

Dimension von Varietäten

Yvan Ngumeteh

Emma Ahrens

24. April 2018

Lemma 1. Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, das von einer Menge G von Monomen erzeugt wird. Dann liegt ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ in I genau dann, wenn für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f ein $g \in G$ existiert, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt.

Lemma 2. Sei $(g_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von Monomen in $k[X_1, \dots, X_n]$ mit $g_1 \succeq g_2 \succeq \dots$ für eine Monomialordnung \preceq . Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $g_n = g_r$ für alle $n \geq r$.

Proposition 3 (Divisionsalgorithmus). Sei \preceq eine Monomialordnung und $f, f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ nicht null. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^s h_i f_i + r,$$

mit $r, h_1, \dots, h_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ und $LT(h_i f_i) \preceq LT(f)$ für alle $h_i \neq 0$ und $r = 0$ oder kein Term von r wird durch ein $LT(f_i)$ geteilt für $i \in \underline{s}$.

Satz 4. Sei $\{0\} \neq I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und \preceq eine Monomialordnung auf \mathbb{N}_0^n . Sei G eine Gröbnerbasis von I mit $I = (G)$. Dann ist eine k -Basis von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ gegeben durch die Restklassen von X^α mit

$$\alpha \in C(I) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid LT(g) \nmid X^\alpha \forall g \in G\}.$$

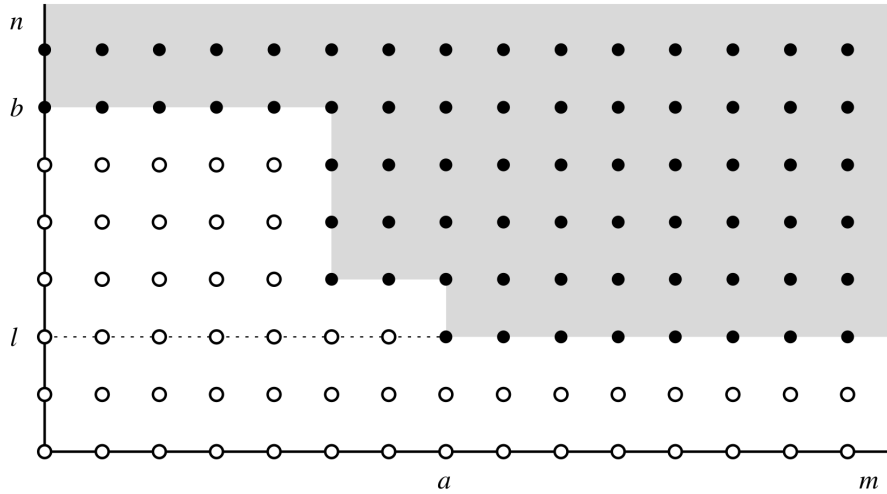


Abbildung 1: Anschauliche Darstellung von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ aus [1]

Definition 5. Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann definiere $I_{\leq s} := I \cap k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$. Nun gilt, dass $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über k mit $I_{\leq s}$ als Teilraum ist. Wir können die Funktion

$${}^a HF_I : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad s \mapsto \dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$$

definieren, die (affine) Hilbertfunktion von I genannt wird.

Lemma 6. Es gilt $|M_{n,s}| := |\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| \leq s\}| = \binom{s+n}{s}$.

Lemma 7 (Macaulay). Sei \preceq eine gradierte lexikographische Monomialordnung und $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist ${}^aHP_I(s) = {}^aHF_{LT(I)}(s)$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$.

Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

Satz 8. Sei $I \preceq k[X_1, \dots, X_n]$, dann existiert ein eindeutiges Polynom ${}^aHP_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ (t ist eine Variable) und $s_0 \geq 0$, sodass ${}^aHP_I(s) = {}^aHF_I(s) = \dim_k (k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s} / I_{\leq s})$, für alle $s \geq s_0$. Weiterhin besitzt ${}^aHP_I(t)$ folgende Eigenschaften:

- a) Der Grad von ${}^aHP_I(t)$ ist der größte $d \in \mathbb{N}$, sodass es $i_1, i_2, i_3, \dots, i_d \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_d \leq n$ existieren und $I \cap k[X_{i_1}, \dots, X_{i_d}] = \emptyset$.
- b) Sei $d = \text{grad}({}^aHP_I)$. Dann gilt ${}^aHP_I(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$ mit $a_k d! \in \mathbb{Z}, \forall k \in \underline{d_0}$ und $a_d d! > 0$

Sei $I \preceq k[X_1, \dots, X_n]$ nicht trivial. Sei G eine Gröbner-Basis von I (bzgl. eine gradierte lexikographische Ordnung) und $M = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \exists f \in G \text{ sodass } LM(f) = X^\alpha\}$

$$\{LM(g) : g \in G\} = \{X^\beta : \beta \in M\}$$

Die Mächtigkeit von M ist endlich, da nach dem Hilbert'sche Basissatz G eine endliche Menge von Polynomen ist. Wir setzen im Folgenden

$$C(I) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0 : X^\beta \nmid X^\alpha, \forall \beta \in M\} \text{ und } C(I)_{\leq s} := \{\alpha \in \mathbb{N}_0 : |\alpha| \leq s \text{ und } X^\beta \nmid X^\alpha, \forall \beta \in M\}$$

1. Behauptung: $\forall s \geq 0$ gilt ${}^aHF_I(s) = |C(I)_{\leq s}|$.
2. Seien $J \subseteq \underline{n}$ und eine Abbildung $\tau : J \rightarrow \mathbb{N}_0$ gegeben. Wir definieren

$$C(J, \tau) := \{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n : \alpha_j = \tau(j), \forall j \in J\}$$

Behauptung: Es existiert eine endliche Menge χ von Tupeln (J, τ) , sodass

$$(\star) \quad C(I) = \bigcup_{(J, \tau) \in \chi} C(J, \tau) = \bigcup_{i \in \underline{l}} C(J_i, \tau_i)$$

wobei $l = |\chi|$ ist.

3. Behauptung: Für alle (J, τ) im 2. Fall, existiert ein eindeutiges Polynom $F_{J, \tau}(s) \in \mathbb{Q}[t]$ mit $\text{grad}(F_{J, \tau}) = n - |J|$ und $F_{J, \tau}(s) = |C(J, \tau)_{\leq s}|$, für alle $s \geq |\tau| := \sum_{j \in J} \tau(j)$
4. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest vorgegeben. Falls A_1, \dots, A_m endliche Teilmengen von einer Menge T sind, dann lässt sich die Mächtigkeit deren Vereinigung mittels dem Inklusion-Exklusion-Prinzip durch

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} \sum_{J \subset \underline{m}, |J|=r} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

berechnen. Zusammen mit (\star) und 3) folgt für $s \geq s_0 := \max \left\{ \sum_{i \in J \subset \underline{l}} |\tau_i| : J \subset \underline{l} \right\} + 1$ sowohl die eindeutige Existenz von aHP_I als Polynom und die Aussage in b).

5. In diesem letzten Unterpunkt beweisen wir die Aussage in a). Aus dem 4. Fall gilt, dass $\text{grad}({}^aHP_I)$ die größte natürliche Zahl d ist, sodass es ein $J \subset \underline{n}$ von $|J| = n - d$ und $\tau : J \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $C(J, \tau) \subset C(I)$ existiert. Dies auch äquivalent mit der Aussage, dass $\text{grad}({}^aHP_I)$ gegeben ist, durch $n - m$, wobei $m \in \mathbb{N}$ die minimale Anzahl von Variablen X_{i_1}, \dots, X_{i_m} bezeichnet, sodass $\alpha = (0, \dots, \alpha_{i_1} = 1, 0, \dots, 0, \alpha_{i_m} = 1, 0, 0) \in C(I)$ gilt.

Behauptung: Es gilt: $I \cap k[X_j : j \notin J] = (0)$, für alle Tupel (J, τ) sodass $C(J, \tau) \subset C(I)$.

Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{grad}({}^a\text{HP}_I(t)) &\leq \max \{d \in \underline{n} : \exists J \subset \underline{n} \text{ mit } I \cap K[X_j : j \in J] = (0)\} \\ &= \max \{d \in \underline{n} : \exists i_1, \dots, i_n \text{ mit } 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n \text{ und } I \cap K[X_j : j \notin J] = (0)\}. \end{aligned}$$

Definition 9. Sei $V \subset k^n$ eine algebraische Menge und ${}^a\text{HP}_{I(V)}(t)$ ist das Hilbert-Polynom von $I(V) \leq k[X_1, \dots, X_n]$ (nach Satz 8 ist wohldefiniert und eindeutig). Für $V \neq \emptyset$ (d.h. $I(V) \neq k[X_1, \dots, X_n]$), wird die Dimension definiert als

$$\dim(V) = \text{grad}({}^a\text{HP}_{I(V)}).$$

Eine etwas handlichere Charakterisierung ist nach Satz 8 durch:

$$\dim(I(V)) = \max \{d \in \underline{n} : \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \text{ mit } I \cap K[X_{i_1}, \dots, X_{i_d}] = \{0\}\}$$

gegeben.

Beispiel:

1. Für $V = \{v\} \subset k^n$ gilt $\dim(V) = 0$
2. Für $V \subseteq k^n$ gilt $\dim(V) = n$ genau, dann wenn $V = k^n$.
3. Sei $V = H_f$ mit $f \neq \text{const.}$ eine Hyperfläche, dann gilt $\dim(V) = n - 1$.

Proposition 10. Sei $V \subseteq k^n$ algebraisch und $V = \bigcup_{i \in \underline{r}} V_i$ eine Zerlegung in irreduziblen Komponenten (vgl. Proposition 1.1.11). Dann gilt

$$\dim(V) = \max \{\dim(V_i) : i \in \underline{r}\}$$

Beispiel: Der Hilbert'sche Nullstellensatz für Hyperfläche besagt: Zu $\text{const.} \neq f \in k[X_1, \dots, X_n]$ und $H_f \in k^n$, sodass $f = \prod_{i=1}^r f_i$, wobei f_1, \dots, f_r irreduzibel und paarweise teilerfremd sind, gilt

$$H_f = \bigcup_{i=1}^r H_{f_i} \text{ und } I(H_f) = (f_1, \dots, f_r).$$

Die letzte Proposition liefert, dass es ein $i \in \underline{r}$ mit $\dim(V) = \dim(V_i)$ gibt.

Im Folgenden wollen wir eine andere Charakterisierung von $\dim(V)$ angeben.

Definition 11. Sei A eine k -Algebra (kommutativer, assoziativer k -Algebra mit 1). Man nennt $a_1, \dots, a_m \in A$ algebraisch unabhängig, falls

$$\forall F \in k[X_1, \dots, X_m] \setminus \{0\} \text{ gilt } F(a_1, \dots, a_m) \neq 0.$$

Man definiert

$$\partial_k(A) := \sup \{m \geq 0 : \exists m \text{ algebraisch unabhängige Elemente in } A\}$$

Bemerkung: Falls A ein Körper ist, dann nennt man $\partial_k(A)$ der Transzendenz Grad von A über k .

Proposition 12. Sei $A := k[X_1, \dots, X_n]/I$ mit $I \leq k[X_1, \dots, X_n]$ ein echtes Ideal. Dann gilt $\text{grad}({}^a\text{HP}_I) = \partial_k(A)$. Ist A weiterhin ein Integritätsbereich (IB) und K ist der Quotienten-Körper von A , dann gilt

$$\text{grad}({}^a\text{HP}_I) = \partial_k(A) = \partial_k(K).$$

Insbesondere gilt $\dim(V) = \partial_k(A[V])$ für jede nicht-leere algebraische $V \subset k^n$.

Beispiel: Aus dem 1. Vortrag gilt für den sog. Twisted Cubic $C = V((X_2 - X_1^2, X_3 - X_1^3)) \subset k^n$, dass $I(C) = (X_2 - X_1^2, X_3 - X_1^3)$ und $k[X_1, \dots, X_n]/I(C) \cong k[Y]$. Wir zeigen

$$\dim(C) = \partial_k(k[X_1, \dots, X_n]/I(C)) = \partial_k(k[Y]) = 1.$$

Lemma 13. *Sei $V \subseteq k^n$ irreduzible algebraischer Menge und $W \subseteq V$ abgeschlossenen Teilmenge. Dann gilt $\dim(W) < \dim(V)$, falls W echte Teilmenge von V ist.*

Literatur

- [1] COX, David; LITTLE, John; O'SHEA, Donal: *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Third Edition Springer-Verlag, 2007