

Seminarieuppgift 3 - Gränsvärden

Emma Bastås

October 2, 2022

Uppgiften är att finna följande gränsvärde:

$$\lim_{x \rightarrow (-8)} f(x), \quad (\star)$$

där:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}.$$

Enligt definitionen av gränsvärden* så gäller det att om en funktion $g(x)$ är kontinuerlig i området runt a och a tillhör definitionsmängden av $g(x)$ så medför det att $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Betraktar vi (\star) ser vi att denna metod inte är direkt tillämpningsbar då $f(x)$ för $x = -8$ är odefinierat och således inte ingår i definitionsmängden. Det vi får göra istället är att omarbeta uttrycket i $f(x)$ så att $f(-8)$ är definierat, och därefter finna gränsvärdet.

Innan vi påbörjar bearbetningen så substituerar vi $\sqrt[3]{x}$ för t , så blir uttrycket enklare att arbeta med:

$$\frac{\sqrt{1-t^3}-3}{2+t}. \quad (1)$$

Nu förlänger vi bråket med täljarens konjugat och förenklar:

$$(1) = \frac{\sqrt{1-t^3}+3}{\sqrt{1-t^3}+3} \cdot \frac{\sqrt{1-t^3}-3}{2+t} = \frac{-(t^3+8)}{(\sqrt{1-t^3}+3)(2+t)}. \quad (2)$$

Att förlänga bråket är inte problematiskt i detta fall då täljarens konjugat aldrig är 0, och är odefinierat i exakt de värden för x där (1) är odefinierad.

Nu förlänger vi bråket med $4-2t+t^2$:

*Så som den är given i Persson och Böiers *Analys i en variabel*, sida 139

$$(2) = \frac{-(t^3 + 8)}{(\sqrt{1 - t^3} + 3)(2 + t)} \cdot \frac{4 - 2t + t^2}{4 - 2t + t^2} = \frac{-(t^3 + 8)(4 - 2t + t^2)}{(\sqrt{1 - t^3} + 3)(t^3 + 8)}. \quad (3)$$

Även denna gång visar det sig vara oproblematiskt att förlänga bråket då det inte finns några värden på x för vilket $4 - 2t + t^2 = 0$.

Nu kan faktorn $t^3 + 8$ förkortas bort ur bråket:

$$(3) = \frac{t^3 + 8}{t^3 + 8} \cdot \frac{-(4 - 2t + t^2)}{\sqrt{1 - t^3} + 3} = \frac{-(4 - 2t + t^2)}{\sqrt{1 - t^3} + 3}. \quad (4)$$

Att rättfärdiga validiteten i denna förkortning är lite knivigare då $t^3 + 8$ faktiskt är 0 då $x = -8$. Men nu tar vi ett steg tillbaka; denna algebraiska bearbetning sker inuti gränsvärdesuttrycket $\lim_{x \rightarrow (-8)}$ och i detta gränsvärdesuttryck *närmar* vi oss gränsvärdet -8 , men vi kommer faktiskt aldrig att anlända dit, så att $t^3 + 8$ är odefinierat i den punkt vi närmar oss men aldrig når är inga problem. Med andra ord:

Vi sätter $f^*(x)$ till uttrycket i (4), det är då sant att:

$$f(x) \neq f^*(x),$$

Men det är samtidigt sant att:

$$\lim_{x \rightarrow (-8)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-8)} f^*(x) = f^*(-8) = -2.$$

□