

MITSCHRIEB

Numerik

Emma Bach

Basierend auf:

Vorlesungen Numerik I + II von
Prof. Dr. Patrick DONDL

2025-11-03

Inhalt

1	Aufgabenstellung	2
2	Numerische Lineare Algebra	4
2.1	Matrixfaktorisierung	4
2.1.1	Dreiecksmatrizen	4
2.1.2	LU -Zerlegung	4
2.1.3	Matrixnormen.....	9
2.1.4	Konditionszahl.....	11

Chapter 1

Aufgabenstellung

In der Numerik beschäftigt man sich mit der praktischen Berechnung von Lösungen mathematischer Probleme.

Beispiel 1.1. Berechne $\int_0^1 e^{-x^2} dx$!

Beispiel 1.2. Berechne $\sin(20)$!

Beispiel 1.3. Berechne $\sqrt{753}$!

Beispiel 1.4. Berechne $\min_{x \in [0,1]} F(x)$, für eine geeignete Funktion F !

Beispiel 1.5. Berechne x , sodass $f(x) = 0$!

Beispiel 1.6. Berechne $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $Ax = b$!

Definition 1.7. Eine Mathematische Aufgabe in der Numerik besteht im Finden einer Lösung von

$$F(x, d) = 0$$

für gegebenes Datum d und gegebene Funktion F .

Typischerweise können in akzeptabler Zeit keine exakten Lösungen gefunden werden, sondern nur Approximationen. Insbesondere stehen statt den vollen Mengen \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} etc. auch nur endlich viele **Maschinenzahlen** zur Verfügung - arbiträre reelle Zahlen benötigen unendlich viel Speicher! Rechenoperationen sind dementsprechend fehlerbehaftet, es gibt Rundungsfehler. Außerdem gibt es in reellen Anwendungen oft **Modellfehler** und **Datenfehler**.

Eine Grundlegende Idee in der Numerik ist es deshalb, eine gute Balance zwischen Exaktheit und Aufwand der Berechnung zu finden.

Beispiel 1.8. Die Berechnung der Determinante einer Matrix mittels Laplaceschem Entwicklungssatz benötigt $O(n!)$ Rechenoperationen. Die Determinante mit diesem Verfahren zu berechnen, dauert sehr viel länger, als das Universum alt ist.

Besser: Matrix (approximativ) auf Dreiecksgestalt bringen und die Diagonalelemente multiplizieren.

Definition 1.9. Eine Mathematische Aufgabe heißt **wohlgestellt**, wenn zu geeigneten Daten d eindeutige Lösungen x existieren, und diese stetig von d abhängt. Andernfalls ergibt die Suche nach einer numerischen Lösung wenig Sinn. Für wohlgestellte Probleme existiert eine Lösungsfunktion φ , sodass $x = \varphi(d)$ das Problem löst, d.h. $f(\varphi(d), d) = 0$.

Definition 1.10. Ein numerischer Algorithmus zur näherungsweisen Lösung einer wohlgestellten Aufgabe φ ist eine Abbildung $\tilde{\varphi}$, die durch Hintereinanderausführung möglicherweise fehlerbehafteter elementarer Rechenoperationen definiert ist, also

$$\tilde{\varphi} = f_j \circ f_{j-1} \circ \dots \circ f_1$$

Definition 1.11. Der **Aufwand** eines Verfahrens $\tilde{\varphi}$ ist die Anzahl der benötigten elementaren Rechenschritte. Typischerweise interessiert uns nicht die exakte Anzahl an Schritten, sondern nur die Größenordnung.

Proposition 1.12. *Das Gaußverfahren hat Aufwand $\mathcal{O}(n^3)$.*

Chapter 2

Numerische Lineare Algebra

2.1 Matrixfaktorisierung

2.1.1 Dreiecksmatrizen

Definition 2.1. Eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **untere Dreiecksmatrix**, falls $\forall i < j : l_{ij} = 0$.

Definition 2.2. Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls U^\top eine untere Dreiecksmatrix ist.

Definition 2.3. Eine Dreiecksmatrix heißt **normalisiert**, falls alle ihre Diagonaleinträge 1 sind.

Definition 2.4. Eine Matrix heißt **regulär**, wenn sie invertierbar ist.

Lemma 2.5. *Die quadratischen oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen bilden unter Matrixmultiplikation eine Gruppe.*

Lineare Gleichungssysteme mit regulärer Dreiecksmatrix lassen sich leicht lösen. Sei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Wir berechnen $x \in \mathbb{R}^n$ folgendermaßen:

1. for $i = n : -1 : 1$:

$$(a) \quad x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) \cdot \frac{1}{u_{ii}}$$

2. end.

Der Aufwand dieses Verfahrens ist $\mathcal{O}(n^2)$. Ein analoger Algorithmus existiert für untere Dreiecksmatrizen.

2.1.2 LU-Zerlegung

Falls für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Zerlegung $A = LU$ in eine untere Dreiecksmatrix U und eine obere Dreiecksmatrix L gegeben ist, so lässt sich das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in zwei Schritten lösen:

1. Löse $Ly = b$.

2. Löse $Ux = y$.

Definition 2.6. Eine Faktorisierung $A = LU$ mit unterer Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und oberer Dreiecksmatrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **LU-Zerlegung** von A . Die Zerlegung heißt **normalisiert**, falls L normalisiert ist.

Satz 2.7. Für jede reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:

1. Es existiert eine eindeutige normalisierte LU-Zerlegung.
2. Alle Untermatrizen $A_k = (a_{ij})_{(i,j) \in (1, \dots, k)^2}$ sind regulär.

Beweis.

→ Ist A regulär, so sind auch L und U regulär. Damit sind von L und U alle Diagonaleinträge nicht null. Somit sind auch die Untermatrizen L_k und U_k regulär, somit auch die Untermatrizen $A_k = L_k U_k$.

← Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Sei nun angenommen, die Aussage gelte für Matrizen der Größe $(n-1) \times (n-1)$. Damit existieren Matrizen L_{n-1}, U_{n-1} , sodass $A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$ eine normalisierte LU-Zerlegung ist. Seien nun $\begin{pmatrix} b \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ die letzte Spalte und (c^\top, a_{nn}) die letzte Zeile von A . Die Aussage ist bewiesen, wenn geeignete $l, u \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $r \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ c^\top & a_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ l^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} & u \\ 0 & r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{n-1} U_{n-1} & L_{n-1} u \\ (U_{n-1}^\top l)^\top & l^\top u + r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & L_{n-1} u \\ (U_{n-1}^\top l)^\top & l^\top u + r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir brauchen also $L_{n-1} u = b$, $U_{n-1}^\top l = c$, und $a_{nn} = l^\top u + r$. Durch Regularität von L_{n-1} und U_{n-1} existieren eindeutige Lösungen u, l , der ersten beiden Gleichungen, somit ist auch r festgelegt.

□

Korollar 2.8.

- Jede positiv definite Matrix besitzt eine eindeutige LU-Zerlegung.
- Jede strikt diagonaldominante Matrix, also jede Matrix A mit $\sum_{j \in 1, \dots, n, i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ besitzt eine eindeutige LU-Zerlegung.
- Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt keine LU-Zerlegung.

- Die Nullmatrix besitzt zwar LU-Zerlegungen, diese sind aber nicht eindeutig.

Lemma 2.9. Falls $A = LU$ eine normalisierte LU-Zerlegung von A ist, so gilt

$$a_{ik} = u_{ik} + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk}$$

und

$$a_{ki} = l_{ki} u_{ii} + \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} u_{ji}$$

Beweis. Es gilt $l_{ij} = 0$ für $j > i$ und $l_{ii} = 1$. Es gilt außerdem $u_{ij} = 0$ für $j < i$. Die Formeln folgen direkt aus der Definition des Matrixprodukts. \square

Diese Formeln lassen sich für $i \leq k$ nach u_{ik} auflösen und für $k > i$ nach l_{ki} auflösen. Wir erhalten folgenden Algorithmus:

```

1: for  $i = 1, i \leq n, i++$  do
2:   for  $k = i, k \leq n, k++$  do
3:      $u_{ik} \leftarrow a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk}$ 
4:   end for
5:   for  $k = i + 1, k \leq n, k++$  do
6:      $l_{ki} \leftarrow \frac{1}{u_{ii}} \cdot \left( a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} u_{ji} \right)$ 
7:   end for
8: end for

```

Proposition 2.10. Der Rechenauftrag dieses Algorithmus beträgt $O(n^3)$.

Proposition 2.11. Es ist nicht mehr Speicher nötig, als sowieso für A benötigt wird. Die Einträge von A können im Speicher einfach sukzessiv durch die jeweiligen Einträge von L bzw. U ersetzt werden.

Definition 2.12. Ein numerisches Problem φ heißt **schlecht Konditioniert**, wenn kleine Unterschiede in der Eingabe zu großen Unterschieden in der korrekten Lösung führen, also wenn

$$\frac{|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)|}{|\varphi(x)|} \gg \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

Ansonsten heißt die Aufgabe **gut konditioniert**.

Definition 2.13. Ein Verfahren $\tilde{\varphi}$ heißt **numerisch instabil**, wenn eine Störung \tilde{x} existiert, sodass der durch Rundungsfehler verursachte relative Fehler erheblich größer ist als der rein durch die Störung verursachte Fehler.

Beispiel 2.14. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine kleine Störung in den Daten b des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ führt zu Problemen der Größenordnung $1/\varepsilon$!!! So können wir keine Numerik machen!!! Dieses Problem ist **schlecht konditioniert**.

Beispiel 2.15. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

So haben wir kein Problem bei der Berechnung von $A^{-1}b$ - die Aufgabe ist gut konditioniert. Sagen wir nun, wir versuchen, das Gleichungssystem effizient durch LU -Zerlegung zu lösen. Wir sehen, LU -Zerlegung von A ist jedoch gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

und die Berechnung von $L^{-1}b$ und $U^{-1}b$ führt nun wieder zu großen Rundungsfehlern. Aus unserer Idee entsteht also ein **instabiler Algorithmus**.

Satz 2.16. Cholesky-Zerlegung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. So existiert eine eindeutige untere Dreiecksmatrix L , sodass

$$A = LL^{\top}.$$

und $l_{ii} > 0$

Beweis. Für $n = 1$ ist die Suche durch $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ erledigt.

Die Untermatrix A_{n-1} ist immer ebenfalls positiv definit und symmetrisch. Sei also $A_{n-1} = L_{n-1}L_{n-1}^{\top}$. Wir setzen $\begin{pmatrix} b \\ a_{nn} \end{pmatrix}^{\top}$ als die letzte Zeile von A . Dann

müssen wir zum Beweis des Satzes einen Vektor $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ und ein $\alpha \geq 0$ finden, sodass

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^\top & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1}^\top & c \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & L_{n-1}c \\ (L_{n-1}c)^\top & \alpha^2 + c^\top c \end{pmatrix}$$

Dies ist nach Annahme äquivalent zu $L_{n-1}c = b$ und $c^\top c + \alpha^2 = a_{nn}$

Da L regulär ist existiert ein eindeutiges c , welches die erste Gleichung erfüllt. Es gilt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c^\top & \alpha \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} L_{n-1}^\top & c \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 (\det L_{n-1})^2$$

Da $\det A > 0$ und $\det L_{n-1} \geq 0$ bekommen wir $\alpha > 0$, sodass $c^\top c + \alpha^2 = a_{nn}$ ebenfalls eine eindeutige positive Lösung hat. \square

Lemma 2.17. Für $A = LL^\top$ gilt:

$$a_{ik} = \begin{cases} l_{ik}l_{kk} + \sum_{j=i}^{k-1} l_{ij}l_{kj} & i > k \\ l_{kk}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 & i = k \end{cases}$$

Beweis. Matrixmultiplikation ohne triviale Summanden. \square

Cholesky-Zerlegung:

```

1: for  $k = 1, i \leq n, i++$  do
2:    $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$ 
3:   for  $i = k+1, i \leq n, i++$  do
4:      $l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj}) \frac{1}{l_{kk}}$ 
5:   end for
6: end for
```

Proposition 2.18. Der Aufwand ist wieder $\mathcal{O}(n^3)$, allerdings mit kleineren Konstanten.

Proposition 2.19. Lösung von $Ax = b$ für $A = LL^\top$ wie gehabt durch $Ly = b$ und $L^\top x = y$.

2.1.3 Matrixnormen

Bekannt sind die üblichen Vektornormen auf \mathbb{R}^n , insbesondere

$$\|\vec{v}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |v_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\|\vec{v}\|_\infty = \max v_j$$

Für $1 \leq p, q \leq \infty$ existiert eine Konstante c_{pqn} , sodass

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{c_{pqn}} \|\vec{v}\|_p \leq \|\vec{v}\|_q \leq c_{pqn} \|\vec{v}\|_p$$

Definition 2.20. Für Normen $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ und $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m definieren wir die Operatornorm auf $\text{hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m \times n}$ als

$$\|A\|_{op} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m}$$

Lemma 2.21. Die Operatornorm ist eine Norm.

- Beweis.*
1. Skalare können aus der inneren Norm und dem Supremum wie nötig herausgezogen werden.
 2. Das Supremum ist über einer Menge positiver Zahlen, falls $x \neq \vec{0}$ gibt es mindestens einen Vektor größer 0.
 3. Dreiecksungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$.

□

Lemma 2.22.

$$\|A\|_{op} = \inf \{c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \|Ax\| \leq c\|x\|\}$$

Lemma 2.23. Für $A \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|Ax\| = \|A\|_{op}$ folgt $\|x\| = 1$

Korollar 2.24. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Ax\| \leq \|A\|_{op} \|x\|$

Lemma 2.25. Es gibt Vektoren, sodass die Matrixnorm ihr inf und ihren sup annimmt.

Beweis. Es handelt sich um eine stetige Funktion auf einem Kompaktum. □

Beispiel 2.26. 1. Die **Spaltensummennorm** $\|\cdot\|_1$ ist eine Operatornorm:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

2. Die **Zeilensummennorm** $\|-\|_\infty$ ist eine Operatornorm:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

3. Die **Spektralnorm** $\|-\|_2$ ist eine Operatornorm:

$$\|A\|_2 = \rho(A^\top A) = (\max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A^\top A\})^{\frac{1}{2}}$$

Lemma 2.27. Für $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine beliebige Operatornorm $\|-\|$ gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|ABx\| &\leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\| \\ \implies \|AB\| &\leq \|A\|\|B\| \end{aligned}$$

□

Lemma 2.28. Falls die Normen in Bild und Urbild gleich sind, gilt

$$\|E_n\| = 1$$

Lemma 2.29. Falls die Normen in Bild und Urbild gleich sind, gilt für A symmetrisch mit Eigenwert λ

$$\|A\| \geq |\lambda|$$

Beispiel 2.30. Die Frobeniusnorm $\|-\|_{\mathcal{F}}$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist gegeben durch

$$\|A\|_{\mathcal{F}} = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemma 2.31. Für $n > 1$ ist die Frobeniusnorm keine Operatornorm!

Beweis.

$$\|E_n\| = \sqrt{n}$$

Normieren wir die Norm, gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Wobei 1 ein Eigenwert ist, was unseren vorherigen Lemmata widerspricht. □

2.1.4 Konditionszahl

Satz 2.32. Sei $\|-\|$ eine Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und seien $x, x', b, b' \in \mathbb{R}^n$, sodass $Ax = b$, $Ax' = b'$. Dann gilt:

$$\frac{\|x - x'\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - b'\|}{\|b\|}$$

Satz 2.33.

$$\|x - x'\| = \|A^{-1}(b - b')\| \leq \|A^{-1}\| \|b - b'\|$$

und

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Es folgt:

$$\frac{\|x - x'\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|b - b'\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|b - b'\|}{\|A^{-1}\| \|b\|}$$

Definition 2.34. Die **Konditionszahl** einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezüglich der durch $\|-\|$ auf \mathbb{R}^n induzierten Operatornorm ist gegeben durch:

$$\text{cond}_{\|-\|}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Wir schreiben oft cond_p statt $\text{cond}_{\|-\|_p}$.

Lemma 2.35. $\text{cond}(A) \geq 1$

Lemma 2.36. Für A symmetrisch mit Eigenwerten λ_i gilt

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_j|}{\min |\lambda_j|}$$

Beispiel 2.37.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \pm \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Also $\lambda_1 \approx 2 + \frac{\varepsilon}{2}$ und $\lambda_2 \approx \frac{\varepsilon}{2}$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht also die Konditionszahl gegen unendlich.

Satz 2.38. Für A symmetrisch und positiv definit mit Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$ gilt

$$\text{cond}_2(L) = \text{cond}_2(L^\top) = \sqrt{\text{cond}(A)}$$

Also kann das Problem, welches bei der LU -Zerlegung auftrat, bei der Cholesky-Zerlegung nicht vorkommen.