Dimension von Varietäten

Yvan Ngumeteh Emma Ahrens

15. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract **1**

2 Einleitung **1**

3 Dimension von Monomidealen **1**

4 Dimension von beliebigen Idealen **2**

4.1 Das Hilbert-Polynom 2

1 Abstract

2 Einleitung

3 Dimension von Monomidealen

Lemma 1. *Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, das von einer Menge G von Monomen erzeugt wird. Dann liegt ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ in I genau dann, wenn für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f ein $g \in G$ existiert, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt.*

Beweis. Sei $f \in I$. Dann gilt $f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i$ mit $h_i \in R$ und $g_i \in G$. Damit hat jeder Term die Form $h_i g_i$ und ist somit durch ein Element aus G teilbar. Sei nun andersherum $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ und für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f existiert ein $g \in G$, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt. Dann kann man f als Linearkombination von Elementen aus G schreiben und damit liegt f nach der Definition eines Ideals in I. □

Lemma 2. *Sei $(g_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von Monomen in $k[X_1, \dots, X_n]$ mit $g_1 \succeq g_2 \succeq \dots$ für eine Monomialordnung $\preceq$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $g_n = g_r$ für alle $n \geq r$.*

Beweis. Sei $I = ((g_i)_{i \geq 1})$, dann ist I ein Ideal. Nach dem Hilbert'schen Basissatz wissen wir, dass I endlich erzeugt ist. Also existiert ein r, so dass die Menge $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ I erzeugt. Für ein $i \geq r$ und $g_i \in I$ existiert ein $j \in \underline{r}$, so dass $g_j \mid (g_i$ nach Lemma 1. Also $g_i \succeq g_j \succeq g_r$. Andererseits gilt nach Voraussetzung, dass $g_i \preceq g_r$, also folgt $g_i = g_r$. □

Lemma 2 sagt uns, dass jede absteigende Kette von Monomen stationär wird und insbesondere in jeder abzählbaren Menge von Monomen ein kleinstes Element existiert.

Proposition 3 (Divisionsalgorithmus)**.** *Sei $\preceq$ eine Monomialordnung und $f, f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ nicht null. Dann gilt*

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \ + r,$$

mit $r, h_1, \dots, h_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ und $LT(h_i f_i \preceq LT(f)$ für alle $h_i \neq 0$ und $r = 0$ oder kein Term von r wird durch ein $LT(f_i)$ geteilt für $i \in \underline{s}$.

Beweis. □

Satz 4. *Sei $\{0\} \neq I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal und $\preceq$ eine Monomialordnung auf $Z^n_{\geq 0}$. Sei G eine Gröbnerbasis von I mit I = (G). Dann ist eine k-Basis von $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ gegeben durch die Restklassen von X^α mit*

$$\alpha \in C(I) := \{\alpha \in Z^n_{\geq 0} \mid LT(g) \nmid X^\alpha \quad \forall g \in G\}.$$

Beweis. Wir zeigen erst, dass die Monome mit Exponent aus C(I) ganz $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ aufspannen und anschließend, dass kein Element aus I durch echte Linearkombination solcher Monome dargestellt werden kann.
Sei $G = \{f_1, \ldots, f_s\}$ und $0 \neq f \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i + r = f' + r$ nach Proposition 3 mit $r = 0$ oder $r = a_l X^{\alpha_l} + \ldots + a_0$ mit $LT(f_i) \nmid X^{\alpha_j}$ für jedes $i \in \underline{s}$ und $j \in \underline{l}$. Also ist r eine Linearkombination von Monomen X^{α_j} mit $\alpha_j \in C(I)$. Es gilt außerdem $[f] = [r]$ in $k[X_1, \ldots, X_n]/(G)$ und damit erzeugen die Monome mit $\alpha \in C(I)$ den ganzen Restklassenring.
Angenommen es existiert $f = f' + r \in I$ mit $r \neq 0$ und f' und r wie oben. Dann gilt $0 \neq r = f - f'$. Da $f \in I$ und $f' \in I$ folgt $r \in I$, womit folgt, dass $(LT(r) \in (LT(f_1), \ldots, LT(f_s))$. Nach Lemma 1 existiert dann ein f_i mit $LT(f_i) \mid LT(r)$. Dies ist ein Widerspruch, also folgt $r = 0$ und die Restklassen von X^α mit $\alpha \in C(I)$ sind linear unabhängig in $k[X_1, \ldots, X_n]/I$. □

4 Dimension von beliebigen Idealen

4.1 Das Hilbert-Polynom

Im folgenden sei $n \in \mathrm{N}$ fest.

Satz 5. *Sei $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, dann existiert es einen eindeutigen Polynom ${}^aHP_I(t) \in \mathrm{Q}[t]$ (mit t eine variable) und $s_0 \geq 0$, sodass ${}^aHP_I(s) = {}^aHF_I(s) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$, $\forall s \geq s_0$. Weiterhin besitzt ${}^aHP_I(t)$ folgende Eigenschaften:*

- Der Grad von ${}^aHP_I(\mathrm{t})$ ist der größte $d \in \mathrm{N}$, sodass es $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_d \leq n$ existieren mit $I \cap k[X_{i_1}, \ldots, X_{i_d}] = \emptyset$.
- Sei $d = grad({}^aHP_I(\mathrm{t}))$. Dann gilt ${}^aHP_I(\mathrm{t}) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ mit $a_k d! \in \mathrm{Z}, \forall k \in \underline{d_0}$ und $a_k d! > 0$

Beweis 1. *Wir bemerken dass ${}^aHP_I(t)$ eindeutig ist, da es ein Polynom ist. Es nur die Existenz nachgewiesen werden. Sei $M = \{\alpha \in \mathrm{N}_0 : |\alpha| \leq s\}$*

- *Für die trivialen Fällen $I = (0)$ hat man, wegen ${}^aHF_I(s) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) = |M| = \binom{n+s}{s}, \forall s \in \mathrm{N}_0$.*
  Oder $I = k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt ${}^aHF_I(s) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) = 0, \forall s \in \mathrm{N}_0$ und somit entspricht in diesem Fall ${}^aHP_I = 0$ (Das Nullpolynom !) Nehmen wir also an, dass I nicht trivial ist. Sei G eine Gröbner-Basis von I (bzgl. eine graduierte lexikographische Ordnung) und

  $$\{LM(g) : g \in G\} = \{X_\beta : \beta \in M\}$$

  wir setzen

  $$C(I) := \{\alpha \in \mathrm{N}_0 : X^\beta \nmid X^\alpha \forall \in \beta \in M\} \text{ und } C(I)_{\leq s} := C(I) \cap \{\alpha \in \mathrm{N}_0 : |\alpha| \leq s\}$$

  Behauptung: Für $s \geq 0$ gilt ${}^aHF_I(s) = |C(I)_{\leq s}|$, $\forall s \geq 0$.
  Für den Beweis benutzt man (Macaulay), dann gilt ${}^aHF_I(s) = {}^aHF_{(LT(I))}(s)$, $\forall \in s \geq 0$. Das heißt,

  $$dim_k(k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) = dim_k(k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/(LT(I))_{\leq s}).$$

  Weiterhin gilt mit der Buchberger-Definition (1.2.7), dass $\{X^\beta : \beta \in M\}$ ist eine Gröebner-Basis von (LT(I)), deshalb mit Satz 1.2.8 habt man, dass die Restklassen von X^β ($\alpha \in C(I)$) bilden eine K-Vektorraum Basis von $k[X_1, \ldots, X_n]/(LT(I))$. Daraus folgt die Behauptung.

- *Sei $J \subseteq \underline{n}$ und eine Funktion $\tau : J \longrightarrow \mathrm{N}_0$. Wir definieren*

$$C(J, \tau) := \{\alpha \in N : \alpha_j = \tau(j), \forall \in J\}$$

Behauptung: Es existiert eine endliche Anzahl χ von Tupeln (J,τ), sodass

$$C(I) = \bigcup_{(J,\tau)\in\chi}$$

Proof. Für $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathrm{N}_0$, definiert man

$$C(\beta) := \{\alpha \in \mathrm{N}_0{}^n : X^\beta \nmid X^\alpha\}$$

Dann haben wir $C(I) = \bigcap\limits_{\beta\in M} C(\beta)$. Weiterhin bemerken wir, dass falls $(J, \tau), (J\prime, \tau\prime)$ zwei Tupeln, wie oben definiert bezeichnet, dann gilt

$$C(J, \tau) \cap C(J\prime, \tau\prime) = \begin{cases} \emptyset, & falls \tau(j) = \tau\prime(j) \\ C(J \cup J\prime, \tau_0), & sonst \end{cases}$$

wobei $\tau_0 : J \cup J\prime \longrightarrow \mathrm{N}_0$, $j \mapsto \tau_0(j) = \begin{cases} \tau(j), & falls j \in J \\ \tau\prime(j), & falls j \in J\prime \\ 0, & sonst \end{cases}$.

Das heißt man kann O.B.d.A annehmen, dass in

□

Literatur

[1] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis.* 15. Aufl. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 2003

[2] Gröger, Detlef ; Marti, Kurt: *Grundkurs Mathematik für Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler.* 2. Aufl. Physica-Verlag, 2004