

MITSCHRIEB

Algebra und Zahlentheorie

Emma Bach

Basierend auf:

Vorlesung Algebra und Zalenthеorie von
Prof. Dr. Wolfgang SOERGEL

2025-10-30

Inhalt

1	Primzahlen	2
2	Gruppen	6

Chapter 1

Primzahlen

Definition 1.1. $H \subseteq \mathbb{Z}$ heißt Untergruppe von \mathbb{Z} , wenn

$$n \in H \implies -n \in H,$$

und

$$m, n \in H \implies m + n \in H$$

Satz 1.2. Es gibt eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\leftrightarrow \{\text{Untergruppen von } (\mathbb{Z}, +)\} \\ n &\mapsto n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe. Entweder $H = \{0\} = 0\mathbb{Z}$, oder $H \neq \{0\}$.

Sei also $H \neq \{0\}$. Dann gibt es ein kleinstes Element m der Menge $\{n \in H \mid n > 0\}$. Aus den Untergruppenaxiomen folgt $m\mathbb{Z} \subseteq H$. Gleichzeitig kann kein Element $n \notin m\mathbb{Z}$ in H enthalten sein, denn sonst wäre auch $r = n \bmod m \neq 0$ in H enthalten. Dann hätten wir aber $r < m$, was ein Widerspruch ist.

Als Umkehrfunktion wählen wir das kleinste positive Element von H . □

Definition 1.3. Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, die nicht als Produkt zweier Zahlen $a, b < p$ geschrieben werden kann.

Satz 1.4. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. Angenommen, es gäbe endlich viele Primzahlen. Sei also p_1, \dots, p_r eine

vollständige Liste aller Primzahlen. Dann wäre aber

$$q = 1 + \prod_{i=1}^r p_i$$

durch keine Primzahl teilbar, also selbst eine Primzahl. Widerspruch!

□

Satz 1.5. *Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden:*

$$n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \quad (r \geq 0)$$

Beweis. Der Fall $n = 1$ gilt per Konvention durch das leere Produkt.

Sei $n \geq 2$ gegeben. Es gilt entweder:

- n ist eine Primzahl.
- n ist von der Gestalt $n = a \cdot b$, mit $a, b < n$.

Der Satz folgt durch Induktion über die entstehende Baumstruktur - nach Induktionsannahme haben a und b eine Primfaktorzerlegung. Also hat auch n eine Primfaktorzerlegung. □

Definition 1.6. Der **größte gemeinsame Teiler** von $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ ist die Zahl:

$$\text{ggT}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a \wedge d \mid b\}$$

Satz 1.7. Über den größten gemeinsamen Teiler: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. So gibt es $r, s \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{ggT}(a, b) = ra + sb$$

Gegeben $d \mid a$ und $d \mid b$ gilt außerdem $d \mid \text{ggT}(a, b)$.

Beweis. Die Menge

$$H := \{ra + sb \mid r, s \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$$

bildet eine Untergruppe von \mathbb{Z} , ist also eine Gruppe der Form $m\mathbb{Z}$ mit $m > 0$. Da $a \in m\mathbb{Z}$ und $b \in m\mathbb{Z}$ ist m ein gemeinsamer Teiler. Da m ein Element in H ist existiert außerdem per Definition eine Darstellung $m = r'a + s'b$. Es gilt also

$$(d \mid a) \wedge (d \mid b) \implies d \mid r'a + s'b \implies d \mid m.$$

Aus $(d \mid a) \wedge (d \mid b) \implies d \mid m$ folgt nun, dass jeder Teiler von a und b m teilt,

also kann es keinen Teiler von a und b geben, welcher größer als m ist. \square

Die Existenz der Darstellung $\text{ggT}(a, b) = ra + sb$ ist auch als das **Lemma von Bézout** oder die **Bézoutsche Identität** bekannt.

Lemma 1.8. Lemma von Euklid: Sei p eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$p \mid ab \implies (p \mid a) \vee (p \mid b)$$

Beweis. Es reicht zu Zeigen:

$$(p \nmid a) \wedge (p \mid ab) \implies p \mid b$$

Aus $p \nmid a$ folgt $\text{ggT}(p, a) = 1$. Nach dem Lemma von Bézout können wir also 1 darstellen als:

$$1 = rp + sa$$

also:

$$b = rpb + sab$$

Es gilt trivial $p \mid prb$, außerdem gilt per Annahme $p \mid ab$. Es folgt $p \mid rpb + sab = b$. \square

Satz 1.9. Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung im Ring \mathbb{Z} : Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und

$$n = \prod_{i=1}^r p_i = \prod_{i=1}^s q_i$$

wobei alle q_i und r_i Primzahlen sind. So gilt $r = s$ und es gilt eine Permutation $\sigma \in S_r$ mit $p_i = q_{\sigma(i)}$.

Äquivalente Formulierungen:

- Falls die p_i und q_i Aufsteigend oder Absteigend sortiert sind, gilt $\forall i : p_i = q_i$
- Es existiert eine Bijektion zwischen endlichen Multimengen von Primzahlen und $\mathbb{N}_{\geq 1}$.

Beweis. Per Induktion folgt aus dem Lemma von Euklid schnell:

$$p_1 \mid p_1 \implies \bigvee_{i=1}^s p_1 \mid q_i$$

Also existiert ein q_i mit $p_1 = q_i$. Teilen wir nun beide Seiten durch p_1 , folgt die Aussage durch die Induktionsannahme. \square

Definition 1.10. Euklidischer Algorithmus

Chapter 2

Gruppen

Definition 2.1.

1. Eine Menge M mit Verknüpfung $\top : M \times M \rightarrow M$ heißt **Magma**.
2. Ein Magma mit neutralem Element heißt **unitäres Magma**.
3. Ein unitäres Magma mit assoziativer Verknüpfung heißt **Monoid**.
4. Ein Monoid mit inversen Elementen heißt **Gruppe**.
5. Eine Gruppe mit kommutativer Gruppe heißt **kommutative Gruppe** oder **abelsche Gruppe**.

Beispiel 2.2.

1. $(\mathbb{Z}, -)$ ist ein nichtunitäres Magma.
2. ?
3. $(\mathbb{N}, +)$ und (\mathbb{N}, \cdot) sind Monoide.
4. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Satz 2.3. Das neutrale Element einer Gruppe ist eindeutig.

- Es gibt keine Gruppe mit 0 Elementen, da die Leere Menge kein neutrales Element hat.
- Es gibt genau eine Gruppe mit einem Element, die Gruppe $\{e\}$.

Satz 2.4. Es gibt genau eine Gruppe mit zwei Elementen, nämlich die Gruppe $\{e, a\}$, mit Verknüpfungstabelle:

	e	a
e	e	a
a	a	e

Beweis. Durch die Definition von e sind drei Teile der Tabelle schon eindeutig festgelegt. $a \cdot a = e$, da sonst a kein Inverses hätte. \square

Satz 2.5. Gilt für ein Gruppenelement $a \in G$ $a^2 = a$, so gilt $a = e$.

Beweis.

$$a = ae = aaa^{-1} = aa^{-1} = e$$

\square

Satz 2.6. Aus $a \cdot x = a \cdot y$ folgt $x = y$.

Beweis.

$$\begin{aligned} ax &= ay \\ a^{-1}ax &= a^{-1}ay \\ ex &= ey \\ x &= y \end{aligned}$$

\square

Es folgt, dass in einer Gruppentabelle in jeder Spalte und jeder Zeile kein Element doppelt vorkommen kann.

Korollar 2.7. Es gibt nur eine Gruppe mit drei Elementen, nämlich:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Satz 2.8. Es gibt zwei Gruppen mit vier Elementen, nämlich:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a
	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$\simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Definition 2.9. Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung

$$\varphi : (G, \top) \rightarrow (H, \perp)$$

mit

$$\varphi(a \top b) = \varphi(a) \perp \varphi(b)$$

Wir schreiben die Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach H als $\text{Grp}(G, H)$.

Satz 2.10. $\text{Grp}((\mathbb{Z}, +), G) \simeq G$

Beweis. Ordne jedem Gruppenelement g die Abbildung $\varphi(n) : g \rightarrow g^n$ zu. \square

Satz 2.11. Sind G und H Gruppen, so gilt $\text{Mag}(G, H) = \text{Mon}(G, H) = \text{Grp}(G, H)$.

Definition 2.12. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ einer Gruppe G heißt **Untergruppe**, wenn sie so mit einer Gruppenstruktur versehen werden kann, dass die Einbettungsabbildung $i : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Dies ist eine sehr allgemeine Definition, die analog für Untervektorräume, Untermagmas etc. funktioniert. In der Praxis verwendet man meistens folgendes Kriterium:

Satz 2.13. H ist genau dann eine Untergruppe, wenn $e \in H$ und wenn für jedes $a, b \in H$ auch $ab \in H$ und $a^{-1}, b^{-1} \in H$.

Satz 2.14. Satz von Lagrange: Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. So ist die Zahl der Elemente von H ein Teiler der Zahl der Elemente von G .

Der Beweis folgt nach einigen weiteren Definitionen und Sätzen.

Definition 2.15. Sei G eine Gruppe mit Untergruppe H . Wir definieren:

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \subseteq G$$

$$G/H = \{gH \mid g \in G\} \subseteq \mathcal{P}(G)$$

Lemma 2.16. Sei $h \in H$. Dann gilt $hH = H$.

Lemma 2.17. Je zwei Nebenklassen gH und $g'H$ sind entweder gleich oder disjunkt.

Aus diesen beiden Lemmas folgt $|G| = |G/H| \cdot |H|$, was den Satz von Lagrange impliziert.

Satz 2.18. Der Schnitt beliebig vieler Untergruppen bildet eine Untergruppe.

Definition 2.19. Sei G eine Gruppe und $T \subseteq G$ eine Teilmenge. Die **durch T erzeugte Untergruppe** $\langle T \rangle$ ist die kleinste Untergruppe, welche T enthält.

$\langle T \rangle$ besteht aus allen Elementen von G , welche durch beliebig häufige Anwendung von Inversionen und Gruppenoperationen entstehen kann, wobei wir die "leere Gruppenoperation" als e definieren (für den Fall $\langle \emptyset \rangle = \{e\}$.)

Satz 2.20. Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei A eine Untergruppe von G und B eine Untergruppe von H . So ist $\varphi(A)$ eine Untergruppe von H und $\varphi^{-1}(B)$ eine Untergruppe von G .

Satz 2.21. Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen: Sei $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Sei $\psi : G \rightarrow K$ ein Gruppenhomomorphismus, sodass $\ker \psi \supseteq \ker \varphi$. So existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\bar{\psi}$, sodass:

$$\psi = \bar{\psi} \circ \varphi$$

Also sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & \searrow \psi & \downarrow \exists! \bar{\psi} \\ & & K \end{array}$$

Beweis. Sei $\varphi(x) = \varphi(y)$, also $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(y))$. Dann gilt

$$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(1) = 1,$$

also $xy^{-1} \in \ker \varphi$, also $y \in x \cdot \ker \varphi$. Somit gilt

$$\varphi^{-1}(\varphi(g)) = g \cdot \ker \varphi.$$

Es gilt außerdem

$$\psi(g \cdot \ker \varphi) = \psi(g) \cdot \psi(\ker \varphi) = \varphi(g),$$

also ist ψ konstant auf den Fasern (also den Urbildern einzelner Elemente) von φ . Somit existiert ein $\bar{\psi}$ Aufgrund der "universellen Eigenschaft surjektiver Funktionen", welche noch nicht eingeführt wurde :), folgt die Existenz eines $\bar{\psi}$ mit den gefragten Eigenschaften.

Zu zeigen ist noch, dass $\bar{\psi}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wähle hierfür $g \in G, g' \in G$ und $\varphi(g) = h$ und $\varphi(g') = h'$. Dann gilt

$$\bar{\psi}(hh') = \bar{\psi}(\varphi(gg')) = \psi(gg') = \psi(g) \cdot \psi(g') = \bar{\psi}(h) \cdot \bar{\psi}(h')$$

□

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \varphi \swarrow & \downarrow \psi & \searrow \varphi \\ H & \dashrightarrow & K & \dashrightarrow & H \end{array}$$

Die "Moral" dieses Satzes: Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ wird durch $(G, \ker \varphi)$ "im wesentlichen eindeutig" festgelegt.

Die Frage ist nun, ob jede Untergruppe einer Gruppe G als Kern eines surjektiven Gruppenhomomorphismus festgelegt ist. Die Antwort auf diese Frage: Nein! Die einzigen Untergruppen, welche als solche Kerne auftreten, sind sogenannte **Normalteiler**.

Definition 2.22. Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $N \subseteq G$ heißt **Normalteiler**, falls

$$\forall g \in G : gN = Ng$$

Beispiel 2.23. Wir betrachten die Gruppe $Q \subset GL(2, \mathbb{R})$ aller linearen Abbildungen, welche ein Quadrat auf sich selbst abbilden. Prof. Soergel nennt diese Gruppe auch gerne die "Bierdeckelgruppe B ". Die Gruppe hat acht Elemente:

- Die Rotationen d_0, d_1, d_2 und d_3 um Vielfache von 90° ,
- die Spiegelungen s_x und s_y an den Koordinatenachsen,
- und die Spiegelungen s_+ und s_- an den Diagonalachsen.

Diese Gruppe ist nicht kommutativ! Zum Beispiel ist $d_1s_+ = s_y$, aber $s_+d_1 = s_x$ (Wir notieren die Elemente als Abbildungen, also wird links zuerst s_+ und dann d_1 angewandt).

Wir betrachten nun die Untergruppe $H = \langle s_+ \rangle$. So gilt $d_1H = \{s_y, d_1\}$, aber $Hd_1 = \{s_x, d_1\}$

Satz 2.24. Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist immer ein Normalteiler.

Beweis. Sei $\varphi : G \rightarrow H$. So ist $(\ker \varphi)x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x(\ker \varphi)$.

□

Satz 2.25. Für jeden Normalteiler $N \subseteq G$ gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ mit $\ker \varphi = N$.

Beweis. Wir wählen $H := G/N = \{xN : x \in G\}$. Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq G$ definieren wir $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ und erhalten eine assoziative Verknüpfung auf $\mathcal{P}(G)$. Für einen Normalteiler $N \subseteq G$ ist G/N unter dieser Verknüpfung stabil (geschlossen), denn durch Abuse of Notation folgt $xNyN = xyNN = xyN$. Unter dieser Verknüpfung wird G/N eine Gruppe mit neutralem Element $1N = N$ und $x^{-1}N = (xN)^{-1}$.

Dadurch wird dann $\varphi : G \rightarrow G/N$, $x \mapsto xN$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\ker \varphi = N$. \square

Beispiel 2.26. Die Menge $D \subsetneq Q$ der Drehungen eines Quadrats ist ein Normalteiler der vollen Symmetriegruppe Q .

Beweis. Sei s eine beliebige Spiegelung. So gilt $Ds = \{s_+, s_-, s_x, s_y\} = sD$. Einzelne Spiegelungen kommutieren also nicht mit einzelnen Gruppenelementen, es ist jedoch trotzdem eine Art "Kommutativität mit der Gruppe als Ganzes" vorhanden. \square

Die Menge der Drehungen ist des Weiteren gegeben als der Kern der Determinante, welche ein Gruppenhomomorphismus in die Gruppe mit zwei Elementen ist (genauer in die Gruppe $\{\pm 1, \cdot\}$).

Satz 2.27. Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. So induziert φ einen Isomorphismus $G/\ker \varphi \rightarrow \text{im } \varphi$.

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 5$. Gemäß Lagrange hat G nur die triviale Gruppe und sich selbst als Untergruppe. Sei $g \in G \setminus \{1\}$. So haben wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow G \\ n &\mapsto g^n\end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass das Bild von φ eine Untergruppe von G bildet. Da $g \neq 1$ handelt es sich nicht um die triviale Gruppe, also ist $G = \text{im } \varphi$.

$\ker \varphi \subsetneq \mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe, also existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\ker \varphi = \mathbb{Z}n$. Da G 5 Elemente hat, muss $n = 5$. Die einzige Gruppe mit 5 Elementen ist also $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Korollar 2.28. Ist p eine Primzahl, so ist jede Gruppe mit p Elementen isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Lemma 2.29. Sei $\pi : G \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. So ist $\pi(N)$ ein Normalteiler von H .

Satz 2.30. Noetherscher Isomorphiesatz: Sei G eine Gruppe und seien H und K Normalteiler. So ist H/K ein Normalteiler von G/K und die Komposition kanonischer Abbildungen $G \rightarrow G/K \rightarrow (G/K)/(H/K)$ induziert einen Isomorphismus $G/H \rightarrow (G/K)/(H/K)$

Definition 2.31. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Wir definieren die Ordnung eines Elements als:

$$\text{ord}(g) = \inf\{n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid g^n = e\}$$

Erinnerung: Das Infimum der leeren Menge ist ∞ , also gilt $\text{ord}(g) = \infty$ falls kein solches n existiert.

Proposition 2.32. Sei G eine Gruppe und $g \in G$.

1. $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$
2. $\langle g \rangle$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/(\text{ord}(g))\mathbb{Z}$, falls die Ordnung endlich ist, und zu \mathbb{Z} , falls die Ordnung unendlich ist.
3. Falls $\text{ord}(g) < \infty$, so gilt $g^n = e \Leftrightarrow \text{ord}(g) \mid n$

Definition 2.33. Sei G eine Gruppe. So heißt $|G|$ die **Ordnung** der Gruppe.

Satz 2.34. Sei $g \in G$ ein Element einer endlichen Gruppe. So ist $\text{ord}(g)$ ein Teiler von $|G|$.

Beweis. $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$. Nach Lagrange teilt die Größe der Untergruppe $\langle g \rangle$ die Größe der Gruppe G . \square

Im Allgemeinen gibt es aber nicht für jeden Teiler ein Element mit der jeweiligen Ordnung. Zum Beispiel fehlt bei jeder nicht zyklischen Gruppe bereits die Ordnung selbst. Wohl aber gilt:

Satz 2.35. Cauchy: Sei p eine Primzahl mit $p \mid |G|$. So gibt es ein $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = p$.

Ein Beweis folgt aber erst später.

Korollar 2.36. Sei $g \in G$ ein Element einer endlichen Gruppe. So gilt

$$g^{|G|} = e.$$

Beweis. $g^{|G|} = g^{r \cdot |\text{ord}(g)|} = e^r = e$. \square

Satz 2.37. Kleiner Satz von Fermat: Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$. So gilt

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Beweis. Wir betrachten $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Falls $\alpha \equiv 0 \pmod p$ ist die Aussage trivial. Da außerdem die Multiplikative Gruppe die Ordnung $p - 1$ hat gilt im Fall $\alpha \not\equiv 0$ ebenfalls $\alpha^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, also $\alpha^p \equiv \alpha \pmod p$. \square

Alternativ kann der Beweis auch auf "Allgemeinbildungsniveau" geführt werden:

Beweis. (Ohne Gruppentheorie): Sei $a \in \{0, \dots, p-1\}$. So sind die Zahlen $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ paarweise verschieden, also ist nach Schubfachprinzip ein Element jeder Restklasse $\pmod p$ enthalten. Also gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{p-1} ka &\equiv \prod_{k=1}^{p-1} k \pmod p \\ \implies (p-1)!a^{p-1} &\equiv (p-1)! \pmod p. \end{aligned}$$

Allerdings ist $(p-1)!$ teilerfremd zu p , also können wir durch $(p-1)!$ teilen und erhalten $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. \square

Satz 2.38. Seien $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ teilerfremd. So induziert

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ n &\mapsto (n + a\mathbb{Z}, n + b\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

einen Isomorphismus:

$$\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

Beweis. Nach Bézout gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$xa + yb = 1.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} n = xy &= 1 - yb \xrightarrow{\varphi} (0, 1) \\ m = yb &= 1 - xy \xrightarrow{\varphi} (1, 0) \end{aligned}$$

Diese Tupel bilden eine Basis des Bildraums, also ist φ surjektiv:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha n + \beta m) &= \varphi(\alpha n) + \varphi(\beta m) \\ &= \alpha \varphi(n) + \beta \varphi(m) \\ &= (\beta, \alpha) \end{aligned}$$

Da beide Seiten gleich viele Elemente haben handelt es sich sogar um einen Isomorphismus. \square

Beispiel 2.39. Das Kongruenzensystem

$$\begin{aligned} n &\equiv 3 \pmod{17} \\ n &\equiv 5 \pmod{9} \\ n &\equiv 1 \pmod{12} \end{aligned}$$

hat keine Lösung, denn aus $n \equiv 5 \pmod{9}$ folgt $n \equiv 2 \pmod{3}$, also $n \not\equiv 1 \pmod{12}$. Ersetzen wir jedoch 12 durch 13, so sind die Teiler teilerfremd und der chinesische Restsatz garantiert eine Lösung.

Satz 2.40. Chinesischer Restsatz / Satz von Sunzi / Satz von Aryabhata: Satz 2.38 funktioniert auch für mehr als zwei Zahlen - sind $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ teilerfremd, so ist

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$$

surjektiv und induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/q_1 \dots q_r \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$$

Genauer kann man isomorph jedem Element n das Tupel $(n \pmod{q_1}, \dots, n \pmod{q_r})$ zuordnen - so kommt man zurück zur "klassischen" Formulierung des Chinesischen Restsatzes.

Korollar 2.41. Die Gruppe $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$ wird durch das Element $(1, \dots, 1)$ erzeugt und ist somit zyklisch.

Lemma 2.42. Zentrales Lemma der RSA-Verschlüsselung: Seien p und q prim und $st \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. So ist $(a^t)^s \equiv a \pmod{pq}$.

Beweis. Wir wissen $a^x = a \pmod{p}$ falls $x \equiv 1 \pmod{p-1}$.

Also $a^x = a \pmod{pq}$, wenn $x \equiv 1 \pmod{p-1}$ und $x \equiv 1 \pmod{q-1}$, also insbesondere $a^x = a \pmod{p}$ wenn $x \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. \square

In der RSA-Verschlüsselung werden dann letztendlich pq und t veröffentlicht, a^t als Nachricht zurückgeschickt, und dann durch Exponentiation mit s die Nachricht entschlüsselt.

Definition 2.43. Sei A eine abelsche Gruppe und p eine Primzahl. Wir definieren:

$$A(p) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : \text{ord}(a) = p^n\}$$

Satz 2.44. Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe. Für jede Primzahl p ist $A(p) \subseteq A$ eine Untergruppe.

Beweis. Seien $x, y \in A(p)$. So existieren $r, s \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, sodass $p^r x = p^s y = 0$. Da A abelsch ist folgt

$$p^{r+s}(x + y) = p^r x + p^s y = 0$$

Also $x + y \in A(p)$.

Es gilt außerdem $p0 = 0$, also $0 \in A(p)$, und $p^r(-x) = -(p^r x) = -0 = 0$, also $-x \in A(p)$. \square

Satz 2.45. Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe und seien p_1, \dots, p_r paarweise verschiedene Primzahlen. So liefert die Gruppenverknüpfung eine Injektion

$$A(p_1) \times \dots \times A(p_r) \hookrightarrow A$$

mit Bild alle Elemente endlicher Ordnung, in deren Ordnung nur die Primfaktoren p_1, \dots, p_r vorkommen.

Beweis. Sei sonst $(a_1, \dots, a_r) \neq (0, \dots, 0)$ ein Tupel mit $a_i \in A(p_i)$ und

$$a_1 + \dots + a_r = 0.$$

Sei OBDa $a_1 \neq 0$. So gilt:

$$-a_1 = a_2 + \dots + a_r$$

Für hinreichend großes n gilt nun

$$-(p_2 \dots p_r)^n a_1 = (p_2 \dots p_r)^n (a_2 + \dots + a_r) = 0$$

Allerdings gilt

$$(p_2 \dots p_r)^n a_1 \neq 0$$

Da die Primzahlen p_2, \dots, p_r alle die Ordnung von a_1 nicht Teilen. Widerspruch!

Sei nun $a \in A$, $\text{ord}(a) = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. So gilt:

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &\cong \mathbb{Z}/\text{ord}(a)\mathbb{Z} \\ &= \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}\mathbb{Z} \\ &\cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_r^{\alpha_r}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

\square

Dieser Satz ist analog zur Hauptraumzerlegung eines Vektorraums - wir zerlegen A in eine direkte Summe aus Untergruppen. Es gibt in der kommutativen Algebra einen Satz

über Module über Ringe, welcher sowohl diesen Satz als auch die Hauptraumzerlegung gemeinsam verallgemeinert.

Korollar 2.46. *Sei E eine endliche abelsche Gruppe. Seien p_1, \dots, p_r die Primfaktoren der Kardinalität $|E|$ von E . So gilt:*

1. *Die Verknüpfung liefert eine Bijektion*

$$E(p_1) \times \dots \times E(p_r) \xrightarrow{\sim} E$$

2. *Für alle i ist $|E(p_i)|$ eine Potenz von p_i .*

Beweis.

1. Folgt direkt aus dem vorherigen Satz, da die Elemente endlicher Ordnung, in deren Ordnung nur die Primfaktoren p_1, \dots, p_r vorkommen, nun die ganze Gruppe ausmachen.
2. Folgt aus Induktion über $|E_p|$. Der Fall $|E_p| = 1$ ist klar:

$$|E_p| = 1 = p^0$$

Für $|E_p| > 1$ existiert ein Element $x \neq 0$. Es gilt $|\langle x \rangle| = p^r$ nach Annahme. Dann folgt

$$|E(p)/\langle x \rangle| = p^s$$

nach Induktionsannahme, da der Quotient kleiner ist. Somit folgt nach Lagrange

$$|E_p| = |E(p)/\langle x \rangle| \cdot |\langle x \rangle| = p^s \cdot p^r$$

□

Proposition 2.47. *Sei E eine endliche abelsche Gruppe, sodass die Ordnung jedes $x \in E$ eine Potenz von p prim ist. So ist $|E|$ ebenfalls eine p -Potenz.*

Proposition 2.48. *Es existiert eine Bijektion zwischen der Menge der endlichen abelschen Gruppen bis auf Isomorphismus und den endlichen Multimengen echter Primpotenzen. Genauer hat jede endliche abelsche Gruppe die Form*

$$\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}$$

Für p_1, \dots, p_r prim.

Zum Beispiel ist jede abelsche Gruppe der Ordnung 8 isomorph zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Satz 2.49. Sei K ein Körper und K^\times dessen multiplikative Gruppe. So ist jede endliche Untergruppe von K^\times zyklisch.

Definition 2.50. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Operation von G auf X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

Sodass:

1. $\forall g, h \in G : (gh)x = g(hx)$
2. $1x = x$

Beispiel 2.51. Sei X eine Menge und

$$\text{Ens}^\times(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$$

So ist Ens^\times eine Gruppe, welche durch Anwendung der jeweiligen Funktion auf kanonische Weise auf X operiert:

$$\begin{aligned} \text{Ens}^\times(X) \times X &\rightarrow X \\ (f, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Beispiel 2.52. \mathcal{S}_n operiert durch Anwendung der jeweiligen Permutation auf $\{1, \dots, n\}$.

Beispiel 2.53. Analog operiert $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n .

Definition 2.54. Sei G eine Gruppe, welche auf eine Menge X operiert. So nennen wir für $x \in X$ die Menge

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

die **Bahn** von x .

Beispiel 2.55. Wir lassen die Gruppe $\text{SO}(2)$ der zweidimensionalen Rotationsmatrizen auf \mathbb{R}^2 operieren. So ist die Bahn eines Vektors \vec{v} der Kreis mit Radius $\|\vec{v}\|$.

Beispiel 2.56. Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G . So operiert H durch die Gruppenoperation auf G und die Bahnen Hg sind genau die Nebenklassen.

Proposition 2.57. Die Bahnen der Operation einer Gruppe auf einer Menge sind paarweise disjunkt.

Proposition 2.58. Die Bahnen der Operation eines Monoids auf einer Menge sind nicht unbedingt paarweise disjunkt.

Definition 2.59. Sei G eine Gruppe, welche auf einer Menge X operiert. Sei $x \in X$. Wir nennen die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

die **Standgruppe** oder **Isotropiegruppe** von x .

Lemma 2.60. Die Abbildung $G \rightarrow X : g \rightarrow gx$ induziert eine Bijektion

$$G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx$$

Beweisskizze. Für jede G_x -Linksnebenklasse $L \subset G$ besteht die Menge Lx nur aus einem Punkt. Falls $L = gG_x$ haben wir genauer $Lx = gG_xx = \{gx\}$. Wir können nun unsere Bijektion definieren, indem wir jeder Linksnebenklasse $L \in G/G_x$ das einzige Element von Lx zuordnen. Sie ist trivial surjektiv, gleichzeitig ist sie injektiv, denn aus $gG_xx = hG_xx$ folgt $gx = hx$, also $h^{-1}g \in G_x$, also $gG_x = hG_x$. \square

Korollar 2.61. Bahnenformel:

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x| = |G/G_x| \cdot |G_x|$$

Frage: Was sind die endlichen Untergruppen der dreidimensionalen Drehgruppe SO_3 ?

Vorüberlegung: Jede Gruppe G mit $x \in G$ operiert auf sich selber durch $g.x = gxg^{-1}$, auch notiert als $(\text{int } g)(x)$ für "interior", da dies einen sogenannten **inneren Automorphismus** bildet. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \text{int} : G &\rightarrow \text{Aut}(G) \\ g &\mapsto (x \mapsto gxg^{-1}) \end{aligned}$$

Wir nennen diese Operation die "**Operation durch Konjugation**".

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} (hg).x &= hgx(hg)^{-1} \\ &= hgxg^{-1}h^{-1} \\ &= h(gxg^{-1})h^{-1} \\ &= h.(g.x) \end{aligned}$$

und außerdem:

$$g.(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = (g.x)(g.y)$$

Intuitiv sind Drehungen, welche zueinander konjugiert werden können, "quasi die gleichen" - die Symmetriegruppe, welche den Raum an einer Achse um 180 Grad dreht, ist die gleiche, welche den Raum an einer anderen Achse um 180 Grad dreht. Es ist also sinnvoll, die Frage einzuschränken auf "Was sind die endlichen Untergruppen von SO_3 bis auf Konjugation? Die Antwort ist nun:

Satz 2.62. Die endlichen Untergruppen der Drehgruppe SO_3 bis auf Konjugation sind genau:

1. Die zyklischen Gruppen C_k , für $k \geq 1$
2. Die **Diedergruppen** D_k , für $k \geq 2$ (die Verallgemeinerungen unserer Quadratgruppe)
3. Die Symmetriegruppen des Würfels (= die Symmetriegruppe des Oktaeders), des Tetraeders, und des Ikosaeders (= die Symmetriegruppe des Dodekaeders)

Beweis.

Proposition 2.63. $g \in SO_3 \setminus id$ hält genau eine Gerade punktweise fest. Diese sticht an zwei Punkten durch die Einheitssphäre S^2 .

Wir nennen diese Punkte die Pole $P \subset S^2$ von g . Sei also $G \subset SO(3)$ eine endliche Untergruppe. Wir definieren

$$M \in \{(g, p) \mid g \in G \setminus id, p \in P\}$$

Als die Menge der Pole der Drehachsen der Gruppe. Es gilt

$$\begin{aligned} |M| &= 2(|G| - 1) \\ |M| &= \sum_{p \in P} (|G_p| - 1) \end{aligned}$$

Die Gruppe operiert außerdem auf der Menge der Pole ($G \setminus P$). Wir können die Menge der Pole somit Zerlegen in ihre G -Bahnen, also $P \rightarrow P_1 \sqcup \dots \sqcup P_r$. Die Ordnung der Pole einer Bahn ist konstant, wir definieren also die **Polordnung** der Pole der i -ten Bahn als

$$\forall p \in P_i : n_i := |G_p|$$

Und erhalten

$$\sum_{p \in P} (|G_p| - 1) = \sum_{i=1}^r |P_i| \cdot (n_i - 1)$$

Aus der Bahnformel erhalten wir

$$|P_i| \cdot n_i = |G|$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} 2(|G| - 1) &= \sum_{i=1}^r |P_i| \cdot (n_i - 1) \\ \implies 2 - \frac{2}{|G|} &= \sum_{i=1}^r 1 - \frac{1}{n_i} \end{aligned}$$

Fall $r = 0$: Es gibt keine Pole, also ist die Gruppe trivial. Die triviale Gruppe kann auch betrachtet werden als die zyklische Gruppe C_1 mit nur einem Element.

Fall $r = 1$: Dann gilt:

$$2 - \frac{2}{|G|} = 1 - \frac{1}{n_1}$$

Die Gruppe muss mindestens 2 Elemente haben, also ist der linke Term größer als 1 und der rechte Term kleiner als 1, was ein Widerspruch ist.

Fall $r = 2$: Dann gilt:

$$2 - \frac{2}{|G|} = 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}$$

Es gilt $n_i \leq |G|$, also ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn $n_1 = n_2 = |G|$. Wir haben also eine Gruppe mit zwei Polen, deren Ordnung die Ordnung der gesamten Gruppe ist. Die ganze Gruppe hat also nur eine Symmetriearchse, die Gruppe muss dann eine zyklische Gruppe sein.

Fall $r = 3$: Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{|G|} &= 3 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} \\ \implies 1 + \frac{2}{|G|} &= \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \end{aligned}$$

Sei OBdA $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Behauptung: Dann muss $n_1 = 2$ sein.

Fall 3a: $n_2 = 2$: Dann gilt $2n_3 = |G|$. Nach Bahnformel folgt $|P_3| = 2$. Bei einer Polbahn mit zwei Elementen müssen sich die Pole gegenüberliegen. Wir erhalten die Diedergruppe D_{n_3} - n_3 entspricht der zentralen Drehsymmetrie und n_1 und n_2 entsprechen den seitlichen Symmetriearchsen durch die Ecken und Kanten.

Fall 3a: $n_2 > 2$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1 + \frac{2}{|G|}$$

Also $n_2 = 3$ und $n_3 = 3$ oder $n_3 = 4$ oder $n_3 = 5$. Der erste Fall liefert den Tetraeder, der zweite Fall den Würfel und der dritte Fall den Ikosaeder.

Fall $r \geq 4$: Die Gleichungen sind nicht mehr lösbar.

□