Algebrauppgift 4 version 2 - Ekvationssystem

Emma Bastås

Oktober 30, 2022

Uppgiften är att till varje reellt tal a bestämma antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} (4-a)x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + (1-a)x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + (4-a)x_3 = 1 \end{cases} . \tag{$\star$}$$

Först noterar vi att alla tre ekvationer är linjära, och att vi därför kan skriva om ekvationssystem till denna ekvivalenta matrisekvation:

$$(\star) \iff AX = B$$

där:

$$A = \begin{pmatrix} 4-a & 2 & -1 \\ -2 & 1-a & 2 \\ -1 & 2 & 4-a \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För linjära matrisekvationer på denna form finns precis tre möjligheter avseende lösningar:

- Det finns ingen lösning.
- Det finns precis en lösning.
- Det finns oändligt många lösningar.

Att determinanten till A är skiljd från noll är ekvivalent med att A har en invers, vilket i sin tur är ekvivalent med att $AX = B$ har precis en lösning (nämligen $X = A^{-1}B$). Är determinanten noll så gäller då antingen att ingen eller oändligt många lösningar till $AX = B$ finns.

Vi finner nu de värden på a för vilket $\det A = 0$. Här använder vi oss helt enkelt av den otympliga formeln för determinanter för 3×3 matriser, $\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$:[1]

$$
\begin{aligned}
& \det A = 0 \\
\iff\quad & (4-a)(1-a)(4-a) + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 \\
& - (4-a) \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot (4-a) - (-1) \cdot (1-a) \cdot (-1) = 0 \\
\iff\quad & - a^3 + 9a^2 - 23a + 15 = 0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Vi finner att $\det A = 0$ är en ekvivalent ekvation till (1). Att lösa tredjegradsekvationer i det generella fallet ligger utanför ramen för denna kurs, men vi har tur (eller snarare ett tillrättalagt problem) och kan med hjälp av Rationella rotsatsen, faktorsatsen och polynomdivision lösa ekvationen.[2]

Vi finner att lösningarna till $\det A = 0$ är $a = 1$, $a = 3$ och $a = 5$. Detta är ekvivalent med att $AX = B$ har oändligt många, eller inga lösningar för var och ett av dessa värden på a. För alla andra värden på a gäller därav en unik lösning till ekvationen.

Nu återstår att bestämma antalet lösningar för $a = 1$, $a = 3$ och $a = 5$.

Fallet $a = 1$:

Vi låter $a = 1$, ställer upp ekvationen $AX = B$ för Gauss-Jordan eliminering och utför två operationer:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)
\begin{matrix} {}^{-1} \\ \\ {}_{+} \end{matrix}
\begin{matrix} \\ {}^{-2} \\ {}_{+} \end{matrix}
\to
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).
$$

Skrivsättet här är bara lite smidig notation, det som egentligen sker är följande:

$$
\begin{aligned}
& AX = B \\
\iff\quad & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} AX = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} B \\
\iff\quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

[1] Sarrus regel eller cofaktorexpansion går såklart lika bra.

[2] Se kapitel 9 och 10 i algebrkompendiumet för en redogörelse för hur detta görs.

Detta är ekvivalent med ekvatoinssystemet:

$$(2) \iff \begin{cases} \cdots = 1 \\ \cdots = -2 \\ 0x_0 + 0x_1 + 0x_2 = 4 \end{cases}$$

och det är uppenbar att detta saknar lösningar. Alltså saknar den ekvivalenta ekvationen $AX = B$ lösningar för $a = 1$.

Fallet a = 3:

Vi låter $a = 3$, ställer upp ekvationen $AX = B$ för Gauss-Jordan eliminering och utför tre operation:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Precis som i fallet med $a = 1$ är detta ekvivalent med ett ekvationssystem utan lösning, alltså saknar $AX = B$ lösning för $a = 3$.

Fallet a = 5:

Vi låter $a = 5$, ställer upp ekvationen $AX = B$ för Gauss-Jordan eliminering och utför tre operationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Detta är ekvivalent med ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -4x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

vilket har oändligt många lösningar, alltså har $AX = B$ oändligt många lösningar för $a = 5$.

Vi har nu visat att ekvationssystemet $(\star)$ som är ekvivalent med $AX = B$ saknar lösningar om och endast om $a = 1$ eller $a = 3$ och har oändligt många lösningar om och endast om $a = 5$. För alla andra reella värden på a har $(\star)$ entydiga lösningar.

$\square$