Analysuppgift 8 - Differentialekvationer

Emma Bastås

December 11, 2022

Uppgiften är att bestämma alla lösningar till differentialekvationen:

$$y'(x) = y^2 + 4y(x) - 5. \tag{$\star$}$$

Vi börjar med att kvadratkomplettera högerledet:

$$(\star) \iff y'(x) = (y(x) - 1)(y(x) + 5). \tag{1}$$

Med antagandet att $y(x) \neq 1$ och $y(x) \neq -5$ så kan vi dividera båda led med $(y(x) - 1)(y(x) + 5)$:

$$(1) \iff y'(x) \frac{1}{(y(x) - 1)(y(x) + 5)} = 1, \quad y(x) \neq 1,\ y(x) \neq -5. \tag{2}$$

Senare i texten kommer vi att hantera fallet $y(x) = 1$ och $y(x) = -5$, för tillfället så lämnar vi dessa och bearbetar (2) ytterligare. Vi ser nu att (2) är en separabel differentialekvation. Vi partialbråksuppdelar:

$$(2) \iff y'(x) \left(\frac{1}{6(y(x) - 1)} - \frac{1}{6(y(x) + 5)} \right) = 1. \tag{3}$$

Vi bryter ut $\frac{1}{6}$ ur bråken, multiplicerar in $y'(x)$ och multiplicerar båda led med 6:

$$\begin{aligned} (3) &\iff y'(x) \frac{1}{6} \left(\frac{1}{y(x) - 1} - \frac{1}{y(x) + 5} \right) = 1 \\ &\iff \frac{y'(x)}{y(x) - 1} - \frac{y'(x)}{y(x) + 5} = 6. \end{aligned} \tag{4}$$

Vi integrerar båda led:

$$\begin{aligned} (4) &\iff \int \left(\frac{y'(x)}{y(x) - 1} - \frac{y'(x)}{y(x) + 5} \right) \mathrm{d}x = \int 6 \ \mathrm{d}x \\ &\iff \int \frac{y'(x)}{y(x) - 1} \ \mathrm{d}x - \int \frac{y'(x)}{y(x) + 5} \ \mathrm{d}x = \int 6 \ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5}$$

Dessa typer av integraler känner vi igen, vi minns att $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ och kan därav bestämma integralerna i vänsterledet, integralen i högerledet är trivial:

$$(4) \iff \ln(y(x)-1) - \ln(y(x)+5) = 6x + C. \tag{6}$$

Här representerar $C \in \mathbb{R}$ den obestämda konstant som uppstår vid integrationen av de tre termerna. Vi bearbetar (6) så att vi får ett ensamt $y(x)$ i vänsterledet:

$$\begin{aligned}
6 &\iff \ln \frac{y(x)-1}{y(x)+5} = 6x + C \\
&\iff \frac{y(x)-1}{y(x)+5} = e^{6x+C} \\
&\iff y(x) - 1 = (y(x)+5)e^{6x+C} \\
&\iff y(x) - 1 = y(x)e^{6x+C} + 5e^{6x+C} \\
&\iff y(x) - y(x)e^{6x+C} = 1 + 5e^{6x+C} \\
&\iff y(x)(1 - e^{6x+C}) = 1 + 5e^{6x+C} \\
&\iff y(x) = \frac{1 + 5e^{6x+C}}{1 - e^{6x+C}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Nu har vi funnit (7) som är en lösning till $(\star)$ för alla $C \in \mathbb{R}$. Nu återstår fallen $y(x) = 1$ och $y(x) = -5$. Vi testar helt enkelt om dom är lösningar till $(\star)$ medelst insättning i den ekvivalenta ekvationen (1):

Fallet: $y(x) = 1$

$$\begin{aligned}
& y'(x) = (y(x)-1)(y(x)+5) \quad \text{och} \quad y(x) = 1 \\
\iff & 0 = (1-1)(1+5) = 0.
\end{aligned}$$

Fallet: $y(x) = -5$

$$\begin{aligned}
& y'(x) = (y(x)-1)(y(x)+5) \quad \text{och} \quad y(x) = -5 \\
\iff & 0 = (-5-1)(-5+5) = 0.
\end{aligned}$$

Det visar sig att både $y(x) = 1$ och $y(x) = -5$ är *konstanta lösningar* till $(\star)$.

Nu har vi alltså visat att samtliga lösningar till $(\star)$ är:

$$\begin{aligned}
& y(x) = 1, \quad y(x) = -5, \\
& y(x) = \frac{1 + 5e^{6x+C}}{1 - e^{6x+C}}, \text{ för alla } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$