Dimension von Varietäten

Yvan Ngumeteh Emma Ahrens

24. April 2018

Lemma 1. *Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, das von einer Menge G von Monomen erzeugt wird. Dann liegt ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ in I genau dann, wenn für jeden Term $a_j X^{\alpha_j}$ von f ein $g \in G$ existiert, welches $a_j X^{\alpha_j}$ teilt.*

Lemma 2. *Sei $(g_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von Monomen in $k[X_1, \dots, X_n]$ mit $g_1 \succeq g_2 \succeq \dots$ für eine Monomialordnung $\preceq$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $g_n = g_r$ für alle $n \geq r$.*

Proposition 3 (Divisionsalgorithmus)**.** *Sei $\preceq$ eine Monomialordnung und $f, f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ nicht null. Dann gilt*

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \ + r,$$

mit $r, h_1, \dots, h_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ und $LT(h_i f_i \preceq LT(f)$ für alle $h_i \neq 0$ und $r = 0$ oder kein Term von r wird durch ein $LT(f_i)$ geteilt für $i \in \underline{s}$.

Satz 4. *Sei $\{0\} \neq I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $\preceq$ eine Monomialordnung auf $\mathbb{N}_0^n$. Sei G eine Gröbnerbasis von I mit $I = (G)$. Dann ist eine k-Basis von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ gegeben durch die Restklassen von X^α mit*

$$\alpha \in C(I) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid \ LT(g) \nmid X^\alpha \ \forall g \in G\}.$$

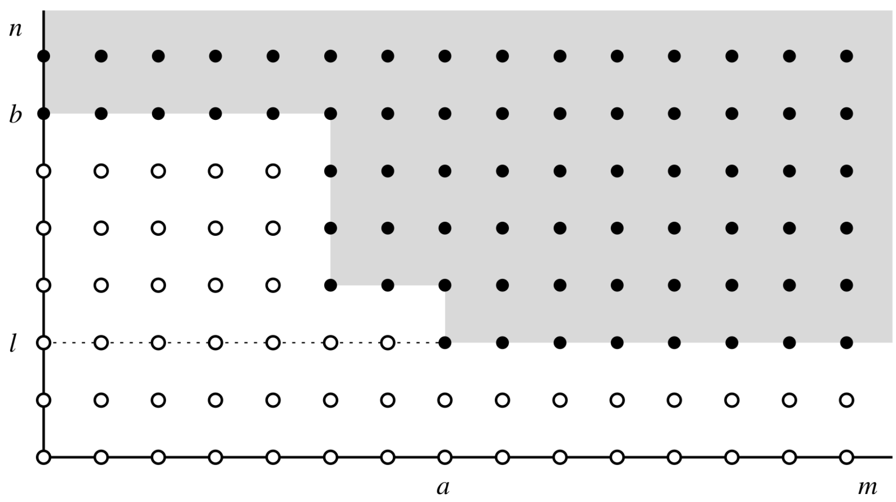

Abbildung 1: Anschauliche Darstellung von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ aus [1]

Definition 5. *Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann definiere $I_{\leq s} := I \cap k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$. Nun gilt, dass $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über k mit $I_{\leq s}$ als Teilraum ist. Wir können die Funktion*

$${}^{a}HF_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad s \mapsto dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$$

definieren, die (affine) Hilbertfunktion von I genannt wird.

Lemma 6. *Es gilt* $|M_{n,s}| := |\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| \leq s\}| = \binom{s+n}{s}$.

Lemma 7 (Macaulay). *Sei* $\preceq$ *eine gradierte lexikographische Monomialordnung und* $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ *ein Ideal. Dann ist* ${}^aHF_I(s) = {}^aHF_{LT(I)}(s)$ *für alle* $s \in \mathbb{N}_0$.

Im folgenden sei $n \in \mathrm{N}$ beliebig aber fest.

Definition 8 (Buchberger). *Sei* $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ *ein nicht triviales Ideal und* $\preceq$ *eine Monomiale Ordnung auf* ${\mathbb{N}_0}^n$. *Man nennt eine endliche Menge* $G \subseteq I - \{0\}$ *eine Gröbner-Basis von* I, *falls die Monome* $LT(g)$ $(g \in G)$ *das Ideal*

$$(LT(I)) := (LT(f) : 0 \neq f \in I) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$$

erzeugen.

Nach dem Hilbert'sche Basissatz besitzt jedes nicht triviales Ideal eine Gröbner-Basis.

Satz 9. *Sei* $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$, *dann existiert ein eindeutiges Polynom* ${}^aHP_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ *(t ist eine Variable) und* $s_0 \geq 0$, *sodass* ${}^aHP_I(s) = {}^aHF_I(s) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$, *für alle* $s \geq s_0$. *Weiterhin besitzt* ${}^aHP_I(t)$ *folgende Eigenschaften:*

a) Der Grad von ${}^aHP_I(\mathrm{t})$ ist der größte $d \in \mathbb{N}$, sodass es $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_d \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_d \leq n$ existieren und $I \cap k[X_{i_1}, \ldots, X_{i_d}] = (0)$.
b) Sei $d = grad({}^aHP_I)$. Dann gilt ${}^aHP_I(\mathrm{t}) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ mit $a_k d! \in \mathbb{Z}, \forall k \in \underline{d_0}$ und $a_d d! > 0$

Sei $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ nicht trivial. Sei G eine Gröbner-Basis von I (bzgl. eine graduierte lexikographische Ordnung) und $M = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \exists\ f \in G \text{ sodass } LM(f) = X^\alpha\}$

$$\{LM(g) : g \in G\} = \{X^\beta : \beta \in M\}$$

Die Mächtigkeit von M ist endlich , da nach dem Hilbert'sche Basissatz G eine endliche Menge von Polynomen ist. Wir setzen im Folgenden

$$C(I) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0 : X^\beta \nmid X^\alpha,\ \forall \beta \in M\} \text{ und } C(I)_{\leq s} := \{\alpha \in \mathbb{N}_0 : |\alpha| \leq s \text{ und } X^\beta \nmid X^\alpha,\ \forall \beta \in M\}$$

1. Behauptung: $\forall s \geq 0$ gilt ${}^aHF_I(\mathrm{s}) = |C(I)_{\leq s}|$.

2. Seien $J \subseteq \underline{n}$ und eine Abbildung $\tau : J \longrightarrow \mathbb{N}_0$ gegeben. Wir definieren

   $$C(J, \tau) := \{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n : \alpha_j = \tau(j), \forall \in J\}$$

   Behauptung: Es existiert eine endliche Menge χ von Tupeln (J,τ), sodass

   $$(\star) \quad C(I) = \bigcup_{(J,\tau) \in \chi} C(J, \tau) = \bigcup_{i \in \underline{l}} C(J_i, \tau_i)$$

   wobei $l = |\chi|$ ist.

3. Behauptung: Für alle (J, τ) im 2.Fall, existiert ein eindeutiges Polynom $F_{J,\tau}(s) \in \mathbb{Q}[t]$ mit $grad(F_{J,\tau}) = n - |J|$ und $F_{J,\tau}(s) = \left|C(J, \tau)_{\leq s}\right|$, für alle $s \geq |\tau| := \sum_{j \in J} \tau(j)$

4. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Falls $A_1, \ldots, A_m$ endliche Teilmengen von einer Menge T sind, dann lässt sich die Mächtigkeit deren Vereinigung mittels dem Inklusion-Exklusion-Prinzip durch

   $$|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \sum_{J \subset \underline{n}, |J| = r} |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

   berechnen. Zusammen mit $(\star)$ und 3.Fall folgt für $s \geq s_0 := \max\{\sum_{i \in J \subset \underline{l}} |\tau_i| : J \subset \underline{l}\} + 1$ sowohl die eindeutige Existenz von ${}^aHP_I$ als Polynom als auch die Aussage in b).

5. In diesem letzten Unterpunkt beweisen wir die Aussage in a). Aus dem 4.Fall gilt, dass $grad({}^a HP_I)$ die größte natürliche Zahl d ist, sodass es ein $J \subset \underline{n}$ von $|J| = n - d$ und $\tau : J \to \mathbb{N}_0$ mit $C(J,\tau) \subset C(I)$ existiert.
   Dies auch äquivalent mit der Aussage, dass $grad({}^a HP_I)$ gegeben ist, durch $n-m$, wobei $m \in \mathbb{N}$ die minimale Anzahl von Variablen $X_{i_1}, \dots, X_{i_m}$ bezeichnet, sodass $\alpha = (0, \dots, \alpha_{i_1} = 1, 0, \dots, 0, \alpha_{i_m} = 1, 0, 0) \in C(I)$ gilt.

   Behauptung: Es gilt: $I \cap k\,[X_j : j \notin J] = (0)$, für alle Tupel (J, τ) sodass $C(J,\tau) \subset C(I)$.

   Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} grad({}^a HP_I(t)) &\leq \max\{d \in \underline{n} : \exists J \subset \underline{n}\, mit\, I \cap K[X_j : j \in J] = (0)\} \\ &= \max\{d \in \underline{n} : \exists i_1, \dots, i_n \underline{n} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n \text{ und } I \cap K[X_j : j \notin J] = (0)\}. \end{aligned}$$

Definition 10. *Sei $V \subset k^n$ eine algebraische Menge und ${}^a HP_{I(V)}(t)$ ist das Hilbert-Polynom von $I(V) \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n]$ (nach Satz 9 ist wohldefiniert und eindeutig). Für $V \neq \emptyset$ (d.h. $I(V) \neq k[X_1, \dots, X_n]$), wird die Dimension definiert als*

$$dim(V) = grad({}^a HP_{I(V)}).$$

Eine etwas handlichere Charakterisierung ist nach Satz 9 durch:

$$dim(I(V)) = \max\{d \in \underline{n} : \exists\, 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \text{ mit } I \cap K[X_{i_1}, \dots, X_{i_d}] = \{0\}\}$$

gegeben.

Beispiel:
1. Für $V = \{v\} \subset k^n$ gilt $dim(V) = 0$.
2. Für $V \subseteq k^n$ gilt $dim(V) = n$ genau, dann wenn $V = k^n$.
3. Sei $V = H_f$ mit $f \neq$ *const.* eine Hyperfläche, dann gilt $dim(V) = n - 1$.

Proposition 11. *Sei $V \subseteq k^n$ algebraisch und $V = \bigcup_{i \in \underline{r}} V_i$ eine Zerlegung in irreduziblen Komponenten (vgl. Proposition 1.1.11). Dann gilt*

$$dim(V) = \max\{dim(V_i) : i \in \underline{r}\}$$

Beispiel: Der Hilbert'sche Nullstellensatz für Hyperfläche besagt: Zu *const.* $\neq f \in k[X_1, \dots, X_n]$ und $H_f \in k^n$, sodass $f = \prod_{i=1}^{r} f_i$, wobei $f_1, \dots, f_r$ irreduzibel und paarweise teilerfremd sind, gilt

$$H_f = \bigcup_{i=1}^{r} H_f \quad \text{und} \quad I(H_f) = (f_1, \dots, f_r).$$

Die letzte Proposition liefert, dass es ein $i \in \underline{r}$ mit $dim(V) = dim(V_i)$ gibt.

Im Folgenden wollen wir eine andere Charakterisierung von $dim(V)$ angeben.

Definition 12. *Sei A eine $k-$Algebra (kommutativer, assoziativer $k-$Algebra mit 1). Man nennt $a_1, \dots, a_m \in A$ algebraisch unabhängig, falls*

$$\forall\, F \in k[X_1, \dots, X_m] \setminus \{0\} \text{ gilt } F(a_1, \dots, a_m) \neq 0.$$

Man definiert

$$\partial_k(A) := \sup\{m \geq 0 : \ \exists\, m \text{ algebraisch unabhängige Elemente in } A\}$$

Bemerkung: Falls A ein Körper ist, dann nennt man $\partial_k(A)$ der transcendenz Grad von A über k.

Proposition 13. *Sei* $A := k[X_1, \ldots, X_n]/I$ *mit* $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ *ein echtes Ideal. Dann gilt* $grad({}^a HP_I) = \partial_k(A)$. *Ist* A *weiterhin einen Integrietätsbereich* (IB) *und* K *ist der Quotienten-Körper von* A, *dann gilt*

$$grad({}^a HP_I) = \partial_k(A) = \partial_k(K).$$

Insbesondere gilt $dim(V) = \partial_k(A[V])$ *für jede nicht-leere algebraische* $V \subset k^n$.

Beispiel: Aus dem 1.Vortrag gilt für den sog. "Twisted Cubic" $C = V((X_2 - X_1^2, X_3 - X_1^3)) \subset k^n$, dass $I(C) = (X_2 - X_1^2, X_3 - X_1^3)$ und $k[X_1, \ldots, X_n]/I(C) \cong k[Y]$. Wir zeigen

$$dim(C) = \partial_k(k[X_1, \ldots, X_n]/I(C)) = \partial_k(k[Y]) = 1.$$

Lemma 14. *Sei* $V \subseteq k^n$ *irreduzible algebraischer Menge und* $W \subseteq V$ *abgeschlossenen Teilmenge. Dann gilt* $dim(W) < dim(V)$, *falls* W *echte Teilmenge von* V *ist.*

Literatur

[1] Cox, David; Little, John; O'Shea, Donal: *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Third Edition Springer-Verlag, 2007