Algebrauppgift 5 - Rekursiv talföljd

Emma Bastås

Oktober 23

Uppgiften är att med induktion finna en icke-rekursiv formel till följande talföljd:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3$$
$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \; n \geq 2.$$

Vi börjar med att beräkna a_n för ett litet antal värden på n i hoppet om att finna ett mönster:

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ a_4 &= 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7 \\ a_5 &= 2a_4 - a_3 = 2 \cdot 7 - 5 = 9. \end{aligned}$$

Vi ser ett mönster! För $n \leq 5$ beskrivs talföljden a_n av formeln:

$$a_n = 2n - 1 \tag{$\star$}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ &\vdots \\ a_5 &= 2 \cdot 5 - 1 = 9. \end{aligned}$$

Kanske gäller ($\star$) även för $n > 5$, kanske inte.. Antag nu att ($\star$) gäller för något n och $n - 1$. Då gäller ($\star$) även för $n + 1$, ty:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - a_{n-1} \\ &= 2(2n-1) \; - \; (2(n-1)-1) \\ &= 4n - 2 \; - \; 2n + 2 + 1 \\ &= 2n + 1 \\ &= 2(n+1) - 1. \end{aligned}$$

Vi har alltså visat att ($\star$) gäller för b.la. $n = 1$ och $n = 2$, samt att om ($\star$) gäller för något n och $n - 1$ så gäller ($\star$) även för $n + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller då ($\star$) för alla n.

$\square$