Seminarieuppgift 5 - Tangenter genom punkt

Emma Bastås

October 9, 2022

Uppgiften är att finna de tangenter till $y = f(x)$ (om det finns några) som går genom punkten P där $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$ och $P = (0, 1)$.

Persson och Böiers definierar* tangenten till funktionskurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$ som den linje vars ekvation är:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{$\star$}$$

Att en linje $y = g(x)$ går genom en punkt I är ett ekvivalent påstående med att $I_y = g(I_x)$. För oss som är intresserade av de fall då linjen $(\star)$ går genom punkten P finnes dessa då fall likheten:

$$P_y = f'(x_0)(P_x - x_0) + f(x_0) \tag{$\star\star$}$$

gäller. Här är x_0 den enda obekanta, vi expanderar P_y, P_x, $f'(x_0)$ och $f(x_0)$ och löser ekvationen:

$$\begin{aligned} (\star\star) \iff \quad & 1 = (6x_0^3)(0 - x_0) + 2x_0^3 - 3x_0 + 5 \\ \iff \quad & x_0^3 = 1 \\ \iff \quad & x_0 = 1. \end{aligned}$$

Ekvationen $(\star\star)$ har alltså $x_0 = 1$ som enda lösning. Detta innebär att $(\star)$ går genom P då $x_0 = 1$. Sätter vi in $x_0 = 1$ i $(\star)$ och förenklar får vi linjen:

$$\begin{aligned} & y = f'(1)(x - 1) + f(1) \\ \iff \quad & y = (6 - 3)(x - 1) + 2 - 3 + 5 \\ \iff \quad & y = 3x + 1 \end{aligned}$$

* *Analys i en variabel,* Upplaga 3:2 s.189 **Geometrisk tolkning av derivata.**

Som alltså är den enda tangenten till $f(x)$ som går igenom P.

$\square$