Seminarieuppgift 1 - Rotekvationer

Emma Bastås

September 18, 2022

Uppgiften är att finna alla reella lösningar till

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3. \tag{0}$$

Algebraisk bearbetning

Vi börjar med att flytta över ena roten till högerledet för att sedan kvadrera:

$$\begin{aligned}
(0) \quad &\Leftrightarrow & \sqrt{x+3} &= 3 - \sqrt{2-x} \\
&\Rightarrow & x+3 &= 9 - 6\sqrt{2-x} + 2 - x & (1) \\
&\Leftrightarrow & 4-x &= 3\sqrt{2-x}. & (2)
\end{aligned}$$

Återigen kvadrerar vi båda led:

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Rightarrow & (4-x)^2 &= (3\sqrt{2-x})^2 & (3) \\
&\Leftrightarrow & 16 - 8x + x^2 &= 9(2-x) \\
&\Leftrightarrow & x^2 + x &= 2. & (4)
\end{aligned}$$

Vi ser att ekvation (4) är ett andragradspolynom som går att lösa med b.la. kvadratkompletering:

$$\begin{aligned}
(4) \quad &\Leftrightarrow & \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 2 \\
&\Leftrightarrow & \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4}. & (5)
\end{aligned}$$

Vi drar kvadratroten hur båda led:

$$
\begin{aligned}
(5) \quad \Leftrightarrow \qquad & x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \\
\Leftrightarrow \qquad & x = \frac{\pm 3 - 1}{2}
\end{aligned}
$$

och ser att $x = -2$ och $x = 1$ löser ekvation (4).

Verifiering av lösningar

$x = -2$ och $x = 1$ löser ekvation (4), men inte nödvändigtvis vår ursprungliga ekvation (0). På två platser, rad (1) och (3) har vi kvadrerat båda led vilket har medfört ekv (4), men denna ekvation är inte nödvändigtvis ekvivalent med den ursprungliga. Mer konkret kan vi säga att lösningarna till ekv (0) är en delmängd till lösningarna för ekv (4). I detta fall då ekv (4) endast har två lösningar kan vi helt enkelt testa båda i ekv (0).

$$
\begin{array}{llcccc}
(x = -2) & \sqrt{(-2)+3} + \sqrt{2-(-2)} & = & 1+2 & = & 3 \\
(x = 1) & \sqrt{1+3} + \sqrt{2-1} & = & 2+1 & = & 3.
\end{array}
$$

Därmed ser vi att $x = -2$ och $x = 1$ är lösningarna till $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3$.

$\square$