Analysuppgift 3 - Analys av kurva

Emma Bastås

November 6, 2022

Uppgiften är att till kurvan $y = f(x)$ där:

$$f(x) = \frac{|x-1| + 2x^2}{x+1}$$

bestämma lokala och globala extrempunkter och asymptoter samt rita grafen.

Vi börjar med att att falluppdela $f(x)$ och därefter förenkla uttrycken med polynomdivision:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \dfrac{x-1+2x^2}{x+1} & \text{om } x \geq 1 \\ \dfrac{-x+1+2x^2}{x+1} & \text{om } x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x-1 & \text{om } x \geq 1 \\ 2x-3+\dfrac{4}{x+1} & \text{om } x < 1 \end{cases} . \end{aligned} \tag{1}$$

Asymptoter

Det finns tre typer av asymptoter att söka efter:

- **Vertikal asymptot**. Linjen $x = a$ är en vertikal asymptot till $y = f(x)$ om $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
- **Horisontell asymptot**. Linjen $y = a$ är en horisontell asymptot till $y = f(x)$ om $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.
- **Sned asymptot**. Linjen $y = kx + m$ där $k \neq 0$ är en sned asymptot till $y = f(x)$ om $\lim_{x \to \pm\infty}[f(x) - (kx + m)] = 0$.

Det finns en punkt då $f(x)$ går mot oändligheten, och den ligger i $x = -1$. Detta är den enda vertikala asymptoten till $y = f(x)$.

Vi testar om $f(x)$ har en horisontell asymptot då x går mot $+\infty$:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty} f(x) = L \\
\iff \quad & \lim_{x\to+\infty} [2x-1] = L.
\end{aligned}
$$

Vi ser direkt att detta saknar gränsvärde och att en horisontell asymptot är utesluten. Vi testar nu om det finns en sned asymptot istället:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx+m)] = 0 \\
\iff \quad & \lim_{x\to+\infty} [2x-1-(kx+m)] = 0 \\
\iff \quad & \lim_{x\to+\infty} [(2-k)x-(m+1)] = 0 \\
\iff \quad & k = 2 \quad \text{och} \quad m = -1.
\end{aligned}
$$

Vi ser att linjen $y = 2x - 1$ är en sned asymptot till $y = f(x)$. På liknande sätt finner vi att linjen $y = 2x - 3$ är en sned asymptot då x går mot $-\infty$.

Nu har vi funnit samtliga asymptoter till $y = f(x)$: $x = -1$, $y = 2x - 1$ och $y = 2x - 3$.

Extrempunkter

Vi bestämmer derivatan $f'(x)$ till $f(x)$ genom att derivera fallen separat:

$$
(1) \implies f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{om } x > 1 \\ 2 - \dfrac{4}{(x+1)^2} & \text{om } x < 1 \end{cases} .
$$

Notera att $f(x)$ inte är deriverbar i punkten $x = 1$. Går vi tillbaka till derivatans definition finner vi att vi får två olika derivator beroende på från vilket håll vi närmar oss $x = 1$, en egenskap som gör derivatan odefinierad i den punkten.

Att en punkt x_0 är ett extremvärde till en funktion $f(x)$ medför alltid att ett av tre påståenden är sant:

i) x_0 är en ändpunkt i definitionsintervallet till $f(x)$.

ii) $f(x)$ är diskontinuerlig i x_0.

iii) $f(x)$ är deriverbar i x_0 och $f'(x_0) = 0$.

I vårt fall är $f(x)$ definierad i intervallen $x < -1$ och $x > -1$. Således kan aldrig det första påståendet vara sant. Vi vet också att $f(x)$ är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd, således kan aldrig det andra påståendet vara sant. Det lämnar oss med det sista påståendet, alla extrempunkter till $f(x)$ är nollställen till $f'(x)$.

Vi finner dessa nollställen. För $x > 1$ är $f'(x) = 2$ och detta saknar nollställen, för fallet $x < 1$ ställer vi upp och löser ekvationen:

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \quad x < 1 \\
\iff \quad & 2 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0. \\
\iff \quad & 2(x+1)^2 - 4 = 0 \\
\iff \quad & x = -1 \pm \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Vi finner även de intervall för vilket $f'(x) < 0$, detta är nödvändigt för att senare avgöra om nollställena är max- eller minimipunkter eller terrasspunkter.

$$
\begin{aligned}
& f'(x) < 0 \\
\iff \quad & \begin{cases} 2 < 0 & \text{då } x > 1 \\ 2 - \frac{4}{(x+1)^2} < 0 & \text{då } x < 1 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Det första fallet är alltid falskt och kan därför förkastas:

$$
(2) \quad \iff \quad 2 - \frac{4}{(x+1)^2} < 0 \quad \text{och} \quad x < 1. \tag{3}
$$

Nämnaren $(x+1)^2$ är strikt större än noll för alla värden av x i definitionsmängden till $f'(x)$ och vi kan därför multiplicera båda led i olikheten med nämnaren:

$$
\begin{aligned}
(3) \quad \iff \quad & 2(x+1)^2 - 4 < 0 && \text{och} \quad x < 1 \\
\iff \quad & (x+1)^2 < 2 && \text{och} \quad x < 1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Nu drar vi kvadratroten ur båda led och det är här viktigt att komma ihåg att $\sqrt{a^2} \neq a$! Istället är det $\sqrt{a^2} = |a|$ som är den korrekta identitet.

$$
\begin{aligned}
(4) \quad &\iff \quad |x+1| < \sqrt{2} && \text{och} \quad x < 1 \\
&\iff \quad \begin{cases} x+1 < \sqrt{2} & \text{då } x > -1 \\ -x-1 < \sqrt{2} & \text{då } x < -1 \end{cases} && \text{och} \quad x < 1 \\
&\iff \quad \begin{matrix} -1 < x < \sqrt{2}-1 \\ -1-\sqrt{2} < x < -1. \end{matrix}
\end{aligned}
$$

Nu vet vi både för vilka värden av x som $f'(x)$ är noll och strikt mindre än noll, och därav vet vi också för vilka x som $f'(x)$ är strikt större än noll, nämligen:

$$
\begin{aligned}
&x < -1-\sqrt{2} && \text{eller} \\
&\sqrt{2}-1 < x < 1 && \text{eller} \\
&1 < x.
\end{aligned}
$$

Med denna information kan vi besvara frågan om extrempunkter, för att göra det enklare för oss så sammanställer vi relevant data i en tabell:

x		$-\sqrt{2}-1$		-1		$\sqrt{2}-1$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$	odef	$+$

Vi ser nu att $x = -\sqrt{2}-1$ är ett lokalt strikt maximum och att $x = \sqrt{2}-1$ är ett lokalt strikt minimum. Det finns inga andra extrempunkter utöver dessa. Från avsnittet **Asymptoter** konstaterade vi att att $y = f(x)$ inte har några horisontella asymptoter, och därav är obegränsad. Vi ser från tabellen att $f(x)$ då är både uppåt och nedåt obegränsad så de två extrempunkter vi funnit är inte globala extrempunkter.

Grafritning

Genom att komplettera den tidigare tabellen med ett par beräknade punkter $(x, f(x))$ på kurvan så kan vi skissa upp ett approximerat utseende:

x		$-\sqrt{2}-1$		-1		$\sqrt{2}-1$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$	odef	$+$
$f(x)$		$-\frac{8}{\sqrt{2}}-5$				$\frac{8}{\sqrt{2}}-5$			

Det är viktigt att inte blanda ihop de sneda asymptoterna. När kurvan går mot $-\infty$ närmar den sig asymptoten $y = 2x-3$, och när kurvan går mot $+\infty$ närmar den sig asymptoten $y = 2x-1$.

Vi approximerar även en del värden som förekommer i tabellen till trevliga bråk:

$$\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} \approx \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2} \implies$$
$$-\sqrt{2} - 1 \approx -\frac{5}{2} \quad \text{och} \quad \sqrt{2} - 1 \approx \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{2}} = \sqrt{32} \approx \sqrt{36} = 6 \implies$$
$$-\frac{8}{\sqrt{2}} - 5 \approx -11 \quad \text{och} \quad \frac{8}{\sqrt{2}} - 5 \approx 1.$$

Slutligen, den ritade grafen: