gleichung

$$\forall t \in I : x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass wir im Allgemeinen nur eine zeitlich lokale Lösung erwarten können:

Beispiel 10.6. Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ x' &= x^2 \end{aligned}$$

Hat auf $(-\infty, 1)$ die Lösung $x(t) = \frac{1}{1-t}$. Diese Lösung hat jedoch bei $t = 1$ eine Singularität und ist somit nicht fortsetzbar.

Satz 10.7. Kurzzeitexistenzsatz von Picard-Lindelöf:
Sei $f \in \mathbb{C}^0(G, \mathbb{R}^n)$ mit $D_x f \in \mathbb{C}^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$. Sei $(t_0, x_0) \in G$.

Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] : x'(t) &= f(t, x(t)) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis. Banachscher Fixpunktsatz :)

□

Gewöhnliche Differentialgleichungen, auf Englisch *ordinary differential equations (ODEs)* beschreiben zeitabhängige Prozesse. Sie sind nützlich für die Modellierung zahlreicher Prozesse in verschiedenen Gebieten der Wissenschaft.

10.2 Motivation

Wir wollen die Fischpopulation in einem See modellieren. Wir bezeichnen die Anzahl an Fischen zum Zeitpunkt t mit $y(t)$. Wie viele Fische dürfen die Menschen am See fangen, ohne dass die Fischpopulation ausstirbt?

Wir führen folgende Größen ein:

- Die Geburtenrate $G(t)$. Wir nehmen an, dass diese proportional zur Größe der Fischpopulation ist, also

$$G(t) = by(t).$$

- Die natürliche Todesrate $T(t)$. Auch hier gehen wir von Proportionalität zur Population aus:

$$T(t) = my(t).$$

- Die Fischfangrate $H(t)$.

Wir erhalten nun die Gleichung:

$$y'(t) = (b - m)y(t) - H(t)$$

Wir nehmen außerdem an, dass $(b - m) := a > 0$. Diese Größe kann durch Beobachtungen gemessen werden, $H(t)$ ist kontrollierbar. Zu einem gegebenen Anfangszeitpunkt t_0 , an dem die Fischpopulation $y(t_0) = y_0$ beträgt, können die Menschen nun berechnen, wie viele Fische sie fangen dürfen.

Wir betrachten als erstes die einfachstmögliche Situation, in der die Fischfangrate $H(t)$ zeitunabhängig konstant bleibt, also $H(t) = H \in \mathbb{R}$. Wir erhalten so unser erstes Modell:

$$\begin{aligned} y' &= ay - H \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Da die Ableitung proportional zur Funktion selbst ist eine Exponentialgleichung eine naheliegende Lösung. Eine rigorose Herleitung dieser Intuition folgt später. Mit diesem Wissen können wir jedoch bereits eine "how would you come up with that"-Herleitung durchführen:

10.3 Existenztheorie

Definition 10.8. Für $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

eine *explizite Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Ist zusätzlich

$$y^{(i)}(t_0) = y_{i-1}$$

für $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben, spricht man von einem *Anfangswertproblem*.

Definition 10.9. Sei I ein Intervall. Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lösung* von (2.1) im Intervall I , falls y in I n -mal differenzierbar ist und

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Wir erlauben hier jede Art von Intervall, egal ob offen, halboffen, oder geschlossen.

Definition 10.10. Sei $F : \omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nennen das Gleichungssystem

$$Y'(t) = F(t, Y(t))$$

ein *System von Differentialgleichungen 1. Ordnung*. Für $F = (f_1, \dots, f_n)$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$ lässt sich das System komponentenweise schreiben als:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned}$$

Ergänzt man das System durch die Bedingung $Y(t_0) = Y_0$ erhalten wir komponentenweise:

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_1^0 \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= y_n^0 \end{aligned}$$

Für ein $(t_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in \Omega$ und sprechen wieder von einem *Anfangswertproblem*.

Lemma 10.11. *Erfülle F die Voraussetzung (S), sei außerdem $y_i(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Gleichungssystems $Y'(t) = F(t, Y(t))$. Weiter existiere der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +b} Y(t) := y_1$ und es gelte $(b, y_1) \in \Omega$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass man die Lösung y zu einer Lösung auf dem Intervall $(a, b + \delta]$ fortsetzen kann.*

Definition 10.12. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren zwischen den beiden Mengen folgendermaßen eine Abstandsfunktion:

$$\text{dist}(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} \|X - Y\|$$

[big gap here oops]

Lemma 10.13. Seien I, J offene Intervalle, sei $f : J \times I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(t, y) = h(t)g(y)$ gegeben, wobei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g \neq 0$, $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Falls $\varphi : (\alpha, \beta) \subseteq J \rightarrow I$ eine Lösung von (3.1) ist, existiert $c \in \mathbb{R} : \forall t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t) + c)$$

Satz 10.14. Erfülle f die Voraussetzung des letzten Lemmas. Dann existiert $\forall (t_0, y_0) \in J \times I$ eine eindeutige maximale Lösung $y : J_0 \rightarrow I$ von (3.1) mit $y(t_0) = y_0$. Diese Lösung ist von der Form

$$y(t) = G^{-1}(H(t)),$$

wobei

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(x)} dx, y \in I,$$

$$H(t) = \int_{t_0}^t h(s) ds, t \in J$$

ist.

Beispiel 10.15. Sei $y'(t) = 2t(1+y^2)$ mit Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$, wobei $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$g(y) = 1 + y^2, \quad h(t) = 2t$$

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \arctan y - \arctan y_0 \\ &:= \arctan y - c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_{t_0}^t 2s \, ds \\ &= t^2 - t_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{Bild}(G) = \left(-\frac{\pi}{2} - c_0, \frac{\pi}{2} - c_0\right), \quad c_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1. \quad -t_0^2 > -\frac{\pi}{2} - c_0$$

$$\alpha := \sqrt{\frac{\pi}{2} - c_0 + t_0^2}$$

$$H^{-1}(\text{Bild}(G)) = (-\alpha, \alpha)$$

$$y(t) = \tan(t^2 - t_0^2 + \arctan(y_0))$$

$$2. \quad -t_0^2 \leq -\frac{\pi}{2} - c_0$$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\pi}{2} - c_0 + t_0^2}$$

$$\beta := \sqrt{\frac{\pi}{2} - c_0 + t_0^2}$$

$$H^{-1}(\text{Bild}(G)) = (-\beta, -\alpha) \cup (\alpha, \beta)$$

OBdA $t_0 \in (\alpha, \beta)$, dann

$$y(t) = \tan(t^2 - t_0^2 - \arctan(y_0))$$

10.4 Lineare Gleichungen

Angenommen, wir haben eine Funktion $f(t, y)$ der Form

$$f(t, y) = h(t)y + p(t)$$

Es gilt:

$$h, p : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

Wobei nach Annahme h, p stetig sind und $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Voraussetzung (S) erfüllt.

Wenn $p(t) = 0$ nennen wir die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ **homogen**, ansonsten nennen wir sie **inhomogen**.

$$y' = h(t)y + p(t) \Leftrightarrow y'(t) - h(t)y(t) = p(t)$$

Wir suchen nun das Urbild von $p \in C^0(I)$ bezüglich

$$L : C^1(I) \rightarrow C^0(I) : y \mapsto y' - hy$$

$$(L(y))(t) := y'(t) - h(t)y(t)$$

Es gilt:

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha L(y) + \beta L(z)$$

Also ist L ein linearer Operator!

[...]

Lemma 10.16. Sei $I = (a, b)$ und für $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$f(t, y) = h(t)y + p(t)$$

Wobei p, h auf I stetig sind. Seien Lösungen y_1, y_2 der inhomogenen Gleichung und y_0 Lösung der homogenen Gleichung. Dann gilt:

- (i) $y_1 - y_2$ ist Lösung der homogenen Gleichung
- (ii) $y_1 + y_0$ ist Lösung der inhomogenen Gleichung

Lemma 10.17. Sei y_2 eine Lösung der inhomogenen Gleichung und y_0 eine Lösung der homogenen Gleichung. So existiert eine Lösung y_1 der inhomogenen Gleichung, sodass

$$y_2 = y_0 + y_1$$

Variation der Konstanten:

$$y(t) = c(t)e^{H(t)}$$

$$y'(t) = c'(t)e^{H(t)} + c(t)e^{H(t)}h(t)$$

Damit y eine Lösung von (3.1) ist muss gelten:

$$y'(t) = p(t) + h(t)y(t)$$

Also:

$$c'(t) = p(t)e^{-H(t)}$$

Also ist c eine Stammfunktion von pe^{-H} .

Satz 10.18. Sei $I = (a, b)$, für $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$f(t, y) = h(t)y + p(t)$$

p, h stetig. Dann existiert für alle $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ eine eindeutige, maximale Lösung

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}$$

von (3.1) mit $y(t_0) = y_0$. Diese Lösung hat folgende Form:

$$y(t) = e^{[H(t)]} \left(y_0 + \int_{t_0}^t p(s)e^{-H(s)} ds \right)$$

Wobei

$$H(t) = \int_{t_0}^t h(s) ds$$

Beweis.

$$y(t_0) = e^{H(t_0)}(y_0 + 0) = y_0$$

Rechnungen liefern, dass $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ maximal ist. Seien y_1, y_2 eine maximale Lösung mit $y_i(t_0) = y_0$. $\bar{y} := y_1 - y_2$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung mit $y(t_0) = 0$, also $\bar{y}(t) = 0$, also $y_1 = y_2$. \square

Chapter 11

Systeme Linearer Differentialgleichungen

Wir suchen nach Lösungen von Gleichungssystemen der Form:

$$Y'(t) = \mathbf{A}(t)Y(t) + \mathbf{B}(t)$$

Wobei \mathbf{A}, \mathbf{B} Matrizen sind.

Sei $I = (a, b)$ und sei $F(t, Y) := \mathbf{A}(t)Y + \mathbf{B}(t)$. F ist bezüglich Y lokal Lipschitzstetig, also existiert eine eindeutige maximale Lösung mit $Y(t_0) = Y_0$.

Lemma 11.1. Lemma von Gronwall:

Sei J ein Intervall, $t_0 \in J$, $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Ferner sei $x : J \rightarrow [0, \infty)$ stetig und erfülle

$$x(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t x(s) ds \right|$$

Für $t \in J$. Dann gilt

$$x(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}$$

Beweis. Sei $t \geq t_0$, $t \in J$. Sei

$$h(s) := \beta e^{\beta(t_0-s)} \int_{t_0}^s x(\tau) d\tau$$

mit $s \in [t_0, t]$. Sei

$$\begin{aligned} h'(s) &= \beta e^{\beta(t_0-s)} (-1) \beta \int_{t_0}^s x(\tau) d\tau + \beta e^{\beta(t_0-s)} x(s) \\ &= -\beta h(s) + \beta e^{\beta(t_0-s)} x(s) \\ &\leq -\beta h(s) + \beta e^{\beta(t_0-s)} \left(\alpha + \beta \left| \int_{t_0}^s x(\tau) d\tau \right| \right) \\ &= -\beta h(s) + \alpha \beta e^{\beta(t_0-s)} + \beta h(s) \\ &= \alpha \beta e^{\beta(t_0-s)} \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^t h'(s) ds = h(t) - h(t_0) = h(t) = \beta e^{\beta(t_0-t)} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} (-\alpha e^{\beta(t_0-s)}) ds = -\alpha e^{\beta(t_0-t)} + \alpha \\
\implies & \beta e^{\beta(t_0-s)} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \leq \alpha - \alpha e^{\beta(t_0-t)} \\
& \beta \int_{t_0}^t x(s) ds \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} - \alpha \\
\implies & \alpha + \beta \int_{t_0}^t x(s) ds \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} \\
& \implies x(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}
\end{aligned}$$

□

Satz 11.2. Seien \mathbf{A}, \mathbf{B} stetig Funktionen auf $I = (a, b)$. Dann ist jede maximale Lösung des dazugehörigen Differentialsystems auf ganz (a, b) definiert.

Beweis. Sei eine maximale Lösung gegeben durch:

$$Y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Wobei $Y(t_0) = Y_0, t_0 \in (\alpha, \beta)$. Da Y eine maximale Lösung ist existiert der Limes

$$\lim_{t \rightarrow +\beta} Y(t)$$

nicht. Sei $(\alpha, \beta) \subsetneq (a, b)$, OBdA $\beta < b$. Sei für $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n := \{(t, Y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [t_0, \beta], \|Y\| \leq n\}$$

Da diese Menge kompakt ist und Y eine maximale Lösung ist, ist

$$G^+ = \{(t, z) \in \overline{\text{graph}(Y)} \mid t \geq t_0\}$$

keine kompakte Teilmenge.

$$\begin{aligned}
& \exists \tau_n \in [t_0, \beta) : \|Y(\tau_n)\| = n \\
& \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|Y(\tau_n)\| = \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n(T) &:= \|Y(t)\| \mid t \in (\alpha, \beta) \\
\delta &:= \max_{t \in [t_0, \beta]} \|\mathbf{A}(t)\|_{\mathbb{R}^n \times m} < \infty \\
\gamma &:= \max_{t \in [t_0, \beta]} \|\mathbf{B}(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty
\end{aligned}$$

Da Y eine Lösung ist, ist:

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(s)Y(s) + \mathbf{B}(s) ds \quad t \in [t_0, \beta)$$

□

[...]

Definition 11.3. Wir nennen die Matrix \mathbf{Y} , welche das System linearer Differentialgleichungen beschreibt, die **Fundamentalmatrix** des Systems.

Lemma 11.4. Es gilt $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$.

Definition 11.5. Wir definieren $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(t_0)$.

Definition 11.6. Sei $I = (a, b)$, $\mathbf{A} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Sei \mathbf{Y} eine Fundamentalmatrix eines homogenen Systems linearer Differentialgleichungen. Wir nennen

$$W(t) := \det\{\mathbf{Y}(t)\}$$

die **Wronski-Determinante**.

Satz 11.7. Sei $I = (a, b)$, $\mathbf{A} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Sei \mathbf{Y} eine Fundamentalmatrix eines homogenen Systems linearer Differentialgleichungen. Dann gilt

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(\mathbf{A}(s))ds}$$

für $t \in I$, wobei die Spur $\text{tr}(\mathbf{A})$ einer quadratischen Matrix als die Summe der Diagonaleinträge definiert ist.

Beweis. Es gilt $\text{tr}(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$, $W(t) \in \mathbb{R}$. Wir betrachten also eine skalare Gleichung. Gemäß Satz (3.8?) aus Kapitel 12 gilt diese Formel genau dann, wenn

$$W'(t) = \text{tr}(\mathbf{A}(t))W(t)$$

Wir benötigen also eine Formel für die Ableitung der Determinante. Für $\mathbf{B} = (b_{ij})$ gilt

$$\det \mathbf{B} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)}$$

Somit gilt:

$$(\det \mathbf{B})' = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b'_{i\sigma(i)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)}$$

(insert black magic here)

Es folgt:

$$W(t) = \det \mathbf{Y}(t) = \det \mathbf{Z}(t) \det \mathbf{Y}(t_1) = \det \mathbf{Z}(t) W(t_1)$$

und somit:

$$W'(t) = (\det \mathbf{Z}(t))' W(t_1)$$

Mit der Formel der Ableitung der Determinante gilt:

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{Z}(t_1))' &= \sum_{i=1}^n \det(Z_1(t_1), \dots, Z'_i(t_1), \dots, Z_n(t_1)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(E_1(t_1), \dots, \mathbf{A}(t_1)E_i, \dots, E_n(t_1)) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}(t_1) \\ &= \text{tr} \mathbf{A}(t_1) \end{aligned}$$

Es gilt folglich:

$$W'(t) = \text{tr} \mathbf{A}(t_1) W(t_1)$$

□

Korollar 11.8. Die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix ist überall ungleich Null.

11.1 Systeme mit Konstantem \mathbf{A}

Wir betrachten Systeme der Form:

$$Y'(t) = \mathbf{A}Y(t)$$

Wir betrachten dabei die lineare Abbildung:

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : Y \mapsto \mathbf{A}Y$$

Also $\mathbf{A} = M_E^E(A)$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass:

$$M_B^B(A) = M_B^E(id)M_E^E(A)M_E^B(id)$$

Wobei $M_E^B(id) := \mathbf{B}$ und $M_B^E := \mathbf{B}^{-1}$. Also:

$$M_B^B(A) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} := \mathbf{D}$$

$$Z(t) := \mathbf{B}^{-1}Y(t) \Leftrightarrow \mathbf{B}Z(t) = Y(t)$$

Falls Y eine Lösung des Systems mit Konstante ist, gilt:

$$Z'(t) = \mathbf{B}^{-1}Y'(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}Y(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}Z(t) = \mathbf{D}Z(t)$$

Satz 11.9. *Wenn \mathbf{A} symmetrisch ist, können wir die Matrix diagonalisieren und erhalten eine besonders simple Lösung der Form:*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{Z} = (B_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, B_n e^{\lambda_n t})$$

Chapter 12

Maßtheorie

Maße formalisieren und generalisieren die intuitiven Begriffe von Längen, Volumen etc.

- Eindimensionales Maß: Länge eines Intervalls.
- Zweidimensionales Maß: Flächeninhalt eines Rechtecks.
- Dreidimensionales Maß: Volumen eines Quaders.
- etc.

Wie misst man nun beliebige Mengen? Gibt es für jede Menge ein sinnvolles "Volumen"?

Intuitiv sollte ein Maß auf \mathbb{R}^n eine Funktion

$$m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

sein, welche folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist **bewegungsinvariant** - das Maß ist konstant unter orthogonalen Abbildungen.
2. Das Maß ist **zählbar additiv**:

$$m\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i m(A_i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

3. Das Maß des Einheitswürfels ist auf 1 **normiert**:

$$m([0, 1]^n) = 1$$

Erlauben wir bei Bedingung 2 nur endliche Vereinigungen, führt der Maßbegriff zum **Inhaltsproblem**, welches wiederum in Dimension ≥ 3 oder höher zum **Banach-Tarski-Paradox** führt und somit nicht lösbar ist.

Erlauben wir jedoch auch unendliche Vereinigungen, erhalten wir das **Maßproblem**, dessen Unlösbarkeit in Dimension ≥ 1 durch Lebesgue gezeigt wurde.

Es ist also leider nicht möglich, einen sinnvollen Maßbegriff in unserer idealisierten Form zu erhalten.

Unser Ansatz ist nun, nur Mengen zu messen, welche im Grenzwert als zählbare Vereinigung von Rechtecken / Quadern / etc. (endliche Vereinigung von Intervallen) dargestellt werden kann.

Satz 12.1. *Jede offene Menge ist als zählbare Vereinigung geschlossenerer Quader darstellbar.*

Definition 12.2. Wir bezeichnen die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ als die Menge der **messbaren Funktionen**.

12.1 Mengensysteme

12.1.1 Mengenringe

Definition 12.3. Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Mengenring**, falls:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \triangle B \in \mathcal{R}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \cap B \in \mathcal{R}$

Mengenringe bilden einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, in dem \triangle der Addition entspricht, \cap der Multiplikation, und \emptyset das Nullelement $0_{\mathcal{R}}$. Falls $X \in \mathcal{R}$, so ist es das Einselement $X = 1_{\mathcal{R}}$.

Proposition 12.4. *Äquivalent kann ein Mengenring definiert werden als ein Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$, welches folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \setminus B \in \mathcal{R}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \cup B \in \mathcal{R}$

Proposition 12.5. *Das System aller endlichen Teilmengen einer Menge X bildet einen Mengenring.*

Proposition 12.6. *Sei H die Menge der halboffenen Intervalle $[a, b)$. So bildet das System aller Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$, die sich als endliche Vereinigung solcher Intervalle darstellen lassen, einen Mengenring \mathcal{H} .*

12.1.2 Mengenalgebren

12.1.3 σ -Algebren

Definition 12.7. Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ -Algebra**, falls folgendes gilt:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar (X, \mathcal{A}) heißt **messbarer Raum**.

Satz 12.8. *Es gilt außerdem:*

1. $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$
2. $\emptyset \in \mathcal{A}$

$$3. \forall A, B \in \mathcal{A} : A \setminus B \in \mathcal{A}$$

Beweis.

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus A_i) \right)$$

$$\emptyset = X \setminus X$$

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$$

□

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ selbst ist bereits eine σ -Algebra. Ebenso ist die Menge $\{\emptyset, X\}$ bereits eine σ -Algebra. Später werden wir zeigen, dass die Menge der **messbaren Mengen** eine σ -Algebra bilden und dass die offenen Mengen ein Teilsystem der messbaren Mengen bilden.

Satz 12.9. *Jeder zählbar unendliche Durchschnitt von σ -Algebren ist wieder eine σ -Algebra.*

Beweis. Proof by trying every necessary condition and realizing it works. □

Definition 12.10. Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \}$$

die von \mathcal{E} **erzeugte** σ -Algebra.

$\sigma(\mathcal{E})$ ist in jeder Sigma-Algebra, welche \mathcal{E} enthält, enthalten, also ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ -Algebra, welche \mathcal{E} enthält.

Einige Beispiele für wichtige σ -Algebren:

1. Ist $E \subseteq X$ und $\mathcal{E} = \{E\}$, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$
2. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, also \mathcal{O} das System der offenen Mengen. Die von \mathcal{O} erzeugte σ -Algebra heißt **Borel- σ -Algebra** $\mathcal{B}(\mathcal{O})$, und ihre Elemente heißen **Borelmengen**. Im Fall des \mathbb{R}^n mit der kanonischen Topologie schreiben wir auch \mathcal{B}^n .
3. Sei X eine beliebige nichtleere Menge, \mathcal{C} eine σ -Algebra auf einer Menge Y und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. So ist

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{B \subseteq X : f(B) \in \mathcal{C}\}$$

eine σ -Algebra.

- 3.1 Sei $X \subseteq Y$ und sei \mathbb{C} eine σ -Algebra auf Y . So nennen wir die durch die Identitätsabbildung $\text{id} : X \rightarrow Y, x \rightarrow x$ induzierte σ -Algebra

$$\mathcal{C} \upharpoonright_X := \text{id}^{-1}(\mathcal{C}) = \{\text{id}^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\} = \{X \cap A \mid A \in \mathcal{C}\}$$

auch die **Spur- σ -Algebra auf X** oder die **von \mathcal{C} auf X induzierte σ -Algebra**.

Proposition 12.11. *Es ist konsistent mit ZF (Also der Standardaxiomatik der Mengenlehre, ausgenommen das Auswahlaxiom), dass jede Menge $M \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine Borelmenge ist.*

Somit sind Existenzbeweise von Mengen, welche nicht Borel sind, in der Regel nichtkonstruktive Beweise, welche auf Feinheiten der Mengenlehre aufbauen. Das berühmteste Beispiel sind die sogenannten Vitalimengen, welche auch nach unseren späteren Verfeinerungen des Maßbegriffs noch Probleme bleiben werden.

Definition 12.12. Eine **Vitalimenge** ist eine Teilmenge $V \subset [0, 1]$, sodass für jede reelle Zahl r genau eine Zahl $v \in V$ enthalten ist, sodass $v - r \in \mathbb{Q}$.

Proposition 12.13. *Wird das Auswahlaxiom angenommen, existieren Vitalimengen.*

Beweisskizze. Die Rationalen Zahlen \mathbb{Q} bilden eine normale Untergruppe der reellen Zahlen \mathbb{R} . Somit können wir die Quotientengruppe \mathbb{R}/\mathbb{Q} bilden.

\mathbb{R}/\mathbb{Q} ist überabzählbar. Die Elemente von \mathbb{R}/\mathbb{Q} sind disjunkte Mengen reeller Zahlen, welche die Form $\{r + \mathbb{Q} \mid r \in \mathbb{R}\}$ haben. Da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} ist, ist auch jede Äquivalenzklasse dicht in \mathbb{R} .

Durch das Auswahlaxiom können wir nun aus jeder Äquivalenzklasse ein Element wählen, welches in $[0, 1]$ liegt. Wir erhalten eine Vitalimenge. "□"

Proposition 12.14. *Vitalimengen sind nicht Borel.*

Ein Beweis folgt (hoffentlich -w-) später.

Nun fürs Erste zurück zu σ -Algebren.

Satz 12.15. *Sei X eine Menge und seien $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ Mengensysteme. So gilt:*

$$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right)$$

Beweis. Es gilt $\mathcal{E}_i \subseteq \sigma(\mathcal{E}_i)$, also auch $\sigma(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i) \subseteq \sigma(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i))$.

Umgekehrt gilt

□

Chapter 13

Integrationstheorie

Appendix A

Sammlung von Reihen und ihren Grenzwerten

A.1 Geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Also für $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

A.2 Standardbeispiel für Teleskopsummen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)^* \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

* Die Umformung der Brüche funktioniert folgendermaßen:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

A.3 Wichtige Taylorreihen

A.3.1 Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right)$$

A.3.2 Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\end{aligned}$$

Aus diesen Reihen folgt direkt die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$:

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x)\end{aligned}$$

A.3.3 Logarithmus

Da $\ln(x)$ eine Singularität am Punkt $x = 0$ hat, Entwickeln wir stattdessen am Punkt $x = 1$ und erhalten:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Appendix B

Sammlung von Stammfunktionen

B.1 Inverse Trigonometrie

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \arccos(x) &= - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \arctan(x) &= \int \frac{1}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

Für die Herleitung sind die Ableitungsformel für Umkehrfunktionen und die Identität

$$\begin{aligned}\sin(x)^2 + \cos(x)^2 &= 1 \\ \implies \sin(x) &= \sqrt{1 - \cos(x)^2}, \quad \cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}\end{aligned}$$

nötig.

B.2 Hyperbolische Trigonometrie

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}$$