# Dimension von Varietäten

Yvan Ngumeteh Emma Ahrens

17. April 2018

## 1 Abstract

## 2 Einleitung

Sei $S \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge eines Polynomrings über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Dann ist $V(S) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \; \forall f \in S\}$ eine Varietät bzw. algebraische Menge. Andersherum nennt man für eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ das Ideal $I(V) := \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(x) = 0 \; \forall x \in V\}$ das Verschwindungsideal von V. Mit Hilfe von Hilbert's Nullstellensatz können wir eine Bijektion von der Menge der Wurzelideale[1] aus $k[X_1, \ldots, X_n]$ auf die Menge der Varietäten definieren. Dies gibt uns die Möglichkeit, unser Wissen über Ideale auf Varietäten zu übertragen. Wir haben schon gesehen, dass z.B. das Verschwindungsideal von Vereinigungen von Varietäten dem Schnitt der Verschwindungsideale der einzelnen Varietäten entspricht. In Abbildung 1 und 2 sind beispielhaft zwei Varietäten dargestellt.

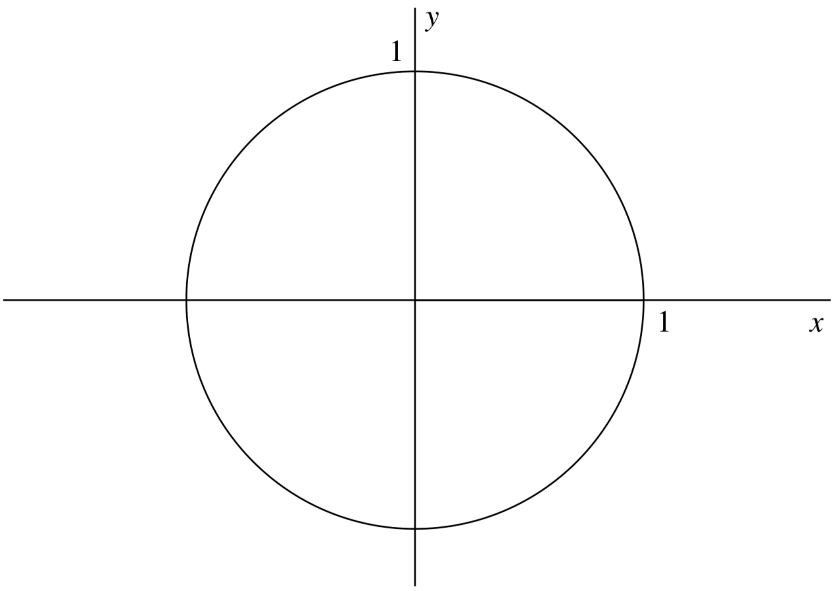


Abbildung 1: Die Varietät $V(X^2 + Y^2 - 1)$ aus [3]

Im Folgenden interessieren wir uns für die Dimension einer Varietät. Intuitiv würde man die Varietät aus Abb. 1 eindimensional und die aus Abb. 2 zweidimensional nennen. Bevor wir mit der - etwas längeren - mathematischen Definition einer der Dimension einer Varietät beginnen, betrachten wir zunächst einen etwas leichteren Fall aus [3]. Für das Beispiel brauchen wir die Ebene $H_x := \{(x, y, z) \in k^3 \mid x = 0\}$ und die Gerade $H_{xy} := \{(x, y, z) \in k^3 \mid x = 0 \wedge y = 0\}$.

[1]Ein Wurzelideal $\sqrt{I}$ ist ein Ideal für welches gilt: Sei $f^m \in \sqrt{I}$, dann ist auch $f \in \sqrt{I}$.

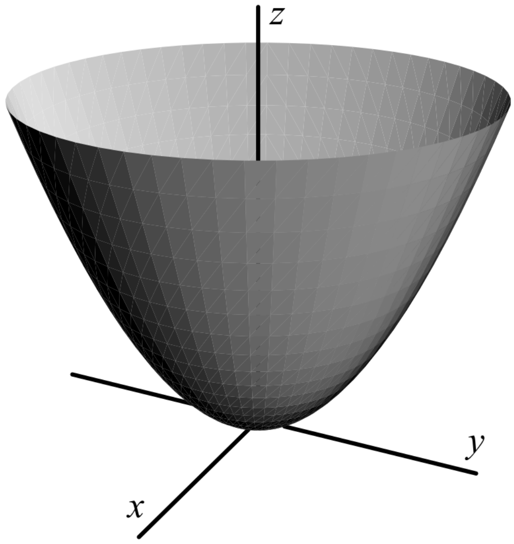


Abbildung 2: Das elliptische Paraboloid $V(Z - X^2 - Y)$ aus [3]

Überlegen wir uns nun die Dimension von der Varietät des Monomialideals $I := (Y^2Z^3, X^5Z^4, X^2YZ^2)$ in $k[X, Y, Z]$. Dann wissen wir

$$\begin{aligned} V(I) &= V(Y^2Z^3, X^5Z^4, X^2YZ^2) \\ &= V(Y^2Z^3) \cap V(X^5Z^4) \cap V(X^2YZ^2) \\ &= (H_y \cup H_z) \cap (H_x \cup H_z) \cap (H_x \cup H_y \cup H_z) \\ &= H_z \cup (H_y \cap H_x \cap (H_x \cup H_y)) \end{aligned}$$

Der Schnitt der zwei Ebenen $H_x$ und $H_y$ ist die Gerade $H_{xy}$ und $H_{xy} \cap (H_x \cup H_y) = H_{xy}$, also folgt

$$V(I) = H_z \cup H_{xy}.$$

Die Varietät besteht also aus der xy-Ebene und einer Geraden, die darauf senkrecht steht. Es gibt also einen Teil, der intuitiv eindimensional erscheint und einen zweidimensionalen. Später werden wir sehen, dass die Dimension einer Varietät die maximale Dimension der einzelnen Teile der Varietät ist - für das Beispiel ist sie also 2.

Ganz am Ende nochmal auf Kreis und Paraboloid eingehen! Geschichtliches. Warum will man überhaupt etwas übe

## 3 Dimension von Monomidealen

Wir beginnen damit, für ein Ideal $I$ eine möglichst einfache k-Basis von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ zu finden. Damit der Beweis unseres ersten Satzes nicht zu lang wird, müssen wir allerdings noch ein bisschen Vorarbeit leisten.

**Lemma 1.** *Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, das von einer Menge $G$ von Monomen erzeugt wird. Dann liegt ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ in $I$ genau dann, wenn für jeden Term $a_jX^{\alpha_j}$ von $f$ ein $g \in G$ existiert, welches $a_jX^{\alpha_j}$ teilt.*

*Beweis.* Sei $f \in I$. Dann gilt $f = \sum_{i=1}^{s} h_ig_i$ mit $h_i \in R$ und $g_i \in G$. Damit hat jeder Term die Form $h_ig_i$ und ist somit durch ein Element aus G teilbar. Sei nun andersherum $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ und für jeden Term $a_jX^{\alpha_j}$ von f existiert ein $g \in G$, welches $a_jX^{\alpha_j}$ teilt. Dann kann man f als Linearkombination von Elementen aus G schreiben und damit liegt f nach der Definition eines Ideals in I. $\square$

**Lemma 2.** *Sei $(g_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von Monomen in $k[X_1, \dots, X_n]$ mit $g_1 \succeq g_2 \succeq \dots$ für eine Monomialordnung $\preceq$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $g_n = g_r$ für alle $n \geq r$.*

*Beweis.* Sei $I = ((g_i)_{i\geq 1})$, dann ist I ein Ideal. Nach dem Hilbert'schen Basissatz wissen wir, dass I endlich erzeugt ist. Also existiert ein r, so dass die Menge $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ I erzeugt. Für ein $i \geq r$ und $g_i \in I$ existiert ein $j \in \underline{r}$, so dass $g_j \mid (g_i$ nach Lemma 1. Also $g_i \succeq g_j \succeq g_r$. Andererseits gilt nach Voraussetzung, dass $g_i \preceq g_r$, also folgt $g_i = g_r$. □

Lemma 2 sagt uns insbesondere, dass in jeder abzählbaren Menge von Mnomen ein kleinstes Element existiert.

**Proposition 3** (Divisionsalgorithmus)**.** *Sei $\preceq$ eine Monomialordnung und $f, f_1, \ldots, f_s \in k[X_1, \ldots, X_n]$ nicht null. Dann gilt*

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \ + r,$$

*mit $r, h_1, \ldots, h_s \in k[X_1, \ldots, X_n]$ und $LT(h_i f_i \preceq LT(f)$ für alle $h_i \neq 0$ und $r = 0$ oder kein Term von $r$ wird durch ein $LT(f_i)$ geteilt für $i \in \underline{s}$.*

*Beweis.* Wir beweisen diese Proposition per Rückwärtsinduktion über LT(f) beginnend mit dem größten Term.
Beim Induktionsschritt unterscheiden wir drei Fälle:
Sei f konstant, dann gilt $f = \sum_{i=1}^{s} 0 f_i \ + r$ mit $r := f$ und $h_i := 0$.
Falls ein $i \in \underline{s}$ existiert, so dass $LT(f_i) \mid LT(f)$, setzen wir

$$f^{(1)} := f - \frac{LT(f)}{LT(f_i)} f_i.$$

Dann gilt $f = f^{(1)} + \frac{LT(f)}{LT(f_i)} f_i$ mit $h_i = \frac{LT(f)}{LT(f_i)}$ und $LT(h_i f_i) = LT(f) \preceq LT(f)$.
Falls kein solches $f_i$ existiert, schreiben wir

$$f^{(1)} := f - LT(f).$$

Und $f = f^{(1)} + LT(f)$ mit $r = LT(f)$ erfüllt die Bedingungen (insbesondere, dass kein Term von r durch ein $LT(f_i)$ geteilt wird).
Führe den Schritt nun induktiv auf $f^{(1)}$ durch bis $f^{(j)} = 0$ und bestimme $h_1, \ldots, h_s, r$ durch Rückwärtseinsetzen. □

Jetzt kommen wir zu dem ersten Satz, der direkt für die Dimension von Varietäten wichtig ist.

**Satz 4.** *Sei $\{0\} \neq I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal und $\preceq$ eine Monomialordnung auf $\mathbb{N}_0^n$. Sei $G$ eine Gröbnerbasis von I mit I = (G). Dann ist eine k-Basis von $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ gegeben durch die Restklassen von $X^\alpha$ mit*

$$\alpha \in C(I) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid \ LT(g) \nmid X^\alpha \ \forall g \in G\}.$$

*Beweis.* Wir zeigen erst, dass die Monome mit Exponent aus C(I) ganz $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ aufspannen und anschließend, dass kein Element aus I durch echte Linearkombination solcher Monome dargestellt werden kann.
Sei $G = \{f_1, \ldots, f_s\}$ und $0 \neq f \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \ + r = f' + r$ nach Proposition 3 mit $r = 0$ oder $r = a_l X^{\alpha_l} + \ldots + a_0$ mit $LT(f_i) \nmid X^{\alpha_j}$ für jedes $i \in \underline{s}$ und $j \in \underline{l}$. Also ist $r$ eine Linearkombination von Monomen $X^{\alpha_j}$ mit $\alpha_j \in C(I)$. Es gilt außerdem $[f] = [r]$ in $k[X_1, \ldots, X_n]/(G)$ und damit erzeugen die Monome mit $\alpha \in C(I)$ den ganzen Restklassenring.
Angenommen es existiert $f = f' + r \in I$ mit $r \neq 0$ und f' und r wie oben. Dann gilt $0 \neq r = f - f'$. Da $f \in I$ und $f' \in I$ folgt $r \in I$, womit folgt, dass $(LT(r) \in (LT(f_1), \ldots, LT(f_s))$. Nach Lemma 1 existiert dann ein $f_i$ mit $LT(f_i) \mid LT(r)$. Dies ist ein Widerspruch, also folgt $r = 0$ und die Restklassen von $X^\alpha$ mit $\alpha \in C(I)$ sind linear unabhängig in $k[X_1, \ldots, X_n]/I$. □

In Abb. 3 sieht man ein Koordinatensystem von $\mathbb{N}_0^2$. Jeder Punkt $\alpha$ repräsentiert dabei ein Monom $X^\alpha$ für welches gilt $X^\alpha = LM(f)$ für ein $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Die Punkte in dem grau hinterlegten Teil stehen nun für die Monome, die Elemente aus $LM(I)$ sind. Die unausgefüllten Punkte stehen für Monome aus C(I).

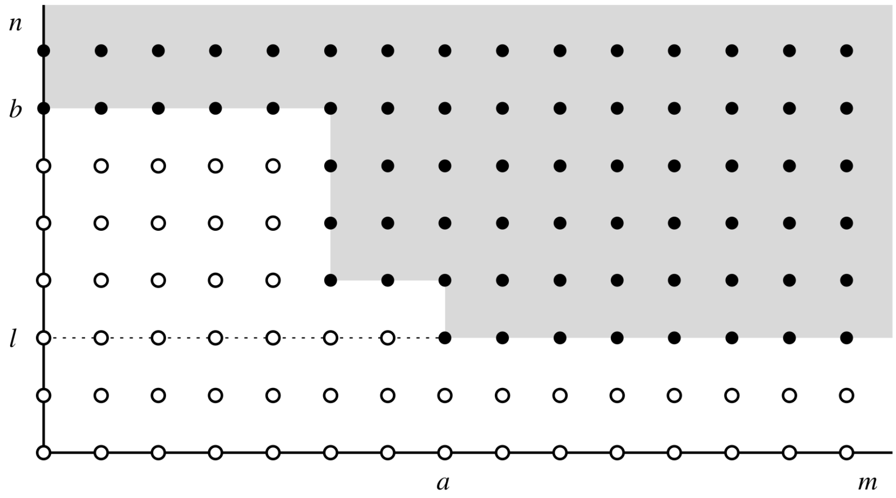


Abbildung 3: Anschauliche Darstellung von $k[X_1, \dots, X_n]/I$ aus [3]

**Definition 5.** *Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann definiere $I_{\leq s} := I \cap k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$. Nun gilt, dass $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über $k$ mit $I_{\leq s}$ als Teilraum ist. Wir können die Funktion*

$$^aHF_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad s \mapsto dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$$

*definieren, die (affine) Hilbertfunktion von $I$ genannt wird.*

**Ein paar Beispiele**

- Sei $I = k[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist

$$\begin{aligned} ^aHF_I(s) &= dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) \\ &= dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}) \\ &= dim_k(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  für alle $s \in \mathbb{N}_0$.

- Bevor wir uns das nächste Beispiel anschauen, brauchen wir noch ein bisschen Vorwissen aus der Kombinatorik. Und zwar zeigen wir per Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, dass

$$|M_{n,s}| := |\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| \leq s\}| = \binom{s+n}{s}.$$

  *Beweis.* Induktionsanfang: Sei $n = 2$, $s \in \mathbb{N}$ fest und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2$. Wähle $\alpha_1 \in \{0, \dots, s\}$. Dann muss $\alpha_2 \in \{0, \dots, s - \alpha_1\}$ gelten, damit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq s$. Nun wissen wir, dass

$$\begin{aligned} |M_{2,s}| &= \sum_{i=0}^{s} s - i + 1 = s(s+1) - \frac{s(s+1)}{2} + (s+1) \\ &= (s+1)(s - \frac{s}{2} + 1) = (s+1)(2s - s + 2)\frac{1}{2} \\ &= (s+1)(s+2)\frac{1}{2} = \frac{(s+1)!}{2!\,s!} = \binom{s+2}{s} \end{aligned}$$

  Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit $|M_{n,s}| = \binom{s+n}{s}$. Wir betrachten $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ und können $\alpha$ auch schreiben als $\alpha = (\beta, \alpha_{n+1})$ mit $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Sei $\alpha_{n+1} \in \{0, \ldots, s\}$, dann muss $\beta \in M_{n,s-\alpha_{n+1}}$ sein, damit $|\alpha| \leq s$. Also folgt mit der Induktionsvoraussetzung und einer Indexverschiebung

$$\begin{aligned} |M_{n+1,s}| &= \sum_{i=0}^{s} |M_{n,s-i}| = \sum_{i=0}^{s} \binom{s-i+n}{s-i} \\ &= \sum_{i=0}^{s} \binom{i+n}{i} = \binom{s+(n+1)}{s} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung nach dem Induktionsprinzip. $\square$

Sei nun $I = \{0\}$. Dann ist mit Satz 4 und dem Theorem aus der Kombinatorik

$$\begin{aligned} {}^aHF_I(s) &= dim_k(k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) \\ &= dim_k(k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}) \\ &= |\{X^\alpha \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid deg(X^\alpha) \leq s\}| \\ &= |\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| \leq s\}| = |M_{n,s}| \\ &= \binom{s+n}{s} = \binom{s+n}{n} \\ &= \frac{1}{n!}(s+n)(s+n-1)\cdots(s+1) \\ &= \frac{1}{n!}s^n + \frac{1}{n!}\binom{n+1}{2}s^{n-1} + \cdots + 1. \end{aligned}$$

Zu beachten ist hier, dass der Grad der Hilbertfunktion n ist, also der Dimension von $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ entspricht.

- E Text zu Abbildung 3

Was jetzt kommt und wieso

**Lemma 6** (Macaulay). *Sei $\preceq$ eine gradierte lexikographische Monomialordnung und $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist ${}^aHF_I(s) = {}^aHF_{LT(I)}(s)$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$.*

*Beweis.* Zunächst definieren wir uns die Menge

$$D := \{LM(f) \mid 0 \neq f \in I_{\leq s}\} = \{LM(f_1), \ldots, LM(f_m)\}$$

für ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $f_i \in I_{\leq s}$ für alle $i \in \underline{m}$. Die zweite Gleichheit gilt aufgrund der Endlichkeit von $I_{\leq s}$. Wir betrachten außerdem die Menge

$$B := \{f_1, \ldots, f_m\}.$$

Die Elemente aus B entsprechen denen aus der Menge D.

Wir zeigen nun, dass D eine k-Basis von $(LT(I))_{\leq s}$ und B eine k-Basis von $I_{\leq s}$ ist. Dann folgt nämlich, dass die beiden Mengen die selbe Kardinalität und die erzeugten Vektorräume die selbe Dimension haben, womit das Lemma von Macaulay gezeigt ist.

Als Erstes wollen wir zeigen, dass D eine k-Basis von $(LT(I))_{\leq s}$ ist. Da D die Leitmonome der Elemente aus I enthält, ist D offensichtlich linear unabhängig. Wir zeigen also, dass das Erzeugnis von D ganz $(LT(I))_{\leq s}$ aufspannt: Dazu betrachten wir ein beliebiges $g \in (LT(I))_{\leq s}$. Es gilt $deg(g) \leq s$ und da D alle $LT(I)$ mit Grad $\leq s$ enthält, kann man schreiben $g = \sum_{i=1}^{m} h_i LT(f_i)$ mit $h_i \in k$ für alle $i \in \underline{m}$. Also ist $g \in (D)$ und damit spannt D ganz $(LT(I))_{\leq s}$ auf. Es folgt also, dass D eine k-Basis von $(LT(I))_{\leq s}$ ist.

Jetzt zeigen wir, dass B eine k-Basis von $I_{\leq s}$ ist. Die lineare Unabhängigkeit der einzelnen Elemente können wir durch einen einfachen Widerspruchsbeweis zeigen: Sei $0 = \sum_{i=1}^{m} h_i f_i$, $h_i \in k$ für alle $i \in \underline{m}$, und es existiert ein $i \in \underline{m}$ mit $h_i \neq 0$. Da $f_i \neq 0$ ist, existiert mindestens ein $i \neq j \in \underline{m}$ mit $h_j \neq 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass genau zwei Koeffizienten $\neq 0$ existieren. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{m} h_i f_i = h_i f_i + h_j f_j$$
$$\Leftrightarrow -h_j f_j = h_i f_i$$
$$\Leftrightarrow -\frac{h_j}{h_i} f_j = f_i.$$

Also gilt $LM(f_j) = LM(f_i)$, dies ist aber ein Widerspruch zur Definition der Menge B, also ist B linear unabhängig.
Wir wählen nun ein $g \in I_{\leq s}$. Dann existiert ein $i \in \underline{m}$ mit $LM(f) = LM(f_i)$, weil $f \in I_{\leq s}$, also auch $LM(f) \in D$. Wir definieren

$$f^{(1)} := f - \frac{LM(f)}{LM(f_i)} f_i$$
$$\Leftrightarrow f = f^{(1)} + \frac{LM(f)}{LM(f_i)} f_i.$$

Es gilt $LM(f) = LM(\frac{LM(f)}{LM(f_i)} f_i)$, also folgt $LM(f^{(1)}) \preceq LM(f)$, da wir die Monome unter gradierter lexikographischer Ordnung betrachten. Für $f^{(1)}$ existiert wie für f wieder ein $j \in \underline{m}$ mit $LM(f) = LM(f_j)$, da $f^{(1)} \in I_{\leq s}$. Wir definieren $f^{(2)}$ analog zu oben und es folgt $LM(f^{(2)}) \preceq LM(f^{(1)})$. Das machen wir induktiv weiter bis $f^{(l)} = 0$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Der Algorithmus endet nach endlich vielen Iterationen, da $LM(f) \succeq LM(f^{(1)}) \succeq LM(f^{(2)}) \succeq \cdots$. Also kann man g als k-Linearkombination von Elementen aus B schreiben, damit spannt B ganz $I_{\leq s}$ und B ist eine Basis von $I_{\leq s}$. □

Was wir bis jetzt wissen

# 4 Dimension von beliebigen Idealen

## 4.1 Das Hilbert-Polynom

Im folgenden sei $n \in$ N fest.

**Satz 7.** *Sei $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, dann existiert es einen eindeutigen Polynom ${}^aHP_I(t) \in \mathrm{Q}[t]$ (mit t eine variable) und $s_0 \geq 0$, sodass ${}^aHP_I(s) = {}^aHF_I(s) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s})$, $\forall s \geq s_0$. Weiterhin besitzt ${}^aHP_I(t)$ folgende Eigenschaften:*

- Der Grad von ${}^aHP_I$(t) ist der größte $d \in$ N, sodass es $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_d \leq n$ existieren mit $I \cap k[X_{i_1}, \ldots, X_{i_d}] = \emptyset$.
- Sei $d = grad({}^aHP_I(\mathrm{t}))$. Dann gilt ${}^aHP_I(\mathrm{t}) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ mit $a_k d! \in \mathrm{Z}, \forall k \in \underline{d_0}$ und $a_k d! > 0$

*Beweis.* Wir bemerken dass ${}^aHP_I$(t) eindeutig ist, da es ein Polynom ist. Es nur die Existenz nachgewiesen werden. Sei $M = \{\alpha \in \mathrm{N}_0 : |\alpha| \leq s\}$

- Für die trivialen Fällen $I = (0)$ hat man, wegen ${}^aHF_I(\mathrm{s}) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) = |M| = \binom{n+s}{s}, \forall s \in \mathrm{N}_0$.
  Oder $I = k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt ${}^aHF_I(\mathrm{s}) = dim_k\ (k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) = 0, \forall s \in \mathrm{N}_0$ und somit entspricht in diesem Fall ${}^aHP_I = 0$ (Das Nullpolynom !) Nehmen wir also an, dass $I$ nicht trivial ist. Sei G eine Gröbner-Basis von $I$ (bzgl. eine graduierte lexikographische Ordnung) und

  $$\{LM(g) : g \in G\} = \{X_\beta : \beta \in M\}$$

  wir setzen

  $$C(I) := \{\alpha \in \mathrm{N}_0 : X^\beta \nmid X^\alpha \forall \in \beta \in M\} \text{ und } C(I)_{\leq s} := C(I) \cap \{\alpha \in \mathrm{N}_0 : |\alpha| \leq s\}$$

Behauptung: Für $s \geq 0$ gilt ${}^aHF_I$(s)= $|C(I)_{\leq s}|$, $\forall s \geq 0$.
Für den Beweis benutzt man (Macaulay), dann gilt ${}^aHF_I$(s)=${}^aHF_{(LT(I))}$(s), $\forall \in s \geq 0$. Das heißt,

$$dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}) = dim_k(k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}/(LT(I))_{\leq s}).$$

Weiterhin gilt mit der Buchberger-Definition (1.2.7), dass $\{X^\beta : \beta \in M\}$ ist eine Gröebner-Basis von (LT(I)), deshalb mit Satz 1.2.8 habt man, dass die Restklassen von $X^\beta$ ($\alpha \in C(I)$) bilden eine K-Vektorraum Basis von $k[X_1, \dots, X_n]/$(LT(I)). Daraus folgt die Behauptung.

- Sei $J \subseteq \underline{n}$ und eine Funktion $\tau : J \longrightarrow \mathrm{N}_0$. Wir definieren

$$C(J, \tau) := \{\alpha \in N : \alpha_j = \tau(j), \forall \in J\}$$

Behauptung: Es existiert eine endliche Anzahl $\chi$ von Tupeln (J,$\tau$), sodass

$$C(I) = \bigcup_{(J,\tau)\in\chi}$$

*Proof.* Für $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathrm{N}_0$, definiert man

$$C(\beta) := \{\alpha \in {\mathrm{N}_0}^n : X^\beta \nmid X^\alpha\}$$

Dann haben wir $C(I) = \bigcap_{\beta \in M} C(\beta)$. Weiterhin bemerken wir, dass falls $(J, \tau), (J\prime, \tau\prime)$ zwei Tupeln, wie oben definiert bezeichnet, dann gilt

$$C(J, \tau) \cap C(J\prime, \tau\prime) = \begin{cases} \emptyset, & falls \tau(j) = \tau\prime(j) \\ C(J \cup J\prime, \tau_0), & sonst \end{cases}$$

wobei $\tau_0 : J \cup J\prime \longrightarrow \mathrm{N}_0$, $j \mapsto \tau_0(j) = \begin{cases} \tau(j), & falls j \in J \\ \tau\prime(j), & falls j \in J\prime \\ 0, & sonst \end{cases}$.

Das heißt man kann O.B.d.A annehmen, dass in

□

[Beweis]

□

# 5 Was wissen wir jetzt und was haben wir daraus gelernt?

# Literatur


[1] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis.* 15. Aufl. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 2003

[2] GRÖGER, Detlef ; MARTI, Kurt: *Grundkurs Mathematik für Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler.* 2. Aufl. Physica-Verlag, 2004

[3] COX, David; LITTLE, John; O'SHEA, Donal: *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Third Edition Springer-Verlag, 2007