

# Algebrauppgift 4 - Ekvationssystem

Emma Bastås

Oktober 23, 2022

Uppgiften är att till varje reellt tal  $a$  bestämma antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} (4-a)x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + (1-a)x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + (4-a)x_3 = 1 \end{cases} . \quad (\star)$$

Först noterar vi att alla tre ekvationer är linjära, och vi kan därför skriva om ekvationssystem till denna ekvivalenta matrisekvation:

$$(\star) \iff AX = B$$

där:

$$A = \begin{pmatrix} 4-a & 2 & -1 \\ -2 & 1-a & 2 \\ -1 & 2 & 4-a \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

För linjära matrisekvationer på denna form finns precis tre möjligheter avseende lösningar:

- Det finns ingen lösning.
- Det finns precis en lösning.
- Det finns oändligt många lösningar.

Att determinanten till  $A$  är skild från noll är ekvivalent med att  $A$  har en invers, vilket i sin tur är ekvivalent med att  $AX = B$  har precis en lösning (nämligen  $X = A^{-1}B$ ). Är determinanten noll så gäller då antingen att ingen eller oändligt många lösningar till  $AX = B$  finns.

Vi finner nu de värden på  $a$  för vilket  $\det A = 0$ . Här använder vi oss helt

enkelt av den otympliga formeln för determinanter för  $3 \times 3$  matriser,  $\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ .<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \\ \iff (4-a)(1-a)(4-a) + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 \\ &\quad - (4-a) \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot (4-a) - (-1) \cdot (1-a) \cdot (-1) = 0 \\ \iff -a^3 + 9a^2 - 23a + 15 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vi finner att  $\det A = 0$  är en ekvivalent ekvation till (1). Att lösa tredjegradekvationer i det generella fallet ligger utanför ramen för denna kurs, men vi har tur (eller snarare ett tillrättat problem) och kan med hjälp av Rationella rotsatsen, faktorsatsen och polynomdivision lösa ekvationen.<sup>2</sup>

Vi finner att lösningarna till  $\det A = 0$  är  $a = 1$ ,  $a = 3$  och  $a = 5$ . Detta är ekvivalent med att  $AX = B$  har oändligt många, eller inga lösningar för var och ett av dessa värden på  $a$ . För alla andra värden på  $a$  gäller därav en unik lösning till ekvationen.

Nu återstår att bestämma antalet lösningar för  $a = 1$ ,  $a = 3$  och  $a = 5$ .

För varje av dessa tre fall finns alltså precis två alternativ: Inga eller oändligt många lösningar.  $AX = B$  har oändligt många lösningar om och endast om  $A = \mathbf{0}$  och  $B = \mathbf{0}$  eller om det finns en  $3 \times 3$  matris  $M$  så att:

$$MA = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad MB = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

där åtminstone ett av  $i$ ,  $j$  eller  $k$  är skild från noll.

Vi multiplicerar  $MA$  och  $MB$  med de två elementära operationer som motsvarar att addera rad ett till rad två och tre med varsin multipel  $\lambda$  och  $\mu$ :

$$\begin{aligned} MA = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & & \\ \lambda & 1 & \\ \mu & & 1 \end{pmatrix} MA = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \lambda i & \lambda j & \lambda k \\ \mu i & \mu j & \mu k \end{pmatrix} \\ MB = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & & \\ \lambda & 1 & \\ \mu & & 1 \end{pmatrix} MB = \begin{pmatrix} h \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

<sup>1</sup>Sarrus regel eller cofaktorexpansion går såklart lika bra.

<sup>2</sup>Se kapitel 9 och 10 i algebrakompendiet för en redogörelse för hur detta görs.

Alla elementära operatorer har inverser varav det råder ekvivalens mellan (2) och (3). Vi kan omformulera detta till följande hjälplemma:

En linjärekvation på formen:

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \lambda i & \lambda j & \lambda k \\ \mu i & \mu j & \mu k \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} h \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

har oändligt många lösningar om åtminstone ett av  $i$ ,  $j$  eller  $k$  är skild från noll.

Kan ekvationen inte skrivas på denna form har den en entydig eller inga lösningar.

Nu är vi reda att ta oss an de tre obestämda fallen.

**Fallet  $a = 1$ :**

Vi låter  $a = 1$ , och betraktar  $AX = B$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det finns ingen ekvation ekvivalent till denna som är på den formen hjälplemmat anger. Vi vet också sedan innan att denna ekvation inte har en entydig lösning, alltså saknas lösningar till  $AX = B$  för  $a = 1$ .

**Fallet  $a = 3$ :**

Vi låter  $a = 3$  och betraktar  $AX = B$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Med samma resonemang som för  $a = 1$  visar vi att  $AX = B$  saknar lösningar för  $a = 3$ .

**Fallet  $a = 5$ :**

Vi låter  $a = 5$  och betraktar  $AX = B$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Med samma resonemang som för  $a = 1$  visar vi att  $AX = B$  saknar lösningar för  $a = 5$

För att sammanfatta så har vi först visat att  $AX = B$  har entydiga lösningar förutom då  $a = 1$ ,  $a = 3$  eller  $a = 5$ . För dessa fall har vi visat att lösningar saknas.

□