Analysuppgift 5 - Area under kurvor

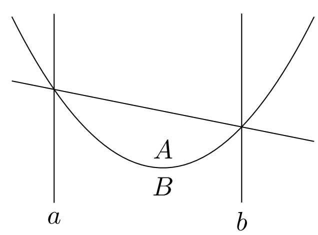
Emma Bastås

November 6, 2022

Uppgiften är att beräkna arean av de område som begränsas av kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ där:

$$f(x) = x^2 \quad \text{och} \quad g(x) = 2 - x.$$

Utan att göra någon mer detaljerad analys av kurvornas utseende så kan vi ändå säga att grafen till dessa två kurvor kring origo ser ut ungefär såhär:



Vi har här gjort två antaganden:

1. linjen $y = g(x)$ skär kurvan $y = f(x)$ i två skilda punkter $x = a$ och $x = b$. Detta kommer vi senare att verifiera.

2. Ingen av kurvorna går under x-axeln i intervallet $[a, b]$. Det är uppenbart att $y = f(x)$ aldrig går under x-axeln, om det första antagandet gäller så kommer heller aldrig linjen $y = g(x)$ att skära x-axeln i intervallet.

Det som vi ska beräkna är arean av området A. Arean under $y = f(x)$ i området $[a, b]$ ges av $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = B$. Arean under $y = g(x)$ i området $[a, b]$ ges av $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = A + B$. Vi får då ett uttryck för arean A:

$$A = (A + B) - B = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Både $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga för alla reella värden på x. Om $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktion till $f(x)$ respektive $g(x)$ ger analysens huvudsats att:

$$\begin{aligned}(1) &= (G(b) - G(a)) - (F(b) - F(a)) \\ &= G(b) - G(a) - F(b) + F(a). \end{aligned} \tag{2}$$

Det som återstår nu är att finna primitiva funktioner till $f(x)$ och $g(x)$ samt skärningspunkterna a och b.

Skärningspunkterna a och b är lösningarna till andragradsekvationen $f(x) = g(x)$, de två lösningarna är $x = -2$ och $x = 1$, d.v.s $a = -2$ och $b = 1$. Nu har vi även verifierat att antagandena som vi gjorde om kurvorna tidigare gäller.

Att finna primitiva funktioner görs med integreringsregler för polynom. Vi finner att $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ och $G(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + D$ där C och D är två okända konstanter.

Det som återstår nu är att beräkna värdet på (2):

$$G(1) - G(-2) - F(1) + F(-2) = \frac{9}{2}.$$

Vi har alltså visat att $A = \frac{9}{2}$ vilket är vad som söktes.

$\square$