Seminarieuppgift 4 - Absolutbelopp

Emma Bastås

September 30, 2022

Uppgiften är att finna de värden på x som upfyller olikheten:

$$2|x+2| < |x| + |x+3|. \tag{$\star$}$$

Vi adderar $2|x+2|$ till båda led och skriver sedan om uttrycket med hjälp av identiteten $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$\begin{aligned} (\star) \iff \quad & 0 < |x| + |x+3| - 2|x+2| \\ \iff \quad & 0 < \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2}. \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

Låt $f(x)$ definieras till högerledet i uttrycket $(\star\star)$:

$$f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2}.$$

Uppgiften omformuleras nu till denna ekvivalenta problemställning:

Finn alla värden på x så att $f(x) > 0$.

Nu finner vi alla nollställen till $f(x)$, vi börjar med att ställa upp ekvationen och flytta över en av rötterna till högerledet:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff \quad & \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2} = 0 \\ \iff \quad & \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} = 2\sqrt{(x+2)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Båda led kvadreras varefter vi förenklar så att de kvarvarande kvadratrötterna står ensam i högerledet:

$$\begin{aligned} (1) \implies \quad & \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2}\right)^2 = \left(2\sqrt{(x+2)^2}\right)^2. \\ \iff \quad & x^2 + 2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2} + (x+3)^2 = 4(x+2)^2 \\ \iff \quad & 2x^2 + 10x + 7 = 2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Återigen kvadreras båda led och vi förenklar:

$$\begin{aligned}(2) \implies &\quad (2x^2+10x+7)^2 = (2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2})^2 \\ \iff &\quad 4x^4+40x^3+128x^2+140x+49 = 4x^4+24x^3+36x^2 \\ \iff &\quad 16x^3+92x^2+140x+49=0. \qquad (3)\end{aligned}$$

Nu har vi kört fast, visserligen går det att lösa tredjegradsekvationer av denna karaktär, men det ligger utanför denna seminariekurs. Om vi blickar tillbaka till ekv (2) ser vi räddningen. Vi kan återigen använda identiteten $|x| = \sqrt{x^2}$ på (2):

$$\begin{aligned}(2) \iff 2x^2+10x+7 &= 2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2} \\ &= 2\sqrt{(x(x+3))^2} \\ &= 2|x(x+3)| \\ &= 2|x^2+3x|. \qquad (4)\end{aligned}$$

Nu begränsar vi oss till fallet då $x^2+3x \geq 0$ och löser den resulterande ekvationen:

$$\begin{aligned}(4) \implies &\quad 2x^2+10x+7 = 2x^2+6x \\ \iff &\quad 4x+7=0 \\ \iff &\quad x = -\tfrac{7}{4}.\end{aligned}$$

Det visar sig medelst insättning av $x = -\frac{7}{4}$ i ekv (4) att $x = -\frac{7}{4}$ inte alls är en lösning, men om vi är lite slarviga (så som jag var) och ändå prövar detta värde på x i ekv (3) så märker vi att det är en lösning! (Detta kan väll ändå inte bara vara ett kosmiskt sammanträffande!?) Nu när vi har ett nollställe till ekv (3) så ger faktorsatsen oss också att $x + \frac{7}{4}$ är en faktor till (3) och vi kan således utföra polynomdivison. Resultaten av en sådan division ger:

$$(3) \iff (x+\tfrac{7}{4})(16x^2+64x+28)=0. \qquad (5)$$

De resterande lösningarna till (3) är nollställerna till andragradspolynomet i (5), vi löser denna andragradsekvation med valfri metod, lösningarna blir:

$$x = -\frac{7}{2} \quad \text{och} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

$f(x) = 0$ har medfört ekv (5) som har de tre lösningarna $x = -\frac{7}{2}$, $x = -\frac{7}{4}$ och $x = -\frac{1}{2}$, att $x = -\frac{7}{4}$ inte är en lösning till $f(x) = 0$ vet vi sedan innan. Testar vi de andra två lösningarna finner vi att endast $x = -\frac{1}{2}$ är en lösning till $f(x) = 0$.

Vi väljer nu två konkreta tal a och b som ligger till vänster respektive höger om nollstället, säg $a = -2$ och $b = 0$. Vi finner att $f(a) = 3$ och $f(b) = -1$. Nu har vi faktiskt all information vi behöver för att visa att $x < -\frac{1}{2}$ är lösningen till $(\star\star)$:

$f(x)$ är en kontinuerlig funktion och $x = -1/2$ är dess enda nollstället. Det finns en punkt i intervallet $]-\infty, -1/2[$, nämligen a så att $f(a) > 0$. Om det finns ett μ i detta intervall så att $f(\mu) < 0$ så säger sats (14) i Persson och Böiers *Analys i en variabel** att $f(x)$ då antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(\mu)$ i intervallet $[a, \mu]$, då måste $f(x)$ anta värdet 0 i detta intervall. Men $x = -1/2$ är det enda nollstället och ligger inte i intervallet. Antagandet att det finns ett sådant μ i intervallet leder till en motsägelse, alltså måste dess motsats vara sann; det finns inget sådant μ i intervallet, och då gälller att $f(x) > 0$ för alla x i intervallet.

På samma sätt visar vi att det för alla värden av x intervallet $]-1/2, \infty[$ gäller att $f(x) < 0$ eftersomm b ligger i detta intervall och $f(b) < 0$.

$\square$

*Upplaga 3:2 s.153