

Dimension von Varietäten

Yvan was-ist-dein-Nachname

Emma Ahrens

15. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	1
2	Einleitung	1
3	Dimension von Monomidealen	1
4	Dimension von beliebigen Idealen	2
5	Literaturangabe	2

1 Abstract

2 Einleitung

3 Dimension von Monomidealen

Lemma 1. Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, das von einer Menge G von Monomen erzeugt wird. Dann liegt ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ in I genau dann, wenn für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f ein $g \in G$ existiert, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt.

Beweis. Sei $f \in I$. Dann gilt $f = \sum_{i=1}^s h_i g_i$ mit $h_i \in R$ und $g_i \in G$. Damit hat jeder Term die Form $h_i g_i$ und ist somit durch ein Element aus G teilbar. Sei nun andersherum $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ und für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f existiert ein $g \in G$, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt. Dann kann man f als Linearkombination von Elementen aus G schreiben und damit liegt f nach der Definition eines Ideals in I . \square

Lemma 2. Sei $(g_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von Monomen in $k[X_1, \dots, X_n]$ mit $g_1 \succeq g_2 \succeq \dots$ für eine Monomialordnung \preceq . Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $g_n = g_r$ für alle $n \geq r$.

Beweis. Sei $I = ((g_i)_{i \geq 1})$, dann ist I ein Ideal. Nach dem Hilbert'schen Basissatz wissen wir, dass I endlich erzeugt ist. Also existiert ein r , so dass die Menge $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ I erzeugt. Für ein $i \geq r$ und $g_i \in I$ existiert ein $j \in \underline{r}$, so dass $g_j \mid (g_i)$ nach Lemma 1. Also $g_i \succeq g_j \succeq g_r$. Andererseits gilt nach Voraussetzung, dass $g_i \preceq g_r$, also folgt $g_i = g_r$. \square

Lemma 2 sagt uns, dass jede absteigende Kette von Monomen stationär wird und insbesondere in jeder abzählbaren Menge von Monomen ein kleinstes Element existiert.

Proposition 3 (Divisionsalgorithmus). Sei \preceq eine Monomialordnung und $f, f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ nicht null. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^s h_i f_i + r,$$

mit $r, h_1, \dots, h_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ und $LT(h_i f_i) \preceq LT(f)$ für alle $h_i \neq 0$ und $r = 0$ oder kein Term von r wird durch ein $LT(f_i)$ geteilt für $i \in \underline{s}$.

Beweis. Wir beweisen diese Proposition per TODO downward Induktion über $LT(f)$.

Beim Induktionsschritt unterscheiden wir drei Fälle:

Sei f konstant, dann gilt $f = \sum_{i=1}^s 0f_i + r$ mit $r := f$ und $h_i := 0$.

Falls ein $i \in \underline{s}$ existiert, so dass $LT(f_i) \mid LT(f)$, setzen wir

$$f^{(1)} := f - \frac{LT(f)}{LT(f_i)} f_i.$$

Dann gilt $f = f^{(1)} + \frac{LT(f)}{LT(f_i)} f_i$ mit $h_i = \frac{LT(f)}{LT(f_i)}$ und $LT(h_i f_i) = LT(f) \preceq LT(f)$.

Falls kein solches f_i existiert, schreiben wir

$$f^{(1)} := f - LT(f).$$

Und $f = f^{(1)} + LT(f)$ mit $r = LT(f)$ erfüllt die Bedingungen (insbesondere, dass kein Term von r durch ein $LT(f_i)$ geteilt wird).

Führe den Schritt nun induktiv auf $f^{(1)}$ durch bis $f^{(j)} = 0$ und bestimme h_1, \dots, h_s, r durch Rückwärtseinsetzen. \square

Evtl. Beispiel, dass diese Form nicht eindeutig ist.

Satz 4. Sei $\{0\} \neq I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und \preceq eine Monomialordnung auf $Z_{\geq 0}^n$. Sei G eine Gröbnerbasis von I mit $I = (G)$. Dann ist eine k -Basis von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ gegeben durch die Restklassen von X^α mit

$$\alpha \in C(I) := \{\alpha \in Z_{\geq 0}^n \mid LT(g) \nmid X^\alpha \quad \forall g \in G\}.$$

Beweis. Wir zeigen erst, dass die Monome mit Exponent aus $C(I)$ ganz $k[X_1, \dots, X_n]/I$ aufspannen und anschließend, dass kein Element aus I durch echte Linearkombination solcher Monome dargestellt werden kann.

Sei $G = \{f_1, \dots, f_s\}$ und $0 \neq f \in k[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist $f = \sum_{i=1}^s h_i f_i + r = f' + r$ nach Proposition 3 mit $r = 0$ oder $r = a_l X^{\alpha_l} + \dots + a_0$ mit $LT(f_i) \nmid X^{\alpha_j}$ für jedes $i \in \underline{s}$ und $j \in \underline{l}$. Also ist r eine Linearkombination von Monomen X^{α_j} mit $\alpha_j \in C(I)$. Es gilt außerdem $[f] = [r]$ in $k[X_1, \dots, X_n]/(G)$ und damit erzeugen die Monome mit $\alpha \in C(I)$ den ganzen Restklassenring.

Angenommen es existiert $f = f' + r \in I$ mit $r \neq 0$ und f' und r wie oben. Dann gilt $0 \neq r = f - f'$. Da $f \in I$ und $f' \in I$ folgt $r \in I$, womit folgt, dass $(LT(r) \in (LT(f_1), \dots, LT(f_s)))$. Nach Lemma 1 existiert dann ein f_i mit $LT(f_i) \mid LT(r)$. Dies ist ein Widerspruch, also folgt $r = 0$ und die Restklassen von X^α mit $\alpha \in C(I)$ sind linear unabhängig in $k[X_1, \dots, X_n]/I$. \square

Was sagt uns Beispiel 1.2.9?? TODO

Bildchen mit Punkten und Erklärung dazu. Wir betrachten das 'Wachstum' von $k[X_1, \dots, X_n]/I$

Definition 5. Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann definiere $I_{\leq s} := I \cap k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$. Nun gilt, dass $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über k mit $I_{\leq s}$ als Teilraum ist. Wir können die Funktion

$${}^a H F_I : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad s \mapsto \dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s} / I_{\leq s})$$

definieren, die (affine) Hilbertfunktion von I genannt wird.

4 Dimension von beliebigen Idealen

5 Literaturangabe