Seminarieuppgift 2 - Diofantiska Ekvationer

Emma Bastås

September 19, 2022

Uppgiften är att finna samtliga positiva lösningar till följande diofantiska ekvation:

$$29x + 43y = 4000. \tag{$\star$}$$

Referenser

Denna text använder sig av satser från som finnes i *Algebra I, tionde tryckningen* av *Bøgvad*, *Xantcha* och *Granath*.

Kompendiet finns som PDF på: `kurser.math.su.se/pluginfile.php/143626/mod_resource/content/12/Algebra-i-tionde-tryckningen.pdf`

Heltalslösningar

Enligt lemma 5.13 är $SGD(29, 43) \mid 4000$ ett nödvändigt villkor för att ekv ($\star$) ska ha lösningar. Därför testar vi om detta villkor är uppfylt. Euklides algoritm (sats 5.10) används för att beräkna $SGD(29, 43)$ och alla steg i algoritmen skrivs ut då detta kommer visa sig vara av användning alldeles strax.

$$\begin{aligned} 43 &= 1 \cdot 29 + 14 \qquad (1) \\ 29 &= 2 \cdot 14 + 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

Av detta följer att $SGD(29, 43) = 1$ vilket delar 4000 och vi kan således fortsätta sökandet efter lösningar.

Nu betraktar vi en ekvation som liknar ekv ($\star$) men med högerled 1 istället för 4000:

$$29x + 43y = 1. \tag{H}$$

För att finna en *partikulärlösning* till denna ekvation så använder vi ekvationerna från tidigare beräkning av $SGD(29, 43)$ med Euklides algoritm, fast omskrivet så att resterna står ensamma i vänsterledet.

$$(1) \iff \quad 14 = 43 - 29 \tag{1*}$$
$$(2) \iff \quad 1 = 29 - 2 \cdot 14. \tag{2*}$$

Vi sätter in ekv (1*) i ekv (2*) och får:

$$1 = 29 - 2 \cdot (43 - 29),$$

vilket förenklas till:

$$29 \cdot 3 + 43 \cdot (-2) = 1. \tag{3}$$

Nu ser vi att $x = 3$ och $y = (-2)$ är *en* lösning till ekv (H). Vi multiplicerar båda led med 4000:

$$\begin{aligned} (3) \iff \quad & 4000(29 \cdot 3 + 43 \cdot (-2)) = 4000 \\ \iff \quad & 29 \cdot 12000 + 43 \cdot (-8000) = 4000 \end{aligned}$$

och har en lösning till ($\star$); $x = 12000$ och $y = -8000$.

Sats 5.14 säger att vi givet vår diofantiska ekvationen där $SGD(29, 43) = 1$ och med en partikulärlösning får den allmäna lösningen:

$$\begin{cases} x = 12000 - 43n \\ y = -8000 + 29n \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Positiva heltalslösningar

Att finna den allmäna lösningen till ekv ($\star$) var dock inte uppgiften, vi ska finna *samtliga positiva lösningar*, alltså de lösningar där $x > 0$ och $y > 0$.

Om vi löser dessa två olikheter för n så får vi:

För $x > 0$:

$$\begin{aligned} & 0 < 12000 - 43n \\ \iff \quad & 43n < 43 \cdot 279 + 3 \\ \iff \quad & n < 279 + 3/43. \end{aligned} \tag{XN}$$

För $y > 0$:

$$\begin{aligned} & 0 < (-8000) + 29n \\ \iff \quad & 29n > 29 \cdot 275 + 25 \\ \iff \quad & n > 275 + 25/29. \end{aligned} \tag{YN}$$

Vi är dock bara intresserade heltal n, så olikheterna (XN) och (YN) skriver vi om och kombinerar till:

$$276 \leq n \leq 279. \tag{N}$$

Nu är alltså påståendet att alla lösningar ska vara positiva ekvivalent med påstående (N).

Eftersom detta endast ger oss fyra värden på n – 267, 277, 278 och 279 – som upfyller olikheten så kan vi utan större besvär beräkna motsvarande x och y värden som löser ekvationen. Vi finner då att alla positiva heltalslösningar till ekv ($\star$) är:

$$\begin{aligned} x &= 132 \qquad & x &= 89 \\ y &= 4 \qquad & y &= 33 \\[1em] x &= 46 \qquad & x &= 3 \\ y &= 62 \qquad & y &= 91 \end{aligned}$$

$\square$