Seminarieuppgift 4 - Absolutbelopp

Emma Bastås

October 1, 2022

Uppgiften är att finna de värden på x som upfyller olikheten:

$$2|x+2| < |x| + |x+3|. \tag{$\star$}$$

Vi adderar $2|x+2|$ till båda led och skriver sedan om uttrycket med hjälp av identiteten $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$\begin{aligned} (\star) \iff \quad & 0 < |x| + |x+3| - 2|x+2| \\ \iff \quad & 0 < \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2}. \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

Låt $f(x)$ definieras till högerledet i uttrycket $(\star\star)$:

$$f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2}.$$

Uppgiften omformuleras nu till denna ekvivalenta problemställning:

Finn de värden på x som upfyller olikheten: $f(x) > 0$.

Nu finner vi alla nollställen till $f(x)$, vi börjar med att ställa upp ekvationen och flytta över en av rötterna till högerledet:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff \quad & \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2} = 0 \\ \iff \quad & \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2} = 2\sqrt{(x+2)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Båda led kvadreras varefter vi förenklar så att de kvarvarande kvadratrötterna står ensamma i högerledet:

$$\begin{aligned} (1) \implies \quad & \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{(x+3)^2}\right)^2 = \left(2\sqrt{(x+2)^2}\right)^2. \\ \iff \quad & x^2 + 2\sqrt{x^2}\sqrt{(x+3)^2} + (x+3)^2 = 4(x+2)^2 \\ \iff \quad & 2x^2 + 10x + 7 = 2\sqrt{(x(x+3))^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Vi låter $y = x(x+3)$ och substituerar in det it (2):

$$(2) \iff \quad 2x^2 + 10x + 7 = 2\sqrt{y^2}. \tag{3}$$

Vi noterar att beroende på x är antingen $y \geq 0$ varpå $\sqrt{y^2} = y$ eller så är $y < 0$ varpå $\sqrt{y^2} = -y$. Det ger två fall för (3):

$$\begin{cases} (3) \implies 2x^2 + 10x + 7 = 2y, & \text{då } y \geq 0 \\ (3) \implies 2x^2 + 10x + 7 = -2y, & \text{då } y < 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Detta ger oss en första- respektive andragradsekvation, lösningarna är $x = -\frac{7}{2}$, $x = -\frac{7}{4}$ och $x = -\frac{1}{2}$. (1) har medfört (4), alltså finns alla lösningar till (1) bland dessa tre värden på x* , vi testar var och ett medelts insättning i (1) och finner att $x = -\frac{1}{2}$ är den enda lösningen till $f(x) = 0$.

Vi väljer nu två konkreta tal k och w som ligger till vänster respektive höger om nollstället, säg $k = -2$ och $w = 0$. Vi finner att $f(k) = 3$ och $f(w) = -1$. Nu har vi faktiskt all information vi behöver för att visa att $x < -\frac{1}{2}$ är lösningen till $f(x) > 0$:

$f(x)$ är en kontinuerlig funktion och $x = -\frac{1}{2}$ är dess enda nollställe. Det finns en punkt k i intervallet $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ så att $f(k) > 0$. Antag ett μ i detta intervall så att $f(\mu) < 0$. Enligt sats (14) i Persson och Böiers *Analys i en variabel*† medför detta att $f(x)$ kommer att anta alla värden mellan $f(k)$ och $f(\mu)$ i intervallet $[k, \mu]$. Då kommer $f(x)$ anta värdet 0. Men $x = -\frac{1}{2}$ är det enda nollstället till $f(x)$ och ligger inte i intervallet $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$. Antagandet att μ finns har producerat en motsägelse, alltså måste motsatsen vara sann; det finns inget μ i intervallet och då gäller $f(x) > 0$ för alla x i intervallet.

På samma sätt visar vi att det för alla värden av x intervallet $]-1/2, \infty[$ gäller att $f(x) < 0$ eftersomm w ligger i detta intervall och $f(w) < 0$.

$\square$

*Ett annat sätt att överyga sig själv om att vi inte missat någon lösning till (1) är att kvadrera båda led i (2). Detta ger en tredjegradsekvation och de tre lösningar vi fann här löser också den ekvationen.

†Upplaga 3:2 s.153