Seminarieuppgift 4 - Absolutbelopp, “simpel version”

Emma Bastås

October 2, 2022

Uppgiften är att finna de värden på x som upfyller olikheten:

$$2|x+2| < |x| + |x+3|. \tag{$\star$}$$

Vi låter $a(x) = 2x + 4$, $b(x) = x$ och $c(x) = x + 3$ och börjar med att finna alla lösningar till:

$$|a| = |b| + |c|. \tag{$\star\star$}$$

Absolutbelopp är definierat som:

$$\begin{cases} x, & \text{då } x \geq 0 \\ -x, & \text{då } x < 0 \end{cases}.$$

För $a(x)$, $b(x)$ och $c(x)$ gäller att de är antingen ≥ 0 eller < 0. Detta ger oss en ekvation med 8 fallindelningar:

$$(\star\star) \implies \begin{cases} a = b + c \\ a = b - c \\ a = -b + c \\ a = -b - c \\ -a = b + c \\ -a = b - c \\ -a = -b + c \\ -a = -b - c \end{cases} \tag{$\star\star^8$}$$

Vi struntar vilkoren för dessa fall och nöjer oss med det faktum att en lösning till $(\star\star)$ också kommer att vara en lösning till ett av dess fall*.

Alla dessa fall är första- och andragradsekvationer, vi finner alla lösningar till samtliga ekvationer, den processen är tämligen ointressant och lämnas som en övning till läsaren. Lösningarna som erhålls är:

$$(\star\star^8) \iff \begin{cases} \text{saknar lösningar.} \\ x = -{}^7\!/_2 \\ x = -{}^1\!/_2 \\ x = -{}^7\!/_4 \\ x = -{}^7\!/_4 \\ x = -{}^1\!/_2 \\ x = -{}^7\!/_2 \\ \text{saknar lösningar.} \end{cases}$$

Tre unika lösningar totalt som har medförts av $(\star\star)$. Vi testar alla tre värden i $(\star\star)$ medelst insättning och finner att $x = -\frac{1}{2}$ är den enda lösningen till $(\star\star)$. Nu är det dags för slutklämmen och detta kräver faktiskt tankeverksamhet:

Låt $f(x) = |b(x)| + |c(x)| - |a(x)|$, detta är en kontinuerlig funktion med endast ett nollställe, nämligen $-\frac{1}{2}$. Det gäller att $f(-2) > 0$. Antag nu att det finns ett $\mu < -\frac{1}{2}$ så att $f(\mu) < 0$. Då $f(x)$ är kontinuerlig kommer $f(x)$ anta alla värden mellan $f(-2)$ och $f(\mu)$ i intervallet $[-2, \mu]$. Då kommer $f(x)$ att anta 0 eftersom $f(\mu) < 0 < f(-2)$. Men $x = -\frac{1}{2}$ är enda nollstället och μ kan omöjligt vara detta värde då vi antog att $\mu < -\frac{1}{2}$. Antagandet att μ finns har producerat en motsägelse och då måste motsatsen vara sann; Det finns inget sådant μ. Det är då garanterat att $f(x) > 0$ för alla $x < -\frac{1}{2}$. $f(x) > 0$ är ekvivalent med $|a(x)| < |b(x)| + |c(x)|$.

På samma sätt visar vi att det för alla $x > -1/2$ gäller att $|a(x)| > |b(x)| + |c(x)|$ eftersomm talet $0 > -\frac{1}{2}$ och $|a(0)| > |b(0)| + |c(0)|$.

Det enda intervallet som upfyller olikheten $(\star)$ är då $x < -\frac{1}{2}$.

$\square$

*Notera att om vi hade studerat fallen så hade vi märkt att det faktiskt finns fall som inte upfylls för något x, den som tycker om att tänka kan ju finna och eliminera dessa fall, vi (jag) deremot föredrar att inte tänka på dessa ting.