

MITTSCHRIEB

# Lineare Algebra I + II

Sommersemester 2025

*Emma Bach*

Vorlesung Lineare Algebra II gehalten von  
Prof. Dr. Stefan KEBEKUS

Zusätzlicher Stoff aus Skripten von  
Prof. Dr. Wolfgang SOERGEL

October 14, 2025

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>(...)</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Wiederholung</b>	<b>5</b>
4.1	Notation .....	5
4.2	Determinanten .....	5
4.2.1	Axiomatische Beschreibung .....	5
4.2.2	Weitere Eigenschaften .....	5
4.2.3	Berechnung .....	6
4.3	Basiswechsel .....	6
4.4	Der Satz von Wünsch-dir-was .....	7
4.5	Universelle Eigenschaft des Quotientenraums .....	8
<b>5</b>	<b>Die Jordansche Normalform</b>	<b>9</b>
5.1	Erste Anwendungen .....	10
5.2	Konjugationsklassen .....	10
5.3	Der Satz von Cayley-Hamilton .....	11
5.4	Minimalpolynome .....	13
<b>6</b>	<b>Euklidische und Hermitische Vektorräume</b>	<b>16</b>
6.1	Bilinearformen .....	19
6.2	Hermitische Sesquilinearformen .....	20
6.3	Unitäre und Euklidische Vektorräume .....	21
6.4	Metriken .....	22
6.5	Orthogonalität .....	22
6.6	Die adjungierte Abbildung .....	26
<b>7</b>	<b>Orthogonale und unitäre Endomorphismen</b>	<b>28</b>
7.1	Normalformen unitärer Endomorphismen .....	28
7.1.1	Komplexifizierung .....	29
7.2	Selbstadjungierte Endomorphismen .....	31
7.3	Hauptachsentransformation .....	32
7.3.1	Anwendung - Rotation von Körpern im Raum .....	32
7.3.2	Anwendung - Kovarianz .....	33
<b>8</b>	<b>Multilineare Algebra</b>	<b>34</b>
8.1	Das Tensorprodukt .....	34
8.1.1	Direkte Produkte .....	35
8.2	Existenz des Tensorprodukts .....	38
8.3	Tensorprodukte von Abbildungen und Matrizen .....	40
8.4	Rechenregeln für Tensorprodukte .....	40
<b>9</b>	<b>Die äußere Algebra</b>	<b>42</b>
9.1	Die Determinante .....	43
9.2	Invariantentheorie .....	44

**A Ausblicke in die Zukunft**

**45**

# Chapter 1

## Lineare Gleichungssysteme

**Definition 1.1.** Eine  $n \times m$  - **Matrix** ist formell eine Abbildung aus der Produktmenge  $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$  in eine Menge  $M$ , in der Regel einen Körper. Wir schreiben die Menge der  $n \times m$ -Matrizen über einem Körper  $K$  als

$$\text{Mat}(n \times m, K)$$

Ist  $A \in \text{Mat}(n \times m, K)$  schreiben wir den Koeffizienten  $A(i, j)$  in der Regel als  $A_{ij}$  oder  $a_{ij}$ .

**Satz 1.2.** *Ist die Lösungsmenge eines Linearen Gleichungssystems nichtleer, so erhalten wir alle Lösungen, indem wir zu einer Lösung des Systems beliebige Lösungen des zugehörigen Homogenen Systems addieren.*

## Chapter 2

# Vektorräume

**Definition 2.1.** Ein Vektorraum  $(V, K, +, \cdot)$  ist ein Tupel aus einer Menge  $V$ , einem Körper  $K$ , einer Abbildung  $+: V \times V \rightarrow V$  (genannt **Vektoraddition**), und einer Abbildung  $\cdot: K \times V \rightarrow V$  (genannt **Skalarmultiplikation**), sodass folgende Axiome gelten:

- $(V, +)$  ist eine abelsche (also kommutative) Gruppe
- $\cdot$  erfüllt folgende Rechenregeln:

1. Distributivität über die Addition:

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in K, \forall v, w \in V : \\ \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w\end{aligned}$$

## Chapter 3

(...)

# Chapter 4

## Wiederholung

### 4.1 Notation

- Die Menge aller  $n \times m$  Matrizen mit Einträgen aus dem Körper  $k$  schreiben wir  $Mat(n \times m, k)$
- Die Gruppe der Invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus  $k$  schreiben wir  $Gl_n(k)$
- Den Eigenraum einer Abbildung  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$  schreiben wir  $Eig_f(\lambda)$
- Die  $n \times n$ -Einheitsmatrix schreiben wir  $I_n$  oder  $E_n$ , die Identitätsabbildung des Vektorraums  $V$  schreiben wir  $id_V$ . Vermutlich werden wir die Unterscheidung zwischen den beiden Begriffen jedoch öfters ignorieren.
- Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f$  ist

$$\chi_f := \det(f - t \cdot id_V). \quad (4.1)$$

Analog ist das charakteristische Polynom einer  $n \times n$ -Matrix  $A$

$$\chi_A := \det(A - t \cdot I_n). \quad (4.2)$$

### 4.2 Determinanten

#### 4.2.1 Axiomatische Beschreibung

1. Die Determinante ist **multilinear**, also:
  - (a)  $\det(v_1 + w, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n) + \det(w, v_2, \dots, v_n)$ , ebenso in den anderen Spalten und für Zeilenvektoren.
  - (b)  $\det(cv_1 + w, v_2, \dots, v_n) = c \cdot \det(v_1, \dots, v_n)$ , ebenso in anderen Spalten und für Zeilenvektoren
2. Die Determinante ist **alternierend**: Sind zwei Spalten oder Zeilen gleich, ist die Determinante 0.
3. Sie ist **normiert** durch  $\det(I_n) := 1$

#### 4.2.2 Weitere Eigenschaften

1.  $\det(A^\top) = \det(A)$
2.  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
3. Für quadratische  $A, B$  gleicher Größe gilt  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
4. Für Konstante  $c$  und  $n \times n$ -Matrix  $A$  gilt  $\det(cA) = c^n \det(A)$
5. Für Dreiecksmatrizen  $A$  gilt  $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$
6. Besteht eine Spalte oder Zeile aus Nullen, ist die Determinante 0.

7. Vertauscht man zwei Spalten oder Zeilen, ändert die Determinante ihr Vorzeichen. Dies ist äquivalent zu “alternierend” für Körper ohne selbstinverse Elemente  $x = -x \neq 0$ .
8. Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen ändert die Determinante nicht.

### 4.2.3 Berechnung

Die Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix ist:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix ist:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Die Determinante eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  ist das Produkt der Eigenwerte (unter Beachtung der algebraischen Vielfachheiten!)

## 4.3 Basiswechsel

Zu Beginn will ich einige relevante Sätze, Definitionen und Notationsstandards aus der Vorlesung “Lineare Algebra I” wiederholen.

**Definition 4.1.** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Sei  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  eine Basis von  $W$ . So lässt sich jeder Vektor  $w \in W$  darstellen als **endliche** Linearkombination der Basisvektoren:

$$w = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i \quad (4.3)$$

Insbesondere lassen sich die Bilder der Basisvektoren  $a_j \in A$  in dieser Form darstellen:

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} b_i \quad (4.4)$$

Die **Darstellungsmatrix**  $\text{Mat}_B^A f$  ist genau durch diese Koeffizienten  $\alpha_{ij}$  gegeben.

$$\text{Mat}_B^A f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

In der Regel arbeiten wir mit der Standardbasis  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  und interpretieren jede Matrix  $M$  als Darstellungsmatrix  $M_E^E f$  einer Linearen Abbildung  $f$ .

**Definition 4.2.** Die **Basiswechselmatrix**  $T_B^A$  ist die Abbildungsmatrix der Identitätsabbildung.

$$T_B^A = \text{Mat}_B^A(\text{id}_V) \quad (4.6)$$

**Satz 4.3.** Für jede Basis  $B$  eines beliebigen Vektorraums  $V$  gilt

$$T_B^B = I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

*Beweis.* Da die Darstellung jedes Vektors durch die Basisvektoren eindeutig gegeben ist, ist die Darstellung  $\text{id}_V(b_j) = b_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} b_i$  eines Basisvektors als Linearkombination genau gegeben durch die Linearkombination mit  $\alpha_{ij} = 1$  und  $\alpha_{ik} = 0$  für  $k \neq j$ . Dies entspricht genau dem Standardbasisvektor  $e_j$ . Also gilt  $T_B^B = (e_1 \dots e_n) = I_n$ .  $\square$



**Proposition 4.4.** Gegeben  $\text{Mat}_B^A f$  lässt sich die Abbildungsmatrix  $\text{Mat}_D^C f$  von  $f$  bezüglich zweier neuen Basen  $C$  und  $D$  durch Nutzung von Basiswechselmatrizen folgendermaßen berechnen:

$$\text{Mat}_D^C(f) = T_D^B \cdot \text{Mat}_B^A f \cdot T_C^B \quad (4.8)$$

Ein besonders relevanter Spezialfall ist:

$$\text{Mat}_B^B(f) = T_B^A \cdot \text{Mat}_A^A f \cdot T_A^B \quad (4.9)$$

**Satz 4.5.** Es gilt  $T_B^A = (T_A^B)^{-1}$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} T_A^B \cdot T_B^A &= T_A^B \cdot \text{id}_V \cdot T_B^A \\ &= \text{Mat}_A^B(\text{id}_V) \cdot \text{Mat}_B^B(\text{id}_V) \cdot \text{Mat}_B^A(\text{id}_V) \\ &= \text{Mat}_A^A(\text{id}_V) \\ &= \text{id}_V \end{aligned}$$

□

**Anmerkung 4.6.** Betrachten wir eine beliebige Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Die Matrix  $T_B^E$  kann man trivial finden, da jeder Vektor  $b_i = (b_{i1} \dots b_{in})^T$  bezüglich der Standardbasis trivial geschrieben ist als  $b_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot e_j$ . Nach 4.5 lässt sich die Matrix  $T_E^B$  ebenfalls ohne größere Probleme durch invertierung von  $T_B^E$  finden.

**Definition 4.7.** Wir nennen zwei Matrizen  $A$  und  $B$  **ähnlich**, falls eine Matrix  $S$  existiert, sodass

$$A = S^{-1}BS$$

Ein zentrales Ziel der Vorlesung “Lineare Algebra II” ist es, zu einer Matrix  $A$  eine besonders simple Matrix  $B$  zu finden, welche  $A$  ähnlich ist. Hierbei sollte man immer 4.4 im Kopf behalten - zwei Matrizen  $A$  und  $B$  sind genau dann ähnlich, wenn sie die Darstellungsmatrizen der gleichen Funktion zu verschiedenen Basen sind, also wenn Basen  $B_1$  und  $B_2$  und ein Endomorphismus  $f$  existieren, sodass

$$A = \text{Mat}_{B_1}^{B_1}(f) \text{ und } B = \text{Mat}_{B_2}^{B_2}(f)$$

## 4.4 Der Satz von Wünsch-dir-was

**Satz 4.8.** Let  $V$  and  $W$  be vector spaces. Let  $B_V$  and  $B_W$  be bases. Then

*Beweis.* Sei  $((\vec{b}_i)_{i \in I})$  eine Basis von  $V$ . Dann induzieren wir eine eindeutige lineare Abbildung durch

$$g(f_1(\vec{b}_i)) = f_2(\vec{b}_i).$$

□

## 4.5 Universelle Eigenschaft des Quotientenraums

Wenn  $W \subseteq \ker(l)$  existiert genau ein  $\eta$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{q} & V/W \\ \downarrow id & & \downarrow \exists! \eta \\ V & \xrightarrow{l} & W \end{array}$$

## Chapter 5

# Die Jordansche Normalform

Let  $V$  be a vector space. Let  $f : V \rightarrow V$  be a nilpotent endomorphism.

Define  $V^p = \ker(f^p)$  Where  $f^p$  denotes composition.

**Lemma 5.1.**

$$V^1 \subseteq V^2 \subseteq \dots \subseteq V$$

**Lemma 5.2.**

$$\forall p : \forall v \in V : v \in V^p \Leftrightarrow f(v) \in V^{p-1}$$

**Satz 5.3.** The “*natural mapping*”

$$\bar{f} : V^p/V^{p-1} \rightarrow V^{p-1}/V^{p-2}$$

is injective.

*Beweis.* We know that the restriction  $f|_{V^p}$  is a map  $V^p \rightarrow V^{p-1}$ .

Let  $q_p$  denote the quotient map  $V^p \rightarrow V^p/V^{p-1}$ .

Let  $q_{p-1}$  denote the quotient map  $V^{p-1} \rightarrow V^{p-1}/V^{p-2}$ .

We have the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} V^p & \xrightarrow{f|_{V^p}} & V^{p-1} \\ \downarrow q_p & & \downarrow q_{p-1} \\ V^p/V^{p-1} & \xrightarrow{\bar{f}} & V^{p-1}/V^{p-2} \end{array}$$

By “**the universal property**” we have that a unique  $\bar{f}$  exists iff.  $V^{p-1} \subseteq \ker(q_{p-1} \circ f|_{V^p})$ . This inclusion holds, since for  $v \in V^{p-1}$  we have  $f(v) \in V^{p-2}$ , which is exactly the kernel of  $q_{p-1} : V^{p-1} \rightarrow V^{p-1}/V^{p-2}$ . Therefore the diagram commutes.

We will show injectivity of  $\bar{f}$  by showing  $\ker(\bar{f}) = \{0\}$ . Let  $k \in V^p/V^{p-1}$ . Pick an arbitrary representative  $v \in k$ . Because the diagram commutes, we have

$$k \in \ker \bar{f} \Leftrightarrow f|_{V^p}(v) \in \ker(q_{p-1}) \Leftrightarrow f(v) \in V^{p-2} \Leftrightarrow v \in V^{p-1}$$

Since  $k \in V^p/V^{p-1}$ , we have that  $v \in V^{p-1}$  must be in the same equivalence class as 0. Therefore the kernel of  $\bar{f}$  consists only of the equivalence class of the zero vector (which is the zero vector of the quotient space).  $\square$

We have the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 V & & F(V) = V^p & \xrightarrow{\eta_V = f|_{V^p}} & G(V) = V^{p-1} \\
 \downarrow q & & \downarrow F(q) = q_p & & \downarrow G(q) = q_{p-1} \\
 V/\ker(f) & & F(V/\ker(f)) = V^p/V^{p-1} & \xrightarrow{\eta_{V/\ker(f)} = \bar{f}} & G(V/\ker(f)) = V^{p-1}/V^{p-2}
 \end{array}$$

## 5.1 Erste Anwendungen

**Erinnerung:** Über  $\mathbb{C}$  ist jede Matrix ähnlich zu einer Jordan-Matrix.

Erste Anwendungen:

1. Hohe Potenzen von Endomorphismen ausrechnen.
2. Die Exponentialfunktion mit Matrixwertigen Argumenten ausrechnen und damit lineare Differentialgleichungen lösen, auch in vielen Veränderlichen und mit höheren Ableitungen.

## 5.2 Konjugationsklassen

Frage: Ist in unserer Situation die Jordan-Matrix von  $f$  eindeutig?

Antwort: Nein! Blöcke können durch Umsortierung der Basis vertauscht werden.

$$V = \mathbb{C}^2, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ EW zu } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\begin{aligned}
 B &= (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \\
 \text{Mat}_B^B f &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 B' &= (\vec{v}_2, \vec{v}_1) \\
 \text{Mat}_{B'}^{B'} f &= \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Neue Frage: Ist die Jordan-Matrix eindeutig bis auf Umsortierung der Blöcke?

Versuch einer Antwort: Sei  $B$  eine Jordan-Basis,

$$\text{Mat}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \text{Jor}(\lambda_1, n_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \text{Jor}(\lambda_r, n_r) \end{pmatrix}$$

Beachte: Die Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sind genau die Eigenwerte von  $f$  und müssen deshalb in jeder Jordan-Matrix von  $f$  auftreten.

Beachte: Wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $f$  ist, seien  $i_1, \dots, i_k$  die Indizes mit  $\lambda_{i_j} = \lambda$ . Die Summe der indizes ist die Dimension des Hauptraums von  $f$  zu  $\lambda$ , muss also für jede Jordan-Matrix von  $f$  gleich sein.

$$\sum_{j=1}^k n_{i_j} = \dim \text{Hau}_f(\lambda) = \text{alg. Mult. von } f$$

Die rechte Seite hängt nicht von  $B$  ab, ist also eine Invariante der Jordan-Matrizen von  $f$ . Außerdem: Wenn  $f$  auf den Hauptraum  $Hau_f(\lambda)$  eingeschränkt wird und wir die Räume  $V^p$  und die Partition  $m_p$  betrachten, sind die Zahlen  $n_i$  genau die Zahlen, die in der zu  $m_p$  dualen Partition auftreten (wenn auch in willkürlicher Reihenfolge)

$\implies$  Ergebnis: Ja! Die Jordanmatrix ist eindeutig bis auf Umsortieren der Blöcke.

**Definition 5.4.** Die Ähnlichkeitsrelation zwischen Matrizen wird auch als **Konjugation** (oder genauer als **Konjugationswirkung von  $Gl_n$  auf eine Matrix**) bezeichnet.

**Definition 5.5.** Als **Orbit (der Konjugationswirkung von  $Gl_n$  auf  $M$ )** einer Matrix  $M$  bezeichnen wir die Menge der Matrizen, die zu einer gegebenen Matrix  $M$  ähnlich sind.

Beobachtung: Jede Matrix ist einer Jordanmatrix ähnlich, also liegt in jedem Orbit mindestens eine Jordan-Matrix!

Wären Jordan-Matrizen eindeutig, hätten wir nun eine triviale Bijektion zwischen der Menge aller Orbits von Matrizen und den Jordanformen. Da Jordanmatrizen nur bis auf Umsortieren eindeutig ist, ist die Situation etwas komplizierter (aber nicht viel komplizierter!)

**Satz 5.6.** Sei  $B$  eine Jordan-Basis für  $f$  mit Matrix  $M_f = Mat_B^B(f)$ . Sei  $A \in Mat(n \times n)$  eine Matrix, die sich von  $M_f$  nur durch Umsortierung von Blöcken unterscheidet. Dann gibt es eine Umsortierung  $B'$  von  $B$ , sodass  $Mat_{B'}^{B'}(f) = A$ .

Äquivalent: Wenn sich Matrizen in Jordanform nur durch Umsortierung der Blöcke unterscheiden, sind sie ähnlich.

Ebenfalls Äquivalent: Wenn ein Orbit eine Jordan-Matrix  $A$  enthält, so auch alle Jordan-Matrizen, welche aus  $A$  durch Umsortierung der Blöcke entstehen.

**Satz 5.7.** Wenn  $B_1, B_2$  Jordanbasen von  $f$  sind, dann unterscheiden sich die Darstellungsmatrizen  $Mat_{B_1}^{B_1}(f)$  und  $Mat_{B_2}^{B_2}(f)$  von  $f$  zu den beiden Basen nur durch Umsortierung der Blöcke.

Äquivalent: Zwei Jordanmatrizen im selben Orbit unterscheiden sich nur durch Umsortieren der Blöcke.

Zusammenfassung: Es existiert eine Bijektion zwischen den Orbits der Konjugationswirkung und den Äquivalenzklassen von Jordanmatrizen unter Umsortierung.

### 5.3 Der Satz von Cayley-Hamilton

Seien  $V$  ein Vektorraum und  $f \in End(V)$  ein Endomorphismus. Wir betrachteten bisher Ausdrücke wie  $f, f^2, f^3, f^5 - \lambda \cdot Id_V$  (äquivalent zu  $f^5 - \lambda f^0$ ). Diese sehen aus wie Polynome. Können wir diese Idee formalisieren?

**Definition 5.8.** Gegeben ein Körper  $k$  schreiben wir für die Menge der Polynome mit Variable  $t$  und Koeffizienten aus  $k$ :

$$k[t] = \left\{ \sum_{i=0}^m a_i t^i \mid i \in \mathbb{N}, a_i \in k \right\}$$

**Anmerkung 5.9.** Gegeben ein Polynom  $p \in k[t]$  induziert dieses eine Funktion

$$\begin{aligned} k &\rightarrow k \\ x &\rightarrow \sum a_i x^i \end{aligned}$$

Sei  $\phi$  die Funktion, welche jedem Polynom die durch das Polynom induzierte Abbildung zuordnet:

$$\phi : k[t] \rightarrow (t \rightarrow k)$$

Im Allgemeinen ist  $\phi$  nicht injektiv! Sei zum Beispiel  $k = F_2$ , dann induzieren die Polynome  $f, f^2, f_3, \dots$  alle die selbe Funktion. Polynome sind also von den von ihnen induzierten Funktionen zu unterscheiden.

**Definition 5.10.** Wir Betrachten die Auswertung eines Polynoms in  $f$ :

$$\begin{aligned} \phi_f : k[t] &\rightarrow \text{End}(V) \\ \sum a_i t^i &\rightarrow \sum a_i \cdot f^i \end{aligned}$$

Analog definieren wir die Auswertung für Matrizen  $A$ .

**Beobachtung 5.11.** Seien  $A, B$  ähnlich mit  $A = SBS^{-1}$ . Dann gilt  $A^n = (SBS^{-1})^n = SB^nS^{-1}$ , also sind  $A^n$  und  $B^n$  ebenfalls ähnlich. Also gilt für jedes Polynom:

$$p = \sum a_i t^i$$

$$\begin{aligned} \phi_A(p) &= \sum a_i A^i \\ &= \sum a_i S B^i S^{-1} \\ &= S \left( \sum a_i B^i \right) S^{-1} \\ &= S \phi_B(p) S^{-1} \end{aligned}$$

Also bleibt Ähnlichkeit unter der Anwendung von Polynomen erhalten.

**Beobachtung 5.12.** Betrachte  $f \in \text{End}(V)$ . Wähle Basis  $B$  von  $V$ . Dann ist

$$\text{Mat}_B^B(f^i) = [\text{Mat}_B^B(f)]^i$$

Also gilt für jedes Polynom  $p = \sum a_i t^i$ :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B^B(\phi_f(p)) &= \text{Mat}_B^B\left(\sum a_i f^i\right) \\ &= \sum a_i \text{Mat}_B^B(f^i) \\ &= \sum a_i [\text{Mat}_B^B(f)]^i \\ &= \phi_{\text{Mat}_B^B(f)}(p) \end{aligned}$$

**Anmerkung 5.13.** Die Abbildungen  $\phi_f, \phi_A$  werden auch **Einsetzungsabbildungen** genannt. Statt  $\phi_f(p)$  und  $\phi_A(p)$  schreibt man oft  $p(f)$  und  $p(A)$ .

**Satz 5.14. Cayley-Hamilton:** Sei  $\chi_f \in k[t]$  das charakteristische Polynom von  $f$ . Dann ist

$$\chi_f(f) = 0.$$

*Beweis.* (Nur für  $k = \mathbb{C}$ ). Sei  $B$  eine Jordan-Basis. Dann

$$\text{Mat}_B^B(\chi_f(f)) = \chi_f(\text{Mat}_B^B(f)).$$

Es genügt also  $\chi_f(\text{Mat}_B^B(f)) = 0$  zu zeigen.

Schreibe

$$\text{Mat}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \text{Jor}(\lambda_1, n_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \text{Jor}(\lambda_r, n_r) \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\chi_f(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)^{n_r}$$

Wegen der Blockgestalt gilt:

$$\chi_f(\text{Mat}_B^B(f)) = \begin{pmatrix} \chi_f(\text{Jor}(\lambda_1, n)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \chi_f(\text{Jor}(\lambda_r, n)) \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass jeder Jordanblock  $\text{Jor}(\lambda_i - \lambda_i, n_i)$  nilpotent mit Index  $n_i$  ist. Also hat das charakteristische Polynom Nullfaktoren, also ist  $\chi_f(\text{Mat}_B^B(f)) = 0$ .  $\square$

## 5.4 Minimalpolynome

**Definition 5.15.** Wir nennen ein Polynom  $p$  das Minimalpolynom eines Endomorphismus  $f$ , wenn gilt:

1.  $p$  ist nicht das Nullpolynom
2.  $p(f) = 0$
3. Der Grad von  $p$  ist minimal unter allen Polynomen mit  $f$  als Nullstelle
4. Der Leitkoeffizient ist 1 ( $p$  ist normiert)

Analog für quadratische Matrizen statt Endomorphismen.

Normierung wird einfach durch Skalarmultiplikation des Polynoms erreicht, ist also keine starke Bedingung.

**Satz 5.16.** *Ähnliche Matrizen haben das selbe Minimalpolynom.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} A &= SBS^{-1} \\ \implies A^n &= (SBS^{-1})^n = SB^nS^{-1} \\ \implies p(A) &= p(SBS^{-1}) = S \cdot p(B) \cdot S^{-1} := 0 \implies p(B) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

**Satz 5.17.**  *$f$  hat das selbe Minimalpolynom wie seine darstellenden Matrizen.*

**Satz 5.18.** *Minimalpolynome existieren.*

*Beweis.* Gemäß Satz von Cayley-Hamilton gibt es mindestens ein Polynom, welches nicht das Nullpolynom ist und  $f$  als Nullstelle hat. Also finde nichttriviales Polynom  $p$  von minimalem Grad finden, welches  $f$  als Nullstelle hat.<sup>1</sup> Sei  $a$  der Leitkoeffizient von  $p$ . Dann ist  $a^{-1}p$  ein normiertes Polynom vom selben Grad mit  $f$  als Nullstelle.  $\square$

**Satz 5.19.** *Minimalpolynome sind eindeutig.*

*Beweis.* Seien  $p_1, p_2 \in k[t]$  zwei Minimalpolynome von  $f$ . Wir wissen, dass die Grade gleich sein müssen (3) und dass die Leitkoeffizienten 1 sein müssen (4). Wir haben:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \\ p_2(t) &= t^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i t^i \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Die Menge der Grade von Polynomen mit  $f$  als Nullstelle ist eine nichtleere Teilmenge der Natürlichen Zahlen, hat also ein Minimum.

$$\implies (p_1 - p_2)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i)t^i$$

Der Grad des Differenzpolynoms muss kleiner als  $n$  sein, sonst wären  $p_1$  und  $p_2$  nicht minimal. Gleichzeitig gilt:

$$(p_1 - p_2)(f) = p_1(f) - p_2(f) = 0 - 0 = 0$$

Also muss  $p_1 - p_2$  das Nullpolynom sein, also ist  $p_1 = p_2$ . □

**Frage 5.20.** Wie viele Polynome gibt es überhaupt, die  $f$  als Nullstelle haben?

Antwort 1: Viele! Wenn  $p$  ein Polynom ist mit  $p(f) = 0$ , so hat jedes Vielfache von  $p$  unter Polynommultiplikation ebenfalls  $f$  als Nullstelle.

Antwort 2:

**Satz 5.21.** *Alle Polynome, die  $f$  als Nullstelle haben, sind Vielfache (unter Polynommultiplikation) des Minimalpolynoms. Wenn  $p$  das Minimalpolynom von  $f$  ist und  $q \in k[t]$  ein beliebiges nichttriviales Polynom mit  $q(f) = 0$ , dann existiert ein  $r \in k[t]$ , sodass  $q = r \cdot p$ .*

*Beweis.* Sei  $q$  gegeben. Polynomdivision mit Rest liefert Polynome  $r_1, r_2 \in k[t]$  sd.  $\deg r_2 < \deg p$  und

$$q = r_1 \cdot p + r_2$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} q(f) &= r_1(f)p(f) + r_2(f) \\ \implies 0 &= r_1(f) \cdot 0 + r_2(f) \\ \implies r_2(f) &= 0 \end{aligned}$$

Da  $\deg r_2 < \deg p$  und  $p$  ein Minimalpolynom muss  $r_2$  also das Nullpolynom sein. Der Beweis für Matrizen funktioniert identisch. □

**Frage 5.22.** Wie findet man das Minimalpolynom für ein gegebenes  $f$ ?

Antwort: Schwierig, es sei denn, man kennt die Jordanform!

**Proposition 5.23.** *Sei  $A$  eine quadratische Matrix. Sei  $\lambda \in k$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1.  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$ .
2.  $\lambda$  ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.
3.  $\lambda$  ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms.

*Beweis.*

$1 \Leftrightarrow 2$ : Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist bereits bekannt.

$3 \Rightarrow 2$ : Das charakteristische Polynom ist ein Vielfaches des Minimalpolynoms.

$1 \Rightarrow 3$ : Sei ein Eigenwert  $\lambda$  gegeben. Per Annahme existiert eine zu  $A$  ähnliche Matrix  $B$  der Form:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Wenn  $p$  ein beliebiges Polynom ist, dann ist:

$$p(B) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Wenn  $p$  das Minimalpolynom ist, ist  $p(B) = 0_{n \times n}$ , also insbesondere  $p(B)_{11} = p(\lambda) = 0$ .



□

**Anwendung 5.24.** Bestimmung von Minimalpolynomen.

Sei  $A$  eine quadratische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt  $\chi_A(t) = (t - 2)^3$ . Das Minimalpolynom hat also 2 als einzige Nullstelle.  $p_1(t) = (t - 2)$  und  $p_2(t) = (t - 2)^2$  erfüllen die Bedingung  $p(A) = 0_{n \times n}$  nicht, also ist  $\chi_A(t)$  das Minimalpolynom.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt  $\chi_B(t) = (t - 2)^5$ . Allerdings ist der Nilpotenzindex der Matrix  $B - \lambda E_n$  diesmal 3, also ist bereits  $p(t) = (t - 2)^3$  ein Minimalpolynom.

Analog für sehr große Matrizen mit vielen Jordanblöcken mit verschiedenen Eigenwerten.

**Korollar 5.25.** Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix über  $\mathbb{C}$ . Sei  $m_i$  der längste Jordanblock der Matrix zum Eigenwert  $\lambda_i$ , definiert für alle Eigenwerte. Dann ist das Minimalpolynom von  $A$  gegeben durch:

$$p(t) = \sum_{i=1}^d (t - \lambda_i)^{m_i}$$

## Chapter 6

# Euklidische und Hermitische Vektorräume

**Definition 6.1.** Die folgende Abbildung  $||\mathbb{R}^n|| \rightarrow \mathbb{R}$  nennen wir die **Euklidische Norm**:

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\rightarrow \sqrt{\sum x_i^2} \end{aligned}$$

**Definition 6.2.** Wir nennen eine Abbildung  $\phi$  eine **Isometrie**, wenn sie metrikerhaltend ist, also:

$$d(\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y})$$

(...)

Konsequenz: Die Isometrien bilden eine Untergruppe der Gruppe  $Bij(\mathbb{R}^n)$  der Bijektiven Selbstabbildungen (= Permutationen) des Raums.

Ziel: Diese Gruppe beschreiben!

Wir können das Problem vereinfachen, indem wir die Abbildung:

$$\begin{aligned} \phi_0 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \phi(\vec{v}) &\rightarrow \phi(\vec{0}) \end{aligned}$$

betrachten, welche eine Isometrie mit  $\phi_0(\vec{0}) = \vec{0}$  ist.

**Definition 6.3.** Isometrien, für die  $\phi(\vec{0}) = \vec{0}$  gilt, heißen **orthogonale Transformationen**.

Orthogonale Transformationen bilden eine Untergruppe der Isometrien.

**Definition 6.4.** Das Standardskalarprodukt, oder Euklidische Skalarprodukt, auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

**Anmerkung 6.5.**

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : ||\vec{x}||^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

**Anmerkung 6.6.** Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften:

1. Linearität in der ersten Komponente:

$$\langle \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \lambda \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$$

2. Linearität in der zweiten Komponente:

$$\langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \lambda \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \lambda \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle$$

3. Positive Definitheit:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &\geq 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

4. Symmetrie:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

5. Verallgemeinerter Satz des Pythagoras:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$$

**Definition 6.7.** Zwei Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$  heißen **orthogonal** zueinander, wenn

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

**Definition 6.8.** Eine Basis  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  heißt **Orthonormalbasis**, wenn:

$$\forall i, j : \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Motivation: Wenn irgendein  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  gegeben ist, kann ich schreiben:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i$$

Im Allgemeinen muss man ein Gleichungssystem lösen, um die  $a_i$  zu finden. Bilden die  $\vec{v}_i$  eine Orthonormalbasis, ist es jedoch einfach:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_j, \vec{v} \rangle &= \left\langle \vec{v}_j, \sum a_i \vec{v}_i \right\rangle \\ &= \sum a_i \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \\ &= a_j \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\vec{v} = \sum_i \langle \vec{v}_i, \vec{v} \rangle \vec{v}_i$$

Diese Technik wird im Englischen als **coefficient picking** bezeichnet.

**Satz 6.9.** Orthogonale Transformationen erhalten das Skalarprodukt. Wenn also  $\phi$  eine orthogonale Transformation ist und  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  gegeben sind, gilt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \phi(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \rangle$$

*Beweis.* “Doofe Rechnung mit Pythagoras, werd ich nicht machen.” □

**Konsequenz 6.10.** Orthogonale Transformationen bilden Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab.

*Beweis.* Sei  $\phi$  eine orthogonale Transformation, sei  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$  eine Orthonormalbasis.

1. Seien Indizes  $i, j$  gegeben. Dann ist:

$$\langle \phi(\vec{v}_i), \phi(\vec{v}_j) \rangle \stackrel{Fact}{=} \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

2. Sei eine lineare Relation der Bildvektoren gegeben, also:

$$\vec{0} = \sum \lambda_i \phi(\vec{v}_i)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \langle \phi(\vec{v}_j), \vec{0} \rangle \\ &= \langle \phi(\vec{v}_j), \sum \lambda_i \phi(\vec{v}_i) \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i \langle \phi(\vec{v}_j), \phi(\vec{v}_i) \rangle \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

Also  $\forall j : \lambda_j = 0$ , also bilden die Bildvektoren eine Basis.

□

**Konsequenz 6.11.** Orthogonaltransformationen sind linear, bilden also eine Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Die Standardbasis ist eine Orthonormalbasis, nach 6.10 ist also die Bildmenge der Standardbasis unter der Orthogonaltransformation  $\phi$  ebenfalls eine Orthonormalbasis. Gegeben  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  schreibe:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{v}) &= \sum_i \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{v}) \rangle \phi(\vec{e}_i) \\ &:= \sum_i \eta_i(\vec{v}) \phi(\vec{e}_i) \end{aligned}$$

Beobachtung: Es genügt nun zu zeigen, dass für alle  $i$  die Abbildung  $\eta_i$  linear ist. Seien also  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann

$$\begin{aligned} \eta_i(\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2) &= \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2) \rangle \\ &= \langle \vec{e}_i, \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \rangle \quad (\text{Def. Orthogonaltransformationen}) \\ &= \langle \vec{e}_i, \vec{v}_1 \rangle + \lambda \langle \vec{e}_i, \vec{v}_2 \rangle \\ &= \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{v}_1) \rangle + \lambda \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{v}_2) \rangle \end{aligned}$$

□

**Frage 6.12.** Wie können die Orthogonalen Transformationen als Matrizen beschrieben werden?

Proberechnung: Sei  $\phi$  Orthogonal. Sei  $B$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist:

$$\text{Mat}_B^B(\phi) = (\phi(\vec{e}_1) \mid \dots \mid \phi(\vec{e}_n))$$

Beachte: Die Spaltenvektoren bilden wieder eine Orthonormalbasis, also:

$$\forall i, j : \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{ij}$$

Wir beachten das Produkt der Matrix mit ihrer Transponierten:

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B^B(\phi)^T \cdot \text{Mat}_B^B(\phi) &= (a_{ij}) \text{ mit } a_{ij} = \langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{ij} \\ &= E_n \end{aligned}$$

**Satz 6.13.** Ist  $A$  darstellende Matrix einer Orthogonalen Transformationen, so ist  $A^{-1} = A^T$ .

**Proposition 6.14.** Die Rückrichtung gilt auch - ist  $A^{-1} = A^T$ , so ist die dazugehörige Transformation orthogonal.

## 6.1 Bilinearformen

**Definition 6.15.** Sei  $k$  ein Körper,  $V$  ein Vektorraum. Eine Abbildung  $b : V \times V \rightarrow k$  heißt **Bilinearform**, falls gilt:

1. Linearität in der ersten Komponente
2. Linearität in der zweiten Komponente

**Beispiel 6.16.** 1. Das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^n$

2. Für  $A \in (n \times n, k)$  die Abbildung  $b : (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x}^\top A \vec{y}$

**Definition 6.17.** Wir nennen eine Bilinearform  $b$  symmetrisch, wenn  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V : b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x})$

**Frage 6.18.** Für welche Matrizen ist die Bilinearform  $\vec{x}^\top A \vec{y}$  symmetrisch?

Antwort: Die Bilinearform zu  $A$  ist genau dann symmetrisch, wenn die Matrix symmetrisch ist, also  $A = A^\top$ .

**Definition 6.19.** Wir nennen eine Bilinearform  $b : V \times V \rightarrow k$  **positiv semidefinit**, wenn  $\forall \vec{x} : b(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ . Wir nennen sie **positiv definit**, wenn  $\forall \vec{x} \neq 0 : b(\vec{x}, \vec{x}) > 0$

Problem: Auf den meisten Körpern  $k$  existiert keine Totalordnung! Dementsprechend definieren wir positive Definitheit nur für  $k \subseteq \mathbb{R}$ .

**Beobachtung 6.20.** Die Bilinearformen bilden einen Vektorraum über  $k$  (einen Untervektorraum des  $k$ -Vektorraums der Abbildungen  $V \times V \rightarrow k$ ).

**Beobachtung 6.21.** Die symmetrischen Bilinearformen bilden einen Untervektorraum des Raums der Bilinearformen.

**Beobachtung 6.22.** Die positiv definiten Bilinearformen sind im Vektorraum aller Bilinearformen abgeschlossen unter Addition und unter Skalarmultiplikation mit **nichtnegativen** Skalaren. Sie bilden dementsprechend keinen Untervektorraum, aber immerhin einen konvexen Kegel.

**Definition 6.23.** Sei  $k \subseteq \mathbb{R}$ . Ein Skalarprodukt auf einem  $k$ -Vektorraum  $V$  ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

**Beispiel 6.24.** Das Euklidische Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 6.25.**  $V = \mathcal{C}([0, 1])$  (Stetige Funktionen auf  $[0, 1]$ ), dann können wir ein Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  definieren als:

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\rightarrow \int_0^1 f g dx \end{aligned}$$

**Beobachtung 6.26.** Sei  $k$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $k$ -Vektorraum,  $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  eine angeordnete Basis mit Koordinatenabbildung  $\phi_B : V \rightarrow k^n$ . Wir haben zwei Konstruktionen:

- 1.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B : \{\text{Bilinearform}\} &\rightarrow \text{Mat}(n \times n) \\ b &\rightarrow (b(\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{i,j} \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} S_B : \text{Mat}(n \times n) &\rightarrow \{\text{Bilinearformen}\} \\ A &\rightarrow ((\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \phi_B(\vec{x})^\top A \phi_B(\vec{y})) \end{aligned}$$

**Proposition 6.27.**  $\text{Mat}_B$  und  $S_B$  sind inverse zueinander. Insbesondere ist dementsprechend die Dimension der  $V$ -Bilinearformen gleich der Dimension der  $V$ -Matrizen, also  $\dim(V)^2$ .

**Korollar 6.28.** *Gleichzeitig identifizieren diese Isomorphismen direkt symmetrische Bilinearformen mit symmetrischen Matrizen, also  $\dim(\text{symmetrische Bilinearformen}) = \dim(\text{symmetrische Matrizen}) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$*

**Frage 6.29.** Wie genau hängt die Matrix von der Wahl der Basis ab?

Antwort: Seien  $B_1$  und  $B_2$  angeordnete Basen mit Basiswechselmatrix  $S = \text{Mat}_{B_2}^{B_1}(\text{id}_V)$  und kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow{\vec{v} \mapsto S \cdot \vec{v}} & k^n \\ \uparrow \phi_{B_1} & & \uparrow \phi_{B_2} \\ V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V \end{array}$$

Sei  $b : V \times V \rightarrow k$  eine Bilinearform. Erinnerung: Die Matrix  $\text{Mat}_{B_1}(b)$  ist eindeutig dadurch festgelegt, dass  $\forall \vec{x} \rightarrow \vec{y} \in V : b(\vec{x}, \vec{y}) = \phi_{B_1}(\vec{x}) \cdot \text{Mat}_{B_1}(b) \cdot \phi_{B_2}(\vec{y})$ . Ebenso  $\text{Mat}_{B_2}(b)$ . Also:

$$\begin{aligned} \forall \vec{v} \in V : \phi_{B_2}(\vec{v}) &= S \phi_{B_1}(\vec{v}) \\ &= (S \phi_{B_1}(\vec{x}))^\top \text{Mat}_{B_2}(b) S \phi_{B_1}(\vec{y}) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\text{Mat}_{B_1}(b) = S^\top \text{Mat}_{B_2}(b) S$$

Dies erinnert natürlich stark an Ähnlichkeit von Darstellungsmatrizen von Endomorphismen, allerdings wird das Inverse durch eine Transponierte ersetzt! Das ist natürlich einfacher als das Invertieren, Basiswechsel von Bilinearformen ist dementsprechend einfacher als Basiswechsel von Endomorphismen.

## 6.2 Hermitische Sesquilinearformen

**Problem:** Reelle Vektorräume sind kompliziert (Das Problem “Wie viele reelle Nullstellen hat ein Polynom” ist NP-Vollständig!!!) Vieles wird einfacher, wenn man über den komplexen Zahlen arbeitet.

Allerdings konnten wir über  $\mathbb{C}$  bisher zum Beispiel nicht die positive Definitheit definieren. Wir wollen nun die Definition von Bilinearformen und Symmetrie ändern, damit sie sich besser mit den komplexen Zahlen vertragen.

**Definition 6.30.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Eine Sesquilinearform ist eine Abbildung  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass gilt:

1. Linearität in der ersten Komponente
2. Sesquilinearität in der zweiten Komponente:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V : \forall \lambda \in \mathbb{C} : b(\vec{a}, \vec{b} + \lambda \vec{c}) = b(\vec{a}, \vec{b}) + \bar{\lambda} b(\vec{a}, \vec{c})$$

(Der skalare Faktor  $\lambda$  wird also komplex konjugiert.)

**Beispiel 6.31.** Die Standardsesquilinearform auf  $\mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \sum x_i \bar{y}_i \end{aligned}$$

**Beispiel 6.32.** Sei  $A \in \text{Mat}(n \times n)$ . Dann betrachte:

$$\begin{aligned} b : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \vec{x}^\top A \bar{\vec{y}} \end{aligned}$$

**Definition 6.33.** Eine Sesquilinearform heißt **Hermitsch**, falls:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V : b(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{b(\vec{y}, \vec{x})}$$

**Proposition 6.34.** Eine Sesquilinearform ist genau dann Hermitsch, wenn  $A^\top = \overline{A}$ .

**Beobachtung 6.35.** In einer darstellenden Matrix einer hermiteschen Sesquilinearform müssen also die Diagonalelemente reell sein!

**Beobachtung 6.36.** Wenn  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  hermitsch ist, so gilt:

$$b(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{b(\vec{x}, \vec{x})}$$

Also ist das Bild eines Vektors mit sich selbst reell - also haben wir für komplexe Sesquilinearformen nicht das Problem der Definition von Definitheit, welches wir für Bilinearformen hatten!

## 6.3 Unitäre und Euklidische Vektorräume

**Definition 6.37.** Ein **Euklidischer Vektorraum** ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Ein **Unitärer Vektorraum** ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt.

**Definition 6.38.** Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum, wobei  $k \subset \mathbb{C}$  (typischerweise  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot, \cdot\| : V \times V \rightarrow k$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Absolute Homogenität:

$$\forall \vec{v} \in V : \forall \lambda \in k : \|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$$

2. Dreiecksungleichung:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

3. Positive Definitheit<sup>1</sup>:

$$\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

**Beispiel 6.39.** Sei  $V$  ein Euklidischer oder Unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann gelten:

1. Cauchy-Schwarz:

$$\forall \vec{x} : \forall \vec{y} : |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}$$

2. Satz des Pythagoras:

$$\forall \vec{x} : \forall \vec{y} : \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$$

**Beispiel 6.40. Operatornorm:** Seien  $V, W$  zwei endlichdimensionale  $k$ -Vektorräume mit Normen  $\|\cdot\|_V$  und  $\|\cdot\|_W$ . Dann definieren folgende Norm auf den linearen Abbildungen  $\operatorname{Hom}(V, W)$ :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{op} : \operatorname{Hom}(V, W) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \max\{\|f(\vec{v})\|_W\} \end{aligned}$$

Nachrechnen: Diese Operatornorm ist tatsächlich eine Norm, insbesondere kann tatsächlich von einem Maximum statt einem Supremum gesprochen werden.

Spezialfall:  $W = k$ . Dann ist  $\operatorname{Hom}(V, W) = V^*$  der **Dualraum**. Durch die Operatornorm erhält man aus einer beliebigen Norm auf  $V$  eine Norm auf dem Dualraum.

<sup>1</sup>Hier anders formuliert als für allgemeine Bilinearformen, denn Nichtnegativität folgt bereits aus Dreiecksungleichung

**Beispiel 6.41. “Mannheim-Norm:”**

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_0 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \sum_i |x_i| \end{aligned}$$

**Beispiel 6.42. Maximumsnorm:**

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \max\{|f(z)|\} \end{aligned}$$

Provokation: Die Beispiele fügen sich in zwei unendliche Reihen - eine für Summen und eine für Integrale - ein. Es existieren also zwei Normen  $\|\cdot\|_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Frage: Kommt die Mannheim-Norm von einem Skalarprodukt?

**Beispiel 6.43.** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm. Sei  $W$  ein Untervektorraum von  $V$ . Dann ist die Einschränkung  $\|\cdot\|_W : W \rightarrow \mathbb{R}$  wieder eine Norm.

**Definition 6.44.** Ein **normierter Vektorraum** ist ein Vektorraum mit einer Norm. Ein Vektor aus einem normierten Vektorraum heißt normiert, wenn er Norm 1 hat.

## 6.4 Metriken

**Definition 6.45.** Sei  $M$  eine Menge. Eine Metrik ist eine Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass gilt:

1. Symmetrie:  $\forall a, b \in M : d(a, b) = d(b, a)$
2. Dreiecksungleichung:  $\forall a, b, c \in M : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$
3. Positive Definitheit:  $d(a, b) \geq 0$  und  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

**Beispiel 6.46.** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\begin{aligned} d : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \|\vec{x} - \vec{y}\| \end{aligned}$$

eine Metrik.

**Beispiel 6.47.** Sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph. Dann ist die Länge des kürzesten Weges zwischen zwei Punkten eine Metrik. Die Erdős-Zahl induziert dementsprechend eine Metrik auf der Menge der Mathematiker.

**Beispiel 6.48.** Die bescheuerte Metrik (auch bekannt als diskrete Metrik). Sei  $M$  eine Menge. Dann ist folgende Abbildung eine Metrik:

$$\begin{aligned} d : M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

## 6.5 Orthogonalität

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Euklidischer oder Unitärer Vektorraum.

**Definition 6.49.** Nenne Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$  orthogonal zueinander, wenn  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ . Wir schreiben dann auch  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

**Definition 6.50.** Seien  $A, B \subset V$  Untervektorräume von  $V$ . Wir nennen  $A$  orthogonal auf  $B$ , wenn

$$\forall \vec{a} \in A, \vec{b} \in B : \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$



**Definition 6.51.** Sei  $A \subset V$  ein Untervektorraum von  $V$ . Wir definieren:

$$A^\perp = \{\vec{v} \in V \mid \forall \vec{a} \in A : \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = 0\}$$

Achtung:  $A^\perp$  ist manchmal auch definiert als  $A^\perp = \{f \in V^* \mid A \subset \ker(f)\}$ . Dies ist nicht die gleiche Menge, allerdings sind diese Räume kanonisch isomorph.

**Definition 6.52.** Sei  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren. Wir nennen die Familie orthogonal, falls  $\forall i \neq j : \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ . Wir nennen die Familie orthonormal, wenn zusätzlich  $\forall i : \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 1$ . Eine orthonormale Basis nennen wir Orthonormalbasis :).

**Satz 6.53.** Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  und  $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ . Sei  $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \cdot \vec{v}_1$ . Dann gilt:

$$1. \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2'$$

$$2. \{\vec{v}_1, \vec{v}_2'\} \text{ ist linear unabhängig genau dann, wenn } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ linear unabhängig ist.}$$

*Beweis.* 1.

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_2', \vec{v}_1 \rangle &= \left\langle \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \cdot \vec{v}_1, \vec{v}_1 \right\rangle \\ &= \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \cdot \vec{v}_1, \vec{v}_1 \right\rangle \\ &= \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle \\ &= \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Satz 6.54.** Sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann lässt sich jede Orthonormalbasis  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$  von  $U$  zu einer Orthonormalbasis  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_n\}$  von  $V$  ergänzen.

*Beweis.* Absteigende Induktion über die Dimension von  $U$ .

1. Induktionsbasis:

Sei  $\dim U = \dim V$ . Da  $U \subseteq V$  und da alle  $n$ -Dimensionalen  $k$ -Vektorräume isomorph sind gilt dann auch  $U = V$ , also ist jede Orthonormalbasis von  $U$  bereits eine Orthonormalbasis von  $V$ .

2. Induktionsschritt:

Sei  $\dim U < \dim V$ . Dann existiert ein Vektor  $\vec{v} \in V \setminus U$ . Da  $\vec{0} \in U$  ist  $\vec{0} \notin V \setminus U$ , also  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Setze nun <sup>2</sup>

$$\vec{v}' = \vec{v} - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i$$

So gilt für jeden Index  $j$ :

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}', \vec{u}_j \rangle &= \left\langle \vec{v} - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i, \vec{u}_j \right\rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \delta_{ij} \\ &= \langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Setze nun  $\vec{u}_{m+1} := \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$ . So gilt:

---

<sup>2</sup>Wir dividieren nicht separat durch  $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle$ , da die Vektoren  $\vec{u}_i$  bereits normal sind, also  $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = 1$ .

$$(i) \quad \forall j \neq m+1 : \vec{u}_{m+1} \top \vec{u}_j$$

$$\langle \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_j \rangle = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \langle \vec{v}', \vec{u}_j \rangle = 0$$

$$(ii) \quad \|\vec{u}_{m+1}\| = 1$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{m+1}\| &= \left\| \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \cdot \vec{v}' \right\| \\ &= \left| \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \right| \cdot \|\vec{v}'\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \cdot \|\vec{v}'\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

**Korollar 6.55.** Jeder endlichdimensionale euklidische / unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

**Definition 6.56.** Dieses Verfahren lässt sich zu einem Algorithmus erweitern, welcher aus einer beliebigen Basis  $(v_i)$  eine Orthonormalbasis  $(u_i)$  konstruiert. Dieser ist bekannt als das **Gram-Schmidt-Verfahren**.

1. Initialisierung:

- Normiere den Ersten Vektor  $\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$

2. Seien  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  bereits konstruiert.

- Definiere  $\vec{v}'_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle \vec{v}_{k+1}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i$
- Normiere  $\vec{u}_{k+1} = \frac{\vec{v}'_{k+1}}{\|\vec{v}'_{k+1}\|}$

**Satz 6.57. Orthogonale Zerlegung:** Seien  $V$  ein endlichdimensionaler unitärer/euklidischer Vektorraum mit  $U \subseteq V$ . Dann lässt sich jedes  $\vec{v} \in V$  eindeutig schreiben als

$$\vec{v} = p(\vec{v}) + r(\vec{v}) \quad p(\vec{v}) \in U, r(\vec{v}) \in U^\perp,$$

es gilt also  $V = U \oplus U^\perp$ .

*Beweis.* Angenommen  $\vec{v} = p_1(\vec{v}) + r_1(\vec{v}) = p_2(\vec{v}) + r_2(\vec{v})$ . Sei

$$\vec{w} = p_1(\vec{v}) - p_2(\vec{v}) = r_2(\vec{v}) - r_1(\vec{v})$$

Also  $\vec{w} = p_1(\vec{v}) - p_2(\vec{v}) \in U$  und  $\vec{w} = r_2(\vec{v}) - r_1(\vec{v}) \in U^\perp$ , also  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$ , also  $\vec{w} = 0$ , also  $p_1(\vec{v}) = p_2(\vec{v})$  und  $r_1(\vec{v}) = r_2(\vec{v})$ . Also ist die Darstellung eindeutig.

Sei  $\vec{v} \in V$  und  $(u_i)$  eine Orthonormalbasis von  $U$ . Definiere

$$r(\vec{v}) = \vec{v} - \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i$$

Für jeden Index  $j$  gilt  $\langle r(\vec{v}), \vec{u}_j \rangle = 0$ , also  $r(\vec{v}) \in U^\perp$ . Definiere nun zusätzlich

$$p(\vec{v}) = \vec{v} - r(\vec{v}) = \sum_{i=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \cdot \vec{u}_i \in U$$

Somit haben wir die gewünschte Zerlegung gefunden.

□

**Anmerkung 6.58.** Die Abbildung  $p$  ist linear, wir nennen sie die **orthogonale Projektion auf  $U$** .

**Beobachtung 6.59.** Die Orthogonale Projektion minimiert den Abstand -  $p(\vec{v})$  ist der nächste Punkt aus  $U$  zu  $V$  bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\|\vec{w} - \vec{v}\| &= \|p(\vec{v}) + \vec{w} - p(\vec{v}) - \vec{v}\| \\ \Rightarrow \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 &= \|p(\vec{v}) + \vec{w} - p(\vec{v}) - \vec{v}\|^2 \\ &= \|p(\vec{v}) - \vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + \langle p(\vec{v}) - \vec{v}, \vec{w} - p(\vec{v}) \rangle + \langle \vec{w}', p(\vec{v}) - \vec{v} \rangle \\ &\geq \|p(\vec{v}) - \vec{v}\|^2\end{aligned}$$

□

**Satz 6.60.** *Eigenschaften des Orthogonalen Komplements:*

1. Es gilt  $U^\perp \cong U^0 := \{f \in V^* (= \text{Hom}(V, k)) \mid U \subseteq \ker(f)\}$ .  
Genauer: Sei  $s : V \rightarrow V^*, \vec{v} \mapsto \langle \_, \vec{v} \rangle$ . Dann gilt  $s(U^\perp) = U^0$  und umgekehrt für die Inverse  $s^{-1}$ .
2. Es gilt  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
3. Es ist  $V = U \oplus U^\perp$  (Also  $U \cap U^\perp = \{0\}$  und  $V = U + U^\perp$ )
4. Es gilt  $U = (U^\perp)^\perp$

*Beweis.*

- 1.
- 2.
3. Sei  $v \in U \cap U^\perp$ . Weil  $v \in U^\perp$  ist, gilt  $\forall u \in U : \langle v, u \rangle = 0$ . Insbesondere gilt  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ , also  $\vec{v} = \vec{0}$ .  
  
Nach Dimensionalformel gilt  $\dim U + \dim U^\perp = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp)$ , also  $\dim U + \dim U^\perp = \dim U + (\dim V - \dim U) + 0 = \dim V$ , also  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ , also  $U + U^\perp = V$ .
4. Es gilt  $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$ . Es gilt zusätzlich  $\forall \vec{u} \in (U^\perp)^\perp : \forall \vec{v} \in U^\perp : \vec{u} \perp \vec{v}$ , also  $\vec{u} \in U$ .

□

**Satz 6.61.** *Es gibt eine kanonische Identifikation, also einen kanonischen Isomorphismus, zwischen dem Quotientenvektorraum  $V/U$  und dem Orthogonalraum  $U^\perp$ .*

*Beweis.* Wir vergleichen die Quotientenabbildung  $q : V \rightarrow V/U$  mit der orthogonalen Projektion  $\pi : V \rightarrow U^\perp$ . Wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{q} & V/U \\ \downarrow id & & \downarrow \eta \\ V & \xrightarrow{\pi} & U^\perp \end{array}$$

□

Wobei  $\eta$  gemäß universeller Eigenschaft eindeutig ist. Wir wissen, dass  $\pi$  surjektiv ist, also ist  $\pi$  auch injektiv. Also ist  $id \circ \pi$  bijektiv, dementsprechend ist auch  $q \circ \eta$  bijektiv, also ist insbesondere  $\eta$  bijektiv.

## 6.6 Die adjungierte Abbildung

Situation: Seien  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  und  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$  endlichdimensionale Euklidische Vektorräume mit Identifikationsabbildungen  $s_v : V \rightarrow V^*$  und  $s_w : W \rightarrow W^*$ .

Problem: Sei  $f : V \rightarrow W$  linear mit zugehöriger Rückzugsabbildung:

$$\begin{aligned} f^* : W^* &\rightarrow V^* \\ (\varphi : W &\rightarrow \mathbb{R}) \mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Wir suchen nun eine Abbildung  $f^{ad}$ , durch die folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{f^{ad}} & W \\ \downarrow s_v & & \downarrow s_w \\ V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \end{array}$$

**Satz 6.62.** Für die adjungierte Abbildung  $f^{ad}$  gilt:

$$\forall \vec{v} \in V, \vec{w} \in W : \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle_W = \langle \vec{v}, f^{ad}(\vec{w}) \rangle_V$$

*Beweis.* Per Definition ist:

$$\begin{aligned} f^{ad} &= s_v^{-1} \circ f^* \circ s_w \\ \Leftrightarrow s_v \circ f^{ad} &= f^* \circ s_w \end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichheit von Abbildungen  $W \rightarrow V^*$ . Sei also ein  $\vec{w} \in W$  gegeben. Dann ist

$$s_v \circ f^{ad}(\vec{w}) = f^* \circ s_w(\vec{w}) \in V^*$$

Also  $\forall \vec{v} \in V$ :

$$s_v \circ f^{ad}(\vec{w})(\vec{v}) = f^* \circ s_w(\vec{w})(\vec{v})$$

Per Definition von  $s_v$  und  $s_w$  ist dies genau:

$$\langle \vec{v}, f^{ad}(\vec{w}) \rangle_V = (\langle \cdot, \vec{w} \rangle_W \circ f)(\vec{v}) = \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle_W$$

□

**Proposition 6.63.** Diese Eigenschaft ist eine universelle Eigenschaft, welche  $f^{ad}$  eindeutig festlegt.

*Beweis.* Wenn  $f^{ad}$  und  $f_2^{ad}$  Abbildungen sind, welche die Identität erfüllen, gilt

$$\langle \vec{v}, f^{ad}(\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, f_2^{ad}(\vec{w}) \rangle$$

Erinnerung: Wenn  $(\vec{v}_i)$  eine Orthonormalbasis ist, dann gilt  $\forall \vec{v} \in V : \vec{v} = \sum \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$ . Wenn also für  $\vec{v}, \vec{v}' \in V \forall i : \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{v}', \vec{v}_i \rangle$ , dann  $\vec{v} = \vec{v}'$ . Per Definition der adjungierten Abbildungen gilt:

$$\langle \vec{v}_i, f^{ad}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}_i, f_2^{ad}(\vec{w}) \rangle$$

Per universeller Eigenschaften folgt:

$$\langle \vec{v}_i, f^{ad}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}_i, f_2^{ad}(\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{v}_i), \vec{w} \rangle$$

Also  $f^{ad} = f_2^{ad}$ . □

[...]

## Chapter 7

# Orthogonale und unitäre Endomorphismen

**Definition 7.1.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum. Wir nennen einen Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  euklidisch (bzw. unitär), falls für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in V$  folgende Gleichung gilt:

$$\langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

**Lemma 7.2.** Ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow W$  ist orthogonal genau dann, wenn für alle  $\vec{v} \in V$  folgende Gleichung gilt:

$$\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$$

**Satz 7.3.** Sei  $f : V \rightarrow V$  orthogonal (bzw. unitär). Dann gilt folgendes:

1. Für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $f$  gilt  $|\lambda| = 1$ .
2.  $|\det f| = 1$
3. Für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in V$  gilt:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow f(\vec{v}) \perp f(\vec{w})$$

4.  $f$  ist injektiv

5.  $f$  ist ein Isomorphismus mit orthogonaler (bzw. unitärer) Umkehrabbildung  $f^{-1}$

**Korollar 7.4.** Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein endlichdimensionaler euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum. Dann bilden die orthogonalen (bzw. unitären) Abbildungen eine Untergruppe von  $\text{Aut}(V)$ . Wir nennen diese Gruppe die orthogonale Gruppe (bzw. unitäre Gruppe) von  $V$ .

## 7.1 Normalformen unitärer Endomorphismen

**Satz 7.5.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  orthogonal. Dann gibt es eine angeordnete orthonormalbasis  $\mathcal{B}$ , sodass

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} Id_{a \times a} & & \dots & 0 \\ & Id_{b \times b} & & \vdots \\ & & A_1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & & A_k \end{pmatrix}$$

Wobei  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{SO}_2$  (also zweidimensionale Drehmatrizen).

*Beweis.* Folgt nach der nächsten Sektion zur Komplexifizierung, welche zur Vorbereitung des Beweises dient.  $\square$

### 7.1.1 Komplexifizierung

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Wir konstruieren einen komplexen Vektorraum  $V^{\mathbb{C}}$  wie folgt: Wir betrachten die Menge  $V \times V$ , mit folgenden Operationen:

$$\begin{aligned} + : (V \times V) \times (V \times V) &\rightarrow (V \times V) \\ ((\vec{v}_1, \vec{w}_1), (\vec{v}_2, \vec{w}_2)) &\rightarrow (\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_1 + \vec{w}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times (V \times V) &\rightarrow (V \times V) \\ ((a + ib), (\vec{v}, \vec{w})) &\rightarrow (a\vec{v} - b\vec{w}, b\vec{v} + a\vec{w}) \end{aligned}$$

Wir schreiben die Elemente  $\vec{v}, \vec{w} \in V^{\mathbb{C}}$  suggestiv direkt als  $\vec{v} + i\vec{w}$ . Wir definieren zusätzlich die komplexe Konjugation:

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : V \times V &\rightarrow V \times V \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\rightarrow (\vec{v}, -\vec{w}) \end{aligned}$$

Und die kanonische Inklusion:

$$\begin{aligned} \cdot^{\mathbb{C}} : V &\rightarrow V \times V \\ \vec{v} &\rightarrow (\vec{v}, 0) \end{aligned}$$

Mithilfe der Abbildung  $\cdot^{\mathbb{C}}$  fassen wir  $V$  als Teilmenge von  $V^{\mathbb{C}}$  auf. Gegeben  $\vec{v} \in V$  nennen wir  $\vec{v}^{\mathbb{C}} \in V^{\mathbb{C}}$  den komplexifizierten Vektor.

**Lemma 7.6.** *Gegeben eine Basis  $\mathcal{B}$  des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  ist die komplexifizierte Basis  $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$  eine Basis des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $V^{\mathbb{C}}$ .*

Wir können nun lineare Abbildungen  $f$  durch folgende Vorschrift komplexifizieren:

$$f^{\mathbb{C}}(\vec{b}^{\mathbb{C}}) = (f(\vec{b}))^{\mathbb{C}}$$

**Lemma 7.7.** *Sei  $f : V \rightarrow V$  orthogonal. Dann gibt es einen Untervektorraum  $U \subseteq V$ , sodass  $\dim U \in \{1, 2\}$  und  $f(U) \subseteq U$ .*

*Beweis.* Angenommen,  $f$  hat einen reellen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . So ist der gesuchte Raum durch den Raum gegeben, der durch einen dazugehörigen Eigenvektor aufgespannt wird.

Falls kein reeller Eigenwert existiert, muss nach dem Fundamentalsatz der Analysis ein komplexer Eigenwert  $(a + bi) := \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  existieren. So ist  $\bar{\lambda}$  ebenfalls eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, also ebenfalls ein Eigenwert:

$$\begin{aligned} \chi_f(\bar{\lambda}) &= \sum a_i \cdot \bar{\lambda}^i \\ &= \sum a_i \cdot \bar{\lambda}^i \\ &= \sum \bar{a_i} \cdot \bar{\lambda}^i \quad (a_i \in \mathbb{R}) \\ &= \sum \overline{a_i \cdot \lambda^i} \\ &= \overline{\chi_f(\lambda)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wir wissen, dass  $f^{\mathbb{C}}$  einen komplexen Eigenvektor  $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  haben muss. Es gilt  $f(\vec{v}) = \bar{f}(\vec{v})$ , also ist  $\vec{v}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$ .  $\vec{v}$  und  $\bar{\vec{v}}$  sind Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten, also linear unabhängig. Es folgt, dass folgende Menge ebenfalls unabhängig ist:

$$\left\{ \frac{1}{2}(\vec{v} + \bar{\vec{v}}), \frac{i}{2}(\vec{v} - \bar{\vec{v}}) \right\} = \{(\vec{v}_1, 0), (\vec{v}_2, 0)\}$$

Also ist  $U = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  ein zweidimensionaler reeller Untervektorraum von  $V$  mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$

Da orthogonale Abbildungen Isomorphismen sind gilt sogar  $f(U) = U$ . Es folgt, dass  $f|_U : U \rightarrow U$  ebenfalls orthogonal ist.

[...]



**Satz 7.8. THEOREM**

*Beweis.* Per Induktion über  $n := \dim V$ .

- (i) Induktionsbasis:  $n = 1$ . In diesem Fall ist  $f = \pm \text{Id}_V$ , also sind wir fertig durch Wahl einer beliebigen Orthonormalbasis (wobei ohnehin nur  $\{+1\}$  oder  $\{-1\}$  als Basis in Frage kommen)
- (ii) Induktionsschritt: Sei  $n > 1$  und sei die Behauptung für alle orthonormalen Endomorphismen von Vektorräumen kleinerer Dimensionen schon bewiesen.

Fall 1:  $f$  hat einen reellen Eigenwert  $\lambda$ . Sei  $\vec{u} \in V$  ein Eigenvektor und sei  $U = \langle \vec{u} \rangle$ . Dann gilt  $f(U) = U$  und  $f(U^\perp) = U^\perp$ ,  $U^\perp$  hat Dimension  $n - 1$ . Jetzt ist  $f|_{U^\perp}$  ein orthogonaler Endomorphismus von  $U^\perp$ , also gibt es per Induktionsannahme eine Orthonormalbasis  $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1} \in U^\perp$ , sodass die Aussage gilt. Dann ist  $B \cup \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Nach Umsortieren ist es eine Basis mit den gesuchten Eigenschaften.

Fall 2:  $f$  hat keinen reellen Eigenwert. Nach Vorbereitung 2 gibt es einen Untervektorraum  $U \subseteq V$  mit  $f(U) = U$  und  $\dim U \in \{1, 2\}$ . Da  $f$  keinen reellen Eigenwert hat, ist  $\dim U \neq 1$ , also  $\dim U = 2$ . Desweiteren kann  $f|_U$  keine Spiegelung sein, sonst gäbe es ebenfalls einen reellen Eigenwert, also ist  $f|_U$  eine Drehung ( $\det(f|_U) = 1$ ) und für eine ONB  $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  ist  $\text{Mat}_{B_1}^{B_1}(f|_U) \in \mathcal{SO}_2$ . Wählen wir eine Basis  $B_2 = (\vec{w}_i)_{i \leq n-2}$  von  $U^\perp$ , so ist nach Induktionsannahme  $B = B_1 \cup B_2$  eine Orthonormalbasis mit den gesuchten Eigenschaften.

□

## 7.2 Selbstadjungierte Endomorphismen

**Definition 7.9.** Ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  heißt selbstadjungiert, wenn  $f = f^{ad}$ , also:

$$\langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle$$

**Beispiel 7.10.** Sei  $V = \mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt,  $A \in \text{Mat}(n \times n)$ ,  $f : \vec{v} \rightarrow A\vec{v}$ . Die Abbildung  $f$  ist selbstadjungiert gdw:

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle &\Leftrightarrow \langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A\vec{w} \rangle \\ &\Leftrightarrow (A\vec{v})^\top \vec{w} = \vec{v}^\top A\vec{w} \\ &\Leftrightarrow \vec{v}^\top \cdot A^\top \cdot \vec{w} = \vec{v}^\top \cdot A \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Durch  $\vec{v}, \vec{w} = e_i, e_j$  erhält man direkt  $A = A^\top$ .

**Beispiel 7.11.** Sei  $V = \mathbb{C}^n$  mit Standardskalarprodukt und  $A = \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$  mit dazugehörigem Endomorphismus  $f$ . Dann ist  $f$  selbstadjungiert gdw.  $A^\top = \overline{A}$ , also  $A$  Hermitsch.

**Proposition 7.12.** Sei  $B$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Dann ist  $f$  selbstadjungiert genau dann, wenn  $\text{Mat}_B^B(f)$  symmetrisch oder Hermitsch ist.

**Satz 7.13.** Alle Eigenwerte einer selbstadjungierten Abbildung sind reell.

*Beweis.* Für den Unitären Fall: Sei  $f$  selbstadjungiert,  $\lambda$  ein Eigenwert und  $\vec{v} \in V \setminus \{0\}$  ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{v}), \vec{v} \rangle &= \langle \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle &= \langle \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

Es gilt  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$ , also  $\lambda = \overline{\lambda}$ , also  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

□

**Korollar 7.14.** Selbstadjungierte Endomorphismen sind diagonalisierbar.

**Satz 7.15.** Für jede selbstadjungierte Abbildung  $f$  existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$ .

*Beweis.* Per Induktion über  $n = \dim V$ .

(IB) Sei  $\vec{v} \in V$  ein Eigenvektor mit Länge 1. Dann ist  $\{\vec{v}\}$  die gesuchte Basis.

(IV) Sei  $n > 1$ . Sei die Aussage für selbstadjungierte Endomorphismen von Vektorräumen kleinerer Dimension bereits bewiesen. Wir wissen: es existiert ein reeller Eigenwert  $\lambda$ . Sei  $\vec{u} \in V$  ein zugehöriger Eigenvektor der Länge 1 und  $U = \langle \vec{u} \rangle$ . Sei  $\vec{\eta} \in f(U^\perp)$ . Wähle  $\vec{\eta}' \in U^\perp$ , sodass  $\vec{\eta} = f(\vec{\eta}')$ . Es gilt:

$$\langle f(\vec{\eta}'), \vec{u} \rangle = \langle \vec{\eta}', f(\vec{u}) \rangle = \lambda \langle \vec{\eta}', \vec{u} \rangle = 0$$

Also  $\langle \eta, \vec{u} \rangle = 0$ , also  $\eta \in U^\perp$ , also  $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ .

Behauptung:  $f|_{U^\perp}$  ist selbstadjungiert. Da  $\dim U^\perp < \dim V$  liefert die Induktionsannahme eine Orthonormalbasis  $B = (\vec{v}_i)_{i < n}$  von  $U^\perp$ . Dann ist  $\vec{u} \cup B$  eine gesuchte Basis.

□

**Proposition 7.16.** Sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann gibt es eine orthogonale Matrix  $S$ , sodass  $SAS^{-1}$  diagonal ist.

## 7.3 Hauptachsentransformation

**Satz 7.17.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , sei  $s : V \times V \rightarrow k$  eine symmetrische oder Hermitesche Form. Weiter sei  $\mathcal{A}$  eine angeordnete Basis von  $V$  und  $A = \text{Mat}_{\mathcal{A}}(s)$  die dazugehörige Matrix. Dann gibt es eine Basis  $\mathcal{B} \subset V$ , sodass:

1. Die Matrix  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$  diagonal ist,
2. Die Koordinatenwechselmatrix  $S = \text{Mat}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$  orthogonal oder unitär ist,
3. Die Einträge der Diagonalmatrix  $B$  reelle Eigenwerte von  $A$  sind.

**Definition 7.18.** In dieser Situation nennen wir die Vektoren aus  $\mathcal{B}$  die **Hauptachsen von  $s$**  und den Basiswechsel von  $\mathcal{A}$  zu  $\mathcal{B}$  die **Hauptachsentransformation**.

**Satz 7.19.** In der Situation von Satz ?? sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Form  $s$  ist positiv definit.
2. Alle Eigenwerte von  $A$  sind größer als Null.

### 7.3.1 Anwendung - Rotation von Körpern im Raum

Wir betrachten Lineare Bewegung / Translation, also einen Körper mit Masse  $m$  der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Der Impuls ist gegeben durch  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ . Es stellt sich heraus, dass jeder Begriff der linearen Bewegung einen Analogen Begriff in der Rotation hat, z.B. Impuls  $\leftrightarrow$  Drehimpuls - Bei symmetrischer Massenverteilung ist der Drehimpuls gegeben durch Trägheitsmoment  $\cdot$  Drehgeschwindigkeit. Im Allgemeinen ist die Formel etwas komplizierter (Drehimpuls = Trägheitstensor  $\cdot$  Drehgeschwindigkeit):

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

Wobei die Richtung von  $\vec{\omega}$  die Rotationsachse ist und die Länge der Rotationsgeschwindigkeit entspricht. In dieser spezifischen Situation ist der Trägheitstensor  $\Theta$  einfach eine  $3 \times 3$ -Matrix - spezifischer handelt es sich um eine *symmetrische* Matrix! Eine Beobachtung: Drehimpuls und Drehgeschwindigkeit zeigen genau dann in die selbe Richtung, wenn die Drehachse ein Eigenvektor des Trägheitstensors ist! Der sylvestersche Trägheitssatz sagt uns nun, dass es genau drei Richtungen gibt, in denen man ohne Umwucht drehen kann.

### 7.3.2 Anwendung - Kovarianz

Untersucht man gleichzeitig Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , so bilden die Kovarianzen der Zufallsvariablen eine symmetrische **Kovarianzmatrix**:

$$A_{ij} = \text{Kov}(i, j), \quad A_{ii} = \text{Var}(i)$$

Da die Matrix symmetrisch ist, existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Welche Bedeutung hat ein Eigenvektor der Kovarianzmatrix? Gegeben einen Vektor  $\vec{v} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$ , betrachte die Zufallsvariable  $X_{\vec{v}} = \sum \lambda_i X_i$ . Zentrale Beobachtung: Die Kovarianzmatrix gibt ebenfalls die Kovarianz solcher Linearkombinationen aus Zufallsvariablen - Gegeben  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\text{Kov}(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v}^\top A \vec{w}$$

Die Hauptachsentransformation erlaubt uns nun, das Problem zu reduzieren, indem als Basis die “Richtungen” der Kovarianzen genommen werden, und die dazu orthogonalen Vektoren. Daraufhin können dann Achsen, entlang denen die Varianz gering ist, ignoriert werden, ohne die Daten zu sehr zu verfälschen.

# Chapter 8

## Multilineare Algebra

**Definition 8.1.** Seien  $U, V, W$  Vektorräume. Eine **bilineare Abbildung** ist eine bilineare Abbildung  $U \times V \rightarrow W$ .

**Definition 8.2.** Seien  $V_1, \dots, V_n, W$  Vektorräume. Eine **multilineare Abbildung** ist eine bilineare Abbildung  $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ .

Ein Beispiel für eine Multilineare Abbildung ist die Determinante einer Matrix, aufgefasst als Funktion der Spalten (bzw. Zeilen) der Matrix.

### 8.1 Das Tensorprodukt

**Definition 8.3.** Sei  $k$  ein Körper und  $U, V$  zwei  $k$ -Vektorräume. Ein Tensorprodukt von  $U$  und  $V$  ist ein  $k$ -Vektorraum  $T$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $\tau : U \times V \rightarrow T$ , sodass es für alle bilinearen Abbildungen  $s : U \times V \rightarrow W$  genau eine lineare Abbildung  $\eta : T \rightarrow W$  gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\tau \text{ bilinear}} & T \\ \downarrow id & & \downarrow \exists! \eta \text{ linear} \\ U \times V & \xrightarrow{s \text{ bilinear}} & W \end{array}$$

**Satz 8.4.**  $\eta$  ist ein Isomorphismus

*Beweis.* Nach universeller Eigenschaft der Tensorprodukte existiert genau eine lineare Abbildung  $\mu : T_2 \rightarrow T_1$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\tau_2 \text{ bilinear}} & T_2 \\ \downarrow id & & \downarrow \exists! \mu \text{ linear} \\ U \times V & \xrightarrow{\tau_1 \text{ bilinear}} & T_1 \end{array}$$

Wir betrachten nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 U \times V & \xrightarrow{\tau_1 \text{ bilinear}} & T_1 \\
 \downarrow id & & \downarrow \exists! \eta \text{ linear} \\
 U \times V & \xrightarrow{\tau_2 \text{ bilinear}} & T_2 \\
 \downarrow id & & \downarrow \exists! \mu \text{ linear} \\
 U \times V & \xrightarrow{\tau_1 \text{ bilinear}} & T_1
 \end{array}$$

Da die obere Hälfte kommutiert gilt  $\mu(\eta(\tau_1(v))) = \mu(\tau_2(v))$ . Da die untere Hälfte kommutiert gilt  $\mu(\tau_2(v)) = \tau_1(v)$ . Also kommutiert auch das kombinierte Diagramm.

Das folgende Diagramm kommutiert trivial:

$$\begin{array}{ccc}
 U \times V & \xrightarrow{\tau_1 \text{ bilinear}} & T_1 \\
 \downarrow id & & \downarrow id \\
 U \times V & \xrightarrow{\tau_1 \text{ bilinear}} & T_1
 \end{array}$$

Also gibt es zwei Abbildungen, welche das Diagramm kommutieren lassen:  $id$  und  $\mu \circ \eta$ . Aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts  $T_1$  ist die Abbildung, welche das Diagramm kommutieren lässt, aber eindeutig. Also gilt  $\mu \circ \eta = id$ . Der Beweis für  $\eta \circ \mu = id$  folgt analog, wobei  $T_2$  und  $T_1$  vertauscht werden.  $\square$

**Satz 8.5.** *Tensorprodukte existieren.*

Dieser Satz wird einiges an Arbeit benötigen. Wir führen zuerst neue Notation und einige Definitionen ein.

**Katastrophale Notation:** Da je zwei Tensorprodukträume isomorph sind redet man in der Literatur von “dem Tensorprodukt” als wäre es eindeutig. (das selbe Problem hat “der” Quotientenraum  $V/U$ ). Man bezeichnet alle Tensorprodukte von  $U$  und  $V$  mit  $U \otimes V$ . Gegeben zwei Vektoren  $\vec{u} \in U$ ,  $\vec{v} \in V$  schreibt man statt  $\tau(\vec{u}, \vec{v})$  auch  $\vec{u} \otimes \vec{v} \in U \otimes V$ .

### 8.1.1 Direkte Produkte

**Ziel:** Gegeben zwei Vektorräume  $V, W$  existiert der Produktraum  $V \times W$ . Wir wollen dies für beliebig viele Faktoren.

**Konstruktion:** Wir formalisieren das Konzept einer Folge von Vektoren. Sei  $I$  eine Menge. Sei  $(V_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $k$ -Vektorräumen. Dann betrachte

$$\begin{aligned}
 \prod_{i \in I} V_i &= \{(\vec{v}_i)_{i \in I} \mid \forall i : \vec{v}_i \in V_i\} \\
 \bigoplus_{i \in I} V_i &= \left\{(\vec{v}_i)_{i \in I} \mid \forall i : \vec{v}_i \in V_i \text{ und nur endlich viele } \vec{v}_i \neq \vec{0}\right\}
 \end{aligned}$$

**Einfach:** Auf  $\prod V_i$  lässt sich durch komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation eine  $k$ -Vektorraumstruktur definieren. Diesen Vektorraum nennen wir das **direkte Produkt** der Familie  $(V_i)_{i \in I}$ .

**Spezialfall:** Es gibt einen Vektorraum  $V$ , sodass  $\forall i : V_i = V$ . In diesem Spezialfall schreibt man für das direkte Produkt auch  $V^I$  (z.B.  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  für Folgen reeller Zahlen).

**Beobachtung 8.6.** In diesem Spezialfall ist das Produkt  $\prod_{i \in I} v_i = V^I$  genau die Menge der Abbildungen  $I \rightarrow V$ . Hier sieht man explizit, dass  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  die Menge der Abbildungen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sind.

Das direkte Produkt ist durch eine universelle Eigenschaft gegeben :D

**Definition 8.7.** Sei ein Index  $j \in I$  gegeben. Die Abbildung

$$\begin{aligned} p_j : \prod_{i \in I} V_i &\rightarrow V_j \\ (\vec{v}_i)_{i \in I} &\rightarrow \vec{v}_j \end{aligned}$$

Ist eine lineare Abbildung, welche als die kanonische Projektion auf die  $j$ -te Komponente bezeichnet wird.

**Satz 8.8.** Sei  $W$  ein  $k$ -Vektorraum und sei  $(\varphi_i : W \rightarrow V_i)_{i \in I}$  eine Familie von linearen Abbildungen. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $\eta : W \rightarrow \prod_{i \in I} V_i$ , sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\exists! \eta} & \prod_{i \in I} V_i \\ \downarrow id & & \downarrow p_j \\ W & \xrightarrow{\varphi_j} & V_j \end{array}$$

**Definition 8.9.** Gegeben Index  $j$ , betrachte

$$\begin{aligned} \iota_j : V_j &\rightarrow \bigoplus_i V_i \\ \vec{v} &\mapsto \left( \begin{array}{cc} \vec{v} & i = j \\ \vec{0}_{V_i} & i \neq j \end{array} \right)_i \end{aligned}$$

Behauptung: Diese Abbildung ist linear und injektiv.

**Proposition 8.10.** Gegeben  $\vec{v} \in \bigoplus_i V_i$  haben wir

$$\vec{v} = \sum_i \iota_i(p_i(\vec{v}))$$

**Satz 8.11. Universelle Eigenschaft:** Gegeben einen  $k$ -Vektorraum  $W$  und für jeden Index  $i$  eine lineare Abbildung

$$\varphi_i : V_i \rightarrow W.$$

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\mu : \bigoplus_i V_i \rightarrow W,$$

sodass für alle indizes  $j$  das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{\iota_j} & \bigoplus_{i \in I} V_i \\ \downarrow id & & \downarrow \exists! \mu \\ V_j & \xrightarrow{\varphi_j} & W \end{array}$$

*Beweis.* Seien zwei Abbildungen  $\mu_1, \mu_2$  gegeben wie im Satz. Schreibe  $\vec{v}$  als Summe von Bildern der kanonischen Projektionen:

$$\vec{v} = \sum_i \iota_i(p_i(\vec{v}))$$

. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu_1(\vec{v}) &= \sum \mu_1(\iota_i(p_i(\vec{v}))) \\ &= \sum \varphi(p_i(\vec{v})) \\ &= \sum \mu_2(\iota_i(p_i(\vec{v}))) \\ &= \mu_2(\vec{v}) \end{aligned}$$

Also ist die Eindeutigkeit Bewiesen. Existenz folgt durch:

$$\begin{aligned} \mu : \bigoplus V_i &\rightarrow W \\ \vec{v} &\mapsto \sum_i \varphi_i(p_i(\vec{v})) \end{aligned}$$

□

**Anwendung:** Es gibt einen kanonischen Isomorphismus zwischen

$$\left(\bigoplus V_i\right)^* \simeq \prod (V_i^*)$$

Also ist  $(\bigoplus V_i)^*$  gigantisch viel größer als der Raum  $\bigoplus V_i$  selbst!

*Beweis.*

Schritt 1: Konstruktion einer linearen Abbildung zwischen den Räumen.

Betrachte für alle indizes  $j$  die kanonische Injektion  $\iota_j$ . Betrachte die dazugehörige Abbildung zwischen den Dualräumen:

$$(\iota_j)^* : \left(\bigoplus V_i\right)^* \rightarrow V_j^*$$

Die universelle Eigenschaft des Produkts von  $V_j^*$  liefert eine eindeutige lineare Abbildung

$$\eta : \left(\bigoplus V_i\right)^* \rightarrow V_j^*$$

Schritt 2: Injektivität.

Sei  $\varphi \in \ker(\eta)$ . Zu zeigen ist, dass  $\varphi$  die Nullabbildung ist. Erinnerung: Kann  $\vec{v}$  schreiben als Summe von Vektoren im Bild der Inklusionsabbildungen. Es genügt also

$$\forall j : \forall \vec{v} \in \text{Im}\{\iota_j\} : \varphi(\vec{v}) = 0$$

Sei also ein Index  $j$  gegeben und sei  $\vec{v} = \iota_j(\vec{v}_j)$  für ein geeignetes  $\vec{v}_j \in V_j$ . Da das Diagramm kommutiert, ist  $(\iota_j)^*(\varphi) = \varphi \circ \iota_j = 0$

Schritt 3: Surjektivität

- Sei eine Familien von linearen Abbildungen  $(f_i)_{i \in I \in \Pi(V^*)}$  gegeben. Wir brauchen eine lineare Abbildung

$$\varphi : \bigoplus V_i \rightarrow k$$

Eine mögliche Wahl ist:

$$(v_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i(p_i((v_i)_{i \in I}))$$

Dass diese Abbildung die richtige ist folgt aus der Kommutativität des Diagramms (This proof is left as an exercise for the reader.) - Zu zeigen ist:

$$\eta(\varphi) = (f_i)_{i \in I}$$

Dazu verwendet man:

$$\eta(\varphi) = (f_i) \Leftrightarrow \forall j \in I : p_j(\eta(\varphi)) = p_j((f_i)_{i \in I})$$

□

## 8.2 Existenz des Tensorprodukts

Situation: Gegeben Körper  $k$ , zwei  $k$ -Vektorräume  $U, V$  wollen wir einen Vektorraum  $T$  und eine bilineare Abbildung  $\tau : U \times V \rightarrow T$  finden, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\tau \text{ bilinear}} & T \\ \downarrow id & & \downarrow \exists! \eta \text{ linear} \\ U \times V & \xrightarrow{s \text{ bilinear}} & W \end{array}$$

Konstruktion 1: Betrachte den durch die Menge  $U \times V$  frei erzeugten Vektorraum, also

$$T' = k^{(U \times V)}$$

Dieser ist identifiziert mit der Menge der Abbildungen  $U \times V \rightarrow k$ , die fast überall 0 sind. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \tau' : U \times V &\rightarrow T' \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto e_{\vec{u}, \vec{v}} \end{aligned}$$

Wobei  $e_{\vec{u}, \vec{v}}$  die Abbildung ist, welche das Paar  $(\vec{u}, \vec{v})$  auf  $1_k$  abbildet und alle anderen Paare auf  $0_k$ .

Eigenschaft der Konstruktion: Sei  $W$  irgendein Vektorraum und sei  $s : U \times V \rightarrow W$  irgendeine bilineare Abbildung. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $\eta' : T' \rightarrow W$ , sodass das Tensorprodukt diagramm kommutiert.

*Beweis.* Diese Abbildung ist induziert durch  $\eta'(e_{(\vec{u}, \vec{v})}) = s(\vec{u}, \vec{v})$ . Professor Kebekus nennt dies den "Satz von Wünsch-dir-was". □

Ups, diese Konstruktion ist falsch!  $\tau'$  ist nicht im geringsten bilinear!

Überlegung: Wenn  $\tau'$  tatsächlich bilinear wäre, dann wäre

$$\tau'(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = \lambda \tau'(\vec{u}, \vec{v})$$

also:

$$e_{(\lambda \vec{u}, \vec{v})} = \lambda \cdot e_{(\vec{u}, \vec{v})}$$

etc.

Reparatur:

Sei

$$M_1 = \{e_{(\vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2, \vec{v})} - e_{\vec{u}_1, \vec{v}} - \lambda e_{\vec{u}_2, \vec{v}} \mid \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U, \lambda \in k, \vec{v} \in V\}$$

und

$$M_2 = \{e_{(\vec{u}, \vec{v}_1 - \lambda \vec{v}_2)} - e_{\vec{u}, \vec{v}_1} - \lambda e_{\vec{u}, \vec{v}_2} \mid \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U, \lambda \in k, \vec{v} \in V\}$$

Betrachte nun

$$T = T' / \langle M_1, M_2 \rangle$$



und  $\tau = \tau' \circ \text{quot}$ . Die Quotientenabbildung teilt alles raus, was die Bilinearität stört, also ist  $\tau$  bilinear.

Sei nun wieder ein Vektorraum  $W$  und eine bilineare Abbildung  $s : U \times V \rightarrow W$  gegeben. Die universelle Eigenschaft des Quotientenraums sagt, es existiert genau ein  $\eta$ , sodass das Quotientenraumdiagramm kommutiert, falls  $\langle M_1, M_2 \rangle \subseteq \ker(\eta')$ . Das gilt, weil  $s$  bilinear ist.

Wir werden nun versuchen, das Tensorprodukt besser zu verstehen.

**Definition 8.12.** Seien  $U, V$  Vektorräume. Wir bezeichnen das Tensorprodukt mit  $U \otimes V$ . Die bilineare Abbildung  $\tau$  bezeichnen wir mit  $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes V$ . Die Elemente von  $U \otimes V$  werden als **Tensoren** bezeichnet. Elemente im Bild von  $\otimes$  nennen wir **reine Tensoren**.

**Lemma 8.13.** Der Tensor  $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$  ist nicht rein.

*Beweis.* Angenommen, wir hätten

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 = \vec{v} \otimes \vec{w}$$

□

Reine Tensoren bilden im Allgemeinen keinen Untervektorraum.

Für einen reinen Tensor  $t$  ist die Darstellung  $t = \vec{u} \otimes \vec{v}$  in der Regel nicht eindeutig. Das folgt zum Beispiel bereits aus der Bilinearität von  $\otimes$ :

$$(2\vec{u}) \otimes \vec{v} = \vec{u} \otimes (2\vec{v}) = 2(\vec{u} \otimes \vec{v})$$

Es gibt aber auch viele Beispiele, in denen sich die möglichen Vektoren auf keine Weise ähnlich sind. Die Frage, ob ein gegebener Tensor rein ist, ist im Allgemeinen schwierig.

**Satz 8.14.** Sei  $R \subseteq U \otimes V$  die Menge der reinen Tensoren. Dann gilt

$$\langle R \rangle = U \otimes V.$$

Also ist jedes Tensorprodukt eine Linearkombination reiner Tensoren.

*Beweis.*

□

**Satz 8.15.** Seien  $(u_i)_{i \in I}$  und  $(v_j)_{j \in J}$  Basen von  $U$  und  $V$ . Dann ist

$$(u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$$

eine Basis des Tensorprodukts.

**Beispiel 8.16.**

$$\begin{aligned} U^* \otimes V &\rightarrow \text{Hom}(U, V) \\ \phi \otimes \vec{v} &\mapsto (\vec{u} \mapsto \phi(\vec{u})\vec{v}) \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Abbildung zwischen Räumen der gleichen Dimension, also ein Isomorphismus! Der Raum  $\text{Hom}(U, V)$  ist also ein Tensorprodukt!

Eine Konsequenz ist nun, dass Tensorprodukte endlichdimensionaler Räume als Matrizen betrachtet werden können! Genauer:

**Definition 8.17.** Sei  $\dim U < \infty$  und  $\dim V < \infty$ . Seien  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  und  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  angeordnete Basen von  $U$  und  $V$ . Wir betrachten die folgende *lexikographisch angeordnete Produktbasis*:

$$\begin{array}{lll} \vec{u}_1 \otimes \vec{v}_1, & \dots & \vec{u}_1 \otimes \vec{v}_m, \\ \vec{u}_2 \otimes \vec{v}_1, & \dots & \vec{u}_2 \otimes \vec{v}_m, \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{u}_n \otimes \vec{v}_1, & \dots & \vec{u}_n \otimes \vec{v}_m, \end{array}$$

### 8.3 Tensorprodukte von Abbildungen und Matrizen

**Definition 8.18.** Sei  $f_1 : U_1 \rightarrow V_1$  und  $f_2 : U_2 \rightarrow V_2$ . Wir definieren folgende Abbildung:

$$U_1 \times U_2 \xrightarrow{f_1 \times f_2} V_1 \times V_2 \xrightarrow{\otimes} V_1 \otimes V_2$$

Diese Abbildung ist bilinear! Also gibt es genau eine lineare Abbildung, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times U_2 & \xrightarrow{\tau_U} & U_1 \otimes U_2 \\ \parallel & & \downarrow \exists! \eta \\ U_1 \times U_2 & \xrightarrow{\tau_V \circ (f_1 \times f_2)} & V_1 \otimes V_2 \end{array}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} f_1 : k^{b_1} &\rightarrow k^{a_1} \\ \vec{v} &\mapsto A_1 \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : k^{b_2} &\rightarrow k^{a_2} \\ \vec{w} &\mapsto A_2 \vec{w} \end{aligned}$$

So erhalten wir das Tensorprodukt von Abbildungen:

$$f_1 \otimes f_2 : (k^{b_1}) \otimes (k^{b_2}) \rightarrow (k^{a_1}) \otimes (k^{a_2})$$

Wir betrachten in den Räumen  $k^i$  die Standardbasen und in den Tensorprodukten die lexikographisch angeordneten Produktbasen  $B_b, B_a$ . Die darstellende Matrix

$$\text{Mat}_{B_b}^{B_a}(f_1 \otimes f_2) \in \text{Mat}((a_1, a_2) \times (b_1, b_2))$$

Wird  $A_1 \otimes A_2$  geschrieben und als **Tensorprodukt** oder **Kroneckerprodukt** von Matrizen bezeichnet.

**Proposition 8.19.** Seien  $f_1 : U_1 \rightarrow V_1, f_2 : U_2 \rightarrow V_2$  linear, alle Räume endlichdimensional. Seien angeordnete Basen  $B_{U_1}, B_{U_2}, B_{V_1}, B_{V_2}$  gegeben. Seien  $B_{U_1 \times U_2}$  und  $B_{V_1 \times V_2}$  die lexikographisch angeordneten Produktbasen. Dann gilt:

$$\text{Mat}_{B_{V_1 \times V_2}}^{B_{U_1 \times U_2}}(f_1 \otimes f_2) = \text{Mat}_{B_{V_1}}^{B_{U_1}}(f_1) \otimes \text{Mat}_{B_{V_2}}^{B_{U_2}}(f_2)$$

### 8.4 Rechenregeln für Tensorprodukte

**Satz 8.20.** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektorräumen. Dann existiert folgender kanonischer Isomorphismus:

$$\left( \bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes V \simeq \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V)$$

**Satz 8.21.** Seien  $A, B, C$  Vektorräume. Dann existiert folgender kanonischer Isomorphismus:

$$(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$$

Das Tensorprodukt ist also assoziativ.

**Definition 8.22.** Haben wir ein Tensorprodukt von mehr als zwei Räumen bezeichnen wir die Elemente der Menge

$$R = \left\{ \bigotimes_{i \in I} \vec{v}_i \mid \vec{v}_i \in V_i \right\} \subseteq \bigotimes_{i \in I} V_i$$

als reine Tensoren. Genau wie im Fall mit zwei Räumen bilden diese Elemente ein Erzeugendensystem des Raums  $\bigotimes_{i \in I} V_i$ .

**Satz 8.23.** Seien  $(v_1^n), \dots, (v_j^n)$  Erzeugendensysteme von  $V_1, \dots, V_n$ . Dann bilden die zugehörigen reinen Tensoren ein Erzeugendensystem des Tensorproduktraums  $\bigotimes V_i$ . Handelt es sich um eine Menge von Basen, bilden die reinen Tensoren eine Basis des Tensorproduktraums.

**Satz 8.24.** Die Tensorproduktabbildung

$$\begin{aligned} \tau : V_1 \times \dots \times V_n &\rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n \\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) &\mapsto \vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_n \end{aligned}$$

ist **multilinear**.

**Satz 8.25.** Das mehrfache Tensorprodukt erfüllt die analoge universelle Eigenschaft zum doppelten Tensorprodukt, für multilineare Abbildungen statt bilinearen Abbildungen.

Das schönste Beispiel einer Multilinearen Abbildung ist die Determinante:

$$\begin{aligned} \det : (\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) &\mapsto \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \end{aligned}$$

Gemäß der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^n & \xrightarrow{\tau} & \bigotimes \mathbb{R}^n \\ \parallel & & \downarrow \exists! \eta \\ (\mathbb{R}^n)^n & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \end{array}$$

Die Determinante lässt sich also auch als lineare Abbildung aus dem Tensorprodukt nach  $\mathbb{R}$  definieren.

**Definition 8.26.** Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum, sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren:

$$V^{\otimes n} = \begin{cases} k & n = 0 \\ \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ mal}} & n > 0 \end{cases}$$

**Proposition 8.27.** Gegeben  $a, b > 0$ , dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$m_{ab} : V^{\otimes a} \times V^{\otimes b} \rightarrow V^{\otimes(a+b)}$$

sodas für alle reinen Tensoren gilt:

$$m_{ab}(\vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_a, \vec{w}_1 \otimes \dots \otimes \vec{w}_b) = \vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_a \otimes \vec{w}_1 \otimes \dots \otimes \vec{w}_b$$

**Proposition 8.28.** Gegeben  $a = 0, b > 0$ , dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$m_{0b} : V^0 \otimes V^b \rightarrow V^b$$

sodass für alle reinen Tensoren gilt:

$$m_{ab}(\lambda, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_b) = \lambda \vec{w}_1 \otimes \dots \otimes \vec{w}_b$$

Analog für  $a > 0, b = 0$  und  $a = b = 0$ .

**Definition 8.29.** Ein  $k$ -Vektorraum  $W$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$m : W \times W \rightarrow W$$

wird als  **$k$ -Algebra** bezeichnet.

**Definition 8.30.** Wir nennen eine Algebra:

- kommutativ, falls

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in W : m(\vec{v}, \vec{w}) = m(\vec{w}, \vec{v})$$

- assoziativ, falls

$$\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in W : m(\vec{v}, m(\vec{w}, \vec{u})) = m(m(\vec{v}, \vec{w}), \vec{u})$$

- "mit Eins", falls  $\vec{e} \in W$  existiert, sodass

$$\forall \vec{w} \in W m(\vec{e}, \vec{w}) = m(\vec{w}, \vec{e}) = \vec{w}$$

**Proposition 8.31.** Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Das Tensorprodukt  $V \otimes V$  bildet mit der Abbildung  $m$  eine assoziative  $k$ -Algebra mit Eins, bekannt als die **Tensoralgebra**.

## Chapter 9

# Die Äußere Algebra

**Definition 9.1.** Seien  $V, W$   $k$ -Vektorräume und  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl. Eine multilineare Abbildung

$$s : V^n \rightarrow W$$

heißt *alternierend*, falls für alle Tupel  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  mit mindestens zwei identischen Einträgen  $\vec{v}_i = \vec{v}_j$  gilt, dass

$$s(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = 0$$

**Lemma 9.2.** Sei  $s$  eine alternierende multilineare Abbildung und  $\sigma = (ij)$  eine Transposition, so ist

$$s(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = -s(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n)})$$

Also ändert sich das Vorzeichen, wenn man zwei der Argumente vertauscht.

*Beweis.* (Im Fall  $n = 3$ ):

$$\begin{aligned} s(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= s(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + s(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1) \\ &= s(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) &= s(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) + s(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \\ &= s(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3) + s(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3) &= 0 \\ \implies s(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + s(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) &= 0 \\ \implies s(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= -s(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) \end{aligned}$$

□

**Lemma 9.3.** Für jede Permutation  $\sigma \in S_n$  und alle Tupel  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in V^n$  gilt:

$$s(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot s(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

**Definition 9.4.** Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum,  $n \in \mathbb{N}$ . Ein  $n$ -faches äußeres Produkt (auch "Dachprodukt" oder "wedge product") ist ein Vektorraum  $T$  zusammen mit einer alternierenden multilinearen Abbildung  $\tau : V^n \rightarrow T$ , sodass für jede alternierende multilineare Abbildung  $s : V^n \rightarrow W$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\eta : T \rightarrow W$  existiert, sodass

$$s = \eta \circ \tau$$

Also kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V^n & \xrightarrow{\tau \text{ alternierend multilinear}} & T \\ \downarrow id & & \downarrow \exists! \eta \text{ linear} \\ V^n & \xrightarrow{s \text{ alternierend multilinear}} & W \end{array}$$

**Lemma 9.5.** *Äußere Produkt existieren und sind eindeutig bis auf kanonischen Isomorphismus.*

**Definition 9.6.** Wir schreiben  $T$  als

$$\bigwedge^n V$$

und  $\tau(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \bigwedge^n V$  als:

$$\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_n$$

**Definition 9.7.** Ein Element  $t \in \bigwedge^n V$  heißt *reines Dach*, wenn  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$  existieren, sodass  $t = \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_n$ .

**Proposition 9.8.** *Jedes Element des Dachproduktraums ist eine endliche Summe reiner Dächer.*

**Proposition 9.9.** *Die Verdachung von Erzeugendensystemen der Basisräume bildet ein Erzeugendensystem des Dachproduktraums.*

**Satz 9.10.** *Die Verdachung von Basen der Basisräume bildet keine Basis des Dachproduktraums!*

*Beweis.* Sei  $V = \mathbb{R}^3$  mit Standardbasis. Dann ist

$$\{\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\}$$

ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^2 V$ . Allerdings folgt aus der Definition über alternierende Abbildungen, dass  $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_i = 0$  und  $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = -\vec{e}_j \wedge \vec{e}_i$ . Also bildet das System keine Basis.  $\square$

**Proposition 9.11.** *Sei  $(\vec{b}_i)$  eine Basis eines Vektorraums  $V$ . Die Menge*

$$\{\vec{b}_{i_1} \wedge \dots \wedge \vec{b}_{i_n} \mid i_k < i_{k+1}\}$$

*bildet eine Basis von  $\bigwedge^n V$ .*

Es folgt, dass der Dachproduktraum eine deutlich niedrigere Dimension als der Tensorproduktraum hat!

**Lemma 9.12.** *Sei  $\dim V = a$ . Dann ist*

$$\dim \bigwedge^n V = \binom{a}{n}$$

**Korollar 9.13.** *Sei  $\dim V = a$ .*

- *Es gilt  $\dim \bigwedge^a V = 1$ .*
- *Sei  $n > a$ . Dann ist  $\bigwedge^n V = \{0\}$ .*

## 9.1 Die Determinante

**Satz 9.14.** *Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum. Die Determinante kann alternativ definiert werden als die Abbildung:*

$$d : V \rightarrow k$$

$$f \mapsto \text{tr} \left( \bigwedge^n f \right)$$

Wir betrachten den Fall  $d_m : f \mapsto \text{tr}(\bigwedge^m f)$ . Sei  $f$  beliebig. Es gilt:

- $d_0(f) = 1$
- $d_1(f) = \text{tr}(f)$
- $\dots$
- $d_n(f) = \det(f)$

Dies sieht den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms  $\chi_f$  verdächtig ähnlich...

## 9.2 Invariantentheorie

Wie viele Funktionen  $GL_n \rightarrow GL_n$  gibt es, welche unter ähnlichen Matrizen invariant sind? Wir wissen, dass es mindestens  $n$  "Basisinvarianten" gibt:

- $\text{inv}_0 = \text{tr}(\bigwedge^0 f) = 1$
- $\text{inv}_1 = \text{tr}(\bigwedge^1 f) = \text{tr}(f)$
- $\text{inv}_2 = \text{tr}(\bigwedge^2 f)$
- ...
- $\text{inv}_n = \text{tr}(\bigwedge^n f) = \det(f)$

**Satz 9.15.** *Alle Polynome in der Menge  $(\text{inv}_i)_{i \in (0,n)}$  sind ebenfalls Invarianten. Genauer: Betrachte die Abbildung*

$$\begin{aligned} \tau : k[x_0, \dots, x_n] &\rightarrow \text{Invarianten} \\ f(x_0, \dots, x_n) &\mapsto f(\text{inv}_0, \dots, \text{inv}_n) \end{aligned}$$

**Satz 9.16. Hauptsatz der Invariantentheorie:** *Die Abbildung  $\tau$  ist ein Isomorphismus zwischen dem Ring  $k[x_0, \dots, x_n]$  und dem Ring der Invarianten. Dementsprechend geben diese Polynome den gesamten Raum der Invarianten.*

## Appendix A

# Ausblicke in die Zukunft

In der Funktionalanalysis werden unendlichdimensionale Vektorräume betrachtet.

**Satz A.1.** *Der Vektorraum aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat eine Basis.*

Wie sieht diese Basis aus? Es stellt sich heraus, dass der Beweis nur dank Auswahlaxiom funktioniert, und dass sich diese Basis nicht explizit konstruieren lässt. Die Menge der sog. Kroneckerdeltas  $\delta_{ij}$  sieht auf den ersten Blick wie ein vielversprechender Kandidat aus:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Aber es muss bedacht werden, dass zwingende Bedingung für eine Basis ist, dass sich jeder Vektor nicht nur als Linearkombination der Basisvektoren darstellen lässt, sondern sogar als **endliche Linearkombination**. Diese Definition der Basis ist auch bekannt als Hamelbasis.

Es stellt sich heraus, dass die Hamel-Basis aus A.1 nur dank Auswahlaxiom existiert und nicht explizit dargestellt werden kann. Lockern wir den traditionellen Basisbegriff, um zählbar unendliche Linearkombinationen zu erlauben, erhalten wir den Begriff der Schauder-Basis. Die Funktionen  $\delta_{ij}$  reichen jedoch immer noch nicht als Schauder-Basis des Raums  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sondern nur für den Folgenraum  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Da sich der Begriff der Linearkombination auf keine sinnvolle Weise auf überabzählbare Mengen erweitern lässt bleibt man an diesem Punkt leider stecken, es existiert leider keine explizit angebbare Basis des Raums  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . :(

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f \in \mathbb{C}(A,B)} & B \\ \mathcal{Y} \downarrow \vdots & & \downarrow \vdots \mathcal{Y} \\ \mathbb{C}(A, -) & \xrightarrow{\mathcal{Y}(f)} & \mathbb{C}(B, -) \end{array}$$