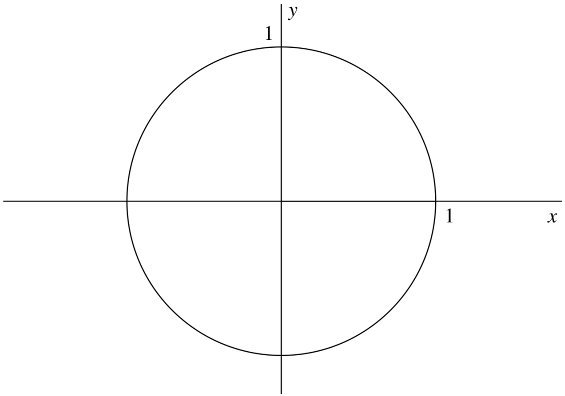

Abbildung 1: Die Varietät $V(X^2 + Y^2 - 1)$ aus [1]

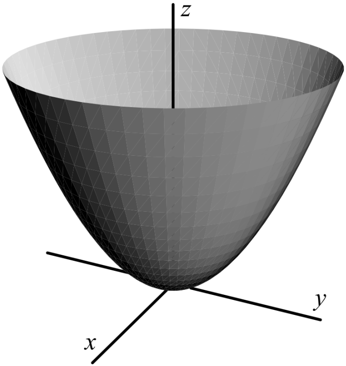

Abbildung 2: Das elliptische Paraboloid $V(Z - X^2 - Y)$ aus [1]

Lemma

Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, das von einer Menge G von Monomen erzeugt wird. Dann liegt ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ in I genau dann, wenn für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f ein $g \in G$ existiert, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt.

Lemma

Sei $(g_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von Monomen in $k[X_1,\ldots,X_n]$ mit $g_1 \succeq g_2 \succeq \ldots$ für eine Monomialordnung $\preceq$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $g_n = g_r$ für alle $n \geq r$.

Proposition (Divisionsalgorithmus)

Sei $\preceq$ eine Monomialordnung und $f, f_1, \ldots, f_s \in k[X_1, \ldots, X_n]$ nicht null. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \; + r,$$

mit $r, h_1, \ldots, h_s \in k[X_1, \ldots, X_n]$ und $LT(h_i f_i \preceq LT(f)$ für alle $h_i \neq 0$ und $r = 0$ oder kein Term von r wird durch ein $LT(f_i)$ geteilt für $i \in \underline{s}$.

Satz

Sei $\{0\} \neq I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ *ein Ideal und* $\preceq$ *eine Monomialordnung auf* $\mathbb{N}_0^n$*. Sei* G *eine Gröbnerbasis von* I *mit* $I = (G)$*. Dann ist eine* k*-Basis von* $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ *gegeben durch die Restklassen von* X^α *mit*

$$\alpha \in C(I) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid \ LT(g) \nmid X^\alpha \ \forall g \in G\}.$$

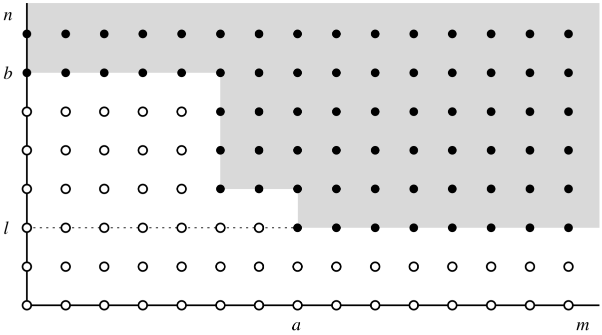

Abbildung 3: Anschauliche Darstellung von $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ aus [1]

Definition

Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann definiere $I_{\leq s} := I \cap k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$. Nun gilt, dass $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über k mit $I_{\leq s}$ als Teilraum ist. Wir können die Funktion

$$^{a}HF_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad s \mapsto dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$$

definieren, die (affine) Hilbertfunktion von I genannt wird.

Lemma (Macaulay)

Sei $\preceq$ eine gradierte lexikographische Monomialordnung und $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist ${}^aHF_I(s) = {}^aHF_{LT(I)}(s)$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$.

Definition (Buchberger)

Sei $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein nicht triviales Ideal und $\preceq$ eine Monomiale Ordnung auf ${\mathbb{N}_0}^n$. Man nennt eine endliche Menge $G \subseteq I - \{0\}$ eine Gröbner-Basis von I, falls die Monome $LT(g)$ $(g \in G)$ das Ideal

$$(LT(I)) := (LT(f) : 0 \neq f \in I) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$$

erzeugen.

Satz

Sei $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$, dann existiert ein eindeutiges Polynom ${}^aHP_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ (t ist eine Variable) und $s_0 \geq 0$, sodass ${}^aHP_I(s) = {}^aHF_I(s) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$, für alle $s \geq s_0$. Weiterhin besitzt ${}^aHP_I(t)$ folgende Eigenschaften:

a) Der Grad von ${}^aHP_I$(t) ist der größte $d \in \mathbb{N}$, sodass es $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_d \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_d \leq n$ existieren und $I \cap k[X_{i_1}, \ldots, X_{i_d}] = \emptyset$.

b) Sei $d = grad({}^aHP_I)$. Dann gilt ${}^aHP_I(\mathrm{t}) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ mit $a_k d! \in \mathbb{Z}, \forall k \in \underline{d_0}$ und $a_d d! > 0$

Definition

Sei $V \subset k^n$ eine algebraische Menge und ${}^{a}HP_{I(V)}(\text{t})$ ist das Hilbert-Polynom von $I(V) \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ (nach Satz 2 ist wohldefiniert und eindeutig). Für $V \neq \emptyset$ (d.h. $I(V) \neq k[X_1, \ldots, X_n]$), wird die Dimension definiert als

$$dim(V) = grad({}^{a}HP_{I(V)}).$$

Eine etwas handlichere Charakterisierung ist nach Satz 2 durch:

$$dim(I(V)) = \max\{d \in \underline{n} : \exists 1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n \text{ mit } I \cap K[X_{i_1}, \ldots, X_{i_d}]$$

gegeben.

Proposition

Sei $V \subseteq k^n$ algebraisch und $V = \bigcup_{i \in \underline{r}} V_i$ eine Zerlegung in irreduziblen Komponenten (vgl. Proposition 1.1.11). Dann gilt

$$dim(V) = \max\{dim(V_i) : i \in \underline{r}\}$$

Definition

Sei A eine $k-$Algebra (kommutativer, assoziativer $k-$Algebra mit 1). Man nennt $a_1, \ldots, a_m \in A$ algebraisch unabhängig, falls

$$\forall\ F \in k[X_1, \ldots, X_m] \setminus \{0\} \text{ gilt } F(a_1, \ldots, a_m) \neq 0.$$

Man definiert

$$\partial_k(A) := \sup\{m \geq 0 :\ \exists\ m \text{ algebraisch unabhängige Elemente in } A\}$$

Bemerkung: Falls A ein Körper ist, dann nennt man $\partial_k(A)$ der transcendenz Grad von A über k.

Proposition

Sei $A := k[X_1, \ldots, X_n]/I$ *mit* $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ *ein echtes Ideal. Dann gilt* $grad(^a HP_I) = \partial_k(A)$*. Ist* A *weiterhin einen Integrietätsbereich (IB) und* K *ist der Quotienten-Körper von* A*, dann gilt*

$$grad(^a HP_I) = \partial_k(A) = \partial_k(K).$$

Insbesondere gilt $dim(V) = \partial_k(A[V])$ *für jede nicht-leere algebraische* $V \subset k^n$*.*

Lemma

Sei $V \subseteq k^n$ irreduzible algebraischer Menge und $W \subseteq V$ abgeschlossenen Teilmenge. Dann gilt $dim(W) < dim(V)$, falls W echte Teilmenge von V ist.

COX, David; LITTLE, John; O'SHEA, Donal:
Ideals, Varieties, and Algorithms.
Third Edition
Springer-Verlag, 2007