Dimension von Varietäten

Yvan Ngumeteh Emma Ahrens

2. Mai 2018

1 Abstract

2 Einleitung

3 Hyperebenen

4 Schwache Form

Im Folgenden sind A und B kommmutative Ringe mit Eins und $A \subseteq B$.

Definition 1 (Ganze Elemente)**.** *Wir nennen $b \in B$ ganz über A, wenn es Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$ gibt mit*

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 = 0$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Außerdem heißt B ganz über A, wenn jedes Element aus B ganz über A ist.

Lemma 2. *Sei $b \in B$. Dann ist äquivalent:*

1. *b ist ganz über A*
2. *Der von b generierte Teilring $A[b] \subseteq B$ ist ein endlich erzeugter A-Modul.*
3. *Es existiert ein Teilring $C \subseteq B$ mit $A[b] \subseteq C$ und C ist ein endlich erzeugter A-Modul.*

Beweis. ($1 \Rightarrow 2$): Es ist $A[b] = \{f(b) \mid f \in A[X]\}$ und da b ganz ist, existiert ein Polynom $0 \neq g \in A[X]$ mit $g(b) = 0$ und $Grad(g) = n \geq 1$. Da $A[X]$ ein euklidischer Ring ist, können wir jedes $f \in A[X]$ schreiben als $f = qg + r$ mit $q, r \in A[X]$ und $Grad(r) < n$. Also $f(b) = q(b) * g(b) + r(b) = r(b)$ und f ist eine A-Linearkombination von $1, b, b^2, \dots, b^{n-1}$, also ist $A[b]$ endlich generiert.

□

5 Normale Form

6 Starke Form

7 Anwendung