Algebrauppgift 6 - Basbyte i hexagon

Emma Bastås

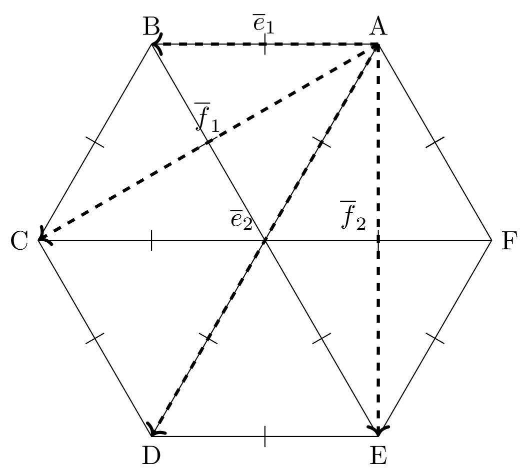
November 6, 2022

Betrakta en regelbunden sexhörning med hörn i punkterna A, B, C, D, E och F (i ordning motsols). Vektorerna $\overline{e}_1 = \overline{AB}$ och $\overline{e}_2 = \overline{AD}$ utgör en bas för planet liksom vektorerna $\overline{f}_1 = \overline{AC}$ och $\overline{f}_2 = \overline{AE}$. Det finns två uppgifter

a) Vektorn $\overline{u}_1$ har kordinaterna $(5, -2)$ i basen $\overline{e}_1, \overline{e}_2$. Bestämm $\overline{u}_2$:s koordinater på avseende på basen $\overline{f}_1, \overline{f}_2$.

b) Vektorn $\overline{u}_2$ har kordinaterna $(1, 6)$ i basen $\overline{f}_1, \overline{f}_2$. Bestämm $\overline{u}_2$:s koordinater på avseende på basen $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.

Vi börjar med att tolka detta geometriskt, en regelbunden hexagon består av sex liksidiga trianglar:



Med denna geometriska tolkning ser vi att:

$$\begin{aligned} \overline{f}_1 &= \tfrac{1}{2}\overline{e}_2 + \overline{e}_1 \\ \overline{f}_2 &= \overline{e}_2 - \overline{e}_1. \end{aligned} \qquad (\star)$$

Uppgift b)

Vi ställer upp $\overline{u}_2$ som en linjärkombination av $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$:

$$\overline{u}_2 = \overline{f}_1 + 6\overline{f}_2$$

och skriver om detta som en linjärkombination av $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ med hjälp av $(\star)$:

$$\begin{aligned}\overline{u}_2 &= (\tfrac{1}{2}\overline{e}_2 + \overline{e}_1) + 6(\overline{e}_2 - \overline{e}_1)\\ &= \tfrac{13}{2}\overline{e}_2 - 5\overline{e}_1.\end{aligned}$$

Uppgift a)

Vi skriver om ekvationerna i $(\star)$ så att $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ är linjärkombnationer av $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$:

$$(\star) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned}\overline{e}_1 &= \tfrac{2}{3}\overline{f}_1 - \tfrac{1}{3}\overline{f}_2\\ \overline{e}_2 &= \tfrac{2}{3}(\overline{f}_1 + \overline{f}_2)\end{aligned}. \qquad (\star\star)$$

Vi ställer nu upp $\overline{u}_1$ som en linjärkombination av $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$:

$$\overline{u}_1 = 5\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$$

och skriver om detta som en linjärkombination av $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ med hjälp av $(\star\star)$:

$$\begin{aligned}\overline{u}_1 &= 5\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2\\ &= 5(\tfrac{2}{3}\overline{f}_1 - \tfrac{1}{3}\overline{f}_2) - 2\tfrac{2}{3}(\overline{f}_1 + \overline{f}_2)\\ &= 2\overline{f}_1 - 3\overline{f}_2.\end{aligned}$$