Analysuppgift 3 - Analys av kurva

Emma Bastås

Oktober 30, 2022

Uppgiften är att till kurvan $y = f(x)$ där:

$$f(x) = \frac{|x-1| + 2x^2}{x+1}$$

bestämma lokala och globala extermpunkter och asymptoter samt rita grafen.

Vi börjar med att att falluppdela $f(x)$ och därefter förenkla uttrycken med polynomdivision:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \dfrac{x-1+2x^2}{x+1} & \text{om } x \geq 1 \\ \dfrac{-x+1+2x^2}{x+1} & \text{om } x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x-1 & \text{om } x \geq 1 \\ 2x-3+\dfrac{4}{x+1} & \text{om } x < 1 \end{cases} . \end{aligned} \tag{1}$$

Asymptoter

Det finns tre type av asymptoter att söka efter:

- **Vertikal asymptot**. Linjen $x = a$ är en vertikal asymptot till $y = f(x)$ om $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
- **Horisontell asymptot**. Linjen $y = a$ är en horisontel asymptot till $y = f(x)$ om $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.
- **Sned asymptot**. Linjen $y = kx + m$ där $k \neq 0$ är en sned asymptot till $y = f(x)$ om $\lim_{x \to \pm\infty}[f(x) - (kx + m)] = 0$.

Det finns en punkt då $f(x)$ går mot oändligheten, och den ligger i $x = -1$. Detta är den enda vertikala asymptoten till $y = f(x)$.

Vi testar om $f(x)$ har en horisontell asymptot då x går mot $+\infty$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to+\infty} f(x) = L \\ \iff \quad & \lim_{x\to+\infty} [2x-1] = L. \end{aligned}$$

Vi ser direkt att detta saknar gränsvärde och att en horisontell asymptot är utesluten. Vi testar nu om det finns en sned asymptot istället:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx+m)] = 0 \\ \iff \quad & \lim_{x\to+\infty} [2x - 1 - (kx+m)] = 0 \\ \iff \quad & \lim_{x\to+\infty} [(2-k)x - (m+1)] = 0 \\ \iff \quad & k = 2 \quad \text{och} \quad m = -1. \end{aligned}$$

Vi ser att linjen $y = 2x - 1$ är en sned asymptot till $y = f(x)$. På liknande sätt finner vi att linjen $y = 2x - 3$ är en sned asymptot då x går mot $-\infty$.

Nu har vi funnit samtliga asymptoter till $y = f(x)$: $x = -1$, $y = 2x - 1$ och $y = 2x - 3$.

Extermpunkter

Vi bestämmer derivatan $f'(x)$ till $f(x)$ genom att derivera fallen separat:

$$(1) \implies f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{om } x > 1 \\ 2 - \dfrac{4}{(x+1)^2} & \text{om } x < 1 \end{cases}.$$

Notera att $f(x)$ inte är deriverbar i punkten $x = 1$, går vi tillbaka till derivatans definition finner vi att vi får två olika derivator beroende på från vilket håll vi närmar oss $x = 1$.

Att en punkt x_0 är ett extremvärde till en funktion $f(x)$ medför alltid ett av tre påståenden:

i) x_0 är en ändpunkt till definitionsintervalet till $f(x)$.

ii) $f(x)$ är diskontinuerlig i x_0.

iii) $f(x)$ är deriverbar i x_0 och $f'(x_0) = 0$.

I vårat fall är $f(x)$ definierad i intervallen $x < -1$ och $x > -1$. Således kan alldrig det första påståendet vara sant. Vi vet också att $f(x)$ är kontnuerlig i hela sin definitionsmängd, såledess kan alldrig det andra påståendet vara sant. Det lämnar oss med det sista påståendet, alla extermpunkter till $f(x)$ är nollställen till $f'(x)$.

Vi finner dessa nollställen. För $x > 1$ är $f'(x) = 2$ och detta saknar nollställen, för fallet $x < 1$ ställer vi upp och löser ekvationen:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \quad x < 1 \\ \iff \quad & 2 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0. \\ \iff \quad & 2(x+1)^2 - 4 = 0 \\ \iff \quad & x = -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vi finner även de intervall för vilket $f'(x) < 0$, detta är nödvändigt för att senare avgöra om nollställena är max- eller minmumpunkter eller terrsasspunkter.

$$\begin{aligned} & f'(x) < 0 \\ \iff \quad & \begin{cases} 2 < 0 & \text{då } x > 1 \\ 2 - \frac{4}{(x+1)^2} < 0 & \text{då } x < 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{2}$$

Det första fallet är alltid falskt och kan därför förkastas:

$$(2) \quad \iff \quad 2 - \frac{4}{(x+1)^2} < 0 \quad \text{och} \quad x < 1. \tag{3}$$

Nämnaren $(x+1)^2$ är strikt större än noll för alla värden på x i definitionsmängden till $f'(x)$ och vi kan därför multiplicera båda led i olikheten med nämnaren:

$$\begin{aligned} (3) \quad \iff \quad & 2(x+1)^2 - 4 < 0 & \text{och} \quad x < 1 \\ \iff \quad & (x+1)^2 < 2 & \text{och} \quad x < 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Nu drar vi kvadratroten ur båda led och det är här viktigt att komma ihåg att $\sqrt{a^2} \neq a$! Istället är det $\sqrt{a^2} = |a|$ som är den korrekta identitet.

$$
\begin{aligned}
(4) \quad &\Longleftrightarrow \quad |x+1| < \sqrt{2} && \text{och} \quad x < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 < \sqrt{2} & \text{då } x > -1 \\ -x-1 < \sqrt{2} & \text{då } x < -1 \end{cases} && \text{och} \quad x < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} -1 < x < \sqrt{2}-1 \\ -1-\sqrt{2} < x < -1. \end{array}
\end{aligned}
$$

Nu vet vi för vilka värden på x som $f'(x)$ är både noll och strikt mindre än noll, och därav vet vi också för vilka x som $f'(x)$ är strikt större än noll, nämligen:

$$
\begin{aligned}
&x < -1-\sqrt{2} && \text{eller} \\
&\sqrt{2}-1 < x < 1 && \text{eller} \\
&1 < x.
\end{aligned}
$$

Med denna information kan vi besvara frågan om extrempunkter, för att göra det enklare för oss så sammanställer vi relevant data i en tabell:

x		$-\sqrt{2}-1$		-1		$\sqrt{2}-1$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$	odef	$+$

Vi ser nu att $x = -\sqrt{2}-1$ är ett lokalt strikt maximum och att $x = \sqrt{2}-1$ är ett lokalt strikt minimum. Från avsnitt **Asymptoter** konstaterade vi att att $y = f(x)$ inte har några horisontella asymptoter, och därav är obegränsad. Vi ser från tabellen att $y = f(x)$ då är både uppåt och nedåt obegrensad så de två extrempunkter vi funnit är inte globala extrempunkter.

Kurvritning

Genom att kompletera den tigidare tabellen med ett par uträknade punkter $(x, f(x))$ på kurvan så kan vi skissa upp ett approximerat utseende:

x		$-\sqrt{2}-1$		-1		$\sqrt{2}-1$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$	odef	$+$
$f(x)$		$-\frac{8}{\sqrt{2}}-5$				$\frac{8}{\sqrt{2}}-5$			

Vi får inte heller blanda ihop de sneda asymptoterna, när kurvan går mot $-\infty$ närmar den sig asymptoten $y = 2x-3$ och när kurvan går mot $+\infty$ närmar den sig asymptoten $y = 2x-1$.l

Vi approximerar även en del värden som förekommer i tabellen till trevliga bråk:

$$\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} \approx \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2} \implies$$
$$-\sqrt{2} - 1 \approx -\frac{5}{2} \quad \text{och} \quad \sqrt{2} - 1 \approx \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{2}} = \sqrt{32} \approx \sqrt{36} = 6 \implies$$
$$-\frac{8}{\sqrt{2}} - 5 \approx -11 \quad \text{och} \quad \frac{8}{\sqrt{2}} - 5 \approx 1.$$