Seminarieuppgift 2 - Diofantiska Ekvationer

Emma Bastås

September 13, 2022

Uppgiften är att finna samtiliga possitiva lösningar till följande diofantiska ekvation

$$29x + 43y = 4000 \tag{*}$$

Referenser

Denna text använder sig av satser från som finnes i *Algebra I, tionde tryckningen* av *Bøgvad*, *Xantcha* och *Granath*.

Kompendiet finns som PDF på https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/143626/mod_resource/content/12/i-tionde-tryckningen.pdf

1 Testa om ekvationen går att lösa

Enligt lemma 5.13 är $SGD(29, 43) \mid 4000$ ett nödvändigt vilkor för att ekv (*) ska ha lösningar.

Detta inses med hjälp av lemma 5.9 som säger att om a och b är heltal och $d|a$ och $d|b$ så delar d även alla linjärkombinationer av a och b

$SGD(29, 43)$ delar $29 och 43$ per definition. Om det inte också delar 4000 som lemma 5.9 anger så har vi en motsägelse, och då måste alltså antagandet $29x + 43y = 4000$ var falskt.

1.1 Beräkning av $SGD(29, 43)$

Vi använder oss av Euklides algoritm (sats 5.10) för att beräkna $SGD(29, 43)$. Vi skriver ut alla steg i algoritmen då dessa steg kommer visa sig vara av användning senare i sektion 2.

$$\begin{array}{ccccccc} 43 & = & 1 & \cdot & 29 & + & 14 \\ 29 & = & 2 & \cdot & 14 & + & 1 \end{array} \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$SGD(29, 43) = 1$$

2 Partikulärlösning

Första steget är att finna en partikulärlösning till en s.k. *hjälpekvation.* Det är samma ekvation som (*) men högerledet är 1 (d.v.s $SGD(29, 43)$) istället för 4000

$$29x + 43y = 1 \tag{H}$$

För att finna en partikulärlösning till denna ekvation så kan vi använda oss av stegen från sektion (1.1), fast omskrivet så att resterna står ensamma i vänsterledet.

$$14 = 43 - 29 \tag{1*}$$
$$1 = 29 - 2 \cdot 14 \tag{2*}$$

Vi sätter in ekv (1*) i ekv (2*) och får

$$1 = 29 - 2 \cdot (43 - 29)$$

vilket förenklas till

$$29 \cdot 3 + 43 \cdot (-2) = 1$$

Nu ser vi att $x = 3$ och $y = (-2)$ är en lösning till hjälpekvation (H), det är en *partikulärlösning.* Denna partikulärlösning till hjälpekvationen betecknar vi nu med x_0 och y_0.

Med partikulärlösningen till hjälpekvation (H) kan vi finna en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen (*).

$$29x_0 + 43y_0 = 1$$
$$4000 \cdot (29x_0 + 43y_0 = 4000)$$
$$29 \cdot 4000x_0 + 43 \cdot 4000y_0 = 4000$$

Vi ser att $x = 4000x_0 = 12000$ och $y = 4000y_0 = (-8000)$ är en partikulärlösning till ekv (*).

Allmän lösning till ekvationen

Sats 5.14 anger att ekvation (*) med har den allmäna lösningen

TODO: Argumentera för varför det är så

$$\begin{cases} x = x_0 - 43n \\ y = y_0 + 29n \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal och x_0 och y_0 är en partikulärlösing, i vårat fall $x_0 = 12000$ och $y_0(-8000)$.

Possitiva lösningar

Att finna den allmäna lösningen till ekv (*) var dock inte uppgiften, vi ska finna *samtliga possitiva lösningar*, alltså de lösningar där $x > 0$ och $y > 0$.

Om vi löser dessa två olikheter för n så får vi:

För $x > 0$

$$\begin{aligned} 0 &< x \\ 0 &< 12000 - 43n \\ 43n &< 12000 \\ 43n &< 43 \cdot 279 + 3 \\ n &< 279 + 3/43 \end{aligned} \tag{XN}$$

För $y > 0$

$$\begin{aligned} 0 &< y \\ 0 &< (-8000) + 29n \\ 29n &> 8000 \\ 29n &> 29 \cdot 275 + 25 \\ n &> 275 + 25/29 \end{aligned} \tag{YN}$$

Vi är dock bara intresserade heltal n, så olikheterna (XN) och (YN) skriver vi om till

$$\begin{aligned} n &\leq 279 \\ n &\geq 276 \\ &\Longleftrightarrow \\ 267 \leq n &\leq 279 \end{aligned} \tag{N}$$

Nu är alltså påståendet om att alla lösningar ska vara possitiva ekvivalen med påstående (N).

Eftersom detta endast ger oss fyra n - 267, 277, 278 och 279 - som upfyller olikheten så kan vi utan större besvär beräkna motsvarande x och y värden som löser ekvationen. Vi finner då att de fyra lösningarna är

- $x = 132$
  $y = 4$
- $x = 89$
  $y = 33$
- $x = 46$
  $y = 62$
- $x = 3$
  $y = 91$

$\square$