Analysuppgift 6 - Extrempunkter för tvåvariabelsfunktion

Emma Bastås

November 22, 2022

Uppgiften är att bestämma största och minsta värde för funktionen:

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 2$$

på området: $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Från kompendiet i flervariabelanalys[1] ges att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd alltid antar ett största och ett minsta värde, och att extremvärdena alltid antas i någon av följande typer av punkter:

i) Randpunkter till mängden.

ii) Punkter inuti området där funktionen inte är partiellt deriverbar.

iii) Punkter inuti området där de partiella derivatorna är noll (samtidigt).

Vad kompakta mängder och randpunkter till dessa mängder är har precisa matematiska definitioner.. Som ligger utanför analyskursen. Det som får antas är att området D utgör en kompakt mängd, och att alla randpunkterna till D ligger på de två randkurvorna:

$$x = 0,\ y^2 \leq 4 \tag{$\star$}$$
$$x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0. \tag{$\star\star$}$$

Då vi saknar tydliga definitioner att jobba med så följer två mer eller mindre handviftande förklaringar till varför just dessa kurvor ska väljas och inte några andra:

[1] Tamm, *Inledning till flervariabelanalys* s.5 sats 1

1. Området D utgör alla punkter som uppfyller de två kraven: $x \geq 0$ och $x^2 + y^2 \leq 4$. Betraktar vi randkurvan $(\star)$ så utgör den alla punkter som uppfyller det första kravet $x \geq 0$ med så små marginaler som möjligt. Hade vi istället haft randkurvan $x + \epsilon = 0,\ y^2 \leq 4$ där $\epsilon > 0$ så hade inga punkter på kurvan uppfyllt första kravet oavett hur litet ϵ som väljs. Alla punkterna på randkurvan $(\star)$ uppfyller också det andra kravet $x^2+y^2 \leq 4$, men då vi låtit $x = 0$ blir x^2-termen verkningslös och kan plockas bort ur kravet.
   Randkurvan $(\star\star)$ innehåller på motsvarande sätt alla punkter som uppfyller det andra kravet $x^2 + y^2 \leq 4$ med så små marginaler som möjligt.

2. Ritar vi upp området D och randkurvorna $(\star)$ och $(\star\star)$ i valfritt grafritningsprogram så ser vi att randkurvorna ligger precis på kanten till området D, även om vi zoomar in väldigt mycket.

Vi börjar med att söka extremvärden inuti området (fall (ii) och (iii)). Vi bestämmer partiella derivator till f med avseende på x respektive y:

$$\frac{f}{\partial x} = 2x - 2 \qquad \frac{f}{\partial y} = 4y.$$

Den första observationen är att dessa derivator är väldefinierade för alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alltså är fallet (ii) uteslutet, det finns inga punkter där $f(x)$ inte är partiellt deriverbar.
Vi finner att båda partiella derviator är noll (samtidigt) om och endast om $(x, y) = (1, 0)$, vilket gör detta till den enda punkten av typ (iii).

Det blir tydligt att $(x, y) = (1, 0)$ är ett minimivärde och inte ett maximivärde om vi kvadratkompletterar $f(x, y)$:

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2 + 1.$$

De båda kvadratiska termerna är alltid positiva, så det minsta värdet på $f(x, y)$ antas då dessa termer är noll, vilket just i punkten $(x, y) = (1, 0)$. Vi har nu visat att $f(1, 0) = 1$ är minimivärdet.

Vi har undersökt punkter av typ (ii) och (iii) och funnit minimivärdet, då återstår bara punkter av typ (i) och vi vet således att det är här vi finner maximivärdet.
Randpunkterna ligger på randkurvorna $(\star)$ och $(\star\star)$, vi börjar med den första kurvan. Om vi definierar en ny funktion $g(y)$:

$$g(y) = f(0, y) = 2y^2 + 2, \quad y^2 \leq 4$$

så kommer $g(y)$ att anta precis samma värden som $f(x, y)$ gör på randkurvan ($\star$), finner vi ett maxvärde till $g(y)$ så har vi gjort det för $f(x, y)$ på randkurvan ($\star$). Utan någon ordentligare analys så ser vi tydligt att $g(y)$ är en andragradsekvation med minimivärde i $y = 0$ och att den antar sina största värden i randpunkterna: $g(\pm 2) = f(0, \pm 2) = 10$.

Nu går vi vidare till randkurvan ($\star\star$). Denna kurvan utgör en halvcirkel. Av trigonometriska ettan följer att punkten $(\cos\theta, \sin\theta)$ ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ för alla reella värden på θ. Då följer att $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ ligger på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ för alla reella θ. Således kan vi parametrisera $f(x, y)$ med funktionen $h(\theta)$:

$$h(\theta) = f(2\cos\theta, 2\sin\theta), \quad \cos\theta \geq 0.$$

Funktionen $h(\theta)$ kommer att anta precis de värden som $f(x, y)$ antar på randkurvan ($\star\star$). Vi bearbetar $h(\theta)$ algebraiskt:

$$\begin{aligned} h(\theta) &= 4\cos^2\theta - 2\cos\theta + 8\sin^2\theta + 2, && \cos\theta \geq 0 \\ &= 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2\cos\theta + 4\sin^2\theta + 2, && \cos\theta \geq 0 \\ &= 4 - 2\cos\theta + 4\sin^2\theta + 2, && \cos\theta \geq 0 \\ &= 4\sin^2\theta - 2\cos\theta + 6, && \cos\theta \geq 0. \end{aligned}$$

Det största värdet som $\sin^2$-termen kan anta är 4 när $\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Med villkoret $\cos\theta \geq 0$ så är det största värdet som cos-termen kan anta 0, också när $\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Det största värdet som $h(\theta)$ kan anta är då $h(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = f(0, \pm 2) = 10$. Dessa två maximipunkter är samma punkter som vi fann på randkurvan ($\star$).

Vi har nu funnit minimi- och maximivärdet för $f(x, y)$ på det givna området. Minimivärdet ligger inuti området i punkten $(x, y) = (1, 0)$ och dess värde är 1. Maximivärdet ligger på "hörnen" till randkurvan i punkterna $(x, y) = (\pm 2, 0)$ och dess maximivärde är 10.