Seminarieuppgift 6 - Lösningar till ekvationssystem

Emma Bastås

Oktober 9, 2022

Uppgiften är att till varje reellt tal a bestämma antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} (4-a)x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + (1-a)x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + (4-a)x_3 = 1 \end{cases} . \qquad (\star)$$

Först noterar vi att alla tre ekvationer är linjära, och vi kan därför skriva om ekvationssystem till denna ekvivalenta matrisekvation:

$$(\star) \iff AX = B.$$

där:

$$A = \begin{pmatrix} 4-a & 2 & -1 \\ -2 & 1-a & 2 \\ -1 & 2 & 4-a \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För linjära matrisekvationer på denna form finns precis tre möjligheter avseende lösningar:

- Det finns ingen lösning.
- Det finns precis en lösning.
- Det finns oöndligt månda lösningar.

Att determinanten till A är skiljd från noll är ekvivalent med att A har en invers, vilket i sin tur är ekvivalent med att $AX = B$ har precis en lösning (nämligen $X = A^{-1}B$). Är determinanten noll så gäller då antingen att ingen eller oändligt många lösningar till $AX = B$ finns.

Vi finner nu de värden på a för vilket $\det A = 0$. Här använder vi oss helt enkelt av den otympliga identiteten $detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$. Men det går lika bra att använda annan en metod, t.ex Sarrus regel eller cofaktorexpansion.

$$
\begin{aligned}
& \det A = 0 \\
\iff \quad & (4-a)(1-a)(4-a) + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 \\
& - (4-a) \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot (4-a) - (-1) \cdot (1-a) \cdot (-1) = 0 \\
\iff \quad & - a^3 + 9a^2 - 23a + 15 = 0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Att lösa tredjegradsekvationer ligger utanför denna seminariekurs, men rationella rotsatsen ger oss att alla lösningarna till (1) är något av talen $\pm 1, \cdots, \pm 15$. 30 potentiella lösningar är tillräckligt få för att det ska vara görbart att testa var och en av dom. Vi gör detta och finner en lösning redan vid första försöket! $a = 1$. Nu kan vi medelst faktorssatsen och polynomdivision skriva om till (1) till den ekvivalenta ekvationen $(a-1)(-a^2 + 8a - 5) = 0$ och vi finner de två resterande lösningarna $a = 3$ och $a = 5$.

Nu har vi alltså visat att $\det A = 0$ om och endast om $a = 1$, $a = 3$ eller $a = 5$, vilket är ett ekvivalent påstående med att $AX = B$ har oöndligt många, eller inga lösningar för var och ett av dessa värden på a. Försöket alla andra värden på a gäller därav en unik lösning till $AX = B$.

Nu återstår att bestämma antalet lösningar för $a = 1$, $a = 3$ och $a = 5$.

Fallet $a = 1$:

Vi låter $a = 1$ och betraktar $(\star)$

$$
(\star) \quad \overset{a=1}{\iff} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \qquad (2)
$$

Den första och sista ekvationen i (2) har samma högerled och vi kan då skriva om dom till denna ekvivalenta ekvation:

$$
\begin{aligned}
& 3_{x1} + 2x_2 - x_3 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\iff \quad & 3x_1 - x_3 = -x_1 + 3x_3 \\
\iff \quad & 4x_1 = 4x_3 \\
\iff \quad & x_1 = x_3
\end{aligned}
$$

Den mittersta ekvationen i (2) är ekvivalent med $x_1 = x_3 + 1$. Vi har nu ett nytt ekvationssystem som är ekvivalent med (2):

$$(2) \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_1 = x_3 + 1 \end{cases}$$

vilket inte har några lösningar. Alltså har vi visat att $(\star)$ saknar lösningar då $a = 1$.