

Seminarieuppgift 5 - Tangenter genom punkt

Emma Bastås

Oktober 9, 2022

Uppgiften är att finna de tangenter (om det finns några) till $y = f(x)$ som går genom punkten P där $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$ och $P = (0, 1)$.

Persson och Böiers definition av tangenter* ger att tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$ är den rätta linje som uppfyller ekvationen:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

Persson och Böiers anger också att en rät linje (som inte är parallell med y -axeln) och som går genom $(0, 1)$ ges av ekvationen†:

$$y = kx + 1. \quad (2)$$

Detta ger att alla värden på x_0 för vilket (1) är ekvivalent med (2) ger en rät linje som är både tangent till $y = f(x)$ och går genom P , vilket är vad vi söker.

Vi expanderar $f(x_0)$ och $f'(x_0)$ i (1) och omarbetar ekvationen till att vara på samma form som i (2):

$$\begin{aligned} (1) &\iff y - (2x_0^3 - 3x_0 + 5) = (6x_0^2 - 3)(x - x_0) \\ &\iff y = x(6x_0^2 - 3) - 4x_0^3 + 5. \end{aligned} \quad (3)$$

Nu ser vi att (3) är ekvivalent med (2) då $-4x_0^3 + 5 = 1$ vilket inträffar då $x_0 = 1$. Vi sätter in $x_0 = 1$ i (3) och erhåller den rätta linjen:

$$y = 3x + 1$$

som vi visat är den enda tangenten till $y = f(x)$ som går genom P . \square

* *Analys i en variabel*, Upplaga 3:2 s.189 **Geometrisk tolkning av derivata.**

† *Analys i en variabel*, Upplaga 3:2 s.25.