вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
Вариант 1					
Име:					

Примерен изпит по СЕП
февруари 2022 г.

Зад. 1. Разгледайте непрекъснатото изображение $\Gamma \in [\mathbb{N}_\perp^2 \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, където

$$\Gamma(f)(x,y) = \begin{cases} f(x, y+1) + 1, & \text{ако } x \neq y, x, y \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{ако } x = y, x, y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Намерете най-малката неподвижна точка на Γ.

б) Има ли Γ други неподвижни точки?

Зад. 2. Докажете, че $[\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp] = [\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$.

Зад. 3. За всеки тип $\mathtt{a}$ дефинираме релацията $\lhd_{\mathtt{a}} \subseteq [\![\mathtt{a}]\!] \times \mathtt{PCF}_{\mathtt{a}}$ по следния начин:

- Нека $\mathtt{a} = \mathtt{nat}$. Тогава

$$n \lhd_{\mathtt{nat}} \tau \overset{\text{деф}}{\iff} (n \neq \perp^{[\![\mathtt{nat}]\!]} \implies \tau \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}).$$

- Нека $\mathtt{a} = \mathtt{b} \to \mathtt{c}$. Тогава

$$f \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau \overset{\text{деф}}{\iff} (\forall e \in [\![\mathtt{b}]\!])(\forall \mu \in \mathtt{PCF}_{\mathtt{b}})[\, e \lhd_{\mathtt{b}} \mu \implies f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau(\mu)\,].$$

За произволен тип $\mathtt{a}$ и произволен терм $\tau : \mathtt{a}$ да разгледаме множеството $D \overset{\text{деф}}{=} \{d \in [\![\mathtt{a}]\!] \mid d \lhd_{\mathtt{a}} \tau\}$. Докажете, че за всяка верига $(d_i)_{i=0}^\infty$ от елементи на D, то $\bigsqcup_i d_i$ също е елемент на D.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
Вариант 2					
Име:					

Примерен изпит по СЕП
февруари 2022 г.

Зад. 1. Намерете най-малкото решение на системата

$$\begin{aligned} X_0 &= a \cdot X_1 + b \cdot X_0 + \varepsilon \\ X_1 &= a \cdot X_2 + b \cdot X_0 \\ X_2 &= a \cdot X_2 + b \cdot X_2. \end{aligned}$$

Зад. 2. Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот. Докажете, че ако $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, то f притежава най-малка неподвижна точка.

Зад. 3. За затворени термове τ_1 и τ_2 на езика $\mathtt{PCF}$, дефинираме $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$, ако

- $\emptyset \vdash \tau_1 : \mathtt{a}$ и $\emptyset \vdash \tau_2 : \mathtt{a}$;
- За всички контексти $\mathcal{C}[-]$, за които $\emptyset \vdash \mathcal{C}[\tau_1] : \mathtt{nat}$ и $\emptyset \vdash \mathcal{C}[\tau_2] : \mathtt{nat}$, то

$$(\forall \mathtt{n})[\ \mathcal{C}[\tau_1] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \mathcal{C}[\tau_2] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}\ ].$$

Докажете, че е изпълнена импликацията:

$$\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat} \implies [\![\tau_1]\!] \sqsubseteq [\![\tau_2]\!].$$

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
Вариант 3					
Име:					

Примерен изпит по СЕП
февруари 2022 г.

Зад. 1. Да разгледаме програмата на езика `FUN`:

```
h(x) = f(x, 1, 1)
f(x, y, z) = if x == 0 then z
             else f(x - 1, 2*y, g(y,z))
g(y, z) = if z == 0 then 0
          else g(y, z - 1) + y
```

Намерете $[\![\mathtt{h}]\!]$.

Зад. 2. Нека $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ са области на Скот. Дефинираме изображението $\mathtt{eval} : [\mathcal{D} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{E}] \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ по следния начин:

$$\mathtt{eval}(f, d) \overset{\text{деф}}{=} f(d).$$

Докажете, че $\mathtt{eval}$ е непрекъснато изображение.

Зад. 3. Нека $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$ е произволен терм на езика `FUN`. Да разгледаме произволна верига $(\overline{\varphi}_r)_{r=0}^\infty$ от елементи на областта на Скот $[\mathbb{N}_\perp^{m_1} \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$. Докажете, че тогава $[\![\tau]\!]$ е непрекъснато изображение, т.е.

$$[\![\tau]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r) = \bigsqcup_r [\![\tau]\!](\overline{\varphi}_r).$$

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
Вариант 4					
Име:					

Примерен изпит по СЕП
февруари 2022 г.

Зад. 1. Да разгледаме програмата на езика `FUN`:

```
h(x) = f(x) + 1
f(x) = if x == 0 then 2
       else if x == 1 then 8
         else 4 * f(g(x)) - 3 * f(g(g(x)))
g(x) = if x == 0 then 0
       else if x == 1 then 0
         else g(x - 1) + 1
```

Намерете $[\![\mathtt{h}]\!]$.

Зад. 2. Докажете, че изображението

$$\mathtt{comp} : [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \times [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}] \to [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$$

е непрекъснато, където $\mathtt{comp}(f, g) = f \circ g$.

Зад. 3. Докажете, че типизиращата релация е съвместима с операцията субституция за термове на езика $\mathtt{PCF}$. С други думи, докажете, че ако имаме $\Gamma \vdash \rho : \mathtt{a}$, $\mathtt{x} \in \mathtt{dom}(\Gamma)$ и $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau$, то можем да заключим, че $\Gamma \vdash \tau[\mathtt{x}/\rho]$.