

Analysuppgift 7 - Dubbelintegral

Emma Bastås

November 25, 2022

Uppgiften är att beräkna dubbelintegralen:

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy$$

där: $D = \{(x, y) : \frac{1}{4} \leq x \leq 2, \frac{1}{2x} \leq y \leq 2\}$.

Vi skriver om dubbelintegralen till en itererad enkelintegral:

$$\int_{\frac{1}{4}}^2 \left(\int_{\frac{1}{2x}}^2 x^2 y^2 dy \right) dx. \quad (\star)$$

Vi låter nu x -variabeln vara fix och bestämmer den inre integralen. Vi låter $f(y) = x^2 y^2$ och bestämmer dess primitiva funktion till $F(y) = \frac{1}{3} x^2 y^3 + C$ där $C \in \mathbb{R}$ är en godtycklig konstant. Vi bestämmer nu den inre integralen medelst analysens huvudsats:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2x}}^2 f(y) dy &= F(2) - F\left(\frac{1}{2x}\right) \\ &= \frac{8}{3} x^2 - \frac{1}{24x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nu kan vi sätta in (1) i (\star) och beräknar den integralen:

$$\begin{aligned}
(\star) &= \int_{\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{24x} \right) dx \\
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{1}{4}}^2 x^2 dx - \frac{1}{24} \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{8}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{4}}^2 - \left[\ln x \right]_{\frac{1}{4}}^2 \\
&= \frac{8}{9} \left[x^3 \right]_{\frac{1}{4}}^2 - \left[\ln x \right]_{\frac{1}{4}}^2 \\
&= \frac{8}{9} \left(8 - \frac{1}{64} \right) - \frac{1}{24} \left(\ln 2 - \ln \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{72} (511 - 9 \ln 2).
\end{aligned}$$

Vi har nu med hjälp av en itererad enkelintegral bestämt dubbelintegralen i området till $\frac{1}{72}(511 - 9 \ln 2)$.