

Abbildung 1: Die Varietät $V(X^2 + Y^2 - 1)$ aus [1]

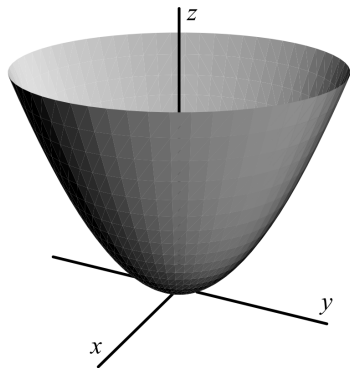


Abbildung 2: Das elliptische Paraboloid $V(Z - X^2 - Y)$ aus [1]

Lemma

Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, das von einer Menge G von Monomen erzeugt wird. Dann liegt ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ in I genau dann, wenn für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f ein $g \in G$ existiert, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt.

Lemma

Sei $(g_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von Monomen in $k[X_1, \dots, X_n]$ mit $g_1 \succeq g_2 \succeq \dots$ für eine Monomialordnung \preceq . Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $g_n = g_r$ für alle $n \geq r$.

Proposition (Divisionsalgorithmus)

Sei \preceq eine Monomialordnung und $f, f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ nicht null. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^s h_i f_i + r,$$

mit $r, h_1, \dots, h_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ und $LT(h_i f_i) \preceq LT(f)$ für alle $h_i \neq 0$ und $r = 0$ oder kein Term von r wird durch ein $LT(f_i)$ geteilt für $i \in \underline{s}$.

Satz

Sei $\{0\} \neq I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und \preceq eine Monomialordnung auf \mathbb{N}_0^n . Sei G eine Gröbnerbasis von I mit $I = (G)$. Dann ist eine k -Basis von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ gegeben durch die Restklassen von X^α mit

$$\alpha \in C(I) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid LT(g) \nmid X^\alpha \ \forall g \in G\}.$$

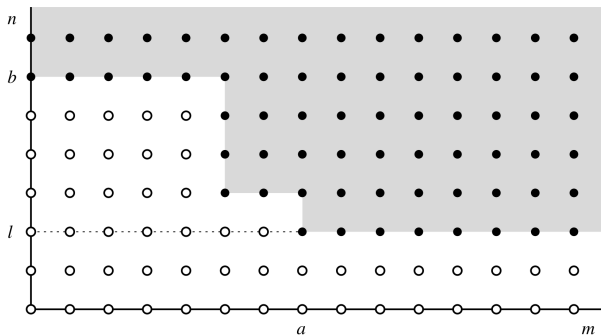


Abbildung 3: Anschauliche Darstellung von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ aus [1]

Definition

Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann definiere $I_{\leq s} := I \cap k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$. Nun gilt, dass $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über k mit $I_{\leq s}$ als Teilraum ist. Wir können die Funktion

$$^aHF_I : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad s \mapsto \dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s} / I_{\leq s})$$

definieren, die (affine) Hilbertfunktion von I genannt wird.

Lemma (Macaulay)

Sei \preceq eine gradierte lexikographische Monomialordnung und $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist ${}^aHF_I(s) = {}^aHF_{LT(I)}(s)$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$.

Satz

Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$, dann existiert ein eindeutiges Polynom

${}^aHP_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ (t ist eine Variable) und $s_0 \geq 0$, sodass

${}^aHP_I(s) = {}^aHF_I(s) = \dim_k (k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s} / I_{\leq s})$, für alle $s \geq s_0$.

Weiterhin besitzt ${}^aHP_I(t)$ folgende Eigenschaften:

- a) Der Grad von ${}^aHP_I(t)$ ist der größte $d \in \mathbb{N}$, sodass es $i_1, i_2, i_3, \dots, i_d \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_d \leq n$ existieren und $I \cap k[X_{i_1}, \dots, X_{i_d}] = \emptyset$.
- b) Sei $d = \text{grad}({}^aHP_I)$. Dann gilt ${}^aHP_I(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$ mit $a_k d! \in \mathbb{Z}, \forall k \in \underline{d_0}$ und $a_d d! > 0$

Definition

Sei $V \subset k^n$ eine algebraische Menge und ${}^aHP_{I(V)}(t)$ ist das Hilbert-Polynom von $I(V) \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n]$ (nach Satz 2 ist wohldefiniert und eindeutig). Für $V \neq \emptyset$ (d.h. $I(V) \neq k[X_1, \dots, X_n]$), wird die Dimension definiert als

$$\dim(V) = \text{grad}({}^aHP_{I(V)}).$$

Eine etwas handlichere Charakterisierung ist nach Satz 2 durch:

$$\dim(I(V)) = \max \{d \in \underline{n} : \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \text{ mit } I \cap K[X_{i_1}, \dots, X_{i_d}] \neq 0\}$$

gegeben.

Proposition

Sei $V \subseteq k^n$ algebraisch und $V = \bigcup_{i \in \underline{r}} V_i$ eine Zerlegung in irreduziblen Komponenten (vgl. Proposition 1.1.11). Dann gilt

$$\dim(V) = \max \{ \dim(V_i) : i \in \underline{r} \}$$

Definition

Sei A eine k -Algebra (kommutativer, assoziativer k -Algebra mit 1). Man nennt $a_1, \dots, a_m \in A$ algebraisch unabhängig, falls

$$\forall F \in k[X_1, \dots, X_m] \setminus \{0\} \text{ gilt } F(a_1, \dots, a_m) \neq 0.$$

Man definiert

$$\partial_k(A) := \sup \{m \geq 0 : \exists m \text{ algebraisch unabhängige Elemente in } A\}$$

Bemerkung: Falls A ein Körper ist, dann nennt man $\partial_k(A)$ der Transzendenz Grad von A über k .

Proposition

Sei $A := k[X_1, \dots, X_n]/I$ mit $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ ein echtes Ideal. Dann gilt $\text{grad}({}^a\text{HP}_I) = \partial_k(A)$. Ist A weiterhin ein Integritätsbereich (IB) und K ist der Quotienten-Körper von A , dann gilt

$$\text{grad}({}^a\text{HP}_I) = \partial_k(A) = \partial_k(K).$$

Insbesondere gilt $\dim(V) = \partial_k(A[V])$ für jede nicht-leere algebraische $V \subset k^n$.

Lemma

Sei $V \subseteq k^n$ irreduzible algebraischer Menge und $W \subseteq V$ abgeschlossenen Teilmenge. Dann gilt $\dim(W) < \dim(V)$, falls W echte Teilmenge von V ist.



COX, David; LITTLE, John; O'SHEA, Donal:

Ideals, Varieties, and Algorithms.

Third Edition

Springer-Verlag, 2007