

Seminarieuppgift 4 - Absolutbelopp

Emma Bastås

September 30, 2022

Uppgiften är att finna de värden på x som uppfyller olikheten:

$$2|x+2| < |x| + |x+3|. \quad (\star)$$

Vi adderar $2|x+2|$ till båda led och skriver sedan om uttrycket med hjälp av identiteten $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$\begin{aligned} (\star) &\iff 0 < |x| + |x+3| - 2|x+2| \\ &\iff 0 < \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2}. \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Låt $f(x)$ definieras till högerledet i uttrycket $(\star\star)$:

$$f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2}.$$

Uppgiften omformuleras nu till denna ekvivalenta problemställning:

$$\text{Finn de värden på } x \text{ som uppfyller olikheten: } f(x) > 0.$$

Nu finner vi alla nollställena till $f(x)$, vi börjar med att ställa upp ekvationen och flytta över en av rötterna till högerledet:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \iff \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2} &= 0 \\ \iff \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} &= 2\sqrt{(x+2)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Båda led kvadreras varefter vi förenklar så att de kvarvarande kvadratrötterna står ensam i högerledet:

$$\begin{aligned} (1) &\implies \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} \right)^2 = \left(2\sqrt{(x+2)^2} \right)^2 \\ &\iff x^2 + 2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2} + (x+3)^2 = 4(x+2)^2 \\ &\iff 2x^2 + 10x + 7 = 2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Återigen kvadreras båda led och vi förenklar:

$$\begin{aligned}
 (2) &\implies (2x^2 + 10x + 7)^2 = (2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2})^2 \\
 &\iff 4x^4 + 40x^3 + 128x^2 + 140x + 49 = 4x^4 + 24x^3 + 36x^2 \\
 &\iff 16x^3 + 92x^2 + 140x + 49 = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Nu har vi kört fast, visserligen går det att lösa tredjegradslikvationer av denna karaktär, men det ligger utanför denna seminariekurs. Om vi blickar tillbaka till (2) ser vi räddningen. Vi kan återigen använda identiteten $|x| = \sqrt{x^2}$ på (2):

$$\begin{aligned}
 (2) &\iff 2x^2 + 10x + 7 = 2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2} \\
 &= 2\sqrt{(x(x+3))^2} \\
 &= 2|x(x+3)| \\
 &= 2|x^2 + 3x|.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Nu begränsar vi oss till fallet då $x^2 + 3x \geq 0$ och löser den resulterande ekvationen:

$$\begin{aligned}
 (4) &\implies 2x^2 + 10x + 7 = 2x^2 + 6x \\
 &\iff 4x + 7 = 0 \\
 &\iff x = -\frac{7}{4}.
 \end{aligned}$$

Det visar sig medelst insättning av $x = -\frac{7}{4}$ i (4) att $x = -\frac{7}{4}$ inte alls är en lösning, men om vi är lite slarviga (så som jag var) och ändå prövar detta värde på x i (3) så märker vi att det är en lösning! (Detta kan väll ändå inte bara vara ett kosmiskt sammanträffande!?) Nu när vi har ett nollställe till (3) så ger faktorsatsen oss också att $x + \frac{7}{4}$ är en faktor till (3) och vi kan således utföra polynomdivision. Resultaten av en sådan division ger:

$$(3) \iff (x + \frac{7}{4})(16x^2 + 64x + 28) = 0. \tag{5}$$

De resterande lösningarna till (3) är nollställerna till andragradspolynomet i (5), vi löser denna andragradsekvation med valfri metod, lösningarna blir:

$$x = -\frac{7}{2} \quad \text{och} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

$f(x) = 0$ har medfört (5) som har de tre lösningarna $x = -\frac{7}{2}$, $x = -\frac{7}{4}$ och $x = -\frac{1}{2}$, att $x = -\frac{7}{4}$ inte är en lösning till $f(x) = 0$ vet vi sedan innan. Testar vi de andra två lösningarna finner vi att endast $x = -\frac{1}{2}$ är en lösning till $f(x) = 0$.

Vi väljer nu två konkreta tal k och w som ligger till vänster respektive höger om nollstället, säg $k = -2$ och $w = 0$. Vi finner att $f(k) = 3$ och $f(w) = -1$. Nu har vi faktiskt all information vi behöver för att visa att $x < -\frac{1}{2}$ är lösningen till (★★):

$f(x)$ är en kontinuerlig funktion och $x = -1/2$ är dess enda nollställe. Det finns en punkt k i intervallet $] -\infty, -\frac{1}{2}[$, så att $f(k) > 0$. Antag ett μ i detta intervall så att $f(\mu) < 0$. Enligt sats (14) i Persson och Böiers *Analys i en variabel** medför detta att $f(x)$ kommer att anta alla värden mellan $f(k)$ och $f(\mu)$ i intervallet $[k, \mu]$. Då kommer $f(x)$ att anta värdet 0 som ligger mellan $f(k)$ och $f(\mu)$. Men $x = -\frac{1}{2}$ är det enda nollstället till $f(x)$ och ligger inte i intervallet $] -\infty, -\frac{1}{2}[$. Antagandet att μ finns har producerat en motsägelse, alltså måste motsatsen vara sann; det finns inget μ i intervallet och då gäller att $f(x) > 0$ för alla x i intervallet.

På samma sätt visar vi att det för alla värden av x intervallet $] -1/2, \infty[$ gäller att $f(x) < 0$ eftersom w ligger i detta intervall och $f(w) < 0$.

□

*Upplaga 3:2 s.153