Seminarieuppgift 1 - Rotekvationer

Emma Bastås

September 10, 2022

Uppgiften är att finna alla reella lösningar till

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3 \tag{0}$$

Bortkvadrering av rötter

Vi börjar med att flytta över ena roten till högerledet för att sedan kvadrera

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+3} = 3 - \sqrt{2-x} \tag{1}$$
$$\Rightarrow \quad x+3 = 9 - 6\sqrt{2-x} + 2 - x \tag{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 - x = 3\sqrt{2-x} \tag{3}$$

Återigen kvadrerar vi båda led

$$\Rightarrow \quad (4-x)^2 = (3\sqrt{2-x})^2 \tag{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad 16 - 8x + x^2 = 9(2-x) \tag{5}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = 2 \tag{6}$$

Kvadratkompletering och lösningar

Vi ser att ekvation (6) är ett andragradspolynom som går att lösa med b.la. kvadratkompletering.

$$x^2 + x = 2 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \tag{9}$$

Vi drar kvadratroten hur båda led

$$\Leftrightarrow \qquad x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pm 3 - 1}{2} \tag{11}$$

och ser att $x = -2$ och $x = 1$ löser ekvation (6).

Verifiering av lösningar

$x = -2$ och $x = 1$ löser ekvation (6), men inte nödvändigtvis vår ursprungliga ekvation (0). På två platser, rad (2) och (4) har vi kvadrerat båda led vilket har medfört ekv (6), men denna ekvation är inte ekvivalent med den ursprungliga. Mer konkret kan vi säga att lösningarna till ekv (0) är en delmängd till lösningarna för ekv (6). I detta fall då ekv (6) endast har två lösningar kan vi helt enkelt testa båda i ekv (0).

$$\begin{array}{llcccc}
(x=-2) & \sqrt{(-2)+3} + \sqrt{2-(-2)} & = & 1+2 & = & 3 \\
(x=1) & \sqrt{1+3} + \sqrt{2-1} & = & 2+1 & = & 3
\end{array}$$

$x = -2$ och $x = 1$ är lösningarna till $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3$.

$\square$