Seminarieuppgift 4 - Absolutbelopp, “simpel version”

Emma Bastås

October 2, 2022

Uppgiften är att finna de värden på x som upfyller olikheten:

$$2|x+2| < |x| + |x+3|. \tag{$\star$}$$

Vi låter $a(x) = 2x + 4$, $b(x) = x$ och $c(x) = x + 3$ och börjar med att finna alla lösningar till:

$$|a| = |b| + |c|. \tag{$\star\star$}$$

Absolutbelopp är definierat som:

$$\begin{cases} x, & \text{då } x \geq 0 \\ -x, & \text{då } x < 0 \end{cases}.$$

För $a(x)$, $b(x)$ och $c(x)$ gäller att de är antingen ≥ 0 eller < 0. Detta ger oss en ekvation med 8 fallindelningar:

$$(\star\star) \implies \begin{cases} a = b + c \\ a = b - c \\ a = -b + c \\ a = -b - c \\ -a = b + c \\ -a = b - c \\ -a = -b + c \\ -a = -b - c \end{cases} \tag{$\star\star^8$}$$

Vi struntar vilkoren för dessa fall och nöjer oss med det faktum att en lösning till $(\star\star)$ också kommer att vara en lösning till ett av dess fall*.

Alla dessa fall är första- och andragradsekvationer, vi finner alla lösningar till samtliga ekvationer, den processen är tämligen ointressant och lämnas som en övning till läsaren. Lösningarna som erhålls är:

$$(\star\star^8) \iff \begin{cases} \text{saknar lösningar.} \\ x = -{}^7\!/_2 \\ x = -{}^1\!/_2 \\ x = -{}^7\!/_4 \\ x = -{}^7\!/_4 \\ x = -{}^1\!/_2 \\ x = -{}^7\!/_2 \\ \text{saknar lösningar.} \end{cases}$$

Tre unika lösningar totalt som har medförts av $(\star\star)$. Vi testar alla tre värden i $(\star\star)$ medelst insättning och finner att $x = -\frac{1}{2}$ är den enda lösningen till $(\star\star)$.

Vi noterar att $|a(-2)| < |b(-2)| + |c(-2)|$ och $|a(0)| > |b(0)| + |c(0)|$. Nu påstår vi att $x < -\frac{1}{2}$ är lösningen till $(\star)$:

Antag ett $\mu < -\frac{1}{2}$ så att $|a(\mu)| > |b(\mu)| + |c(\mu)|$. Då följer att det i $[-2, \mu]$ finns ett x så att $|a(x)| = |b(x)| + |c(x)|$. Men $-\frac{1}{2}$ är det enda värde på x då denna likhet gäller. Antagandet att μ finns har producerat en motsägelse och då gäller motsatsen; Det finns inget sådant μ och därför gäller $|a(x)| < |b(x)|+|c(x)|$ för alla $x < -\frac{1}{2}$.

Med samma resonemang hävdar vi att $|a(x)| > |b(x)| + |c(x)|$ för alla $x > -\frac{1}{2}$ eftersom att $0 > -\frac{1}{2}$ och $|a(0)| > |b(0)| + |c(0)|$.

$\square$

*Notera att om vi hade studerat fallen så hade vi märkt att det faktiskt finns fall som inte upfylls för något x, den som tycker om att tänka kan ju finna och eliminera dessa fall, vi (jag) deremot föredrar att inte tänka på dessa ting.