Mitschrieb

Proseminar Elementare Zahlentheorie

Emma Bach

2025-11-20

Inhalt

Chapter 1

Kettenbrüche II

1.1 Wiederholung

Definition 1.1.1. Ein regulärer Kettenbruch ist ein Bruch der Form

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$$

Proposition 1.1.2. *Es gilt folgende Rekursionsformel:*

$$p_{-2} := 0, p_{-1} := 1, p_i = ap_{i-1} + p_{i-2}$$
$$q_{-2} := 1, p_{-1} := 0, q_i = aq_{i-1} + q_{i-2}$$

Proposition 1.1.3. *Es gilt:*

1. *Für $i \geq -1$ gilt $p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = (-1)^i$*

2. *Für $i \geq 0$ gilt*

$$\alpha - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_i(q_i\alpha_{i+1} + q_{i-1})}$$

1.2 Neues

Definition 1.2.1. Eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ heißt **beste Näherung** einer reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $c \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{N}_1$ mit $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ und $d \leq b$

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$$

gilt.

Das Ziel des Vortrags ist, zu zeigen, dass jede beste Näherung von $\alpha \in \mathbb{R}$ auch ein Näherungsbruch von α ist.

Lemma 1.2.2.

1. *Sei* $\alpha = \frac{p_k}{q_k} \in \mathbb{Q}$. *Dann hat man für alle* $c \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}_1$ *die Ungleichung*

$$|q_k\alpha - p_k| \leq |d\alpha - c|$$

mit Gleichheit für $\frac{c}{d} = \frac{p_k}{q_k}$.

2. *Gilt* $q_k > 1$ *für* $\alpha \in \mathbb{Q}$, *so hat man für alle* $c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}$ *mit* $d < q_k$ *die Ungleichung* $|q_{k-1}\alpha - p_{k-1}| \leq |d\alpha c|$, *mit Gleichheit genau dann, wenn* $(c, d) = (p_{k-1}, q_{k-1})$ *oder* $(c, d) = (p_k - p_{k-1}, q_k - q_{k-1})$ *ist.*

3. *Ist* $\alpha \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq k-2$ *oder* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *und nicht gleichzeitig* $i = 0$ *und* $a_1 = 1$, *dann gilt für alle* $c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}_1$ *mit* $d < q_{i+1}$ *die Ungleichung*

$$|q_i\alpha - p_i| \leq |d\alpha - c|$$

mit Gleichheit genau für $c = p_i, d = q_i$.

Beweis.

1. Da $\alpha \in \mathbb{Q}$ gilt auch $\alpha = \frac{p_k}{q_k}$, also folgt $0 = |q_k\alpha - p_j| \leq |d\alpha - c|$.

2. Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$p_i x + p_{i+1} y = c,$$
$$q_i x + q_{i+1} y = d$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} p_i & p_{i+1} \\ q_i & q_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem ist Lösbar, wenn die Determinante nicht Null ist, also $p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} \neq 0$. Dass dies gilt, wurde bereits letzte Woche gezeigt. Insbesondere existieren die Lösungen gemäß der Kramerschen Regel sogar in $\mathbb{Z}$. Es gilt außerdem $x \neq 0$, da sonst $q_{i+1} \mid d$ folgen würde, was unserer Annahme $d \leq q_{i+1}$ widerspricht.

Durch Umstellen des Gleichungssystems folgt

$$x(q_{k-1}\alpha - p_{k-1}) = d\alpha - c.$$

Da $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ folgt $|q_{k-1}\alpha - p_{k-1}| \leq d\alpha - c$.

3. In diesem Fall ist $c = \lambda p_i$ und $d = \lambda q_i$ $\lambda \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, da $q_i\alpha - p_i \neq 0$ und $|q_i\alpha - p_i| < \lambda|q_i\alpha - p_i| = |d\alpha - c|$.

Sei nun also (c, d) von allen $(\lambda p_i, \lambda q_i)$ verschieden. Dann gilt für die Lösung des LGS $xy < 0$, denn $y = 0$ führt zu $\frac{p_i}{q_i} = \frac{c}{d}$ und $xy > 0$ ist im Widerspruch zu $0 < d < q_{i+1}$ und der Gleichheit in 1).

Nach Wiederholung haben $q_i\alpha - p_i$ und $q_{i+1}\alpha - p_{i+1}$ unterschiedliche Vorzeichen. Da $0 \leq i \leq k-2$ sind auch beide Ungleich 0.

Insgesamt folgt, dass $x(q_i\alpha - p_i)$ und $y(q_{i+1}\alpha - p_{i+1})$ gleiches Vorzeichen haben. Dementsprechend gilt Gleichheit in der folgenden Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |d\alpha - c| &= |x(q_i\alpha - p_i) + y(q_{i+1}\alpha - p_{i+1})| \\ &= |x||x(q_i\alpha - p_i)| + |y||(q_{i+1}\alpha - p_{i+1})| \\ &> |q_i\alpha - p_i| \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.3. *Jede beste Näherung wird als Näherungsbruch angenommen.*

Beweis. Sei $\frac{a}{b}$ eine beste Näherung, aber $\frac{a}{b} \neq \frac{q_i}{p_i}$ für alle i.

Fall 1: Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $q_k \leq b$. Wähle $c = p_n, d = q_n$. Dann gilt $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $d \leq b$ und nach Lemma 1 folgt

$$0 = |q_k\alpha - p_k| = |d\alpha - c| < |b\alpha - c|,$$

also war $\frac{a}{b}$ keine beste Näherung.

Fall 2: Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $q_k > b$ oder $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Fixiere i, sodass $q_i \leq b \leq q_{i+1}$. Man erhält $i < k$ und

$$1 < q_{i+1} = a_i q_i + q_{i-1},$$

also $i \geq 1$ oder $a_i > 1$. Nach Lemma 2 und Lemma 3 und $b < q_{i+1}$ gilt

$$|q_i\alpha - p_i| \leq |b\alpha - a|$$

Die Wahl von $c = p_i$ und $d = q_i$ liefert dann wieder $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $d \leq b$, und

$$|d\alpha - c| < |b\alpha - c|,$$

also war $\frac{a}{b}$ wieder keine beste Näherung.

□

Satz 1.2.4. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

dann ist $\frac{p}{q}$ eine beste Näherung von α, und somit insbesondere ein Näherungsbruch.

Beweis. Angenommen, $\frac{p}{q}$ wäre keine beste Näherung. Dann gibt es $c \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ mit $d \leq q$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{c}{d}$, sodass

$$|d\alpha - c| \leq |q\alpha - c|$$

Nach Vorraussetzung gilt

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{2q},$$

also auch

$$|d\alpha - c| < \frac{1}{2q}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{qb} &\leq \frac{p}{q} - \frac{c}{d} \\ &\leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| + \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \\ &\leq \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2qd} \end{aligned}$$

Es folgt $\frac{1}{qd} < \frac{q+d}{2q^2d}$, also $2q < d + q$, also $q < d$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Satz 1.2.5. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Angenommen, der 0-te Näherungsbrüchen von α hat nicht die Form $[0, 2]$, $[a_0, 1, a_2, \ldots, a_k]$, oder $[a_0, 1, a_2, \ldots]$. Dann ist jeder Näherungsbruch von α eine beste Näherung.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für $\frac{p_i}{q_i}$ ($i \geq 1$ in den Ausnahmefällen) für alle $c \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ mit $\frac{c}{d} \neq \frac{p}{q}$ der Satz gilt.

Fall 1: Sei $\alpha \in \mathbb{Q}, i = k$. Dann gilt der Satz nach Lemma 1.

Fall 2: Sei $\alpha \in \mathbb{Q}, i = k - 1$. Dann gilt nach Vorraussetzung $d \leq q_i = q_{k-1}$, also gilt nach Lemma 2 $|q_{k-1}\alpha.p_{k-1}| \leq |d\alpha - c|$.

Da nicht $k = 1$, $\alpha_k = 2$ gilt, folgt $q_k > 2q_{k-1}$. Es kann also keine Gleichheit eintreten, da $(c, d) \neq (p_{k-1}, q_{k-1})$ und $(c, d) \neq (p_k - p_{k-1}, q_k - q_{k-1})$, da $d \leq q_{k-1} < q_k - q_{k-1}$.

Fall 3: Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 \leq i \leq k - 2$ oder $\alpha \in \mathbb{R} \setminus Q$ nach Vorraussetzung ist $d \leq q_i \leq q_{i+1}$ und nach Ausnahmen ist nicht gleichzeitig $i = 0$ und $a_1 = 1$. Also folgt $|q_i\alpha - p_i| < |d\alpha - c|$, da $c \neq p_i$, $\alpha \neq q_i$.

□